UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE FLOT DE RICCI SUR DES SURFACES À BOUTS ASYMPTOTIQUEMENT CYLINDRIQUES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN-FRANÇOIS ARBOUR

MARS 2016

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon superviseur Frédéric Rochon, qui m'a donné la chance depuis 2012 de profiter de son savoir et de sa grande générosité. J'ai énormément appris de lui et je ne peux qu'imaginer l'impact qu'il a et qu'il aura sur le reste de ma vie mathématique.

Je tiens aussi à remercier Olivier Collin, qui m'a fournit un énorme soutient tout au long de mes études à l'UQAM. L'attention qu'il m'a portée et la présence avec laquelle il m'a toujours acueilli ont joué un très grand rôle pour m'aider à toujours garder le moral et la passion pour les mathématiques.

Je veux aussi souligner l'importance que mes collègues étudiants ont et ont eu sur moi depuis les cinq dernières années. Ce sont tous des gens exceptionnels, qui m'ont immensément influencé et pour qui j'ai un grand respect. Je parle bien-sûr de Alex, Alice, Jérôme, Jonathan, Lionel, Marco, Max, Nadia, Scott, Clovis, Vincent, Bruno et tous les autres que j'ai eu la chance de rencontrer durant ces années.

Finalement, je veux exprimer ma profonde reconaissance à la personne la plus importante de toutes, Jessica. Je l'ai rencontré au tout début de mes études en mathématiques et elle est une si grande partie de ma vie depuis que je ne peux rien dissocier d'elle. C'est à ce point qu'elle a influencé pour moi et la vie de tous les jours et mes réflexions mathématiques. Merci pour ton soutien

et ton amour, ça fait toute la différence pour moi !

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur les questions d'existence et de convergence du flot de Ricci sur des surfaces complètes à bouts asymptotiquement cylindriques. On montre que dans le cas d'un cylindre asymptotique à un cylindre plat, le flot de Ricci existe pour tous les temps et converge vers une métrique plate. Pour ce faire, on utilise des espaces de Sobolev à poids pour trouver un potentiel pour la courbure scalaire, ce qui nous permet d'utiliser les arguments développés dans (Hamilton, 1988).

Mots clés : Géométrie Différentielle, Équations aux dérivées partielles, Convergence, Flot de Ricci, Variétés non-compactes, Surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques.

INTRODUCTION

Depuis son introduction en 1982 par Hamilton dans (Hamilton, 1982), le flot de Ricci a pris une grande importance au sein de la géométrie différentielle et de la topologie. Bon nombre des travaux sur le flot de Ricci portent sur le cas des variétés de dimension 3, notamment (Perelman, 2012). En dimension 2, Hamilton a démontré dans (Hamilton, 1988) l'existence du flot renormalisé pour les temps long et sa convergence vers une métrique de courbure constante dans le cas d'une surface de caractéristique d'Euler négative et dans le cas d'une sphère munie d'une métrique de courbure strictement positive. L'article (Chow, 1991) est venu boucler la boucle pour prouver que le flot de Ricci renormalisé sur la sphère de dimension 2 existe pour tous les temps et converge vers une métrique de courbure constante. En fait, dans (Chen *et al.*, 2006), les auteurs montrent que l'on peut bel et bien donner une preuve complète du théorème d'uniformisation pour les surfaces compactes en utilisant seulement le flot de Ricci.

Pour ce qui est des variétés non-compactes, le flot de Ricci est beaucoup moins développé. Dans (Shi, 1989), l'auteur montre l'existence du flot pour des temps courts si le tenseur de courbure de la variété initiale est borné. Toutefois, le comportement du flot pour les temps longs est plus ardu que dans le cas compact et c'est de ce sujet que traite ce mémoire. Plus précisément, on considère des surfaces complètes (Σ, g) dont on peut facilement décrire la géométrie à l'infini, des surfaces à bouts cylindriques.

Dans le premier chapitre, on énonce les définitions et résultats fondamentaux dont on aura besoin par la suite. Plusieurs de ces résultats sont énoncés sans démonstration. En particulier, on énonce des résultats importants mais difficiles de (Lockhart et McOwen, 1985) traitant de l'analyse sur des espaces de Sobolev à poids.

Au deuxième chapitre, on entreprend l'étude du flot de Ricci sur des surfaces à bouts cylindriques. En particulier, on montre que les conditions que l'on impose sur la géométrie à l'infini sont préservées le long du flot, donc qu'il est sensé de parler d'un flot de Ricci asymptotiquement cylindrique.

Finalement, au troisième chapitre, on traite du cas spécial d'un flot de Ricci sur un cylindre asymptotique à un cylindre plat. On utilise tous les outils établis précédemment pour démontrer l'existence du flot pour les temps longs et la convergence vers la métrique asymptotique uniformément dans toutes les normes C^k.

Dans ce travail, on s'inspire principalement et on emprunte certains arguments de deux articles prenant un point de vue très similaire. Dans (Ji *et al.*, 2009), les auteurs étudient le flot de Ricci sur des surfaces complètes de volume fini qui sont à bouts asymptotiquement hyperboliques. Ils montrent la convergence du flot de Ricci vers une métrique de courbure constante négative. Dans (Albin *et al.*, 2013), les auteurs étendent entre autre ces résultats à des cas où les surfaces sont de volume potentiellement infini, mais encore avec des métriques asymptotiquement hyperboliques. Dans (Giesen et Topping, 2011), les auteurs démontrent un résultat de convergence très fort, englobant plusieurs des résultats mentionnés ci-dessus. Ils ne requièrent même pas que la courbure de la métrique initiale soit bornée ou que la métrique soit complète. Toutefois, leur résultat ne traite pas du cas du cylindre, d'où l'intérêt de ce mémoire.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1.1 Géométrie riemannienne classique

Bien que l'on fasse quelques rappels dans cette section, une certaine familiarité avec les bases de la géométrie riemannienne est supposée. Ces bases sont exposées dans plusieurs ouvrages dont (Gallot *et al.*, 2004), (Lee, 1997) et (Petersen, 2006).

Définition 1.1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne. Le *tenseur de Riemann* ou le *tenseur de courbure* est un tenseur de type $(3, 1)$ défini par

$$\mathrm{Rm}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.1.1}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M associée à g et $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$. La *courbure sectionelle* est une fonction sur le fibré des grassmaniennes de plans dans TM. Elle est définie par

$$\mathrm{K}_p(\Pi) = g(\mathrm{Rm}(U, V)V, U) \tag{1.1.2}$$

où $\Pi \subset T_pM$ est le plan engendré par les vecteurs orthonormaux U et V. Le *tenseur de Ricci* est un tenseur de type $(2,0)$ défini par la trace

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(V \mapsto Rm(V,X)Y) \tag{1.1.3}$$

et la *courbure scalaire* est une fonction définie par la trace

$$\mathrm{R} = \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric}). \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.1. Puisque Rm est de type $(3,1)$, on n'a pas à utiliser la métrique pour prendre sa trace : $\mathrm{Rm}(-,X)Y$ donne naturellement un endomorphisme de TM pour tout champs de vecteurs X, Y. Par contre, pour obtenir un endomorphisme à partir de Ric, on doit utiliser la métrique pour identifier TM et T^*M. Plus précisément, pour X un champ de vecteurs, $X \mapsto \mathrm{Ric}(X,-)$ est une application de TM dans T^*M. Alors en notant les isomorphismes induits par la métrique par

$$TM \xrightarrow{\flat} T^*M \quad \text{et} \quad T^*M \xrightarrow{\sharp} TM,$$

la trace du tenseur de Ricci est donnée par

$$\mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric}) = \mathrm{Tr}(X^\flat \mapsto \mathrm{Ric}(X,-)) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric}) = \mathrm{Tr}(X \mapsto \mathrm{Ric}(X,-)^\sharp). \tag{1.1.5}$$

Dans les deux cas, si $\{x^i\}$ est un système de coordonnées locales, on peut exprimer cette trace dans ces coordonnées par

$$\mathrm{R} = \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric}) = g^{ij}R_{ij} \tag{1.1.6}$$

où $R_{ij} = \mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j)$. On remarque aussi que si $U, V \in T_pM$ sont deux vecteurs quelconques engendrant le plan Π, alors

$$K(\Pi) = \frac{g(\mathrm{Rm}(U,V)V,U)}{g(U,U)g(V,V) - g(U,V)^2}, \tag{1.1.7}$$

ce qui découle de (1.1.2) appliquée aux vecteurs $\tilde{U} = U/||U||$ et $\tilde{V}/||\tilde{V}||$ où $\tilde{V} = V - g(\tilde{U}, V)\tilde{U}$.

Le tenseur de courbure admet certaines symétries fondamentales, notamment

$$\begin{aligned} g(\mathrm{Rm}(X,Y)Z,W) &= -g(\mathrm{Rm}(Y,X)Z,W) \\ &= -g(\mathrm{Rm}(X,Y)W,Z) \\ &= g(\mathrm{Rm}(Z,W)X,Y). \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Ceci permet d'interpréter le tenseur de courbure comme une 2-forme à valeur dans les endomorphismes anti-symétriques de TM :

Définition 1.1.2. La *forme de courbure*

$$\mathcal{R} : \bigwedge^2 TM \longrightarrow T^*M \otimes TM$$

est définie, pour U, V deux vecteurs orthonormaux, par

$$\mathcal{R}(U \wedge V)(X) = \mathrm{Rm}(U,V)X. \tag{1.1.9}$$

Remarque 1.1.2. Comme ci-dessus pour la courbure sectionelle, pour deux vecteurs quelconques on obtient

$$\mathcal{R}(U \wedge V)(X) = \frac{\mathrm{Rm}(U,V)X}{\sqrt{g(U,U)g(V,V) - g(U,V)^2}}. \tag{1.1.10}$$

Notons que puisque $g(\mathrm{Rm}(U,V)X,Y) = -g(\mathrm{Rm}(U,V)Y,X)$, l'endomorphisme $\mathcal{R}(U \wedge V)$ est anti-symétrique pour toute paire (U,V). Quand la dimension de M est 2, on trouve

$$\mathcal{R} = \frac{R^l_{12k}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} dx^1 \wedge dx^2 \otimes dx^k \otimes \partial_l \tag{1.1.11}$$

et $\mathcal{R}$ est donc donnée par la matrice de 2-formes suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{R_{1221}}{\sqrt{\det g}} \\ -\frac{R_{1221}}{\sqrt{\det g}} & 0 \end{pmatrix} \otimes dx^1 \wedge dx^2 \tag{1.1.12}$$

Définition 1.1.3. Sur une variété riemannienne (M, g), le *laplacien* $\Delta_g : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est un opérateur différentiel d'ordre deux, défini sur tous les tenseurs de tous les types, par

$$\Delta_g(\alpha) = \mathrm{Tr}_g(\nabla\nabla\alpha) \tag{1.1.13}$$

où la trace est prise sur les deux premiers indices (ceux provenants des deux nouvelles dérivées covariantes). L'indice g, que l'on omettra parfois, est pour mettre l'emphase sur le fait que cet opérateur dépend de la métrique.

La proposition qui suit permet d'interpréter la trace de façon géométrique :

Proposition 1.1.1. *Si α est un $(2,0)$-tenseur symétrique, non-dégénéré au point p sur une variété riemannienne (M^n, g) pour $n \geq 2$, alors sa trace par rapport à g est donnée par*

$$(\mathrm{Tr}_g\,\alpha)(p) = \frac{n}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \alpha_p(V, V)dV \tag{1.1.14}$$

où l'intégrale est prise sur la sphère unité $S^{n-1} \subset T_pM$. Plus généralement, si α est dégénéré sur un sous-espace $V \subset T_pM$ de dimension $k \geq 2$ mais non-dégénéré sur $V^\perp$, alors la formule (1.1.14) *est valide en remplaçant n par $n-k$ et S^{n-1} par $S^{n-1} \cap V^\perp$.*

Démonstration. Puisque α est symétrique, on peut choisir des coordonnées autour de p pour lesquelles au point p le tenseur α est diagonal et $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Donc pour $V^i\partial_i \in T_pM$, on a $\alpha(V,V) = \alpha_{ii}V^iV^i$ et donc $(\mathrm{Tr}_g\,\alpha)(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$. Avec $V \in S^{n-1}$, c'est-à-dire V un vecteur unitaire de T_pM, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{S^{n-1}} (V^i)^2 dV = \mathrm{Vol}(S^{n-1}). \tag{1.1.15}$$

Mais puisque les ensembles $\{g(V,\partial_i) \mid V \in S^{n-1}\}$ et $\{g(V,\partial_j) \mid V \in S^{n-1}\}$ sont égaux quelque soit $1 \leq i,j \leq n$, l'intégrale $\int_{S^{n-1}}(V^i)^2dV$ est indépendante de i et (1.1.15) entraîne que

$$\int_{S^{n-1}} (V^i)^2 dV = \frac{1}{n}\,\mathrm{Vol}(S^{n-1}).$$

Ainsi, si aucun des α_{ii} ne s'annulent,

$$\int_{S^{n-1}} \alpha(V,V)dV = \int_{S^{n-1}} \alpha_{ii}V^iV^i dV = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\frac{1}{n}\,\mathrm{Vol}(S^{n-1}). \tag{1.1.16}$$

Le dernier terme de (1.1.16) étant $(1/n)\,\mathrm{Tr}_g(\alpha)\,\mathrm{Vol}(S^{n-1})$, ceci démontre (1.1.14). Dans le cas où α est dégénéré, il suffit de le considérer comme un tenseur non-dégénéré à p agissant sur $V^\perp$ où V est comme dans l'énoncé. □

Corollaire 1.1.1. *Pour (M,g) de dimension n et $U \in T_pM$ un vecteur unitaire, si $n \geq 3$ le tenseur de Ricci au point p est donné en terme de la courbure sectionelle par*

$$\mathrm{Ric}(U,U) = \frac{n-1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_G \mathrm{K}(\Pi)d\Pi, \tag{1.1.17}$$

l'intégrale étant prise sur la grassmanienne G des plans $\Pi \subset T_pM$ contenant U. Si $n = 2$, alors $\mathrm{Ric}(U,U) = \mathrm{K}(T_pM)$. De façon similaire, la courbure scalaire est donnée par

$$\mathrm{R}(p) = \frac{n}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \mathrm{Ric}(V,V)dV, \tag{1.1.18}$$

l'intégrale étant prise sur la sphère unité dans T_pM.

Remarque 1.1.3. La grassmanienne G de (1.1.17) est naturellement identifiée à la sphère unité S^{n-2} dans le complément orthogonal de $U \in T_pM$. Dans le cas où $n = 2$, si on adopte la convention que $\mathrm{Vol}(G) = \mathrm{Vol}(S^0) = 2$, alors (1.1.17) se réduit bien à $\mathrm{Ric}(U, U) = \mathrm{K}(T_pM)$.

En dimension 2, on appelle $K(T_pM)$ la *courbure de Gauss* et on la note simplement par K. On a donc

$$K = K(T_pM) = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1221}}{\det g}.$$

On conclut donc à partir de (1.1.12) qu'en dimension 2, la forme de courbure est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & K\sqrt{\det g} \\ -K\sqrt{\det g} & 0 \end{pmatrix} \otimes dx^1 \wedge dx^2. \tag{1.1.19}$$

Une autre simplification dans le cas où la dimension de M est 2 découle du corollaire précédent :

Corollaire 1.1.2. *Sur une variété riemannienne (M, g) de dimension 2, le tenseur de Ricci se réduit à la courbure scalaire au sens où*

$$\mathrm{Ric} = \frac{R}{2} g. \tag{1.1.20}$$

Démonstration. Si $U \in T_pM$ est unitaire alors $\mathrm{Ric}(U, U) = \mathrm{K}(T_pM)$. En combinant ceci avec (1.1.18), on obtient que

$$\mathrm{R}(p) = \frac{2}{\mathrm{Vol}(S^1)} \int_{S^1} \mathrm{K}(T_pM) dV = 2\,\mathrm{K}(T_pM) = 2\,\mathrm{Ric}(U, U) \tag{1.1.21}$$

pour n'importe quel $U \in T_pM$ unitaire. Pour $U \in T_pM$ quelconque, (1.1.21) donne donc

$$\mathrm{Ric}(U, U) = ||U||^2\,\mathrm{Ric}(\tilde{U}, \tilde{U}) = ||U||^2 R(p) = \frac{1}{2} R(p) g(U, U)$$

pour $\tilde{U} = \frac{U}{||U||}$. En général, pour $U, V \in T_pM$ quelconques mais $U \neq \pm V$, on utilise la formule de polarisation et (1.1.21) pour obtenir l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(U,V) &= \frac{1}{4}\left[||U+V||^2 \,\mathrm{Ric}\left(\frac{U+V}{||U+V||}, \frac{U+V}{||U+V||}\right)\right. \\
&\qquad \left. -||U-V||^2 \,\mathrm{Ric}\left(\frac{U-V}{||U-V||}, \frac{U-V}{||U-V||}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[||U+V||^2 - ||U-V||^2\right] \frac{\mathrm{R}(p)}{2} \\
&= \frac{R(p)}{2} g(U,V).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.2. *Pour $\alpha = \alpha_{i_1 \cdots i_r}$ un tenseur quelconque sur une variété Riemannienne de dimension n,*

$$|\operatorname{Tr}\alpha|_g^2 \leq n|\alpha|_g^2 \tag{1.1.22}$$

où la trace est prise sur n'importe quels deux indices de α.

Démonstration. Sans perdre de généralité, on suppose que α est deux fois covariant et qu'il est donné localement par $a^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$ dans une carte telle que $g_{ij} = \delta_{ij}$ au point p. On calcule alors que

$$|\alpha|^2 = a^{ij}a^{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(a^{ij}\right)^2$$

tandis que

$$(\mathrm{tr}(\alpha))^2 = \delta_{ij}a^{ij} = \sum_{i=1}^{n} a^{ii}.$$

Notons que l'on utilise ici la convention de sommation d'Einstein. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $\alpha = (a^{ij})$ une matrice carrée $n \times n$. Considérons la décomposition en valeurs singulières

$$\alpha = USV^*$$

où U et V sont orthogonales et S est diagonale avec pour entrées $\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_n}$ les racines des valeurs propres de $\alpha^*\alpha$. Alors $|\alpha|^2 = \operatorname{tr}(\alpha^*\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i = |S|^2$ et

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr}(\alpha)| &= |\operatorname{tr}(SUV^*)| \\
&= |\sum_{i=1}^n (Se_i) \cdot (VU^*e_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n ||Se_i||.||VU^*e_i|| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sigma_i}
\end{aligned}$$

où $e_1, \ldots, e_n$ sont les vecteurs de la base canonique. Or l'inégalité $2\sqrt{xy} \leq x+y$ et un simple argument combinatoire montre que

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\sigma_i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

d'où l'énoncé.

$\square$

À partir d'une métrique g sur une variété M, on peut obtenir d'autres métriques en multipliant cette métrique par une fonction strictement positive $e^{u(x)} \in C^\infty(M)$. On appelle un tel changement de métrique un changement *conforme*. Sous un changement conforme de métrique, on peut écrire explicitement comment change beaucoup des invariants géométriques habituels. La proposition suivante en donne certains exemples en dimension 2. On peut se référer à plusieurs ouvrages pour trouver une démonstration, par exemple à (Chow et Knopf, 2004) ou (Chow *et al.*, 2006).

Proposition 1.1.3. *Soit (M, g_0) une variété riemannienne de dimension 2. Sous un changement conforme de métrique $g = e^u g_0$ pour $u \in C^\infty(M)$, on a*

$$\Delta_g = e^{-u}\Delta_0, \quad d\mu_g = e^u d\mu_0, \quad et \quad R_g = e^{-u}(R_0 - \Delta_0 u). \tag{1.1.23}$$

On établit maintenant quelques formules qui seront utiles par la suite. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à n'importe quel livre d'introduction à la géométrie riemannienne, par exmple à (Gallot *et al.*, 2004), (Petersen, 2006) ou encore (Chow *et al.*, 2006) pour les formules de commutateurs. Considérons $g(t)$ une famille lisse (c'est-à-dire infiniment dérivables par rapport à leur paramètre t) de métriques lisses sur une variété M. On rappelle que les symboles de Christoffel de $g(t)$ sont donnés par

$$\Gamma^i_{jk}(t) = \frac{1}{2}g^{im}(\partial_j g_{mk}(t) + \partial_k g_{mj}(t) - \partial_m g_{jk}(t))$$

et que la dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita de $g(t)$ agit sur un repère local (dx^i) de T^*M donné par des fonctions de coordonnées (x^i) par

$$\nabla dx^i = -\Gamma^i_{jk} dx^j \otimes dx^k.$$

Soit $A = a_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} = a_I dx^I$ un tenseur de type $(r, 0)$. On peut facilement vérifier qu'alors ∇ agit sur A par

$$\nabla A = d(\alpha_I) \otimes dx^I - \sum_{m=1}^{r} \alpha_I \Gamma^{i_m}_{pq} dx^{I^{pq}_m} \tag{1.1.24}$$

où

$$dx^{I^{pq}_m} := dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{m-1}} \otimes dx^p \otimes dx^q \otimes dx^{i_{m+1}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}.$$

Afin d'énoncer la prochaine proposition de façon concise, on introduit la notation suivante : Pour A et B deux tenseurs, $A * B$ désignera n'importe quelle combinaison linéaire finie à coefficients réels de termes formés de composantes de la métrique et de composantes des tenseurs A et B. Par exemple, si $A = A_{ij}^{k}$ et $B = B_i^{jkl}$, alors $2A_{ij}^{k} B_k^{ipq} + g_{lm} g^{pj} A_{ip}^{i} B_j^{klm}$ est une combinaison linéaire de la forme $A * B$.

Proposition 1.1.4 (Commutateurs $\nabla\Delta - \Delta\nabla$). *Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension n et $f \in C^\infty(M)$. Alors*

$$\nabla_i \Delta f = \Delta \nabla_i f - R_i^k \nabla_k f. \tag{1.1.25}$$

En particulier, quand $n = 2$ on obtient

$$\nabla \Delta f = \Delta \nabla f - \frac{R}{2} \nabla f. \tag{1.1.26}$$

En général, pour un tenseur α quelconque, on a

$$\nabla \Delta \alpha - \Delta \nabla \alpha = \mathrm{Rm} * \nabla \alpha + (\nabla \, \mathrm{Ric}) * \alpha \tag{1.1.27}$$

et donc

$$\nabla^k \Delta \alpha - \Delta \nabla^k \alpha = \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ 0 \le \mu,\nu \le k}} \nabla^\mu \mathrm{Rm} * \nabla^\nu \alpha \tag{1.1.28}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le lemme suivant peut être vu comme une règle de chaîne pour la dérivée en temps des dérivées covariantes, il sera utile pour établir certaines identités par récurrence :

Lemme 1.1.1. *Étant données $g(t)$ une famille lisse de métriques et $A(t)$ une famille lisse de tenseurs de type $(0,r)$ comme ci-dessus, alors on a*

$$\partial_t(\nabla A(t)) = (\partial_t\nabla)A + \nabla(\partial_t A(t)) \tag{1.1.29}$$

où $\partial_t\nabla$ agit sur A par

$$(\partial_t\nabla)A = -\alpha_I \sum_{m=1}^{r} (\partial_t \Gamma^{i_m}_{pq}) dx^{I^{pq}_m}.$$

En particulier, pour une fonction ou un tenseur u, on obtient que

$$\partial_t(\nabla^k u) = (\partial_t\nabla)(\nabla^{k-1}u) + \nabla(\partial_t\nabla^{k-1}u)$$

pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. En utilisant (1.1.24) et la règle de Leibniz, on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t(\nabla A) &= d(\partial_t\alpha_I) \otimes dx^I + (\partial_t\alpha_I) \otimes \nabla(dx^I) - \alpha_I \sum_{m=1}^{k} \partial_t\Gamma^{i_m}_{pq} dx^{I^{pq}_m} \\ &= \nabla(\partial_t A) + (\partial_t\nabla)A.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.1.1 (Scindement de Cheeger-Gromoll). *Soit (X,g) une variété riemannienne de courbure $\mathrm{Ric}(g) \geq 0$ ayant une droite géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to X$ (c'est-à-dire telle que $d(\gamma(t),\gamma(t')) = |t-t'|$ pour tout $t,t' \in \mathbb{R}$). On peut alors construire une fonction de Busemann $f : X \to \mathbb{R}$ telle que l'on obtient une isométrie $(X,g) \cong (Y\times\mathbb{R}, h+dt^2)$ avec f la projection sur le deuxième facteur.*

1.2 Variétés à bord

Pour étudier une variété riemannienne complète non-compacte (M, g) à bouts asymptotiquement cylindriques, le point de vue adopté dans (Melrose, 1993) est de compactifier M pour la voir comme une variété compacte à bord $\overline{M}$, puis d'adapter toutes les constructions géométriques habituelles afin qu'elles reflètent les propriétés de la variété originale M. On procède d'abord par quelques rappels sur les variétés à bord afin de développer les quelques notions de la b-géométrie qui nous seront nécessaires. Pour plus de détails et de précisions sur la géométrie des espaces à bord que ceux présentés ci-dessous, on peut par exemple se référer à (Gallot *et al.*, 2004) ou à (Melrose, 1993).

Soit une variété M de dimension n à bord non vide ∂M. L'espace sous-jacent est donc localement modelé sur les ouverts du demi-espace euclidien $\mathbb{R}^n_1 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Pour se donner une notion d'atlas lisse, il faut préciser quelles fonctions $f : \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n_1$ sont considérées lisses, c'est-à-dire admissibles comme fonctions de transition. Une solution est de considérer les fonctions $f : \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n_1$ qui s'étendent à des fonctions lisses $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lorsque $\mathbb{R}^n_1$ est inclus dans $\mathbb{R}^n$. Les ouverts de $\mathbb{R}^n_1$ étant les restrictions d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, cette solution est naturelle. Les fonctions lisses sont alors définient exactement comme sur une variété sans bord :

Définition 1.2.1. Soit M une variété lisse à bord ∂M, $x \in M$ et $\varphi : M \supset U \xrightarrow{\cong} V \subset \mathbb{R}^n_1 \subset \mathbb{R}^n$ des coordonnées près de x. Si $x \notin \partial M$ alors une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *lisse* au point x si $f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction lisse dans $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \partial M$ alors $f : U \to \mathbb{R}$ est *lisse* au point x si $f \circ \varphi^{-1}$ s'étend à une fonction lisse sur un voisinage de V dans $\mathbb{R}^n$. L'anneau des fonctions lisses $C^\infty(M)$ est alors celui des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ lisses à tous les points de M. Étant donné la définition d'un atlas dans ce contexte, cette définition ne dépend pas du choix de coordonnées.

Pour contrôler le comportement à l'infini des fonctions définient sur une variété non-compacte $\iota : \overset{\circ}{M} \hookrightarrow \overline{M}$ réalisée comme l'intérieur d'une variété compacte à bord, on peut considérer les fonctions lisses sur M provenant de fonctions lisses sur la variété à bord $\overline{M}$ au sens de la définition 1.2.1. Pour procéder de façon intrinsèque à M, une question naturelle à se poser est si l'on peut directement caractériser ces fonctions parmis les éléments de $C^\infty(M)$. Pour ce faire, on introduit la notion de *fonction de définition du bord.*

Définition 1.2.2. Soit M une variété lisse compacte avec bord non vide et $Y_i \subset \partial M$ une composante connexe du bord. Une *fonction de définition du bord* pour Y_i est une fonction lisse $\rho_i \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $\rho_i \geq 0$,

(ii) $\rho_i^{-1}(0) = Y_i$,

(iii) $d\rho_i|_y \neq 0$ pour tout $y \in Y_i$.

On rappelle que si M est une variété à bord $\partial M = \sqcup Y_i$ où les Y_i sont les composantes connexes du bord et si les Y_i sont compactes, alors chacunes d'elles a un fibré normal intérieur N_+Y_i trivial et difféomorphe à un voisinage en collet $\varphi_i : N_+Y_i \xrightarrow{\cong} U_i \subset M$ de sorte que $U_i \cong [0, \epsilon) \times Y_i$ pour un $\epsilon > 0$ et que la section nulle corresponde à $\{0\} \times Y_i$. En effet, il suffit de munir M d'une métrique riemannienne et de considérer l'application exponentielle sur son bord. Si l'on étend la projection sur le premier facteur $\pi_i : U_i \to [0, \epsilon)$ à une fonction définie sur tout $\overline{M}$ de sorte quelle ne s'annule pas ailleurs qu'en Y_i, on obtient une fonction de définition du bord pour Y_i.

