UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

« ANALYSE DIDACTIQUE D'UN OUTIL D'ÉVALUATION ORTHOPÉDAGOGIQUE SUR LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES »

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ COMME EXIGENCE PARTIELLE
À LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

GENEVIÈVE FORTIER-MOREAU

JANVIER 2016

REMERCIEMENTS

La rédaction d'un mémoire est certes un accomplissement personnel, mais il ne peut se concrétiser sans l'amour et le soutien de plusieurs personnes que je tiens à remercier. Tout d'abord, je tiens à remercier Jacinthe Giroux, ma directrice de maîtrise, de m'avoir épaulée tout au long de ce parcours ô combien enrichissant! En plus d'être une personne que j'estime beaucoup pour sa rigueur, ses convictions et sa sensibilité, elle a su me transmettre sa passion de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Merci à mes parents, Nicole et Serge, ainsi qu'à mes beaux-parents adorés pour leur soutien. Merci d'avoir cru en moi, en mes projets qui, bien qu'ils sortent parfois des sentiers battus, restent cohérents avec la personne que je suis.

Merci à Marc, mon amoureux, d'avoir partagé au quotidien les aléas de ce projet et de la rédaction. Pour tous ses encouragements et ses petites attentions qui m'ont permis de persévérer et de mener à terme ce projet de longue haleine.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes, étudiants et professeurs, que j'ai côtoyées à l'université pour les échanges enrichissants que nous avons eus autour de l'éducation et, plus particulièrement, de l'orthodidactique des mathématiques.

Merci à mes amis et mes proches, grâce à qui je me suis toujours sentie entourée et soutenue dans cette aventure. Merci aussi à tous les chercheurs et amoureux de l'éducation qui contribuent à ce milieu intellectuellement stimulant, que j'aimerais qualifier de beau terrain de jeu pour les années de recherche à venir.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

CPNCF	Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones
CSQ	Centrale syndicale du Québec
DEMMI	Démarche d'évaluation pour mieux intervenir en mathématiques
DGA	Difficultés graves d'apprentissage
EHDAA	Élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage
FAE	Fédération autonome des enseignants
FSE	Fédération des syndicats de l'enseignement
GEMAS	Groupe d'étude sur l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire
HDAA	Handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage
MELS	Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport
OCDE	Organisation de coopération et de développement économique
SEGPA	Section d'enseignement général et professionnel adapté
TSD	Théorie des situations didactiques
UQAM	Université du Québec à Montréal
WIAT	Test de rendement individuel de Wechsler

RÉSUMÉ

Au Québec, les outils d'évaluation orthopédagogique en mathématiques disponibles sont de peu d'intérêt pour les orthopédagogues puisque les élèves en difficulté performent peu à ces tests souvent de type « papier/crayon » et que leurs résultats sont peu utiles pour planifier l'intervention (Lemoyne et Lessard, 2003). Ce mémoire s'inscrit dans un projet de partenariat, dirigé par la professeure Giroux, qui vise le développement de quatre outils d'évaluation orthopédagogique en mathématiques. Chaque outil comporte deux instruments : un protocole et un modèle interprétatif des conduites. Ce projet de mémoire a pour objectif une validation interne du protocole d'entretien didactique d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. Des entretiens didactiques filmés sont menés auprès de cinq élèves du primaire, trois identifiés à risque et deux en difficulté grave d'apprentissage. La méthodologie retenue pour atteindre nos trois objectifs spécifiques s'inspire de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). Le premier objectif spécifique est de procéder à une analyse *a posteriori*, soit une analyse intratâche des conduites des cinq élèves à chacune des tâches. Cette analyse nous permet d'enrichir l'analyse *a priori* du protocole. Le second objectif de ce mémoire est de rendre compte de la fiabilité et de l'utilité didactiques de chacune des tâches au regard d'une démarche d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. Les analyses intratâche et intertâche nous permettent de préciser le type de connaissances investiguées par chacune des collections de tâches du protocole. À partir des résultats des analyses, nous proposons quelques modifications au protocole afin de le bonifier. Le troisième objectif est de rendre compte du potentiel didactique des relances réalisées au regard des caractéristiques spécifiques des tâches dans lesquelles elles s'insèrent. Nos résultats concordent avec ceux de Giroux et Ste-Marie (2015b) à savoir qu'une relance doit tenir compte des caractéristiques spécifiques de la tâche. De plus, les résultats de nos analyses permettent d'identifier deux facteurs qui influencent le potentiel didactique des relances : les connaissances mathématiques et didactiques de l'orthopédagogue et l'adéquation de la relance à l'activité mathématique de l'élève.

MOTS-CLÉS : structures multiplicatives, élèves à risque, évaluation orthopédagogique, mathématiques au primaire, entretien didactique

INTRODUCTION

Enseigner et apprendre des mathématiques constituent des actes cognitifs, mais surtout des actes culturels et sociaux (Giroux, 2010). Dès lors que nous admettons que l'école doit former des citoyens autonomes, critiques et en mesure d'affronter des situations complexes qui se présenteront à eux (Boutin et Daneau, 2004), une place prioritaire doit être faite à la maîtrise du français et des mathématiques dans un esprit de transmission des savoirs culturels et sociaux pour l'ensemble des élèves.

Mes cinq années d'enseignement en tant qu'orthopédagogue m'ont permis de constater le manque d'outil pour évaluer et intervenir en mathématiques. C'est en partie pour répondre à ce besoin du milieu et pour soutenir les orthopédagogues dans leur rôle auprès des enseignants et des élèves que j'entreprends une recherche sur l'évaluation orthopédagogique en mathématiques. Mon choix d'être orthopédagogue et de poursuivre en recherche est essentiellement motivé par la préoccupation d'assurer l'accessibilité aux savoirs culturels et sociaux à l'ensemble des élèves dans un souci de justice sociale et scolaire. La didactique des mathématiques constitue une entrée à la fois incontournable et essentielle pour s'interroger sur les moyens et les conditions d'enseignement et d'apprentissage qui contribuent à la progression des savoirs.

Mon projet de maîtrise s'inscrit dans un projet de recherche, dirigé par Jacinthe Giroux, en partenariat avec la région Laval/Lanaudière/Laurentides qui porte sur le développement et la mise à l'épreuve d'outils d'évaluation et d'intervention orthopédagogiques (Giroux et Ste-Marie, 2015a). Plus particulièrement, ce projet de mémoire a pour objectif de procéder à une validation interne du protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives d'élèves identifiés à risque par le milieu scolaire.

Dans le premier chapitre, à travers la présentation du contexte de l'éducation au Québec dans lequel s'inscrit cette étude, nous soulevons certains enjeux sociaux et éducatifs relatifs à la réussite scolaire des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA). Après avoir présenté la posture épistémologique adoptée au regard des difficultés scolaires en mathématiques, l'objectif principal de cette recherche est énoncé. Au second chapitre, le cadre théorique sur lequel repose notre projet est présenté. Les structures multiplicatives sont d'abord définies, puis nous présentons diverses études qui répertorient des stratégies d'élèves aux énoncés de problèmes multiplicatifs. S'ensuit la description du modèle d'investigation des connaissances pour l'évaluation des connaissances sur les structures multiplicatives, ce qui permet d'énoncer les objectifs spécifiques. Au troisième chapitre, nous présentons une description des tâches du protocole d'entretien. Puis, sont précisés les éléments relatifs à la méthodologie, soit la présentation des cinq participants, le déroulement des entretiens et les méthodes d'analyses qualitatives effectuées. Finalement, les considérations éthiques sont énoncées. Le quatrième chapitre comporte les résultats des analyses *a posteriori*, soit l'analyse des conduites des élèves à chacune des tâches du protocole et les analyses des interventions effectuées par l'expérimentatrice à chacune des tâches.

Le chapitre V débute par la présentation des résultats des analyses intertâches, soit une analyse croisée des conduites d'un même élève à plusieurs tâches. Les profils de connaissances d'élèves sont ainsi dégagés. Ce chapitre se conclut par des recommandations pour la bonification du protocole d'entretien. Une discussion sur le concept de relance permet de mettre en lumière certains facteurs qui influencent son potentiel didactique.

La conclusion nous permet de revenir sur les principaux apports du projet, ses limites, ainsi que sur des perspectives de recherche.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Cette recherche s'inscrit dans un projet de partenariat entre le groupe de recherche dans le domaine de la didactique des mathématiques en adaptation scolaire à l'UQAM (Groupe d'études sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en adaptation scolaire) et six commissions scolaires de la région Laval/Laurentides/Lanaudière[1] qui vise à développer des outils d'évaluation orthopédagogique (Giroux et Ste-Marie, 2015a).

1.1 Contexte

Dans cette section, nous présentons d'abord le contexte général dans lequel s'inscrit cette étude en soulevant différents enjeux sociaux et éducatifs au Québec relatifs à la réussite scolaire des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA). Ensuite, puisque ce projet se situe dans le domaine de la didactique des mathématiques, nous présentons l'analyse issue de différentes postures adoptées en didactique des mathématiques dans l'espace francophone sur la question des difficultés scolaires en mathématiques.

[1] Initialement regroupées sous la Direction régionale LLL du MELS. En 2014, cette structure a été abolie.

1.1.1 Contexte général

La lutte à l'échec scolaire est une préoccupation pour plusieurs pays industrialisés depuis l'avènement de l'école obligatoire pour tous (Boutin et Daneau, 2004). Au Québec, c'est la Loi sur l'instruction publique, en 1943, qui rend obligatoire la fréquentation scolaire de 6 à 14 ans. Cet âge a été porté à quinze ans, en 1961 et à seize ans, en 1988. Cette loi a entraîné l'arrivée massive d'élèves. Aussi, comme l'expriment Boutin et Daneau (2004, p.16) :

> Au fur et à mesure que cette dernière [l'école] a été dans l'obligation de rendre des comptes, tant aux pouvoirs publics qu'au monde de l'industrie et du commerce, elle s'est sentie incitée, voire forcée, à « produire » des élèves performants, et décidément à faire échouer ceux qui ne correspondaient pas aux critères d'excellence reconnus.

La massification de l'éducation jumelée à l'établissement de normes de réussite a entraîné l'apparition du concept d'échec scolaire. Alors que les gouvernements visent l'atteinte de systèmes éducatifs plus performants pour répondre à des impératifs économiques liés à la mondialisation[2], des études montrent que le niveau d'équité d'un système est déterminant de son niveau d'efficacité (Hirtt, 2007; OCDE, 2010). Un système éducatif fait preuve d'équité si les circonstances personnelles ou sociales ne constituent pas un obstacle à la réussite scolaire de chaque individu (OCDE, 2012). D'après les recommandations de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE, 2010), la lutte à l'échec scolaire peut être menée en renforçant deux dimensions de l'équité, soit l'inclusion et l'égalité des chances. Considérant qu'au niveau systémique, l'échec est défini comme l'incapacité d'offrir une éducation de qualité pour tous, la dimension inclusive vise à assurer à

---

[2] Selon Guy Rocher (2001), la mondialisation pourrait être définie comme l'extension à l'échelle mondiale d'enjeux qui étaient auparavant limités à des régions ou des nations.

chacun un niveau d'éducation minimal. Considérant qu'au niveau individuel, l'échec scolaire est défini comme l'incapacité d'un élève à atteindre un niveau minimal nécessaire, la deuxième dimension vise à garantir l'égalité des chances à tous. Il reste difficile pour les gouvernements de concilier la recherche de l'équité et celle d'une performance accrue du système éducatif. La lutte à l'échec scolaire constitue donc un réel défi de société (Mainini, 2006).

Le Canada, en raison de son statut de pays membre de l'OCDE, devrait s'engager, par l'application de politiques, à favoriser l'atteinte de l'équité afin de lutter contre l'échec scolaire. Le Québec réussit-il à concilier performance et égalité des chances? Dans le contexte québécois, où les contraintes de la mondialisation, de la financiarisation du capitalisme et des politiques néolibérales marquent de plus en plus la société, le système scolaire connaît des mutations internes et systémiques qui résultent d'un plus grand alignement sur les exigences du capitalisme contemporain (Laval et al., 2012) et semble ainsi s'éloigner de cette équité. L'instauration d'un marché scolaire est un impact systémique de ces mutations où la concurrence est palpable entre le réseau des écoles publiques et celui des écoles privées (Conseil supérieur de l'éducation, 2007). Alors que l'école privée revêt un caractère exclusif par le recours à des processus sélectifs qui en restreignent l'accès, l'école publique revêt un caractère inclusif par l'obligation légale d'offrir des services éducatifs à tous les élèves.

Même si certaines écoles privées ont pour mission d'offrir des services exclusivement à des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage, l'obligation d'offrir un service éducatif pour tous relève uniquement du réseau public. Dans ce contexte de concurrence, on constate que ces élèves sont acceptés dans une plus faible proportion par le réseau d'établissements privés et la Fédération des établissements privés déclarait dans son document sur l'enseignement privé que

« 5,6 % des jeunes ont été refusés parce que les établissements ne disposent pas des ressources humaines pour répondre aux besoins particuliers de ces jeunes » (2006, p.3, cité dans Vermot-Desroches, 2007). Pour éviter la fuite de leur clientèle, une réaction des commissions scolaires et des écoles fut d'accroître l'offre de projets pédagogiques particuliers sélectifs et non sélectifs afin de concurrencer les établissements privés (Conseil supérieur de l'éducation, 2007).

Qu'en est-il de l'égalité des chances des élèves pour qui la réussite scolaire constitue un défi supplémentaire ? Cette question est légitime considérant qu'un tri institutionnel s'exerce lors de la sélection des élèves à l'entrée de la plupart des écoles privées et des projets pédagogiques particuliers selon des critères de performance et la capacité financière des parents. Des résultats montrent que l'origine socio-économique des élèves semble être un facteur déterminant de leur capacité à obtenir un diplôme. Au Québec, nous observons un écart de près de 20 % entre le taux de sorties avec diplôme ou qualification d'une école d'un milieu très favorisé (88 %) et d'une école d'un milieu très défavorisé (69 %) (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2011). Cet écart n'est pas propre au Québec; il est également présent dans le système scolaire français (Roiné, 2009). Ces taux participent à montrer que les facteurs socio-économiques sont déterminants dans la réussite scolaire.

Le Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) a mis en place différentes politiques afin que diminue la disparité de réussite scolaire entre les élèves. Parmi les actions entreprises, le ministère s'est doté en 2009 d'un plan d'action contre le décrochage scolaire intitulé *L'École j'y tiens! Tous ensemble pour la réussite scolaire.* Dans ce plan, le MELS vise l'objectif d'un taux de diplomation ou de qualification de 80 % d'ici 2020 chez les moins de vingt ans. Ce plan d'action reconnaît que les responsabilités à l'égard de la réussite scolaire sont partagées et que cette réussite repose sur un effort concerté de différents acteurs du système éducatif. Cet effort concerté, qui se traduit en objectifs mesurables, est scellé par une obligation de résultat inscrite dans les conventions de partenariat et les conventions de gestion et de réussites depuis l'adoption, en 2008, du projet de loi 88 sur la gouvernance scolaire (Tondreau, 2011). Cependant, comme l'a soulevé Lessard en 2004, l'obligation de résultat crée une pression sur les différents acteurs du système éducatif (cadres, directions, enseignants) et ainsi, renforce les inégalités (Lessard 2004 dans Tondreau, 2011).

