UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PERMUTATIONS INDÉCOMPOSABLES ET SOUS-GROUPES D'INDICE FINI DU GROUPE LIBRE $\mathbb{F}_2$

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SÉBASTIEN LAVIGNE

MARS 2017

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES SYMBOLES ET DES UNITÉS

Id_E	Bijection identité de l'ensemble E.
$\|E\|$	Cardinalité de l'ensemble E.
$[\,]_{\simeq}$	Classe d'isomorphisme d'hypercarte (doublement) pointée étiquetée.
$:=$	Définir par.
n	Nombre naturel positif non nul.
$[n]$	Ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.
$[i, j]$	Ensemble $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$, pour $j \geq i$.
$\mathcal{H}_n$	Ensemble des hypercartes pointées à n brins.
G/H	Ensemble des classes à gauche modulo H.
$\mathcal{H}_n^d$	Ensemble des hypercartes pointées à n brins dont le degré du sommet pointé est d, où $d \in [n]$.
$\ddot{\mathcal{H}}_n$	Ensemble des hypercartes doublement pointées à n brins.
T_n	Ensemble des permutations indécomposable dans S_n.
T_E	Ensemble des permutations indécomposable dans S_E, où $E = [a, b] \subset \mathbb{N}$.
U_n	Ensemble des sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels, inclu 0.
$\mathbb{P}$	Ensemble des nombres naturels, exclu 0.
S_n	Groupe symétrique de l'ensemble $[n]$.
Γ_Θ	Graphe de la permutation $\Theta \in S_n$.
$\langle E \rangle$	Groupe engendré par E.
S_E	Groupe symétrique de l'ensemble E.
$\mathbb{F}_2$	Groupe libre à deux générateurs a et b.
$\mathrm{Orb}_G(g)$	Orbite de g sous l'action des élément du groupe G.

$\mathrm{LCC}(\Theta)$	Dernière composante connexe de $\Theta \in S_n$.
$\mathrm{FCC}(\Theta)$	Première composante connexe de $\Theta \in S_n$.
$f\|_E$	La fonction f restreinte à l'ensemble E.

RÉSUMÉ

Depuis quelques années, il y a un intérêt à vouloir trouver et construire des bijections entre l'ensemble des permutations indécomposables et les sous-groupes d'indice fini du groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$, car elles ont un intérêt pour la combinatoire. Cependant, il n'existe pas encore de méthode générale pour trouver et construire de telles bijections. Comme il est connu depuis plusieurs années qu'il existe une bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins, ce mémoire a pour but d'étudier la construction de 4 bijections entre l'ensemble des hypercartes pointées et l'ensemble des permutations indécomposables. Cette étude consiste à réécrire la preuve de ces bijections et aussi de trouver certaines propriétés qu'ont en commun ces bijections. Nous introduisons aussi le nouveau concept de couple indécomposable et donnons des propriétés de ce concept. Nous montrons ensuite que dans la construction des bijections étudiées, il y a une équivalence entre couple indécomposable, permutation indécomposable et hypercarte pointée. Nous donnons de plus un lien existant entre deux de ces bijections.

Mots clés: Hypercartes, permutation indécomposable, couple indécomposable, bijection, groupe libre

ABSTRACT

English title: Indecomposable permutations and subgroup of finite index of the free group $\mathbb{F}_2$.

Since some years, there is an interest in finding and building bijection between indecomposable permutation and subgroup of finite index of the free group on two generators $\mathbb{F}_2$, since they have uses in combinatoric. However, there is no general method to find and build such bijection. Since it is known that there exist a bijection between subgroup of finite index n of $\mathbb{F}_2$ and the pointed hypermaps of size n, this memoir has for objective to study 4 bijections between the set of pointed hypermaps and the set of indecomposable permutation. The purpose of this study is to rewrite the proof of those bijection and to find properties shared by those bijection. We also introduce the new concept of indecomposable couple and give properties of this concept. We afterward show that in the construction of the studied bijection, there is an equivalence between indecomposable couple, indecomposable permutation and pointed hypermaps. We also give a link between two of those bijection.

Keywords: Hypermaps, indecomposable permutation, indecomposable couple,

bijection, free group

INTRODUCTION

En 1949, Hall donna une formule récursive pour compter le nombre de sous-groupes d'indice fini d'un groupe libre. Plusieurs années plus tard, Comtet (1972) donna une formule pour compter le nombre de permutations indécomposables. Sur le groupe libre à deux générateurs, ces formules sont les mêmes. Il existe ainsi des bijections entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les permutations indécomposables de S_{n+1}. Autant que nous sachions, Dress et Franz (1985) furent les premiers à donner une bijection entre ces ensembles. Pour ce faire, ils présentèrent une bijection intermédiaire avec les hypercartes pointées à n brins, généralisée dans (Dress et Franz, 1987). Par la suite, Sillke (1989, 1992) trouva une bijection entre ces ensembles. Ensuite ce fut Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004) et Cori (2009) qui trouvèrent des bijections entre permutations indécomposables et hypercartes pointées. Récemment, Bacher et Reutenauer (2015) donnèrent aussi une bijection.

Dans ce mémoire nous étudierons la construction de 4 de ces 5 bijections. Cette étude consiste à réécrire la preuve de ces bijections et aussi de trouver certaines propriétés qu'elles partagent.

Nous nous intéressons d'abord à la bijection de Dress et Franz (1985). Dans ce dernier article, il n'y a aucun théorème ou lemme d'énoncé, seulement un texte continu. De plus, ils donnent très peu de preuves de ce qu'ils avancent. Par conséquent, il a fallu diviser leur article en lemmes et théorèmes. Cependant, bien que leur construction générale soit à notre avis simple, la démonstration qu'elle est une bijection et que tout est bien défini est beaucoup plus complexe que ce qui apparaît dans leur article.

Nous nous intéressons ensuite à la bijection de Sillke (1989, 1992). Il donna d'abord sa bijection sans démonstration dans un article écrit en allemand (Sillke, 1989). Cependant, la preuve de sa bijection apparaît dans sa thèse de doctorat elle aussi écrite en allemand (Sillke, 1992). Ne lisant pas l'allemand, nous nous sommes tournés vers l'article de Cori et Reutenauer (2016), écrit en anglais. Dans cet article ils donnent une preuve de la bijection de Sillke en utilisant de nouvelles idées. Dans ce dernier, les auteurs construisent la bijection en donnant des ordres totaux sur les permutations. Nous avons utilisé ce concept et converti ces ordres totaux en deux bijections ϕ et ψ qui se calculent récursivement. En prenant des exemples qui consistaient à calculer ces ordres totaux par les lemmes 6.1 et 4.1 donnés dans cet article et en étudiant l'algorithme décrit dans (Cori, 2009), nous avons pu trouver des formules récursives pour calculer les maxima de gauche à droite et minima de droite à gauche des permutations indécomposables. Ces formules furent utiles pour plusieurs des bijections étudiées dans ce mémoire. Aussi, pour construire une preuve que leur construction est bien une hypercarte, nous nous sommes inspirés du lemme 5.1.

Nous nous intéressons ensuite à la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004). Dans cet article, ils construisent une bijection de l'ensemble des hypercartes pointées vers les permutations indécomposables. Cependant, ce choix de construction donne des preuves qui sont souvent très difficiles à comprendre. Pour résoudre ce problème, nous avons plutôt pris leur construction et nous l'avons inversée. C'est-à-dire si Ossana de Mendez et Rosenstiehl démontrent que f est une bijection, nous montrons alors que f^{-1} est une bijection. Cette façon de procéder demande cependant de laisser de côté plusieurs lemmes et de les remplacer par de nouveaux. Étonnamment, ce choix de reconstruction nous permet de démontrer la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl en prenant comme gabarit la nouvelle preuve de la bijection de Dress et Franz. Par ailleurs, il existe un lien entre la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl et celle de Cori. Pour observer ce lien, il faut généraliser légèrement la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl en introduisant un paramètre a qui doit satisfaire certaines conditions. Ces conditions sont que pour tout $d \in [n]$ où $n \in \mathbb{P}$, on associe à d un unique paramètre a et ce dernier doit satisfaire $a \in [d]$. En tout début de chapitre, nous introduirons alors une fonction $g : [n] \to [n]$ qui nous assurera que ces conditions sur a soient satisfaites.

Finalement, nous nous intéressons à la bijection de Cori (2009). Il s'agit de la preuve la mieux écrite et la plus compréhensible parmi les 4 bijections étudiées. Plutôt que de construire une nouvelle preuve de cette bijection, nous donnons simplement le lien existant entre la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl et celle-ci.

Ce mémoire est divisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines propriétés des permutations et des permutations indécomposables. De plus, nous introduisons un nouveau concept, la notion de couple indécomposable. Nous donnons certaines propriétés de ce nouveau concept. Nous finissons en donnant certaines formules récursives pour calculer les maxima de gauche à droite et minima de droite à gauche d'une permutation indécomposable donnée.

Dans le second chapitre, nous rappelons la notion d'hypercarte pointée. De plus, nous démontrons la bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbf{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins.

Dans le troisième chapitre, nous donnons d'abord la bijection entre hypercartes pointées à n brins et celles à $n + 1$ brins. Nous montrons ensuite que dans la construction de Dress et Franz (1985), il y a une équivalence entre permutation indécomposable, couple indécomposable et hypercarte. Nous finissons en démontrant la bijection de Dress et Franz.

Dans le quatrième chapitre, nous montrons que dans la construction de Sillke (1989, 1992) et aussi dans Cori et Reutenauer (2016), il y a une équivalence entre permutation indécomposable, couple indécomposable et hypercarte. Nous finissons en démontrant la bijection de Sillke.

Dans le cinquième chapitre, nous commençons par fixer la fonction $g : [n] \to [n]$ décrite plus haut. Nous montrons ensuite que dans la construction de Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004), il y a une équivalence entre permutation indécomposable, couple indécomposable et hypercarte. Étant donné $d \in [n]$, nous donnons ensuite la bijection entre l'ensemble des hypercartes pointées à n brins dont le degré du sommet pointé est d et l'ensemble des permutations $\Theta \in S_n$ telles que d appartient à la dernière composante connexe de Θ. Nous finissons en démontrant la bijection principale d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl.

Dans le sixième chapitre, nous donnons le lien existant entre la bijection de Cori (2009) et celle d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004). De plus, nous en déduisons la bijection de Cori. Nous finissons en donnant la généralisation de la bijection de Cori ainsi que la fonction d'ordre associée.

CHAPITRE I

PERMUTATIONS ET RECORDS

1.1 Permutation

Soit E un ensemble fini. Une permutation est une bijection de E vers E. Dans ce document, la multiplication de permutations se fait de la droite vers la gauche, comme celle des fonctions.

Le graphe d'une permutation $\Theta \in S_E$, noté Γ_Θ, est l'ensemble des couples $(a, \Theta(a)) \in E \times E$. Soit $A = (i, j) \in \Gamma_\Theta$, on appelle i la position de A notée par $x(A)$ et on appelle j la valeur de A notée par $y(A)$. Si E est un ensemble totalement ordonné, pour toute permutation $\Theta \in S_E$, il existe dans Γ_Θ deux ordres totaux notés $\leq_x$ et $\leq_y$ qui sont définis par $(i, j) \leq_x (i', j')$ si $i \leq i'$ et $(i, j) \leq_y (i', j')$ si $j \leq j'$.

Soit $n \in \mathbb{P}$ et soit $\Theta \in S_n$. Soit $i \in [n]$ minimal tel que $\Theta([i]) = [i]$ et soit $j \in [n]$ maximal tel que $\Theta([j, n]) = [j, n]$. On appelle l'ensemble $[j, n]$ la *dernière composante connexe* de Θ, notée LCC(Θ). Pour une définition plus générale de ce concept, voir (Ossana de Mendez et Rosenstiehl, 2004). De plus, on appelle l'ensemble $[i]$ la *première composante connexe* de Θ, notée FCC(Θ).

Dans le reste de ce mémoire, sauf indication contraire, n sera toujours un nombre naturel positif non nul.

On appelle *forme cyclique* de Θ, chacune des écritures en cycle de Θ incluant les cycles de longueur 1.

1.2 Permutations et couples indécomposables

Soit E un ensemble fini de cardinalité n. On appelle *fonction d'ordre* une bijection $\phi : [n] \to E$.

Une permutation $\Theta \in S_n$ est dite *indécomposable* ou *connexe* si $\Theta([i]) \neq [i]$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Nous notons l'ensemble des permutations indécomposables dans S_n par T_n.

De cette définition, une permutation $\Theta \in S_n$ est indécomposable si et seulement si pour tout $i \in [n-1]$ il existe $j \leq i$ tel que $\Theta(j) > i$. De plus, une permutation $\Theta \in S_n$ est indécomposable si et seulement si $\text{LCC}(\Theta) = \text{FCC}(\Theta) = [n]$.

Soit E un ensemble fini de cardinalité n et $\phi : [n] \to E$ une fonction d'ordre. $\Theta \in S_E$ est dite ϕ-indécomposable, si $\phi^{-1}\Theta\phi \in S_n$ est indécomposable. Dans le cas particulier où $E = [a, b] \subset \mathbb{N}$ est un ensemble fini, nous prenons l'unique fonction d'ordre croissante ϕ définie par $\phi(i) = \min(E) + i - 1$ et nous dirons que $\Theta \in S_E$ est *indécomposable dans* S_E si $\Theta([\min(E), i]) \neq [\min(E), i]$ pour tout $i \in E \setminus \{\max(E)\}$. Nous notons l'ensemble des permutations indécomposables dans S_E par T_E.

Sauf indication contraire, dans la suite de ce mémoire, si nous disons que Θ est indécomposable, alors nous faisons référence à $\Theta \in S_n$ indécomposable.

Définition 1.2.1 Soient $\sigma, \Theta \in S_n$. Le couple (σ, Θ) est dit *décomposable* s'il existe $i \leq n-1$ tel que $\sigma([i]) = \Theta([i]) = [i]$. Autrement, on dit qu'il est *indécomposable.*

Soit E un ensemble fini de cardinalité n et $\phi : [n] \to E$ une bijection, nous noterons le couple $(\phi^{-1}\sigma\phi, \phi^{-1}\Theta\phi)$ par $\phi^{-1}(\sigma, \Theta)\phi$, où σ, Θ sont défnies comme dans la définition 1.2.1.

Nous disons que le couple (σ, Θ) *agit transitivement sur* E, si pour tout $a, b \in E$, il existe un élément α dans le groupe engendré par $\{\sigma, \Theta\}$ tel que $\alpha(a) = b$.

Remarque 1.2.2 Il est important de noter que si un couple $(\sigma, \Theta) \in S_n \times S_n$ est indécomposable, cela n'implique pas que σ ou Θ ou les deux soient indécomposables. Par exemple, le couple ($(1,3)(2)(4), (1)(2)(3,4)$) est indécomposable, mais pas les permutations qui le composent.

Proposition 1.2.3 *Soient $\sigma, \Theta \in S_n$, soit E un ensemble fini de cardinalité n. Nous avons les propriétés suivantes:*

(i) si σ ou Θ est indécomposable, alors (σ, Θ) est indécomposable;

(ii) le couple (σ, σ) est indécomposable si et seulement si σ est indécomposable;

(iii) le couple (σ, Θ) est indécomposable si et seulement si (Θ, σ) est indécomposable;

(iv) le couple (σ, Θ) est indécomposable si et seulement si (σ^{-1}, Θ) est indécomposable;

(v) si $LCC(\Theta) \cap FCC(\sigma) \neq \emptyset$, alors le couple (σ, Θ) est indécomposable;

(vi) si (σ, Θ) agit transitivement sur E, alors pour toute bijection $\phi : [n] \to E$, on a que $\phi^{-1}(\sigma, \Theta)\phi$ est indécomposable;

(vii) il existe $i < n$ tel que $(\sigma, \Theta)|_{[i]} \in S_i \times S_i$ si et seulement si (σ, Θ) est décomposable.

Démonstration.

(i) Découle directement de la définition de couple indécomposable et de permutation indécomposable.

(ii) Découle de (i).

(iii) Découle directement de la définition.

(iv) Supposons que le couple (σ, Θ) est indécomposable et supposons par l'absurde que (σ^{-1}, Θ) est décomposable. Il existe alors $i < n$ tel que $\sigma^{-1}([i]) = \Theta([i]) = [i]$. Donc, $\sigma([i]) = \Theta([i]) = [i]$ et le couple (σ, Θ) est décomposable, ce qui est une contradiction. Donc, si le couple (σ, Θ) est indécomposable on a que (σ^{-1}, Θ) est indécomposable. De façon analogue, nous démontrons la réciproque.

(v) Si $\mathrm{LCC}(\Theta) = [n]$ ou $\mathrm{FCC}(\sigma) = [n]$ nous avons fini par (i). Supposons alors que $\mathrm{LCC}(\Theta), \mathrm{FCC}(\sigma) \neq [n]$. Soit $i \in [2, n]$, $j \in [n-1]$ tels que $[i, n] = \mathrm{LCC}(\Theta)$ et $[j] = \mathrm{FCC}(\sigma)$. Si $\mathrm{LCC}(\Theta) \cap \mathrm{FCC}(\sigma) \neq \emptyset$, alors $i \leq j$. Comme $[i, n] = \mathrm{LCC}(\Theta)$, s'il existe $p \in [n-1]$ tel que $\Theta([p]) = [p]$, alors $p < i \leq j$. Comme j est le nombre minimal tel que $\sigma([j]) = [j]$, il n'existe pas $k \in [n-1]$ tel que $\sigma([k]) = \Theta([k]) = [k]$. D'où le couple (σ, Θ) est indécomposable.

(vi) Si l'on suppose qu'il existe une bijection $\phi : [n] \to E$ telle que $\phi^{-1}(\sigma, \Theta)\phi$ est décomposable, il existe alors $i \leq n-1$ tel que $\sigma(\phi([i])) = \Theta(\phi([i])) = \phi([i])$. Par conséquent, pour tout $j \geq i+1$, il n'existe pas $\alpha \in \langle \sigma, \Theta \rangle$ tel que $\alpha(\phi(j)) = \phi(i)$. D'où $\langle \sigma, \Theta \rangle$ n'agit pas transitivement sur E.