On peut alors parler de la série de Taylor d'une fonction près d'une composante de bord :

Définition 1.2.3. Étant donné une fonction de définition du bord ρ pour une composante Y du bord de M et $\{a_j(y)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions lisses $a_j : Y \to \mathbb{C}$, on dira qu'une fonction lisse $f : \overset{\circ}{M} \to \mathbb{C}$ où $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ admet un développement de Taylor $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(y)\rho^j$ en Y, ce que l'on notera

$$f \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(y)\rho^j,$$

si pour chaque $N \in \mathbb{N}_0$ on a

$$f(\rho, y) - \sum_{j=0}^{N} a_j(y)\rho^j \in \rho^{N+1} C_0^{\infty}(\overset{\circ}{M}) \tag{1.2.1}$$

près de Y, ce qui veut dire que le membre de gauche de (1.2.1) est de la forme $h\rho^{N+1}$ pour une certaine fonction lisse et bornée $h : \overset{\circ}{M} \to \mathbb{C}$. En particulier, $(j!)a_j(y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\partial^j f}{\partial \rho^j}(\rho, y)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

On revient maintenant au cas d'une variété non-compacte compactifiée avec l'ajout d'un bord comme plus haut pour caractériser les fonctions provenant de fonctions lisses jusqu'au bord :

Théorème 1.2.1. *Soit M une variété compacte avec bord $\partial M = \sqcup_{i\in I} Y_i$ et une fonction de définition du bord ρ_i fixée pour chaque composante Y_i du bord.*

Alors une fonction lisse $f : \mathring{M} \to \mathbb{C}$ admet une extension lisse $\tilde{f} : M \to \mathbb{C}$ si et seulement si à chaque composante connexe du bord, $f(\rho, y)$ et toutes les dérivées $\partial_\rho^k f(\rho, y)$ admettent une limite quand $\rho \to 0$ ou, de façon équivalente, si et seulement si f admet un développement de Taylor

$$f(\rho, y) \sim_{\rho \to 0} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(y) \rho^j$$

à chaque composante connexe du bord. Autrement dit, on a une suite exacte courte

$$0 \to \dot{C}^\infty(M) \to C^\infty(M) \to \bigoplus_{i \in I} C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{C})[[\rho_i]] \to 0 \tag{1.2.2}$$

où $\dot{C}^\infty(M)$ désigne les fonctions s'annulant à tous les ordres en ∂M, où $A[[X]]$ désigne l'anneau des séries formelles à une variable X et à coefficients dans l'anneau A.

La démonstration du théorème repose essentiellement sur le lemme suivant, qui n'est qu'une version locale du théorème. On peut en trouver une démonstration dans (Hörmander, 2003), au théorème 1.2.6.

Lemme 1.2.1 (Borel). *Dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan $\mathbb{R}^{n-1}$ donné par $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ et on note $\mathbb{R}^n_1 = \{x_n \geq 0\}$ de sorte que $\partial \mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^{n-1}$ avec fonction de définition du bord ρ donnée près du bord par x_n. Pour chaque suite $\{a_i(x')\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions lisses $a_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$; il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que f ait un développement de Taylor*

$$f(\rho, x') \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x') \rho^j$$

près de $\mathbb{R}^{n-1}$.

1.3 Variétés à bouts asymptotiquement cylindriques

Dans cette section, on établit le contexte dans lequel on travaillera dans la suite.

1.3.1 Fibré b-tangent

Soit M une variété avec bord $\partial M = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$ pour I fini et ρ_i des fonctions de définition pour les Y_i comme à la section 1.2. On rappelle que si $E \to M$ est un fibré vectoriel avec sections globales $\Gamma(E)$ et $p \in M$, en considérant l'idéal $I_p := \{\gamma \in \Gamma(E) \mid \gamma(p) = 0\}$ des sections s'annulant à p, on peut reconstruire la fibre E_p de E à p avec le quotient $\Gamma(E)/(I_p \cdot \Gamma(E)) \cong E_p$; l'isomorphisme étant donné par l'évaluation à p d'un représentant quelconque d'une classe. En fait, avec un peu de travail, on peut voir que cette idée donne une correspondance entre les faisceaux localement libres de $C^\infty(M)$-modules de rang r et les fibrés vectoriels de rang r. (Localement libre de rang r veut dire que pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U contenant p tel que le faisceau est donné au-dessus de U par $\bigoplus_{i=1}^r C^\infty(U)$). On peut donc construire un fibré vectoriel implicitement en spécifiant quelles sont ses sections, en autant que le candidat pour le faisceau de $C^\infty(M)$-modules des sections soit localement libre.

Considérons donc $\mathcal{V}_b(M)$ le faisceau (de $C^\infty(M)$-modules) des champs de vecteurs sur M qui sont tangents au bord. Près d'un point $p \in \partial M$ se trouvant dans la composante $Y_i \subset \partial M$, on a un repère pour les champs de vecteurs donnés par $(\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_{n-1}}, \partial_{\rho_i})$ où $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ sont des coordonnées sur Y_i près de p. Un champ de vecteur général $X \in \Gamma(TM)$ s'écrit donc près de p

sous la forme $X = X^0\partial_{\rho_i} + \sum_{j=1}^{n-1} X^j\partial_{y_j}$ pour $X^0, X^1, \ldots, X^{n-1} \in C^\infty(M)$. Or pour que $X \in \mathcal{V}_b(M)$, il faut et il suffit que $X^0|_{\partial M} = 0$, c'est-à-dire que $X^0 = \rho_i\overline{X^0}$ pour une autre fonction $\overline{X^0} \in C^\infty(M)$. Près de p, un élément général de $\mathcal{V}_b(M)$ s'écrit donc sous la forme $X = X^0\rho_i\partial_{\rho_i} + \sum_{j=1}^{n-1} X^j\partial_{y_j}$, tandis que près de n'importe quel $p \in \overset{\circ}{M}$, le repère habituel $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$ suffit. Ainsi, $\mathcal{V}_b$ est un faisceau de $C^\infty(M)$-modules localement libre de rang n. On peut donc lui associer un fibré vectoriel.

Définition 1.3.1. Soit M une variété à bord $\partial M = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$ où les composantes connexes du bord Y_i sont compactes et sont associées à des fonctions de définition $\rho_i \in C^\infty(M)$. Le *fibré b-tangent* de M est le fibré vectoriel ${}^bTM$ de rang n dont les sections forment le faisceau $\mathcal{V}_b$. En particulier, la fibre de ${}^bTM$ au point $p \in M$ est $\mathcal{V}_b(M)/(I_p \cdot \mathcal{V}_b(M))$ et la restriction sur l'intérieur ${}^bTM|_{M\setminus\partial M}$ est canoniquement isomorphe au fibré tangent $TM|_{M\setminus\partial M}$.

Remarque 1.3.1. On note que bien que ρ_i s'annule sur Y_i, le champ de vecteur $\rho_i\partial_{\rho_i}$ n'est pas nul dans ${}^bT_pM$. En effet, ∂_{ρ_i} n'est certainement pas tangent au bord donc $\rho_i\partial_{\rho_i} \notin I_p \cdot \mathcal{V}_b(M)$.

Dans (Melrose, 1993), R. Melrose reconstruit toute la géométrie à partir du fibré b-tangent : les b-formes différentielles, b-opérateurs différentiels, etc... Dans ce travail, on n'aura qu'à considérer ${}^bTM$ et les b-métriques, c'est-à-dire les sections non-dégénérées du fibré $\mathrm{Sym}^2\,{}^bT^*M$, engendré près du bord par les combinaisons linéaires de $\frac{d\rho}{\rho} \otimes \frac{d\rho}{\rho}, dx^j \otimes \frac{d\rho}{\rho}$ et $dx^j \otimes dx^k$ pour $(x^1, \ldots, x^{n-1}, \rho)$ des coordonnées adaptées au bord.

Remarque 1.3.2. Pour élucider cette définition, considérons une variété complète (M, g) telle qu'il existe un compact $K \subset M$ de sorte que M se décompose en une union $K \cup E_1 \cup \cdots \cup E_m$ pour un entier $m \geq 1$, où pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a un difféomorphisme

$$\psi_i : E_i \to C_i^+ := [0, \infty) \times Y_i$$

entre le i-ème bout E_i et le demi-cylindre C_i^+ pour (Y_i, h_i) une variété riemannienne compacte de dimension $(n-1)$. Supposons que chaque demi-cylindre C_i^+ soit muni de la métrique produit $g_{cyl,i} = dx^2 + h_i$. Alors en considérant la compactification $\overline{M}$ de cette variété complète M obtenue en rajoutant un Y_i à l'infini pour chaque $E_i \cong C_i^+$, le changement de variable $\rho_i = e^{-x}$ (pour $x \in [0, \infty)$ la première coordonnée de C_i^+) suggère de considérer ${}^bT\overline{M}$. En effet, à chaque bout $\rho = e^{-x}$ est une fonction de définition du bord pour le Y à l'infini et puisque $x = -\log \rho$, on obtient $dx = -\frac{d\rho}{\rho}$. Autrement dit, avec ce choix de fonction de définition du bord, le fibré T^*M correspond au fibré ${}^bT^*\overline{M}$ au sens où ${}^bT^*\overline{M}|_M \cong T^*M$, puisque dans ces coordonnées, ${}^bT^*M \ni \frac{d\rho}{\rho}|_p = -dx|_p \in T^*M$. De même, $TM \cong {}^bT\overline{M}|_M$.

Le contexte que l'on adopte est donc celui d'une variété à bord où l'on interprète les composantes du bord, via leur voisinage tubulaire, comme des cylindres de longueur infinie, ou vice-versa.

La remarque ci-dessus suggère aussi la prochaine définition :

Définition 1.3.2. Sur une variété compacte M à bord $\partial M = \bigsqcup Y_i$ comme ci-dessus, on définit l'anneau $C_b^\infty(M)$ des b-fonctions lisses comme étant celui des fonctions lisses et bornées $f : M \to \mathbb{R}$ telles que pour tout ensemble fini $\{V_1, \ldots, V_k\} \subset \mathcal{V}_b(M)$ on ait $\sup_M |V_1 \cdots V_k f| < \infty$.

Du point de vue de la remarque 1.3.2, cet espace de fonctions est beaucoup plus naturel que $C^\infty(M)$ puisqu'il correspond simplement aux fonctions sur la variété non-compacte à bouts cylindriques ayant leurs dérivées de tous les ordres bornées. Puisque $\partial_\rho = -e^x\partial_x$ avec le changement de variables $\rho = e^{-x}$, on voit que demander que les $\partial_\rho f$ soient bornées correspond à la condition que $\partial_x f$ décroît exponentiellement à l'infini, ce qui pourrait être une condition trop restrictive dans certaines situations.

1.3.2 Définition

On peut maintenant définir les objets principaux de ce travail.

Définition 1.3.3. Une *variété à bouts asymptotiquement cylindriques* est une variété riemannienne complète et orientée (M, g) de dimension n de sorte que M est l'intérieur d'une variété compacte à bord $\overline{M}$. Le bord de $\overline{M}$ est constitué d'un nombre fini de composantes connexes Y_i avec fonctions de définition $\rho_i \in C^\infty(M)$ de sorte que Y_i admette un voisinage tubulaire $U_i \cong [0,1]_{\rho_i} \times Y_i$ tel que défini à la section 1.2. De plus, dans chaque voisinage tubulaire U_i, la métrique g est telle que

$$g - \left(g_{Y_i} + \frac{d\rho_i}{\rho_i} \otimes \frac{d\rho_i}{\rho_i}\right) \in \rho_i^\delta C_b^\infty(M; \mathrm{Sym}^2\, {}^bT^*M) \tag{1.3.1}$$

pour un certain $\delta > 0$, où g_{Y_i} est une métrique riemannienne sur Y_i.

Le module $\rho_i^\delta C_b^\infty(M; \mathrm{Sym}^2\, {}^bT^*M)$ est celui des tenseurs symétriques de la forme $\rho_i^\delta h$ pour

$$h = \sum_{1\le k,l\le n-1} h_{kl}dx^k dx^l + \sum_{1\le j\le n-1} h_{j0}dx^j \frac{d\rho_i}{\rho_i} + h_{00}(\frac{d\rho_i}{\rho_i})^2$$

tels que les coefficients h_{pq} soient des éléments de $C_b^\infty(M)$. En particulier, un tel tenseur $\rho_i^\delta h$ s'annule en Y_i.

Remarque 1.3.3. Cette définition correspond bel et bien à ce que l'on appellerait naturellement une variété complète à bouts asymptotiquement (exponentiellement) cylindriques. Plus précisément, supposons que chaque bout cylindrique C_i^+ de M soit munit de la métrique produit $g_{cyl,i} = dx^2 + h_i$. Alors la métrique g de M est *asymptotiquement cylindrique* si pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$|(\psi_i^{-1})^* g - g_{cyl,i}| \in e^{-\delta x} C_b^\infty(C_i^+) \tag{1.3.2}$$

pour un certain poids $\delta > 0$, où la norme est prise par rapport à la métrique produit $g_{cyl,i}$ et où $C_b^\infty(C_i^+)$ désigne les fonctions lisses du demi-cylindre ayant leurs dérivées de tous les ordres bornées à l'infini. En effet, avec le changement de coordonnées $\rho = e^{-x}$ et la fonction de définition du bord $\rho_i = \psi_i^* \rho$ sur $\overline{M}$, la condition (1.3.2) est clairement équivalente à la condition (1.3.1).

1.4 Préliminaires analytiques

1.4.1 Notions et résultats classiques

Dans cette section, on commence par établir certaines notations, définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite. En particulier, on discute des espaces de Sobolev et de leur dual, puis du Laplacien agissant sur ces espaces.

Définition 1.4.1. Sur une variété Riemannienne complète (M,g), on considèrera les espaces de fonctions suivants :

— $L^2(M,g) := \{f : M \to \mathbb{R}$ mesurables $\mid \int_M f^2 d\mu_g < \infty\}$

— $H^k(M,g) := \{f : M \to \mathbb{R}$ mesurables $\mid |\nabla^j f|_g \in L^2(M,g)$ pour chaque $j = 0, 1, \ldots, k\}$

— $H^k_{loc}(M,g) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid$ pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x tel que $f|_U \in H^k(U, g|_U)\}$

— $C^k_b(M,g) := \{f : M \to \mathbb{R}$ k fois continûment différentiables $\mid \max_{0\leq j\leq k} \sup_M |\nabla^j f|_g < \infty\}$

— $C^k_c(M,g) := \{f \in C^k_b(M,g) \mid \operatorname{supp} f$ est compact$\}$

On définit sur $H^k(M,g)$ une norme

$$||f||^2_{H^k(M,g)} = \sum_{j=0}^{k} ||\nabla^j f||_{L^2(M,g)}.$$

Remarque 1.4.1. Si l'on définit l'espace $H^k_0(M,g)$ comme étant la fermeture de $C^k_c(M,g)$ par rapport à la norme $||\cdot||_{H^k(M,g)}$, c'est-à-dire

$$H^k_0(M,g) = \{f \in H^k(M,g) \mid \exists \varphi_i \in C^\infty_c(M,g),\ \varphi_i \overset{H^k}{\to} f\}, \tag{1.4.1}$$

Alors comme démontré dans (Aubin, 1976), $H_0^k(M,g) = H^k(M,g)$ si la métrique g est complète, a un rayon d'injectivité borné inférieurement $inj(M,g) > \delta_0 \geq 0$ et a $|\nabla^j \mathrm{Rm}| < \infty$ pour tous $j \in \mathbb{N}$. Ces conditions seront toujours satisfaites par les variétés considérées dans ce travail.

Définition 1.4.2 (Laplacien sur L^2). Pour (M,g) une variété riemannienne, le laplacien $\Delta : C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M)$ est étendu à $L^2(M,g)$ de la façon suivante. On considère l'inclusion continue $L^2 \hookrightarrow (C_c^\infty)'$ des fonctions L^2 dans les distributions, donnée par $u \mapsto \langle u, \cdot \rangle_{L^2}$. On rappelle que le laplacien agit sur les distributions u par la relation $(\Delta u)(v) = u(\Delta v)$ pour tout $v \in C_c^\infty$. De ce point de vue, il est naturel de définir, pour $u \in L^2$, la distribution agissant par $(\Delta u)(v) = \langle u, \Delta v \rangle_{L^2}$ pour $v \in C_c^\infty$.

À priori, Δu ainsi défini n'est qu'une distribution. Pour obtenir un opérateur ayant son image dans L^2, on considère le *domaine* de Δ ; l'ensemble $\mathrm{Dom}(\Delta) \subset L^2(M,g)$ des fonctions $u \in L^2(M,g)$ telles qu'il existe $f \in L^2(M,g)$ satisfaisant $\langle u, \Delta v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2}$ pour tout $v \in C_c^\infty$. Puisque C_c^∞ est dense dans L^2, une telle fonction est unique et on écrit alors $\Delta u = f$. Ceci donne bien un opérateur $\Delta : \mathrm{Dom}(\Delta) \to L^2$.

Remarque 1.4.2. Comme on démontre ci-dessous, le domaine du laplacien agissant sur $L^2(M,g)$ n'est nul autre que $\mathrm{Dom}(\Delta) = H^2(M,g)$. Notons aussi que puisque pour $k \in \mathbb{N}_0$ on a $H^k(M,g) \subset L^2(M,g)$, ceci défini aussi le laplacien agissant sur les $H^k(M,g)$, et on aura $\mathrm{Dom}(\Delta : H^k(M,g) \to H^k(M,g)) = H^{k+2}(M,g)$.

Pour démontrer que $\mathrm{Dom}(\Delta) = H^2(M,g)$, une étape cruciale est le *théorème de* *régularité elliptique.* On peut se référer à n'importe quel ouvrage d'introduction aux équations aux dérivées partielles. En particulier, par les théorèmes 6.28 et 6.33 de (Folland, 1999), on a

Théorème 1.4.1 (Régularité elliptique). *Soit (M,g) une variété riemannienne complète. Soit $u, f \in (C_c^\infty(M,g))'$ deux distributions satisfaisant $\Delta_g u = f$. Si $f \in H^k_{loc}(M,g)$, alors $u \in H^{k+2}_{loc}(M,g)$. De plus, si $u, f \in L^2(M,g)$ et $f \in H^k(M,g)$, alors $u \in H^{k+2}(M,g)$ et il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de k et de (M,g) telle que*

$$||u||_{H^{k+2}} \leq C(||f||_{H^k} + ||u||_{L^2}). \tag{1.4.2}$$

Ceci démontre en particulier que $\mathrm{Dom}(\Delta : L^2 \to L^2) \subset H^2$. Pour l'inclusion réciproque, on peut utiliser la densité de C^∞ dans L^2 et intégrer par parties. En effet, si $u \in H^2(M,g)$, on choisi une suite $u_i \in C^\infty$ telle que $u_i \to u$ dans H^2. Alors pour n'importe quelle $v \in C_c^\infty$, on a

$$\langle u, \Delta v\rangle_{L^2} = \lim_i \langle u_i, \Delta v\rangle_{L^2} = \lim_i \langle \Delta u_i, v\rangle_{L^2} \tag{1.4.3}$$

où l'intégration par parties est justifiée car v est à support compact. Puisque $\Delta : H^2 \to L^2$ est borné et que $u_i \to u$ en norme H^2, on a $\Delta u_i \to f$ en norme L^2 pour un certain $f \in L^2$. Alors (1.4.3) montre que $\langle u, \Delta v\rangle = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in C_c^\infty$, c'est-à-dire $\Delta u = f$.

Finalement, on utilisera le résultat bien connu suivant au lemme 3.5.1. On peut en trouver une démonstration dans n'importe quel traitement de la théorie de la mesure, par exemple dans (Folland, 1999).

Théorème 1.4.2 (Convergence dominée). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles sur un espace mesuré (X,μ). Supposons que pour une certaine fonction f sur X, pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ et supposons qu'il existe une fonction absolument intégrable g telle que* $\sup_{(x,n)\in X\times\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq g(x)$. *Alors f est absolument intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

1.4.2 Espaces à poids

Pour adapter les outils d'analyse rappelés à la section 1.4.1 au cas de variétés à bouts cylindriques, on doit introduire des espaces de fonctions qui contrôlent le comportement à l'infini des fonctions et tenseurs considérés.

Définition 1.4.3. Soit (Y,h) une variété riemannienne compacte de dimension $(n-1)$. On considère le cylindre $C_Y = (\mathbb{R}\times Y)_{(x,y)}$ muni de la métrique produit $g = g_{cyl} = dx^2 + h$. Étant donné un *poids* $\delta \in \mathbb{R}$ et un entier $k \geq 0$, on définit, à partir des espaces usuels de la section 1.4.1 les *espaces à poids*

$$\begin{cases} L^2_\delta(C_Y,g) = e^{-\delta x}L^2(C_Y,g), \\ H^k_\delta(C_Y,g) = e^{-\delta x}H^k(C_Y,g), \\ C^k_{b,\delta}(C_Y,g) = e^{-\delta x}C^k_b(C_Y,g). \end{cases} \tag{1.4.4}$$

On munit ces espaces de la norme provenant de l'espace classique correspondant. Par exemple, pour $u \in L^2_\delta(C_Y,g)$, on pose

$$||u||_{L^2_\delta(C_Y,g)} := ||e^{\delta x}u||_{L^2(C_Y,g)} \tag{1.4.5}$$

et on procède de façon analogue pour les autres espaces de (1.4.4).

Remarque 1.4.3. La définition (1.4.5) montre immédiatement que la multiplication par $e^{-\delta x}$ est une isométrie $L^2(C,g) \xrightarrow{e^{-\delta x}\cdot} L^2_\delta(C,g)$ et qu'en particulier les espaces de (1.4.4) sont complets, tout comme leur analogue classique.

Le lemme suivant donne une caractérisation des éléments de $C^k_{b,\delta}(C_Y, g)$.

Lemme 1.4.1. *Une fonction* $f \in C^0_{b,\delta}(C_Y, g)$ *pour un poids* $\delta > 0$ *est dans* $C^k_{b,\delta}(C_Y, g)$ *si et seulement si* f *est* k *fois continûment dérivable et* $|\nabla^l f| \in C^0_{b,\delta}(C_Y, g)$ *pour chaque* $0 \leq l \leq k$.

Démonstration. Si $f \in C^k_{b,\delta}(C_Y)$, on peut écrire $f = e^{-\delta x} h$ pour $h \in C^k_b(C_Y)$. On voit donc que pour $0 \leq l \leq k$,

$$\nabla^l f = \sum_{m=0}^{l} \nabla^m(e^{-\delta x}) \otimes \nabla^{l-m} h \tag{1.4.6}$$

où $\nabla^m(e^{-\delta x}) = e^{-\delta x} A$ pour A une combinaison linéaire finie à coefficients réels de termes de la forme $dx^{\otimes \alpha_1} \otimes (\nabla dx)^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes (\nabla^{m-1} dx)^{\otimes \alpha_{m-1}}$. Or A est borné puisque comme g est asymptotiquement plate, on a $|\nabla dx^j|_g = |\Gamma^j_{ik} dx^k|_g \to |\Gamma_Y|_{g_Y}$ quand $x \to \pm\infty$. Ainsi $|\nabla^l f| \in C^0_{b,\delta}$ pour chaque $0 \leq l \leq k$ puisque chaque $|\nabla^l h|$ est borné par hypothèse. Pour la direction réciproque, on écrit encore $f = e^{-\delta x} h$ et l'équation (1.4.6) permet de voir par récurrence sur l que si chaque $|\nabla^l f| \in C^0_{b,\delta}$, alors $h \in C^k_b$. $\square$

Puisque l'on veut considérer les bouts cylindriques $[0,\infty)_x \times \partial M$ d'une variété complète comme l'intérieur de $[0,1]_\rho \times \partial M$ via le changement de variable $\rho = e^{-x}$, on considère ces espaces à poids dans le contexte suivant.

Définition 1.4.4. Soit (M, g) une variété à bouts asymptotiquement cylindriques. En prenant $\rho = \prod_i \rho_i$, on obtient une fonction de définition pour tout ∂M. On peut alors définir les espaces de fonctions modelés aux bouts sur les espaces de (1.4.4) en posant, pour un poids $\delta \in \mathbb{R}$ et un entier $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{cases} L^2_\delta(M,g) := \rho^\delta L^2(M,g), \\ H^k_{b,\delta}(M,g) := \rho^\delta H^k_b(M,g), \\ C^k_{b,\delta}(M,g) := \rho^\delta C^k_b(M,g). \end{cases} \tag{1.4.7}$$

De même, on munit ces espace des normes naturelles comme par exemple

$$||u||_{L^2_\delta(M,g)} := ||\rho^{-\delta} u||_{L^2(M,g)}.$$

Comme à la remarque 1.4.3, ces espaces sont complets. Notons que l'on prend $H^k_b(M,g)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(M,g)$ telles que $X_1 \cdots X_k f \in L^2(M,g)$ pour n'importe quels k b-champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}_b(M)$, afin que les espaces $H^k_b(M,g)$ correspondent vraiment aux espaces modèles $H^k(C_{Y_i}, g_{cyl,i})$.

Remarque 1.4.4. On pourrait aussi permettre aux poids de varier sur les bouts. Par exemple, le cylindre $C = \mathbb{R} \times Y$ est une variété à deux bouts et l'espace $L^2_\delta(C) = e^{-\delta x} L^2(C)$ admet des poids différents ; le bout $x \to +\infty$ est modelé sur $L^2_\delta(C^+)$ tandis que le bout $x \to -\infty$ sur $L^2_{-\delta}(C^+)$. On noterait ceci par $L^2_\alpha(M,g) = \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_m^{\alpha_m} L^2(M,g)$ pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$.

Le prochain résultat découle directement des définitions. On peut en trouver une démonstration au lemme 7.2 de (Lockhart et McOwen, 1985)

Lemme 1.4.2. *Pour $k \geq 0$ et $\delta' \geq \delta$ deux réels, on a une inclusion continue*

$$H^{k+2}_{b,\delta'}(M) \subset H^k_{b,\delta}(M).$$

On s'intéresse maintenant aux propriétés de dualité des espaces à poids. Comme pour les normes, on considère sur $\rho^{\delta} L_b^2(M)$ le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{b,\delta}(M)} = \langle \rho^{-\delta} f, \rho^{-\delta} g\rangle_{L^2_b(M)}. \tag{1.4.8}$$

Puisque la multiplication par ρ^{δ} est une isométrie, $L^2_{b,\delta}(M)$ est aussi un espace de Hilbert pour tout $\delta \in \mathbb{R}$. De plus, étant donnés $\beta \in \mathbb{R}$, $f \in L^2_{b,\delta+\beta}(M)$ et $g \in L^2_{b,\delta-\beta}(M)$, on a

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{b,\delta}(M)} \leq ||f||_{L^2_{b,\delta+\beta}(M)} ||g||_{L^2_{b,\delta-\beta}(M)}. \tag{1.4.9}$$

Il est donc naturel de considérer le couplage

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_{b,\delta}(M)} : L^2_{b,\delta+\beta}(M) \otimes L^2_{b,\delta-\beta}(M) \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1.4.10}$$

En fait, pour $v \in L^2_{-\delta}(M)$, on peut clairement considérer $T_v = \langle v, \cdot \rangle_{L^2}$ comme élément du dual $(H^k_{b,\delta}(M))'$, si bien que l'on a un plongement continue $L^2_{-\delta}(M) \hookrightarrow (H^k_{b,\delta}(M))'$ pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$. Cela justifie la notation

$$(H^k_{b,\delta}(M))' =: H^{-k}_{b,-\delta}$$

et les inclusions continues du lemme 1.4.2 restent valides pour tous les $k \in \mathbb{Z}$.

1.5 Le laplacien sur les surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés du laplacien agissant sur des espaces à poids d'une surface $(\overline{M}, g)$ à bouts asymptotiquement cylindriques. L'objectif est d'établir que le laplacien est Fredholm sauf pour un ensemble discret de poids et de démontrer une formule décrivant l'indice de Fredholm du laplacien quand il agit sur un espace à poids adéquat. Notons que l'on pourrait faire cette discussion dans un contexte beaucoup plus général. Toutefois, se restreindre aux surfaces et aux métriques conformément asymptotiquement cylindriques au sens où

$$g = e^{\varphi}\left(g_{\partial M} + \frac{d\rho}{\rho} \otimes \frac{d\rho}{\rho}\right)$$

pour $\varphi \in \rho^{\delta} C_b^{\infty}(M)$ simplifie beaucoup les propriétés du laplacien. En effet, en notant $g_{\partial M} + (d\rho/\rho)^2 = g_{cyl}$ la métrique cylindrique, on note que $\Delta_g = e^{-\varphi}\Delta_{cyl}$ en dimension 2 comme mentionné à la proposition 1.1.3.

1.5.1 Le laplacien sur les espaces à poids

On considère maintenant le laplacien comme agissant sur les espaces à poids définis à la section 1.4.2. On note d'abord que puisqu'une métrique cylindrique sur $[0, 1] \times \partial M$ correspond à une métrique complète sur $\mathbb{R} \times \partial M$, il est naturel de considérer le laplacien Δ_g comme agissant sur les $H^k_{b,\delta}(M)$. En fait, puisque chaque $u \in H^k_{b,\delta}(M)$ définit une distribution $\langle u, \cdot\rangle_{L^2} \in (C_c^{\infty}(M))'$, on peut procéder comme pour les espaces sans poids et définir le laplacien en disant que $\Delta u = f$ s'il existe $f \in H^k_{b,\delta}$ tel que $\langle u, \Delta v\rangle_{L^2} = \langle f, v\rangle_{L^2}$ pour tout $v \in C_c^{\infty}$.

Comme dans le cas sans poids, on a une estimation elliptique

$$||u||_{H^{k+2}_{b,\delta}(M)} \leq C(||f||_{H^k_{b,\delta}(M)} + ||u||_{H^k_{b,\delta}(M)}) \tag{1.5.1}$$

si $\Delta_g u = f$ pour $u, f \in H^k_{b,\delta}(M)$, où C est une constante indépendante de u (voir (Pacard, 2008) à la proposition 6.1.1 pour le cas $k = 0$ ou l'inégalité 2.4 dans (Lockhart et McOwen, 1985)). On peut aussi faire un argument d'intégration par parties pour vérifier que $\mathrm{Dom}(\Delta : H^k_{b,\delta} \to H^k_{b,\delta}) = H^{k+2}_{b,\delta}$.