Depuis les années 2000, la part d'élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage[3] (EHDAA) se maintient à un taux supérieur à 10 % de l'effectif scolaire du préscolaire, primaire et secondaire (Gouvernement du Québec, 2009). L'étiquetage des élèves constitue un mécanisme de tri administratif et institutionnel en établissant une distinction entre ceux qui sont susceptibles de réussir dans les délais prescrits et ceux qui sont susceptibles d'échouer. Le MELS a établi deux étiquettes pour les élèves « en difficulté », soit les EHDAA et les élèves à risque.

Le MELS (2007) regroupe sous l'appellation EHDAA, les élèves qui sont handicapés et qui ont des troubles graves du comportement. La déclaration de l'effectif des EHDAA est obligatoire auprès du MELS pour calculer les allocations de base et les allocations supplémentaires attribuées aux commissions scolaires (MELS, 2007). Les élèves de cette catégorie sont ceux qui ont reçu un diagnostic d'un professionnel pour l'une des déficiences ou troubles suivants :

- une déficience motrice ou organique de légère à sévère,
- une déficience intellectuelle moyenne à sévère ou profonde,
- un trouble envahissant du développement,
- une déficience langagière, visuelle ou auditive,
- un trouble relevant de la psychopathologie ou
- un trouble grave du comportement.

[3] Pour alléger le texte, le sigle EHDAA est utilisé par la suite.

Selon le MELS (2007), sous le concept d'élèves à risque se trouvent les élèves en difficulté d'apprentissage, ceux présentant une déficience intellectuelle légère et ceux présentant des troubles légers du comportement. Le MELS précise également que « les élèves à risque ne sont pas compris dans l'appellation d'élèves HDAA » (2007, p. 24). Par conséquent, la déclaration des élèves à risque n'est pas obligatoire auprès du MELS. Selon Cadieux (2010), le concept d'élève à risque est susceptible d'entraîner des effets positifs à plus ou moins long terme alors qu'il anticipe que « les ressources seront mobilisées et orientées davantage vers la recherche des conditions facilitant la réussite éducative du plus grand nombre » (p.31). La part de financement octroyé pour couvrir les services nécessaires aux élèves à risque est proportionnelle à l'effectif total d'élèves de la commission scolaire (MELS, 2007). Cependant, puisque ces élèves ne sont plus identifiés officiellement, il est difficile de juger si les ressources sont disponibles et suffisantes pour combler les besoins de cette clientèle.

Alors que ces lignes directrices fournies par le MELS stipulent que l'identification des élèves à risque n'est plus obligatoire, il est intéressant de se pencher sur son application locale selon les ententes collectives syndicales intervenues entre d'un côté, les syndicats des enseignants des commissions scolaires francophones, soit la Fédération autonome des enseignants (FAE) et la Fédération des syndicats de l'enseignement (FSE-CSQ) et de l'autre, le Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones (FSE-CSQ et CPNCF, 2011; FAE et CPNCF, 2011). Selon ces ententes collectives (FSE-CSQ et CPNCF, 2011, p.213 annexe XIX; FAE et CPNCF, 2013, p.203 annexe XIX), aucune distinction n'est faite entre un élève en difficulté d'apprentissage et un élève en trouble d'apprentissage. Tous deux se trouvent sous l'appellation d'élève en difficulté d'apprentissage dans la grande catégorie d'élèves à risque, dont l'identification repose sur le constat d'un écart entre les performances produites en français ou en mathématiques et celles qui sont attendues, au regard du Programme de formation de l'école québécoise, en fonction de l'âge de l'élève et ce, bien que des interventions régulières et ciblées aient été mises en œuvre. Pour les commissions scolaires faisant partie de la FAE, l'identification des élèves à risque est utilisée pour répartir proportionnellement l'enveloppe budgétaire allouée aux services offerts aux élèves à risque. Ainsi, les sommes octroyées à chaque école dépendent du nombre d'élèves identifiés à risque. Cette identification bien qu'administrative est aussi utilisée dans « l'établissement du maximum et de la moyenne d'élèves dans un groupe d'élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage comptant des élèves de différents types » (FAE et CPNCF, 2011, p. 212 annexe XXI). Il existe donc bel et bien une identification administrative des élèves dans certaines commissions scolaires, membres de la FAE, bien qu'auprès du MELS, cette identification ne soit pas prise en compte. La volonté du MELS de mettre l'accent sur la prévention en abolissant l'identification obligatoire des élèves à risque entre ici en contradiction avec la volonté des syndicats d'assurer le financement nécessaire des services à ces élèves par une procédure d'identification administrative.

Les appellations utilisées par le MELS pour désigner les troubles scolaires sont en quelque sorte des cadres interprétatifs. Nécessairement reprises dans le milieu scolaire, elles colorent la représentation que se font les enseignants des difficultés scolaires (Roiné, 2011) et nous pouvons le supposer, le processus d'identification des élèves en difficulté. Pourtant, elles ne sont pas exemptes de critiques de la part de chercheurs. En effet, Giroux (2014) et Roiné (2011) relèvent l'imprécision conceptuelle des notions d'*élève à risque*, de *besoins éducatifs particuliers* et de *difficulté d'apprentissage* qui constituent des catégories trop larges et pour lesquelles les définitions ne reposent pas sur des assises théoriques solides. Étant donné l'absence d'un consensus scientifique sur ce que couvrent ces expressions, la charge de déterminer les caractéristiques permettant de supposer qu'un élève est en difficulté revient souvent à l'enseignant (Roiné, 2010) ou à l'orthopédagogue.

Tel que mentionné, l'identification des élèves à risque n'est plus exigée aux fins de la déclaration des effectifs scolaires auprès du MELS. Cependant, une évaluation des besoins et des capacités de ces élèves doit être faite pour déterminer les services à leur offrir et élaborer un plan d'intervention. Le MELS stipule d'ailleurs que « la mise en place de mesures préventives ou de services éducatifs adaptés ne devrait pas être établie sur la base de l'appartenance à une catégorie de difficulté ni à partir des modalités de financement utilisées par le Ministère, mais bien selon cette évaluation des besoins et des capacités de chaque élève » (2007, p.3). Tel que souligné par Boudreau et al. (2009), l'orthopédagogue devrait occuper une place importante dans le processus d'élaboration du plan d'intervention en raison de ses compétences. Selon l'analyse faite par Gaudreau et al. (2008), des énoncés de politiques des commissions scolaires relatives à l'application de la Politique de l'adaptation scolaire, il existe, dans le processus d'identification, trois catégories d'évaluation soient l'évaluation diagnostique, l'évaluation des besoins et des capacités de l'élève et l'évaluation pédagogique.

Toujours selon les énoncés de politiques, l'évaluation diagnostique est faite par des professionnels, par exemple un psychologue, un médecin ou un orthophoniste, et vise à identifier les conditions particulières de l'élève ainsi que son niveau de capacités sur tous les plans. Cependant, ce type d'évaluation s'accorde aux profils des élèves handicapés ou ayant des troubles sévères, et non aux élèves qui ne présentent pas un tel profil, mais dont la réussite est compromise par les évaluations scolaires. L'évaluation des capacités et des besoins de l'élève dresse un portrait de la nature du handicap ou de la difficulté de l'élève pour identifier les besoins particuliers d'une part, au regard du niveau d'intégration possible, en classe ordinaire ou en regroupement spécial et, d'autre part, au regard des services éducatifs, d'interventions préventives ou correctives ou d'appuis à lui fournir. Cette évaluation devrait être menée par un comité ad hoc présidé par la direction d'école et formé de l'enseignant et d'autres intervenants. Il est souligné dans les politiques que les parents jouent un rôle actif dans ce processus. Finalement, l'évaluation pédagogique correspond à l'évaluation des connaissances de l'élève, de ses compétences ou de son progrès académique.

Il semble important que l'orthopédagogue, au centre du processus d'évaluation de l'élève, puisse disposer d'outils pour l'évaluation des connaissances disciplinaires de l'élève pour être en mesure d'orienter les contenus d'interventions. Compte tenu du rôle que peuvent jouer les orthopédagogues sur la promotion de l'égalité des chances, il importe de bien les outiller à l'investigation des connaissances ainsi qu'à l'articulation de l'évaluation et de l'intervention.

1.1.2 Les perspectives théoriques de la didactique des mathématiques sur la problématique des difficultés en mathématiques

Dans cette section, nous comparons différentes postures épistémologiques, adoptées dans l'espace francophone par le champ de la didactique des mathématiques. Nous terminons en précisant la posture épistémologique adoptée dans cette recherche sur la problématique des difficultés scolaires en mathématiques.

La perspective didactique prend en compte le fonctionnement du système didactique pour étudier ce qui freine l'accès aux savoirs de certains élèves. Ainsi, le regard didactique embrasse l'ensemble des interactions didactiques au sein du milieu didactique lequel est constitué de tout ce qui est antagoniste à l'élève : l'enseignant, la tâche, le matériel, etc. (Brousseau, 1998). Adoptant un point de vue centré sur le fonctionnement du savoir en situation, la perspective didactique se situe à l'opposé de celles adoptées par la psychologie cognitive et la neuropsychologie qui, pour leur part, sont centrées sur l'identification des déficits cognitifs de l'élève.

Des phénomènes didactiques spécifiques à l'enseignement dans le contexte de l'adaptation scolaire ont été identifiés. Ils reposent essentiellement sur deux types de contraintes. Le premier type est le contexte particulier des classes d'adaptation scolaire qui se distingue de celui des classes ordinaires notamment par des effectifs réduits et une certaine souplesse accordée aux enseignants à l'égard de l'application du programme de formation. Le second type de contrainte est relatif à l'injonction faite aux enseignants, par l'institution scolaire, d'adapter leurs interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves en difficultés (Giroux, 2014).

Ces contraintes semblent générer des interactions didactiques pouvant altérer la progression dans le savoir des élèves. En effet, un certain nombre d'études ont permis d'identifier des phénomènes spécifiques à l'enseignement dans le contexte de l'adaptation scolaire (Giroux, 2014). Parmi ces phénomènes, notons le surinvestissement de certains savoirs emblématiques de l'école primaire tels la numération et les algorithmes de calcul (Cherel, 2003), l'algorithmisation et le morcellement des savoirs (Cherel, 2005; Giroux et René de Cotret, 2001 dans Giroux, 2014). D'autres phénomènes tels que l'évanouissement du savoir en jeu dû à des échanges très serrés visant le traitement didactique des erreurs produites par les élèves (Favre, 2003; Giroux, 2004; Giroux et René de Cotret, 2004 dans Giroux, 2014) sont aussi observés. L'analyse de ces phénomènes montre comment l'adaptation aux difficultés et besoins des élèves en difficulté ne repose pas sur des considérations didactiques, c'est-à-dire sur la prise en compte de la spécificité du savoir mathématique visé par l'enseignement. Les recherches tendent à montrer que face à des élèves en difficulté se trouvent des enseignants qui sont en difficulté d'enseignement (Lemoyne et Lessard, 2003) parce que les dispositifs didactiques (situation d'enseignement et moyens pour les mettre en œuvre) qu'ils considèrent pertinents se révèlent inefficaces pour produire des savoirs institutionnellement reconnus par leurs élèves.

La didactique des mathématiques de l'éducation spécialisée vise entre autres à étudier les processus d'enseignement et d'apprentissage, qui s'appuient sur la spécificité du savoir, en contexte d'enseignement auprès d'élèves en difficulté. Selon certains chercheurs (Salin, 2007; Vannier, 2010), les situations didactiques développées pour le contexte de l'enseignement régulier ne sont pas directement transposables au contexte d'adaptation scolaire étant donné que les élèves ne disposent pas des mêmes connaissances et modes de raisonnement (Salin, 2007). Selon Salin (2007), les milieux adidactiques des ingénieries développées pour l'enseignement en contexte régulier doivent être modifiés et ces adaptations sont une réponse à certaines difficultés de l'enseignement auprès des élèves des sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA). Les travaux de Salin et Bloch (Salin, 2007) ont ainsi pour objectif d'étudier les conditions nécessaires à l'adaptation de situations adidactiques et de mettre à l'épreuve des situations « intermédiaires » pour favoriser une appropriation progressive des connaissances.

Roiné (2011) s'inscrit dans un nouveau champ d'études, soit l'anthropodidactique (Sarrazy, 2002), qui se caractérise par le croisement de deux champs théoriques, celui de la didactique des mathématiques, centré sur les conditions didactiques favorables à l'apprentissage, et celui de l'anthropologie, centré sur les conditions non didactiques qui affectent les interactions didactiques et donc, la progression du savoir. Suite à une étude en SEGPA, Roiné (2011) soutient, contrairement à Salin (2007), qu'il ne semble pas y avoir de particularités cognitives chez les élèves de l'adaptation scolaire qui les distingueraient des élèves ordinaires (Roiné, 2011). Bien que ce chercheur atteste l'écart de performances entre les deux groupes d'élèves, les analyses qu'il a effectuées tendent à montrer que les élèves des SEGPA ne possèdent pas de profil cognitif particulier. Ses résultats mettent en évidence que, d'une part, des paramètres tels que l'appartenance sociale et l'implantation géographique sont plus déterminants que les résultats scolaires comme variables prédictives du signalement ou de l'orientation des élèves. D'autre part, les erreurs faites par les élèves des SEGPA, bien que plus nombreuses et récurrentes, sont de même nature et ne diffèrent donc pas qualitativement de celles des élèves ordinaires. Donc, selon une posture anthropodidactique, une analyse causale des difficultés d'un élève en mathématiques devrait considérer les conditions didactiques des situations proposées aux élèves, mais également les facteurs sociaux qui participent à l'étiquetage des élèves.

Dans le même ordre d'idées, Roiné (2011) propose le concept de « parcours spécifiques » au lieu de « besoins particuliers » afin de mettre l'accent sur les conditions de scolarisation qui diffèrent entre les élèves en difficulté et les élèves « ordinaires ». Pour sa part, Vannier utilise l'expression « scolairement fragilisés » pour parler des élèves en difficulté. Cette expression, selon nous, peut s'interpréter depuis un point de vue institutionnel qui mettrait en évidence que c'est par et dans le système scolaire que l'élève est fragilisé. Cependant, c'est d'une perspective plutôt internalisée que Vannier précise ce qu'elle entend par cette expression :

> Parler d'élèves « scolairement fragilisés » plutôt que d'élèves « en grande difficulté » ou encore « en échec », c'est pointer une des caractéristiques de ces publics qui à force d'absence d'expérience de réussite en situation scolaire en arrivent à ne plus avoir aucune confiance en leurs potentiels cognitifs et peuvent douter de la bienveillance de l'institution à leur égard. (p. 1, 2010)

Nous appuyant sur les résultats d'études en didactique des mathématiques qui mettent en évidence des phénomènes didactiques spécifiques au contexte de l'adaptation scolaire, nous reconnaissons que l'adaptation scolaire possède des spécificités telles qu'elle est, en elle-même, une institution scolaire particulière. Les élèves se trouvent dans des conditions institutionnelles qui favorisent le développement de conduites mathématiques particulières. Le concept de « parcours spécifiques » proposé par Roiné (2011) s'avère pertinent comme explication des difficultés récurrentes chez les élèves des SEGPA puisqu'il met au premier plan l'expérience institutionnelle scolaire de l'élève. Ainsi, on reconnait à l'institution scolaire sa part de responsabilité dans la production d'élèves en difficulté. Cependant, dans la suite de Salin (2007), nous considérons qu'une fois la responsabilité institutionnelle reconnue, il est de la responsabilité des chercheurs en didactique de soutenir les enseignants aux prises avec des difficultés d'enseignement auprès de certains élèves.