(vii) Il existe $i < n$ tel que $\sigma|_{[i]}, \Theta|_{[i]} \in S_i$ si et seulement si $[i]$ est fixé à la fois par σ et Θ. Il s'agit donc d'une reformulation de la définition de couple décomposable. □

Remarque 1.2.4 La réciproque de (vi) est fausse en général. Par exemple il suffit de prendre ($(1,5)(2,3,4),(1,5)(4,3,2)$). De plus, la réciproque de (v) est fausse en général, il suffit de prendre ($(1,2)(3)(4,5),(1)(2,3,4)(5)$).

Par les énoncés (vii) et (vi) de la proposition précédente, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.5 *Soient E un ensemble fini de cardinalité n et $\sigma,\Theta \in S_E$. S'il existe une bijection $\phi : [n] \to E$ et $i < n$ tel que $\phi^{-1}(\sigma,\Theta)\phi|_{[i]} \in S_i \times S_i$, alors (σ,Θ) n'agit pas transitivement sur E.*

1.3 Maxima et minima

Soit $\Theta \in S_n$. Soient $y \in [n]$ et $x \in [n]$ tels que $\Theta(x) = y$. $(x,y) \in \Gamma_\Theta$ est un *maximum de gauche à droite* si pour tout $1 \leq i \leq x$, on a $\Theta(i) \leq y$.

Soit $\Theta \in S_n$. Soient $y \in [n]$ et $x \in [n]$ tels que $\Theta(x) = y$. $(x,y) \in \Gamma_\Theta$ est un *minimum de droite à gauche* si pour tout $x \leq i \leq n$, on a $\Theta(i) \geq y$.

Si $(x,y) \in \Gamma_\Theta$ est un maximum de gauche à droite (respectivement (resp.) minimum de droite à gauche) de Θ, nous appelons x la *position* du maximum de gauche à droite (resp. du minimum de droite à gauche) et y sa *valeur*.

Soit $\Theta \in S_n$. Il est bien connu que si (x,y) est un maximum de gauche à droite (resp. un minimum de droite à gauche) de Θ, alors (y,x) est un minimum de droite à gauche (resp. un maximum de gauche à droite) de Θ^{-1}.

Proposition 1.3.6 *Soit $\Theta \in S_n$. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_k$ les positions des maxima de gauche à droite de Θ telles que $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k$ et soient $m_1, m_2, \ldots, m_l$ les positions des minima de droite à gauche de Θ telles que $n = m_1 > m_2 > \cdots > m_l$. Alors, pour tout $i \leq k-1$, on a $\Theta(M_i) \geq M_{i+1} - 1$ et pour tout $j \leq l-1$, on a $\Theta(m_j) \leq m_{j+1} + 1$.*

Démonstration. Soit $i \leq k-1$. Par définition de maximum de gauche à droite, comme M_{i+1} est le maximum suivant de M_i, on a pour tout $x \in [M_{i+1}-1]$ que $\Theta(x) \leq \Theta(M_i)$. Par conséquent, si l'on suppose que $\Theta(M_i) \leq M_{i+1}-2$, on a alors que $\Theta([M_{i+1}-1]) \subseteq [M_{i+1}-2]$, ce qui est absurde. Donc, $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}-1$. La preuve pour les minima est similaire. □

Corollaire 1.3.7 *Avec les hypothèses de la proposition précédente, nous avons les équivalences suivantes:*

(i) Θ *est indécomposable;*

(ii) pour tout $i \leq k-1$, $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}$;

(iii) pour tout $i \leq l-1$, $\Theta(m_i) \leq m_{i+1}$.

Démonstration. Démontrons que (i) est équivalent à (ii). Supposons que Θ est indécomposable. Par la proposition précédente, pour tout $i \leq k-1$, on a $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}-1$. De plus, pour tout $x \in [M_{i+1}-1]$, on a que $\Theta(x) \leq \Theta(M_i)$. Par conséquent, si l'on suppose par l'absurde qu'il existe $i \leq k-1$ tel que $\Theta(M_i) = M_{i+1}-1$, on a alors $\Theta([M_{i+1}-1]) = [M_{i+1}-1]$. Donc Θ est décomposable, une contradiction.

Réciproquement, supposons que Θ est décomposable, il existe alors $p \in [n-1]$ tel que $\Theta([p]) = [p]$. Par conséquent, $p+1$ est la position d'un maximum de gauche à droite, disons $p+1 = M_j$ pour un certain $2 \leq j \leq k$. De plus, $M_{j-1} = \Theta^{-1}(p)$ est aussi la position d'un maximum de gauche à droite. D'où il existe $i = j-1 \leq k-1$ tel $\Theta(M_i) = M_{i+1}-1$. Ce qui démontre que si pour tout $i \leq k-1$ on a $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}$, alors Θ est indécomposable.

La preuve que (i) équivalent à (iii) est similaire. □

1.4 Récurrence

Il est possible de calculer récursivement les maxima de gauche à droite et minima de droite à gauche d'une permutation indécomposable donnée. Ces formules nous serons utiles pour construires récursivement des fonctions d'ordre pour démontrer la surjectivité des bijections présentées dans ce mémoire.

Proposition 1.4.8 *Soit $\Theta \in T_n$. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_k$ les positions des maxima de gauche à droite de Θ telles que $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k$ et soient $m_1, m_2, \ldots, m_l$ les positions des minima de droite à gauche de Θ telles que $n = m_1 > m_2 > \cdots > m_l$. En posant, $M_0 = \Theta^{-1}(1)$, $m_0 = \Theta^{-1}(n)$, $m_{l+1} = 1$ et $M_{k+1} = n$, on a alors que:*

(i) pour tout $i \in [k]$ et pour tout $j \in [M_i + 1, M_{i+1}]$, on a:

$$M_i = \Theta^{-1}\Big(\max\big([j,n] \setminus \Theta([j,n])\big)\Big).$$

(ii) Pour tout $i \in [k]$ et pour tout $j \in [\Theta(M_{i-1}), \Theta(M_i) - 1]$, on a:

$$M_i = \min\big([j] \setminus \Theta^{-1}([j])\big).$$

(iii) Pour tout $i \in [l]$ et pour tout $j \in [m_{i+1}, m_i - 1]$, on a:

$$m_i = \Theta^{-1}\Big(\min\big([j] \setminus \Theta([j])\big)\Big).$$

(iv) Pour tout $i \in [l]$ et pour tout $j \in [\Theta(m_j) + 1, \Theta(m_{j-1})]$, on a:

$$m_i = \max\big([j,n] \setminus \Theta^{-1}([j,n])\big).$$

Démonstration.

(i) Soit $i \leq k-1$ et soit $j \in [M_i+1, M_{i+1}]$. Posons $E_j = \max\Big([j,n] \setminus \Theta([j,n])\Big)$. Comme $\Theta([j,n]) \neq [j,n]$, car Θ est indécomposable, E_j existe. De plus, par le corollaire 1.3.7, nous avons que $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}$ et donc $\Theta(M_i) \in [j,n]$.

Notons que $\Theta(M_i) \notin \Theta([j,n])$. En effet, comme $j \geq M_i + 1 > M_i$, on a que $M_i \notin [j,n]$ et donc $\Theta(M_i) \notin \Theta([j,n])$. Ainsi $\Theta(M_i) \in [j,n] \setminus \Theta([j,n])$.

Montrons que $\Theta(M_i) = E_j$. Comme $\Theta(M_i) \in [j,n] \setminus \Theta([j,n])$, on a alors que $\Theta(M_i) \leq E_j$, car E_j est le maximum de l'ensemble $[j,n] \setminus \Theta([j,n])$. Par ailleurs, on a que $\Theta^{-1}(E_j) < M_{i+1}$. En effet, $E_j \notin \Theta([M_{i+1},n]) \subseteq \Theta([j,n])$. Cela nous donne donc que $\Theta^{-1}(E_j) \notin [M_{i+1},n]$. Donc $\Theta^{-1}(E_j) < M_{i+1}$. Comme M_i est la position d'un maximum de gauche à droite de Θ et M_{i+1} est le suivant, on a pour tout $x < M_{i+1}$ que $\Theta(x) \leq \Theta(M_i)$. Par conséquent, pour $x = \Theta^{-1}(E_j) < M_{i+1}$, on a $E_j \leq \Theta(M_i)$. Donc, $E_j = \Theta(M_i)$.

Pour $i = k$ et pour tout $j \in [M_k+1, n]$, on a:

$$M_k = \Theta^{-1}(n) = \Theta^{-1}\Big(\max\Big([j,n] \setminus \Theta([j,n])\Big)\Big),$$

car $\Theta(M_k) = n \notin \Theta([j,n])$.

(iii) Similaire à (i).

(ii) Pour tout $i \leq k-1$, (M_i, V_i) est un maximum de gauche à droite de Θ et (M_{i+1}, V_{i+1}) est le maximum de gauche à droite de Θ suivant. Par conséquent, (V_{i+1}, M_{i+1}) est un minimum de droite à gauche de Θ^{-1} et (V_i, M_i) est le minimum de droite à gauche de Θ^{-1} suivant (lu de droite à gauche), car $V_i < V_{i+1}$ et $M_i < M_{i+1}$. Donc, $V_1 < V_2 < \cdots < V_k = \Theta(M_k) = n$ sont les positions des minima de droite à gauche de Θ^{-1} où $V_i = \Theta(M_i)$, pour tout $i \in [k]$. Posons $V_0 = 1$. Par (iii), on a alors pour tout $i \in [k]$ et pour tout $j \in [V_{i-1}, V_i - 1]$ que:

$$V_i = \Theta\Big(\min([j] \setminus \Theta^{-1}([j]))\Big).$$

Puisque $M_0 = \Theta^{-1}(1)$ et $M_i = \Theta^{-1}(V_i)$ pour tout $i \in [k]$, pour tout $j \in [\Theta(M_{i-1}), \Theta(M_i) - 1]$, on a que:

$$M_i = \min([j] \setminus \Theta^{-1}([j])).$$

(iv) Similaire à (ii). □

Proposition 1.4.9 *Avec les hypothèses de la proposition précédente nous avons que:*

(i) $x \in [n]$ *est la position d'un maximum de gauche à droite de* Θ *si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

(1) il existe $p \in \{M_2, M_3, \ldots, M_k, n\}$ *tel que:*

$$x = \Theta^{-1}\Big(\max([p, n] \setminus \Theta([p, n]))\Big);$$

(2) il existe $p \in \{1, \Theta(M_1), \Theta(M_2), \ldots, \Theta(M_{k-1})\}$ *tel que:*

$$x = \min([p] \setminus \Theta^{-1}([p])).$$

(ii) $x \in [n]$ *est la position d'un minimum de droite à gauche de* Θ *si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

(1) il existe $p \in \{m_2, m_3, \ldots, m_l, 1\}$ *tel que:*

$$x = \Theta^{-1}\Big(\min([p] \setminus \Theta([p]))\Big);$$

(2) il existe $p \in \{n, \Theta(m_1), \Theta(m_2), \ldots, \Theta(m_{l-1})\}$ *tel que:*

$$x = \max([p, n] \setminus \Theta^{-1}([p, n])).$$

Démonstration.

(i) Si x est la position d'un maximum de gauche à droite, par la proposition 1.4.8 les deux conditions sont satisfaites. Réciproquement, il y a deux cas à considérer.

(1) Posons $E_j = \Theta^{-1}\max\big([j,n] \setminus \Theta([j,n])\big)$, qui existe car $\Theta([j,n]) \neq [j,n]$. Supposons qu'il existe $p \in \{M_2, \ldots, M_k, n\}$ tel que $x = E_p$. Si $p = n$, alors $x = M_k$. Si $p \neq n$, alors $p = M_i$, pour un certain $2 \leq i \leq k$. Or, par la proposition 1.4.8 (i), on a que $M_{i-1} = E_{M_i} = E_p$. Donc, $x = M_{i-1}$ et x est la position d'un maximum de gauche à droite de Θ.

(2) Posons $e_j = \Theta^{-1}\min\big([j] \setminus \Theta^{-1}([j])\big)$, qui existe car $\Theta^{-1}([j]) \neq [j]$. Supposons qu'il existe $p \in \{1, \Theta(M_1), \ldots, \Theta(M_{k-1})\}$ tel que $x = e_p$. Si $p = 1$, alors $x = 1 = M_1$. Si $p \neq 1$, alors $p = \Theta(M_i)$, pour un certain $1 \leq i \leq k-1$. Par la proposition 1.4.8 (ii), on conclut que $x = M_{i+1}$, car $M_{i+1} = e_{\Theta(M_i)} = e_p$.

(ii) La preuve est similaire à (i). □

Les deux prochains lemmes, bien que simples, nous seront utiles pour pouvoir définir récursivement les fonctions d'ordre pour les bijections présentées dans ce mémoire.

Lemme 1.4.10 *Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Soient $\Theta \in S_E$, $\phi : [n] \to E$ une bijection et soit $I \subseteq [n]$. Alors:*

$$\phi^{-1}\Theta\phi(I) \cap I = \phi^{-1}\big(\Theta\phi(I) \cap \phi(I)\big).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} j \in \phi^{-1}\Theta\phi(I) \cap I &\iff j \in \phi^{-1}\Theta\phi(I) \text{ et } j \in I \\ &\iff \phi(j) \in \Theta\phi(I) \text{ et } \phi(j) \in \phi(I) \\ &\iff \phi(j) \in \Theta\phi(I) \cap \phi(I) \\ &\iff j \in \phi^{-1}\big(\Theta\phi(I) \cap \phi(I)\big). \end{aligned}$$ □

Lemme 1.4.11 *Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Soient $\Theta \in S_E$, $\phi, \psi : [n] \to E$ des bijections et $I \subseteq [n]$. Alors:*

$$I \setminus \big(\psi^{-1} \circ \phi(I)\big) = \psi^{-1}\big(\psi(I) \setminus \phi(I)\big).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} j \in I \setminus \big(\psi^{-1} \circ \phi(I)\big) &\iff j \in I \text{ et } j \notin \psi^{-1} \circ \phi(I) \\ &\iff \psi(j) \in \psi(I) \text{ et } \psi(j) \notin \phi(I) \\ &\iff \psi(j) \in \psi(I) \setminus \phi(I) \\ &\iff j \in \psi^{-1}\big(\psi(I) \setminus \phi(I)\big). \end{aligned}$$ □

CHAPITRE II

HYPERCARTES ET SOUS-GROUPES DE $\mathbb{F}_2$

Les hypercartes pointées et doublement pointées jouent un rôle important dans la bijection entre les permutations indécomposables dans S_{n+1} et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$. Dans ce chapitre, nous démontrerons la bijection entre les hypercartes pointées à n brins et les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$. Pour ce faire, nous devrons introduire une hypercarte construite à partir de l'action des générateurs a, b de $\mathbb{F}_2$ sur $\mathbb{F}_2/H$.

2.1 Action de groupe et sous-groupes de $\mathbb{F}_2$

Soit G un groupe. L'*indice* d'un sous-groupe H de G est la cardinalité de l'ensemble des classes à gauche de G modulo H. Nous noterons U_n l'ensemble des sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$, où $n \in \mathbb{P}$.

Soit E un ensemble sur lequel G agit à gauche et soit $e \in E$. Dans ce mémoire, nous noterons l'orbite de e sous l'action des éléments de G par $\mathrm{Orb}_G(e)$, définie par:

$$\mathrm{Orb}_G(e) = \{d \in E \mid \exists g \in G \text{ tel que } d = g \cdot e\}.$$

Pour tout $g \in G$ l'action de g sur E définit une permutation des éléments de E. Cette permutation est $\theta : E \to E$ définie par $\theta(e) = g \cdot e$. En particulier, si $E = G/H$ où H est un sous-groupe d'indice fini de G, l'action de $g \in G$ définit une permutation de G/H. Cette action est $\theta : G/H \to G/H$ définie par $\theta(g'H) = (gg')H$ et est bien définie. Ainsi, pour $G = \mathbb{F}_2$ et H un sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{F}_2$, comme $\{a, b\}$ est une base de $\mathbb{F}_2$, a et b définissent des permutations de $\mathbb{F}_2/H$ que nous noterons α et β respectivement où $\alpha(gH) = (ag)H$ et $\beta(gH) = (bg)H$.

Par ailleurs, étant donné un sous-groupe H de $\mathbb{F}_2$, il est possible d'écrire $H = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid g \cdot H = H\}$. En effet, si $g \in H$, alors $g \cdot H = H$ et si $g \cdot H = H$, alors $g \in H$.

On dit qu'un groupe G *agit transitivement sur un ensemble* E, si pour tout $c, d \in E$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot c = d$.

2.2 Hypercartes

Soit (E, σ, Θ, A) un quadruplet où E est un ensemble fini, $A \in E$ un élément distingué et $\sigma, \Theta \in S_E$ sont telles que le groupe engendré par $\{\sigma, \theta\}$ agit transitivement sur E. Un tel quadruplet est appelé une *hypercarte pointée étiquetée.* Deux hypercartes pointées étiquetées (E, σ, Θ, A) et $(E', \sigma', \Theta', A')$ sont isomorphes s'il existe une bijection $\phi : E \to E'$ telle que $\phi(A) = A'$, $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$ et $\Theta = \phi^{-1}\Theta'\phi$. On appelle *hypercarte pointée* une classe d'isomorphisme d'hypercartes pointées étiquetées.

Soit $(E, \sigma, \Theta, A, B)$ un quintuplet où (E, σ, Θ, A) forme une hypercarte pointée étiquetée et $B \in E \setminus \{A\}$ est un second élément distingué tel que $\sigma(B) = A$ et $\Theta(A) = B$. Un tel quintuplet est appelé une *hypercarte doublement pointée étiquetée.* Deux hypercartes doublement pointées étiquetées $(E, \sigma, \Theta, A, B)$ et $(E', \sigma', \Theta', A', B')$ sont isomorphes s'il existe une bijection $\phi : E \to E'$ telle que $\phi(A) = A'$ et $\phi(B) = B'$, $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$ et $\Theta = \phi^{-1}\Theta'\phi$. On appelle *hypercarte doublement pointée* une classe d'isomorphisme d'hypercartes doublement pointées étiquetées.