Proposition 1.5.1. *Pour $\delta \in \mathbb{R}$ un poids quelconque, le laplacien*

$$\Delta_g : \rho^\delta H^{k+2}_b(M) \to \rho^\delta H^k_b(M)$$

est un opérateur borné.

Démonstration. Pour l'opérateur modèle Δ_{cyl} sur le demi-cylindre modèle $\mathcal{C}^+$, notons que les flèches verticales dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \rho^\delta H^{k+2}_b & \xrightarrow{\Delta} & \rho^\delta H^k_b \\ \downarrow{\scriptstyle \rho^{-\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{-\delta}} \\ H^{k+2}_b & \xrightarrow{\rho^{-\delta}\Delta\rho^\delta} & H^k_b \end{array}$$

sont des isométries. Il suffit donc de vérifier que

$$\rho^{-\delta}\Delta\rho^\delta : H^{k+2}_b(\mathcal{C}^+) \to H^k_b(\mathcal{C}^+)$$

est borné. Mais on a

$$\begin{aligned} \rho^{-\delta}\Delta_{cyl}\rho^\delta &= \rho^{-\delta}(-(\rho\partial_\rho)^2 + \Delta_{\partial M})\rho^\delta \\ &= -(\rho\partial_\rho)^2 + \Delta_{\partial M} - \delta^2 - 2\delta\rho\partial_\rho. \end{aligned}$$

Par définition de H_b^{k+2}, on voit donc que $\rho^{-\delta}\Delta_{cyl}\rho^{\delta}$ est un opérateur borné. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$||\Delta_{cyl}u||_{\rho^\delta H_b^k(\mathcal{C}^+)} \leq C||u||_{\rho^\delta H_b^{k+2}(\mathcal{C}^+)} \tag{1.5.2}$$

pour toute fonction $u \in \rho^\delta H_b^{k+2}$ sur le demi-cylindre modèle $\mathcal{C}^+$. De plus, puisque ρ^δ est bornée sur les compacts $K \subset M$, il existe une constante C_K dépendant du compact K telle que

$$||\Delta_g u||_{\rho^\delta H_b^k(K)} \leq C_K||u||_{\rho^\delta H_b^{k+2}(K)} \tag{1.5.3}$$

pour toute fonction $u \in H_{b,\delta}^{k+2}$ supportée sur K. Finalement, on rappelle que $\Delta_g - \Delta_{cyl} = (e^{-\varphi} - 1)\Delta_{cyl}$ pour $\varphi \in H_{b,\delta}^{k+2}$ sur un voisinage tubulaire U du bord $\partial\overline{M}$. Quitte à prendre U assez petit pour que $|e^{-\varphi} - 1| \leq 1$ sur U, on a

$$\begin{aligned} ||(\Delta_g - \Delta_{cyl})u||_{\rho^\delta H_b^k(U)} &= ||(e^{-\varphi} - 1)\Delta_{cyl}u||_{\rho^\delta H_b^k(U)} \\ &\leq ||\Delta_{cyl}u||_{\rho^\delta H_b^k(U)} \\ &\leq C||u||_{\rho^\delta H_b^{k+2}(U)} \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

pour toute fonction $u \in H_{b,\delta}^{k+2}$ supportée sur U, par (1.5.2). Ainsi, pour U un voisinage tubulaire du bord de $\overline{M}$ assez petit, $K = M \setminus U$ et $\chi_K \in C_c^\infty(M)$ une fonction telle que $\chi_K \equiv 1$ sur K et $\chi_K \equiv 0$ sur $M \setminus K' \subset U$ pour K' un autre compact contenant K, on obtient une constante C telle que pour toute $u \in H_{b,\delta}^{k+2}(M)$,

$$\begin{aligned} ||\Delta_g u||_{\rho^\delta H_b^k(M)} &= ||\chi_K\Delta_g u + (1-\chi_K)(\Delta_g - \Delta_{cyl})u + (1-\chi_K)\Delta_{cyl}u||_{\rho^\delta H_b^k(M)} \\ &\leq C'(||\Delta_g u||_{\rho^\delta H_b^k(K')} + ||(\Delta_g - \Delta_{cyl})u||_{\rho^\delta H_b^k(U)} \\ &\qquad + ||\Delta_{cyl}u||_{\rho^\delta H_b^k(U)}) \\ &\leq C||u||_{\rho^\delta H_b^{k+2}(M)} \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

tel que voulu. $\square$

On définit aussi le laplacien agissant sur les espaces duaux des espaces de Sobolev. Encore une fois, puisque $C_c^\infty(M,g) \subset H_{b,\delta}^k$ pour n'importe quels $k \in \mathbb{N}_0$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on va définir le laplacien en utilisant les distributions. On dira que $\Delta u = f$ pour $u \in H_{b,\delta}^{-k}$ s'il existe $f \in H_{b,\delta}^{-k-2}$ tel que $u(\Delta v) = f(v)$ pour tout $v \in C_c^\infty$. Puisque $C_c^\infty(M)$ est dense dans $H_{b,\delta}^k(M)$, ceci définit Δu sans ambiguité sur $\mathrm{Dom}(\Delta)$ au sens où si $\Delta u = f$ et $\Delta u = f'$, alors $f = f'$ en tant qu'éléments de $H_{b,\delta}^{-k-2}$. Comme pour les espaces d'ordre positif, on peut utiliser le théorème de régularité elliptique pour voir que $\mathrm{Dom}(\Delta : H_{b,\delta}^{-k} \to H_{b,\delta}^{-k})$ est bel et bien $H_{b,\delta}^{-k+2}$. Ainsi, le laplacien est compatible avec les inclusions continues $C_c^\infty \hookrightarrow L_{-\delta}^2 \hookrightarrow H_{b,-\delta}^{-k}$.

1.5.2 Propriétés de Fredholm du laplacien

On rappelle qu'un opérateur linéaire borné $A : E \to F$ agissant entre deux espaces de Banach est un opérateur *Fredholm* si $\mathrm{im}\, A$ est un sous-espace fermé de F et si $\dim \ker A$ et $\dim \operatorname{coker} A$ sont tous deux de dimension finie.

Pour l'opérateur linéaire borné $\Delta_g : H_{b,\delta}^{k+2} \to H_{b,\delta}^k$, on tentera de déterminer pour quels poids δ cet opérateur est Fredholm. Dans les prochaines lignes, on résume certaines idées entrant dans la caractérisation de ces poids dont au aura besoin par la suite. (Lockhart et McOwen, 1985), (Pacard, 2008) et (Melrose, 1993) sont trois références pour ce matériel.

Une caractérisation des opérateurs Fredholm parmis les opérateurs linéaires bornés entre deux espaces de Banach est que ce sont les opérateurs inversibles modulo des opérateurs compacts. Autrement dit, un opérateur borné F est Fredholm si et seulement si il existe un opérateur G tel que $FG-Id$ et $GF-Id$ sont compacts (voir par exemple l'appendice d'analyse fonctionelle de (Taylor, 2011) ou (Booss et Bleecker, 2014)). Un tel G est communément appellé une *paramétrice.* Il suffit donc de trouver un opérateur $G : H_b^k \to H_b^{k+2}$ tel que les opérateurs $\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta} \circ G - Id$ et $G \circ \rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta} - Id$ soient compacts. En effet, si par exemple $\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta} \circ G - Id = K$ pour K compact, on aura alors que

$$\Delta \circ (\rho^{\delta}G\rho^{-\delta}) - Id = \rho^{\delta}K\rho^{-\delta} : H_{b,\delta}^k(M) \to H_{b,\delta}^k(M)$$

est compact puisque la composition (à gauche ou à droite) d'un opérateur compact et d'un opérateur borné reste compact. Autrement dit, $\rho^{\delta}G\rho^{-\delta}$ serait une paramétrice à droite pour $\Delta : H_{b,\delta}^{k+2}(M) \to H_{b,\delta}^k(M)$. Étant donné que le noyau du Laplacian agissant sur $H_b^k(M)$ est de dimension finie pour n'importe quel k, l'existence d'une paramétrice à droite serait suffisante pour voir que Δ est Fredholm en vue du résultat élémentaire suivant :

Proposition 1.5.2 (voir par exemple (Agranovich, 2015)). *Soit $A : E \to F$ un opérateur borné entre deux espaces de Banach. S'il existe un opérateur $B : F \to E$ tel que $AB - \mathrm{Id}_F$ est compact, alors l'image de A est fermée et la dimension de son conoyau est finie.*

Notons que l'on peut montrer que l'inclusion $\rho^{\delta'}H_b^{k'}(M) \hookrightarrow \rho^{\delta}H_b^k(M)$ est compacte si $\delta' > \delta$ et $k' > k$ (voir le théorème 3.12 de (Lockhart, 1987)). En particulier, l'inclusion $\rho^{\infty}C^{\infty}(M) \hookrightarrow H_b^k(M)$ est compacte. Il suffit donc de construire un inverse à droite G modulo les fonctions lisses décroîssant à tous les ordres, c'est-à-dire tel que l'on ait une factorisation

$$\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta} \circ G - Id : H_b^k(M) \to \rho^{\infty}C_b^{\infty}(M) \hookrightarrow H_b^k(M). \tag{1.5.6}$$

La première étape dans cette construction est d'inverser $\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta}$ à l'infini. Plus précisément, on voudrait un premier inverse G_{∞} tel que pour toute $f \in H_b^k(M)$ on ait $(\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta} \circ G_{\infty})f = f + R$ pour un reste $R \in \rho^{\infty}H_b^k(M)$. Puisque $\Delta_g = e^{-\varphi}\Delta_{cyl}$ avec $\varphi \in \rho^{\delta}C_b^{\infty}(M)$ sur une surface à bouts asymptotiquement cylindriques, il suffit pour cette première étape d'inverser l'opérateur modèle Δ_{cyl} agissant sur les espaces à poids sur le cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \partial M$ qui modélise la géométrie à l'infini. En effet, si G_{∞} inverse $\rho^{-\delta}\Delta_{cyl}\rho^{\delta}$ sur $H_b^k(\mathcal{C})$, on aura $(\Delta_g - \Delta_{cyl})(\rho^{\delta}G_{\infty}\rho^{-\delta})f = (e^{-\varphi} - 1)f$ pour $f \in H_{b,\delta}^k(\mathcal{C})$ donc près du bord,

$$\begin{aligned}
\Delta_g(\rho^{\delta}G_{\infty}\rho^{-\delta}f) - f &= (\Delta_g - \Delta_{cyl})(\rho^{\delta}G_{\infty}\rho^{-\delta}f) + \Delta_{cyl}(\rho^{\delta}G_{\infty}\rho^{-\delta}f) - f \\
&= (e^{-\varphi} - 1)f + f - f \\
&\in \rho^{\infty}H_b^k(M)
\end{aligned}$$

pour toute $f \in \rho^{\delta}H_b^k(M)$, puisque $\varphi \in \rho^{\infty}C_b^{\infty}(M)$. Pour inverser l'opérateur modèle, on utilise la transformée de Fourier dans la direction x sur le cylindre modèle $\mathbb{R}_x \times \partial M$ (où $\rho = e^{-x}$), définie sur les fonctions lisses par

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}u(x)dx.$$

Puisque l'extension $\mathcal{F} : L^2(\mathcal{C}) \to L^2(\mathcal{C})$ est inversible, résoudre l'équation modèle $\Delta_{cyl}u = f$ pour $u, f \in L^2(\mathcal{C})$ (où $\Delta_{cyl} = -(\partial_x)^2 + \Delta_{\partial M}$) est équivalent à résoudre l'équation

$$\mathcal{F}\left(-(\partial_x)^2 + \Delta_{\partial M}\right)\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \hat{f} \tag{1.5.7}$$

Mais $\mathcal{F}(\partial_x u) = i\xi\hat{u}$ donc on a en fait $\mathcal{F}\left(-(\partial_x)^2 + \Delta_{\partial M}\right)\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = (\Delta_{\partial M} + \xi^2)\hat{u}$. On peut donc voir (1.5.7) comme une famille d'équations sur ∂M indexée par ξ.

Définition 1.5.1. La *famille indiciale* de Δ_g est la famille d'opérateurs sur ∂M donnée par

$$I(\Delta_g, \xi) := \mathcal{F}\left(-(\partial_x)^2 + \Delta_{\partial M}\right)\mathcal{F}^{-1} = \Delta_{\partial M} + \xi^2$$

pour $\xi \in \mathbb{C}$. On pose

$$\operatorname{spec}_b(\Delta_g) := \{\pm i\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(\Delta_{\partial M})\}$$

et les *poids critiques*

$$pc(\Delta_g) := \Re(i.\operatorname{spec}_b(\Delta_g)) = \{\pm\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(\Delta_{\partial M})\}.$$

Remarque 1.5.1. Par définition le spectre $\sigma(\Delta_{\partial M})$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\Delta_{\partial M} + z$ n'est pas inversible. Donc $\operatorname{spec}_b(\Delta_g)$ est l'ensemble des ξ tels que $I(\Delta_g, \xi)$ n'est pas inversible, heuristiquement, ce sont les ξ où le modèle de Δ_g à l'infini n'est pas inversible à ξ. Pour ce qui est des poids critiques, puisque

$$\rho^{-\delta}\Delta_{cyl}\rho^{\delta} = -\partial_x^2 - 2\delta\partial_x - \delta^2 + \Delta_{\partial M},$$

en utilisant $\mathcal{F}(\partial_x u) = i\xi\hat{u}$, un petit calcul montre que

$$I(\rho^{-\delta}\Delta\rho^{\delta}, \xi) = I(\Delta, \xi - i\delta). \tag{1.5.8}$$

Les poids critiques sont donc, heuristiquement, les poids pour lesquels l'opérateur $\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^{\delta}$ n'est pas inversible partout à l'infini. Le résultat suivant (que l'on ne démontre pas, voir les références mentionnées au début de cette section pour une démonstration) est crucial pour l'analyse sur les surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques, il dit justement que $\Delta_g : \rho^\delta H_b^{k+2}(M) \to \rho^\delta H_b^k(M)$ est Fredholm pour $\delta \in \mathbb{R} \setminus pc(\Delta_g)$.

Théorème 1.5.1. *Soit (M, g) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques et soit $\delta \in \mathbb{R}$. Alors l'opérateur $\Delta_g : \rho^\delta H_b^{k+2}(M) \to \rho^\delta H_b^k(M)$ est Fredholm pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ si et seulement si $\delta \notin pc(\Delta_g)$.*

La formule de l'indice relatif, présentée à la section 1.5.4, permet de comparer l'indice de Fredholm de l'opérateur Δ_g lorsqu'il agit sur différents poids non-critiques.

1.5.3 Dualité

On rappelle que si E et F sont des espaces de Banach et $A : E \to F$ est une application linéaire continue, l'adjoint de A est une application sur les espaces duaux $A^* : F' \to E'$ définie par $A^*(\varphi)(e) = \varphi(Ae)$ pour $\varphi \in F'$ et $e \in E$. Si l'image de A est fermée dans F, par exemple si A est Fredholm, alors

$$\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp \tag{1.5.9}$$

et

$$\operatorname{im} A = (\ker A^*)^\perp \tag{1.5.10}$$

au sens des espaces de Banach (voir par exemple (Taylor, 2011)). Plus précisément, puisque E et F ne sont que des espaces de Banach (pas nécessairement de Hilbert), on définit le complément orthogonal ci-dessus de la façon suivante. Si $U \subset E$ pour E de Banach, alors

$$U^\perp := \{\xi \in E' \mid \xi(u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

et si $V \subset E'$, alors

$$V^{\perp} := \{e \in E \mid \nu(f) = 0 \quad \forall \nu \in V\}.$$

On voudra donc bien comprendre comment $\Delta_g|_{\rho^\delta H_b^{k+2}(M)}$ et son adjoint sont reliés. On rappelle que l'on a une inclusion continue $L^2_{-\delta} \ni u \mapsto T_u \in H^{-k}_{b,-\delta}$ où $T_u = \langle u, \cdot \rangle_{L^2}$ et que l'on a défini une extension du laplacien à tout $H^{-k}_{b,-\delta}$. L'adjoint de $\Delta|_{H^{k+2}_{b,\delta}}$ est donc un opérateur $\Delta^* : H^{-k}_{b,-\delta} \to H^{-k-2}_{b,-\delta}$.

Proposition 1.5.3. *Soit (M,g) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques et $\Delta_g : H^{k+2}_{b,\delta}(M,g) \to H^k_{b,\delta}(M,g)$ le laplacien définit à la section 1.5.1 sur les espaces $H^{k+2}_{b,\delta}$ pour tous les $k \in \mathbb{Z}$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Alors l'adjoint de cet opérateur est donné par $(\Delta_g|_{H^k_{b,\delta}})^* = \Delta_g|_{H^{-k}_{b,-\delta}}$.*

Démonstration. C'est une conséquence des définitions. L'adjoint de $\Delta : H^{k+2}_{b,\delta} \to H^k_{b,\delta}$ est par définition l'opérateur $\Delta^* : H^{-k}_{b,-\delta} \to H^{-k-2}_{b,-\delta}$ tel que $(\Delta^* u)(v) = u(\Delta v)$ pour $u \in H^{-k}_{b,-\delta}$ et $v \in H^{k+2}_{b,\delta}$. Mais le laplacien Δ agissant sur $H^{-k}_{b,-\delta}$ est justement défini par la relation $\Delta u = f$ pour $f \in H^{-k-2}_{b,-\delta}$ si et seulement si $u(\Delta v) = f(v)$ pour tout $v \in C^\infty_c$. Puisque $C^\infty_c \subset H^{k+2}_{b,\delta}$, on obtient que pour $u \in H^{-k}_{b,-\delta}$ on a $u(\Delta v) = (\Delta^* u)(v)$ pour tout $v \in C^\infty_c$ et donc que $\Delta u = \Delta^* u$ tel que voulu. □

On notera $\ker(\Delta_g, r)$ pour désigner le noyau de l'opérateur $\Delta_g : H^{k+2}_{b,r}(M) \to H^k_{b,r}(M)$. Notons que par la régularité elliptique, si $\Delta f = 0$ pour $f \in H^{k+2}_{b,r}(M)$, alors en fait $f \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} H^k_{b,r}(M)$ donc $\ker(\Delta_g, r)$ ne dépend pas de k. De même, on écrira $\operatorname{coker}(\Delta_g, r)$ de sorte que lorsque $\operatorname{im} \Delta_g|_{H^{k+2}_{b,r}}$ est fermée, on a

$$\operatorname{coker}(\Delta_g, r) \cong \operatorname{im}(\Delta_g : H^{k+2}_{b,r} \to H^k_{b,r})^{\perp},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{coker}(\Delta_g, r) \cong \{f \in H_{b,-r}^{-k}(M,g) \mid f(\Delta v) = 0 \quad \forall v \in H_{b,r}^{k+2}\}.$$

En jumelant la propositon 1.5.3 avec les identifications (1.5.9) et (1.5.10), on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.5.1. *Soit (M,g) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques et $\delta \notin pc(\Delta_g)$. On considère l'opérateur $\Delta_g : H_{b,\delta}^{k+2}(M) \to H_{b,\delta}^{k}$. Alors*

$$\ker(\Delta_g, \delta) \cong \operatorname{coker}(\Delta_g, -\delta) \tag{1.5.11}$$

et

$$\operatorname{coker}(\Delta_g, \delta) \cong \ker(\Delta_g, -\delta). \tag{1.5.12}$$

De plus, ces espaces (de dimension finie) sont indépendants de k.

1.5.4 Formule de l'indice relatif

On s'intéresse maintenant au noyau de $\Delta : \rho^\delta H_b^{k+2}(M) \to \rho^\delta H_b^k(M)$ pour $\delta \notin pc(\Delta_g)$. Soit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ le spectre de $\Delta_{\partial M}$. On notera $E_j = E_j(\Delta_{\partial M})$ l'espace propre associé à la j-ème valeur propre de $\Delta_{\partial M}$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}_x \times \partial M)$, on réalise f comme une fonction sur le cylindre et alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, cette fonction admet une décomposition $f(x,\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x,\cdot)$ avec les $f_j \in E_j$. En particulier, si $u \in \ker \Delta_{cyl}$, c'est-à-dire $(-\partial_x^2 + \Delta_{\partial M})u = 0$, en décomposant u en fonctions propres comme ci-dessus, cette condition devient $(-\partial_x^2 + \lambda_j)u_j = 0$ pour chaque $j \in \mathbb{N}_0$. Donc pour $u \in \ker \Delta_{cyl}$, on a

$$\begin{cases} u_j = a_j e^{\sqrt{\lambda_j}x} + b_j e^{-\sqrt{\lambda_j}x} & \text{si } j > 0 \\ u_j = \alpha + \beta x & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

où $a_j, b_j \in E_j$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C} = E_0$. Avec $\rho = e^{-x}$, on trouve donc que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \rho^{-\sqrt{\lambda_j}} + b_j \rho^{\sqrt{\lambda_j}} + \alpha + \beta \log \rho. \tag{1.5.13}$$

Si par exemple on avait $u \in (\ker \Delta_{cyl}) \cap \rho^{\delta} L^2(\mathbb{R} \times \partial M)$ pour un certain poids $\delta \in \mathbb{R}$, alors il faudrait restreindre les coefficients apparaîssant dans (1.5.13) pour avoir le bon taux de décroissance à l'infini. Par exemple, pour $\delta < 0$ on aurait

$$u = \sum_{\lambda_j < \delta^2} a_j \rho^{-\sqrt{\lambda_j}} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \rho^{\sqrt{\lambda_j}} + \alpha + \beta \log \rho$$

tandis que si $\delta > 0$ on aurait

$$u = \sum_{\lambda_j > \delta^2} b_j \rho^{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Puisque pour (M, g) une surface asymptotiquement cylindrique avec m bouts on a $\Delta_g \sim \Delta_{cyl}$ à l'infini, on peut voir qu'un élément $u \in \ker \Delta|_{\rho^{\delta} H_b^{k+2}(M)}$ a un développement asymptotique au i-ème bout donné par

$$u \sim_{\rho_i \to 0} \sum_{\lambda_j < \delta^2} a_{ij} \rho_i^{-\sqrt{\lambda_j^i}} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \rho_i^{\sqrt{\lambda_j^i}} + \alpha_i + \beta_i \log \rho_i$$

où $(\lambda_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ est le spectre de la composante de ∂M définie par ρ_i. On remarque que les puissances de ρ apparaîssant dans le développement asymptotique des éléments du noyau de Δ_g sont justement les poids critiques $pc(\Delta_g)$.

Définition 1.5.2. Soit (M, g) une surface à m bouts asymptotiquement cylindriques. Notons $Y_1, \ldots, Y_m$ les composantes de ∂M et $E_{\lambda}(\Delta_{Y_i})$ l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'opérateur Δ_{Y_i}. Pour chaque $\delta \in pc(\Delta_g)$, le *noyau formel à l'infini* de Δ_g au poids δ est le sous-espace vectoriel complexe de $\bigoplus_{i=1}^m C^\infty(C^+;\mathbb{C})$ défini par

$$\begin{cases} F(\Delta_g,\delta) = \bigoplus_{i=1}^m \{u = \varphi_i \rho_i^\delta \mid \varphi_i \in E_{\delta^2}(\Delta_{Y_i})\} & \text{si } \delta \neq 0 \\ F(\Delta_g,\delta) = \bigoplus_{i=1}^m \{u = a_{i0} + a_{i1}\log(\rho_i) \mid a_{i0}, a_{i1} \in \mathbb{C}\} & \text{si } \delta = 0. \end{cases}$$

Une première étape pour connaître le noyau d'un opérateur Fredholm est d'étudier son indice. On rappelle que l'indice d'un opérateur Fredholm A est $\operatorname{ind}(A) = \dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A$. Il est bien connu (voir (Taylor, 2011) ou (Booss et Bleecker, 2014)) que si A_t est une famille continue d'opérateurs Fredholm pour $t \in [a,b]$, bien que la dimension du noyau ou du conoyau de A_t peut varier avec t, leur différence, c'est-à-dire l'indice de A_t, est indépendante de t. Dans notre cas, puisque $\rho^{-\delta}\Delta_g\rho^\delta$ n'est pas Fredholm aux poids critiques, son indice peut changer lorsque δ traverse un poids critique. Toutefois, et c'est le résultat principal de cette section, on peut explicitement déterminer le saut dans l'indice en terme du noyau formel au poids critique :

Théorème 1.5.2 (Formule de l'indice relatif). *Soit (M,g) une surface à bouts asymptotiquement cylindrique et $\delta \in pc(\Delta_g)$ un poids critique. Pour $\epsilon > 0$ assez petit pour que $[\delta-\epsilon,\delta+\epsilon] \cap pc(\Delta_g) = \{\delta\}$, notons l'indice de Δ_g : $\rho^{\delta\pm\epsilon}H_b^{k+2} \to \rho^{\delta\pm\epsilon}H_b^k$ par $\operatorname{ind}(\Delta_g,\delta\pm\epsilon)$. Alors*

$$\operatorname{ind}(\Delta_g,\delta-\epsilon) - \operatorname{ind}(\Delta_g,\delta+\epsilon) = \dim F(\Delta_g,\delta).$$

Remarque 1.5.2. Puisque $\dim F(\Delta_g,\delta) = \sum_{i=1}^m \dim E_{\lambda_j}(\Delta_{Y_i})$ pour $\delta = \sqrt{\lambda_j} \in pc(\Delta_g)$, dans le cas où $\dim E_0 = 1$ comme pour le Laplacien, on a que $\dim F(\Delta_g, 0) = 2m$ où m est le nombre de composantes de ∂M.

CHAPITRE II

FLOT DE RICCI SUR LES SURFACES À BOUTS CYLINDRIQUES

Dans cette section, on discute de certaines généralités du flot de Ricci sur des surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques au sens de la section 1.3. Pour faciliter la lecture, on rappelle d'abord quelques notations et définitions.

Tout au long de cette section, $\overline{M}$ désignera une surface compacte avec bord $\partial\overline{M}$ et avec intérieur la surface non-compacte M. On supposera que $\partial\overline{M}$ est constitué de l'union disjointe de ses m composantes connexes $Y_1, \ldots, Y_m$, avec $Y_j \cong S^1$ pour chaque j.

La notion de surface asymptotiquement cylindrique que l'on considérera pour le flot de Ricci sera un petit peu plus restrictive qu'en (1.3.1) :

Définition 2.0.1. Avec les notations introduitent ci-dessus, on dira que (M, g) est une *surface à bouts asymptotiquement cylindrique* si pour chaque composante Y_j du bord $\partial\overline{M}$, il existe une fonction de définition du bord ρ_j et un voisinage tubulaire $M^{(j)} = (0, \epsilon)_{\rho_j} \times S^1$ de Y_j dans M tel que la métrique g y est donnée par

$$e^{\varphi}\left(\frac{d\rho_j^2}{\rho_j^2} + d\theta^2\right) \tag{2.0.1}$$

où $d\theta_j^2$ est la métrique canonique sur S^1 de circonférence 2π et où $\varphi \in C^\infty(M)$ est telle que pour chaque $j \in \{0, \dots, m\}$, il existe une constante $\phi_j \in \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_j - \phi_j \in C^{k+2}_{b,\delta}(M) \tag{2.0.2}$$

pour un certain poids $\delta > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}_0$.

Remarque 2.0.1. Avec le changement de variables $\rho \mapsto e^{-x}$, on voit qu'une métrique cylindrique est complète, et puisque les φ_j sont donnés par des constantes ϕ_j sur les Y_j, que la géométrie aux «bouts à l'infini» est asymptotique à celle d'un cylindre de circonférence $2\pi e^{\phi_j}$.

2.1 Équations d'évolution le long du flot de Ricci

Définition 2.1.1. Une solution au *flot de Ricci* sur une variété riemannienne (M, g_0) est une famille lisse de métriques $g(t)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\operatorname{Ric}(g(t)), \\ g(0) = g_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Sur une surface (M, g_0), c'est-à-dire une variété riemannienne complète de dimension 2, le flot de Ricci prend une forme particulièrement simple. En effet, puisque le tenseur de Ricci se réduit à la courbure scalaire (voir l'équation (1.1.20)), l'équation du flot de Ricci se réduit à

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -R_{g(t)} g(t), \\ g(0) = g_0 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

pour $R_{g(t)}$ la courbure scalaire de $(M, g(t))$. Si $g(t)$ est une solution à (2.1.2) pour $t \in [0, T)$, alors pour tout $t \in [0, T)$, on peut considérer une solution

$g(t)$ *conformément équivalente* à la métrique initiale g_0. Autrement dit, une fonction lisse $\omega : [0,T) \times M \to \mathbb{R}$ telle que

$$g(t) = e^{\omega(t)} g_0. \tag{2.1.3}$$

En effet, il suffit de prendre

$$\omega(t,x) = -\int_0^t R_{g(s)}(x)ds. \tag{2.1.4}$$

En dérivant le terme de droite de (2.1.3) par rapport au temps avec ω donnée par (2.1.4), on voit que (2.1.2) est satisfaite. Dans les cas où on connait l'unicité de la solution, on voit que $g(t)$ est nécessairement une famille de métriques conformément équivalentes. Une autre façon de dire ceci est qu'en dimension 2, le flot de Ricci ne change la métrique que par une dilatation ponctuelle variant avec le temps. Ainsi, on peut réécrire l'équation du flot de Ricci sur une surface (M, g_0) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t) = -R(t,x), \\ \omega(0,x) \equiv 0 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

pour une fonction $\omega : [0,T) \times M \to \mathbb{R}$, où $R(t,x)$ désigne la courbure scalaire de la métrique $e^{\omega(t)}g_0$. Une solution $\omega(t)$ de l'équation (2.1.5) correspond alors à une solution $e^{\omega(t)}g_0$ de l'équation (2.1.2).