1.2 Description du problème

Au Québec, les orthopédagogues jouent un rôle majeur dans l'évaluation et l'intervention auprès des élèves à risque. Selon notre expérience du milieu scolaire[4], les outils pour repérer les difficultés et développer une intervention orthopédagogique sur la base de travaux didactiques sont rares. Les orthopédagogues disposent néanmoins de quelques outils d'évaluation qui ne sont pas conçus spécifiquement pour le contexte orthopédagogique. À notre connaissance, outre les outils développés par les commissions scolaires, il existe trois instruments principalement utilisés par les orthopédagogues. Key Math (Connoly, 2008) est un outil d'évaluation des notions mathématiques essentielles qui s'adresse aux élèves du préscolaire à la dixième année (l'équivalent du secondaire trois au Québec). En moins d'une heure, il permet d'identifier le profil de l'élève en situant le niveau scolaire de l'élève, l'âge équivalent et le rang centile. Cet outil comporte trois sections : les concepts de base (numération, nombres rationnels, géométrie), les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division, calcul mental) et la mise en application (mesure, temps et argent, estimation, interprétation des données, résolution de problèmes). Le deuxième outil utilisé est le Test de rendement individuel de Wechsler (WIAT) qui vise l'évaluation des compétences académiques de base, soit la lecture, le langage écrit et oral ainsi que les mathématiques (Welchsler, 2005). L'évaluation

[4] Nous entendons par notre expérience scolaire, autant notre expérience auprès des élèves que nos échanges professionnels dans le cadre de formations continues.

complète de ces quatre composantes, qui dépasse largement le domaine des mathématiques, est d'une durée de près d'une heure trente et permettrait d'identifier les troubles d'apprentissage en situant l'élève par rapport à une norme standardisée. La Démarche d'évaluation pour mieux intervenir en mathématiques (DEMMI) est aussi mentionnée par les orthopédagogues, particulièrement des commissions scolaires de l'île de Montréal, comme instrument d'évaluation. Cependant, ayant reçu nous-mêmes la formation DEMMI (Dumas, 2011), nous pouvons affirmer qu'il s'agit davantage d'une démarche d'évaluation que d'un réel instrument d'évaluation validé. En ce sens, il n'est pas de même nature et ne vise pas les mêmes objectifs que le Key Math ou le WIAT. La DEMMI propose une démarche d'évaluation où l'orthopédagogue est appelé à adopter une approche réflexive en analysant les erreurs des élèves pour mieux comprendre leur fonctionnement et ainsi orienter leur intervention rééducative. Ainsi, les rares instruments d'évaluation disponibles sont plus utiles à identifier le niveau scolaire général d'un élève en mathématiques qu'à cerner des connaissances spécifiques de l'élève en situation; ce qui est pourtant nécessaire à la préparation de l'intervention. D'autant plus que ces instruments, souvent de type « papier/crayon », sont de peu d'intérêt pour les orthopédagogues puisque, d'une part, les élèves en difficulté performent peu à ces tests (Lemoyne et Lessard, 2003) et que, d'autre part, les résultats des élèves dans ce contexte permettent difficilement d'effectuer l'articulation de l'évaluation avec l'intervention (Giroux, 2013a).

Considérant essentiel de s'appuyer sur la spécificité du savoir à enseigner pour l'évaluation et l'intervention orthopédagogiques, nous adoptons une approche didactique. Le savoir mathématique ciblé par notre étude est le champ des structures multiplicatives, plus précisément la multiplication et la division de naturels. L'idée même de s'intéresser à un champ conceptuel s'inscrit dans la perspective qu'un concept s'acquière avec d'autres concepts faisant partie d'un système qui s'adresse à un ensemble de situations (Vergnaud, 2013). Ce savoir occupe une part importante des connaissances mathématiques visées aux deuxième et troisième cycles du primaire par le programme de l'école québécoise (MELS, 2009b). Du point de vue didactique, le champ des structures multiplicatives est incontournable puisqu'il entretient des liens étroits avec plusieurs autres savoirs mathématiques qui feront l'objet d'un apprentissage subséquent tel que les fonctions linéaires, les transformations spatiales et les rationnels (Vergnaud, 1983). L'apprentissage des structures multiplicatives est donc un enjeu majeur au primaire.

1.3 Objectif général

Les travaux de recherche en didactique centrés sur la problématique des difficultés scolaires ont principalement porté sur l'identification des phénomènes didactiques propres aux interactions dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Cherel, 2003; Favre, 2003; Giroux, 2004; Giroux et René de Cotret, 2004 dans Giroux, 2014). Les recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques ont permis de mettre en lumière que certains élèves rencontrent des difficultés en mathématiques qui peuvent compromettre leur réussite. Cependant, peu d'études en didactique des mathématiques ont porté sur le processus et les outils pour évaluer les connaissances des élèves présentant de faibles performances en mathématiques. Ce projet de mémoire s'inscrit dans un projet de partenariat entre le groupe de recherche dans le domaine de la didactique des mathématiques en adaptation scolaire de l'UQAM (Groupe d'étude sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en adaptation scolaire - GEMAS) et six commissions scolaires de la région Laval/Laurentides/Lanaudière dirigé par Jacinthe Giroux. Ce projet de partenariat vise à développer des protocoles d'entretiens orthopédagogiques pour l'évaluation des connaissances dans quatre domaines mathématiques, soit les structures additives, la numération positionnelle, les fractions et les structures multiplicatives.

La contribution de la présente étude à ce projet de recherche est double. D'une part, la recension des écrits permet de valider les assises théoriques de l'outil d'évaluation proposé dans le projet. D'autre part, l'analyse didactique fine que l'étude engage sur les conduites des élèves aux différentes tâches proposées permet de procéder à une validation didactique interne des tâches. Ainsi, l'étude débouchera sur des propositions de bonification des tâches sur la base des analyses engagées. L'objectif principal de cette recherche est donc de procéder à une validation interne du protocole d'entretien didactique d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives d'élèves identifiés à risque par leur milieu scolaire.

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Le chapitre II comporte trois sections qui présentent les éléments de notre cadre conceptuel. La première section porte sur les structures multiplicatives et débute par une présentation de la multiplication et de ses propriétés, suivie d'une définition du champ conceptuel des structures multiplicatives selon la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Ensuite, différentes catégorisations de problèmes multiplicatifs sont présentées en portant une attention particulière à celles les plus citées dans le domaine, soit celle de Greer (1992) et celle de Vergnaud (1985). Enfin, les stratégies d'élèves aux différentes structures d'énoncés multiplicatifs, telles que répertoriées dans les études, sont décrites.

La seconde section porte sur l'outil d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives développé par Giroux (2013b) dans le cadre du projet en partenariat. Au coeur de cette section, nous présentons les deux instruments qui composent l'outil, soit le protocole d'entretien et le modèle interprétatif des conduites. Puis, le cadre d'interaction proposé, soit l'entretien d'investigation des connaissances, est présenté depuis les filiations et points de rupture qu'il entretient avec d'autres types d'entretien utilisés en recherche en didactique des mathématiques. Le chapitre se clôt par la formulation des objectifs spécifiques du présent projet de recherche.

2.1 Les structures multiplicatives

Dans le cadre de cette recherche, le champ des structures multiplicatives est restreint aux notions et concepts qui sont objets d'enseignement à l'ordre primaire en excluant le concept de fraction. Nous limitons ainsi notre investigation aux structures multiplicatives dans l'ensemble des naturels, et donc, aux propriétés des opérations de multiplication et de division ainsi qu'aux situations dont la résolution fait appel soit à la multiplication soit à la division de deux naturels.

2.1.1 La multiplication et ses propriétés

En nous basant sur le feuillet du National Council of Teachers of Mathematics, traduit par l'Association mathématique du Québec (1964), la multiplication ainsi que ses propriétés sont définies dans ce qui suit.

La multiplication est une opération binaire effectuée sur deux nombres appelés facteurs (*a, b*) qui donne un troisième nombre appelé produit (*c*).

$$a \times b = c \qquad\qquad 4 \times 5 = 20$$

Selon le National Council of Teachers of Mathématics (1964, p.38), la division peut être décrite comme « la recherche d'un facteur inconnu dans la multiplication, l'autre facteur et le produit étant connu ». Par exemple, dans l'égalité $20 \div 5 = c$, c est le facteur inconnu qui, associé à 5, donne le produit 20. À partir de l'exemple suivant, nous pouvons prouver que l'opération inverse de la multiplication est la division.

$$4 \times 5 = 20 \quad \Rightarrow \quad 20 \div 5 = 4 \qquad 20 \div 4 = 5$$
$$b \times c = a \quad \Rightarrow \quad a \div c = b \qquad a \div b = c$$

Ainsi, si a et b sont des entiers naturels et $b \neq 0$, alors $a \div b$ égale un entier naturel c, si $b \times c = a$.

L'opération de la multiplication possède des propriétés qu'il est nécessaire de définir.

1. La commutativité, lorsque a et b sont facteurs, est définie comme $a \times b = b \times a$. Autrement dit, l'ordre des facteurs ne change pas le produit. Étant donné que la multiplication de deux entiers naturels est un entier naturel, la multiplication de deux naturels est fermée sur l'ensemble des naturels.
2. La propriété de l'associativité réfère au produit d'au moins trois entiers naturels (a, b, c). Par la propriété de l'associativité, on énonce que $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
3. L'élément neutre de la multiplication est 1. Ainsi, lorsque n est un entier naturel, $1 \times n = n$.
4. L'élément absorbant de la multiplication est le nombre 0. Ainsi pour tout nombre naturel n, $n \times 0 = 0$.
5. La multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction. Lorsque a, b et c sont des entiers naturels, nous obtenons ainsi : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Pour la soustraction, la distributivité est définie comme : $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.

2.1.2 Le champ conceptuel des structures multiplicatives

La théorie des champs conceptuels développée par Vergnaud (1990) est une théorie cognitiviste[5]. Elle fournit un cadre d'étude du développement et de l'apprentissage des compétences mathématiques et des processus de conceptualisation chez l'enfant

[5] On pourrait cependant dire, en 2015, que la théorie des champs conceptuels s'inscrit dans une perspective développementale de la cognition et donc, de l'apprentissage des contenus disciplinaires, le terme « cognitiviste » étant de plus en plus associé, depuis un certain nombre d'années, au courant des neuro-sciences.

qui, selon plusieurs études, s'étalent sur plusieurs années (Laborde et Vergnaud, 1994). Cette théorie se fonde sur l'hypothèse qu'on ne peut réduire un concept à sa seule définition lorsqu'on s'intéresse à son apprentissage et son enseignement.

Un champ conceptuel comporte deux entrées, soit celle des situations et celle des concepts et théorèmes. Le champ conceptuel des structures multiplicatives est défini par Laborde et Vergnaud (1994) comme l'ensemble des situations qui se résolvent par la multiplication, la division ou une combinaison de celles-ci et l'ensemble des schèmes nécessaires à la résolution de ces situations. Cette théorie se distingue d'autres, issues notamment de la psychologie cognitive, par le rôle essentiel qu'elle accorde aux concepts mathématiques. Pour Vergnaud (1990), un concept acquiert du sens pour l'élève lorsqu'il s'incarne dans des situations et des problèmes à résoudre. Une situation est ici utilisée avec un sens restreint, comme une tâche ou un problème présenté à l'élève. On compte plusieurs champs conceptuels, dont ceux des structures additives, des structures multiplicatives, de l'algèbre et des relations nombre-espace.

2.1.3 Deux hypothèses concurrentes sur l'origine du raisonnement multiplicatif

Deux principales hypothèses concurrentes sont formulées quant à l'origine du raisonnement multiplicatif chez l'enfant. La première hypothèse s'appuie sur la théorie d'un modèle intuitif développée par Fischbein et al. (1985), et endossée par Greer (1992), suppose que chaque opération arithmétique fondamentale est liée à un modèle intuitif, c'est-à-dire liée à une structure mentale à laquelle correspondent des stratégies de calcul. Selon cette hypothèse, l'addition répétée est le modèle intuitif de la multiplication et est donc à l'origine de la multiplication. Par contre, certains chercheurs suggèrent que le modèle intuitif de la multiplication en tant qu'addition répétée est incomplet (Clark et Kamii, 1996). Ils estiment que les résultats empiriques des études de Fischbein et al. (1985) et ceux d'autres chercheurs peuvent être expliqués plus adéquatement par la théorie piagétienne. S'appuyant sur les travaux de Piaget, la deuxième hypothèse considère que la multiplication n'est pas seulement une façon plus rapide de faire une addition, mais une opération qui requiert une pensée d'un ordre supérieur à ce qu'exige la pensée additive (Clark et Kamii, 1996). Piaget différencie l'addition de la multiplication par le nombre de relations d'inclusion ou d'emboîtement que l'enfant doit gérer simultanément. Notre projet s'appuie sur l'hypothèse selon laquelle il existe une différence conceptuelle entre les structures additives et les structures multiplicatives. Clark et Kamii (1996) s'appuient, en effet, sur les travaux de Piaget pour établir la distinction conceptuelle entre les structures additives et multiplicatives. La figure 2.1 (Clark et Kamii, 1996) illustre les relations d'ordre et d'inclusion hiérarchique impliquées dans la pensée additive et dans la pensée multiplicative à partir de l'exemple de quatre groupements contenant chacun trois éléments.

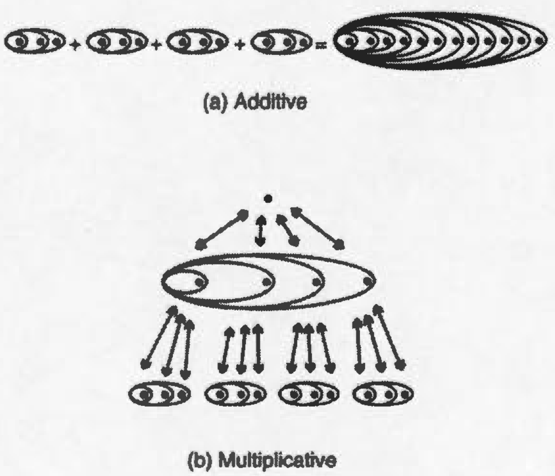


Figure 2.1 Distinction entre la pensée additive et la pensée multiplicative (Clark et Kamii, 1996)

La pensée additive illustrée en 2.1 (a) comprend deux niveaux d'inclusion : celui des parties et celui du tout. Au premier niveau d'inclusion, chaque partie correspond à un nombre. Ce nombre résulte cognitivement de deux relations, la première, l'ordre et la seconde, l'inclusion hiérarchique des éléments (Kamii, 1990, p.33). L'ordre, tel que l'entend Piaget (Kamii, 1990), est la capacité de l'élève à ordonner mentalement les objets de façon à ne pas en oublier ou en compter certains plusieurs fois. L'inclusion hiérarchique correspond à l'action mentale qui permet de mettre en relation les objets en tant qu'éléments d'un groupe. L'enfant doit inclure mentalement « un » dans « deux », « deux » dans « trois » et ainsi de suite. C'est grâce à l'ordre et à l'inclusion hiérarchique que, face à *n* objets, on peut déterminer le nombre total d'objets. Au deuxième niveau d'inclusion, il faut constituer le tout. Le tout résulte de la composition additive des parties, c'est-à-dire l'inclusion hiérarchique des parties dans le tout. Dans la figure 2.1 (a), douze est obtenu par l'addition itérée de la mesure d'un groupement : $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

La pensée multiplicative comporte, en revanche, la considération simultanée de relations sur trois niveaux d'inclusion hiérarchique, ce qui n'est pas le cas pour la pensée additive. À chaque niveau d'abstraction correspond une unité d'un ordre différent. Au niveau inférieur se trouvent les éléments, au niveau intermédiaire, les parties et au niveau supérieur, le tout. Ainsi, au niveau inférieur, l'unité est de l'ordre de l'élément, une unité de un. Ces unités de un sont emboîtées pour former les parties. Au second niveau, l'unité représentée est de l'ordre des parties, et chacune de ces unités, composées de trois unités d'ordre inférieur, est emboîtée pour former le tout. Finalement, le niveau supérieur représente l'unité de l'ordre du tout, donc une unité de douze. Deux types de relations sont à considérer : les relations d'inclusion qui sont représentées horizontalement et les relations représentées par des flèches à double sens entre les trois niveaux. Les flèches pointent dans les deux directions pour illustrer que ces relations doivent se faire simultanément. Ainsi, l'élève doit mentalement considérer trois unités d'ordres différents, c'est-à-dire, le tout (12), les groupements (4) et les éléments contenus dans les groupements (3).