Remarquons que l'équivalence de quadruplets (resp. de quintuplets) est une relation d'équivalence. En effet, la réflexivité découle de la fonction identité, la symétrie découle du fait qu'une bijection est inversible et la transitivité découle de la composition de fonction.

Pour les hypercartes pointées et doublement pointées (étiquetées ou pas), les éléments de E sont appelés *brins*. Les *sommets* et les *segments* sont les orbites de σ et Θ respectivement. On appelle *degré d'un sommet* (resp. *d'un segment*) la cardinalité de l'orbite correspondante.

Pour les hypercartes pointées (étiquetées ou pas), nous appellerons *degré du sommet pointé* la cardinalité de $\mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)$, où A est l'élément distingué.

Étant donnée une hypercarte pointée étiquetée R, nous noterons $[R]_{\simeq}$ la classe d'isomorphisme de R. Nous noterons $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des hypercartes pointées à n brins et $\mathcal{H}_n^d$ l'ensemble des hypercartes pointées à n brins dont le degré du sommet pointé est d, où $d \in [n]$. Finalement, nous noterons $\ddot{\mathcal{H}}_n$ l'ensemble des hypercartes doublement pointées à n brins.

2.3 Bijection entre hypercartes et sous-groupes

Rappelons que pour un sous-groupe H d'indice fini de $\mathbb{F}_2$, a et b définissent des permutations de $\mathbb{F}_2/H$ que nous avons notées α et β respectivement. Comme a et b forment une base de $\mathbb{F}_2$, le groupe engendré par $\{\alpha, \beta\}$ agit transitivement sur $\mathbb{F}_2/H$. Donc, on obtient une hypercarte pointée en prenant la classe d'isomorphismes de $(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)$. La preuve de la bijection entre les hypercartes pointées et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$ repose sur deux lemmes.

Lemme 2.3.12 *Soit (E, σ, Θ, A) le représentant d'une hypercarte pointée à n brins. Soit $\varphi : \mathbb{F}_2 \to S_E$ l'homomorphisme de groupe défini par $\varphi(a) = \sigma$ et $\varphi(b) = \Theta$. Alors $H = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}$ est un sous-groupe d'indice fini de*

$\mathbb{F}_2$ dont l'indice est $|E|$.

Démonstration. Remarquons que φ existe car $\{a, b\}$ est une base de $\mathbb{F}_2$. Par ailleurs, H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_2$. En effet, $1 \in H$, car $\varphi(1)(A) = \mathrm{Id}_E(A) = A$. Si $g, h \in H$, alors $gh \in H$, car $\varphi(gh)(A) = \varphi(g)\varphi(h)(A) = A$. Finalement $g^{-1} \in H$, car si $\varphi(g)(A) = \gamma(A) = A$, pour $\gamma \in S_E$, alors $\varphi(g^{-1})(A) = \gamma^{-1}(A) = A$.

Soit $\phi : \mathbb{F}_2/H \to E$ définie par $\phi(gH) = \varphi(g)(A)$, montrons que ϕ est bien définie et qu'elle est une bijection de $\mathbb{F}_2/H$ dans E. Soient $gH, g'H \in \mathbb{F}_2/H$ tels que $gH = g'H$, montrons que $\varphi(g)(A) = \varphi(g')(A)$. On a:

$$\begin{aligned}
gH = g'H &\iff H = g^{-1}g'H \\
&\iff g^{-1}g' \in H \\
&\iff \varphi(g^{-1}g')(A) = A && \text{(Définition de } H\text{)} \\
&\iff \varphi(g)^{-1}\varphi(g')(A) = A && (\varphi \text{ homomorphisme de groupe}) \\
&\iff \varphi(g')(A) = \varphi(g)(A).
\end{aligned}$$

Comme voulu, donc ϕ est bien définie. Montrons maintenant que ϕ est une bijection de $\mathbb{F}_2/H$ dans E. Soient $g, g' \in \mathbb{F}_2$. Par les équivalences ci-dessus, si $\varphi(g')(A) = \varphi(g)(A)$, alors $gH = g'H$ et donc ϕ est injective. De plus, comme $\varphi(g) \in \langle \sigma, \Theta \rangle$ pour tout $g \in \mathbb{F}_2$ et par hypothèse on a que $\langle \sigma, \Theta \rangle$ agit transitivement sur E, on a alors que pour tout $c \in E$, il existe $g \in \mathbb{F}_2$ tel que $\phi(g) = \varphi(g)(A) = c$. Donc, ϕ est surjective. D'où ϕ est une bijection de $\mathbb{F}_2/H$ dans E. Ce qui démontre que H est sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{F}_2$ et son indice est $|E|$. $\square$

Lemme 2.3.13 *Soit (E, σ, Θ, A) le représentant d'une hypercarte pointée à n brins. Soit $\varphi : \mathbb{F}_2 \to S_E$ l'homomorphisme de groupe défini par $\varphi(a) = \sigma$ et $\varphi(b) = \Theta$. Soit $H = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}$. Alors $[(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq} = [(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq}$.*

Démonstration. Soit $\phi : \mathbb{F}_2/H \to E$ définie par $\phi(gH) = \varphi(g)(A)$. Par la preuve du lemme précédent, ϕ est une bijection. Pour conclure, il suffit de montrer que ϕ est un isomorphisme entre (E, σ, Θ, A) et $(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)$. Par définition de ϕ, on a que $\phi(H) = \varphi(e)(A) = A$. Soit $c \in E$, comme ϕ est une bijection de $\mathbb{F}_2/H$ dans E, il existe $gH \in \mathbb{F}_2/H$ tel que $\phi(gH) = \varphi(g)(A) = c$. Montrons que $\sigma(c) = \phi\alpha\phi^{-1}(c)$. On a:

$$\begin{aligned}
\phi\alpha\phi^{-1}(c) &= \phi\alpha(gH) \\
&= \phi((ag)H) && \text{(Définition de } \alpha) \\
&= \varphi(a)\varphi(g)(A) \\
&= \sigma(c).
\end{aligned}$$

Comme voulu. De même, en utilisant $\beta(gH) = (bg)H$ et $\varphi(b) = \Theta$, on montre que $\Theta = \phi\beta\phi^{-1}$. Donc, ϕ est un isomorphisme entre (E, σ, Θ, A) et $(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)$ et ainsi $[(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq} = [(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq}$. □

De ces lemmes, nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.3.14 *Il existe une bijection entre l'ensemble des hypercartes pointées à n brins et l'ensemble des sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$.*

Démonstration. Soit $f : \mathcal{H}_n \to \mathrm{U}_n$ définie par:

$$f(\ [(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq}\ ) = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\},$$

où $\varphi : \mathbb{F}_2 \to S_E$ est l'homomorphisme de groupe défini par $\varphi(a) = \sigma$ et $\varphi(b) = \Theta$. Par le lemme 2.3.12, $\{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{F}_2$. Comme une hypercarte est une classe d'isomorphisme, nous devons vérifier que f est bien définie.

Soient $H_1 = (E, \sigma, \Theta, A)$ et $H_2 = (E', \sigma', \Theta', A')$ deux représentants d'une même hypercarte pointée. Il faut vérifier que H_1 et H_2 ont la même image sous f. Soit $\phi : E \to E'$ une bijection telle que $\phi(A) = A'$, $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$ et $\Theta = \phi^{-1}\Theta'\phi$. Soit $\varphi' : \mathbb{F}_2 \to S_{E'}$ l'homomorphisme de groupe défini par $\varphi'(a) = \sigma'$ et $\varphi'(b) = \Theta'$. En notant que $\varphi(g) = \phi^{-1}\varphi'(g)\phi$ on a:

$$\begin{aligned}\{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\} &= \left\{g \in \mathbb{F}_2 \mid \phi^{-1}\varphi'(g)\phi(A) = A\right\} \\ &= \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi'(g)(B) = B\}.\end{aligned}$$

De ce calcul, on a que $f(H_1) = f(H_2)$ et donc f est bien définie.

Soit $f' : \mathrm{U}_n \to \mathcal{H}_n$ définie par $f'(H) = [(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq}$. Montrons que f' est la fonction inverse de f. Soit $H \in \mathrm{U}_n$. On a:

$$\begin{aligned}(f \circ f')(H) &= f(\ [(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq}\ ) \\ &= \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \psi(g)(H) = H\},\end{aligned}$$

où $\psi : \mathbb{F}_2 \to S_{\mathbb{F}_2/H}$ est définie par $\psi(a) = \alpha$ et $\psi(b) = \beta$. Par définition de α et β, on a $\psi(g)(H) = g \cdot H$ et donc:

$$\begin{aligned}(f \circ f')(H) &= \{g \in \mathbb{F}_2 \mid g \cdot H = H\} \\ &= H.\end{aligned}$$

Donc, $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathrm{U}_n}$. De plus, on a $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_n}$. En effet, soit $[(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq} \in \mathcal{H}_n$ et rappelons que l'on a défini $\varphi : \mathbb{F}_2 \to S_E$ par $\varphi(a) = \sigma$ et $\varphi(b) = \Theta$. On a:

$$(f' \circ f)(\ [(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq}\ ) = f'(\{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}).$$

En posant $H = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}$, on a:

$$f'(\{g \in \mathbb{F}_2 \mid \varphi(g)(A) = A\}) = [(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq}.$$

Mais par le lemme 2.3.13, on a que $[(\mathbb{F}_2/H, \alpha, \beta, H)]_{\simeq} = [(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq}$. On a alors que $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_n}$. D'où f est une bijection entre l'ensemble des hypercartes pointées à n brins et l'ensemble des sous-groupes d'indices n de $\mathbb{F}_2$. $\square$

CHAPITRE III

BIJECTION DE DRESS ET FRANZ

Dans leur article, Dress et Franz (1985) construisent en 3 étapes une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans S_{n+1} vers l'ensemble des sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$. Ils démontrent d'abord la bijection entre ces derniers et les hypercartes pointées à n brins. Ils utilisent ensuite les faits, sans démonstrations, que U_n est en bijection avec $\mathrm{U}_{n+1}' := \{H \in \mathrm{U}_{n+1} \mid a \in H\}$ et que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est 1, c'est-à-dire $\sigma(A) = A$. Rappelons que ce dernier ensemble se note $\mathcal{H}_{n+1}^1$. Finalement, ils construisent une bijection entre $\mathcal{H}_{n+1}^1$ et T_{n+1} pour conclure que U_n est en bijection avec T_{n+1}.

Dans ce chapitre, pour démontrer que U_n est en bijection avec T_{n+1} nous allons suivre la démarche utilisée par Dress et Franz (1985). Cependant, comme il est possible de démontrer directement que U_n est en bijection avec $\mathcal{H}_{n+1}^1$, nous n'allons pas démontrer la bijection entre U_n et U_{n+1}'.

3.1 Bijection entre hypercartes pointées

Par le théorème 2.3.14, nous savons que U_n est en bijection avec $\mathcal{H}_n$. Nous devons donc montrer qu'il existe une bijection entre les hypercartes pointées à n brins vers les hypercartes pointées à $n+1$ brins dont le degré du sommet pointé est 1.

Lemme 3.1.15 *Soit $f : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}^1_{n+1}$ définie par:*

$$f(\ [(E,\sigma,\Theta,A)]_{\simeq}\ ) = [(E \cup \{B\}, \sigma_1, \Theta_1, B)]_{\simeq},$$

où $B \notin E$ et σ_1 et Θ_1 sont définies comme suit:

$$\sigma_1(g) = \begin{cases} B & \text{si } g = B, \\ \sigma(g) & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$\Theta_1(g) = \begin{cases} A & \text{si } g = B, \\ B & \text{si } \Theta(g) = A, \\ \Theta(g) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

C'est-à-dire que nous obtenons Θ_1 en insérant B entre A et $\Theta^{-1}(A)$ dans le cycle de Θ contenant A. Alors, f est bien définie.

Démonstration. Soient $H_1 = (E,\sigma,\Theta,A)$ et $H_2 = (E',\sigma',\Theta',A')$ deux représentants d'une hypercarte pointée à n brins. Soient $B \notin E$ et $B' \notin E'$. Montrons que $H_1' = (E \cup B, \sigma_1, \Theta_1, B)$ et $H_2' = (E' \cup B', \sigma_1', \Theta_1', B')$ sont isomorphes.
Comme H_1 et H_2 sont des représentants d'une même hypercarte pointée, il existe une bijection $\phi : E \to E'$ telle que $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$, $\Theta = \phi^{-1}\Theta'\phi$ et $\phi(A) = A'$. Soit $\Phi : E \cup \{B\} \to E' \cup \{B'\}$ définie par:

$$\Phi(g) = \begin{cases} B' & \text{si } g = B, \\ \phi(g) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, H_1' et H_2' sont isomorphes par Φ. En effet, on a $\Phi(B) = B'$ et par construction de σ_1, on a $\Phi^{-1}\sigma_1'\Phi(B) = B = \sigma_1(B)$ et pour tout $g \neq B$, on a $\Phi^{-1}\sigma_1'\Phi(g) = \sigma_1(g)$. Donc, $\Phi^{-1}\sigma_1'\Phi(g) = \sigma_1$.

Pour Θ'_1, on a:

$$\Phi^{-1}\Theta'_1\Phi(g) = \begin{cases} \Phi^{-1}(A') & \text{si } \Phi(g) = B', \\ \Phi^{-1}(B') & \text{si } \Theta'(\Phi(g)) = A', \\ \Phi^{-1}\Theta'(\Phi(g)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A & \text{si } g = B, \\ B & \text{si } \phi^{-1}\Theta'(\phi(g)) = \phi^{-1}(A'), \\ \phi^{-1}\Theta'\phi(g) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A & \text{si } g = B, \\ B & \text{si } \Theta(g) = A, \\ \Theta(g) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \Theta_1(g).$$

Donc, H'_1 et H'_2 sont isomorphes. Par ailleurs, on a que le groupe engendré par $\{\sigma_1, \theta_1\}$ agit transitivement sur $E \cup \{B\}$. En effet, $\langle \sigma, \Theta \rangle$ agit transitivement sur E et $\Theta_1(B) = A$ et $\sigma_1(A) = A$. Donc, f est bien définie. □

Lemme 3.1.16 *Soit $f' : \mathcal{H}^1_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ définie par:*

$$f'(\ [(E, \sigma, \Theta, A)]_{\simeq}\ ) = [(E \setminus \{A\}, \sigma|_{E\setminus\{A\}}, \Theta_1, \Theta(A))]_{\simeq},$$

où Θ_1 est obtenue en retirant A de l'écriture en cycle de Θ. Alors, f' est bien définie.

Démonstration. Soient $H_1 = (E, \sigma, \Theta, A)$ et $H_2 = (E', \sigma', \Theta', A')$ deux représentants d'une hypercarte pointée à $n+1$ brins tel que $\sigma(A) = A$ et $\sigma'(A') = A'$. Montrons que $H'_1 = (E \setminus \{A\}, \sigma|_{E\setminus\{A\}}, \Theta_1, \Theta(A))$ et $H'_2 = (E' \setminus \{A'\}, \sigma'|_{E'\setminus\{A'\}}, \Theta'_1, \Theta'(A'))$ sont isomorphes.

Comme H_1 et H_2 sont des représentants d'une même hypercarte pointée, il existe une bijection $\phi : E \to E'$ telle que $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$, $\Theta = \phi^{-1}\Theta'\phi$ et $\phi(A) = A'$. Soit $\Phi : E \setminus \{A\} \to E' \setminus \{A'\}$ définie par $\Phi(g) = \phi(g)$. Alors, H_1' et H_2' sont isomorphes par Φ. En effet, comme $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$, en enlevent A de l'écriture en cycle de σ et en enlevant A' de l'écriture en cycle de σ' et comme $\phi(A) = A'$, on a alors $\sigma|_{E\setminus\{A\}} = \Phi^{-1}\sigma'|_{E'\setminus\{A'\}}\Phi$. De même, on a $\Theta_1 = \Phi^{-1}\Theta_1'\Phi$. Finalement, $\Phi(\Theta(A)) = \phi(\Theta(\phi^{-1}(A'))) = \Theta'(A')$. Donc, $f'(H_1) = f'(H_2)$. Par ailleurs, comme $\sigma(A) = A$, si on enlève A de l'écriture en cycle de Θ, on aura toujours que le groupe engendré par $\left\{\sigma|_{E\setminus A}, \Theta_1\right\}$ agira transitivement sur $E \setminus \{A\}$. Donc, f' est bien définie. □

Proposition 3.1.17 *L'ensemble des hypercartes à n brins est en bijection avec l'ensemble des hypercartes à $n+1$ brins dont le degré du sommet pointé est 1.*

Démonstration. Comme f et f' sont bien définies, on a $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_n}$. En effet, f ajoute un brin à une hypercarte pointée et f' le retire aussitôt. Aussi, on a $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_{n+1}^1}$. En effet, f' retire le brin correspondant à l'élément distingué et f ajoute un nouvel élément distingué. Mais comme f et f' sont bien définies, l'hypercarte pointée obtenue par $f \circ f'$ sera isomorphe à l'hypercarte pointée de départ. D'où $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_{n+1}^1}$. Donc, l'ensemble des hypercartes pointées à n brins $\mathcal{H}_n$ est en bijection avec l'ensemble des hypercartes pointées à $n+1$ brins $\mathcal{H}_{n+1}^1$ dont le degré du sommet pointé est 1. □

3.2 Bijection entre hypercartes et permutations indécomposables

Soit $\mathcal{F} : \mathrm{T}_{n+1} \to \mathcal{H}_{n+1}^1$ définie par $\mathcal{F}(\Theta) = [([n+1], \sigma, \Theta, 1)]_{\simeq}$ où σ est construite par l'algorithme suivant:

Algorithme 3.2.18 Écrire Θ sous forme cyclique de sorte que le premier élément d'un cycle soit le minimum de ce cycle et des cycles suivants. Plus précisément:

$$\Theta = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1})(a_{k_1}, \ldots, a_{k_2-1}) \ldots (a_{k_m}, \ldots, a_{n+1}),$$

où $a_1 = 1$ et $a_{k_j} = \min\Big([n+1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big)$.
Définir σ par $\sigma(i) = a_i$.