Par la proposition 1.1.3, la courbure scalaire de $g(t) = e^{\omega(t)}g_0$ est donnée par $R_{g(t)} = e^{-\omega}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega)$. On peut donc réécrire (2.1.5) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega = -e^{-\omega}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega) \\ \omega(0) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Remarque 2.1.1. Si on arrive à écrire le flot $g(t) = e^{\omega(t)}g_0$ pour g_0 une métrique plate (c'est-à-dire avec $R_{g_0} \equiv 0$), alors l'équation (2.1.6) prend une forme particulièrement simple. En effet, l'équation du flot de Ricci devient alors simplement

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = e^{-\omega}\Delta_{g_0}\omega = \Delta_{g(t)}\omega. \tag{2.1.7}$$

Les trois formulations ci-dessus sont équivalentes au sens suivant :

Proposition 2.1.1. *Une solution pour $t \in [0,T)$ à n'importe laquelle des trois équations* (2.1.2), (2.1.5) *ou* (2.1.6) *donne une solution pour $t \in [0,T)$ aux deux autres via* (2.1.3) *et* (2.1.4).

Il est facile d'écrire les équations d'évolutions satisfaites par les invariants géométriques de la proposition 1.1.3 quand la famille de métriques $g(t) = e^{\omega(t)}g_0$ satisfait (2.1.5) est donnée par une variation conforme. On peut par exemple consulter (Chow et Knopf, 2004) où les calculs menant au lemme suivant sont explicités.

Lemme 2.1.1. *Soit $g(t) = e^{\omega(t)}g_0$ pour ω une solution à* (2.1.5) *(ou* (2.1.6)*). Alors*

(i) $\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{g(t)} = R_{g(t)}\Delta_0,$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}d\mu_{g(t)} = -R_{g(t)}d\mu_{g(t)},$

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}R_{g(t)} = \Delta_{g(t)}R_{g(t)} + (R_{g(t)})^2,$

(iv) $\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}(t) = Rg^{ij}(t).$

On peut aussi écrire l'équation d'évolution satisfaite par les symboles de Christoffel d'une telle solution au flot de Ricci :

Lemme 2.1.2. *Soit $g(t)$ un flot de Ricci sur une variété M. Alors les symboles de Christoffels satisfont*

$$\partial_t \Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{2} g^{im}((\partial_j R) g_{mk} + (\partial_k R) g_{mj} - (\partial_m R) g_{jk}).$$

Démonstration. Il suffit de prendre la dérivée de

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}).$$

□

Le prochain lemme est une forme imprécise de l'équation d'évolution du facteur conforme le long du flot de Ricci. Elle sera utile pour démontrer que les dérivées covariantes du facteur conforme demeurent bornées aussi longtemps que celles de la courbure.

Lemme 2.1.3. *Pour $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$ une solution au flot de Ricci sur une surface M, on a*

$$\partial_t(\nabla^k \omega) = \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \nu \leq k-1}} \nabla^\mu R * \nabla^\nu \omega \tag{2.1.8}$$

où $*$ désigne une combinaison linéaire finie de contractions comme dans la proposition 1.1.4.

Démonstration. On utilise le lemme 1.1.1 pour établir le résultat par récurrence. D'abord, le cas $k = 0$ est immédiat puisque $\partial_t \omega = -R$. Supposons que le résultat soit validé pour $l \in \{0, \dots, k\}$. Alors par le lemme 1.1.1 on a

$$\partial_t(\nabla^{k+1}\omega) = (\partial_t \nabla)(\nabla^k \omega) + \nabla(\partial_t \nabla^k \omega) \tag{2.1.9}$$

où $\partial_t \nabla$ agit comme

$$(\partial_t \nabla)(\alpha_I dx^I) = -\alpha_I \sum_{m=1}^{r} (\partial_t \Gamma^{i_m}_{pq}) dx^{I^{pq}_m}.$$

Or par le lemme 2.1.2, on voit bien que $\partial_t \Gamma^i_{jk}$ est une combinaison linéaire de dérivées de la courbure et de la métrique, si bien que $(\partial_t \nabla)A$ soit de la forme $\nabla R * A$ pour n'importe quel tenseur A. Ainsi, (2.1.9) entraîne que

$$\partial_t(\nabla^{k+1}\omega) = \nabla R * (\nabla^k \omega) + \nabla(\partial_t \nabla^k \omega)$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla^{k+1}\omega) &= \nabla R * \nabla^k \omega + \nabla \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \nu \leq k-1}} \nabla^\mu R * \nabla^\nu \omega \\ &= \sum_{\substack{\mu+\nu=k+1 \\ \nu \leq k}} \nabla^\mu R * \nabla^\nu \omega \end{aligned}$$

tel que voulu. □

Puisque de nombreux objets géométriques satisfont les conditions de la prochaine proposition, celle-ci donne l'identité clé permettant d'appliquer le principe du maximum dans le contexte du flot de Ricci.

Proposition 2.1.2. *Soit $(M, g(t))$ une surface évoluant le long du flot de Ricci pour $t \in [0, T)$ et soit $u(t, x) : M \times [0, T) \to \mathbb{R}$ une fonction lisse en x et au moins C^1 en t qui satisfait une équation d'évolution*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g(t)} u + F(u)$$

pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une certaine fonction lisse. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{g(t)}\right) |\nabla^k u|^2 = -2|\nabla^{k+1} u|^2 + 2g_t\left(\nabla^k F(u), \nabla^k u\right) + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R_{g(t)} * \nabla^\nu u * \nabla^k u \tag{2.1.10}$$

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul. Puisque

$$|\nabla^k u|^2 = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_k} u \nabla_{j_1} \cdots \nabla_{j_k} u =: g^{IJ} \nabla_I u \nabla_J u,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t |\nabla^k u|^2 &= kR|\nabla^k u|^2 + 2g((\partial_t \nabla)\nabla^{k-1}u, \nabla^k u) + 2g(\nabla \partial_t(\nabla^{k-1}u), \nabla^k u) \\ &= \cdots \\ &= kR|\nabla^k u|^2 + 2g(\sum_{\mu+\nu=k-1} \nabla^\mu (\partial_t \nabla)\nabla^\nu u, \nabla^k u) + 2g(\nabla^k \partial_t u, \nabla^k u).\end{aligned}$$

Or comme ci-dessus,

$$\nabla^\mu (\partial_t \nabla) \nabla^\nu u = \nabla^{\mu+1} R * \nabla^\nu u$$

et donc

$$\partial_t |\nabla^k u|^2 = 2g(\nabla^k(\Delta u + F(u)), \nabla^k u) + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R * \nabla^\nu u * \nabla^k u.$$

Pour obtenir le terme $\Delta|\nabla^k u|^2$ de (2.1.10), on commute les dérivées covariantes :

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla^k u|^2 &= \nabla^a \nabla_a g^{IJ} \nabla_I u \nabla_J u \\ &= 2|\nabla^{k+1}u|^2 + 2g^{IJ}(\nabla^a \nabla_a \nabla_I u)\nabla_J u,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\nabla^a \nabla_a \nabla_I u &= \nabla^a(\nabla_{i_1} \nabla_a \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_k} u - \sum_{m=2}^{k} R^l_{a i_1 m} \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_{m-1}} \nabla_l \nabla_{i_{m+1}} \cdots \nabla_{i_k} u) \\ &= \cdots \\ &= \nabla_I \nabla^a \nabla_a u + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R * \nabla^\nu u.\end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\partial_t - \Delta)|\nabla^k u|^2 = -2|\nabla^{k+1}u|^2 + 2g(\nabla^k F, \nabla^k u) + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R * \nabla^\nu u * \nabla^k u$$

tel que voulu. □

Remarque 2.1.2. Quand $u = R$ est la courbure scalaire, comme $\partial_t R = \Delta R + R^2$ on a $F(u) = R^2$ et le troisième terme est absorbé dans le quatrième. Toutefois, quand $u = \omega$ la solution dans (2.1.6), l'équation d'évolution est donnée par $\partial_t \omega = \Delta\omega - e^{-\omega} R_{g_0}$ et le troisième terme complique l'équation d'évolution. On voudra donc d'abord se ramener au cas où $g(t) = e^{u(t)} g_0$ pour g_0 une métrique plate, de sorte que l'on ait $F(u) = 0$.

2.2 Principe du maximum

Dans cette section, on suit les lemme 3.2 et proposition 3.3 de (Albin *et al.*, 2013). Toutefois, on énonce un principe du maximum un peu plus général dont on se servira dans la démonstration des estimés de Shi au chapitre 3.

Lemme 2.2.1. *Soit $\{g(t)\}$ une famille lisse de métriques complètes dans l'intérieur M d'une variété compacte $\overline{M}$ à bord ∂M pour $t \in [0, T]$ avec $T \in (0, +\infty)$. Soient $u, v \in C^2([0,T] \times M) \cap C^1([0,T] \times \overline{M})$ deux fonctions telles que $u \geq v$ sur $[0,T] \times \partial\overline{M}$ et sur $\{0\} \times M$. Alors étant donné une constante $A \in \mathbb{R}$, exactement l'une des deux possibilités suivantes est satisfaite :*

i) $u(t,x) \geq v(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \overline{M}$,

ii) Il existe un $(t,x) \in (0,T] \times M$ tel que

$$\begin{aligned} &u(t,x) < v(t,x); && \Delta_{g(t)} u(t,x) \geq \Delta_{g(t)} v(t,x); \\ &\nabla u(t,x) = \nabla v(t,x); && \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - A(v(t,x) - u(t,x)). \end{aligned}$$

Démonstration. On commence par remplacer u par $u - v$ et v par 0, et ensuite u par $e^{-At}u$ et A par 0. Chaque possibilité est satisfaite exactement quand elle l'était avant le changement de variables mais on peut maintenant supposer que $A = 0$ et que v est identiquement nulle.

Supposons que la première possibilité ne soit pas satisfaite, c'est-à-dire que $u(t,x) < 0$ pour un certain $(t,x) \in [0,T]\times\overline{M}$. Soit $(t_0,x_0) \in [0,T]\times\overline{M}$ un point sur lequel u atteint son minimum (qui est nécéssairement négatif). Notons que puisque l'on suppose $u \geq 0$ sur $[0,T]\times\partial\overline{M}$ et sur $\{0\}\times\overline{M}$, le point (t_0,x_0) doit en fait être dans $(0,T]\times M$. Comme (t_0,x_0) est un minimum de u, on peut alors facilement voir, par exemple avec des coordonnées normales par rapport à $g(t_0)$ centrées à ce point, que $\Delta_{g(t_0)}u(t_0,x_0) \geq 0$ et que $\nabla u(t_0,x_0) = 0$. De plus, si $t_0 < T$, on a $\partial_t u(t_0,x_0) = 0$ et si $t_0 = T$, alors $\partial_t u(t_0,m_0) \leq 0$. Dans tous les cas, on conclut ainsi que si la première possibilité n'est pas satisfaite, alors la deuxième doit l'être, tel que voulu. $\square$

Proposition 2.2.1 (Principe du maximum parabolique). *Pour une constante C et une fonction ϕ, notons $\Omega_{C,\phi} = \{(t,x) \in [0,T]\times\overline{M} \mid \phi(t,x) < C\}$. Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent, supposons qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $u - v \geq C$ sur $[0,T]\times\partial\overline{M}$ et sur $\{0\}\times\overline{M}$ mais que pour tout $(t,x) \in \Omega_{C,u-v}$ on ait*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)}u + \nabla_{X(t)}u + F(t,x,u)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)}v + \nabla_{X(t)}v + F(t,x,v)$$

où $X(t)$ est une famille lisse de champs de vecteurs lisses et F une fonction uniformément Lipschitz en sa dernière variable. Alors en fait $\Omega_{C,u-v} = \emptyset$, c'est-à-dire que $u(t,x) - v(t,x) \geq C$ pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\overline{M}$.

Démonstration. Puisque $F(t,x,s)$ est uniformément Lipschitz en s, il existe une constante $K \geq 0$ (indépendante de t et de m), telle que pour tout $(t,x) \in$

$[0, T] \times \overline{M}$ on ait

$$|F(t, x, u(t, x)) - F(t, x, (v(t, x))| \leq K|u(t, x) - v(t, x)|$$

Sur l'ouvert $\Omega_{C,u-v}$ de l'énoncé on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - v) \geq \Delta_{g(t)}(u - v) + \nabla_{X(t)}(u - v) - K|u - v|. \tag{2.2.1}$$

Or par le lemme précédent (appliqué aux deux fonctions $u-v$ et C), si $u(t, x) - v(t, x) < C$ pour un certain $(t, x) \in [0, T] \times \overline{M}$, on aurait un certain $(t_0, x_0) \in \Omega_{C,u-v}$ donnant la possibilité *(ii)* du lemme. En particulier, puisqu'à (t_0, x_0) on a $u - v - C < 0$ (donc $v - u + C = |v - u + C|$), cette deuxième possibilité du lemme entraînerait qu'à (t_0, x_0),

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - v) \leq -A|v - u + C| \leq \Delta_{g(t)}(u - v) + \nabla_{X(t)}(u - v) - A|u - v - C|.$$

En prenant $A \in \mathbb{R}$ tel que $A|u - v - C| > K|u - v|$ à (t_0, x_0), cette dernière équation contredit (2.2.1). On doit donc conclure que $u(t, x) - v(t, x) \geq C$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \overline{M}$ tel que voulu. □

Remarque 2.2.1. On appelle des fonctions u et v satisfaisant de telles inégalités pour une équation d'évolution respectivement des *super-solutions* et *sous-solutions* de l'équation. Notons que le principe du maximum est habituellement énoncé en supposant que les inégalités différentielles satisfaites par u et v sont valides sur tout $[0, T] \times \overline{M}$ au lieu de seulement $\Omega_{C,\phi}$. On note aussi qu'en remplaçant u et v par $-u$ et $-v$, on voit facilement que la proposition 2.2.1 s'appliquerait pour déduire une borne supérieure $u(t, x) - v(t, x) < C$ si toutes les inégalités étaient renversées dans les hypothèses. La proposition qui suit est un exemple de cela qui sera utilisé plus loin.

Proposition 2.2.2. *Soit $u : [0,T] \times \overline{M} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Supposons que $u \leq C$ sur $[0,T] \times \partial\overline{M}$ et sur $\{0\} \times \overline{M}$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. Supposons aussi que sur $\Omega'_{C,u} := \{(t,x) \mid u(t,x) > C\}$ on ait l'inégalité différentielle $(\partial u/\partial t)(t,x) \leq \Delta_{g(t)}u(t,x)$. Alors en fait $u(t,x) \leq C$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \overline{M}$.*

Démonstration. Considérons $v = -u$. Alors sur $\Omega_{-C,v} = \{(t,x) \mid v(t,x) < -C\}$, l'inégalité différentielle inverse $(\partial v/\partial t) \geq \Delta_{g(t)}v$ est satisfaite. De plus, $v \geq -C$ sur $[0,T] \times \partial\overline{M}$ et sur $\{0\} \times \overline{M}$. On peut donc appliquer la proposition 2.2.1 pour conclure que $v \geq -C$ sur tout $[0,T] \times \overline{M}$, donc que $u \leq C$ sur tout $[0,T] \times \overline{M}$. □

Le lemme suivant montre une utilisation typique du principe du maximum pour obtenir un contrôle sur la géométrie le long du flot de Ricci. La plupart des résultats qui suivront sur le flot de Ricci seront basés sur cette technique fondamentale.

Lemme 2.2.2. *Soit (M, g_0) une surface complète qui soit l'intérieur d'une surface compacte $\overline{M}$ de sorte que $M = \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$. Soit $e^{\omega(t)}g_0$ une solution lisse au flot de Ricci* (2.1.6) *pour $t \in [0,T]$ avec $T > 0$ et $\omega(0) = 0$. On suppose que pour tout $t \in [0,T]$, la courbure $R_{g(t)}$ s'étende à une fonction de classe C^1 sur $\overline{M}$ telle que $R_{g(t)}|_{\partial\overline{M}} \equiv 0$. Supposons aussi que pour tout $x \in M$ on ait $-c \leq R_{g_0}(x) \leq C$ pour des constantes $c, C > 0$. Alors pour tout $t \in [0, \frac{1}{C})$, il y a une borne*

$$\frac{1}{\frac{1}{-c} - t} \leq R_{g(t)} \leq \frac{1}{\frac{1}{C} - t}. \tag{2.2.2}$$

En fait, la borne inférieure est valide pour tout $t \in [0,T]$, *donc*

$$R_{g(t)} \geq -c \quad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Démonstration. On choisit un $\phi(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ puis on considère la fonction

$$\phi(t,x) = \frac{1}{\frac{1}{\phi(0)} - t}, \tag{2.2.3}$$

définie pour $t \in [0, \frac{1}{\phi(0)})$ si $\phi(0) > 0$ et pour tout $t \in [0,T]$ si $\phi(0) < 0$. Puisque $\phi(t,x)$ est indépendante de x on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta_{g(t)}\phi + \phi^2.$$

Or puisque la courbure scalaire évolue selon l'équation

$$\frac{\partial R_{g(t)}}{\partial t} = \Delta_{g(t)} R_{g(t)} + (R_{g(t)})^2$$

(voir le lemme 2.1.1), on peut voir ϕ comme une super-solution de l'équation $\partial_t u = \Delta u + u^2$ sur M, et $R_{g(t)}$ comme une sous-solution. Pour appliquer le principe du maximum (la proposition 2.2.1) à ces équations, on prend $\phi(0) = C$. L'hypothèse que $0 \equiv R_{g(t)}|_{\partial \overline{M}}$ entraîne que $R_{g(t)} \leq \phi(t,x)$ au bord de $\overline{M}$ pour tout $t \in [0,T]$ puisque ϕ est strictement positive, et on suppose aussi que $\phi(x,0) = C \geq R_{g(0)}$. Toutes les conditions nécessaires pour appliquer le principe du maximum sont donc satisfaites, et on obtient que $R_{g(t)} \leq \phi(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \overline{M} \times [0, \frac{1}{C}]$.

Avec le même argument mais en prenant plutôt $\phi(0) = -c$, on obtient la borne inférieure pour tout $(t,x) \in [0,T] \times M$. $\square$

Remarque 2.2.2. En particulier, si la courbure est initialement bornée, elle le restera pour un certain temps le long d'un flot de Ricci ayant la propriété que $R_{g(t)}|_{\partial M}$ reste nulle. Notons que si l'on pouvait prendre $C < 0$, les deux bornes seraient valides pour tout $t \in [0, T)$.

La condition ci-dessus sur la décroîssance de $R_{g(t)}$ à l'infini de M le long du flot est cruciale pour appliquer le principe du maximum. Le rôle de la section 2.4 est justement d'assurer qu'avec les bonnes conditions initiales, cette condition est satisfaite par la courbure et le facteur conforme, ce qui permettra d'utiliser le principe du maximum.

2.3 Existence pour les temps courts

On rappelle d'abord le résultat original de Shi (Shi, 1989).

Théorème 2.3.1 (Shi, 1989). *Soit (M, g_0) une variété riemannienne complète de dimension arbitraire telle que son tenseur de courbure satisfasse une borne*

$$\sup_{x \in M} |\operatorname{Rm}(g_0)|_{g_0} \leq k_0 \tag{2.3.1}$$

pour une constante $k_0 > 0$. Alors il existe un $T > 0$ et une solution $g(t)$ au flot de Ricci sur M pour $t \in [0, T]$ avec condition initiale $g(0) = g_0$ qui satisfait les bornes suivantes. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une constante C_k ne dépendant que de n, k et k_0 telle que

$$\sup_{x \in M} |\nabla^k \operatorname{Rm}(g(t))|^2_{g(t)} \leq \frac{C_k}{t^k} \tag{2.3.2}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 2.3.1. Le long du flot donné par ce théorème, pour tout $\epsilon > 0$ (2.3.2) donne une borne uniforme sur $|\nabla^k \operatorname{Rm}_{g(t)}|$ pour $(t,x) \in [0+\epsilon, T] \times M$ pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$. Par contre, les bornes (2.3.2) dégénèrent en $t = 0$; il se pourrait par exemple que la métrique initiale soit telle que $|\nabla \operatorname{Rm}_{g_0}|$ soit non borné. La proposition suivante (Une partie du théorème 3.29 de (Morgan et Tian, 2007), qui dit en particulier qu'une borne locale initiale sur les $|\nabla^k \operatorname{Rm}(x,0)|$ près d'un point p est préservée pour un petit temps près de ce point) permettra d'établir que si l'on suppose en plus que $|\nabla^j \operatorname{Rm}_{g_0}|$ est borné sur M pour tout $0 \leq j \leq k$, le flot du théorème précédent peut être pris avec les $|\nabla^j \operatorname{Rm}(g(t))|_{g(t)}$ uniformément bornés sur tout $[0,T]$.

Théorème 2.3.2 ((Morgan et Tian, 2007)). *Soient des réels $K < \infty$, $\alpha > 0$ et un entier $l \geq 0$. Pour chaque entier $k \geq 0$ et pour chaque $r > 0$ il existe une constante $C_{k,l} = C_{k,l}(K, \alpha, r, n)$ telle que l'énoncé suivant soit satisfait. Soit $(U, g(t))$, $0 \leq t \leq T$ un flot de Ricci avec $T < \alpha/K$. Soit $p \in U$ et supposons que la boule $B(p,0,r)$ soit relativement compacte dans U. Supposons que*

$$\sup_{(t,x)\in U\times[0,T]} |\nabla \operatorname{Rm}(t,x)| \leq K$$

et

$$\sup_{x\in M} |\nabla^k \operatorname{Rm}(x,0)| \leq K \quad \textit{pour chaque entier } k \leq l.$$

Alors pour $k \leq l$, $y \in B(p,0,r/2)$ et $t \in [0,T]$ on a

$$|\nabla^k \operatorname{Rm}(y,t)| \leq C_{k,l}. \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.2. Cet énoncé est beaucoup plus précis que ce qui est nécessaire dans ce travail, particulièrement en ce qui concerne son caractère local. En effet, dans le contexte des surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques, on a des bornes initiales sur les $|\nabla^k R(x,0)|$ valides sur toute la variété (avec r aussi grand que l'on veut). Or comme remarqué au premier paragraphe de la démonstration de (Morgan et Tian, 2007), si le résultat est valide pour des boules de rayon $r > 0$, alors il l'est aussi (avec les mêmes constantes) pour les boules de rayon $r' \geq 2r$. Autrement dit, pour K, α et n fixés, $C_{k,l}(r)$ peut être prise décroissante par rapport à r. Ainsi, avec $U = M$ on peut considérer la borne (2.3.3) comme valide pour r arbitrairement grand, c'est-à-dire sur tout M. Dans (Morgan et Tian, 2007), cette remarque prend la forme de leur corollaire 3.31. En jumelant cette borne globale aux estimations de Shi (2.3.2), on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *Dans le contexte du théorème 2.3.1, si l'on suppose en plus que* $\sup_{x\in M} |\nabla^j \operatorname{Rm}(x,0)|_{g_0} \leq k_0$ *pour tout* $0 \leq j \leq l$ *pour un certain entier* $l \geq 0$*, alors pour chaque* $0 \leq k \leq l$ *on a une constante* C_k *ne dépendant que de* n, k, l *et* k_0 *telle que*

$$\sup_{x\in M} |\nabla^k \operatorname{Rm}(t,x)|^2_{g(t)} \leq \frac{C_k}{(1+t)^k} \tag{2.3.4}$$

pour tout $t \in [0,T]$*. En particulier,* $|\nabla^k \operatorname{Rm}(t,x)|_{g(t)}$ *est uniformément borné sur* $[0,T]$ *pour tout* $0 \leq k \leq l$*.*

Puisqu'une surface (M, g_0) à bouts asymptotiquement cylindriques est complète et a les dérivées covariantes de la courbure bornées (voir le lemme 2.4.1), cette discussion s'applique et on est assuré d'avoir l'existence d'une solution au flot de Ricci pour un petit intervalle de temps avec les dérivées covariantes de la courbure uniformément bornées sur $[0,T]$.

Le corollaire suivant montre comment les estimations ci-dessus permettent de contrôler la métrique.

Corollaire 2.3.1. *Soit (M, g_0) une surface complète et $l \geq 0$ un entier tel que $\sup_{x\in M} |\nabla^k \mathrm{R}(x,0)| \leq K$ pour une certaine constante K, pour tout $0 \leq k \leq l$. Soit $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$, $0 \leq t \leq T$ une solution au flot de Ricci préservant la classe conforme donnée par le théorème 2.3.1. Alors il existe des constantes $C_k > 0$, $0 \leq k \leq l$ ne dépendant que de n, k, l et K telles que*

$$\sup |\nabla^k \omega(t_2) - \nabla^k \omega(t_1)| \leq C_k |t_2 - t_1| \tag{2.3.5}$$

pour tous $0 \leq t_1, t_2 \leq T$. En particulier, en prenant $t_1 = 0$ et $k = 0$, on obtient que les métriques $g(t)$ sont uniformément équivalentes le long du flot, ou plus précisément que

$$e^{-C_0 t} g_0 \leq g(t) \leq e^{C_0 t} g_0 \quad \textit{pour tout } t \in [0, T]. \tag{2.3.6}$$

Démonstration. Pour le cas $k = 0$, on utilise simplemement le fait que $\partial_t \omega(t) = -R_{g(t)}$ et que $|R(t,x)|$ est uniformément borné par une constante $C_0 > 0$ le long du flot par le théorème de Shi. On obtient donc que

$$|\omega(t_2) - \omega(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\partial_s \omega(s)| ds \leq C_0 |t_2 - t_1|.$$

En fait, par le lemme 2.1.3, pour chaque $k \geq 0$ il y a des constantes $C_{\mu\nu} > 0$ telles que

$$|\partial_t \nabla^k \omega(t)|_{g(t)} \leq \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \nu \leq k-1}} C_{\mu\nu} |\nabla^\mu R|_{g(t)} |\nabla^\nu \omega|_{g(t)} \tag{2.3.7}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par récurrence, on suppose maintenant que (2.3.5) est satisfaite pour $0 \leq j \leq k-1$. On utilise alors les bornes sur les termes

$|\nabla^{\mu} R|_{g(t)}$ données par la proposition 2.3.1 et l'hypothèse de récurrence sur les termes $|\nabla^{\nu}\omega|$ en intégrant (2.3.7) pour obtenir

$$|\nabla^k \omega(t_2) - \nabla^k \omega(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\partial_s \nabla^k \omega(s)| ds \leq C_k |t_2 - t_1|.$$

□

2.4 Comportement asymptotique d'une solution

En procédant comme dans (Albin *et al.*, 2013), on montre maintenant que le comportement asymptotique que l'on impose à la métrique d'une surface à bouts asymptotiquement cylindriques est préservé le long du flot de Ricci.

Notons que les conditions de décroîssance pour le facteur conforme entraînent que la courbure décroît aussi. C'est le contenu du lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Soit* (M, g_0) *une surface à bouts cylindriques au sens de la définition* (2.0.1). *Alors la courbure scalaire de* g_0 *satisfait* $R_{g_0} \in C^k_{b,\delta}(M)$.

Démonstration. Puisque $g_0 = e^{-\varphi_i} g_{cyl}$ près des bords, la courbure scalaire y est donnée par $R_{g_0}|_{\mathcal{C}^{(i)}} = -e^{-\varphi_i}\Delta_{cyl}\varphi_i$. Mais $\varphi_i - \phi_i \in \rho^{\delta} C^{k+2}_b(\mathcal{C}^{(i)})$ donc $\varphi_i = \rho^{\delta} h + \phi_i$ pour une fonction $h \in C^{k+2}_b$. On a donc

$$\Delta_{cyl}\varphi_i = \rho^{\delta}\Delta_{cyl} h + h\Delta_{cyl}\rho^{\delta} + \langle \nabla\rho^{\delta}, \nabla h\rangle \qquad (2.4.1)$$

Mais $\langle \nabla\rho^{\delta}, \nabla h\rangle = \delta\rho^{\delta}\rho\partial_{\rho} h$ et $(\rho\partial_{\rho})^2\rho^{\delta} = \delta^2\rho^{\delta}$. Donc $\Delta_{cyl}\varphi_i$ est dans $C^k_b(\mathcal{C}^{(i)})$ puisque $h \in C^{k+2}_b$. Puisque e^{φ_i} est bornée sur M, on a $R_{g_0}|_{\mathcal{C}^{(i)}} = -e^{-\varphi_i}\Delta_{cyl}\varphi_i = \rho^{\delta}\tilde{h}$ pour $\tilde{h} \in C^k_b(\mathcal{C}^{(i)})$ et donc $R_{g_0} \in \rho^{\delta} C^k_b(M)$. □

On peut maintenant démontrer le premier résultat portant sur le comportement asymptotique d'une solution initialement asymptotiquement cylindrique. Ce qui nous intéresse vraiment est la décroîssance du facteur conforme mais puisque la courbure apparaît dans l'équation d'évolution des dérivées covariantes de ω, on démontre d'abord le résultat pour la courbure et ses dérivées.