Cette conception des structures multiplicatives est partagée par d'autres chercheurs. Ainsi, pour Vincent (1992), la différence entre les structures additives et les structures multiplicatives réside dans la construction des emboîtements éléments/parties/tout selon la théorie piagétienne.

Le passage des structures additives aux structures additives est rendu nécessaire pour la résolution de problèmes dont la structure fait appel à ce type d'emboîtement. Si certains d'entre eux peuvent être résolus par une addition répétée, d'autres en revanche, requièrent une opération multiplicative. Les différentes structures qui caractérisent ces énoncés font l'objet de la section suivante.

2.1.4 Différentes catégorisations des problèmes multiplicatifs

Dans les années 1980-1990, plusieurs recherches sur la classification des problèmes multiplicatifs ont été menées. Selon Greer (1992), une catégorisation des problèmes est nécessaire pour fournir un cadre de référence théorique utile tant aux enseignants qu'aux chercheurs. Différentes catégorisations des problèmes multiplicatifs ont été proposées principalement par Vergnaud (1985), Nesher (1992), Greer (1992) et Schmidt et Weiser (1995). Les chercheurs qui étudient les problèmes écrits multiplicatifs s'inscrivent, selon Nesher (1992), dans trois perspectives légèrement différentes. La première approche, empruntée notamment par Greer (1992) s'inspire des travaux de Fischbein (1985) sur les modèles implicites. La deuxième approche, principalement représentée par Vergnaud (1985) fait appel à une analyse dimensionnelle ou, autrement dit, repose sur la structure des dimensions et des unités impliquées. La troisième approche, dite textuelle, est adoptée par Nesher (1992). Selon cette troisième approche, la résolution d'un problème doit débuter par une analyse de sa formulation verbale (Nesher, 1992) puisque c'est par l'intermédiaire du texte que l'élève a à découvrir les conditions logiques et les relations sémantiques propres à un énoncé de problème multiplicatif. Une certaine convergence se manifeste cependant entre les différentes catégorisations. Le tableau 2.1 rend compte, à partir de notre analyse, de recoupements entre quatre différentes catégorisations de problèmes multiplicatifs.

Tableau 2.1 : Différentes catégorisations des problèmes multiplicatifs

<table>
<tr><th colspan="2">Vergnaud, 1985</th><th colspan="2">Greer, 1992</th><th colspan="2">Schmidt et Weiser, 1995</th><th>Nesher, 1992</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Isomorphisme de mesures</td><td>Multiplication</td><td rowspan="3">Groupes égaux et taux</td><td>Multiplication</td><td rowspan="3">Former des n multiples de mesures</td><td rowspan="3">Structure partie-tout / proportion</td><td rowspan="4">Règle de correspondance</td></tr>
<tr><td>Division partage</td><td>Division partition</td></tr>
<tr><td>Division regroupement</td><td>Division quotition</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Scalaire[6]</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Changement multiplicatif / itération</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comparaison multiplicative</td><td colspan="2">Comparaison multiplicative</td><td>Comparaison multiplicative</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Produit de mesures</td><td>Produit de mesures</td><td colspan="2">Disposition ou aire rectangulaire</td><td colspan="2" rowspan="2">Produit de structure / structure combinatoire</td><td rowspan="2">Multiplication cartésienne</td></tr>
<tr><td>Produit cartésien</td><td colspan="2">Produit cartésien</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Composition d'opérateurs</td><td></td></tr>
</table>

Des recoupements sont possibles puisque, dans les quatre catégorisations, on retrouve des problèmes qui réfèrent à :

(1) L'addition itérée d'une mesure :

(a) Isomorphismes de mesures dans le modèle Vergnaud,

[6] Selon le modèle de Greer (1992, p.285) les problèmes scalaires du modèle de Vergnaud (1983) font partie de la catégorie d'isomorphismes de mesures et ils correspondent à la catégorie comparaison multiplicative. Selon notre interprétation de la catégorisation de Vergnaud, les problèmes scalaires constituent une catégorie distincte de l'isomorphisme de mesures puisque la relation s'établit dans un seul espace de mesures.

(b) Groupes égaux et taux dans le modèle de Greer
(c) Formation des *n* multiples de mesures chez Schmidt et Weiser
(d) Règle de correspondance dans le modèle de Nesher

(2) L'amplification d'une mesure par un opérateur multiplicatif :
(a) Opérateur scalaire dans le modèle de Vergnaud
(b) Comparaison multiplicative dans les modèles de Greer, Schmidt et Weiser et celui de Nesher

(3) La multiplication de deux mesures distinctes :
(a) Produits de mesure et cartésien dans le modèle de Vergnaud
(b) Disposition rectangulaire et produit cartésien dans le modèle de Greer
(c) Structure combinatoire dans le modèle de Schmidt et Weiser
(d) Multiplication cartésienne chez Nesher

Pour une présentation détaillée des relations sémantiques propres à chacune des structures d'énoncés de problèmes multiplicatifs, nous retenons les modèles de Greer (1992) et Vergnaud (1985), étant les plus utilisés dans le domaine.

2.1.4.1 Le modèle de situations (Greer, 1992)

En s'appuyant sur des modèles développés par ses prédécesseurs, par exemple, Vergnaud (1985) et Nesher (1992), Greer (1992) a élaboré un modèle de situations multiplicatives selon la nature des nombres impliqués (entiers, fractions ou nombres décimaux) et la structure sémantique. Ce modèle propose quatre catégories de situations impliquant la multiplication ou la division de nombres entiers : les groupes égaux, la comparaison multiplicative, la disposition rectangulaire et le produit cartésien. Ce modèle comprend six autres catégories impliquant des nombres décimaux ou des fractions. Elles ne seront pas explicitées dans cette étude qui se limite à l'étude des naturels.

La première catégorie de problèmes, les groupes égaux, peut être interprétée de manière asymétrique ou non commutative. Par exemple, la situation « 5 enfants sont allés au verger. Chaque enfant a cueilli 6 pommes. Combien de pommes, les 5 enfants, ont-ils cueillies en tout? » peut être interprétée de la façon suivante : « 5 enfants ont 6 pommes chacun. Combien de pommes ont-ils ensemble ? » Selon cette conceptualisation, les deux nombres impliqués jouent un rôle différent. Le nombre d'enfants est le multiplicateur qui opère sur le nombre de pommes, le multiplicande (6 pommes/enfant × 5 enfants = 30 pommes). La catégorie de problèmes de groupes égaux se caractérise par la présence de groupes ou de collections équipotents (ici, cinq sous-groupes de six pommes). De cette asymétrie, résulte deux types de division. La première est la division partition lorsque le total est divisé par le nombre de groupes; ce qui correspond à la pratique du partage égal. Une division, où le total est divisé par le nombre d'éléments dans chaque groupe pour identifier le nombre de groupes, est appelée division quotition. Toutefois, une interprétation alternative en terme de taux est possible. Dans notre exemple, cette interprétation alternative serait : « S'il y a 6 pommes par enfant, combien 5 enfants ont-ils de pommes ? » Selon cette conceptualisation, il existe une relation invariante et implicite qui lie le nombre d'enfants et le nombre de pommes.

Un autre type d'application ou structure est la comparaison multiplicative qui est explicitée verbalement par l'expression « fois plus que ». Par exemple, « Samuel a 5 fois plus de crayons que Marc. Marc a 6 crayons. Combien de crayons a Samuel ? »

Toujours selon Greer (1992), lorsque les nombres peuvent être intervertis, la situation est qualifiée de symétrique. Deux classes de situations ont cette qualité : les produits cartésiens et l'aire ou la disposition rectangulaire. Les produits cartésiens correspondent à la multiplication formelle $m \times n$ en terme de nombre de paires distinctes qui peuvent être formées à partir des deux ensembles m et n. En revanche, l'aire rectangulaire regroupe les situations dans lesquelles les mesures des côtés d'un rectangle sont des entiers, par exemple, cinq centimètres et huit centimètres. Étant donné la possibilité d'intervertir les nombres sans changer la conceptualisation, il n'y a qu'un seul type de problèmes de division.

2.1.4.2 Catégorisation des problèmes de structures multiplicatives (Vergnaud, 1985)

À partir du champ conceptuel des structures multiplicatives, Vergnaud (1985) a développé une catégorisation des problèmes de type multiplicatif. Il établit différentes relations multiplicatives selon la présence d'un, deux ou trois espaces de mesures. Le premier type de relations comporte deux espaces de mesures et quatre quantités. Les problèmes qui respectent cette structure font partie de la première catégorie de problèmes, dénommée isomorphismes de mesures. Vergnaud (Ibid.) établit les schémas suivants pour illustrer les différentes classes de problèmes rattachés à la catégorie d'isomorphismes de mesures. Le schéma (a) est générique alors que les schémas (b), (c) et (d) illustrent trois cas de figure différents.

Tableau 2.2 : Représentation des classes de problèmes de type isomorphisme de mesures

M1	M2
x	$f(x)$
x'	$f(x')$

(a)

(livres)	(dollars)
1	5
4	$f(x')$

(b)

(livres)	(dollars)
1	$f(x)$
4	20

(c)

(livres)	(dollars)
1	5
x'	20

(d)

Dans cette catégorie, lorsque l'une de ces quantités est égale à un, trois grandes classes de problèmes se dessinent selon la place qu'occupe la mesure inconnue. Au primaire, ce sont ces types de problèmes qui sont rencontrés.

Le schéma (b) représente la classe de la multiplication, lorsque la quantité recherchée est le total, soit $f(x')$. Par exemple : « Pierre achète 4 livres à 5$ chacun. Quel est le coût total? » Les relations dans cet exemple peuvent être analysées de deux façons, ce qui conduit à effectuer deux calculs relationnels distincts, c'est-à-dire deux mises en relations différentes des données du problème. D'abord, une analyse horizontale met en jeu l'opérateur fonction qui permet de passer d'un espace de mesures à l'autre. Dans cet exemple, l'opérateur fonction prend la forme d'un rapport : 5$/livre. Le calcul relationnel serait donc : 4 livres × 5$/livre = 20$. L'analyse verticale des relations fait intervenir l'opérateur scalaire, un opérateur sans dimension, qui permet le passage d'une ligne à l'autre dans le même espace de mesures. Dans cet exemple, cinq dollars est le prix d'un livre. Ainsi, quatre livres coûtent quatre fois plus cher qu'un livre, ce qui permet de dégager l'opérateur scalaire, « quatre fois plus ».

Le schéma (c) illustre un problème de type division partage. Par exemple : « Pierre a dépensé 20 dollars. Il a acheté 4 livres au même prix. Quel est le prix d'un livre ? » La quantité recherchée est la valeur unitaire, soit $f(1)$. Deux calculs relationnels sont possibles. D'abord, l'analyse horizontale permet une interprétation des relations selon l'opérateur fonction : si quatre livres coûtent vingt dollars, quel est le coût par livre ? On peut chercher l'opérateur fonction qui relie quatre livres à vingt dollars. La multiplication lacunaire, 4 livres × n $/livres = 20 $, ou encore la division partage 20 $ ÷ 4 livres = n $/livre, modélisent ce type de relations. Cette interprétation semble plus difficile que celle qui engage l'opérateur scalaire. En effet, selon l'analyse verticale, on peut dégager l'opérateur scalaire : si quatre livres coutent vingt dollars, un livre coûte quatre fois moins cher, ce qui correspond à 20$ ÷ 4 = 5$. L'opérateur scalaire est « quatre fois moins ».

Le schéma (d) représente la classe de problèmes de type division regroupement lorsque la quantité recherchée est le nombre d'unités, soit x'. Dans l'exemple suivant, « Pierre a dépensé 20 $ à la librairie. Sachant que chaque livre coûte 5$, combien de livres a-t-il achetés ? », il est possible d'engager deux calculs relationnels différents pour interpréter cette relation multiplicative. Le premier consiste à recourir à l'opérateur fonction et le modéliser par l'écriture suivante : 20$ ÷ 5$/livre = 4 livres. Le second calcul relationnel recourt à l'opérateur scalaire : sachant que vingt dollars c'est quatre fois plus que cinq dollars, le nombre de livres achetés est quatre fois plus que un, donc quatre.

Le produit de mesures est la deuxième catégorie de problèmes. Les problèmes relevant de cette structure impliquent une relation entre trois quantités où l'une des mesures, la mesure composée, est le produit des deux autres mesures élémentaires à la fois sur les plans numérique et dimensionnel. Cette catégorie se décline en deux classes de problèmes : la multiplication permet de trouver la mesure composée et la division est employée pour trouver une des deux mesures élémentaires. La composition cartésienne de deux espaces de mesures constitue la structure des problèmes de la deuxième catégorie. Ces problèmes se partagent en deux grandes catégories de contextes, celui du produit de mesures (5cm × 4 cm = 20 cm^2) et celui du produit cartésien (5 jupes × 4 blouses = 20 ensembles). L'énoncé suivant, un produit de mesures, engage comme calcul numérique une multiplication « Quelle est l'aire d'un rectangle mesurant 7 m de long et 4 m de large ? » alors que la division permet de trouver une mesure élémentaire comme dans l'énoncé suivant : « Un tapis couvre une surface de 15 m^2. Le tapis mesure 5 m de long. Quelle est la longueur ? »

La troisième catégorie, de type scalaire, implique une relation multiplicative dans un seul espace de mesures. Dans cette catégorie, il existe deux types de relations, directe et indirecte. Un problème illustre une relation directe lorsque le sens de l'expression concorde avec l'opération à effectuer : « Simone a 8 voitures. Louis-Philippe a 2 fois plus de voitures que Simone. Combien de voitures a Louis-Philippe ? » Par contre, dans l'énoncé suivant : « Jeanne a 30 ans. Elle est 3 fois plus âgée que son frère, Thomas. Quel est l'âge de Thomas ? », le calcul numérique à effectuer est une division alors que l'expression « fois plus », caractéristique de la multiplication, établit la relation entre les données.

Pour résoudre ces différents types d'énoncés multiplicatifs, une gamme de stratégies, qui engagent des connaissances différentes, peut être mise en œuvre par les élèves. Ces stratégies sont présentées dans la section qui suit.

2.1.5 Stratégies de résolution de problèmes multiplicatifs

Avant de décrire les stratégies numériques, il convient, à la suite de Vergnaud (1985), de distinguer, lors de la résolution d'un problème, deux types de calcul : le calcul numérique et le calcul relationnel. Le calcul numérique est l'opération ou la procédure de calcul mise en place par l'élève sur les données numériques. Le calcul relationnel réfère à la mise en relation des données du problème. Cette notion de calcul relationnel est fondamentale et permet d'analyser diverses relations binaires, ternaires et quaternaires telles que réalisées dans la section précédente. Il est difficile de dissocier ces deux types de calculs puisque leur articulation est nécessaire à la résolution d'un problème.