Nous voulons démontrer que $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans S_{n+1} vers l'ensemble des hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est 1.

3.2.1 Transitivité et fonction d'ordre

Lemme 3.2.19 *Soient $\Theta, \sigma \in S_n$ où σ est construit selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à Θ. Alors, on a les équivalences suivantes:*

(i) Θ est une permutation indécomposable;

(ii) le couple (σ, Θ) est indécomposable;

(iii) le couple (σ, Θ) agit transitivement sur $[n+1]$.

Démonstration. Écrivons Θ sous forme cyclique comme dans l'algorithme 3.2.18

$$\Theta = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1})(a_{k_1}, \ldots, a_{k_2-1}) \ldots (a_{k_m}, \ldots, a_{n+1}).$$

Montrons que (i) implique (iii). Posons $k_0 = 1$. Comme Θ est indécomposable, pour tout a_{k_j} où $1 \leq j \leq m$, on a $a_{k_j} < k_j$. En effet, comme $a_{k_j} = \min\Big([n+1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big)$, on a au plus que $a_{k_j} = |\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}| + 1 = k_j$. Par conséquent, si l'on suppose par l'absurde que $a_{k_j} = k_j$, alors $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\} = [k_j - 1]$ et ainsi $\Theta([k_j-1]) = [k_j-1]$. Ce qui est une contradiction. D'où $a_{k_j} < k_j$. Posons $x = a_{k_j}$. Comme $x < k_j$, nous avons que $a_x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}$. Puisque

$\sigma(x) = a_x$, nous avons donc pour tout $1 \leq j \leq m$, qu'il existe $i < j$ avec $i \geq 0$ tel que $\sigma(a_{k_j}) \in \mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(a_{k_i})$. De cela, pour tout $i \in [n+1]$, il existe $\alpha \in \langle\Theta, \sigma\rangle$ tel que $\alpha(i) \in \mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(1)$. D'où le couple (Θ, σ) agit transitivement sur $[n+1]$.

Par la proposition 1.2.3 (vi), nous avons (iii) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (i). Supposons que Θ est décomposable. Il existe alors $i \in [n]$ tel que $\Theta([i]) = [i]$. Mais par construction de σ, si $\Theta([i]) = [i]$, alors $\sigma([i]) = [i]$. Donc, le couple (σ, Θ) est décomposable. Ce qui démontre que si (σ, Θ) est indécomposable, alors Θ est indécomposable. $\square$

Proposition 3.2.20 *Soit $\Theta \in S_{n+1}$. Alors, $\Theta \in T_{n+1}$ et $\sigma \in S_{n+1}$ est construite selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à Θ si et seulement si σ peut être définie récursivement par $\sigma(1) = 1$ et:*

$$\sigma(i+1) = \begin{cases} \Theta\sigma(i) & \textit{si } \Theta\sigma(i) \notin \sigma([i]), \\ \min\Big([i] \setminus \big(\sigma([i]) \cap [i]\big)\Big) & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Démonstration. Écrivons Θ sous forme cyclique comme dans l'algorithme 3.2.18:

$$\Theta = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1})(a_{k_1}, \ldots, a_{k_2-1}) \ldots (a_{k_m}, \ldots, a_{n+1}).$$

Montrons que si $\Theta \in T_{n+1}$ et σ est construite selon l'algorithme 3.2.18, alors σ est définie récursivement par l'équation 3.2. Par construction, on a $a_1 = 1$ et donc $\sigma(1) = 1$. Soit $i \geq 1$. Si $i+1 \in \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, alors $a_{i+1} = a_{k_j}$ pour un certain j. De cela, puisque $\sigma(i+1) = a_{i+1} = a_{k_j}$, nous avons que:

$$\sigma(i+1) = \min\Big([n+1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big).$$

Or, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\} = \sigma([k_j - 1]) = \sigma([i])$, car $i+1 = k_j$. Comme $\Big\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\Big\} \neq \{1, 2, \ldots, k_j - 1\}$, car Θ est indécomposable, on a $\min\Big([n+

$1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big) \leq k_j - 1 = i$. Donc, $\sigma(i+1) = \min\Big([i] \setminus \big(\sigma([i]) \cap [i]\big)\Big)$.
Si $i+1 \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, alors:

$$\sigma(i+1) = a_{i+1} = \Theta(a_i) = \Theta\sigma(i).$$

Observons que $i+1 \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ si et seulement si $\Theta\sigma(i) \notin \sigma([i])$. En effet, si $i+1 \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, alors $\sigma(i+1) = a_{i+1} \notin \sigma([i])$. Réciproquement, si $i+1 \in \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, alors $\sigma(i) = a_{k_j-1}$ pour un certain $1 \leq j \leq m$ et donc $\Theta\sigma(i) = a_{k_{j-1}} \in \sigma([i])$. De cela, $\sigma(i+1) = \Theta\sigma(i)$ si $\Theta\sigma(i) \notin \sigma([i])$.

Réciproquement, montrons que $\Theta \in T_{n+1}$ et σ est construit selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à Θ. Pour ce faire, montrons que $[n+1] = \mathrm{FCC}(\Theta)$ et par récurrence que $\sigma(i) = a_i$.

On a $\sigma(1) = 1 = a_1$. De plus, par définition de première composante connexe, on a que $\mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(1) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}\} \subseteq \mathrm{FCC}(\Theta)$. Soit $i \geq 2$. Si $\Theta\sigma(i) \notin \sigma([i])$ alors $\sigma(i+1) = \Theta\sigma(i)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $\sigma(i+1) = \Theta(a_i) = a_{i+1}$, car $i+1 \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ si et seulement si $\Theta\sigma(i) \notin \sigma([i])$. Cette dernière équivalence étant encore vraie. Si $\Theta\sigma(i) \in \sigma([i])$, alors $i+1 \in \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, disons $i+1 = k_j$ pour un certain $1 \leq j \leq m$. De plus, par hypothèse nous avons que $\sigma(i+1) = \min\big([i] \setminus \sigma([i])\big)$. Par conséquent, $\sigma([i]) \neq [i]$. Or, par hypothèse de récurrence, $\sigma([i]) = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$. Ainsi, $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \neq [i]$. Par conséquent:

$$\min\Big([i] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big) = \min\Big([n+1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big).$$

Or, $a_{i+1} = a_{k_j} = \min\Big([n+1] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\}\Big)$. Donc, $a_{i+1} = \sigma(i+1)$. Par ailleurs, nous avons que $\max(\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}) > i$, car sinon $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} = [i]$, ce qui serait une contradiction au fait que $\sigma([i]) \neq [i]$. Comme $a_{i+1} = a_{k_j} < i$ et que par hypothèse de récurrence on a $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_j-1}\} \subseteq \mathrm{FCC}(\Theta)$, on a donc que $\mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(a_{k_j}) \subseteq \mathrm{FCC}(\Theta)$.

Donc, pour tout $i \in [n+1]$, $\sigma(i) = a_i$. D'où σ est construit selon l'algorithme 3.2.18

par rapport à Θ. De plus, par récurrence, on trouve que $\mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(a_{k_m}) \subseteq \mathrm{FCC}(\Theta)$. Or, $n+1 \in \mathrm{Orb}_{\langle\Theta\rangle}(a_{k_m})$. D'où $[n+1] = \mathrm{FCC}(\Theta)$ et $\Theta \in T_{n+1}$. □

Lemme 3.2.21 *Soit (E, σ, Θ, A) un représentant d'une hypercarte pointée à $n+1$ brins tel que $\sigma(A) = A$. Soit $\phi_i : [i] \to E$ une fonction définie récursivement par $\phi_1(1) = A$ et pour $j < i+1$, $\phi_{i+1}(j) = \phi_j(j)$ et:*

$$\phi_{i+1}(i{+}1) = \begin{cases} \sigma^{-1}\Theta\sigma\phi_i(i) & \text{si } \sigma^{-1}\Theta\sigma\phi_i(i) \notin \phi_i([i]), \\ \sigma^{-1}\phi_i\Big(\min\Big([i] \setminus \phi_i^{-1}\big(\sigma\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big)\Big)\Big) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors, la fonction $\phi : [n+1] \to E$ définie par $\phi(i) = \phi_{n+1}(i)$ est une bijection.

Démonstration. Montrons que ϕ est une bijection. Pour ce faire, montrons par récurrence pour tout $i \in [n+1]$ que $\phi_i : [i] \to E$ est injective.

On a $\phi_1(1) = A$. Soit $i \geq 1$. Si $\sigma^{-1}\Theta\sigma\phi_i(i) \notin \phi_i([i])$, alors $\phi_{i+1}(i+1) \notin \phi_i([i])$.

Dans le cas où $\sigma^{-1}\Theta\sigma\phi_i(i) \in \phi_i([i])$, supposons par l'absurde que:

$$[i] \setminus \phi_i^{-1}\big(\sigma\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big) = \emptyset.$$

Ce qui est équivalent à $\sigma\phi_i([i]) = \phi_i([i])$, car par hypothèse de récurrence, ϕ_i est une bijection entre $[i]$ et un sous-ensemble de E. De plus, par construction de ϕ jusquà i, on a que $\sigma^{-1}\Theta\sigma\phi_i([i]) \subseteq \phi_i([i])$. Comme ces deux ensembles ont la même cardinalité, ils sont égaux. Or, $\sigma\phi_i([i]) = \phi_i([i])$. Donc, $\Theta\phi_i([i]) = \phi_i([i])$. Par conséquent, $\sigma\phi_i([i]) = \Theta\phi_i([i]) = \phi_i([i])$. Comme le couple $\phi_i^{-1}(\sigma, \Theta)\phi_i$ est décomposable, par la proposition 1.2.3 (vi), (σ, Θ) n'agit pas transitivement sur E. Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que (E, σ, Θ, A) est une hypercarte pointée étiquetée. Donc, $\phi_{i+1}(i+1)$ peut être calculée par la formule donnée par le cas « sinon ».

De cela, on a que $\phi_{i+1}(i+1) \notin \sigma^{-1}\phi_i\Big(\phi_i^{-1}\big(\sigma\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big)\Big) \subseteq \phi_i([i])$. Par conséquent, $\phi_{i+1}(i+1)$ est injective, car $\phi_{i+1}(i+1) \notin \phi_i([i])$ et pour $j < i+1$, $\phi_{i+1}|_{[j]} = \phi_j$ et cette dernière est injective. Comme $|E| = n+1$ et $\phi = \phi_{n+1}$ est injective, on conclut que ϕ est une bijection et est bien définie. □

3.2.2 Injectivité et surjectivité

Lemme 3.2.22 *Soit (E, σ, Θ, A) un représentant d'une hypercarte pointée à $n+1$ brins tel que $\sigma(A) = A$ et $\phi : [n+1] \to E$ la bijection définie ci-dessus. Alors, $\phi^{-1}\Theta\phi \in T_{n+1}$ et $\phi^{-1}\sigma\phi$ est construite selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi$.*

Démonstration. En remplaçant dans l'équation 3.2 σ et Θ respectivement par $\phi^{-1}\sigma\phi$ et $\phi^{-1}\Theta\phi$ et en observant que par le lemme 1.4.10 on a $\phi^{-1}\sigma\phi([i]) \cap [i] = \phi^{-1}\big(\sigma\phi([i]) \cap \phi[i]\big)$, on trouve que $\phi^{-1}\sigma\phi$ est définie récursivement par l'équation 3.2. Par la proposition 3.2.20, on a donc que $\phi^{-1}\Theta\phi \in T_{n+1}$ et $\phi^{-1}\sigma\phi$ est construite selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi$. □

Lemme 3.2.23 *Soient $\Theta, \Theta' \in T_{n+1}$ telles que $\mathcal{F}(\Theta) = \mathcal{F}(\Theta')$. Alors, $\Theta = \Theta'$.*

Démonstration. Par construction de $\mathcal{F}$, il existe un représentant de la forme $H_1 = ([n+1], \sigma, \Theta, 1)$ pour $\mathcal{F}(\Theta)$ et un représentant de la forme $H_2 = ([n+1], \sigma', \Theta', 1)$ pour $\mathcal{F}(\Theta')$ tels que σ, σ' soient construites selon l'algorithme 3.2.18 respectivement par rapport à Θ et Θ'.

Comme H_1 et H_2 sont deux représentants d'une même hypercarte pointée, il existe une bijection $\phi : [n+1] \to [n+1]$ tel que $\phi(1) = 1$, $\phi^{-1}\Theta\phi = \Theta'$ et $\phi^{-1}\sigma\phi = \sigma'$. Comme σ' est définie récursivement par la proposition 3.2.20, car Θ'

est indécomposable, en remplaçant Θ' par $\phi^{-1}\Theta\phi$ et σ' par $\phi^{-1}\sigma\phi$ nous trouvons que ϕ peut être définie par l'équation 3.3.

Il suffit alors de démontrer par récurrence que $\phi = \mathrm{Id}_{[n+1]}$. Si $i = 1$, alors $\phi(1) = 1$. Soit $m \leq n$. Supposons que $\phi(i) = i$ pour tout $i \in [m]$.
Si $\sigma^{-1}\Theta\sigma\phi(i) \notin \phi([i])$, alors par définition de ϕ et par hypothèse de récurrence, on a $\phi(i+1) = \sigma^{-1}\Theta\sigma(i)$ et $\sigma^{-1}\Theta\sigma(i) \notin [i]$. Or, comme σ est définie récursivement par la proposition 3.2.20, car Θ est indécomposable, on a $\sigma(i+1) = \Theta\sigma(i)$ et ainsi $\phi(i+1) = \sigma^{-1}\sigma(i+1) = i+1$.
Dans le cas « sinon », par hypothèse de récurrence et par définition de ϕ, on a:

$$\phi(i+1) = \sigma^{-1}\min\Big([i] \setminus \big(\sigma([i]) \cap [i]\big)\Big).$$

Par la proposition 3.2.20, on a $\sigma(i+1) = \min\Big([i] \setminus \big(\sigma([i]) \cap [i]\big)\Big)$. Ainsi, $\phi(i+1) = i+1$. Donc, $\phi = \mathrm{Id}_{[n+1]}$ et ainsi $\Theta = \Theta'$. □

Théorème 3.2.24 *La fonction $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \mathcal{H}^1_{n+1}$ définie par*

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n+1], \sigma, \Theta, 1)]_{\simeq},$$

où σ est construite selon l'algorithme 3.2.18 est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans S_{n+1} vers l'ensemble des hypercartes pointées à $n+1$ brins dont le degré du sommet pointée est 1.

Démonstration. Par le lemme 3.2.19, $\mathcal{F}$ est bien définie. Soit $H = (E, \sigma, \Theta, A)$ le représentant d'une hypercarte pointée. Par les lemmes 3.2.21 et 3.2.22, nous savons qu'il existe une bijection $\phi : [n+1] \to E$ telle que $\phi(1) = A$, $\phi^{-1}\Theta\phi \in T_{n+1}$ et telle que $\phi^{-1}\sigma\phi$ soit construite selon l'algorithme 3.2.18 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi$. Par conséquent, $\phi^{-1}\Theta\phi$ est la pré-image par $\mathcal{F}$ de $[H]_{\simeq}$. De cela, $\mathcal{F}$ est surjective. De plus, par le lemme 3.2.23, on a que $\mathcal{F}$ est injective. □

3.3 Bijection entre les permutations indécomposables et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$

Par le théorème 2.3.14, il existe une bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins. Par la proposition 3.1.17 il existe une bijection entre les hypercartes pointées à n brins et les hypercartes pointées à $n+1$ brins dont le degré du sommet pointé est 1 et ces derniers sont en bijection avec les permutations indécomposables dans S_{n+1} par le théorème 3.2.24. D'où les permutations indécomposables dans S_{n+1} sont en bijection avec les sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$.

CHAPITRE IV

BIJECTION DE SILLKE

En 1989, Sillke donna d'abord sans preuve, dans un article (Sillke, 1989), une nouvelle bijection entre permutations indécomposables et hypercartes pointées. Il donna ensuite dans sa thèse de doctorat (Sillke, 1992) une preuve de celle-ci. Ces documents sont en allemand. Plusieurs années plus tard, Cori et Reutenauer (2016) donnèrent une nouvelle preuve de cette bijection. En nous inspirant de cette dernière preuve, nous allons donner une nouvelle preuve de la bijection de Sillke.

Dans son article, Sillke (1989) construit d'abord une bijection entre les permutations indécomposables de S_{n+1} et les hypercartes doublement pointées à $n+1$ brins en associant à $\Theta \in T_{n+1}$ un représentant d'hypercartes doublement pointées dont l'ensemble des brins est Γ_Θ. Dans le but de construire récursivement deux fonctions d'ordres, nous allons plutôt associer à Θ un représentant dont l'ensemble est $[n+1]$. Finalement, tout comme dans les articles (Sillke, 1989) et Cori et Reutenauer (2016), nous conclurons que les permutations indécomposables sont en bijection avec les hypercartes pointées à n brins en donnant, sans démonstration, car la preuve est simple, la bijection de Sillke entre les hypercartes doublement pointées à $n+1$ brins et les hypercartes pointées à n brins.