Proposition 2.4.1. *Soit $\omega(t)$ une solution lisse au flot de Ricci* (2.1.6) *pour $t \in [0,T]$ sur (M, g_0) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques au sens de la définition* (2.0.1). *Supposons que $\omega(t) \in C_b^{k+2}(M)$ uniformément pour tout $t \in [0,T]$. Alors*

$$R_{g(t)} \in C_{b,\delta}^{k-2}(M)$$

uniformément pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'utiliser le principe du maximum pour comparer, à chaque bout, la courbure et ses dérivées avec une fonction modèle ayant les propriétés asymptotiques désirées. Puisque le taux de décroîssance de ω est le même à chaque bout, on fait la démonstration pour tous les bouts en même temps. On notera donc $\rho = \rho_1 \cdots \rho_m$ une fonction de définition globale du bord ∂M. La fonction qui sert de modèle est une fonction $v(t,x)$ qui près du bord est donnée par $v(t,x) = v(t,\rho) = Ce^{C_1 t}\rho^{\delta+\nu}$ pour un poids $\nu > 0$ quelconque. Les constantes C et C_1 seront déterminées au fil de l'argument. On introduit aussi la fonction $\psi(t,x) := \rho^{\nu} R_{g(t)}$.

Notons que comme dans la démonstration du lemme 2.4.1, en écrivant $R_{g(t)} = e^{-\omega(t)}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega(t))$, on voit que puisque $\omega(t) \in C_b^{k+2}(M)$ uniformément pour $t \in [0,T]$, on a aussi $R_{g(t)} \in C_b^k(M)$ uniformément pour $t \in [0,T]$. En particulier la courbure et ses k premières dérivées covariantes sont bornées sur $[0,T] \times M$. On utilisera ce fait dans la suite de la démonstration.

Pour appliquer le principe du maximum, on veut d'abord s'assurer que $|\psi(t,x)| \leq v(t,x)$ sur $[0,T] \times \partial M$ et sur $\{0\} \times M$. Or puisque l'on a rajouté un facteur ρ^ν à $|R_{g(t)}|$ dans ψ et que la courbure $R_{g(t)}$ est uniformément bornée par hypothèse, on sait que la restriction $\psi|_{\partial M}$ est identiquement nulle, tout comme celle de v. On a donc $v \equiv \psi$ sur $[0,T] \times \partial M$. De plus, puisque $R_{g(0)} \in C^k_{b,\delta}(M)$ par le lemme 2.4.1, on sait que $\psi \leq C'\rho^{\delta+\nu}$ quand $t = 0$ pour une certaine constante C'. On peut donc s'assurer que $|\psi(0,x)| \leq v(0,x) = C\rho^{\delta+\nu}$ en choisissant $C = C'$.

Il reste à établir des inégalités différentielles appropriées pour ψ et v. Pour cela, on calcul l'équation d'évolution que satisfait $\psi(t,x)$. On rappelle que $\partial_t R = \Delta R + R^2$ et que $\psi = \rho^\nu R$ donc que $R = \rho^{-\nu}\psi$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \rho^\nu \frac{\partial(\rho^{-\nu}\psi)}{\partial t} \\ &= \rho^\nu(\Delta_{g(t)}(\rho^{-\nu}\psi) + R^2_{g(t)}) \\ &= \Delta_{g(t)}\psi + (\rho^\nu \Delta_{g(t)}\rho^{-\nu})\psi + 2\rho^\nu\langle \nabla\rho^{-\nu}, \nabla\psi\rangle_{g(t)} + R_{g(t)}\psi.\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Donc ψ évolue selon l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_{g(t)}\psi + \nabla_X\psi + f\psi \tag{2.4.3}$$

où $X(t)$ est le champ de vecteurs $2\rho^\nu\nabla\rho^{-\nu}$ et $f(t,x) = \rho^\nu(\Delta_{g(t)}\rho^{-\nu}) + R_{g(t)}$. Notons que les coefficients de X sont uniformément bornés sur $[0,T] \times M$ et qu'en fait

$$(1/2)\nabla_X v = \rho^\nu\langle\nabla\rho^{-\nu}, \nabla v\rangle = -\rho^\nu\nu(\delta+\nu)\rho^{-\nu}Ce^{C_1t}\rho^{\delta+\nu}g_{xx} = \nu(\delta+\nu)g_{xx}v$$

où $g_{xx} = g(\partial_x, \partial_x)$ est uniformément bornée par hypothèse, car on suppose que $\omega(t) \in C_b^{k+2}(M)$. Autrement dit, on peut écrire $\nabla_X v = Bv$ pour $B \in C_b^{k+2}(M)$. Un calcul similaire montre que $f \in C_b^k(M)$ et que $\Delta_{g(t)} v = Av$ pour $A \in C_b^{k+2}(M)$.

En prenant une constante $C_1 \geq \sup|A| + \sup|B| + \sup|f|$, on obtient donc les inégalités différentielles

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_1 v \geq \Delta_{g(t)} v + \nabla_X v + fv \tag{2.4.4}$$

et

$$\frac{\partial(-v)}{\partial t} = -C_1 v \leq \Delta_{g(t)}(-v) + \nabla_X(-v) + f(-v). \tag{2.4.5}$$

Puisque l'on s'est déjà assuré que $|\psi| \leq v$ sur tout $[0,T] \times \partial M$ et sur $\{0\} \times M$, on peut maintenant comparer ces inégalités avec (2.4.3) et utiliser le principe du maximum, c'est-à-dire la proposition 2.2.1, pour conclure que

$$-v(t,x) \leq \psi(t,x) \leq v(t,x)$$

sur tout $[0,T] \times M$, donc que $|R_{g(t)}| \leq Ce^{C_1 t}\rho^\delta$. En effet, la fonction $\psi(t,x)$ a la régularité nécessaire à l'application du principe du maximum et la fonction $F(t,x,u(t,x)) = f(t,x)u(t,x)$ apparaîssant dans (2.4.4) et (2.4.5) est uniformément Lipschitz en sa troisième variable puisque $f(t,x)$ est uniformément bornée.

On a ainsi terminé la première étape de la démonstration, c'est-à-dire que $R_{g(t)} \in C^0_{b,\delta}(M)$ uniformément en t. En vue de la caractérisation du lemme 1.4.1 des espaces à poids $C^k_{b,\delta}$, il suffit maintenant de voir que $|\nabla^l R_{g(t)}| \in C^0_{b,\delta}(M)$ pour $0 \leq l \leq k-2$. On procèdera de façon similaire, en comparant $\rho^\nu |\nabla^l R_{g(t)}|$ avec v pour obtenir l'inégalité $|\nabla^l R_{g(t)}| \leq Ce^{C_1 t}\rho^\delta$ sur $[0,T] \times M$.

Pour $0 \leq l \leq k-2$ et $\nu > 0$, on pose donc $\Phi(t,x) := \rho^\nu |\nabla^l R_{g(t)}|^2$ pour $\nu > 0$ et on suppose par récurrence que $|\nabla^j R_{g(t)}| \leq C_j \rho^\delta$ pour chaque $0 \leq j \leq l-1$. On considère cette fois $v(t,x)$ donné près du bord par $v(t,x) = Ce^{C_1 t}\rho^{2\delta+\nu}$. Alors, comme ci-dessus, on a $\Phi|_{\partial M} \equiv v|_{\partial M} \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et puisque $|\nabla^l R_{g_0}| \leq C\rho^\delta$ pour une certaine constante $C > 0$ par le lemme 2.4.1, on peut encore choisir $v(t,x)$ de sorte que $|\Phi(0,x)| \leq v(0,x)$ pour tout $x \in M$. Il ne reste donc qu'à établir les inégalités différentielles pour pouvoir appliquer le principe du maximum.

Par la proposition 2.1.2, $|\nabla^l R_{g(t)}|^2$ satisfait

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^l R|^2 &= \Delta_{g(t)}|\nabla^l R|^2 - 2|\nabla^{l+1}R|^2 + \sum_{i+j=l} \nabla^i R * \nabla^j R * \nabla^l R \\ &\leq \Delta_{g(t)}|\nabla^l R|^2 + C_0|\nabla^l R|^2 + C_0' \sum_{\substack{i+j=l \\ 1\leq i,j\leq l-1}} |\nabla^i R||\nabla^j R||\nabla^l R|\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

pour des constantes $C_0, C_0' > 0$. Notons que l'on a utilisé le fait que $R_{g(t)}$ est uniformément borné pour la constante C_0. En procédant comme ci-dessus, on peut donc écrire une inégalité différentielle pour l'équation d'évolution de $\Phi(t,x)$ de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)}\Phi + \nabla_X \Phi + f\Phi + h \tag{2.4.7}$$

où $X = -2\rho^\nu \nabla \rho^{-\nu}$, $f = \rho^\nu \Delta \rho^{-\nu} + C_0$ et

$$h(t,x) = C_0' \rho^\nu \sum_{\substack{i+j=l \\ 1\leq i,j\leq l-1}} |\nabla^i R||\nabla^j R||\nabla^l R|.$$

De plus, on a donc encore que $\Delta_{g(t)} v = Av$ pour $A \in C_b^{k+2}(M)$, que $Xv = Bv$ pour $B \in C_b^{k+2}(M)$ et que $f \in C_b^k(M)$. Pour ce qui est de h, comme seul des dérivées covariantes d'ordre inférieur ou égale à l apparaîssent dans la somme, l'hypothèse de récurrence et le fait que $|\nabla^l R_{g(t)}|$ est uniformément bornée par le lemme 2.4.1 entraînent que $h \in \rho^{2\delta+\nu} C_b^0(M)$ de sorte que $|h(t,x)| \leq D\rho^{2\delta+\nu}$ pour une constante $D > 0$. On peut donc encore une fois supposer que $v \geq h$ sur tout $[0,T] \times M$ puisque l'on a pris $v = Ce^{C_1 t}\rho^{2\delta+\nu}$ près du bord. Quitte à prendre C_1 assez grand, c'est-à-dire tel que $C_1 \geq \sup|A| + \sup|B| + \sup|f| + 1$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= C_1 v \geq \Delta_{g(t)} v + \nabla_X v + fv + v \\ &\geq \Delta_{g(t)} v + \nabla_X v + fv + h. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

On peut donc finalement comparer (2.4.8) avec (2.4.7) via le principe du maximum. En effet, on a pris soin de prendre $l \leq k-2$ de sorte que $\Phi \in C^2(M)$ et la fonction

$$F(t,x,u(t,x)) := f(t,x)u(t,x) + h(t,x)$$

apparaîssant dans les inégalités (2.4.8) et (2.4.7) est bien uniformément Lipschitz en sa dernière variable, puisque f est uniformément bornée. On conclut donc, comme dans le cas $l = 0$, que $\Phi(t,x) \leq v(t,x)$, donc que $|\nabla^l R_{g(t)}| \leq Ce^{C_1 t}\rho^\delta$ et qu'ainsi $\nabla^l R_{g(t)} \in \rho^\delta C_b^0(M)$. Ceci boucle la récurrence et montre que l'on a bien $|\nabla^l R_{g(t)}| \in \rho^\delta C_b^0(M)$ pour tout $0 \leq l \leq k-2$, de sorte que $R \in \rho^\delta C_b^{k-2}(M)$, tel que voulu. □

Proposition 2.4.2. *Soit $\omega(t)$ une solution lisse au flot de Ricci* (2.1.6) *pour $t \in [0,T]$ sur (M, g_0) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques au sens de la définition* (2.0.1). *Supposons que $\omega(t) \in C_b^{k+2}(M)$ uniformément pour tout $t \in [0,T]$, avec $k \geq 2$. Alors*

$$\omega(t,x) \in C_{b,\delta}^{k-2}(M)$$

uniformément pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. La démonstration est très similaire à celle de la proposition 2.4.1. On utilisera encore une fonction de définition ρ pour tout le bord de M et une fonction $v \in C^\infty([0,T] \times M)$ donnée près du bord par $v(t,x) = Ce^{C_1 t}\rho^{\delta+\nu}$.

Considérons $\psi(t,x) = \rho^\nu \omega(t,x)$. Pour appliquer le principe du maximum comme à la proposition 2.4.1, il faut s'assurer que $|\psi| \leq v$ sur $[0,T] \times \partial M$ et sur $\{0\} \times M$. Or $\psi(t,x) \equiv v(t,x) \equiv 0$ sur $[0,T] \times M$ grâce au facteur ρ^ν et puisque $\omega(0,x) \equiv 0$, il est immédiat que $|\omega(0,x)| \leq v(0,x)$ pour tout $x \in M$. Il suffit donc d'établir des inégalités différentielles adéquates. On procède comme à la proposition 2.4.1. Puisque $\partial_t \omega = -e^{-\omega}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \rho^\nu \frac{\partial(\rho^{-\nu}\psi)}{\partial t} \\
&= -\rho^\nu e^{-\omega}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}(\rho^{-\nu}\psi)) \\
&= \Delta_{g(t)}\psi + (\rho^\nu \Delta_{g(t)}\rho^{-\nu})\psi + 2\rho^\nu g(t)(\nabla\rho^{-\nu}, \nabla\psi) - \rho^\nu e^{-\omega}R_{g_0}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_{g(t)}\psi + \nabla_X \psi + f\psi + h \tag{2.4.9}$$

où $X = 2\rho^\nu \nabla \rho^{-\nu}$, $f = \rho^\nu \Delta_{g(t)}\rho^{-\nu}$ et $h = -\rho^\nu e^{-\omega} R_{g_0}$. Puisque $\omega(t)$ est uniformément borné, on peut écrire $\Delta_{g(t)} v = Av$ pour $A \in C_b^{k+2}(M)$, $\nabla_X v = Bv$ pour $B \in C_b^{k+2}(M)$ et on a $f \in C_b^{k+2}(M)$. De plus, puisque $R_{g_0} \in \rho^\delta C_b^k(M)$, on a $h(t,x) \in \rho^{\delta+\nu}C_b^k(M)$ uniformément de sorte que l'on puisse supposer que $v(t,x) \geq |h(t,x)|$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times M$. Ainsi, en choisissant C_1 assez grand, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_1 v \geq \Delta_{g(t)} v + \nabla_X v + fv + h \tag{2.4.10}$$

et

$$\frac{\partial(-v)}{\partial t} = -C_1 v \leq \Delta_{g(t)}(-v) + \nabla_X(-v) + f(-v) + h. \tag{2.4.11}$$

On peut donc comparer (2.4.10) et (2.4.11) avec (2.4.9) via le principe du maximum pour conclure que $-v \leq \psi \leq v$, donc que $|\omega(t,x)| \leq Ce^{C_1 t}\rho^{\delta}$ sur tout $[0,T] \times M$.

Jusqu'à maintenant, la démonstration est pratiquement identique à celle de la proposition 2.4.1. Toutefois, puisque la courbure $R_{g(t)}$ apparaît dans l'équation d'évolution des dérivées covariantes de ω, on utilisera cette dernière proposition dans la suite.

Il reste à voir que $|\nabla^l \omega| \in C^0_{b,\delta}(M)$ pour $0 \leq l \leq k-2$. Pour $0 \leq l \leq k-2$ et $\nu > 0$, on pose donc $\Phi(t,x) := \rho^{\nu}|\nabla^l\omega(t,x)|^2$ pour $\nu > 0$ et on suppose par récurrence que $|\nabla^j \omega(t,x)|^2 \leq C_j \rho^{2\delta}$ pour chaque $0 \leq j \leq l-1$. On considère aussi $v(t,x)$ donné près du bord par $v(t,x) = Ce^{C_1 t}\rho^{2\delta+\nu}$. Alors, comme ci-dessus, on a $\Phi|_{\partial M} \equiv v|_{\partial M} \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et $|\Phi(0,x)| \leq v(0,x)$ pour tout $x \in M$. Il ne reste donc qu'à établir les inégalités différentielles pour pouvoir appliquer le principe du maximum.

Par la proposition 2.1.2, $|\nabla^l\omega|^2$ satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^l\omega|^2 &= \Delta_{g(t)}|\nabla^l\omega|^2 - 2|\nabla^{l+1}\omega|^2 \\
&\quad + 2\langle\nabla^l(-e^{-\omega}R_{g_0}), \nabla^l\omega\rangle + \sum_{i+j=l} \nabla^i R_{g(t)} * \nabla^j\omega * \nabla^l\omega \\
&\leq \Delta_{g(t)}|\nabla^l\omega|^2 + C_0|R_{g_0}||\nabla^l\omega|^2 + C_0'|R_{g(t)}||\nabla^l\omega|^2 \\
&\quad + C\sum_{\substack{p+q=l \\ q\leq l-1}} |\nabla^p R_{g_0}||\nabla^q\omega||\nabla^l\omega| + C'\sum_{\substack{i+j=l \\ j\leq l-1}} |\nabla^i R_{g(t)}||\nabla^j\omega||\nabla^l\omega|
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

où C_0, C_0', C, C' sont des constantes positives. Notons que l'on utilise le fait que les $|\nabla^i R_{g(t)}|$ sont uniformément bornés pour les termes avec les constantes C_0, C_0'. On obtient donc une inégalité différentielle pour la dérivée en temps de $\Phi(t,x)$ de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq \Delta\Phi + \nabla_X \Phi + f\Phi + h \tag{2.4.13}$$

où $X = -2\rho^\nu \nabla \rho^{-\nu}$ et $f = -\rho^\nu \Delta \rho^{-\nu} + C_0|R_{g_0}| + C_0'|R_{g(t)}|$ et où

$$h(t,x) = C\rho^\nu \sum_{\substack{p+q=l \\ q\leq l-1}} |\nabla^p R_{g_0}||\nabla^q \omega||\nabla^l \omega| + C'\rho^\nu \sum_{\substack{i+j=l \\ j\leq l-1}} |\nabla^i R_{g(t)}||\nabla^j \omega||\nabla^l \omega|.$$

On a donc encore que $\Delta_{g(t)} v = Av$ pour $A \in C_b^{k+2}(M)$, que $Xv = Bv$ pour $B \in C_b^{k+2}(M)$ et que $f \in C_b^k(M)$. Pour ce qui est de h, puisque les $|\nabla^j \omega|$ pour $0 \leq j \leq k+2$ sont uniformément bornés par hypothèse, que les $|\nabla^i R_{g(t)}|$ pour $0 \leq i \leq k-2$ sont dans $\rho^\delta C_b^{k-2-i}(M)$ uniformément par la proposition 2.4.1 et puisque l'on suppose par récurrence que $|\nabla^j \omega| \leq C_j \rho^\delta$ pour certaines constantes C_j si $0 \leq j \leq l-1$, on a en fait $h \in \rho^{2\delta+\nu} C_b^0(M)$. On peut donc encore une fois choisir $v(t,x)$ de sorte que $v \geq h$ sur $[0,T] \times M$. En prenant C_1 assez grand, c'est-à-dire tel que $C_1 \geq \sup|A| + \sup|B| + \sup|f| + 1$, on obtient alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \Delta v + \nabla_X v + fv + h. \tag{2.4.14}$$

On peut donc finalement comparer (2.4.14) avec (2.4.13) via le principe du maximum. On conclut donc que $\Phi(t,x) \leq v(t,x)$, donc que $|\nabla^l \omega(t,x)| \leq C_l e^{C_l' t} \rho^\delta$, ce qui boucle la récurrence. On a donc montré que $|\nabla^l \omega| \in \rho^\delta C_b^0(C)$ pour tout $0 \leq l \leq k-2$ et ce uniformément, de sorte que $\omega \in \rho^\delta C_b^k(C)$ uniformément tel que voulu. $\square$

Remarque 2.4.1. À la place de démontrer le résultat pour la courbure en premier, on aurait pu directement démontrer la dernière proposition, mais avec un moins bon taux de décroissance pour les dérivées de ω. En effet, si on utilise seulement le fait que les facteurs $|\nabla^i R_{g(t)}|$ apparaîssant dans la fonction h de (2.4.14) sont uniformément bornés, on obtient tout de même que $h \in \rho^{\delta+\nu} C_b^0(\mathcal{C})$. En prenant $v = Ce^{C_1 t}\rho^{\delta+\nu}$ à la place de $Ce^{C_1 t}\rho^{2\delta+\nu}$, on obtient alors par récurrence que $|\nabla^l \omega| \leq Ce^{C_1 t}\rho^{\delta/2^l}$. On peut donc obtenir la décroissance des dérivées de ω sans utiliser celle des dérivées de la courbure, mais le taux de décroissance se détériore plus on considère des dérivées d'ordre élevé.

2.5 Unicité d'une solution

Dans cette section, on montre par un argument simple basé sur le principe du maximum que les conditions de décroissance au bord que l'on impose pour une surface à bouts asymptotiquement cylindriques sont assez fortes pour assurer l'unicité d'une solution au flot de Ricci de la forme $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$, c'est-à-dire une solution donnée par l'évolution d'un facteur conforme.

Théorème 2.5.1. *Soit (M, g_0) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques et soient deux solutions lisses au flot de Ricci pour $t \in [0, T]$ de la forme $g_1(t) = e^{\omega_1(t)} g_0$ et $g_2(t) = e^{\omega_2(t)} g_0$ avec conditions initiales $g_1(0) = g_2(0) = g_0$. Supposons que pour $i = 1, 2$ on ait $\omega_i(t) \in C_b^{k+2}(M)$ uniformément en t, avec $k \geq 2$. Alors en fait $g_1(t) = g_2(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.*

Démonstration. Par la proposition 2.4.2, on a $\omega_i(t) \in \rho^\delta C_b^{k-2}(M)$ uniformément en t le long du flot pour $i = 1, 2$. En particulier, ω_1 et ω_2 sont égales sur $[0, T] \times \partial\overline{M}$ (elles s'y annulent toutes les deux). Puisqu'en plus $\omega_1(0) = \omega_2(0)$, on est dans une situation où on peut utiliser le principe du maximum.

Considérons donc $v = \omega_1 - \omega_2$. On a $v = 0$ sur $[0,T] \times \partial\overline{M}$ et sur $\{0\} \times M$. De plus, puisque $\partial_t \omega_i = -e^{-\omega_i}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega_i)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta_{g_1(t)}\omega_1 - e^{-\omega_1}R_{g_0} - e^{-\omega_2}(\Delta_{g_0}\omega_2 - R_{g_0})\\ &= \Delta_{g_1(t)}v + \Delta_{g_1(t)}\omega_2 - e^{-\omega_1}R_{g_0} - e^{-\omega_2}(\Delta_{g_0}\omega_2 - R_{g_0})\\ &= \Delta_{g_1(t)}v + e^{-\omega_1}(\Delta_{g_0}\omega_2 - R_{g_0}) - e^{-\omega_2}(\Delta_{g_0}\omega_2 - R_{g_0}).\end{aligned}$$

Donc avec $C_0 \geq |\Delta_{g_0}\omega_2 - R_{g_0}|$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leq \Delta_{g_1(t)}v + C_0|e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2}| \tag{2.5.1}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \Delta_{g_1(t)}v - C_0|e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2}|. \tag{2.5.2}$$

Mais il est facile de voir avec le théorème des valeurs intermédiaires que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ pour $x \geq 0$ est Lipschitz de constante de Lipschitz 1. On a donc $|e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2}| \leq |\omega_1 - \omega_2|$ de sorte que (2.5.1) et (2.5.2) deviennent respectivement

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leq \Delta_{g_1(t)}v + C_0|v| \tag{2.5.3}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \Delta_{g_1(t)}v - C_0|v|. \tag{2.5.4}$$

On peut maintenant appliquer le principe du maximum à (2.5.3) et (2.5.4) pour comparer v avec la solution triviale $\varphi \equiv 0$ à l'équation $\partial_t\varphi = \Delta_{g_1(t)}\varphi \pm C_0|\varphi|$. En effet, la fonction v est de classe C^2 et $F(t,x,v(t,x)) := \pm C_0|v(t,x)|$ est uniformément Lipschitz en sa troisième variable. Alors (2.5.3) entraîne que sur tout $[0,T] \times \overline{M}$, on a $v \leq 0$ c'est-à-dire $\omega_1 \leq \omega_2$ tandis que (2.5.4) entraîne que $\omega_1 \geq \omega_2$. On conclut que $\omega_1 \equiv \omega_2$ sur tout $[0,T] \times \overline{M}$ tel que voulu. $\square$

CHAPITRE III

EXISTENCE ET CONVERGENCE DU FLOT DE RICCI SUR UNE SURFACE À BOUTS CYLINDRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE D'EULER NULLE

Dans ce chapitre, on spécifie la discussion au cas du cylindre ; la seule surface orientable à bouts cylindriques de caractéristique d'Euler nulle, à homéomorphisme près. En effet, une telle surface M est de la forme $\overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ pour une certaine surface orientable close $\overline{M}$ et alors $\chi(M) = \chi(\overline{M}) - k$. Pour avoir $\chi(M) = 0$ avec $k \geq 1$, on doit donc nécessairement avoir $\overline{M} \cong S^2$ et $k = 2$. On notera le cylindre $\mathcal{C} = (\mathbb{R} \times S^1)$ et le cylindre compactifié $\overline{\mathcal{C}} := [-\infty, \infty] \times S^1$. On considérera une métrique g_0 sur $\mathcal{C}$ telle que $(\mathcal{C}, g)$ soit une variété à deux bouts cylindriques au sens de la définition 2.0.1. On suppose donc que chacun des deux bouts admet une fonction de définition ρ_i (pour $i = 1, 2$) et un voisinage tubulaire ; respectivement $\mathcal{C}^{(1)} := (-\infty, 0) \times S^1$ et $\mathcal{C}^{(2)} := (0, +\infty) \times S^1$, de sorte que la métrique y soit donnée par

$$e^{\varphi_i} \left(\frac{d\rho_i^2}{\rho_i^2} + d\theta^2 \right) \tag{3.0.1}$$

pour $\varphi_i \in C^\infty(\mathcal{C}^{(i)})$ telle que $\varphi_i - \phi_i \in C_{b,\delta}^{k+2}(\mathcal{C})$ pour des constantes $\phi_i \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $k \geq 2$ comme dans la définition 2.0.1. Sur $\mathcal{C}$, on utilisera des coordonnées

(x, θ) telles que $\rho_2 = e^{-x}$ sur $\mathcal{C}^{(2)}$ et $\rho_1 = e^x$ sur $\mathcal{C}^{(1)}$.

Pour une telle métrique, on peut suivre (Ji *et al.*, 2009) et mettre à profit l'analyse développée à la section 1.5. En particulier, elle nous permettra d'écrire une solution au flot de Ricci comme une déformation conforme d'une métrique euclidienne, à difféomorphisme près. Cela simplifiera les équations d'évolution, nous permettant ainsi d'obtenir l'existence pour les temps longs et la convergence du flot.

3.1 Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces à bouts asymptotiquement cylindriques

Dans cette section, on montre comment obtenir un théorème de Gauss-Bonnet sur une surface à bouts asymptotiquement cylindriques (M, g). L'idée est d'appliquer le théorème de Gauss-Bonnet classique sur une suite (K_i) de compacts qui exhaustent M. Sur chacun des K_i, l'intégrale de Gauss-Bonnet contient un terme de bord et la décroissance de la courbure au bord de M fera en sorte que ce terme de bord tende vers 0 quand $i \to \infty$.

On rappelle d'abord le théorème de Gauss-Bonnet classique qui permet d'exprimer la caractéristique d'Euler d'une surface compacte orientée comme l'intégrale de quantités purement locales. Pour une démonstration du théorème, le lecteur peut par exemple consulter (Lee, 1997). Pour une courbe lisse $\gamma : [a, b] \to M$, on note $N(t)$ le champ de vecteurs normal unitaire le long de γ définit de sorte que $(\dot{\gamma}(t), N(t))$ forme une base orthonormée d'orientation positive de $T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in [a, b]$. La *courbure géodésique* de γ est alors définie par

$$\kappa_\gamma(t) := \langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(t), N(t)\rangle.$$

Par exemple, $\kappa_\gamma(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$ si γ est une géodésique.

Théorème 3.1.1 (Gauss-Bonnet classique). *Soit (M,g) une surface riemannienne orientée et $\Omega \subset M$ un ouvert relativement compact avec bord $\partial\Omega$ donné par l'union disjointe de $m \in \mathbb{N}$ courbes lisses γ_i fermées et sans auto-intersections. Alors*

$$\int_\Omega R d\mu_g + \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \kappa_{\gamma_i}(s) ds = 4\pi\chi(\Omega), \tag{3.1.1}$$

où R est la courbure scalaire de g et $\chi(\Omega)$ est la caractéristique d'Euler de Ω. Les courbes γ_i sont parcouruent dans le sens compatible avec l'orientation de Ω.