Cette section s'appuie sur un ensemble de recherches pour présenter un répertoire de stratégies pour résoudre des problèmes multiplicatifs. Considérant la nécessaire articulation entre les calculs relationnel et numérique dans la résolution, les stratégies peuvent varier en fonction de la structure du problème (Vergnaud, 1983). Par conséquent, les stratégies sont décrites par classe de problèmes.

2.1.5.1 Isomorphisme de mesures

L'étude de Mulligan et Mitchelmore (1997) porte sur les modèles intuitifs de la multiplication et de la division ainsi que sur la classification des stratégies de calcul rattachées à chacun de ces modèles. Par conséquent, cette étude s'appuie à la fois sur la catégorisation de Greer (1992) et la théorie des modèles intuitifs (Fischbein et al., 1985). À partir de leurs résultats, les auteurs ont clairement identifié trois modèles intuitifs pour la multiplication (comptage direct, addition répétée, opération multiplicative) et quatre pour la division (comptage direct, soustraction répétée, addition répétée, opération multiplicative). Les tableaux 2.3 et 2.4 présentent les modèles intuitifs de la multiplication et de la division ainsi que les douze stratégies de calcul qui ont été identifiées.

Tableau 2.3: Modèles intuitifs de la multiplication (Mulligan et Mitchelmore, 1997)

Comptage direct	Addition répétée	Opération multiplicative
Comptage unitaire	Comptage rythmé Comptage rythmé par intervalles Addition répétée Addition de doubles	Faits multiplicatifs connus Faits multiplicatifs dérivés

Tableau 2.4: Modèles intuitifs de la division (Mulligan et Mitchelmore, 1997)

Comptage direct	Soustraction répétée	Addition répétée	Opération multiplicative
Correspondance un-à-un Comptage unitaire Partage Groupement par essais et erreurs	Comptage rythmé à rebours Comptage rythmé par intervalle à rebours Soustraction répétée Bipartition	Comptage rythmé Comptage rythmé par intervalles Addition répétée Addition de doubles	Faits multiplicatifs connus Faits multiplicatifs dérivés

Dans cette étude, les stratégies des élèves sont examinées à partir des calculs numériques, et non des calculs relationnels et permet de faire ressortir une variété de stratégies susceptibles d'être utilisées dans la résolution d'énoncés de type isomorphisme de mesures.

Sherin et Fuson (2005) se sont aussi intéressés aux stratégies de calcul des élèves pour trouver le produit de deux facteurs à un seul chiffre en contexte de résolution de problèmes de type isomorphisme de mesures et par rappel de faits multiplicatifs. La collecte de données, qui s'est déroulée sur trois ans, a donné lieu à deux cent trente entrevues avec des élèves ainsi qu'à des observations en classe. À partir des données recueillies, les chercheurs proposent une typologie de stratégies en fonction des connaissances de calcul qu'elles engagent.

Cinq grandes catégories de stratégies de calcul se dégagent de la typologie[7]. La première catégorie, *Tout compter*, regroupe plusieurs stratégies qui se caractérisent par la représentation de tous les éléments constituant le tout. La deuxième catégorie, *Calculs additifs*, regroupe les stratégies d'addition répétée et de compositions additives de sous-collections. Ces deux premières catégories de stratégies n'engagent aucune nouvelle connaissance sur le calcul numérique par rapport au dénombrement ou encore aux structures additives. Cependant, la troisième catégorie, qui rassemble les stratégies de comptage par intervalles, requiert la connaissance du rappel des multiples de n : $2n$, $3n$, $4n$, etc. Les stratégies de la quatrième catégorie, « *Pattern-based* »[8], font appel à des connaissances spécifiques telles que les propriétés des éléments neutre et absorbant de la multiplication ($N \times 1 = N$, $N \times 0 = 0$), quelques techniques pour les produits du neuf ainsi que les règles de la multiplication par dix. Une caractéristique de ces stratégies est la rapidité avec laquelle les réponses

---

[7] Un tableau de la typologie des stratégies de calcul présentant un exemple et une description de toutes les stratégies regroupées par catégories est disponible en annexe A.

[8] Nous pourrions traduire par règles qui s'appuient sur des propriétés de la multiplication.

numériques sont données. La quatrième catégorie, *Faits multiplicatifs,* nécessite, comme connaissance, l'association de paires de facteurs avec le produit correspondant. La cinquième catégorie, *Stratégies hybrides*, se caractérise par la combinaison de stratégies précédemment nommées et de connaissances sur le calcul.

La taxonomie des stratégies de calcul développée dans cette étude est une contribution fort appréciable pour notre projet puisqu'elle présente de façon détaillée les stratégies déployées dans des problèmes multiplicatifs dont les facteurs ne comportent qu'un seul chiffre.

2.1.5.2 Disposition rectangulaire

Selon Barmby et al. (2009), la disposition rectangulaire supporte la compréhension et le raisonnement multiplicatif. Ces chercheurs considèrent que la disposition rectangulaire est une représentation cruciale de la multiplication. En accord avec d'autres études (Izsak, 2004; Steinbring, 1997 cités dans Barmby et al., 2009), ils considèrent que la commutativité et la distributivité sont représentées clairement par la disposition rectangulaire. Ils jugent également que cette représentation est utile pour la multiplication de fractions, ce que d'autres représentations, telles que la représentation en sous-collections ou sur une droite numérique, ne permettent pas.

L'étude de Barmby et al. (2009) a été menée auprès d'élèves considérés forts d'une classe de quatrième année et d'une classe de sixième année afin de vérifier comment la disposition rectangulaire peut supporter ou faire obstacle au raisonnement multiplicatif. En équipe de deux, les élèves devaient d'abord illustrer une écriture multiplicative par une disposition rectangulaire et ensuite, trouver le résultat de la multiplication à l'aide d'un programme informatique (figure 2.2). Lors de la première séance, des multiplications étaient générées une à la fois par le programme et les élèves devaient écrire le nombre de colonnes et le nombre de rangées de la représentation rectangulaire avant d'effectuer le calcul multiplicatif. Lors de la seconde séance, toujours à partir d'une multiplication, on demandait à l'élève de déplacer un angle droit pour construire la représentation rectangulaire représentative de la multiplication et ensuite, de calculer le total.

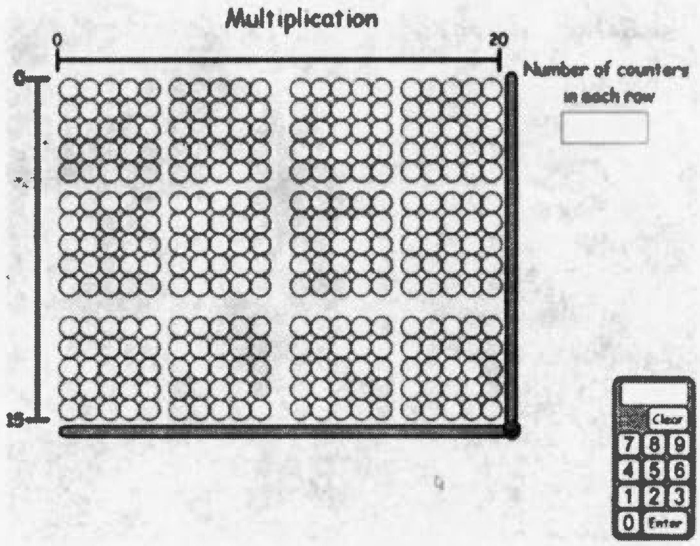


Figure 2.2: Interface de la seconde séance (Barmby et al., 2009)

Les résultats de la recherche ont permis de dégager plusieurs stratégies de calcul dont plusieurs s'appuient sur les groupements de vingt-cinq. Comme on peut voir sur la figure 2.2, la présentation de l'interface suggérait des groupements de vingt-cinq. Les stratégies de comptage et de distributivité sont les deux seules stratégies utilisées par les élèves de quatrième année. Certains élèves de quatrième année utiliseraient la stratégie de comptage de manière abusive, c'est-à-dire lorsque d'autres stratégies plus économiques sont possibles.

Un autre résultat de l'étude de Barmby et al. (2009) est que tous les élèves de sixième année ont utilisé des stratégies de distribution et de réaménagement. Par exemple, un élève doit d'abord recourir à une représentation rectangulaire pour illustrer 6×8 et ensuite, calculer le produit. La stratégie de calcul de distribution engagée à partir de la représentation témoigne de l'utilisation de la distributivité « en acte » pour trouver le total : « 25, et là 5 c'est 30, là 40, 45, 48, c'est 48 ». Le calcul effectué peut être symbolisé par :

$6 \times 8 = (5 \times 8) + (1 \times 8) = (5 \times 8) + 8 = (5 \times 5) + (1 \times 5) + (2 \times 5) + (1 \times 5) + 3.$

Une stratégie de réorganisation consiste à déplacer des sections de la représentation rectangulaire pour compléter des groupements de vingt-cinq (5×5) afin de faciliter le calcul mental. À partir de la multiplication 14×12, un élève représente la multiplication selon une disposition rectangulaire et ensuite, il calcule le produit de 14×12 en s'appuyant sur la représentation. Par exemple, l'extrait suivant illustre une stratégie de réorganisation utilisée par un élève de sixième année pour calculer le produit de 14×12 : « Ça c'est 100, ensuite, je prends ceux-là loin (indique deux ensembles de trois colonnes de cinq qui sont déplacés dans le coin inférieur gauche de la représentation pour compléter deux lignes de cinq) et ça, c'est 50. Ensuite, c'est 10 et 8. Alors, c'est 168. » La réorganisation effectuée peut être symbolisée par : $14 \times 12 = (4 \times 5 \times 5) + 2 \times (3 \times 5 + 2 \times 5) + (2 \times 5) + (2 \times 4) = 100 + 50 + 10 + 8 =$ 168.

Même si les stratégies décrites dans cette recherche s'appuient surtout sur les groupements de vingt-cinq, les résultats généraux permettent d'apprécier le recours à la disposition rectangulaire comme représentation de la multiplication. Il s'avère pertinent de considérer, dans une perspective d'évaluation, si l'élève recourt à la multiplication pour traiter une situation faisant appel à la disposition rectangulaire.

2.1.5.3 Produit scalaire

L'étude de Clark et Kamii (1996) a pour but d'étudier le développement de la pensée additive vers la pensée multiplicative. Des énoncés de problèmes impliquant des opérateurs scalaires directs ont été présentés à trois cent trente-six enfants de la première à la cinquième année dans le cadre d'entretiens individuels. Le contexte du problème est le suivant : on place trois poissons, A, B et C, devant l'enfant et on lui dit que le poisson B mange deux fois ce que le poisson A mange et que le poisson C mange trois fois ce que le poisson A mange. À partir d'une quantité déterminée de jetons que le poisson A mange, on demande à l'enfant de déterminer le nombre de jetons que les poissons B et C mangent. Cette recherche a permis l'identification de quatre niveaux de raisonnement présentés dans le tableau 2.6. Au niveau 1, le raisonnement qualitatif se caractérise par l'acceptation de n'importe quel nombre tant que B et C sont plus grands que A. Au niveau 2, le raisonnement additif consiste à ajouter un ou deux à A pour obtenir B et C. Au niveau 3, l'élève montre un raisonnement additif avec + 2 pour B et + 3 pour C, ainsi il tient compte de la grandeur associée à la relation scalaire et interprète l'expression « fois plus » comme une relation « de plus ». Au niveau 4, avec un raisonnement multiplicatif, l'élève établit correctement les relations scalaires entre les nombres. Le niveau 4a est atteint si l'élève applique d'abord un modèle additif et que, suite à une contre-proposition, il applique un modèle multiplicatif. Le niveau 4b est atteint si l'élève applique immédiatement un modèle multiplicatif pour résoudre le problème. Leurs résultats montrent, en outre, que certains enfants progressent à des niveaux supérieurs au cours de l'entretien. Cette progression a été suscitée par des contre-propositions fournies par l'expérimentateur. Ce résultat montre l'intérêt d'entretiens semi-dirigés en contexte scolaire.

Tableau 2.5 : Les quatre niveaux de développement du raisonnement multiplicatif (Clark et Kamii, 1996)

Niveau 1 (raisonnement qualitatif)	**Niveau 2** Raisonnement additif	**Niveau 3** Raisonnement additif avec + 2 (B) et +3 (C)	**Niveau 4a** Raisonnement multiplicatif sans succès immédiat	**Niveau 4b** raisonnement multiplicatif avec succès
accepte presque tous les nombres si A< B < C	A + 1 ou + 2 = B B +1 ou + 2 = C	A +2 = B A +3 ou B + 3 = C	Réponse: Modèle additif Contre-proposition: modèle multiplicatif	A × 2 = B A × 3 = C

2.1.5.4 Produit cartésien

Peu d'études portent spécifiquement sur les stratégies engagées dans la résolution de problèmes de type combinatoire. Néanmoins, les travaux d'English (1993, 1996) et de Tillema (2013) ont retenu notre attention. Les recherches d'English (1993, 1996) répertorient les stratégies utilisées lors de la résolution de problèmes combinatoires et dégagent, à partir de cette analyse, des étapes développementales. Six problèmes étaient présentés aux élèves. Ces problèmes comportent soit deux dimensions (déterminer les possibilités d'habiller un ours avec différents chandails et pantalons) ou trois dimensions (déterminer les possibilités d'habiller un ours avec différents pantalons, chandails et souliers). Selon English (1993, 1996), la disponibilité du matériel permet plus facilement aux enfants de résoudre le problème puisqu'elle rend possible, par la manipulation du matériel, l'identification de différentes combinaisons, contrairement à la présentation strictement écrite d'un problème.

En groupant les stratégies qu'elle avait identifiées précédemment, English (1996) a dégagé trois étapes de développement pour les problèmes à deux et trois dimensions :

« non planning stage », « transitionnal stage » et « odometer stage ». À la première étape développementale, les stratégies ne sont pas finalisées, les élèves procèdent par essais/erreurs en sélectionnant les items de façon aléatoire pour obtenir le plus de combinaisons possible. L'item sélectionné aléatoirement est retenu s'il permet la création d'une nouvelle combinaison, ce qui est vérifié en comparant la combinaison avec celles déjà existantes. Sinon, il est rejeté. La stratégie pour vérifier le résultat obtenu est déterminante pour la réussite du problème. À la deuxième étape, l'élève recourt à une stratégie de type cyclique ou alternée pour sélectionner les items. Le modèle de résolution est de sélectionner un item de première dimension (item « majeur »), relativement constant, auquel sont appariés des items de la seconde dimension (item « mineur ») et de reprendre ce cycle d'appariement avec d'autres items de la première dimension. Par exemple, l'élève pourrait sélectionner le pantalon 1 qui sera combiné successivement aux différents chandails et refaire ce cycle de combinaisons avec le pantalon 2. Face à un problème impliquant trois dimensions, l'élève associe plus d'items mineurs aux items majeurs. Par contre, il n'épuise pas toutes les combinaisons possibles. Ce n'est qu'à la dernière étape développementale, l'étape odomètre, que l'élève épuisera toutes les combinaisons possibles. L'élève établit alors une procédure systématique. Par exemple, pour un problème à deux dimensions, l'item majeur est conservé et jumelé à un item mineur dans un ordre établi jusqu'à ce que toutes les possibilités impliquant cet item aient été déterminées. Pour un problème à trois dimensions, l'élève est capable de coordonner la sélection répétée des items et d'épuiser chacune des possibilités reliées aux items majeurs et mineurs.