4.1 Bijection entre hypercartes doublement pointées et permutations indécomposables

Soit $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \ddot{\mathcal{H}}_{n+1}$ définie par

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n+1], \sigma, \alpha, \Theta^{-1}(n+1), n+1)]_{\simeq},$$

où σ et α sont construites selon l'algorithme suivant:

Algorithme 4.1.25 Trouvez les positions des maxima de gauche à droite de Θ, disons $1 = M_1 < \cdots < M_k$ et trouvez les valeurs des minima de droite à gauche de Θ, disons $1 = v_1 < v_2 < \cdots < v_l$.
Écrire σ sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\sigma = (M_1, 2, \ldots, M_2 - 1)(M_2, M_2 + 1, \ldots, M_3 - 1) \ldots (M_k, M_k + 1 \ldots, n+1).$$

Écrire α sous forme cyclique, constituée de pré-images sous Θ de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\alpha = (\Theta^{-1}(1), \Theta^{-1}(2), \ldots, \Theta^{-1}(v_2 - 1))(\Theta^{-1}(v_2), \ldots) \cdots (\Theta^{-1}(v_l), \ldots, \Theta^{-1}(n+1)).$$

Remarque 4.1.26 Une façon équivalente de construire α est d'écrire α' sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\alpha' = (v_1, 2, \ldots, v_2 - 1)(v_2, v_2 + 1, \ldots, v_3 - 1) \ldots (v_k, v_k + 1 \ldots, n+1),$$

et de poser $\alpha = \Theta^{-1}\alpha'\Theta$.

Par ailleurs, si $\Theta \in S_{n+1}$ est connue, alors la fonction projection $\pi_x : \Gamma_\Theta \to [n+1]$ qui est définie par:

$$\pi_x(\ (a, \Theta(a))\ ) = a,$$

est une bijection. En particulier, il est facile de vérifier que le représentant choisi ci-dessus et celui choisi dans (Sillke, 1989, 1992) et (Cori et Reutenauer, 2016) sont isomorphes, au sens des hypercartes doublement pointées étiquetées, sous la bijection π_x.

4.1.1 Transitivité

Lemme 4.1.27 *Soient $\Theta \in T_{n+1}$ et $\sigma, \alpha \in S_{n+1}$ construites par l'algorithme 4.1.25 par rapport à Θ et utilisons les mêmes notations que cet algorithme. Posons $A = \Theta^{-1}(n+1)$ et $B = n+1$. Écrivons σ et α sous forme cyclique comme dans l'algorithme 4.1.25, disons:*

$$\sigma = (a_{M_1}, a_2, \dots) \cdots (a_{M_{k-1}}, \dots, a_{M_k})(a_{M_k}, \dots, a_{n+1}),$$
$$\alpha = (b_{v_1}, b_2, \dots) \cdots (b_{v_{l-1}}, \dots, b_{v_l - 1})(b_{v_l}, \dots, b_{n+1}),$$

où $a_i = i$ et $b_j = \Theta^{-1}(j)$. Posons pour tout $1 \leq i \leq n+1$, $\phi(i) = a_i$ et $\psi(i) = b_i$. Alors $a_{M_k} = A$, $b_{v_l} = B$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on a:

$$a_{M_i} = \psi\Big(\max\Big(\psi^{-1}\big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Big)$$

et pour tout $1 \leq i \leq l-1$, on a:

$$b_{v_i} = \phi\Big(\max\Big(\phi^{-1}\big(\phi([v_{i+1}, n+1]) \setminus \psi([v_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Big).$$

Démonstration. On a $a_{M_k} = M_k = \Theta^{-1}(n+1) = A$ et $b_{v_l} = \Theta^{-1}(v_l) = n+1 = B$. Par construction, $\phi = \mathrm{Id}_{[n+1]}$ et $\psi = \Theta^{-1}$. Par conséquent, nous pouvons prendre $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$.

Comme les M_j sont les positions des maxima de gauche à droite de Θ, par la proposition 1.4.8 (i), on a pour tout $1 \leq i \leq k-1$ que:

$$M_i = \Theta^{-1}\Big(\max\big([M_{i+1}, n+1] \setminus \Theta([M_{i+1}, n+1])\big)\Big).$$

Comme nous avons pris $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$, comme $\phi(a_{M_i}) = a_{M_i} = M_i$ et que

$[M_{i+1}, n+1] \setminus \Big(\psi^{-1} \circ \phi([M_{i+1}, n+1])\Big) = \psi^{-1}\Big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_i+1, n+1])\Big)$

(lemme 1.4.11), on a:

$$a_{M_i} = \psi\Bigg(\max\Big(\psi^{-1}\big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Bigg).$$

Comme les $m_j = \Theta^{-1}(v_j)$ sont les positions des minima de droite à gauche de Θ, par la proposition 1.4.8 (iv), on a pour $1 \leq i \leq l-1$ que:

$$m_i = \max\Big([v_{i+1}, n+1] \setminus \Theta^{-1}([v_{i+1}, n+1])\Big),$$

où $v_{i+1} = \Theta(m_{i+1})$. Comme $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$, comme $m_i = \Theta^{-1}(v_j) = b_{v_j}$, comme $\phi = \mathrm{Id}_{[n+1]}$ et par le lemme 1.4.11, on a:

$$b_{v_j} = \phi\Bigg(\max\Big(\phi^{-1}\big(\phi([v_{i+1}, n+1]) \setminus \psi([v_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Bigg). \quad \square$$

Lemme 4.1.28 *Soient E un ensemble fini de cardinalité $n+1$ et $A, B \in E$. Soient $\sigma, \Theta \in S_E$ telles que $\sigma(B) = A$, $\Theta(A) = B$. Soient k le nombre de cycles de σ et l le nombre de cycles de α et soient des formes cycliques pour α et σ, disons respectivement:*

$$\sigma = (a_{M_1}, a_2, \dots) \cdots (a_{M_{k-1}}, \dots, a_{M_k-1})(a_{M_k}, \dots, a_{n+1}),$$
$$\alpha = (b_{v_1}, b_2, \dots) \cdots (b_{v_{l-1}}, \dots, b_{v_l-1})(b_{v_l}, \dots, b_{n+1}),$$

Posons pour tout $1 \leq i \leq n+1$, $\phi(i) = a_i$ et $\psi(i) = b_i$. Supposons que $a_{M_k} = A$, $b_{v_l} = B$, que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on ait:

$$a_{M_i} = \psi\Bigg(\max\Big(\psi^{-1}\big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Bigg)$$

et que pour tout $1 \leq i \leq l-1$, on ait:

$$b_{v_i} = \phi\Bigg(\max\Big(\phi^{-1}\big(\phi([v_{i+1}, n+1]) \setminus \psi([v_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Bigg).$$

Supposons de plus que $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi \in T_{n+1}$. Alors, $\phi^{-1}\sigma\phi$ et $\phi^{-1}\alpha\phi$ sont construites selon l'algorithme 4.1.25 par rapport à $\psi^{-1} \circ \phi$.

Démonstration. Par construction de ψ et ϕ, $\phi^{-1}\sigma\phi$ et $\psi^{-1}\alpha\psi$ peuvent être écrites sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, respectivement de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\sigma\phi &= (M_1, 2, \ldots, M_2 - 1)(M_2, \ldots, M_3 - 1) \ldots (M_k, \ldots, n+1), \\ \psi^{-1}\alpha\psi &= (v_1, 2, \ldots, v_2 - 1)(v_2, \ldots, v_3 - 1) \ldots (v_l, \ldots, n+1). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Cela nous permet d'écrire α de la forme suivante:

$$\alpha = (\psi(v_1), \psi(2), \psi(3), \ldots)(\psi(v_2), \ldots) \cdots (\psi(v_l), \ldots, \psi(n+1)).$$

Par conséquent, comme $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$, $\phi^{-1}\alpha\phi$ peut s'écrire:

$$\phi^{-1}\alpha\phi = (\Theta^{-1}(v_1), \Theta^{-1}(2), \ldots)(\Theta^{-1}(v_2), \ldots) \cdots (\Theta^{-1}(v_l), \ldots, \Theta^{-1}(n+1)). \tag{4.2}$$

Il suffit alors de montrer que les positions des maxima de gauche à droite de Θ sont $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k$ et les positions des minima de droite à gauche sont $\Theta^{-1}(v_1) < \Theta^{-1}(v_2) < \cdots < \Theta^{-1}(v_l) = n + 1$.

On a $A = a_{M_k} = \phi(M_k)$, alors:

$$\phi(M_k) = A = \alpha^{-1}(B) = \alpha^{-1}(\psi(v_l)) = \alpha^{-1}(\psi(\psi^{-1}\alpha\psi(n+1))) = \psi(n+1).$$

Comme $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$, on a donc que $\Theta(M_k) = n + 1$ et donc M_k est la position du dernier maximum de gauche à droite de Θ. De façon analogue, on trouve $\phi(n+1) = B = \psi(v_l)$ et donc $n + 1 = \Theta^{-1}(v_l)$ est la position du premier minimum de droite à gauche de Θ. Pour $i < k$, on a par hypothèse que:

$$a_{M_i} = \psi\Big(\max\Big(\psi^{-1}\Big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_{i+1}, n+1])\Big)\Big)\Big).$$

Comme $a_{M_i} = \phi(M_i)$ et $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$, par le lemme 1.4.11 on a:

$$M_i = \Theta^{-1}\Big(\max\Big([M_{i+1}, n+1] \setminus \Theta([M_{i+1}, n+1])\Big)\Big).$$

Comme Θ est indécomposable, par la proposition 1.4.9 (i1) et par récurrence, nous avons que M_i est la position d'un maximum de gauche à droite de Θ. D'où les positions des maxima de gauche à droite sont $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k$. De façon analogue, on trouve que les positions des minima de droite à gauche sont $\Theta^{-1}(v_1) < \Theta^{-1}(v_2) < \cdots < \Theta^{-1}(v_l) = n+1$. Par conséquent, $\phi^{-1}\sigma\phi$ et $\phi^{-1}\alpha\phi$ sont construites selon l'algorithme 4.1.25 par rapport à $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$. □

Remarque 4.1.29 Justifions la raison pour laquelle nous considérons $\psi^{-1} \circ \phi$. Soit $\Theta \in T_{n+1}$. Pour que $\phi^{-1}\alpha\phi$ soit construite selon l'algorithme 4.1.25 par rapport à Θ, il faut qu'elle soit constituée de pré-images sous Θ de nombres consécutifs croissants. En particulier, $\phi^{-1}(b_i) = \Theta^{-1}(i)$. Or, par construction, $\psi^{-1}(b_i) = i$. Par conséquent, $\phi^{-1}(b_i) = \Theta^{-1}\psi^{-1}(b_i)$. En isolant Θ, on trouve que $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$.

Par ailleurs, définissons deux ordres totaux $\leq_\sigma$ et $\leq_\alpha$ respectivement par $a \leq_\sigma b$ si $\phi^{-1}(a) \leq \phi^{-1}(b)$ et $a \leq_\alpha b$ si $\psi^{-1}(a) \leq \psi^{-1}(b)$. Prenons $[e, \leq_\sigma] = \{a \in E \mid e \leq_\sigma a\}$ et $[e, \leq_\alpha] = \{a \in E \mid e \leq_\alpha a\}$. Posons de plus, $B_j = b_{v_{j+1}}$ et $B_{j+1} = b_{v_j}$. Avec cela, la formule:

$$b_{v_j} = \phi\Big(\max\Big(\phi^{-1}\big(\phi([v_{j+1}, n+1]) \setminus \psi([v_{j+1}, n+1])\big)\Big)\Big),$$

se réécrit en:

$$B_{j+1} = \max_{\leq_\sigma}\Big([\phi(v_{j+1}),\ \leq_\sigma] \setminus [B_j,\ \leq_\alpha]\Big).$$

Lemme 4.1.30 *Prenons les hypothèses du lemme précédent, excluant celle où $\psi^{-1} \circ \phi \in T_{n+1}$. Posons $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi \in T_{n+1}$;

(ii) le couple $\phi^{-1}(\sigma, \alpha)\phi$ est indécomposable;

(iii) le couple $\phi^{-1}(\sigma, \alpha)\phi$ agit transitivement sur $[n+1]$;

(iv) le couple (σ, α) agit transitivement sur E;

(v) $\phi^{-1}\alpha\phi$ est indécomposable.

Démonstration. Montrons que (i) implique (iii). Comme $\Theta \in T_{n+1}$, par la preuve du lemme 4.1.28, on a que $\Theta^{-1}(v_1) < \Theta^{-1}(v_2) < \cdots < \Theta^{-1}(v_l) = n+1$ sont les positions des minima de droite à gauche de Θ. De cela, par l'équation 4.2, chaque orbite de $\phi^{-1}\alpha\phi$ contient exactement une position de minimum de droite à gauche de Θ. Soit M_i la position d'un maximum de gauche à droite de Θ. Il existe alors $m_j = \Theta^{-1}(v_j)$ une position d'un minimum de droite à gauche de Θ telle que $M_i \in \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(m_j)$. Si $m_j = \Theta^{-1}(v_l) = n+1$, il existe alors $\delta \in \langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle$ tel que $\delta(M_i) = n+1$.

Supposons que $m_j \neq n+1$ et ainsi que $v_j \neq v_l$. Écrivons $\phi^{-1}\alpha\phi$ en mot, en gardant la forme cyclique de l'équation 4.2, c'est-à-dire que l'on enlève les parenthèses, disons $u = b_1 b_2 \ldots b_{n+1}$ où $b_i = \Theta^{-1}(i)$. Comme $m_j = \Theta^{-1}(v_j)$ et $v_j \neq v_l$, nous avons que la lettre suivante de $\phi^{-1}\alpha^{-1}\phi(m_j)$ est $m_{j+1} = \Theta^{-1}(v_{j+1})$. Donc, dans ce mot, M_i est à la gauche de m_{j+1}, car $m_{j+1} \notin \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(m_j)$. Comme Θ est indécomposable, par le corollaire 1.3.7, nous avons que $\Theta(M_i) \geq M_{i+1}$ et $\Theta(m_{j+1}) \leq m_j$. Écrivons $\phi^{-1}\sigma\phi$ en mot, en gardant la forme cyclique de l'équation 4.1, disons $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ où $a_i = i$. Nous avons que $a_i = \Theta(b_i)$. Par conséquent, si b_i est à la gauche de b_j dans u, alors $\Theta(b_i) < \Theta(b_j)$. Donc, $M_{i+1} \leq \Theta(M_i) \leq \Theta(m_{j+1}) \leq m_j$, car M_i est à la gauche de m_{j+1} dans u. De cela, comme $M_i < M_{i+1}$ et $M_i \in \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(m_j)$, il existe $\delta \in \langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle$ telle que $\delta(M_i) = m_j > M_i$.

Par conséquent, pour tout $i \in [n]$, soit $\phi^{-1}\sigma\phi(i) > i$ ou soit il existe $\delta \in \langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle$

tel que $\delta\phi^{-1}\sigma\phi(i) > i$, ce dernier cas étant lorsque $\phi^{-1}\sigma\phi(i) = M_i$. D'où (i) implique que $\phi^{-1}(\sigma, \alpha)\phi$ agit transitivement sur $[n+1]$;

(iii) implique (ii) découle de la proposition 1.2.3 (vi).

Montrons que (ii) implique (i). Supposons que Θ est décomposable. Soit $i \leq n+1$ tel que $\mathrm{LCC}(\Theta) = [i, n+1]$. Nous avons alors que i est la position du premier maximum de gauche à droite de $\Theta|_{[i,n+1]}$ et $v_j = \Theta^{-1}(i)$ est la position du dernier minimum de droite à gauche de $\Theta|_{[i,n+1]}$. Donc, $\phi^{-1}\sigma\phi([i, n+1]) = [i, n+1]$. Comme $\Theta|_{[i,n+1]}([i, n+1]) = [i, n+1]$, par l'équation 4.2 nous avons alors $\phi^{-1}\alpha\phi|_{[i,n+1]}([i, n+1]) = [i, n+1]$. D'où le couple $\phi^{-1}(\sigma, \alpha)\phi$ est décomposable. Ce qui montre que (ii) implique (i).

L'équivalence entre (iii) est (iv) est toujours vraie pour toute fonction d'ordre $\phi : [n+1] \to E$, car nous renommons simultanément les éléments des cycles de α et σ.

Nous avons que (v) implique (i). En effet, (v) implique (ii) par la proposition 1.2.3 (i) et nous venons de montrer que (ii) implique (i).

Montrons que (i) implique (v). Pour ce faire, montrons que $\mathrm{LCC}(\phi^{-1}\alpha\phi) = [n+1]$. Nous avons $n+1 \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\alpha\phi)$, donc $\mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(n+1) \subseteq \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\alpha\phi)$. Si $1 \in \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(n+1)$, nous avons fini. Sinon pour tout $1 \leq i \leq l$, posons $m_i = \Theta^{-1}(v_i)$. Comme Θ est indécomposable, $\mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(n+1) \neq [m_l, n+1]$, donc il existe $i \in \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(n+1)$ et $m_j < m_l$ tel que $i \in \mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(m_j)$. Comme $m_j < m_{j+1} < \cdots < m_l$, on a alors par définition de dernière composante connexe que $\cup_{x\in\{m_j, m_{j+1}, \ldots, m_l\}}\mathrm{Orb}_{\langle\phi^{-1}\alpha\phi\rangle}(x) \subseteq \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\alpha\phi)$. En répétant ainsi l'argument nous trouvons au final que $\mathrm{LCC}(\phi^{-1}\alpha\phi) = [n+1]$ et $\phi^{-1}\alpha\phi$ est indécomposable. □

4.1.2 Construction des formes cycliques

Lemme 4.1.31 *Soit $(E, \sigma, \alpha, A, B)$ le représentant d'une hypercarte doublement pointée à $n+1$ brins. Soit k le nombre de cycles de σ et l le nombre de cycles de α. Alors, il existe des uniques formes cycliques pour α et σ, disons respectivement:*

$$\sigma = (a_{M_1}, a_2, \dots) \cdots (a_{M_{k-1}}, \dots, a_{M_k - 1})(a_{M_k}, a_{M_k+1}, \dots, a_{n+1}),$$
$$\alpha = (b_{v_1}, b_2, \dots) \cdots (b_{v_{l-1}}, \dots, b_{v_l - 1})(b_{v_l}, b_{v_l+1}, \dots, b_{n+1}),$$

telles que $a_{M_k} = A$, $b_{v_l} = B$ et que si pour tout $1 \leq k \leq n+1$ nous posons $\phi(i) = a_i$ et $\psi(i) = b_i$, on ait pour tout $1 \leq i \leq k-1$:

$$a_{M_i} = \psi\Big(\max\Big(\psi^{-1}\big(\psi([M_{i+1}, n+1]) \setminus \phi([M_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Big) \tag{4.3}$$

et pour tout $1 \leq i \leq l-1$, on ait:

$$b_{v_i} = \phi\Big(\max\Big(\phi^{-1}\big(\phi([v_{i+1}, n+1]) \setminus \psi([v_{i+1}, n+1])\big)\Big)\Big). \tag{4.4}$$

Démonstration. La conclusion de ce lemme nous donne une méthode pour construire les formes cycliques de σ et α voulues. Nous construisons récursivement les formes cycliques de σ et α.