On utilisera cette forme du théorème de Gauss-Bonnet pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit (M,g) une surface à bouts asymptotiquement cylindriques. Alors*

$$\int_M R d\mu_g = 4\pi\chi(M). \tag{3.1.2}$$

Démonstration. On utilise la structure de surface à bouts cylindriques pour se donner une bonne suite d'ouverts relativement compacts qui exhaustent M. Spécifiquement, près de chaque composante de bord $Y_i \cong S^1$ de M, on a une fonction de définition ρ_i associée à un voisinage tubulaire $(0,\epsilon)_{\rho_i} \times S^1$ telle que $Y_i = \{\rho_i = 0\} \subset \overline{M}$. On choisit $M_0 \subset M$ un ouvert relativement compact tel que $M \setminus M_0$ soit une union de m demi-cylindres difféomorphes à $[0, \infty) \times S^1$, si M a m bouts. On considère alors des coordonnées (x_i, θ_i) sur ces demi-cylindres, où $x_i = -\log \rho_i$ près de Y_i de sorte que $Y_i = \{x_i = \infty\}$. La suite que l'on considère est alors

$$M_k := M_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m} \left([0, k)_{x_i} \times S^1 \right)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a bien $\overline{M_k}$ compact, $M_i \subset M_{i+1}$ et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} = M$. Par construction, on voit que ∂M_k est l'union de m cercles $\{x_i = k\}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de Gauss-Bonnet classique et obtenir

$$\int_{M_k} R d\mu_g + \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_{ki}} \kappa_{\gamma_{ki}}(s) ds = 4\pi \chi(M_k) \tag{3.1.3}$$

où γ_{ki} est une paramétrisation quelconque de $\{x_i = k\}$. Or la métrique étant à bouts cylindriques, on peut voir que la courbure géodésique κ des cercles $\{x_i = k\}$ tend vers 0 quand $k \to \infty$. En effet, pour $\gamma(t)$ une courbe lisse quelconque, en coordonnées locales on a

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})(t) = (\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(t) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^k(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Donc puisque

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} \right)$$

et puisque $g = e^{\varphi} g_{cyl}$ près du bord, où $\varphi - \phi_i \in \rho^\delta C^\infty_b(M)$ pour certaines constantes ϕ_i (ici $g_{cyl} = dx_i^2 + d\theta_i^2$), on voit que les symboles de Christoffels $\Gamma^i_{jk}(g)$ de la métrique g tendent vers ceux de la métrique g_{cyl}. En fait, $\Gamma^i_{jk}(g) - \Gamma^i_{jk}(g_{cyl}) \in \rho^\delta C^\infty_b(M)$. Mais $\Gamma^i_{jk}(g_{cyl}) \equiv 0$ puisque $(g_{cyl})_{ij} \equiv \delta_{ij}$ dans les coordonnées (x, θ). Ainsi, en paramétrant le i-ème bout $\{x_i = k\}$ de M_k

par $\gamma_{ki}(t) = (k,t)$ dans les coordonnées (x_i, θ_i) pour $t \in [0, 2\pi]$, on trouve bien que $\nabla_{\dot\gamma_{ki}}\dot\gamma_{ki} \to 0$ quand $k \to \infty$, correspondant au fait que les cercles de ∂M_k sont paramétrisés par des géodésiques de la métrique g_{cyl}.

Rappelons que pour une métrique asymptotiquement cylindrique, on a $R \in \rho^\delta C_b^\infty(M)$ (voir le lemme 2.4.1), donc $|R| \leq Ce^{-\delta x_i}$ pour chaque $x_i = -\log \rho_i$. Donc sur les bouts cylindriques, on obtient $\int R d\mu_g = \int Re^\varphi dx d\theta < \infty$. On peut donc prendre la limite quand $k \to \infty$ du premier terme dans (3.1.3). Puisque celle du deuxième terme tend vers 0 et que les M_k sont tous homéomorphes à M, on trouve

$$\int_M R_{d\mu_g} = \lim_{k\to\infty} 4\pi\chi(M_k) = 4\pi\chi(M)$$

tel que voulu. □

Remarque 3.1.1. Le théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces à bouts cylindriques est un cas particulier du théorème d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer. Ce théorème est une généralisation du théorème d'indice d'Atiyah-Singer pour des variétés à bord. Il s'agit d'un résultat très général permettant de relier l'indice d'un opérateur différentiel à certains invariants topologiques définient par le symbole de cet opérateur.

Dans le cas où la dimension de la variété à bouts asymptotiquement cylindrique est 2 et où l'opérateur en question est $d + d^*$, le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer se réduit à l'équation

$$\int Pf(\mathcal{R}) = 2\pi\chi(M) \tag{3.1.4}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M et où $Pf(\mathcal{R})$ est le *Pfaffien* de la forme de courbure associée à la métrique de g (voir par exemple le lemme

(9.2) dans (Melrose, 1993), où le facteur 2π est absent). On rappelle que pour une matrice $2x2$ anti-symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

son Pfaffien est simplement donné par $Pf(A) = a$. Ainsi, en utilisant la description (1.1.19) pour la forme de courbure d'une surface (M, g) et le fait que la courbure de Gauss et la courbure scalaire sont reliées par $K = 2R$, l'équation (3.1.4) se réduit bel et bien à

$$\int Pf(\mathcal{R}) = \int \frac{R}{2} dvol_g = 2\pi\chi(M), \qquad (3.1.5)$$

ce qui est notre théorème (3.1.2).

3.2 Existence d'un potentiel pour la courbure scalaire d'une surface à bouts cylindriques de caractéristique d'Euler nulle

Dans cette section, on met à profit les résultats de la section 1.5 pour résoudre une certaine équation, qui sera la clé de l'argument d'existence pour les temps longs et de convergence.

Lemme 3.2.1. *Soit $(\mathcal{C}, g)$ le cylindre muni d'une métrique complète asymptotiquement cylindrique. Si $\delta \geq 0$, alors $\ker(\Delta_g, \delta)$, c'est-à-dire le noyau de l'opérateur $\Delta_g : H^2_{b,\delta}(\mathcal{C}) \to L^2_{b,\delta}(\mathcal{C})$, est l'espace trivial $\{0\}$.*

Démonstration. Soit $v \in \ker(\Delta_g, \delta)$. Par la régularité elliptique, $v \in H^2_{b,\delta} \cap C^\infty$. De plus, puisque v décroît rapidement aux bouts, on pourra intégrer par parties. En effet, pour chaque partie compacte $\mathcal{C}_k := [-k, k] \times S^1$, une intégration par parties donne

$$\int_{\mathcal{C}_k} (\Delta_g v) v d\mu_g = \int_{\mathcal{C}_k} g(\nabla v, \nabla v) d\mu_g + \int_{\partial \mathcal{C}_k} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS \qquad (3.2.1)$$

où ν est le champ de vecteur normal au bord de $\mathcal{C}_k$ pointant vers l'extérieur. Mais comme $v \in H^2_{b,\delta}(M)$, v et $\partial_\nu v$ tendent vers 0 quand $k \to \infty$, donc en prenant la limite $k \to \infty$ le dernier terme de (3.2.1) disparaît. Si $v \in \ker(\Delta, \delta)$, on obtient donc $||\nabla v||_{L^2} = 0$ donc v est constante. Mais comme la seule constante ayant la décroissance nécessaire pour être dans $H^2_{b,\delta}(\mathcal{C})$ est la fonction nulle, il suit de cet argument que $\ker(\Delta, \delta) = \{0\}$ tel que voulu. □

La démonstration de la principale proposition de cette section repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.2.2. *Soit $(\mathcal{C}, g)$ le cylindre muni d'une métrique complète asymptotiquement cylindrique et considérons l'espace vectoriel*

$$\mathcal{E} = \{\sum_{j=1}^{2} \chi_j(\alpha_j \log \rho_j + \beta_j) \mid \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}\}$$

où $\chi_j \in C^\infty(M)$ est telle que $\chi_j \equiv 1$ sur $\{0 \leq \rho_j \leq 1/4\}$ et $\chi_j \equiv 0$ sur $\{\rho_j \geq 1/2\}$. Alors l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \Delta : \mathcal{E} \oplus H^{k+2}_{b,\delta}(M,g) & \longrightarrow & H^k_{b,\delta}(M,g) \\ (v,u) & \longmapsto & \Delta(v+u) \end{array} \qquad (3.2.2)$$

pour $\delta > 0$ assez petit est surjectif et a un noyau K de dimension $\dim K = 2$.

Démonstration. On suppose sans perdre de généralité que le poids $\delta > 0$ de la métrique asymptotiquement cylindrique est plus petit que le premier poids critique positif $\sqrt{\lambda_1(\Delta_{\partial\mathcal{C}})} \in pc(\Delta_g)$. Notons que $\{0\} = \ker(\Delta, \delta) = \operatorname{coker}(\Delta, -\delta)$ entraîne que $\Delta : H^{k+2}_{b,-\delta} \to H^k_{b,-\delta}$ est surjectif. Ainsi si $R \in H^k_{b,\delta} \subset H^k_{b,-\delta}$, il existe $\tilde{u} \in H^{k+2}_{b,-\delta}$ tel que $\Delta\tilde{u} = R$. Mais en exprimant $\tilde{u} = \sum_j u_j$ et $R =$

$\sum_j R_j$ selon leur décomposition en fonctions propres pour $\Delta_{\partial M}$, on obtient que près du bord, pour une certaine constante $C > 0$ on a $(-\partial_x^2 + \lambda_j)u_j = CR_j$ avec $R_j \to 0$ quand $\rho \to 0$. Donc près des deux composantes du bord, on a

$$u_j \sim_{x\to\infty} \begin{cases} a_j e^{\sqrt{\lambda_j} x} + b_j e^{-\sqrt{\lambda_j} x}, & \text{si } j > 0 \\ \alpha x + \beta, & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

(où $x = -\log \rho$) pour a_j, b_j des fonctions propres de $\Delta_{\partial M}$ pour la valeur propre λ_j et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ainsi, puisque $\tilde{u} \in H^{k+2}_{b,-\delta}$ avec $\delta > 0$ plus petit que le premier poids critique, on doit avoir $b_j = 0$ pour $j > 0$ et donc

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{2} \chi_i(\alpha_i \log \rho_i + \beta_i) + u$$

avec $u \in H^{k+2}_{b,\delta}$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Ceci démontre la surjectivité de (3.2.2).

Pour voir que $\dim K = 2$, on identifie K avec $\ker(\Delta, -\delta)$ et on utilise la formule de l'indice relatif. D'abord, puisque $\mathcal{E} \oplus H^{k+2}_{b,\delta} \subset H^{k+2}_{b,-\delta}$, on doit avoir que $K \subset \ker(\Delta, -\delta)$. Réciproquement, si $v \in \ker(\Delta, -\delta)$, avec la décomposition en fonctions propres $v = \sum_j v_j$ comme ci-dessus et le fait que $v \in \rho^{-\delta} H^{k+2}_b$, on trouve que près de chaque composante du bord,

$$v_j = \begin{cases} a_j \rho^{\sqrt{\lambda_j}} & \text{si } j > 0 \\ \alpha \log \rho + \beta & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Ainsi, près du bord on a $v = \sum_{i=1}^{2} \chi_i(\alpha_i \log \rho_i + \beta_i) + v'$ pour $v' \in \rho^{\delta} H^{k+2}_0$ et des constantes $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Ceci montre que $\ker(\Delta, -\delta) \subset K$ d'où l'égalité. Finalement, il reste à voir que $\dim \ker(\Delta, -\delta) = 2$. Dans la section 1.5, on notait $\mathcal{E}$ par $F(\Delta_g, 0)$, et que cet espace est de dimension 4. Or la formule de l'indice relatif affirme que

$$\operatorname{ind}(\Delta, -\delta) - \operatorname{ind}(\Delta, \delta) = \dim F(\Delta, 0),$$

c'est-à-dire, via l'identification $\operatorname{coker}(\Delta, \delta) = \ker(\Delta, -\delta)$, que

$$\dim \ker(\Delta, -\delta) - \dim \ker(\Delta, \delta) - (\dim \ker(\Delta, \delta) - \dim \ker(\Delta, -\delta)) = 4.$$

Puisque $\ker(\Delta, \delta) = \{0\}$, ceci entraîne que $\dim \ker(\Delta, -\delta) = 2$, tel que voulu.

□

Proposition 3.2.1. *Soit $(\mathcal{C}, g)$ le cylindre. Alors il existe un $\delta_0 > 0$ assez petit tel que pour $\delta \in (0, \delta_0)$, si g est une métrique complète asymptotiquement cylindrique avec $\varphi_i - \phi_i \in C^{k+2}_{b,\delta}(\mathcal{C}^{(i)})$ dans (3.0.1), alors il existe une fonction f satisfaisant*

$$\Delta_g f = R_g, \quad (f - \sum_{i=1}^{2} a_i) \in H^k_{b,\delta}(\mathcal{C}) \cap C^\infty(\mathcal{C}), \quad \sup_{\mathcal{C}} |\nabla f|_{g_0} < \infty \qquad (3.2.3)$$

où $a_i \in C^\infty(\mathcal{C})$ est supportée sur le i-ième bout et est constante près du bord. On appelle une telle fonction f un potentiel *de la courbure.*

Démonstration. On veut résoudre l'équation $\Delta f = R$ en sachant que $R \in \rho^\delta H^k_b(\mathcal{C})$ pour un certain $\delta > 0$ assez petit. On prend δ_0 le premier poids critique positif $\sqrt{\lambda_1(\Delta_{\partial \mathcal{C}})} \in pc(\Delta_g)$ et on montre qu'avec $\delta \in (0, \delta_0)$, on peut résoudre (3.2.3).

Par le lemme 3.2.2, on peut trouver des constantes $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2$ et $v \in H^{k+2}_{b,\delta}(\mathcal{C}, g)$ telles qu'avec $u = \sum_{j=1}^{2} \chi_j(\alpha_j \log \rho_j + \beta_j) + v$ on ait $\Delta u = R$. Pour que u satisfasse les conditions de (3.2.3), il faudrait au moins qu'il soit borné, mais $\alpha \log \rho \to \infty$ au bord sauf si $\alpha = 0$. Si on élimine les termes logarithmiques de u, toutes les conditions de (3.2.3) seront satisfaites. Pour ce faire, on trouvera $h \in \ker(\Delta, -\delta)$ tel que $h - \alpha_j \log \rho_j - C_j \in \rho_j^\delta C^\infty_b(\mathcal{C})$

pour certaines constantes $C_j \in \mathbb{R}$ aux deux composantes du bord. La fonction $w = u - h$ satisfera alors (3.2.3) avec $a_i = \chi_i(\beta_i - C_i)$.

Pour cela, considérons l'application $\Phi : K \to \mathbb{R}^4$ définie de la façon suivante. Comme remarqué plusieurs fois ci-dessus, pour $k \in K = \ker(\Delta, -\delta)$, il existe quatre constantes $P_j, Q_j \in \mathbb{R}$ (pour $j = 1, 2$) uniquement déterminées telles que

$$k = \sum_{j=1}^{2} \chi_j(P_j \log \rho_j + Q_j) + O(\rho^\delta).$$

On pose alors

$$\Phi(k) = (P_1, Q_1, P_2, Q_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Pour trouver un h qui éliminerait les termes logarithmiques de u, il suffit donc de montrer qu'il y a un vecteur de la forme $(\alpha_1, C_1, \alpha_2, C_2) \in \operatorname{im}\Phi$ pour certains réels C_1, C_2. On procède en deux étapes.

Premièrement, on montre que Φ est injective et que $\operatorname{im}\Phi \subset \mathbb{R}^4$ est un sous-espace lagrangien par rapport à la forme symplectique

$$\omega((P, Q) \wedge (P', Q')) = \sum_{j=1}^{2} P'_j Q_j - P_j Q'_j \tag{3.2.4}$$

(où $P = (P_1, P_2)$, etc... et (P, Q) est vu comme un élément de $\mathbb{R}^4$), c'est-à-dire que $\omega(\Phi(k), \Phi(k')) = 0$ pour tout $k, k' \in K$. L'injectivité est claire puisque si $\Phi(k) = \Phi(k')$, c'est que $k \sim k'$ au bord, c'est-à-dire que $k - k' \in O(\rho^\delta)$. Puisque $k, k' \in \ker \Delta$, cela voudrait dire que $k - k' \in \ker(\Delta, \delta) = \{0\}$ donc que $k = k'$. Puisque $\dim K = 2$ par le lemme 3.2.2, $\operatorname{im}\Phi$ est donc un sous-espace de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$; la bonne dimension pour être lagrangien. Pour vérifier que $\omega|_{\mathrm{im}\,\Phi} \equiv 0$, on utilise la formule de Green

$$\int_U (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)d\mu_g = \int_{\partial U} (\psi\partial_\nu\phi - \phi\partial_\nu\psi)dS \tag{3.2.5}$$

où ν est le champ de vecteur unitaire normal au bord pointant vers l'extérieur, valide pour $\phi, \psi \in C^2(U)$ pour U une variété à bord lisse quelconque. Si $k, k' \in K$ avec $\Phi(k) = (P_1, Q_1, P_2, Q_2)$ et $\Phi(k') = (P_1', Q_1', P_2', Q_2')$, c'est-à-dire que $k = \sum_{j=1}^2 \chi_j(P_j \log\rho_j + Q_j)$ et de même pour k', on a

$$\partial_\nu k = \sum_{j=1}^2 \rho_j \partial_{\rho_j} k = \sum_{j=1}^2 \chi_j P_j + O(\rho^\delta),$$

et de même pour k'. On a donc

$$\begin{aligned} k\partial_\nu k' - k'\partial_\nu k &\sim \sum_{j=1}^2 (P_j \log\rho_j + Q_j)P_j' - (P_j' \log\rho_j + Q_j')P_j \\ &= \sum_{j=1}^2 P_j'Q_j - P_jQ_j'. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Green sur $\mathcal{C}_m := [-m, m] \times S^1$ pour obtenir

$$0 = \int_{\mathcal{C}_m} (k\Delta k' - k'\Delta k)d\mu_g = \int_{\partial\mathcal{C}_m} (k\partial_\nu k' - k'\partial_\nu k)dS$$

et en faisant tendre $m \to \infty$, on obtient donc

$$0 = \sum_{j=1}^2 P_j'Q_j - P_jQ_j' = \omega(\Phi(k) \wedge \Phi(k'))$$

tel que voulu.

La deuxième étape de la démonstration est d'utiliser cette restriction algébrique imposée à Φ pour voir qu'on peut trouver un $(\alpha_1, C_1, \alpha_2, C_2) \in \mathrm{im}\,\Phi$ pour certains $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. En fait, on montre que $\mathrm{im}\,\Phi$ est la somme directe de la droite engendrée par $(0,1,0,1)$ et d'une droite $D = \{(a, C_1, b, C_2) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0\}$. Voyons d'abord comment cela nous permettra de conclure. D'une part, la formule de Green (3.2.5) avec $\psi = 1$ et $\phi = u$ donne que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{C}_m} \Delta u d\mu = 2\pi(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Mais d'autre part, le théorème de Gauss-Bonnet (théorème 3.1.2) dit que

$$0 = \int_{\mathcal{C}} R d\mu = \int_{\mathcal{C}} \Delta u d\mu.$$

On a donc qu'en fait $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, donc que $(\alpha_1, C_1, \alpha_2, C_2) \in D \subset \operatorname{im}\Phi$ par la caractérisation de $\operatorname{im}\Phi$ ci-dessus.

Il suffit donc, pour conclure la démonstration, de démontrer que $\operatorname{im}\Phi = \mathbb{R}(0,1,0,1) \oplus D$. D'abord, puisque la fonction constante 1 est dans K, on a bien que $\Phi(1) = (0,1,0,1) \in \operatorname{im}\Phi$. On se donne alors un complément L de K de sorte que $K = \mathbb{R}.1 \oplus L$. Notons $D = \Phi(L) \subset \operatorname{im}\Phi$. Puisque $\operatorname{im}\Phi$ est lagrangien, pour n'importe quel $k \in L$, si $\Phi(k) = (P_1, Q_1, P_2, Q_2)$ on a

$$0 = \omega(\Phi(k), \Phi(1)) = (0.Q_1 - P_1.1) + (0.Q_2 - P_2.1) = -(P_1 + P_2).$$

Donc, puisque Φ est injective, $D = \Phi(L)$ doit être une droite de la forme $\{(a, C_1, b, C_2) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0\}$ pour certaines constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que voulu. $\square$

Remarque 3.2.1. La proposition 3.2.1 permet d'uniformiser directement le cylindre muni d'une métrique asymptotiquement cylindrique avec $\delta \in (0, \delta_0)$. En effet, si f est solution de l'équation $\Delta_{g_0} f = R_{g_0}$, alors avec $\overline{g} = e^f g_0$, la proposition 1.1.3 donne que $R_{\overline{g}} = e^{-f}(R_{g_0} - \Delta_{g_0} f) = 0$. Puisque $(\mathcal{C}, g)$ a deux bouts, on peut trouver une droite géodésique (paramétrée par longueur d'arc) donc par le théorème 1.1.1 de scindement de Cheeger-Gromoll, il existe un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \times S^1$ tel que $\overline{g} = \Phi^* g_{cyl}$ où $g_{cyl} = dt^2 + d\tilde{\theta}^2$ pour $d\tilde{\theta}^2$ une métrique sur S^1 et t le paramètre de longueur d'arc de la droite géodésique. Ainsi, une métrique asymptotiquement cylindrique à notre sens est isométrique à une métrique conformément cylindrique.

Remarque 3.2.2. On peut dire plus sur le difféomorphisme et le facteur conforme qui relient la métrique asymptotiquement cylindrique g_0 à la métrique cylindrique. Rappellons que g_0 satisfait $g_0 = e^{\varphi_i}(dx^2 + d\theta^2)$ près des composantes du bord, pour $\varphi_i - \phi_i \in C^{k+2}_{b,\delta}(\mathcal{C}^{(i)})$ où ϕ_1, ϕ_2 sont des constantes. De plus, le potentiel f satisfait $f - a_i \in H^k_{b,\delta}(\mathcal{C}^{(i)})$ pour d'autres constantes a_i donc près du bord, on a $e^f g_0 = \overline{g} = e^{f+\varphi_i}(dx^2 + d\theta^2)$ avec

$$f + \varphi_i - (\phi_i + a_i) \in H^k_{b,\delta}(\mathcal{C}^{(i)}).$$

Autrement dit, à chaque bout $\overline{g}$ est asymptotique à la métrique $e^{C_i}(dx^2 + d\theta^2)$ pour la constante $C_i = \phi_i + a_i$. Ainsi, la droite géodésique choisie pour obtenir Φ doit se rapprocher d'une droite géodésique de $e^{C_i}(dx^2+d\theta^2)$ à l'infini. Puisque les seules droites géodésiques paramétrée par longueur d'arc sur $(\mathbb{R} \times S^1, e^{C_i}(dx^2 + d\theta^2))$ sont les droites de la forme $\gamma(t) = (e^{-C_i/2}t, \theta_0)$ pour θ_0 fixe, et que Φ envoie la droite géodésique choisie sur la composante $\mathbb{R}$, on doit avoir que Φ est asymptotique à $e^{C_i'}\,\mathrm{Id}$ à chaque bout, pour certaines constantes C_i'. Notons cependant qu'en général, Φ n'est pas qu'un multiple de l'identité puisque la droite géodésique pourrait tourner autour du cylindre loin des bords.

En autant que dans la définition de g_0, le poids $\delta > 0$ soit plus petit que le premier poids critique de $\Delta_g|_{\partial M}$, on pourra donc utiliser ce dernier théorème et les remarques qui le suivent pour réécrire le flot (2.1.6) sous la forme

$$g(t) = e^{u(t)}\overline{g}, \quad g(0) = g_0 \tag{3.2.6}$$

pour une métrique plate $\overline{g}$ (donc isométrique à une métrique de la forme $dt^2 + d\theta^2$) avec $u(t) = \omega(t) - f$ pour f le potentiel de la courbure de la proposition 3.2.1 et $\omega(t)$ une solution à (2.1.2). En effet, on a bien

$$g(0) = e^{\omega(0)-f}g_0 = e^{-f}g_0 = \overline{g}.$$

De plus, la courbure est donnée par

$$-R_{g(t)} = -e^{-u(t)}(R_{\overline{g}} - \Delta_{\overline{g}}u) = \Delta_{g(t)}u,$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t) &= \partial_t \omega(t) \\
&= -e^{-\omega(t)}(R_{g_0} - \Delta_{g_0}\omega(t)) \\
&= -e^{-\omega(t)+f}e^{-f}(\Delta_{g_0}f - \Delta_{g_0}\omega) \\
&= -e^{-u(t)}\Delta_{\overline{g}}(-u) \\
&= \Delta_{g(t)}u(t).
\end{aligned}$$

Donc (3.2.6) donne bien une solution au flot de Ricci. Réciproquement, étant donné une solution $u(t)$ à (3.2.6), on obtient une solution $\omega(t) = u(t) + f$ à (2.1.6). Le fait que la métrique initiale soit plate simplifiera les formules dans la suite.

3.3 Estimations de Bernstein-Bando-Shi

Si (M, g_0) est une variété riemannienne de courbure bornée, le théorème d'existence de Shi 2.3.1 assure l'existence d'un flot de Ricci débutant avec g_0 pour un certain temps $T > 0$. Toutefois, ce temps pourrait être très petit et le théorème 2.3.1 n'indique pas comment C_k dépend de T. En particulier, si $T_{\max}$ est le temps maximal tel qu'on peut trouver un flot de Ricci sur $[0, T_{\max})$ et $T_1 < T_2 < \cdots \nearrow T_{\max}$ alors il se pourrait qu'on ait $C_k(T_i) \to +\infty$ quand $i \to \infty$. Dans cette section, en procédant comme dans (Chow et Knopf, 2004) et en utilisant les résultats de la section 2.4, on montre comment obtenir les estimations du théorème 2.3.1 dans le cas d'un flot de Ricci $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$, $t \in [0, T]$ sur un cylindre $(\mathcal{C}, g_0)$ avec une métrique g_0 qui est asymptotiquement cylindrique (on a en fait de meilleurs exposants dans les estimations qu'au théorème 2.3.1) et on montre que les constantes C_k peuvent être prises indépendantes de T. Par indépendantes de T, on entend que si $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$ est une solution sur $[0, T]$ satisfaisant $|\nabla^k R_{g(t)}(x)|^2 \leq C_k/(1+t)^k$ sur $[0, T]$ et que $\tilde{g}(t) = e^{\tilde{\omega}(t)} g_0$ est une solution sur $[0, T']$ avec $T' > T$ mais avec les mêmes conditions initiales $\tilde{\omega}(0) = \omega(0) = 0$, alors on a l'estimation $|\nabla^k R_{\tilde{g}(t)}|^2 \leq C_k/(1+t)^k$ sur $[0, T']$ avec la même constante C_k que pour le flot sur $[0, T]$.

On fixe donc une métrique asymptotiquement cylindrique g_0 sur le cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^1$ avec $\delta \in (0, \delta_0)$ dans (3.0.1) pour le reste de la section, où δ_0 est celui de la proposition 3.2.1. Commençons par expliciter les équations d'évolutions qui nous intéresse :

Lemme 3.3.1. *Soit $\omega(t, x)$ une solution au flot de Ricci* (2.1.6) *pour $t \in [0, T]$ avec $T > 0$ et $u(x, t)$ la solution correspondante telle que $e^u \overline{g} = e^\omega g_0$ comme dans* (3.2.6). *Alors sur tout $\mathcal{C}$ et pour tout temps $t \in [0, T]$, u satisfait*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = \Delta_{g(t)} u(t), \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u(t)|^2 = \Delta_{g(t)}|\nabla u(t)|^2 - 2|\nabla\nabla u(t)|^2 \tag{3.3.2}$$

et en général

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k u(t)|^2 = \Delta_{g(t)}|\nabla^k u(t)|^2 - 2|\nabla^{k+1}u(t)|^2 + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R_{g(t)} * \nabla^\nu u(t) * \nabla^k u(t) \tag{3.3.3}$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}$. *Les expressions avec des* $*$ *sont comme à la proposition 1.1.4 et les normes et dérivées covariantes apparaissant ci-dessus sont prises par rapport a la métrique* $g(t)$. *Pour ce qui est de la courbure, on a l'équation similaire*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k R(t)|^2 = \Delta_{g(t)}|\nabla^k R(t)|^2 - 2|\nabla^{k+1}R(t)|^2 + \sum_{\mu+\nu=k} \nabla^\mu R_{g(t)} * \nabla^\nu R(t) * \nabla^k R(t) \tag{3.3.4}$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Sauf quand explicitement écrit, on supposera que les objets dépendant du temps sont évalués au temps t et pour parler des objets au temps initial, on écrira par exemple Δ_0 plutôt que $\Delta_{g(0)}$.

On a déjà vérifié (3.3.1) à la suite de (3.2.6). Pour (3.3.2), on remarque d'abord que pour f une fonction lisse quelconque,

$$2g(\Delta\nabla f, \nabla f) = \Delta|\nabla f|^2 - 2|\nabla\nabla f|^2. \tag{3.3.5}$$

En effet, en coordonnées locales on voit que

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla f|^2 &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j\left(g^{kl}\nabla_k f\nabla_l f\right)\\ &= g^{ij}g^{kl}\nabla_i\left(\nabla_j\nabla_k f\nabla_l f + \nabla_k f\nabla_j\nabla_l f\right)\\ &= 2\left(g(\Delta\nabla f, \nabla f) + |\nabla\nabla f|^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme 2.1.1, la proposition 1.1.4 et l'équation (3.3.5),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij}\right) \nabla_i u \nabla_j u + 2g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_i u\right)\nabla_j u \\
&= R|\nabla u|^2 + 2g(\nabla \Delta u, \nabla u) \\
&= 2g(\Delta \nabla u, \nabla u) \\
&= \Delta|\nabla u|^2 - 2|\nabla\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Finalement, les équations (3.3.3) et (3.3.4) découlent directement de la proposition 2.1.2 puisque $\partial_t u = \Delta u$ et $\partial_t R = \Delta R + R^2$. □

Les estimations de Berstein-Bando-Shi sont des estimations pour les quantités dont on a énoncé les équations d'évolution au lemme 3.3.1. Au lemme suivant, on montre comment obtenir ces estimations avec le principe du maximum dans les cas les plus faciles.