Le répertoire des stratégies proposées par English est limité pour évaluer les structures multiplicatives puisque la pensée multiplicative impliquant l'emboîtement des éléments/parties/tout n'est pas nécessairement engagée dans la mise en œuvre des stratégies. Les stratégies répertoriées consistent à faire la liste de toutes les possibilités. Donc, une mesure composée, l'ensemble de l'ours, n'est pas considérée comme le résultat d'une relation multiplicative puisque c'est par l'addition (ou le dénombrement) de toutes les possibilités que le résultat est obtenu. Les résultats de Tillema (2013) viennent compléter ceux d'English (1993, 1996).

L'objectif de Tillema (2013) est de déterminer si les élèves utilisent les mêmes opérations cognitives lorsqu'ils résolvent des produits cartésiens et des problèmes multiplicatifs de type fonction linéaire. À partir de trois études de cas, Tillema définit trois niveaux de conceptualisation de la multiplication, associés à la résolution de problèmes de type cartésien, codés $MC1_{2d}$, $MC2_{2d}$, $MC3_{2d}$. Au niveau $MC1_{2D}$, l'élève établit une relation multiplicative en acte, autrement dit, c'est dans l'action qu'il contrôle la relation multiplicative sans que cette relation soit abstraite ou identifiable par l'élève. Les relations multiplicatives sont traitées de façon séquentielle en faisant la liste des possibilités pour un premier item, dans un ordre établi et systématique jusqu'à ce que toutes les possibilités impliquant cet item soient listées. Ensuite, il fait la liste pour l'item suivant. Le résultat est obtenu par dénombrement du nombre de combinaisons produites. L'élève ne traite donc que des unités « simples ». Nous pourrions dire que les trois stratégies dégagées dans l'étude d'English (1996) déclinent différentes stratégies qui relèvent de ce premier niveau. Au second niveau, $MC2_{2d}$, il y a intériorisation d'unités d'unités (autrement dit, d'unités de paires) et l'élève peut ainsi opérer directement sur les nombres, par une multiplication pour trouver le nombre de combinaisons possibles. Il n'est donc plus nécessaire de procéder matériellement à l'appariement et dresser la liste des possibilités. Le troisième niveau, $MC3_{2d}$ ne se manifeste que dans les situations qui impliquent plus de deux mesures différentes et impliquent l'intériorisation d'unités de différents ordres (par exemple, des unités d'unités de paires). Cette étude montre que les connaissances multiplicatives engagées dans la résolution de problèmes de fonction linéaire (isomorphisme de mesures) sont utiles pour résoudre des problèmes de produits cartésiens. Cependant, le dernier niveau de conceptualisation de la multiplication, identifié par Tillema (2013) dans la résolution de produits cartésiens, est d'un niveau supérieur aux connaissances nécessaires pour résoudre des problèmes de fonction linéaire.

2.2 Le modèle d'investigation des connaissances pour l'évaluation des connaissances sur les structures multiplicatives

Notre étude s'inscrit dans un projet de recherche mené par Giroux (Giroux et Ste-Marie, 2015a) qui s'articule autour de l'évaluation et l'intervention en orthopédagogie des mathématiques. Conduit en partenariat avec des conseillers pédagogiques et des orthopédagogues de six commissions scolaires de la grande région Laval/Laurentides/Lanaudière, le projet vise la bonification d'outils didactiques d'évaluation et d'intervention pour quatre domaines mathématiques : le nombre et les structures additives, la numération de position décimale, les structures multiplicatives et la notion de fractions. D'une durée minimale de deux ans, ce projet se structure autour de deux phases. La première est centrée sur l'évaluation des connaissances mathématiques d'élèves jugés à risque alors que la seconde porte sur l'intervention orthopédagogique auprès de ces élèves.

Tirés de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), certains concepts agissent comme de véritables leviers dans ce projet. Le premier concept, la dévolution, est le processus par lequel l'enseignant conduit l'élève à accepter la responsabilité d'une situation, à engager une action en fonction des contraintes de la situation. Pour que la dévolution opère, cette situation doit susciter une action chez l'élève, non pas en fonction des attentes de l'enseignant, mais selon les exigences du milieu didactique de la situation. Celle-ci doit fournir à l'élève une rétroaction lisible sur la justesse et la pertinence des actions qu'il a engagées. Le second concept est celui de milieu didactique. Le milieu est tout ce qui agit sur l'élève et ce sur quoi l'élève agit. Dans le cas d'un entretien orthopédagogique, le milieu didactique comporte la tâche mathématique proposée et l'orthopédagogue avec qui il interagit. Il convient de spécifier que le milieu doit être spécifique du savoir enseigné. De ce principe découle le fait que les interventions doivent être spécifiques du contenu en jeu. Le potentiel des interventions comme relances de l'élève devrait être à la mesure de l'adéquation au savoir des interventions. C'est à ce titre que les interventions agissent comme des rétroactions du milieu, au même titre que le milieu dit matériel (consigne, matériel disponible…). Le troisième concept est celui de variable didactique. Une variable didactique est un élément de la situation qui peut être modifié par l'enseignant et qui affecte la hiérarchie des stratégies conduisant à la réussite. C'est le cas des nombres qui, en tant que variable didactique d'une situation, doivent être choisis avec soin et peuvent, selon l'analyse des stratégies engagées par l'élève en cours d'action, être modifiés pour stimuler une stratégie plus adaptée à la situation.

L'approche didactique de ce projet de partenariat (Giroux et Ste-Marie, 2015a) se caractérise également par son appui sur un certain nombre de repères théoriques déclinés par Giroux (2013c). Selon un premier repère théorique, les difficultés des élèves ne sont pas à considérer strictement en tant que dysfonctionnements cognitifs, mais plutôt comme une forme adaptative à la situation. Un second repère rappelle le caractère dynamique des connaissances, c'est-à-dire leur caractère adaptatif au milieu. En conséquence, l'évaluation est davantage considérée comme une démarche d'investigation des connaissances puisqu'elle vise à circonscrire la dynamique connaissances/situations, c'est-à-dire à spécifier sous quelles contraintes didactiques (avec le milieu), les connaissances se manifestent. Finalement, la construction des instruments doit se faire en fonction des caractéristiques du savoir et du niveau scolaire de l'élève.

Le projet expérimente quatre outils différents puisque chaque outil est spécifique du contenu visé. Un outil comporte principalement deux instruments soit un protocole d'entretien et un modèle interprétatif des conduites. Un protocole d'entretien d'investigation des conduites comporte des collections de tâches organisées selon la nature des connaissances qu'elles sollicitent. Les tâches d'une collection partagent quelques variables didactiques communes, mais elles varient en fonction des valeurs attribuées à chacune d'elles. Une tâche se définit comme une question fermée (comme le rappel d'un fait multiplicatif) ou ouverte (un problème multiplicatif) dont la forme est typiquement scolaire ou non. Le modèle interprétatif permet, par l'interprétation des conduites mathématiques de l'élève, de situer le niveau de coordination des connaissances de cet élève face aux différentes tâches sollicitant un même type de connaissance (Giroux et Ste-Marie, 2015a). Ces deux instruments sont donc complémentaires puisque des pistes pour l'interprétation des conduites sont nécessaires pour prévoir l'intervention orthopédagogique. Ainsi, les travaux de Giroux et Ste-Marie (2015a) permettent d'articuler à la fois une perspective didactique pour le pilotage d'entretien d'investigation et une analyse didactique des contenus visés par l'entretien. Le projet de partenariat offre une structure qui permet le développement et l'étude des protocoles, une première analyse *a priori* ainsi que l'expérimentation en contexte scolaire. Cependant, ce projet de mémoire est complémentaire puisqu'il permet une démarche systématique de validation interne du protocole d'entretien sur les structures multiplicatives.

2.2.1 Instruments sur les structures multiplicatives

L'outil d'évaluation des structures multiplicatives a pour fondements théoriques le champ conceptuel des structures multiplicatives limité aux nombres entiers et, par conséquent, s'appuie sur la catégorisation de problèmes multiplicatifs de Vergnaud

(1983). Il s'appuie également sur un certain nombre d'études sur le développement des connaissances sur la multiplication (Barmby et al., 2009; Clark et Kamii, 1996; English, 1999; Mulligan et Mitchelmore, 1997; Sherin et Fuson, 2006; Tillema, 2013; Vincent, 1992). L'outil est composé de deux instruments, soit le protocole d'entretien d'investigation des connaissances (annexe B) et le modèle interprétatif des conduites mathématiques aux tâches du protocole.

2.2.1.1 Protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives

Le protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives comporte vingt-quatre tâches regroupées en trois collections qui sont présentées dans la figure 2.3 (Giroux et Ste-Marie, 2015a)

Codage et interprétation de l'écriture A × B
- Différenciation avec l'écriture additive
- Codage de grandes quantités organisées

Énoncés de problèmes multiplicatifs
- Isomorphisme de mesures
  - Multiplication
  - Division partage
  - Division regroupement
- Produit scalaire
- Produit cartésien

Calcul et propriétés
- Faits multiplicatifs
- Algorithmes de × et de ÷
- Propriétés des opérations

Figure 2.3 : Collections de tâches du protocole d'entretien

La collection de tâches *Codage et interprétation de l'écriture A × B* comporte des tâches qui visent l'évaluation soit du codage d'une quantité, organisée en sous-collections ou selon une disposition rectangulaire, par l'écriture multiplicative ou encore, l'interprétation d'une écriture multiplicative selon un de ces deux modes de représentation. La collection de tâches *Énoncés de problèmes multiplicatifs* comporte les énoncés qui ont une structure de type isomorphisme de mesures qui se résolvent par la multiplication ou la division ainsi que des énoncés de produit scalaire et de produit cartésien. Finalement, la collection de tâches *Calcul et propriétés* comporte les tâches qui sollicitent les connaissances sur le calcul, tel que les algorithmes de multiplication et de division, les critères de divisibilités, les multiples, et les propriétés de la multiplication.

2.2.1.2 Modèle interprétatif des conduites mathématiques

Le modèle interprétatif vise l'interprétation des conduites mathématiques adoptées à chacune des tâches du protocole (Giroux, Fortier-Moreau et Ste-Marie, 2013). Ce modèle est, au moment de la réalisation de cette étude, une version provisoire. Dans le chapitre II, nous avons présenté la différence conceptuelle entre les structures additives et les structures multiplicatives qui réside dans les relations d'emboîtement des éléments/parties/tout (Vincent, 1992). Cette différence constitue un fondement du modèle interprétatif des conduites. Le modèle interprétatif repose ainsi sur l'hypothèse d'une construction des structures multiplicatives marquée par une différenciation progressive des structures additives et multiplicatives (c.f. section 2.1.3 p.22). Il s'appuie principalement sur les études menées sur le champ conceptuel des structures multiplicatives (Anghileri, 1989; Vergnaud, 1985; Vincent, 1992) ainsi que sur les études portant sur les stratégies numériques en résolution d'énoncés de problèmes de proportionnalité simple (multiplication) de Sherin et Fuson (2005).

Ce modèle original propose trois niveaux de structuration des structures multiplicatives, qui se distingue par le degré de conceptualisation des relations entre les éléments, les parties et le tout. De plus, il s'agit, au moment de la réalisation de la présente étude, d'une version préliminaire qui vise à offrir des balises pour interpréter les conduites d'un élève. Il ne s'agit pas de situer l'élève dans un des niveaux, mais d'établir un profil contrasté de ses stratégies, c'est-à-dire un profil qui varie en fonction des exigences et des contraintes qui caractérisent différentes tâches multiplicatives.

Niveau 1 : Non différenciation des structures additives et multiplicatives

Au premier niveau, il n'y a pas de différenciation entre les structures additives et les structures multiplicatives, toutes deux interprétées selon une structure à deux niveaux. Autrement dit, il n'y a pas d'emboîtement éléments/parties/tout. Tous les éléments sont représentés et leur réunion constitue le tout. Ainsi, les éléments ne sont pas emboîtés dans les parties. Les stratégies de dénombrement peuvent relever de ce niveau puisqu'elles témoignent de la nécessité de représenter et compter tous les éléments.

Niveau 2 : Différenciation progressive des structures additives et multiplicatives

Progressivement, l'élève arrive à contrôler l'articulation entre la valeur d'une partie et le nombre de parties.

Niveau 2.1 : Première articulation entre les éléments et parties

Une première articulation entre les éléments et les parties est caractéristique des stratégies de ce sous-niveau. Non seulement les éléments sont représentés, mais également les parties dans lesquelles ils sont regroupés, ce qui met en évidence un premier niveau d'emboîtement éléments/parties. Des conduites de comptage rythmé permettent de compter à la fois les éléments d'une collection, mais aussi, par le rythme du comptage, donc contrôler le nombre de parties à compter (par exemple, pour 2×3 : un, deux, trois..., quatre, cinq, six). Les stratégies associées à ce niveau devraient donc témoigner de la nécessité de représenter les parties ainsi que chacun des éléments qui les constituent.

Niveau 2.2 : Chaque partie est un résumé des éléments qui la constituent

Les stratégies témoignent d'une interprétation des relations multiplicatives comme une addition itérée d'une même grandeur. Les relations multiplicatives sont donc établies selon une structure à trois niveaux d'inclusion hiérarchique. L'emboîtement des éléments dans les parties, premier niveau d'inclusion, est complété. La valeur de chaque partie est représentée et résume les éléments qui la constituent. Toutes les parties doivent être représentées. Des conduites additives, sous forme d'addition répétée ou de comptage par intervalles, témoignent de la nécessité de fixer le nombre de parties, mais sans représenter les éléments qui les constituent. Cependant, ce nombre ne joue pas encore un rôle de multiplicateur.

Niveau 2.3 : Emboîtement éléments/parties/tout par le contrôle du multiplicande et du multiplicateur

Les stratégies témoignent d'une interprétation des relations multiplicatives selon une structure d'inclusion hiérarchique à trois niveaux. L'emboîtement éléments/parties/tout devrait être contrôlé pour les problèmes d'isomorphisme de mesures et pour les problèmes scalaires lorsque la relation est directe. L'écriture multiplicative permettrait de rendre compte de la relation éléments/sous-collections/tout et l'articulation entre le multiplicande et le multiplicateur est contrôlée. Les stratégies devraient témoigner d'un effacement des conduites additives pour faire place à des conduites multiplicatives soit par un rappel des multiples si les faits multiplicatifs ne sont pas connus.

Niveau 3 : La multiplication comme le produit de deux ensembles

Les stratégies mises en œuvre pour les produits cartésiens ou de mesures ou encore scalaires, autant pour les relations directes qu'indirecte, témoigneraient, au troisième niveau, d'une interprétation selon une structure d'inclusion hiérarchique à trois niveaux. Les emboîtements sur les trois niveaux seraient alors considérés simultanément. La multiplication serait interprétée en tant que produit cartésien, c'est-à-dire comme le produit de deux ensembles ou de deux espaces de mesures.

2.2.2 L'entretien didactique d'investigation des connaissances

Giroux (2013a) propose un cadre pour construire, piloter et interpréter l'entretien afin que la démarche d'investigation des connaissances soit cohérente avec l'approche didactique développée. Le schéma général pour l'entretien d'investigation est présenté par une mise en contraste avec d'autres types d'entretiens semi-structurés utilisés en didactique des mathématiques, soit l'entretien clinique (Piaget, 1926) et le « task-based interview » (Goldin, 1997).