L'unique choix pour a_{M_k} est de prendre $a_{M_k} = A$ et l'unique choix pour b_{v_l} est de prendre $b_{v_l} = B$. Comme $\sigma(B) = A$, nous avons $a_{n+1} = B$ et comme $\alpha(A) = B$, nous avons $a_{n+1} = B$. Nous avons donc que

$$\sigma = \cdots (a_{M_k}, a_{M_k+1}, \dots, a_n, B),$$
$$\alpha = \cdots (b_{v_l}, b_{v_l+1}, \dots, b_n, A),$$

sont les uniques premiers cycles (lus de droite à gauche) de σ et α.

Supposons que nous ayons donné d'uniques formes cycliques pour σ et α respectivement jusqu'à un certain M_i et v_j tel que $M_i \neq 1$ ou $v_j \neq 1$. C'est-à-dire que nous avons:

$$\sigma = \cdots (a_{M_i}, a_{M_i+1}, \ldots, a_{M_{i+1}-1}) \cdots (a_{M_k}, a_{M_k+1}, \ldots, a_n, B),$$
$$\alpha = \cdots (b_{v_j}, b_{v_j+1}, \ldots, b_{v_{j+1}-1}) \cdots (b_{v_l}, b_{v_l+1}, \ldots, b_n, A),$$

où pour tout $i \leq r \leq k-1$, a_{M_r} est donnée par l'équation 4.3 et pour tout $j \leq r \leq l-1$, b_{v_r} est donnée par l'équation 4.4.

Soit $\phi_{M_i} : [M_i, n+1] \to E$ définie par $\phi_{M_i}(r) = a_r$ et $\psi_{v_j} : [v_j, n+1] \to E$ définie par $\psi_{v_j}(r) = b_r$. Nous avons ainsi que:

$$\phi_{M_i}^{-1} \sigma \phi_{M_i} = \cdots (M_i, M_i+1, \ldots, M_{i+1}-1) \cdots (M_k, M_k+1, \ldots, n, n+1),$$
$$\psi_{v_j}^{-1} \alpha \psi_{v_j} = \cdots (v_j, v_j+1, \ldots, v_{j+1}-1) \cdots (v_l, v_l+1, \ldots, n, n+1).$$

Supposons que $M_i \geq v_j$, comme $M_i \neq 1$ ou $v_j \neq 1$, on a donc que $M_i \neq 1$. Nous voulons que:

$$a_{M_{i-1}} = \psi\Big(\max\Big(\psi^{-1}\Big(\psi([M_i, n+1]) \setminus \phi([M_i, n+1])\Big)\Big)\Big).$$

Comme $M_i \geq v_j$, alors l'image de $[M_i, n+1]$ par ψ_{v_j} est définie et est égale à $\psi_{M_i}([M_i, n+1])$ où $\psi_{M_i} = \psi_{v_j}|_{[M_i,n+1]}$. Comme $\phi|_{[M_i,n+1]} = \phi_{M_i}$, $\psi|_{[M_i,n+1]} = \psi_{M_i}$ et $\phi(M_{i-1}) = a_{M_{i-1}}$, nous prenons:

$$a_{M_{i-1}} = \psi_{M_i}\Big(\max\Big(\psi_{M_i}^{-1}\Big(\psi_{M_i}([M_i, n+1]) \setminus \phi_{M_i}([M_i, n+1])\Big)\Big)\Big).$$

Il suffit de montrer que $\psi_{M_i}([M_i, n+1]) \setminus \phi_{M_i}([M_i, n+1]) \neq \emptyset$. Si l'on suppose par l'absurde que $\psi_{M_i}([M_i, n+1]) \setminus \phi_{M_i}([M_i, n+1]) = \emptyset$, par conséquent $\psi_{M_i}([M_i, n+1]) = \phi_{M_i}([M_i, n+1])$ et $\psi_{M_i}^{-1} \circ \phi_{M_i}([M_i, n+1]) = [M_i, n+1]$. Donc, $\psi_{M_i}^{-1} \circ \phi_{M_i}$ est une permutation indécomposable dans $S_{[M_i,n+1]}$. Par le lemme 4.1.30, nous avons donc que $\phi_{M_i}^{-1}(\sigma, \Theta)\phi_{M_i}$ fixe $[M_i, n+1]$. Ainsi, par le corollaire 1.2.5, (σ, Θ) n'agit pas transitivement sur E. Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que $(E, \sigma, \Theta, A, B)$ est une hypercarte doublement pointée étiquetée.

Notons que $a_{M_{i-1}} \notin \phi_{M_i}([M_i, n+1])$, car $a_{M_{i-1}} \in \psi_{M_i}([M_i, n+1]) \setminus \phi_{M_i}([M_i, n+1])$. De plus, par hypothèse de récurrence et par construction de ϕ_{M_i} et ψ_{M_i}, ces dernières sont uniques. Par conséquent, $a_{M_{i-1}}$ est unique.

Donc,

$$\sigma = \cdots (a_{M_{i-1}}, \ldots, a_{M_i - 1})(a_{M_i}, a_{M_i+1}, \ldots, a_{M_{i+1}-1}) \cdots (a_{M_k}, a_{M_k+1}, \ldots, a_n, B)$$

où pour tout $i-1 \leq r \leq k-1$, a_{M_r} est donnée par l'équation 4.3, est unique.

De même, si $v_j \geq M_i$ alors $\phi_{v_j}([v_j, n+1]) \setminus \phi_{v_j}([v_j, n+1]) \neq \emptyset$ et nous prenons l'unique valeur:

$$b_{v_{j-1}} = \psi_{v_j}\left(\max\left(\psi_{v_j}^{-1}\left(\psi_{v_j}([v_j, n+1]) \setminus \phi_{v_j}([v_j, n+1])\right)\right)\right).$$

En répétant cette construction, nous trouverons des uniques formes cycliques pour α et σ, disons respectivement:

$$\sigma = (a_{M_1}, a_2, \ldots) \cdots (a_{M_{k-1}}, \ldots, a_{M_k - 1})(a_{M_k}, a_{M_k+1}, \ldots, a_{n+1}),$$

$$\alpha = (b_{v_1}, b_2, \ldots) \cdots (b_{v_{l-1}}, \ldots, b_{v_l - 1})(b_{v_l}, b_{v_l+1}, \ldots, b_{n+1}),$$

telles que $a_{M_k} = A$, $b_{v_l} = B$ et si pour tout $1 \leq i \leq n+1$ nous posons $\phi(i) = a_i$ et $\psi(i) = b_i$, alors pour tout $i \leq r \leq k$, a_{M_r} est donnée par l'équation 4.3 et pour tout $j \leq r \leq l$, b_{v_r} est donnée par l'équation 4.4. □

4.1.3 Injectivité et surjectivité

Lemme 4.1.32 *Soit $H = (E, \sigma, \alpha, A, B)$ le représentant d'une hypercarte doublement pointée à $n+1$ brins. Il existe $\Theta \in T_{n+1}$ telle que $\mathcal{F}(\Theta) = [H]_{\simeq}$.*

Démonstration. Par le lemme 4.1.31, il existe des uniques formes cycliques pour α et σ, disons respectivement:

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots) \cdots (a_{M_{k-1}}, \ldots, a_{M_k - 1})(a_{M_k}, a_{M_k+1}, \ldots, a_{n+1}),$$

$$\alpha = (b_1, b_2, \ldots) \cdots (b_{v_{l-1}}, \ldots, b_{v_l - 1})(b_{v_l}, b_{v_l+1}, \ldots, b_{n+1}),$$

où $a_{n+1} = b_{v_l} = B$, $a_{M_k} = b_{n+1} = A$ et telles que pour tout $1 \leq p \leq n+1$ si nous posons $\phi(p) = a_p$ et $\psi(p) = b_p$, alors les a_{M_i} et b_{v_j}, $i < k$ et $j < l$, sont données respectivement par les équations 4.3 et 4.4.

Comme (σ, α) agit transitivement sur E, par le lemme 4.1.30, on a que $\Theta = \psi^{-1} \circ \phi \in T_{n+1}$. Comme $\Theta \in T_{n+1}$, par le lemme 4.1.28, nous avons que $\phi^{-1}\sigma\phi$ et $\phi^{-1}\alpha\phi$ sont construites selon l'algorithme 4.1.25 par rapport à Θ.

Pour conclure, il suffit de montrer que $\phi(n+1) = B$ et $\phi(\Theta^{-1}(n+1)) = A$. Nous avons que $a_{M_k} = b_{n+1} = A$. Alors, $\phi(M_k) = \psi(n+1) = A$. Par conséquent, $\Theta^{-1}(n+1) = \phi^{-1} \circ \psi(n+1) = A$ et $\phi(\Theta^{-1}(n+1)) = A$. De plus, comme $a_{n+1} = B$, on a $\phi(n+1) = B$. D'où $\mathcal{F}(\Theta) = [H]_{\simeq}$. $\square$

Lemme 4.1.33 *Soient $\Theta, \Theta' \in T_{n+1}$ telles que $\mathcal{F}(\Theta) = \mathcal{F}(\Theta')$. Alors $\Theta = \Theta'$.*

Démonstration. Prenons $H = (E, \sigma, \alpha, A, B)$ comme représentant de $\mathcal{F}(\Theta)$ et $H' = (E', \sigma', \alpha', A', B')$ comme représentant de $\mathcal{F}(\Theta')$. Il existe alors une bijection $f : E \to E'$ telle que $\sigma = f^{-1}\sigma' f$, $\alpha = f^{-1}\alpha' f$, $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Écrivons σ', α' sous les uniques formes cycliques données par le lemme 4.1.31 et prenons $\phi', \psi' : [n+1] \to E$ qui y sont associées. Écrivons σ', α' sous les uniques formes cycliques données par le lemme 4.1.31 et prenons $\phi, \psi : [n+1] \to E$ qui y sont associées. Comme $\sigma = f^{-1}\sigma' f$, $\alpha = f^{-1}\alpha' f$ sont les uniques formes cycliques de σ et α, nous avons alors $\phi' = f \circ \phi$ et $\psi' = f \circ \psi$. Donc,

$$\Theta' = \psi'^{-1} \circ \phi' = (\psi^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ \phi) = \psi^{-1} \circ \phi = \Theta.$$

D'où $\Theta = \Theta'$. $\square$

Théorème 4.1.34 *Soit $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \ddot{\mathcal{H}}_{n+1}$ définie par*

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n+1], \sigma, \alpha, \Theta^{-1}(n+1), n+1)]_{\simeq},$$

où σ et α sont construites selon l'algorithme 4.1.25. Alors $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans S_{n+1} vers l'ensemble des hypercartes doublement pointées à $n+1$ brins.

Démonstration. Soient $\Theta \in T_{n+1}$ et α, σ construites selon l'algorithme 4.1.25. Par les lemmes 4.1.27 et 4.1.30, (σ, α) agit transitivement sur $[n+1]$ et ainsi $\mathcal{F}$ est bien définie. Par le lemme 4.1.32, $\mathcal{F}$ est surjective. De plus, par le lemme 4.1.33, $\mathcal{F}$ est injective. $\square$

4.2 Bijection entre les permutations indécomposables et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$

Proposition 4.2.35 *(Sillke, 1989, 1992)*
Soit $f : \ddot{\mathcal{H}}_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ définie par

$$f(\ [(E, \sigma, \alpha, A, B)]_{\simeq}\ ) = [(E, \sigma', \alpha', A)]_{\simeq},$$

où σ', α' sont obtenues en retirant B respectivement des cycles de σ et α. f est une bijection entre l'ensemble des hypercartes doublement pointées à $n+1$ brins et l'ensemble des hypercartes pointées à n brins.

Par le théorème 2.3.14, il existe une bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins. Par la proposition ci-dessus, il existe une bijection entre l'ensemble des hypercartes pointées à n brins et l'ensemble des hypercartes doublement pointées à $n+1$ brins et par le théorème 4.1.34, il existe une bijection entre ces derniers et les permutations indécomposables de S_{n+1}. D'où les permutations indécomposables dans S_{n+1} sont en bijection avec les sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$.

CHAPITRE V

BIJECTION D'OSSANA DE MENDEZ ET ROSENSTIEHL

Dans leur article, Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004) construisent en plusieurs étapes une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans $S_{[0,n]}$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins. Étant donné (E, σ, Θ, A) le représentant d'une hypercarte pointée à n brins, ils définissent d'abord une bijection $\phi = \psi(\sigma, \Theta, A)$ de E dans $[n]$ telle que $\phi(A) = d = |\mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)|$ et $\phi(A) \in \mathrm{LCC}(\phi\Theta\phi^{-1})$. De cela, étant donné $d \in [n]$, ils démontrent une bijection entre les hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est d et les permutations $\Theta \in S_n$ telles que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Finalement, ils démontrent que ces derniers sont en bijection avec les permutations indécomposables de $S_{[0,n]}$.

Dans ce chapitre, pour démontrer que U_n est en bijection avec T_{n+1}, nous allons garder en tête la construction utilisée par Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004) en démontrant d'abord la bijection entre les permutations $\Theta \in S_n$ telles que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$ et les hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est d. Nous conclurons alors en démontrant la bijection entre l'ensemble des hypercartes pointées à n brins et les permutations indécomposables dans $S_{[0,n]}$.

De plus, nous généralisons légèrement la construction d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl. Soit $g : [n] \to [n]$ une fonction définie de sorte que pour tout $i \in [n]$,

$g(i) \in [i]$. Cette fonction est fixée pour l'ensemble du chapitre. Pour obtenir la bijection non généralisée d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl, il suffit de prendre $g = \mathrm{Id}_{[n]}$.

5.1 Bijection entre permutations et hypercartes

Soit $f : S_n \times [n] \to \mathcal{H}_n$ définie par:

$$f(\Theta, d) = [([n], \sigma, \Theta, a)]_{\simeq},$$

où $a = g(d)$, $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$ et σ est construite par l'algorithme suivant:

Algorithme 5.1.36 Trouvez les positions des minima de droite à gauche de Θ qui sont strictement plus grand que d, disons $d < m_l < m_{l-1} < \cdots < m_1 = n$. Écrire σ sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\sigma = (1, 2, \ldots, d)(d+1, d+2, \ldots, m_l)(m_l + 1, \ldots, m_{l-1}) \ldots (m_2 + 1, \ldots, n). \quad (5.1)$$

Nous voulons démontrer que $f(\cdot, d)$ est une bijection de l'ensemble des permutations $\Theta \in S_n$ tel que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins dont le degré du sommet pointé est d.

5.1.1 Transitivité et fonction d'ordre

Proposition 5.1.37 *Soient $\Theta \in S_n$ et $d \in LCC(\Theta)$. Alors, σ est construite par l'algorithme 5.1.36 par rapport à Θ et d si et seulement si σ^{-1} peut être définie récursivement par $\sigma^{-1}(1) = d$ et:*

$$\sigma^{-1}(i+1) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin \sigma^{-1}([i]), \\ \Theta^{-1} \min\Big([i] \setminus \big(\Theta([i]) \cap [i]\big)\Big) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Démonstration. Comme l'inverse d'une permutation est unique, σ^{-1} est unique. Par ailleurs, il est clair par construction de σ que $\sigma^{-1}(1) = d$. Si $\min(\mathrm{LCC}(\Theta)) \neq 1$, notons que pour $k = \min(\mathrm{LCC}(\Theta)) - 1 < d$, on a $\Theta([k]) = [k]$. En particulier, pour $i > k$, $\min([k+1, i] \setminus \Theta([k+1, i])) = \min([i] \setminus \Theta([i]))$.

Soit $i \geq 1$. Si $i \notin \sigma^{-1}([i])$, alors $\sigma(i) = i + 1$ et donc $\sigma^{-1}(i+1) = i$.

Si $i \in \sigma^{-1}([i])$, alors $i + 1$ appartient au cycle suivant de celui contenant i et donc $i + 1 \geq d + 1$. Par conséquent, $\sigma^{-1}(i + 1)$ doit être la position d'un minimum de droite à gauche de Θ strictement plus grand que d, disons m_j. Soit l le nombre de minima de droite à gauche de Θ strictement plus grand que d. Supposons que $j \leq l - 1$. Comme $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)}$ est une permutation indécomposable et $i = m_{j+1}$, par la proposition 1.4.8 (iii) et la note en début de preuve, on a $m_j = \Theta^{-1} \min([i] \setminus \Theta([i]))$.

Supposons que $j = l$ et ainsi $i = d$. Il y a deux cas possibles:

(i) Si $m_j = \Theta^{-1} \min(\mathrm{LCC}(\Theta))$, par la proposition 1.4.8 (iii) et la note en début de preuve, on a que $m_j = \Theta^{-1} \min([d] \setminus \Theta([d]))$, car $d \in [m_j - 1]$.

(ii) S'il existe une position d'un minimum de droite à gauche de $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)}$ plus petit que m_l, alors cette position est plus petit que d et la proposition 1.4.8 (iii) s'applique. Donc, $m_j = \Theta^{-1} \min([d] \setminus \Theta([d]))$, car $d \in [m_{l+1}, m_l - 1]$.

Par conséquent, si $i \in \sigma^{-1}([i])$, alors $\sigma^{-1}(i+1) = \Theta^{-1} \min\Big([i] \setminus \big(\Theta([i]) \cap [i]\big)\Big)$.