Lemme 3.3.2. *Sur le cylindre (C, g_0) avec g_0 une métrique asymptotiquement cylindrique avec $\delta \in (0, \delta_0)$, soit $\omega(t, x)$ une solution au flot de Ricci (2.1.6), $t \in [0, T]$ et $\omega(0) = 0$, telle que $\omega(t) \in C_b^\infty(C)$ uniformément sur $[0, T]$. Soit $u(t, x)$ la solution correspondante telle que $e^u \overline{g} = e^\omega g_0$ comme dans (3.2.6). Alors il existe une constante $M = M(g_0) > 0$ indépendante de T telle que*

$$\sup_{(y,t) \in C \times [0,T]} |u(y, t)| \leq M. \tag{3.3.6}$$

De plus, il existe une constante $C = C(g_0) > 0$ indépendante de T telle que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\sup_{y \in C} |\nabla u(y, t)|^2_{g(t)} \leq \frac{C}{(1 + t)}. \tag{3.3.7}$$

Démonstration. Comme
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g(t)} u(t),$$
la fonction $u(y,t)$ est une sous-solution de l'équation d'évolution $(\partial/\partial t)\phi = \Delta_{g(t)}\phi$ sur $\mathcal{C} \times [0,T]$. Puisque $u(t,x) = \omega(t,x) - f(x)$ pour f le potentiel de la courbure qui est borné (voir (3.2.3)), on voit que $|u(x,0)|$ est borné sur $\mathcal{C}$, disons par M. Or puisque l'on suppose $\omega(t) \in C_b^\infty(\mathcal{C})$ uniformément, la proposition 2.4.2 assure que $\omega(t) \in \rho^\delta C_b^\infty(\mathcal{C})$ donc que $\omega(t)|_{\partial\mathcal{C}} \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Puisque par (3.2.3) le potentiel f se restreint à des constantes a_1, a_2 sur les composantes du bord on voit que $\max_{x\in\partial\mathcal{C}} |u(t,x)| \leq K := a$ où $a = \max\{|a_1|, |a_2|\}$. Quitte à prendre M plus grand que K, on peut donc appliquer le principe du maximum (proposition 2.2.1) et comparer la sous-solution $u(t,x)$ et la super-solution M (vue comme une fonction constante sur $\mathcal{C} \times [0,T]$). On obtient ainsi que
$$\sup_{\mathcal{C}\times[0,T]} |u(y,t)| \leq M$$
pour $M = M(g_0)$ une constante indépendante de T, ce qui établi (3.3.6).

Pour (3.3.7), on rappelle que par (3.3.1),
$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 = \Delta|\nabla u|^2 - 2|\nabla\nabla u|^2 \leq \Delta|\nabla u|^2,$$
ce qui nous place comme ci-dessus dans une position où on peut utiliser le principe du maximum. Puisque $\sup_{x\in\mathcal{C}} |\nabla f(x)| < \infty$ (voir encore (3.2.3)), la fonction $|\nabla u(x,0)|^2_{g_0}$ est aussi bornée (disons par C_0) sur $\mathcal{C}$. Cette fois, la proposition 2.4.2 qui comme ci-dessus assure que $|\nabla\omega(t,x)|_{g(t)} \in \rho^\delta C_b^\infty(\mathcal{C})$ entraîne que $|\nabla u(t,x)| \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C}$. On peut donc encore appliquer le principe

du maximum, et on obtient

$$\sup_{\mathcal{C}\times[0,T]} |\nabla u(y,t)|^2_{g(t)} \leq C_0 \tag{3.3.8}$$

pour une constante $C_0 = C_0(g_0) > 0$ indépendante de T. Pour obtenir la décroissance voulue, l'idée est d'obtenir avec le principe du maximum une borne sur la fonction $t|\nabla u(y,t)|^2_{g(t)}$. En utilisant la règle de Leibniz et (3.3.2), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t|\nabla u|^2\right) = t\Delta|\nabla u|^2 - 2t|\nabla\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 \leq \Delta\left(t|\nabla u|^2\right) + |\nabla u|^2. \tag{3.3.9}$$

De plus, par (3.3.1),

$$\frac{\partial}{\partial t}u^2 = \Delta(u^2) - 2|\nabla u|^2 \tag{3.3.10}$$

puisque

$$\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2.$$

En additionnant (3.3.9) et (3.3.10), on obtient l'inégalité

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t|\nabla u|^2 + u^2\right) \leq \Delta\left(t|\nabla u|^2 + u^2\right).$$

Comme dans la première partie de la démonstration, puisque $t|\nabla u|^2 + u^2$ est borné au temps $t = 0$, que u^2 est borné sur $\partial\mathcal{C} \times [0,T]$ par une constante ne dépendant que de g_0 et que $|\nabla u(t,x)|^2 \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C}$, on peut appliquer le principe du maximum et obtenir que $\sup_{\mathcal{C}\times[0,T]} t|\nabla u|^2 + u^2 \leq C_1$ pour une constante $C_1 = C_1(g_0)$ indépendante de T. Ainsi,

$$|\nabla u(y,t)|^2_{g(t)} \leq \frac{C_1}{t} \tag{3.3.11}$$

pour tout $(y,t) \in \mathcal{C} \times [0,T]$. En combinant (3.3.8) et (3.3.11), on obtient finalement (3.3.7). $\square$

On montre maintenant comment obtenir une borne uniforme en T sur la courbure scalaire $R_{g(t)}$.

Lemme 3.3.3. *Avec* $H = R + |\nabla u|^2$, *on a*

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H - 2|M|^2$$

où M *est le tenseur* $M := \nabla\nabla u - (1/2)Rg$.

Démonstration. En utilisant le lemme 3.3.1 ainsi que l'équation d'évolution de la courbure, on trouve

$$\partial_t H = \partial_t R + \partial_t |\nabla u|^2 = \Delta R + R^2 + \Delta|\nabla u|^2 - 2|\nabla\nabla u|^2 = \Delta H + R^2 - 2|\nabla\nabla u|^2. \tag{3.3.12}$$

Or en se rappellant que $\Delta u = R$, on calcule que la norme du tenseur M définit ci-dessus est donnée par

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \langle \nabla\nabla u - \frac{1}{2}Rg, \nabla\nabla u - \frac{1}{2}Rg \rangle = |\nabla\nabla u|^2 + \frac{1}{4}R^2|g|^2 - \langle \nabla\nabla u, Rg \rangle \\ &= |\nabla\nabla u|^2 + \frac{1}{2}R^2 - R\Delta u \\ &= |\nabla\nabla u|^2 - \frac{1}{2}R^2. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

En jumelant (3.3.12) et (3.3.13), on trouve donc

$$\partial_t H = \Delta H - 2|M|^2 \tag{3.3.14}$$

tel qu'annoncé. □

Corollaire 3.3.1. *Soit* $\omega(t,x)$ *une solution au flot de Ricci* (2.1.6) *pour* $t \in [0,T]$, $\omega(0) = 0$ *et* $\omega(t) \in C_b^\infty(C)$ *uniformément sur* $[0,T]$, *avec* g_0 *une métrique asymptotiquement cylindrique pour* $\delta \in (0, \delta_0)$. *Soit* $u(t,x)$ *la solution* *correspondante telle que* $e^u\overline{g} = e^\omega g_0$ *comme dans* (3.2.6). *Alors il existe une constante* $C = C(g_0)$ *indépendante de* T *telle que pour tout* $t \in [0,T]$, *on ait*

$$\sup_{y\in\mathcal{C}} |R_{g(t)}(y)| \leq C.$$

Démonstration. Supposons que C soit une borne pour $|R_{g_0}|$ et $|\nabla u(x,0)|^2$ sur le cylindre $\mathcal{C}$. Par la proposition 2.4.1, on a $R_{g(t)} \in \rho^\delta C_b^\infty(\mathcal{C})$ pour tout $t \in [0,T]$, donc $R_{g(t)} \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C}$ et comme dans la démonstration du lemme 3.3.2, on a aussi $|\nabla u| \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C}$. On peut donc appliquer le principe du maximum à l'inégalité différentielle $\partial_t H \leq \Delta H$, ce qui entraîne que $H \leq C$ sur tout $[0,T] \times \mathcal{C}$. Puisque $R \leq H$, ceci donne une borne supérieure sur $R_{g(t)}$ indépendante de T. Pour la borne inférieure, on peut appliquer l'argument du lemme 2.2.2. □

La proposition suivante servira de cas de base dans un argument par récurrence pour obtenir les estimations voulues, et sa démonstration souligne déjà les idées qui seront utilisées dans l'argument.

Proposition 3.3.1. *Soit* $\omega(t,x)$ *une solution au flot de Ricci avec* $\omega(0) = 0$ *et* $t \in [0,T]$ *telle que* $\omega(t) \in C_b^\infty(\mathcal{C})$ *uniformément sur* $[0,T]$ *avec* g_0 *une métrique asymptotiquement cylindrique pour* $\delta \in (0,\delta_0)$. *Soit* $u(t,x)$ *la solution correspondante telle que* $e^u\overline{g} = e^\omega g_0$ *comme dans* (3.2.6). *Alors il existe une constante* $C = C(g_0) > 0$ *indépendante de* T *telle que pour tout* $t \in [0,T]$, *on a*

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} |R(t,x)| + |\nabla u(t,x)|^2 \leq \frac{C}{1+t}. \tag{3.3.15}$$

Démonstration. En utilisant $R^2 = (\Delta u)^2 \leq 2|\nabla^2 u|^2$ et en se rappellant que $\partial_t R = \Delta R + R^2$ et que $\partial_t |\nabla u|^2 = \Delta |\nabla u|^2 - 2|\nabla^2 u|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(R + 2|\nabla u|^2\right) &= \Delta\left(R + 2|\nabla u|^2\right) + R^2 - 4|\nabla^2 u|^2 \\ &\leq \Delta\left(R + 2|\nabla u|^2\right) - R^2.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

En particulier, $\partial_t(R + 2|\nabla u|^2) \leq \Delta(R + 2|\nabla u|^2)$ donc puisque R et $|\nabla u|^2$ sont bornés sur $\mathcal{C}$ au temps $t = 0$ en plus de s'annuler identiquement sur $\partial\mathcal{C}$ pour tout $t \in [0, T]$, le principe du maximum nous donne que $R + 2|\nabla u|^2 \leq C_0$ pour tout $t \in [0, T]$, où $C_0 = C_0(g_0)$ est indépendante de T. On considère maintenant

$$F(t, x) = t(R(t, x) + 2|\nabla u(t, x)|^2).$$

Le but est de montrer que F satisfait l'inégalité différentielle $\partial_t F \leq \Delta F$. Puisque $F(y, 0) \equiv 0$, on pourra alors utiliser le principe du maximum pour déduire que $F(y, t) \leq C$ pour tout $(y, t) \in \mathcal{C} \times [0, \infty)$, ce qui entraînera bien (3.3.15). Or par (3.3.16) F satisfait

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F &\leq (R + 2|\nabla u|^2) + t\left[\Delta(R + 2|\nabla u|^2) - R^2\right] \\ &= \Delta F - tR^2 + R + 2|\nabla u|^2.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Le but est maintenant de se placer dans une situation où on peut utiliser le principe du maximum modifié énoncé à la proposition 2.2.2. On montrera que quand F est suffisament grand, il satisfait l'équation d'évolution $\partial_t F \leq \Delta F$. Pour ce faire, on réécrit d'abord (3.3.17) comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F &\leq \Delta F + (R + 2|\nabla u|^2) - \frac{t}{2}R^2 - 2t|\nabla u|^4 - 2tR|\nabla u|^2 \\ &\qquad - \frac{t}{2}R^2 + 2t|\nabla u|^2(R + |\nabla u|^2) \\ &= \Delta F + (R + 2|\nabla u|^2) - \frac{t}{2}(R + 2|\nabla u|^2)^2 - \frac{t}{2}R^2 + 2t|\nabla u|^2(R + |\nabla u|^2).\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Par le lemme 3.3.2, on sait que $t|\nabla u|^2 \leq C_1$ sur tout $[0,T] \times \mathcal{C}$ pour une certaine constante $C_1 > 0$ indépendante de T. Donc si $(R + 2|\nabla u|^2) \geq 0$, alors

$$2t|\nabla u|^2(R + |\nabla u|^2) \leq 2t|\nabla u|^2(R + 2|\nabla u|^2) \leq 2C_1(R + 2|\nabla u|^2)$$

ce qui améliorerait le mauvais terme de (3.3.18). Ainsi, un petit calcul montre que l'inégalité (3.3.18) entraîne qu'à tous les points (y,t) tels que $F(y,t) > 0$, on a l'inégalité différentielle

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F &\leq \Delta F - \frac{1}{2t}F^2 - \frac{t}{2}R^2 + (1+2C_1)R + 2(1+2C_1)|\nabla u|^2 \\ &\leq \Delta F - \frac{1}{2t}F^2 - \frac{t}{2}R^2 + (1+2C_1)R + \frac{2}{t}C_1(1+2C_1).\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

où l'on a utilisé $|\nabla u|^2 \leq C_1/t$ à la deuxième inégalité. On voit ici pourquoi on a conservé le bon terme $-(t/2)R^2$ depuis le début ; on peut compléter le carré et obtenir, aux points (y,t) tels que $F(y,t) > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F - \frac{1}{2t}F^2 &- \left[(t/2)^{1/2}R - (1/2t)^{1/2}(1+2C_1)\right]^2 \\ &+ \frac{1}{2t}(1+2C_1)^2 + \frac{2}{t}C_1(1+C_1) \\ \leq \Delta F + \frac{1}{2t}(C_2 - F^2)&\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

pour $C_2 = 1 + 12C_1^2 + 8C_1$ qui est donc indépendante de T. Ainsi, à tous les points $(t,x) \in \mathcal{C} \times [0,T]$ tels que $F(t,x) > C' := \max\{0, C_2^{1/2}\}$, on a l'inégalité différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F. \tag{3.3.21}$$

En choisissant une constante $C > C'$ telle que $F(x,0) \leq C$ pour tout $x \in \mathcal{C}$, et puisque $F(t,x) \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C}$ sur tout $[0,T]$, on peut alors appliquer la proposition 2.2.2 et conclure que $F(t,x) \leq C$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{C} \times [0,T]$, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} \left(R(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2\right) \le \frac{C}{t}.$$

Notons que puisque C_2 et C' ne dépendaient que de g_0 et non de T, il en est de même de C. Notons que le lemme 2.2.2 donnait une borne inférieure $-m/(1+mt) \le R(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{C} \times [0,T]$ pour $m > 0$ ne dépendant que de g_0. Donc puisque $|R| + |\nabla u|^2$ reste borné sur $[0,T]$ par une constante indépendante de T (voir le corollaire 3.3.1 et le lemme 3.3.2), on peut conclure qu'il existe une constante $C = C(g_0)$, indépendante de T, telle que pour tout $t \in [0,T]$ on ait

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} |R(t,x)| + |\nabla u(t,x)|^2 \le \frac{C}{1+t},$$

tel qu'annoncé. □

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème principal de cette section, c'est-à-dire les estimés de Bernstein-Bando-Shi uniformes en T :

Théorème 3.3.1. *Soit $(\mathcal{C}, g_0)$ le cylindre muni d'une métrique asymptotiquement cylindrique pour $\delta \in (0, \delta_0)$ et $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$ une solution au flot de Ricci (2.1.6) pour $t \in [0,T]$ avec $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \in C_b^\infty(\mathcal{C})$ uniformément en $[0,T]$. Alors pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une constantes $C_k = C_k(g_0) > 0$ indépendante de T telle que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} |\nabla^k R(t,x)|^2_{g(t)} \le \frac{C_k}{(1+t)^{k+2}}. \tag{3.3.22}$$

Démonstration. On peut procéder de manière analogue à la démonstration de la proposition 3.3.1 et considérer

$$F(t,x) := t^{k+3}|\nabla^k R|^2 + \lambda t^{k+2} |\nabla^{k-1} R|^2$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante à déterminer.

On voudra voir que $\partial_t F \leq \Delta F + C$ pour une certaine constante $C = C(g_0) > 0$ indépendante de T. Par (3.3.4), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{k+3}|\nabla^k R|^2\right) \leq{} & (k+3)t^{k+2}|\nabla^k R|^2 \\ & + t^{k+3}\left[\Delta|\nabla^k R|^2 + \sum_{\mu+\nu=k} |\nabla^\mu R * \nabla^\nu R * \nabla^k R|\right].\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

et similairement, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{k+2}|\nabla^{k-1} R|^2\right) ={}& (k+2)t^{k+1}|\nabla^{k-1} R|^2 \\ & + t^{k+2}\Big[\Delta|\nabla^{k-1} R|^2 - 2|\nabla^k R|^2 \\ & + \sum_{\mu+\nu=k-1} |\nabla^\mu R * \nabla^\nu R * \nabla^{k-1} R|\Big].\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Notons que l'on a gardé le bon terme $-2t^{k+2}|\nabla^k R|^2$ dans (3.3.24) mais pas dans (3.3.23) ; en prenant λ assez grand, ce bon terme provenant de (3.3.24) viendra contrebalancer la présence du mauvais terme $(k+3)t^{k+2}|\nabla^k R|^2$ provenant de (3.3.23).

On remarque que puisque les coefficients de la métrique sont uniformément bornée sur $\mathcal{C} \times [0, T]$ par (3.3.6), on peut toujours choisir d'écrire

$$|\nabla^\mu R * \nabla^\nu R * \nabla^k R| \leq C|\nabla^\mu R||\nabla^\nu R||\nabla^k R|$$

pour une certaine constante $C > 0$ dépendant uniquement de g_0 et des propriétés combinatoires de la combinaison linéaire, qui ne dépendent que de k.

Procédons donc à la démonstration. Pour se mettre dans une position où l'on pourra utiliser l'hypothèse de récurrence, on sépare la somme dans (3.3.23) en écrivant

$$t^{k+3}\sum_{\mu+\nu=k}|\nabla^\mu R*\nabla^\nu R*\nabla^k R|\leq at^{k+2}|\nabla^k R|^2(t|R|)+t^{k+3}\sum_{\substack{\mu+\nu=k\\ \mu,\nu\leq k-1}}|\nabla^\mu R*\nabla^\nu R*\nabla^k R| \tag{3.3.25}$$

pour une constante $a=a(k,g_0)>0$ appropriée. On écrit ensuite le membre de droite de l'inégalité (3.3.25) sous la forme

$$at^{k+2}|\nabla^k R|^2(t|R|)+(t^{k+2}|\nabla^k R|^2)^{1/2}\sum_{\substack{\mu+\nu=k\\ \mu,\nu\leq k-1}}b_{\mu,\nu}\left[t^{\mu+2}|\nabla^\mu R|^2 t^{\nu+2}|\nabla^\nu R|^2\right]^{1/2} \tag{3.3.26}$$

pour des constantes $b_{\mu,\nu}=b_{\mu,\nu}(g_0)>0$ appropriées. Pour ce qui est de l'équation (3.3.24), on écrit simplement

$$\begin{aligned}t^{k+2}&\sum_{\rho+\sigma=k-1}|\nabla^\rho R*\nabla^\sigma R*\nabla^{k-1}R|\\ &\leq\sum_{\rho+\sigma=k-1}c_{\rho,\sigma}[t^{\rho+2}|\nabla^\rho R|^2t^{\sigma+2}|\nabla^\sigma R|^2t^{k+1}|\nabla^{k-1}R|^2]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

pour $c_{\rho,\sigma}$ des constantes ne dépendant seulement que de k. En jumelant tout ceci, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F\leq\Delta F&+t^{k+2}|\nabla^k R|^2(at|R|+(k+3-2\lambda))\\ &+(t^{k+2}|\nabla^k R|^2)^{1/2}\sum_{\substack{\mu+\nu=k\\ \mu,\nu\leq k-1}}b_{\mu,\nu}\left[t^{\mu+2}|\nabla^\mu R|^2t^{\nu+2}|\nabla^\nu R|^2\right]^{1/2}\\ &+\lambda\sum_{\rho+\sigma=k-1}c_{\rho,\sigma}\left[t^{\rho+2}|\nabla^\rho R|^2t^{\sigma+2}|\nabla^\sigma R|^2t^{k+1}|\nabla^{k-1}R|^2\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

L'hypothèse de récurrence étant que pour tout $0 \leq j \leq k-1$ on a des estimations $|\nabla^j R|^2 \leq C_j/t^{j+2}$ pour $C_j = C_j(g_0)$ des constantes indépendantes de T, on trouve des constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de T telles que

$$\begin{cases} \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \mu,\nu\leq k-1}} b_{\mu,\nu} \left[t^{\mu+2}|\nabla^\mu R|^2 t^{\nu+2}|\nabla^\nu R|^2\right] \leq C_1 \\ \lambda \sum_{\rho+\sigma=k-1} c_{\rho,\sigma} \left[t^{\rho+2}|\nabla^\rho R|^2 t^{\sigma+2}|\nabla^\sigma R|^2 t^{k+1}|\nabla^{k-1}R|^2\right] \leq \lambda C_2. \end{cases}$$

Ainsi, avec $X = (t^{k+2}|\nabla^k R|^2)^{1/2}$, la fonction F satisfait l'inégalité différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F + X^2(at|R| + (k+3-2\lambda)) + C_1 X + \lambda C_2.$$

Puisque le cas de base de la récurrence entraîne que $t|R| \leq C_0$, on peut choisir λ suffisament grand pour que le coefficient $at|R| + (k+3-2\lambda)$ soit négatif (c'est exactement pour ceci que l'on a conservé le terme $-2|\nabla^k R|^2$ dans (3.3.24)). On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F - \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

pour certaines constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ indépendantes de T. Puisque $-\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ est une fonction de X bornée supérieurement, on peut trouver une constante $C = C(g_0) > 0$ indépendante de T telle que

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F + C$$

tel que voulu. Pour déduire (3.3.22), il suffit maintenant d'appliquer le principe du maximum. En effet, on compare la fonction $F(t,x)$ avec la fonction $\phi(t,x) = Ct$. Puisque $F(x,0) \equiv 0 \equiv \phi(x,0)$ et que $F(t,x) \equiv 0$ sur $\partial\mathcal{C} \times [0,T]$ (par la proposition 2.4.1) tandis que $\phi(t,x) \equiv Ct$ sur $\partial\mathcal{C}$, on peut appliquer le principe du maximum et conclure que $F(t,x) \leq \phi(t,x)$ pour tout $t \in [0,T]$. Donc, par définition de F, on obtient

$$t^{k+3}|\nabla^k R|^2 \leq t^{k+3}|\nabla^k R|^2 + \lambda t^{k+2}|\nabla^{k-1}R|^2 \leq Ct,$$

d'où

$$t^{k+2}|\nabla^k R(t,x)|^2 \leq C$$

pour tout $(t,x) \in \mathcal{C} \times [0,T]$, pour une constante $C = C(g_0) > 0$ indépendante de T. Encore une fois, puisque $|\nabla^k R(t,x)|^2$ reste borné pour un certain temps (par la proposition 2.3.1, toutes les dérivées de la courbure restent bornées pour un certain temps), on peut écrire ceci sous la forme (3.3.22). $\square$

On peut maintenant appliquer un argument similaire pour démontrer le résultat analogue pour les dérivées covariantes du facteur conforme :

Théorème 3.3.2. *Soit $g(t) = e^{\omega(t)}g_0$ une solution au flot de Ricci* (2.1.6) *pour $t \in [0,T]$ avec $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \in C_b^\infty(\mathcal{C})$ uniformément sur $[0,T]$, avec g_0 une métrique asymptotiquement cylindrique pour $\delta \in (0,\delta_0)$. Soit $u(t,x)$ la solution correspondante telle que $e^u\overline{g} = e^\omega g_0$ comme dans* (3.2.6). *Alors pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une constante $C_k = C_k(g_0) > 0$ indépendante de T telle que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} |\nabla^k u(t,x)|^2_{g(t)} \leq \frac{C_k}{t^k}. \tag{3.3.29}$$

Démonstration. La démonstration est presque identique à celle du théorème 3.3.1. Tout d'abord, le cas de base et le cas $k = 1$ sont inclus dans l'énoncé du lemme 3.3.2. Pour $k \geq 2$, on considère encore une fois une fonction F mais cette fois donnée par

$$F(t,x) := t^{k+1}|\nabla^k u(t,x)|^2 + \lambda t^k|\nabla^{k-1}u(t,x)|^2$$

pour un réel $\lambda \geq 0$ à déterminer ; il suffira de démontrer que $\partial_t F \leq \Delta F + C$ pour une constante C indépendante de T.

En procédant exactement comme dans la démonstration du théorème 3.3.1, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F + & t^k|\nabla^k u|^2(a't|R| + (k+1-2\lambda)) \\
& + (t^k|\nabla^k u|^2)^{1/2} \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \nu\leq k-1}} b_{\mu,\nu}\left[t^{\mu+2}|\nabla^\mu R|^2 t^\nu |\nabla^\nu u|^2\right]^{1/2} \\
& + \lambda \sum_{\rho+\sigma=k-1} c_{\rho,\sigma}\left[t^{\rho+2}|\nabla^\rho R|^2 t^\sigma|\nabla^\sigma u|^2 t^{k-1}|\nabla^{k-1}u|^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.3.30}
$$

pour des constantes $a', b_{\mu,\nu}$ et $c_{\rho,\sigma}$ appropriées, ne dépendant que de g_0. Par récurrence, pour tout $j \leq k-1$ on a des estimations $|\nabla^j u|^2 \leq C_j/(1+t)^j$ et le théorème 3.3.1 donne $|\nabla^j R|^2 \leq C_j'/t^{j+2}$, avec les constantes C_j et C_j' indépendantes de T. En posant $X = (t^k|\nabla^k u|)^{1/2}$ et en prenant λ assez grand, on obtient donc, comme au théorème 3.3.1,

$$
\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F - aX^2 + bX + c \tag{3.3.31}
$$

pour certaines constantes $a, b, c > 0$. Ainsi, puisque $-aX^2 + bX + c$ atteint son maximum en tant que fonction de X, on obtient l'inégalité différentielle $\partial_t F \leq \Delta F + C$ pour une constante C avec les propriétés désirées. La suite de l'argument suit exactement la fin de la démonstration du théorème 3.3.1. En effet, les $|\nabla^j u|^2$ restent bornés au bord de $\mathcal{C}$ pour tout $t \in [0,T]$ par la proposition 2.4.2 (et cette borne ne dépend pas de T) et $F(0,x) \equiv 0$. Cela permet d'appliquer le principe du maximum pour obtenir une borne de la forme $|\nabla^k u|^2 \leq C_k/t^k$.

$\square$

3.4 Existence pour les temps longs

On veut maintenant voir que sur les cylindres considérés dans ce travail, on peut résoudre le flot de Ricci sur tout l'intervalle $[0, \infty)$.

Théorème 3.4.1. *Sur un cylindre $(\mathcal{C}, g_0)$ avec g_0 asymptotiquement cylindrique pour $\delta \in (0, \delta_0)$ où δ_0 est celui de la proposition 3.2.1. Soit $T_{\max}$ le suprémum des $T > 0$ tels qu'il existe un flot de Ricci de la forme $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$, $t \in [0, T]$ et $\omega(0) = 0$, avec $\omega(t)$ uniformément dans $C_b^{\infty}(\mathcal{C})$ sur $[0, T]$. Alors $T_{\max} = +\infty$.*

Démonstration. On procède par contradiction. Notons d'abord que par le théorème d'existence pour les temps courts, on sait que $T_{\max} > 0$. Supposons que $0 < T_{\max} < +\infty$. Pour chaques $0 < T_1, T_2 < T_{\max}$, si $T_1 < T_2$, le théorème d'unicité 2.5.1 entraîne que si $\omega_1(t)$ est une solution sur $[0, T_1]$ et $\omega_2(t)$ en est une sur $[0, T_2]$, alors en fait $\omega_2(t) = \omega_1(t)$ sur $[0, T_1]$. On peut donc considérer que l'on a une solution $\omega(t)$ définie sur l'intervalle semi-ouvert $[0, T_{\max})$ qui est uniformément dans $C_b^{\infty}(\mathcal{C})$ sur $[0, T]$ pour chaque choix de $T < T_{\max}$. On considère la solution $u(t, x) = \omega(t, x) - f$ comme en (3.2.6), de sorte que $e^{\omega(t)} g_0 = e^{u(t)} \overline{g}$. Puisque l'on a démontré les estimations de Berstein-Bando-Shi

$$|\nabla^k R|^2 \leq \frac{C_k}{(1+t)^{k+2}}$$

et

$$|\nabla^k u|^2 \leq \frac{C'_k}{t^k}$$

pour des constantes C_k, C'_k indépendantes de T, ces estimations restent valides pour la solution définie sur $[0, T_{\max})$. On peut donc procéder comme au corollaire 2.3.1 et conclure que pour tout $0 < t_1 < t_2 < T_{\max}$, on a

$$\begin{aligned} |\nabla^k u(t_2) - \nabla^k u(t_1)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\partial_s \nabla^k u(s)| ds \\ &\leq C_k |t_2 - t_1|. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

En effet, on a encore que $\partial_t u = -R_{g(t)}$ et l'argument du lemme 2.1.3 montre que

$$\partial_t \nabla^k u = \sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ \nu \leq k-1}} \nabla^\mu R * \nabla^\nu u$$

tout comme pour $\partial_t \nabla^k \omega$. Or (3.4.1) montre que pour n'importe quelle suite de temps $t_1 < t_2 < \cdots \nearrow T_{\max}$, les fonctions $u(t_i)$ forment une suite de Cauchy dans $C^k(\mathcal{C})$ pour la norme C^k uniforme et ce pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Puisque cet espace est complet, on obtient une limite $u(T_{\max})$ (qui ne dépend pas de la suite de temps par (3.4.1)) telle que $u(t)$ converge vers $u(T_{\max})$ uniformément en norme C^k quand $t \nearrow T_{\max}$, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Pour conclure, il suffit de voir que la métrique $e^{u(T_{\max})}\overline{g}$ est une métrique asymptotiquement cylindrique. On pourra alors appliquer le théorème d'existence pour les temps courts (la proposition 2.3.1) pour obtenir un flot $\omega(t)$ défini sur $[0, T_{\max} + \epsilon]$ pour un certain $\epsilon > 0$ satisfaisant les estimations de Bernstein-Bando-Shi $|\nabla^k R|^2 \leq C_k/(1+t)^k$. En particulier, comme démontré au corollaire 2.3.1, ce flot $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$ avec $\omega = u + f$ satisfaira $\sup_{x\in\mathcal{C}} |\nabla^k \omega(t,x)| \leq C_k(T_{\max} + \epsilon)$ donc sera dans $C_b^\infty(\mathcal{C})$ uniformément en $[0, T_{\max} + \epsilon]$, contredisant la définition de $T_{\max}$.