Le schéma d'entretien commun aux différents instruments d'investigation des connaissances (Giroux, 2013a,) repose sur trois principes qui mettent en relief les interactions didactiques :

1) Les connaissances ont un caractère dynamique parce qu'elles sont circonstanciées, c'est-à-dire liées aux caractéristiques de la situation; elles permettent d'agir, de transformer, voire de contrôler la situation et en retour, elles se modifient sous l'effet de la transformation de la situation.
2) L'entretien didactique est tissé d'interprétations mathématiques et didactiques injectées par l'enseignant et par l'élève dans la situation. Ainsi, les connaissances sont imbriquées dans ces interprétations.
3) L'entretien didactique n'ouvre pas sur l'état des connaissances, mais sur leur transformation sous l'effet des interactions.

Tel que précisé dans le premier principe, l'entretien didactique d'investigation des connaissances a, au même titre que l'entretien piagétien, pour fondement l'adaptation des connaissances en tant que moteur d'apprentissage. Pour Piaget (1926, p.28), « l'enfant est un être dont l'activité principale est l'adaptation et qui cherche à s'adapter tant à l'adulte qui l'entoure qu'à la nature elle-même ». Ce concept d'adaptation est devenu un fondement même de la Théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998). Cependant, si le projet de la psychologie piagétienne est l'étude de l'évolution des connaissances, celui de la didactique est porté par l'intention d'enseigner et, ce faisant, vise l'apprentissage des mathématiques. Ainsi, les situations didactiques, telles que modélisées dans la TSD, visent à provoquer une adaptation des connaissances ou, autrement dit, à provoquer l'apprentissage. L'adaptation est au cœur de la modélisation des situations didactiques dans la mesure où ces dernières sont déterminées par des variables didactiques dont la modification des valeurs vise à provoquer l'adaptation des stratégies et donc, des connaissances de l'élève. Fondé sur la TSD, l'entretien d'investigation s'appuie également sur le caractère adaptatif et dynamique des connaissances.

La démarche systématique utilisée pour développer les protocoles d'entretien dans le cadre du projet de partenariat s'apparente à celle déployée par Goldin (1997). Pour la conception des « Task-Based Interview » utilisés dans le cadre d'une recherche longitudinale, Goldin (Ibid) a suivi ces étapes : 1) procéder à l'analyse *a priori;* 2) créer et discuter du script en groupe de recherche; 3) tester le script avec différents élèves de différentes écoles et réviser le script; 4) préparer des interviewers.

Élaborer un protocole qui repose sur un contenu déterminé est également une caractéristique de l'entretien clinico-critique de type piagétien. Celui-ci vise à découvrir la connaissance qu'un enfant a d'un certain concept. Ainsi, l'entretien se fait à propos d'un problème soumis à l'enfant et est présenté avec un matériel approprié.

> Cette « méthode critique » [...] consiste toujours à converser librement avec le sujet, au lieu de se borner à des questions fixes et standardisées et elle conserve ainsi tous les avantages d'un entretien adapté à chaque enfant et destiné à lui

> permettre le maximum possible de prise de conscience et de formation de ses propres attitudes mentales; mais elle s'astreint à n'introduire questions et discussion qu'à la suite, ou au cours même, de manipulations portant sur des objets suscitant une action déterminée de la part du sujet. (Piaget, 1956, p. 7)

Pour Piaget tout comme pour Vergnaud (1990) et Goldin (1997) c'est dans l'action que se manifestent les connaissances. D'où l'importance de prévoir un protocole spécifique d'un contenu mathématique.

Cependant, l'importance accordée aux échanges dans l'entretien didactique d'investigation, ou à la conversation libre dans l'entretien clinique, s'oppose en quelque sorte au « task-based interview », plus précisément au concept de reproductibilité qui en est un pilier. Effectivement, cette méthodologie d'entretien repose sur deux critères de scientificité, soit la flexibilité et la reproductibilité. La flexibilité est la possibilité pour l'interviewer d'explorer différentes avenues selon le déroulement de l'entretien. La reproductibilité est la possibilité, pour différents interviewers, de reproduire le même entretien avec différents élèves et ce, dans différents contextes. Pour Goldin (1997), la reproductibilité de l'entretien concerne les tâches et non les interactions. Il est possible de contrôler les tâches alors que les interactions sont uniques et momentanées.

Sans toutefois mettre au premier plan les interactions, Goldin (1997) considère que certains facteurs contextuels d'ordres psychologique, social et mathématique influencent le déroulement de l'entrevue et, par conséquent, limitent les interprétations. Reconnaître l'influence du contexte sur l'entretien conduit à reconnaître la difficulté d'établir préalablement des critères pour interpréter les conduites observées. Selon Goldin (Ibid), il faut tenir compte des facteurs contextuels. Toutefois il ne précise pas comment y arriver.

Le concept de relance est un élément caractéristique de l'entretien didactique d'investigation. En cours d'entretien, l'orthopédagogue présente quelques tâches prévues au protocole et, en fonction des réponses de l'élève, peut procéder à des relances par la modification de variables didactiques (domaine numérique, contexte, matériel). Ces interactions adaptées permettent de bonifier l'investigation des connaissances. Les relances permettent, à l'instar des questions et discussions mentionnées par Piaget, de conserver les avantages d'un entretien adapté à chaque enfant. Une relance est une intervention de l'orthopédagogue qui vise essentiellement l'adaptation des connaissances de l'élève aux caractéristiques de la tâche pour dénouer une impasse ou encore tester un domaine numérique d'application d'une stratégie (Giroux et Ste-Marie, 2015b).

Non loin de la relance, la contre-suggestion est un concept central de l'entretien clinique piagétien qui vise à confronter la pensée d'un enfant en lui proposant une réponse contradictoire, qui aurait pu être donnée par un enfant de son âge (Piaget, 1926). On retrouve ce concept dans l'usage que certains didacticiens font du conflit cognitif ou socio-cognitif en situation d'enseignement (Bednarz et Garnier, 1989). On peut également le rapprocher de la rétroaction offerte à l'élève par le milieu didactique en situation didactique.

Ainsi les travaux de Giroux (2013a, 2013b, 2013c) et Giroux et Ste-Marie (2015a, 2015b) permettent d'articuler à la fois une perspective didactique pour le pilotage d'entretiens d'investigation et une analyse didactique des contenus visés par l'entretien.

2.3 Objectifs spécifiques

Pour l'atteinte de notre objectif général, nous avons retenu le protocole d'entretien d'investigation des connaissances de l'outil d'évaluation orthopédagogique sur les structures multiplicatives développé par Giroux (2013b). Le protocole d'entretien des structures multiplicatives développé a fait l'objet d'une première expérimentation dans le cadre du projet de partenariat avec six commissions scolaires. Par contre, il n'a pas fait l'objet d'une validation interne selon une méthodologie de recherche relevant du champ de la didactique des mathématiques. Ce projet de mémoire est un apport à la recherche de partenariat dans la mesure où il contribue à la validation interne du protocole d'entretien. Au terme du cadre conceptuel de notre étude, des objectifs spécifiques de recherche sont formulés. Une validation interne du protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives vise à :

a. Tenant compte de l'analyse *a priori*, procéder à une analyse *a posteriori* des conduites des élèves pour chacune des tâches.

b. Se basant sur l'analyse *a posteriori*, rendre compte de la fiabilité et de l'utilité didactiques de chacune des tâches au regard d'une démarche d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives.

c. Rendre compte du potentiel didactique des relances réalisées au regard des caractéristiques spécifiques des tâches dans lesquelles elles s'insèrent. Considérant que les connaissances sont contenues dans les stratégies déployées ou encore les résultats fournis par l'élève en fonction des caractéristiques de la tâche qu'il a à résoudre, nous entendons par « potentiel didactique » des relances, leur pertinence à stimuler une stratégie dans la résolution d'une tâche.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, la méthodologie mise en place pour atteindre nos objectifs est décrite. Considérant son objectif général et ses objectifs spécifiques, la recherche est de type exploratoire et sa méthodologie est de nature qualitative. La première section présente une description des tâches du protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives dans laquelle, par collection de tâches, les variables didactiques principales de chaque tâche sont présentées. Dans la deuxième section portant sur la collecte de données, les participants retenus pour l'expérimentation ainsi que le déroulement des entretiens sont présentés. La troisième section permet de détailler la méthode d'analyse des données qui sous-tend le projet de recherche. Finalement, les considérations éthiques sont énoncées.

3.1 Description des tâches du protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives

Le protocole d'entretien d'investigation des connaissances de l'élève de Giroux (2013b) comporte vingt-quatre tâches regroupées en trois collections : 1) codage et interprétation de l'écriture A × B; 2) énoncés de problèmes multiplicatifs; 3) calcul et propriétés de l'opération de multiplication. Le tableau 3.1 résume les éléments constitutifs de chacune des tâches du protocole selon l'ordre de passation : la forme de l'énoncé et de la réponse, les calculs numériques et relationnels sollicités ainsi que les relances prévues y sont décrits. S'ensuit une brève analyse, par collection de tâches, pour chacune des tâches au regard des connaissances et des stratégies qu'elles sollicitent. L'analyse *a priori* détaillée de chacune des tâches est présentée à l'annexe C.

Tableau 3.1 : Brève analyse didactique de chacune des tâches du protocole

	Formes de l'énoncé et de la réponse	**Calculs numériques pertinents**	**Calculs relationnels pertinents**	**Relances**
1	- Consigne orale - Réponses orales	24 faits multiplicatifs : 12 divisions et 12 multiplications	Aucun	Aucune
2	- Consigne orale : « Quelles écritures mathématiques permettent de trouver rapidement combien il y a de ronds ? » - Disposition rectangulaire dessinée - Choix de réponses écrites : addition de 8 (12 fois), 12 × 8, 12 × 7, 8 × 11, 8 + 12 - Réponse orale	Aucun	- 12 colonnes × 8 ronds/colonne - Addition répétée de 8 ronds/colonne - Addition répétée de 12 ronds par colonne - Comptage un à un	- Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : « Peux-tu trouver une autre écriture ? » - Si l'additif prime sur le multiplicatif, proposer la question n 4 - Si la stratégie élémentaire de comptage unitaire est utilisée, il est suggéré d'interrompre l'élève et de procéder à une relance. Par exemple : « Sans trouver le nombre de ronds qu'il y a, peux-tu identifier quelles écritures mathématiques permettraient de le trouver ? »
3	- Consigne orale : « Dans le quadrillage suivant, en partie caché par un nuage, combien de carreaux y a-t-il en tout ? » - Grille dessinée - Réponse orale ou écrite	13 × 15	- 15 lignes verticales × 13 lignes horizontales = 195 carreaux - 13 colonnes × 15 carreaux/colonne - 15 rangées × 13 carreaux / rangée - addition répétée de 15 carreaux/colonne - addition répétée de 13 carreaux /rangée	- Si l'élève n'arrive pas à effectuer le calcul numérique, proposer la calculatrice. - Si l'additif prime sur le multiplicatif, proposer la question 4. - Si l'élève engage la stratégie élémentaire, on doit l'empêcher de compléter la grille. - Si l'élève engage le calcul 13 + 15 et qu'une erreur de signe est soupçonnée, il est possible de questionner l'élève.
4	- Consigne orale : « Ceci est un plancher. On veut mettre un tapis qui fait 9 par 5 carreaux. Combien de carreaux sont recouverts par le tapis ? » - Grille dessinée - Réponse par un dessin	9 × 5	- 9 colonnes × 5 carreaux/colonne - 9 lignes horizontales × 5 lignes verticales = 45 carreaux - Addition répétée de 9 carreaux/colonne - Addition répétée de 5 carreaux/rangée	Cette tâche constitue une relance aux tâches 2 et 3.

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
5	- Consigne orale : « Chacun des sacs contient 7 bonbons. Quelles écritures mathématiques permettent de trouver le nombre de bonbons dans tous les sacs ? » - Dessin de 11 sacs avec le chiffre 7 écrit dessus - Choix de réponses écrites: addition répétée de 7 (11 fois), 11 × 7, 7 × 11, 11 + 7, 7 × 7, 7 + 7 - Réponse orale	Aucun	- 11 sacs × 7 bonbons/sac - Addition répétée de 7 bonbons/sac - 7bonbons/sac × 11 sacs	Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : « Peux-tu trouver une autre écriture ? »
6a	- Énoncé écrit : « On installe des carreaux au-dessus du lavabo. On les achète dans des caisses de 10. L'ouvrier pose sur le mur, 5 rangées avec 6 carreaux à chaque rangée. Il a donc placé __ carreaux sur le mur » - Question orale : « Quelles écritures permettent de trouver le nombre de carreaux sur le mur ? » - Choix de réponses écrites: 10 + 5 + 6, 5 × 6, 5 + 6, 10 + 6, 10 × 5, 6 + 6 + 6 + 6 + 6, 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 - Réponse orale	Aucun	- 5 rangées × 6 carreaux/rangée - Addition répétée de 6 carreaux/rangée - Addition répétée de 5	- Si une seule écriture est choisie, poser la question : « Est-ce que d'autres écritures permettent de trouver le nombre de carreaux installés sur le mur ? » - Si l'élève choisit, 5 + 6, il est possible de vérifier s'il s'agit d'une erreur de signe en lui demandant de trouver le nombre de carreaux qui sont installés sur le mur.
6b	- Énoncé écrit : « Un petit train a 36 places assises. Le petit train a 4 wagons. Chaque wagon a 6 roues. Combien de places assises y a-t-il dans chacun des wagons ? » - Question orale : « Quelle écriture correspond aux places assises dans chacun des wagons ? » - Choix de réponses écrites : 4 × __ = 36, 36 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4, 36 ÷ 4, 4 × 6, 36 - 4 - 6, 36 ÷ 6 - Réponse orale	aucun	- 36 places ÷ 4 wagons = 9 places/wagon - 4 wagons × __ places/wagon = 36 places - Soustraction répétée : 36 places - 4 places (1 place/wagon)	Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : « Peux-tu trouver une autre écriture ? »