Réciproquement, montrons que si σ peut être définie récursivement par l'équation 5.2, alors σ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à Θ et à d. On a $\sigma^{-1}(1) = d$ en procédant par récurrence jusqu'à $i = d - 1$, on obtient que $(d, d-1, \ldots, 2, 1)$ est un cycle de σ^{-1}. Si $d = n$, on a fini, car $(1, 2, \ldots, d-1, d)$ est l'unique cycle de σ.

Supposons que $d \neq n$. Posons $i = d$. Soit $m_{l+1} \leq d$ une position d'un minimum de droite à gauche de Θ et $m_l > d$ la position du minimum de droite à gauche précédent à m_{l+1} (lu de droite à gauche), qui existent car $d \neq n$ et $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Comme $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)} \in T_{\mathrm{LCC}(\Theta)}$, par la note en début de preuve et la proposition 1.4.8 (iii), on a que $m_l = \Theta^{-1}\min([d] \setminus \Theta([d]))$, car $d \in [m_{l+1}, m_l - 1]$. Ce qui est $\sigma^{-1}(d+1)$.

En procédant par récurrence jusqu'à $i = m_l - 1$, on obtient que $(m_l, m_l - 1, \ldots, d+2, d+1)$ est un cycle de σ^{-1}. Pour $i = m_l$, on a que $\sigma^{-1}(m_l + 1) = \Theta^{-1}\min([m_l] \setminus \Theta([m_l]))$, ce qui est la position d'un minimum de droite à gauche de Θ précédent m_l, et ce, par la proposition 1.4.9 (ii 1). En procédant ainsi par récurrence, on trouve que σ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à Θ et à d. $\square$

Lemme 5.1.38 *Soit $d \in [n]$. Soit $\Theta, \sigma \in S_n$ où σ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à Θ et d. Alors, on a les équivalences suivantes:*

(i) $d \in LCC(\Theta)$;

(ii) le couple (σ, Θ) est indécomposable;

(iii) le couple (σ, Θ) agit transitivement sur $[n]$.

Démonstration. Si $d = n$, alors (iii), (ii) et (i) sont équivalents. En effet, $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$, donc (σ, Θ) est indécomposable et agit transitivement sur $[n]$. De plus, par définition de dernière composante connexe $n = d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Considérons alors le cas où $d \neq n$.

Par la proposition 1.2.3 (vi), nous avons (iii) implique (ii).

Montrons que (i) implique (iii). Supposons que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Comme $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$, comme $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)}$ est une permutation indécomposable de l'ensemble

$\mathrm{LCC}(\Theta)$ et comme $m_1, m_2, \ldots, m_l$ sont les positions des minima de droite à gauche de Θ plus grand que d, ils sont aussi les positions des minima de droite à gauche de $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)}$. Par le corollaire 1.3.7, pour tout $j \leq l-1$, $\Theta|_{\mathrm{LCC}(\Theta)}(m_j) \leq m_{j+1} \notin \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(m_j)$. Pour m_l, par la preuve de la proposition 5.1.37 et $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$, on a $\Theta(m_l) \leq d \notin \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(m_l)$. Par conséquent, pour tout $i \geq 2$, soit $\sigma^{-1}(i) < i$, soit $\Theta\sigma^{-1}(i) < i$, dans ce dernier cas $\sigma^{-1}(i)$ est un des m_j. D'où le couple (σ, Θ) agit transitivement sur $[n]$.

Montrons que (ii) implique (i). Supposons que $d \notin \mathrm{LCC}(\Theta)$, il existe alors $x \geq d+1$ tel que $\Theta([x,n]) = [x,n]$ et ainsi $\Theta([x-1]) = [x-1]$. Or, $x-1$ est donc la position d'un minimum de droite à gauche de Θ et $x-1 \geq d$. On considère deux cas:

(i) Si $x-1 = d$, alors $\Theta([d]) = [d] = \sigma([d])$.

(ii) Si $x-1 > d$, alors $x-1$ est un minimum de droite à gauche de Θ strictement plus grand que d, par construction de σ, on a alors $\sigma([x-1]) = [x-1] = \Theta([x-1])$.

D'où le couple (σ, Θ) est décomposable. Ce qui démontre que si (σ, Θ) est indécomposable, alors $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. □

Remarque 5.1.39 Pour montrer que (i) implique (ii), il suffit d'appliquer la proposition 1.2.3 (v), car $d \in \mathrm{FCC}(\sigma) \cap \mathrm{LCC}(\Theta)$. Cependant pour démontrer l'équivalence entre les 3 énoncés, cette implication n'est pas très utile.

Lemme 5.1.40 *Soit (E, σ, Θ, A) une hypercarte pointée étiquetée à n brins. Soit $d = |Orb_{\langle\sigma\rangle}(A)|$ et $a = g(d)$. Soit $\phi_i : [i] \to E$ une fonction définie récursivement* *par* $\phi_1(1) = \sigma^{1-a}(A)$ *et pour* $j < i+1$, $\phi_{i+1}(j) = \phi_j(j)$ *et:*

$$\phi_{i+1}(i+1) = \begin{cases} \sigma\phi_i(i) & \text{si } \sigma\phi_i(i) \notin \phi_i([i]), \\ \sigma\Theta^{-1}\phi_i\Big(\min\Big([i] \setminus \phi_i^{-1}\big(\Theta\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big)\Big)\Big) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Soit $\phi : [n] \to E$ *définie par* $\phi(i) = \phi_n(i)$. *Alors,* ϕ *est une bijection.*

Démonstration. Montrons par récurrence pour tout $i \in [n]$ que $\phi_i : [i] \to E$ est injective.

On a $\phi_1(1) = \sigma^{1-a}(A)$. Soit $i \geq 1$. Si $\sigma\phi_i(i) \notin \phi_i([i])$, alors $\phi_{i+1}(i+1) = \sigma\phi_i(i) \notin \phi_i([i])$.

Dans le cas où $\sigma\phi_i(i) \in \phi_i([i])$, supposons par l'absurde que:

$$[i] \setminus \phi_i^{-1}\big(\Theta\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big) = \emptyset.$$

Ce qui est équivalent à $\Theta\phi_i([i]) = \phi_i([i])$, car par hypothèse de récurrence, ϕ_i est une bijection entre $[i]$ et un sous-ensemble de E. De plus, par construction de ϕ jusquà i, on a que $\sigma\phi_i([i]) \subseteq \phi_i([i])$. Comme ces deux ensembles ont la même cardinalité, ils sont égaux. Par conséquent, $\sigma\phi_i([i]) = \Theta\phi_i([i]) = \phi_i([i])$. Comme le couple $\phi_i^{-1}(\sigma, \Theta)\phi_i$ est décomposable, par la proposition 1.2.3 (vi), (σ, Θ) n'agit pas transitivement sur E. Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que (E, σ, Θ, A) est une hypercarte pointée étiquetée. Donc, $\phi_{i+1}(i+1)$ peut être calculée par la formule donnée par le cas « sinon ».

De cela, on a que $\phi_{i+1}(i+1) \notin \sigma\Theta^{-1}\phi_i\Big(\phi_i^{-1}\big(\Theta\phi_i([i]) \cap \phi_i([i])\big)\Big) \subseteq \sigma\phi_i([i])$. Or, $\sigma\phi_i([i]) = \phi_i([i])$. Par conséquent, $\phi_{i+1}(i+1)$ est injective, car $\phi_{i+1}(i+1) \notin \phi_i([i])$ et pour $j < i+1$, $\phi_{i+1}|_{[j]} = \phi_j$ et cette dernière est injective. Comme $|E| = n$ et $\phi = \phi_n$ est injective, on conclut que ϕ est une bijection et est bien définie. $\square$

Remarque 5.1.41 Notons que si $a = d$ la bijection ϕ ci-dessus correspond à la fonction réciproque de celle définie par $L = \Psi(\sigma, \Theta, A)$ donnée dans la définition 2.4 dans (Ossana de Mendez et Rosenstiehl, 2004).

5.1.2 Injectivité et surjectivité

Lemme 5.1.42 *Soit (E, σ, Θ, A) un représentant d'une hypercarte pointée à n brins et $\phi : [n] \to E$ la bijection définie ci-dessus. Soient $d = |Orb_{\langle\sigma\rangle}(A)|$ et $a = g(d)$. Alors, $d \in LCC(\phi^{-1}\Theta\phi)$, $\phi(a) = A$ et $\phi\sigma\phi^{-1}$ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi$ et d.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\phi(a) = A$. Comme $\phi(1) = \sigma^{1-a}(A) \in \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)$ et que $d = |\mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)|$, par construction de ϕ, pour tout $x \leq d$, $\phi(x) \in \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)$. Comme $a \leq d$, $\phi(a) \in \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)$. De cela:

$$\phi(a) = \sigma\phi(a-1) = \sigma^2\phi(a-2) = \cdots = \sigma^{a-1}\phi(1) = \sigma^{a-1}\sigma^{1-a}(A) = A.$$

Montrons que $d \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi)$. Supposons par l'absurde que $d \notin \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi)$, il existe alors $x \in [d+1, n]$ tel que $\phi^{-1}\Theta\phi([x-1]) = [x-1]$ et $d \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi|_{[x-1]})$. Comme $\phi(1) \in \mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)$ et par construction de ϕ, on a $(\phi^{-1}\sigma\phi)^{-1}(1) = d$ et que $\phi^{-1}\sigma\phi|_{[x-1]}$ est définie par l'équation 5.2. Par la proposition 5.1.37, $\phi^{-1}\sigma\phi|_{[x-1]}$ est donc construite par l'algorithme 5.1.36 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi|_{[x-1]}$ et d. Comme $d \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi|_{[x-1]})$, par le lemme 5.1.38, on a alors que $\phi^{-1}(\sigma, \Theta)\phi|_{[x-1]}$ est un couple indécomposable dans $S_{x-1} \times S_{x-1}$. Par le corollaire 1.2.5, nous trouvons alors que le couple (σ, Θ) n'agit pas transitivement sur E. Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que (E, σ, Θ, A) soit une hypercarte pointée étiquetée.

D'où $d \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi)$. De plus, par la proposition 5.1.37, $\phi\sigma\phi^{-1}$ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à $\phi^{-1}\Theta\phi$ et d. $\square$

Lemme 5.1.43 *Soit $d \in [n]$, soit $a = g(d)$ et soient $\Theta, \Theta' \in S_n$ telles que $d \in LCC(\Theta) \cap LCC(\Theta')$ et $f(\Theta, d) = f(\Theta', d)$. Alors, $\Theta = \Theta'$.*

Démonstration. Par construction de $f(\cdot, d)$, il existe un représentant de la forme $H_1 = ([n], \sigma, \Theta, a)$ pour $f(\Theta, d)$ et un représentant de la forme $H_2 = ([n], \sigma', \Theta', a)$ pour $f(\Theta', d)$ tels que σ, σ' soient construites selon l'algorithme 5.1.36 respectivement par rapport à Θ et Θ' et à d.

Comme H_1 et H_2 sont deux représentants d'une même hypercarte pointée, il existe une bijection $\phi : [n] \to [n]$ tel que $\phi(a) = a$, $\phi^{-1}\Theta\phi = \Theta'$ et $\phi^{-1}\sigma\phi = \sigma'$.

Comme σ'^{-1} est définie récursivement par la proposition 5.1.37, car $d \in \mathrm{LCC}(\Theta')$, en remplaçant σ'^{-1} par $\phi^{-1}\sigma^{-1}\phi$ et Θ' par $\phi^{-1}\Theta\phi$ nous trouvons que ϕ peut être définie par l'équation 5.3. Il suffit alors de démontrer par récurrence que $\phi = \mathrm{Id}_{[n]}$.

Si $i = 1$, alors $\phi(1) = \sigma^{1-a}(a) = \sigma(d) = 1$, car $a \in [d]$ et $\sigma|_{[d]} = (1, 2, \ldots, a-1, a, a+1, \ldots, d)$. Soit $m \in [n-1]$. Supposons que pour tout $i \in [m]$, on ait $\phi(i) = i$.

Si $\sigma\phi(i) \notin \phi([i])$, alors par hypothèse de récurrence et définition de ϕ, on a $\phi(i+1) = \sigma(i)$ et $i \notin \sigma^{-1}([i])$. Or, comme σ^{-1} est définie récursivement par la proposition 5.1.37, car $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$, on a $\sigma^{-1}(i+1) = i$ et donc $\phi(i+1) = i+1$.

Dans le cas sinon, par hypothèse de récurrence, on a:

$$\phi(i+1) = \sigma\Theta^{-1} \min\Big([i] \setminus \big(\Theta([i]) \cap [i]\big)\Big).$$

Par la proposition 5.1.37, $\sigma^{-1}(i+1) = \Theta^{-1} \min\Big([i]\setminus\big(\Theta([i])\cap[i]\big)\Big)$. Par conséquent, $\phi(i+1) = i+1$. Donc, $\phi = \mathrm{Id}_{[n]}$ et ainsi $\Theta = \Theta'$. $\square$

Théorème 5.1.44 *Soit $f : S_n \times [n] \to \mathcal{H}_n$ définie par:*

$$f(\Theta, d) = [([n], \sigma, \Theta, a)]_{\simeq},$$

où $a = g(d)$ et σ est définie par l'algorithme 5.1.36 par rapport à Θ et d. Alors $f(\cdot, d)$ est une bijection de l'ensemble des permutations $\Theta \in S_n$ telles que $d \in LCC(\Theta)$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins dont le degré du sommet pointé est d.

Démonstration. Soit $\Theta \in S_n$ tel que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Par le lemme 5.1.38, $f(\cdot, d)$ est bien définie.

Comme le degré du sommet pointé est invariant sous isomorphismes d'hypercartes pointées étiquetées, la valeur de d ne dépend pas du choix du représentant de l'hypercarte pointée. Soit $H = (E, \sigma, \Theta, A)$ le représentant d'une hypercarte pointée tel que $d = |\mathrm{Orb}_{\langle\sigma\rangle}(A)|$. Par les lemmes 5.1.40 et 5.1.42, nous savons qu'il existe une bijection $\phi : [n] \to E$ telle que $\phi(g(d)) = A$, $d \in \mathrm{LCC}(\phi^{-1}\Theta\phi)$ et telle que $\phi^{-1}\sigma\phi$ soit construite selon l'algorithme 5.1.36. Par conséquent, $\phi^{-1}\Theta\phi$ est la pré-image par $f(\cdot, d)$ de $[H]_{\simeq}$. D'où $f(\cdot, d)$ est surjective. De plus, par le lemme 5.1.43, $f(\cdot, d)$ est injective. $\square$

5.2 Bijection entre hypercartes et permutations indécomposables

Lemme 5.2.45 *Soit $F : S_n \times [n] \to S_{[0,n]}$ définie par*

$$F(\Theta, d)(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i{=}d, \\ \Theta(d) & \text{si } i{=}0, \\ \Theta(i) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.4}$$

C'est-à-dire que $F(\Theta, d)$ est obtenue insérant 0 entre d et $\Theta(d)$ dans le cycle de Θ contenant d. Alors, $F(\cdot, d)$ est une bijection de l'ensemble des permutations $\Theta \in S_n$ tel que $d \in LCC(\Theta)$ vers l'ensemble des permutations indécomposables $\hat{\Theta}$ de $[0, n]$ telle que $\hat{\Theta}^{-1}(0) = d$.

Démonstration. Soit $\Theta \in S_n$ tel que $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Démontrons d'abord que $F(\Theta, d)$ est une permutation indécomposable si et seulement si $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$. Si $d \notin \mathrm{LCC}(\Theta)$, il existe alors $x > d$ tel que $\mathrm{LCC}(\Theta) = [x, n]$. Comme $x > d > 0$ et par construction de $F(\Theta, d)$, on a alors que $F(\Theta, d)([x, n]) = [x, n]$ et donc $F(\Theta, d)$ est décomposable. Donc, si $F(\Theta, d)$ est indécomposable alors $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$.

Réciproquement, si $d \in \mathrm{LCC}(\Theta)$, alors il existe $x \leq d$ tel que $\Theta([x, n]) = [x, n]$. Par construction de $F(\Theta, d)$, on a alors que $\mathrm{LCC}(F(\Theta, d)) = [0, n]$ et donc $F(\Theta, d)$ est une permutation indécomposable de $[0, n]$ tel que $F(\Theta, d)^{-1}(0) = d$.

Par ce qui précède, $F(\cdot, d)$ est bien définie et est surjective. De plus, elle est injective. □

Le théorème suivant est la version équivalente du théorème principal dans (Ossana de Mendez et Rosenstiehl, 2004).

Théorème 5.2.46 *Soit $\mathcal{F} : T_{[0,n]} \to \mathcal{H}_n$ définie par:*

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n], \sigma, \alpha, a)]_{\simeq},$$

où $a = g(\Theta^{-1}(0))$, α est obtenue en retirant 0 de l'écriture en cycle de Θ et σ est construite par l'algorithme suivant:

Algorithme 5.2.47 *Trouvez les positions des minima de droite à gauche de Θ, disons $\Theta^{-1}(0) = m_l < m_{l-1} < \cdots < m_1 = n$. Écrire σ sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:*

$$\sigma = (1, 2, \ldots, m_l)(m_l + 1, m_l + 2, \ldots, m_{l-1}) \ldots (m_2 + 1, \ldots, n).$$

Alors, $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables $\Theta \in S_{[0,n]}$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins. De plus, si $\Theta^{-1}(0) = d$ alors le degré du sommet pointé de l'hypercarte $\mathcal{F}(\Theta)$ est d.

Démonstration. Soit $\Theta \in T_{[0,n]}$. Posons $d = \Theta^{-1}(0)$. Par le lemme 5.2.45, nous avons que $F^{-1}(\cdot, d)$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables $\hat{\delta} \in T_{[0,n]}$ vers l'ensemble des permutations $\delta \in S_n$ telles que $d \in \mathrm{LCC}(\delta)$. En particulier, $d \in \mathrm{LCC}(\alpha)$, car $\alpha = F^{-1}(\Theta, d)$.