Pour voir que $e^{u(T_{\max})}\overline{g}$ est asymptotiquement cylindrique, il suffit de remarquer que la démonstration de la proposition 2.4.2 entraîne qu'en fait

$$|\nabla^k \omega|^2 \leq C e^{C_1 t} \rho^\delta.$$

Puisque $T_{\max} < +\infty$, on obtient que $|\nabla^k \omega(T_{\max}, x)| \leq Ce^{C_1 T_{\max}} \rho^\delta$ puisque la convergence $\omega(t) \to \omega(T_{\max})$ est au moins uniforme dans $C^2(\mathcal{C})$, ce qui veut dire que $e^{\omega(T_{\max})} g_0$ est une métrique asymptotiquement cylindrique tel que voulu. $\square$

On obtient donc le résultat principal d'existence pour le flot de Ricci sur un cylindre, qui comprend tous les résultats que l'on a obtenu jusqu'à présent.

Théorème 3.4.2. *Sur un cylindre $(\mathcal{C}, g_0)$ avec g_0 asymptotiquement cylindrique pour $\delta \in (0, \delta_0)$, il existe une unique solution au flot de Ricci de la forme $g(t) = e^{\omega(t)} g_0$, $t \in [0, \infty)$ avec $\omega(0) = 0$ tel que pour tout $T > 0$, la solution $\omega(t)$ est dans $\rho^\delta C_b^\infty(\mathcal{C})$ uniformément sur $[0, T]$. De plus, les estimations de Shi sont valides sur tout $[0, \infty)$. Autrement dit, pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$ il existe des constantes $C_k, C'_k > 0$ telles que*

$$|\nabla^k R(t, x)|^2_{g(t)} \leq \frac{C_k}{(1+t)^{k+2}} \quad \textit{pour tout } t \in [0, \infty)$$

et

$$|\nabla^k u(t, x)|^2_{g(t)} \leq \frac{C'_k}{t^k} \quad \textit{pour tout } t \in [0, \infty)$$

où $u(t, x)$ est une solution telle que $e^{\omega(t)} g_0 = e^{u(t)} \overline{g}$ comme dans (3.2.6).

3.5 Convergence du flot

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.5.1. *Soit $(\mathcal{C}, g_0)$ le cylindre muni d'une métrique complète asymptotiquement cylindrique de la forme $e^{u_0} g_{cyl}$ pour $g_{cyl} = dx^2 + d\theta^2$, avec $u_0 - \alpha \in C^\infty_{b,\delta}(\mathcal{C})$ pour une certaine constante $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\delta \in (0, \delta_0)$, où le δ_0 est celui de la* *proposition 3.2.1. Alors la solution au flot de Ricci $g(t) = e^{u(t)}g_{cyl}$, $u(0) = u_0$ pour $t \in [0, \infty)$ donnée par le théorème 3.4.2 converge uniformément dans toute norme C^k quand $t \to \infty$ vers la métrique plate $g_\infty = e^\alpha g_{euc}$.*

La proposition suivante n'est en fait pas nécessaire à l'argument, mais montre comment facilement obtenir un résultat de convergence avec une notion de convergence plus faible, par exemple comme ce qui est fait dans (Ma, 2013).

Proposition 3.5.1. *Sous le flot de Ricci, $u(t)$ converge localement et sous-séquentiellement vers une constante ; c'est-à-dire qu'étant donnée une suite croissante de temps $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $t_i \to \infty$, on peut trouver une sous-suite (t_{i_k}) et une constante β satisfaisant $u(\cdot, t_{i_k}) \to \beta$ uniformément sur tout compact $K \subset\subset \mathcal{C}$. Notons que la constante β pourrait dépendre de la sous-suite choisie.*

Démonstration. Soit $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de temps telle que $t_i \to \infty$ et soit $x_0 \in \mathcal{C}$ un point quelconque. Puisque $|u(t)| \leq M$ sur $[0, \infty) \times \mathcal{C}$ pour un certain $M > 0$ indépendant de t, on peut choisir une sous-suite (t_{i_k}) pour laquelle $u(x_0, t_{i_k})$ converge vers une constante $\beta \in \mathbb{R}$ quand $k \to \infty$. Mais alors pour n'importe quel choix de compact $K \subset\subset \mathcal{C}$ contenant x_0 et pour tout $y \in K$,

$$|u(x_0, t_{i_k}) - u(y, t_{i_k})| \leq \int_{x_0}^{y} |\nabla u(x, t_{i_k})|_{g(t_{i_k})} ds \leq \sup_{y\in K} |\nabla u(y, t_{i_k})|_{g(t_{i_k})} d_{i_k}(x_0, y). \tag{3.5.1}$$

Or pour un chemin quelconque γ reliant x_0 à y, les longueurs à différents t se comparent par $\ell_{g(t)}(\gamma) = e^{u(t)/2}\ell_{g_{euc}}(\gamma)$ puisque

$$|\dot\gamma(s)|_{g(t)} = (e^{u(t)}g_{cyl}(\dot\gamma, \dot\gamma))^{1/2} = e^{u(t)/2}|\dot\gamma(s)|_{g_{cyl}}.$$

La borne $|u| \leq M$ entraîne donc que $d_{i_k}(x_0, y) \leq e^{M/2} d_0(x_0, y)$ où d_0 désigne la distance calculée avec la métrique cylindrique g_{cyl}. En substituant cette dernière inégalité ainsi que l'inégalité (3.3.7) dans (3.5.1), on obtient que

$$|u(x_0, t_{i_k}) - u(y, t_{i_k})| \leq \frac{C}{(1 + t_{i_k})^{1/2}} e^{M/2} \operatorname{diam}_0(K), \quad \forall y \in K \tag{3.5.2}$$

et donc que $u(\cdot, t_{i_k}) \xrightarrow{k \to \infty} \beta$ uniformément sur K. À l'aide d'une suite exhaustive de compacts emboîtés et d'un argument diagonal standard, on peut ainsi trouver une sous-suite de temps (t_{i_j}) telle que $u(\cdot, t_{i_j}) \to \beta$ uniformément sur tout compact de $\mathcal{C}$. Une référence pour un tel argument est la preuve du théorème d'Arzela-Ascoli dans (Rudin, 1976).

□

On montre maintenant que la constante β de la proposition précédente ne dépend pas de la sous-suite choisie et qu'en fait $u(\cdot, t) \to \alpha$ uniformément sur $\mathcal{C}$.

Pour ce faire, on procède comme indiqué dans (Schnürer *et al.*, 2008) (y voir la preuve du théorème 1.3 et l'appendice) où les auteurs indiquent comment obtenir un résultat semblable sur $\mathbb{R}^2$ avec une métrique initiale asymptotiquement euclidienne. On rappelle que l'on note (x, θ) les coordonnées standards du cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^1$ et $\mathcal{C}_k := [-k, k] \times S^1$. On notera aussi respectivement $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$ la partie positive et la partie négative de f.

Pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque $t \in [0, \infty)$, les fonctions $(u(t, \cdot) - \alpha - \epsilon)_+$ et $(u(t, \cdot) - \alpha + \epsilon)_-$ sont à support compact puisque selon le théorème 3.4.2,

$u \sim \alpha$ aux deux bouts de C pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire que $u(y) \to \alpha$ quand $y \to \partial C$. Pour chaque $t \in [0, \infty)$ et $\epsilon > 0$, on peut donc considérer les intégrales

$$\int_C (u(t,\cdot) - \alpha - \epsilon)_+ d\mu \quad \text{et} \quad \int_C (u(t,\cdot) - \alpha + \epsilon)_- d\mu \tag{3.5.3}$$

qui mesurent en quelque sorte la différence moyenne entre u et α. Pour démontrer que $u \to \alpha$, l'étape cruciale sera de contrôler ces intégrales quand $t \to \infty$.

Avant de procéder à la démonstration du théorème, on démontre un lemme qui permettra de justifier un calcul crucial.

Lemme 3.5.1. *Soit $f \in C^\infty(C)$. Alors bien que $f_\pm$ ne soit en général pas différentiable, l'identité de Green suivante est satisfaite. Pour toute fonction $\phi \in C^\infty(C)$ et pour tout $k > 0$,*

$$\int_{C_k} f_\pm(x) \Delta\phi(x) = -\int_{C_k} H(\pm f)(x) \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle (x) + \int_{\partial C_k} f_\pm(x') \frac{\partial \phi(x')}{\partial \nu} \tag{3.5.4}$$

où $\partial/\partial\nu$ est le champ de vecteur normal unitaire de ∂C_k pointant vers l'extérieur et où H est la fonction de Heavyside définie par

$$H(f)(x) = \begin{cases} 1 & si\ f(x) > 0 \\ 0 & si\ f(x) \leq 0. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

De plus, si $f \in C^\infty([0,\infty) \times C)$, alors pour tout $k > 0$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_k} f_\pm^p(t,x) dx = \int_{C_k} H(\pm f) p f_\pm^{p-1}(t,x) \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)^{p-1} dx. \tag{3.5.6}$$

Démonstration. L'idée est d'approximer $f_\pm$ par des fonctions lisses f_ϵ pour lesquelles on sait que l'identité de Green est valide, puis de prendre une limite $\epsilon \to 0$. Notons qu'il suffit de démontrer le résultat analogue pour la fonction valeur absolue puisque $f_\pm = (1/2)(f \pm |f|)$. Pour $\epsilon > 0$, on considère donc la fonction

$$f_\epsilon(x) = \sqrt{f(x)^2 + \epsilon^2}. \tag{3.5.7}$$

Ces fonctions sont telles que $f_\epsilon(x) \to |f(x)|$ quand $\epsilon \to 0$ et pour chaque $\epsilon > 0$, $f_\epsilon \in C^\infty(\mathcal{C})$. Donc pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{C})$, la formule de Green donne

$$\int_{C_k} f_\epsilon(x)\Delta\phi(x) = -\int_{C_k} \frac{f(x)}{f_\epsilon(x)}\langle\nabla f, \nabla\phi\rangle(x) + \int_{C_k} f_\epsilon(x')\frac{\partial\phi(x')}{\partial\nu}$$

où le premier terme du membre de droite provient du fait que $\partial_i f_\epsilon = (f/f_\epsilon)\partial_i f$. Puisque $\Delta\phi$, $\langle\nabla f, \nabla\phi\rangle$ et $(\partial\phi/\partial\nu)$ sont toutes des fonctions bornées sur leur domaine et $f_\epsilon(x) < \sqrt{f(x)^2+1}$ pour $\epsilon < 1$ tandis que $f(x)/f_\epsilon(x) < 1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée 1.4.2 aux trois suites de fonctions apparaîssant dans les intégrales et conclure qu'en prenant la limite $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\int_{C_k} |f(x)|\Delta\phi(x) = -\int_{C_k} \operatorname{sgn}(f(x))\langle\nabla f, \nabla\phi\rangle(x) + \int_{C_k} |f(x')|\frac{\partial\phi(x')}{\partial\nu}. \tag{3.5.8}$$

En écrivant $f_\pm(x) = (1/2)(f \pm |f|)$ et en utilisant (3.5.8), on obtient immédiatement (3.5.4).

Pour vérifier (3.5.6), on procède de façon similaire. En effet, on approxime encore $|f|$ par f_ϵ et pour chaque $\epsilon > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C_{k_0}} f_\epsilon^p(t,x)dx = \int_{C_{k_0}} \frac{\partial}{\partial t} f_\epsilon^p(t,x)dx = \int_{C_{k_0}} p f_\epsilon(t,x)^{p-1}\frac{f(t,x)}{f_\epsilon(t,x)}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)dx$$

et on conclut par le théorème de convergence dominée, en prenant $\epsilon \to 0$, que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C_{k_0}} |f(t,x)|^p dx = \int_{C_{k_0}} \operatorname{sgn}(f(t,x))p|f(t,x)|^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)dx.$$

On obtient (3.5.6) en écrivant encore $f_\pm = (1/2)(f \pm |f|)$. □

Jusqu'à maintenant, on sait seulement que pour toute suite croissante (t_i) de temps avec $t_i \to +\infty$, il existe une sous-suite et une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que $u(y,t_i) \to \beta$ uniformément sur les compacts quand $t_i \to \infty$. Or on peut améliorer cette situation et démontrer qu'en fait $\beta = \alpha$ et que $u(y,t) \to \alpha$ uniformément sur $\mathcal{C}$. On rappelle que $u \to \alpha$ sur $\partial\mathcal{C}$ donc que pour t fixé, $(u(t,y) - \alpha - \epsilon)_+$ et $(u(t,y) - \alpha + \epsilon)_-$ sont à support compact pour n'importe quel $\epsilon > 0$. On peut donc considérer les fonctions

$$I_p^\epsilon(t) := \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{p}(u(t,y) - \alpha - \epsilon)_+^p dy \quad \text{et} \quad J_p^\epsilon(t) := \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{p}(u(t,y) - \alpha + \epsilon)_-^p dx.$$

Lemme 3.5.2. *Pour $p \in \mathbb{N}$ impair assez grand, pour tout $1 > \epsilon > 0$, les fonctions $I_p^\epsilon(t)$ et $J_p^\epsilon(t)$ sont uniformément bornées sur $[0,\infty)$.*

Démonstration. On traite d'abord le cas de $I_p^\epsilon(t)$. Soit $0 < \epsilon < 1$. Par la proposition 2.4.2, il existe des constantes C et $C_1 > 0$ telles que $|u(y,t) - \alpha| \leq Ce^{C_1 t}\rho^\delta$ sur $\mathcal{C} \times [0,\infty)$. On est donc assuré que pour n'importe quel $t_0 \in [0,\infty)$ fixé, on puisse trouver des réels $k_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que le support de $(u(t,\cdot) - \alpha - \epsilon)_+$ soit inclus dans $\mathcal{C}_{k_0}$ pour tout $t \in [t_0 - \eta_0, t_0 + \eta_0]$. Ainsi, la dérivée $\partial_t I_p^\epsilon(t)$ au temps $t = t_0$ est donnée par une intégrale sur un compact :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} I_p^\epsilon(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} \int_{\mathcal{C}_{k_0}} \frac{1}{p}(u(t,y) - \alpha - \epsilon)_+^p dy. \tag{3.5.9}$$

On pourra donc dériver sous l'intégrale. On rappelle que $\partial_t u = e^{-u}\Delta_{cyl} u$. En utilisant le lemme 3.5.1, on peut faire passer la dérivée sous l'intégrale dans

(3.5.9) puis intégrer par parties pour obtenir, si $p \geq 3$,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} I_p^\epsilon(t) &= \int_{\mathcal{C}_{k_0}} H(u-\alpha-\epsilon)(u-\alpha-\epsilon)_+^{p-1} e^{-u}(\Delta_{cyl}u)dy \\ &= -\int_{\mathcal{C}_{k_0}} (u-\alpha-\epsilon)_+^{p-2}((p-1)-(u-\alpha-\epsilon)_+)|\nabla u|^2 e^{-u} dy \\ &\qquad + \int_{\partial\mathcal{C}_{k_0}} (u-\alpha-\epsilon)_+^{p-1} e^{-u}\frac{\partial u}{\partial x} ds.\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

En prenant k_0 un peu plus grand, on peut s'assurer que $(u-\alpha-\epsilon)_+$ soit identiquement nul dans un voisinage de $\partial\mathcal{C}_{k_0}$ donc que le terme de bord dans (3.5.10) s'annule. Pour ce qui est du premier terme dans la dernière expression de (3.5.10), on note que $(u-\alpha-\epsilon)_+^{p-2}$, $|\nabla u|^2$ et e^{-u} sont positifs donc puisque $u(t,y)$ est uniformément borné sur $[0,\infty)\times\mathcal{C}$ par le théorème 3.4.2, en prenant

$$p > \sup_{(t,y)\in[0,\infty)\times\mathcal{C}} (u(t,y)-\alpha-\epsilon+1)$$

on obtient que

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} I_p^\epsilon(t) \leq 0.$$

Puisque $t_0 \in [0,\infty)$ était arbitraire et que le p choisi ne dépendant pas de t_0, ceci démontre que pour p assez grand, $I_p^\epsilon(t)$ est une fonction décroissante de t sur $[0,\infty)$, donc en particulier bornée puisqu'elle est positive.

Pour ce qui est de $J_p^\epsilon(t)$, on peut faire le même argument que ci-dessus mais en prenant soin de prendre p impair pour que $(u-\alpha+\epsilon)_-^p$ reste négatif. En effet, on obtient

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} J_p^\epsilon(t) = -\int_{C_{k_0}} (u-\alpha+\epsilon)_-^{p-2}((p-1)-(u-\alpha+\epsilon)_-)|\nabla u|^2 e^{-u} dy$$
$$+\int_{\partial C_{k_0}} (u-\alpha+\epsilon)_-^{p-1} e^{-u}\frac{\partial u}{\partial x} ds. \tag{3.5.11}$$

donc avec k_0 assez grand, on voit que pour $p > \sup(u-\alpha+\epsilon+1)$, (3.5.11) est positif donc $J_p^\epsilon(t)$ est uniformément bornée sur $[0,\infty)$ puisqu'elle est négative. Notons que dans ce cas, plus ϵ est grand, plus on doit prendre p grand. C'est pour cette raison qu'on requiert une borne sur ϵ dans l'énoncé. □

Démonstration du théorème 3.5.1. La démonstration du théorème consiste à voir que si $u(y,t)$ ne convergeait pas uniformément vers α, alors on aurait $I_p^\epsilon(t) \to +\infty$ quand $t \to \infty$ pour un certain $0 < \epsilon < 1$, contredisant ainsi le lemme précédent.

Si $u(y,t)$ ne convergeait pas uniformément vers α, on pourrait trouver une suite $(y_i, t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $t_i \to \infty$ et un réel $0 < \zeta < 1$ tels que

$$|u(y_i,t_i)-\alpha| \geq 3\zeta \tag{3.5.12}$$

pour chaque $(y_i,t_i) \in \mathcal{C} \times [0,\infty)$. Quitte à prendre une sous-suite des (y_i,t_i), ceci entraînerait que soit $u(y_i,t_i)-\alpha \geq 3\zeta$ ou $u(y_i,t_i)-\alpha \leq -3\zeta$. Supposons d'abord que l'on ait $u(y_i,t_i)-\alpha > 3\zeta > 0$.

L'idée est que les estimations de Shi entraînent alors $u(y,t_i)-\alpha-\zeta > \zeta$ sur des boules centrées en y_i de rayon de plus en plus grand quand $t_i \to \infty$. En effet, pour $y \in \mathcal{C}$ l'estimation sur le gradient dans le théorème 3.4.2 entraîne que

$$\begin{aligned} u(y,t_i)-\alpha &= u(y_i,t_i)+\int_{y_i}^{y} du-\alpha \\ &\geq 3\zeta-\frac{C'}{(1+t_i)^{1/2}}d_{t_i}(y_i,y) \\ &\geq 3\zeta-\frac{C}{(1+t_i)^{1/2}}d_0(y_i,y). \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Ainsi, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on obtient

$$u(y,t_i)-\alpha \geq 2\zeta > 0 \qquad \text{pour tout } y \in B_0\left(y_i, \zeta\frac{(1+t_i)^{1/2}}{C}\right). \tag{3.5.14}$$

On notera $R_i = \zeta\frac{(1+t_i)^{1/2}}{C}$ et la boule $B_0(y_i, R_i)$ par B_{R_i}.

Puisque B_{R_i} contribue de plus en plus dans le calcul de $I_p^\zeta(t_i)$, on obtient que $I_p^\zeta(t_i)$ est de plus en plus grand quand $t_i \to \infty$. En effet, pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}$ on a

$$I_p^\zeta(t_i) = \int_C \frac{1}{p}(u-\alpha-\zeta)_+^p dy \geq \int_{B_{R_i}} \frac{1}{p}(u-\alpha-\zeta)_+^p dy \geq \frac{1}{p}\zeta^p \operatorname{Vol}(B_{R_i}), \tag{3.5.15}$$

qui tend vers $+\infty$ quand $i \to \infty$ puisque $R_i \to +\infty$.

Dans le cas où on aurait $u(y_i,t_i)-\alpha < -\zeta$, il suffirait de considérer plutôt l'intégrale $J_p^\zeta(t)$ avec p impair. Le même argument permettrait de voir que pour tout p, $J_p^\zeta(t) \to -\infty$ quand $t \to \infty$ ce qui contredit aussi le lemme.

Pour obtenir la convergence en norme C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suffit d'appliquer les estimations de Shi d'ordre supérieur. En effet, le théorème 3.4.2 donne, pour chaque $k \geq 1$, une estimation

$$\sup_{y\in C} |\nabla^k u(y,t)|^2 \leq \frac{C_k}{t^k}$$

valide pour tout $t \in (0, \infty)$. Puisque $\nabla^k \alpha \equiv 0$ pour la fonction constante α, on a donc bien la convergence uniforme $\sup_{y \in C} |\nabla^k u(y,t) - \nabla^k \alpha| \to 0$ quand $t \to \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

CONCLUSION

Dans ce travail, on a établi la convergence du flot de Ricci sur un cylindre asymptotique à un cylindre plat. L'idée principale derrière les arguments utilisés était la suivante. En contrôlant la géométrie à l'infini de façon assez restrictive, par exemple en considérant des métriques asymptotiquement plates ou des espaces de fonctions à poids, les méthodes d'analyse utilisées sur des surfaces compactes peuvent être mises à profit. Par exemple, un point crucial était que les conditions de décroissance à l'infini sont préservées tout au long du flot. Ceci permet d'adapter le principe du maximum, ce qui a permis d'utiliser les mêmes arguments que dans le cas compacts pour démontrer les estimations de Shi de façon uniforme. On a aussi mis à profit la décroissance de la courbure à l'infini pour établir un résultat de Gauss-Bonnet, ce qui a permis d'obtenir un potentiel pour la courbure et d'ainsi avoir accès aux arguments développés dans (Hamilton, 1988).

Il est intéressant de noter la différence entre ces méthodes et celles utilisées par (Giesen et Topping, 2011). En effet, ces derniers permettent à la courbure d'être initialement non-bornée, ce qui empêche une utilisation globale des méthodes conventionelles. Il serait intéressant de voir comment jumeler les deux approches pour obtenir des résultats similaires à ceux de ce mémoire dans le cas où les conditions sur la métrique initiale sont affaiblies.

Pour cela, une étape importante serait de généraliser les résultats de la section 2.4. Par exemple, dans (Albin *et al.*, 2013) les auteurs démontrent que si en plus d'être dans un espace à poids $\rho^\delta C^\infty$ pour $\delta > 0$, la métrique initiale est lisse jusqu'au bord, alors une solution qui préserve cette décroîssance préserve aussi le fait d'être lisse jusqu'au bord. Leurs arguments fonctionnent presque mot pour mot dans le présent contexte d'une métrique asymptotiquement cylindrique. De façon plus générale, dans (Rochon et Zhang, 2012b) et dans (Rochon et Zhang, 2012a), les auteurs considèrent des métriques admettant un développement polyhomogène à l'infini sur des variétés kählériennes. Les arguments utilisés devraient aussi fonctionner dans le cas de surfaces asymptotiquement cylindriques.

Une autre direction à considérer est une généralisation du résultat de convergence de ce présent travail au cas où la métrique initiale sur le cylindre est asymptotiquement plate mais pas nécessairement asymptotique à la même métrique cylindrique aux deux bouts. Dans ce cas, on ne s'attend pas à un résultat de convergence global sur le cylindre mais on pourrait espérer une convergence locale vers une métrique interpolant en quelque sorte les deux différents bouts. La méthode de preuve utilisée à la section 3.5 ne fonctionne pas telle quelle puisque l'intégrale $I_p^\epsilon(t)$ ne converge pas, mais on pourrait espérer adapter l'argument à l'aide d'une limite de la forme

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{S^1}\int_{-k}^{k}\frac{1}{p}(u(-x,\theta)-\alpha)^p+\frac{1}{p}(u(x,\theta)-\alpha)^p dx d\theta$$

pour p impair. Pour faire fonctionner cet argument, ce qu'il faut est un meilleur contrôle sur la décroîssance du facteur conforme le long du flot. Avec les méthodes utilisées dans ce travail, on obtient une estimation $|u| \leq Ce^{C_1 t}\rho^\delta$ qui dégénère quand $t \to \infty$. Si on avait une estimation uniforme en t, l'argument de la section 3.5 fonctionnerait.

Finalement, les idées utilisées pour obtenir des résultats sur le flot de Ricci dans ce travail pourraient être utiles dans d'autres contextes en géométrie et en analyse. Cette exposition pourrait donc permettre à d'autres étudiants de se familiariser avec ces techniques pour les utiliser à leur tour afin de résoudre d'autres problèmes de géométrie sur des variétés non-compactes.

RÉFÉRENCES

Adams, R. A. et Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces* (second éd.), volume 140 de *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam).* Elsevier/Academic Press, Amsterdam.

Agranovich, M. S. (2015). *Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in smooth and Lipschitz domains.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham. Revised translation of the 2013 Russian original.

Albin, P., Aldana, C. L. et Rochon, F. (2013). Ricci flow and the determinant of the Laplacian on non-compact surfaces. *Comm. Partial Differential Equations, 38*(4), 711–749.

Aubin, T. (1976). Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes. *Bull. Sci. Math. (2), 100*(2), 149–173.

Booss, B. et Bleecker, D. (2014). *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics.* Int. Press of Boston.

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York.

Chen, X., Lu, P. et Tian, G. (2006). A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc., 134*(11), 3391–3393 (electronic).

Chow, B. (1991). The Ricci flow on the 2-sphere. *J. Differential Geom., 33*(2), 325–334.

Chow, B. et Knopf, D. (2004). *The Ricci flow : an introduction*, volume 110 de *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI.

Chow, B., Lu, P. et Ni, L. (2006). *Hamilton's Ricci flow*, volume 77 de *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI ; Science Press, New York.

Folland, G. B. (1999). *Real analysis* (second éd.). Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

Gallot, S., Hulin, D. et Lafontaine, J. (2004). *Riemannian geometry* (third éd.). Universitext. Springer-Verlag, Berlin.

Giesen, G. et Topping, P. M. (2011). Existence of Ricci flows of incomplete surfaces. *Comm. Partial Differential Equations*, *36*(10), 1860–1880.

Grieser, D. (2001). Basics of the *b*-calculus. In *Approaches to singular analysis (Berlin, 1999)*, volume 125 de *Oper. Theory Adv. Appl.* 30–84. Birkhäuser, Basel.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, *17*(2), 255–306.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 71 de *Contemp. Math.* 237–262. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Hörmander, L. (2003). *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin ; MR1065993 (91m :35001a)].

Ji, L., Mazzeo, R. et Sesum, N. (2009). Ricci flow on surfaces with cusps. *Math. Ann. 345, no. 4.*

Lee, J. M. (1997). *Riemannian manifolds*, volume 176 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York. An introduction to curvature.

Lockhart, R. (1987). Fredholm, Hodge and Liouville theorems on noncompact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *301*(1), 1–35.

Lockhart, R. B. et McOwen, R. C. (1985). Elliptic differential operators on noncompact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, *12*(3), 409–447.

Ma, L. (2013). Convergence of Ricci flow on R^2 to the plane. *Differential Geom. Appl.*, *31*(3), 388–392.

Melrose, R. B. (1993). *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, volume 4 de *Research Notes in Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.

Morgan, J. et Tian, G. (2007). *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, volume 3 de *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA.

Pacard, F. (2008). Lectures on connected sum constructions in geometry and nonlinear analysis. `http://www.math.polytechnique.fr/~pacard/Publications/Lecture-Part-I.pdf`. [En ligne ; accédé le 15 Septembre 2015].

Perelman, G. (2012). The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *preprint*.

Petersen, P. (2006). *Riemannian geometry* (second éd.), volume 171 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.

Rochon, F. et Zhang, Z. (2012a). Asymptotics of complete Kähler metrics of finite volume on quasiprojective manifolds. *Adv. Math.*, *231*(5), 2892–2952. `http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2012.08.005`

Rochon, F. et Zhang, Z. (2012b). Asymptotics of complete kähler metrics of finite volume on quasiprojective manifolds. *Adv. Math. 231*.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (third éd.). McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf. International Series in Pure and Applied Mathematics.

Schnürer, O. C., Schulze, F. et Simon, M. (2008). Stability of Euclidean space under Ricci flow. *Comm. Anal. Geom.*, *16*(1), 127–158. Récupéré de `http://projecteuclid.org.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2048/euclid.cag/1213020540`

Shi, W.-X. (1989). Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, *30*(1), 223–301. Récupéré de `http://projecteuclid.org.proxy.bibliotheques.uqam.ca:`

2048/euclid.jdg/1214443292

Taylor, M. E. (2011). *Partial differential equations I. Basic theory* (second éd.), volume 115 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York.