Comme $d = m_l$, pour tout $j < l$, on que m_j est la position d'un minimum de droite à gauche de Θ plus grand que d. Comme pour tout $i > m_l$, $\Theta(i) = \alpha(i)$, nous avons donc que les m_j, avec $j < l$, sont les positions des minima de droite à gauche de α strictement plus grand que d. Ainsi, σ est construite selon l'algorithme 5.1.36 par rapport à α et d. Donc, $\mathcal{F}(\Theta) = f(\alpha, d) = f(F^{-1}(\Theta, d), d)$.

Par le théorème 5.1.44, nous avons que $f(\cdot, d)$ est une bijection de l'ensemble des permutations $\delta \in S_n$ telles que $d \in \mathrm{LCC}(\delta)$ vers l'ensemble des hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est d. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables $\Theta \in S_{[0,n]}$ telles que $\Theta^{-1}(0) = d$ vers l'ensemble des hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est d.

Comme $\mathcal{H}_n = \bigsqcup_{d \in [n]} \mathcal{H}_n^d$ et comme $\Theta^{-1}(0) = d$ varie de 1 à n, $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposables dans $S_{[0,n]}$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins. $\square$

Remarque 5.2.48 Le théorème principal d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl, donne plutôt une bijection de l'ensemble des hypercartes pointées dont le degré du sommet pointé est d vers les permutations indécomposables dans $\Theta \in S_{[0,n]}$ telles que $\Theta^{-1}(0) = d$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est la fonction réciproque de celle donnée par le théorème 4.4 dans (Ossana de Mendez et Rosenstiehl, 2004).

5.3 Bijection entre les permutations indécomposables et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$

Par le théorème 2.3.14, il existe une bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins et ces derniers sont en bijection, par le théorème 5.2.46, avec les permutations indécomposables dans $S_{[0,n]}$. Finalement, ces derniers sont en bijection avec les permutations indécomposables dans S_{n+1}. D'où les permutations indécomposables dans S_{n+1} sont en bijection avec les sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$.

CHAPITRE VI

BIJECTION DE CORI

Dans son article, Cori (2009) construit une nouvelle bijection entre l'ensemble des permutations indécomposables dans S_{n+1} et l'ensemble des hypercartes à n brins en s'inspirant fortement de la bijection construite par Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004). Il construit cette bijection dans le but de démontrer un résultat combinatoire: le nombre de cycles et le nombre de maxima de gauche à droite d'une permutation indécomposable sont égaux respectivement aux nombres de sommets et de segments d'une hypercarte pointée.

Pour démontrer que la bijection de Cori est bien une bijection, plutôt que de construire étape par étape la preuve comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, nous allons donner un lien entre la bijection de Cori et celle d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl qui nous permettra de démontrer la bijection et aussi de déduire directement certaines propriétés de la bijection de Cori.

6.1 Bijection entre permutations et hypercartes

Soit $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ définie par:

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n], \sigma, \alpha, n)]_{\simeq},$$

où α et σ sont construites par l'algorithme suivant:

Algorithme 6.1.49 On pose α la permutation obtenue en retirant $n+1$ de l'écriture en cycle de Θ. Trouvez les positions des maxima de gauche à droite de Θ, disons $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k = \Theta^{-1}(n+1)$. Écrire σ sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\sigma = (1, 2, \ldots, M_2 - 1)(M_2, M_2 + 1, \ldots, M_3 - 1) \ldots (M_k, \ldots, n). \tag{6.1}$$

6.1.1 Lien avec la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl

Soit $\varphi : [n] \to [n]$ définie par $\varphi(i) = (n+1) - i$. Sous cette bijection, l'ordre naturel de $\mathbb{P}$ est inversé. En effet, pour tout $a, b \in [n]$, si $a \leq b$ alors $\varphi(a) \geq \varphi(b)$. Alors, pour $(M, \Theta(M)), (a, b) \in \Gamma_\Theta$, si $a < M$ et $\Theta(M) > b$ alors $\varphi(a) > \varphi(M)$ et $\varphi(\Theta(M)) < \varphi(b)$. En particulier, les positions des maxima de gauche à droite d'une permutation $\Theta \in S_n$, disons $M_1 < M_2 < \cdots < M_k$, deviennent les positions des minima de droite à gauche de $\varphi^{-1}\Theta\varphi$, disons $m_1 > m_2 > \cdots > m_k$ où $m_1 = \varphi(M_1) = n, m_2 = \varphi(M_2) \ldots, m_k = \varphi(M_k)$.

Soit $\Theta \in T_{n+1}$. Soit $\varphi' : [0, n] \to [n+1]$ définie par $\varphi'(i) = (n+1) - i$. On a que Θ est indécomposable si et seulement si $\varphi'^{-1}\Theta\varphi'$ est indécomposable dans $S_{[0,n]}$. En effet, $\mathrm{FCC}(\Theta) = [n+1]$ si et seulement si $\mathrm{FCC}(\varphi'^{-1}\Theta\varphi') = [0, n]$. Soient $\sigma, \alpha \in S_n$ construites selon l'algorithme 6.1.49 par rapport à Θ. Comme α est obtenu de Θ en retirant $n+1$ de l'écriture en cycle de Θ, on a alors que $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ est obtenu de $\varphi'^{-1}\Theta\varphi'$ en retirant 0 de son écriture en cycle. En effet, $\varphi'|_{[n]} = \varphi$.

De plus, comme $\Theta \in T_{n+1}$, les maxima de gauche à droite de Θ deviennent les minima de droite à gauche de $\varphi'^{-1}\Theta\varphi'$ et vice et versa, car aucune position pour les maxima de gauche à droite de Θ n'est égale à $n+1$ et aucune position pour les minima de droite à gauche de $\varphi'^{-1}\Theta\varphi'$ n'est égale à 0. De cela, $\varphi^{-1}\sigma^{-1}\varphi$ peut être écrit sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\varphi^{-1}\sigma^{-1}\varphi = (1,2,\ldots,m_k)(m_k+1,d+2,\ldots,m_{k-1})\ldots(m_2+1,\ldots,m_1),$$

où $m_k < m_{k-1} < \cdots < m_1 = n$ sont les positions des minima de droite à gauche de $\varphi'^{-1}\Theta\varphi'$.

φ et φ' donnent ainsi un lien entre la bijection de Cori et celle d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl. Avant de démontrer le théorème, nous avons besoin de deux propositions.

Proposition 6.1.50 *Soit $f : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ qui envoie chaque représentant de la forme (E,σ,α,A) sur ceux de la forme (E,σ^{-1},α,A). Alors, f est une bijection entre hypercartes pointées étiquetées.*

Démonstration. Soient $H = (E,\sigma,\alpha,A), H' = (E',\sigma',\alpha',A')$ deux représentants d'une même hypercarte pointée. Il existe alors $\phi : E \to E'$ tel que $\sigma = \phi^{-1}\sigma'\phi$, $\alpha = \phi^{-1}\alpha'\phi$ et $\phi(A) = A'$. Donc, $\sigma^{-1} = \phi^{-1}\sigma'^{-1}\phi$ et $f(H) = f(H')$. Par ailleurs, si (σ,α) agit transitivement sur E, comme l'action d'inverser une permutation ne change pas le contenu des cycles, nous avons alors que (σ^{-1},α) agit transitivement sur E. Donc, f est bien définie.

Finalement, f est une bijection, car à un représentant (E,σ,α,A), on associe un unique représentant (E,σ^{-1},α,A) et à un représentant (E,σ^{-1},α,A) on associe la pré-image de représentant (E,σ,α,A). □

Du lien entre la bijection de Cori et celle d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl, nous pouvons déduire la proposition suivante:

Proposition 6.1.51 *Soient $\Theta \in S_{n+1}$, $\sigma,\alpha \in S_n$ où σ et α sont construites selon l'algorithme 6.1.49 par rapport à Θ. Alors, on a les équivalences suivantes:*

(i) Θ *est indécomposable;*

(ii) $\Theta^{-1}(n+1) \in FCC(\Theta)$*;*

(iii) le couple (σ, α) *est indécomposable;*

(iv) le couple (σ, α) *agit transitivement sur* $[n]$*.*

Démonstration. Posons $\tilde{\Theta} = \varphi'^{-1}\Theta\varphi'$. On a que Θ est indécomposable si et seulement si $\tilde{\Theta}$ est indécomposable dans $S_{[0,n]}$ si et seulement si $d = \tilde{\Theta}^{-1}(0) \in \mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\alpha\varphi)$ (lemme 5.2.45). Pour conclure qu'ils sont équivalents à (i), il suffit alors de démontrer que (ii), (iii) et (iv) sont équivalents à $d \in \mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\alpha\varphi)$.

Comme $\varphi(d) = \Theta^{-1}(n+1)$, on a alors que $\Theta^{-1}(n+1) \in \mathrm{FCC}(\alpha)$ si et seulement si $d \in \mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\alpha\varphi)$, car $\mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\alpha\varphi) = \varphi^{-1}(\mathrm{FCC}(\alpha))$. D'où (i) est équivalent à (ii).

On a que $d \in \mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\alpha\varphi)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(\sigma^{-1}, \alpha)\varphi$ agit transitivement sur $[n]$ (lemme 5.1.38) si et seulement si (σ, α) agit transitivement sur $[n]$ (proposition 6.1.50). D'où (i) est équivalent à (iv).

On a que $d \in \mathrm{LCC}(\varphi^{-1}\sigma^{-1}\varphi)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(\sigma^{-1}, \alpha)\varphi$ est indécomposable (lemme 5.1.38) si et seulement si $\varphi^{-1}(\sigma, \alpha)\varphi$ est indécomposable (proposition 1.2.3 iv). Or, il existe $i < n$ tel que $[i]$ est fixé à la fois par $\varphi^{-1}\sigma\varphi$ et $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ si et seulement s'il existe $j = (n+1) - i > 1$ tel que $\sigma([j,n]) = \alpha([j,n]) = [j,n]$. D'où (σ, α) est indécomposable si et seulement si $\varphi^{-1}(\sigma, \alpha)\varphi$ est indécomposable et d'où (i) est équivalent à (iii). □

Théorème 6.1.52 *Soit* $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ *définie par:*

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n], \sigma, \alpha, n)]_{\simeq},$$

où α et σ sont construits par l'algorithme 6.1.49. Alors $\mathcal{F}$ est une bijection de l'ensemble des permutations indécomposable $\Theta \in T_{n+1}$ vers l'ensemble des hypercartes pointées à n brins.

Démonstration. Par la proposition 6.1.51, on a que $\mathcal{F}$ est bien définie.

Soit $H = (E, \sigma, \alpha, A)$ le représentant d'une hypercarte pointée à n brins. Par la bijection de la proposition 6.1.50, on envoie H sur le représentant $f(H) = (E, \sigma^{-1}, \alpha, A)$. Soit d le degré du sommet pointée de $f(H)$. Par le théorème 5.2.46, il existe une unique permutation indécomposable Θ dans $S_{[0,n]}$ tel que $\Theta^{-1}(0) = d$ et $\mathcal{F}_{OMR}(\Theta) = [f(H)]_{\simeq}$, où $\mathcal{F}_{OMR}$ est la bijection définie dans le chapitre 5.

En particulier, il existe pour $[f(H)]_{\simeq}$ un unique représentant de la forme $([n], \sigma', \alpha', 1)$ où α' est obtenue en retirant 0 de l'écriture en cycle de Θ et σ' peut être écrit sous forme cyclique, constituée de nombres consécutifs croissants, de la façon suivante:

$$\sigma' = (1, 2, \ldots, m_l)(m_l + 1, m_l + 2, \ldots, m_{l-1}) \ldots (m_2 + 1, \ldots, n).$$

où $\Theta^{-1}(0) = m_l < m_{l-1} < \cdots < m_1$ sont les positions des minima de droite à gauche de Θ. Par le paragraphe au début de cette section, on a alors pour $[H]_{\simeq}$, qu'il existe un unique représentant de la forme:

$$H' = (\varphi^{-1}([n]), \varphi^{-1}\sigma^{-1}\varphi, \varphi^{-1}\alpha\varphi, \varphi^{-1}(1)),$$

où σ', α' ont les propriétés énoncées ci-dessus et avec $\mathcal{F}(\varphi'^{-1}\Theta\varphi) = [H']_{\simeq} = [H]_{\simeq}$. Donc, $\mathcal{F}$ est surjective et l'injectivité découle de l'unicité de Θ. □

6.2 Généralisation

Comme le lien existant entre la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl et celle de Cori est une suite de bijection, il est possible d'utiliser ce lien pour démontrer la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl à partir de la bijection de Cori. Pour ce faire, il faut généraliser légèrement la bijection de Cori en introduisant un paramètre a donné par la fonction $g' : [n] \to [n]$ définie de sorte que $g'(i) \in [i, n]$. Nous généralisons alors la fonction $\mathcal{F} : T_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ par:

$$\mathcal{F}(\Theta) = [([n], \sigma, \alpha, a)]_{\simeq},$$

où $a = g'(\Theta^{-1}(n+1))$. Pour obtenir la bijection non généralisée de Cori, il suffit de prendre $g'(i) = n$. Pour démontrer la bijection donnée dans Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004) à partir de la bijection donnée dans Cori (2009) en utilisant le lien décrit dans la section précédente, il faut prendre $g'(i) = i$.

Il faut de plus généraliser la fonction d'ordre donnée dans (Cori, 2009). Soit (E, σ, α, A) une hypercarte pointée étiquetée à n brins dont le degré du sommet pointé est d. Soit $a = g'(n+1-d)$. Posons $I = [i, n]$. Par le lien décrit dans ce chapitre, nous obtenons à partir de la fonction d'ordre donnée dans le chapitre 5 une fonction récursive $\phi_i : [i, n] \to E$ définie par $\phi_n(n) = \sigma^{n-a}(A)$ et pour $j > i-1$, $\phi_{i-1}(j) = \phi_j(j)$ et:

$$\phi_{i-1}(i-1) = \begin{cases} \sigma^{-1}\phi_i(i) & \text{si } \sigma^{-1}\phi_i(i) \notin \phi_i([i]), \\ \sigma^{-1}\alpha^{-1}\phi_i\Big(\max\Big(I \setminus \phi_i^{-1}\big(\alpha\phi_i(I) \cap \phi_i(I)\big)\Big)\Big) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Finalement, on obtient une bijection $\phi : [n] \to E$ par $\phi(i) = \phi_1(i)$.

Remarque 6.2.53 Nous prenons $a = g'(n+1-d)$, car dans la construction de Cori, le degré du sommet pointé de $\mathcal{F}(\Theta)$ est $d = n + 1 - \Theta^{-1}(n+1)$.

6.3 Bijection entre les permutations indécomposables et les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{F}_2$

Par le théorème 2.3.14, il existe une bijection entre les sous-groupes d'indice fini n de $\mathbb{F}_2$ et les hypercartes pointées à n brins et ces derniers sont en bijection, par le théorème 6.1.52, avec les permutations indécomposables de S_{n+1}. D'où les permutations indécomposables dans S_{n+1} sont en bijection avec les sous-groupes d'indice n de $\mathbb{F}_2$.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était d'étudier la construction de 4 bijections entre les permutations indécomposables et les hypercartes pointées. Cette étude consistait à réécrire la preuve de ces bijections et aussi de trouver certaines propriétés qu'ont en commun ces bijections.

Nous avons tout d'abord introduit un nouveau concept, celui des couples indécomposables dans $S_n \times S_n$. Nous avons aussi présenté des formules récursives pour calculer les maxima de gauche à droite et minima de droite à gauche d'une permutation indécomposable donnée. Ces formules permirent de construire des fonctions d'ordres définies récursivement.

Par la suite, nous avons démontré la bijection entre les hypercartes pointées à n brins et les sous-groupes d'indice fini n du groupe libre $\mathbb{F}_2$.

Nous avons ensuite donné une nouvelle preuve pour chacune des bijections étudiées au travers desquelles nous avons démontré qu'il existe une équivalence entre permutation indécomposable, couple indécomposable et hypercarte pointée. Cependant, vu le nombre restreint de bijections considérées et existantes, il est trop tôt pour affirmer que toutes les bijections entre permutations indécomposables et hypercartes pointées satisfont cette propriété.

Finalement, nous avons mis en évidence un lien entre la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl et celle de Cori. Ce lien nous a permis de déduire la bijection de Cori et aussi de prouver la bijection d'Ossana de Mendez et Rosenstiehl (2004) à partir de la preuve donnée dans Cori (2009). Pour ce faire, il suffit de généraliser légèrement la bijection de Cori.

Pour conclure, nous espérons que l'approche utilisée pour construire les preuves des bijections étudiées permettra de trouver une preuve générale pour démontrer les bijections entre permutations indécomposables et les hypercartes pointées ou encore de trouver une méthode pour construire de telles bijections.

BIBLIOGRAPHIE

Bacher, R. et Reutenauer, C. (2015). Number of right ideals and a q-analogue of indecomposable permutations. *Canadian Journal of Mathematics.*

Comtet, L. (1972). Sur les coefficients de l'inverse de la série formelle $\sum n!t^n$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série A*, *2*, 569–572.

Cori, R. (2009). Indecomposables permutations, hypermaps and labeled Dyck paths. *Journal of Combinatorial Theory, Serie A*, *116*, 1326–1343.

Cori, R. et Reutenauer, C. (2016). On Sillke's bijection. *Theoretical Computer Science.*

Dress, A.W.M. et Franz, R. (1985). Parametrizing the subgroups of finite index in a free group and related topics. *Bayreuther Mathematische Schriften*, *20*, 1–8.

Dress, A.W.M. et Franz, R. (1987). Zur Parametrisierung von Untergruppen freier Gruppen. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, *20*, 125–134.

Hall, M. (1949). Subgroups of finite index in free groups. *Canadian Journal of Mathematics*, *1*, 187–190.

Ossana de Mendez, P. et Rosenstiehl, P. (2004). Transitivity and connectivity of permutations. *Combinatorica*, *24*(3), 487–501.

Sillke, T. (1989). Zur Kombinatorik von Permutationen. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, *21*, 8.

Sillke, T. (1992). *Eine Bijektion zwischen Untergruppen freier Gruppen und Systemen konexer Permutationen.* (thèse de doctorat). Universität Bielefeld.

INDEX