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
7	- Énoncé écrit : « Dans une boîte, il y a 24 crayons de couleur. Combien de crayons il y a : a) dans 3 boîtes ? b) dans 6 boîtes ? c) dans 9 boîtes ? d) dans 10 boîtes ? » - Réponse écrite	- 3 × 24 - 6 × 24 - 9 × 24 - 10 × 24	**A)** 3b. × 24 cr./b. ou 24 cr. + 24cr. + 24cr. **B)** 2 × 72 cr/3b. ou 6b. × 24 cr./b. ou 24 cr. + 24cr. + 24cr. + 24 cr. + 24 cr. + 24 cr. **C)** 72 cr. (pour 3 b.) × 3 ou 9b. × 24 cr./b. ou 72 cr. (pour 3 b.) + 144 cr. (pour 6b.) ou 24 cr. + 24 cr. + 24 cr. + 24 cr. + 24cr. + 24cr. + 24 cr. + 24 cr. + 24 cr. **D)** 10b. × 24 cr./b. ou 120 cr. (pour 9b.) + 24 cr. (pour1b.) ou addition itérée de 24 cr. (10 fois)	- Si la division est utilisée pour toutes les questions, par exemple, 24 ÷ 3, poser la question suivante : « Peux-tu formuler un problème semblable ? » - Suite à la résolution de toutes les tâches, si l'élève n'a pas eu recours aux propriétés, l'orthopédagogue peut tenter une relance pour vérifier l'emploi des propriétés.
8	- Énoncé oral : « On partage 104 billes également entre 8 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ? » - Réponse orale ou écrite	104 ÷ 8	- 104 billes ÷ 8 enfants = 13 billes/enfant - 8 enfants × __ billes/enfant = 104 billes	Pour voir l'emploi de la multiplication pour valider une division, proposer la calculatrice pour vérifier la réponse de deux façons différentes.
9	- Énoncé oral : « J'ai 2 550 bonbons à partager entre 25 enfants. On se demande combien chaque enfant va recevoir de bonbons. » - Choix de réponses écrites : 15, 75, 95, 102 et 305 - Réponse orale ou écrite	Distributivité: 25 × 100 + 25 × 2 = 2500 + 50 = 2550; 102 × 25 = 2550 - Estimation: 25 × 100	- 25 enfants × __ bonbons/ enfant = 2 550 bonbons - 2 550 bonbons ÷ 25 enfants = __ bonbons/enfant	Si l'élève procède par estimation qualitative, proposer des nombres plus petits. Par ex. : 250 bonbons et 25 enfants.
10	- Énoncé oral : « Il y a 78 œufs à placer dans des boîtes. On place 6 œufs dans chacune des boîtes. On met 10 boîtes par caisse. Combien de boîtes d'œufs peut-on remplir ? Quels calculs permettent de trouver le résultat ? » - Choix de réponses écrites : addition répétée de 6 (13 fois), 6 × __ = 78, 78 ÷ 6, 78 - 6, 78 + 6, 6 × 78, 6 ×__ = 10, 6 × 10 - Réponse orale	Aucun	- 78 oeufs ÷ 6 oeufs/b. - 6 oeufs/b. × __ boîtes =78 oeufs - 6 oeufs × __ = 78 oeufs - addition répétée de 6 oeufs (13 fois)	Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : « Peux-tu trouver une autre écriture ? »

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
11a	- Énoncé écrit : « 256 gommes sont partagées également entre 8 équipes. Chaque équipe est composée de 4 enfants. » - Question orale : « Est-ce que la division m'apprend quelque chose sur ce problème ? » - Division écrite : $256 \div 8 = 32$ - Réponse orale	$256 \div 8 = 32$	256 gommes ÷ 8 équipes = 32 gommes/équipe **Calculs relationnels reliés:** 4 enfants/équipe × 8 équipes = 32 enfants et 256 gommes ÷ 8 gommes/enfant = 32 enfants	Si l'élève ne peut rien dire, poser les questions suivantes : « Que veut dire 32, ici ? » ou « Quelle question peut-on poser pour qu'un élève fasse cette division ? »
11b	- Énoncé écrit : « Il faut acheter de la pelouse pour couvrir le sol d'un parc. Le parc fait 8 mètres de large et 32 mètres de long. Je dois dire au jardinier combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires. » - Question orale : « Est-ce que cette écriture mathématique peut m'aider à trouver combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires ? » - Division écrite : $256 \div 8 = 32$ - Réponse orale	$256 \div 8 = 32$	- $8\text{ m} \times 32\text{ m} = 256\text{ m}^2$ - $256\text{ m}^2 \div 8\text{ m} = 32\text{ m}$	Aucune
11c	- Énoncé écrit : « Les arbres en Colombie-Britannique vivent très vieux. Par exemple, Marie a 32 ans et elle a vu un arbre qui est 8 fois plus âgé qu'elle et Paul, un arbre qui est 10 fois plus âgé que lui. » - Question orale : « À quoi peut servir la division dans ce problème ? » - Division écrite : $256 \div 8 = 32$ - Réponse orale	$256 \div 8 = 32$	- 32 ans × 8 = 256 ans - 256 ans ÷ 8 = 32 ans	Aucune

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
12	Énoncé oral : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 9 poissons. Dans l'aquarium de Julie, il y en a 3 fois plus. Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Julie ? » - Réponse par un dessin	9 × 3 = 27	9 poissons × 3 = 27 poissons	Aucune
13	Énoncé oral : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 24 poissons. Dessine les poissons de Sophie. Dessine 6 fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre. » - Réponse par un dessin	24 ÷ 6 = 4	24 poissons ÷ 6 = 4 poissons	Aucune
14	Énoncé oral : « Laurent a 12 ans. Il est 4 fois plus âgé que son frère. Quel âge a son frère ? » - Réponse orale ou écrite	12 ÷ 4 = 3	__ ans × 4 = 12 ans	Si l'élève n'a pas la bonne réponse, lui demander de formuler un problème semblable.
15a	Énoncé oral : « Un professeur a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Elle a aussi 2 certificats différents pour la réussite aux tables de multiplication. Combien de certificats avec des motifs différents peut-elle faire pour ses élèves ? » - Réponse orale ou écrite	5 × 3 × 2	5 étampes × 3 couleurs x 2 certificats = 30 modèles différents	Si l'élève ne peut rien faire: - Proposer des images des étampes, des couleurs et des certificats - Proposer le problème en retirant les certificats.
15b	Énoncé oral : « Un artisan bijoutier a créé 13 modèles de colliers et 13 modèles de bagues. Il veut vendre des ensembles composés d'un collier et d'une bague. Combien d'ensembles différents peut-il offrir ? » - Réponse orale ou écrite	13 × 13	13 colliers × 13 bagues = 169 ensembles	Si l'élève ne peut rien faire, proposer des nombres plus petits.

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
16	- Énoncé oral : « Dans un restaurant, on propose des trios. Un trio est repas composé d'une boisson, d'un met principal et d'un dessert. Par exemple, un trio peut être : un lait, un spaghetti et un gâteau. Le restaurateur veut proposer un choix de 12 trios différents. Il propose 3 choix de boissons. Combien de choix de mets principaux et combien de choix de desserts peut-il proposer à ses clients ? » - Dessin d'un trio - Réponse orale ou écrite	- 3 × (4 × 1) ou 3 × (2 × 2) - 12 ÷ 3 = 4 et 1 × 4 ou 2 × 2	3 boissons × __ plats × __ desserts = 12 trios - 12 trios ÷ 3 boissons = 4 (plats × desserts) et 1 plat × 4 desserts ou 2 plats × 2 desserts ou 4 plats × 1 dessert	Aucune
17	- Énoncé écrit : « Marie sait que 8 × 12 = 96. Peux-tu l'aider à trouver des réponses à d'autres multiplications à partir de ce qu'elle connait et donc, sans lui donner la réponse ! » - Questions écrites : a) 12 X 8 b) 7 X 12 c) 8 X 13 d) 16X 12 - réponse orale ou écrite	Contrôle des calculs numériques et relationnels par le recours aux propriétés a) 12 × 8 = 8 × 12 b) Distributivité : 7 × 12 = 8 × 12 – 1 × 12 = 96 - 12 c) Distributivité : 8 × 13 = 8 × (12 + 1) = 8 × 12 + 8 × 1 = 96 + 8 = 104 d) Associativité : (2 × 8) × 12 = 2 × (8 × 12) = 2 × 96 = 192 ou Distributivité : 8 × 12 + 8 × 12 = 16 × 12 = 96 + 96 = 192		Aucune
18	- Énoncé oral : « J'ai préparé des petits sacs de bonbons à offrir à mes invités pour les remercier d'être venus à mon anniversaire. J'ai préparé 14 sacs, et dans chacun, j'ai mis 15 bonbons. Mais, oups, il n'y avait pas 14 amis à ma fête, mais 15 amis!!! Vite! Vite! J'ai refait mes sacs. J'ai donc préparé 15 sacs avec les mêmes bonbons. Peux-tu me dire combien de bonbons il y a maintenant dans chacun de mes sacs ? » - Nombres écrits : 14 sacs et 15 bonbons; 15 sacs et _______ bonbons par sac - Réponse orale	Commutativité : 15 × 14 = 14 × 15	14 sacs × 15 bonbons/sac 15 sacs × 14 bonbons/sac	Aucune

	Formes de l'énoncé et de la réponse	Calculs numériques pertinents	Calculs relationnels pertinents	Relances
19	- Énoncé écrit - Réponse écrite	a) 3× _ = 7 ×_ b) 453 432 × 98 654 = 98 654 ×__ c) 7 × (8 + 3) = __ d) 8 × ___ = 8 × (10 + ___)	Aucun	Aucune
20	- Énoncé oral : « Peux-tu compter par 2 à partir de 150? Peux-tu compter par 5 à partir de 175 ? Peux-tu compter par 10 à partir de 360 ? » - Réponse orale	Comptage par intervalles	Aucun	Aucune
21	- Énoncé oral : « Il y a 24 cartes à jouer. Chaque joueur doit avoir le même nombre de cartes et toutes les cartes doivent être distribuées. Combien de joueurs peuvent jouer et combien chacun aura-t-il de cartes ? Voici un exemple : s'il y a 1 joueur, il aura 24 cartes. » - Réponse écrite	Facteurs de 24 : 24 = 1 × 24 = 2 × 12 = 3 × 8 = 4 × 6 = 6 × 4 = 8 × 3 = 12 × 2 = 24 × 1	24 cartes = *a* joueurs × *b* cartes/joueur	Aucune
22	Énoncé oral : « Au magasin scolaire, il y a 95 crayons à l'encre. Restera-t-il des crayons non emballés a) Si on fait des boîtes de 5 crayons chacune ? b) Si on fait des boîtes de 2 crayons chacune ? c) Si on fait des boîtes de 10 crayons chacune ? » - Réponse orale	Critères de divisibilité par 5, par 2 et par 10 : 95 ÷ 5 95 ÷ 2 95 ÷ 10	Aucun	Aucune
23	- Énoncé écrit - Réponse écrite	Algorithmes de multiplication avec variables didactiques : la présence ou non d'une retenue, la position du chiffre «0» et le rapport entre le nombre de chiffres au multiplicande et au multiplicateur	Aucun	Aucune
24	- Énoncé écrit - Réponse écrite	Algorithmes de division avec variables didactiques: le rapport du nombre de chiffres au quotient et au dividende ainsi que la présence d'un reste et la position d'un zéro au quotient	Aucun	Aucune

L'organisation des tâches en collections est un moyen pour soutenir l'analyse croisée des conduites d'un élève à des tâches qui comportent des variables didactiques communes. Dans ce qui suit, chaque collection de tâches est présentée brièvement, ce qui ne respecte pas nécessairement l'ordre de passation.

La collection de tâches qui porte sur le codage d'une quantité en relation avec l'écriture multiplicative est composée des questions 2, 3, 4 et 5. Les questions 2, 3 et 4 portent sur le codage d'une quantité organisée selon une disposition rectangulaire. À la question 2, quatre-vingt-seize cercles sont dessinés selon une disposition rectangulaire de huit par douze. L'élève est invité à choisir, parmi cinq écritures, celle qui correspond au nombre de cercles. Les écritures sont soit multiplicatives (8×11 et 12×8, 12×7) soit additives ($8 + 12$ et addition itérée de 8, 12 fois). À la question 3, un quadrillage de quinze par treize est recouvert en partie d'une image, ce qui rend le dénombrement de tous les carreaux impossible. L'élève doit trouver le nombre de carreaux du quadrillage. Une calculette peut lui être fournie. La question 4 présente un quadrillage de quinze par quinze sur lequel l'élève doit tracer un rectangle (tapis) qui fait neuf par cinq carreaux. La tâche 5 porte sur le codage d'une collection organisée en sous-collections équipotentes : onze sacs sont dessinés sur lesquels est inscrit le chiffre « 7 ». Chacun des sacs contenant sept bonbons, l'élève doit identifier, parmi six écritures, celles qui permettent de trouver le nombre de bonbons; trois de ces écritures sont multiplicatives (7×7, 7×11 et 11×7) et trois sont additives (addition itérée de 7 (11 fois), $11 + 7$ et $7 + 7$).

La collection de tâches qui porte sur la résolution d'énoncés de problèmes regroupe les questions 6, 7, 8, 9,10, 11, 12, 13, 14, 15 et 16. Les énoncés dont la structure est de type isomorphisme de mesures et qui se résolvent par une multiplication sont présentés aux questions 6a et 7. À la question 6a, un énoncé de problème multiplicatif comportant trois données, dont une est non pertinente, est accompagné de huit écritures mathématiques. Cinq de ces écritures sont additives ($10 + 5 + 6$, $10 + 6$, 5 + 6, addition itérée de 6, addition itérée de 5) et trois sont multiplicatives (5 × 6, 10 × 5, 6 × 10). L'élève doit identifier les écritures qui permettent de trouver le nombre de carreaux posés sur le mur. La question 7, pour sa part, contient une information de départ, le nombre de crayons dans une boîte (vingt-quatre) et quatre questions portant sur le nombre de crayons dans trois, six, neuf et dix boîtes. Le choix des nombres de boîtes vise ici à solliciter l'associativité ou la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour trouver le nombre de crayons dans six et neuf boîtes et la règle de la multiplication par dix, pour trouver le nombre de crayons dans dix boîtes. Parmi ces nombres, trois et six sont des diviseurs de vingt-quatre, ce qui peut suggérer une division.

Les énoncés 6b, 8 et 11a sont des divisions de type partage. À la question 6b, un énoncé de problème multiplicatif comportant trois données, dont une est non pertinente, est accompagné de six écritures. De ces écritures, quatre sont multiplicatives (36 ÷ 6, 4 × 6, 36 ÷ 4, 4 × _ = 36) et deux sont additives (36 – 4 – 6, 36 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4). L'élève doit identifier les écritures qui permettent de trouver le nombre de places assises par wagon. La question 8, quant à elle, propose un contexte de partage égal de cent quatre billes entre huit enfants. Les nombres huit et cent quatre favorisent le recours à des stratégies de calcul autres que la connaissance des faits multiplicatifs pour trouver le nombre de billes par enfant. Pour vérifier le calcul relationnel engagé, la calculette peut être fournie. L'énoncé 11a lève l'exigence de calculer pour que l'élève investisse essentiellement le calcul relationnel. La présentation est non conventionnelle, car une division est présentée à l'élève, soit 256 ÷ 8 = 32, suivi d'un énoncé : « 256 gommes sont partagées également entre 8 équipes. Chaque équipe est composée de 4 enfants ». Il est demandé à l'élève si le calcul permet « d'apprendre quelque chose » à propos de l'énoncé. L'élève doit ainsi considérer la division pour orienter la mise en relation entre les données du problème pour identifier que chaque équipe aura trente-deux gommes ou encore qu'il y a huit gommes par enfant, considérant qu'il y a trente-deux gommes par équipe.

L'énoncé 10 correspond à une division de type regroupement qui comporte trois données dont une est superflue. L'énoncé est présenté oralement. Sachant qu'il y a soixante-dix-huit oeufs, six oeufs par boîte et dix boîtes par caisse, l'élève doit choisir parmi huit écritures celles qui permettent de trouver le nombre de boîtes d'oeufs. De ces écritures, cinq sont multiplicatives ($78 \div 6$, $6 \times 10 = 60$, 6×78, $6 \times \_\_ = 10$, $6 \times \_ = 78$) et deux sont additives ($78 - 6$, $6 + 6$... (13 fois) $= 78$).

Des énoncés multiplicatifs de type scalaire sont présents aux questions 11c, 12, 13 et 14. Les énoncés des questions 11c et 12 impliquent une relation scalaire directe de type « fois plus ». Pour répondre à la question 11c, l'élève doit, sachant que Marie a trente-deux ans, et qu'un arbre est « huit fois plus » âgé qu'elle, déterminer si la division $256 \div 8 = 32$ lui permet de trouver l'âge de l'arbre. Une réponse adéquate sollicite la connaissance de l'équivalence entre le calcul numérique associé à l'énoncé ($32 \times 8 = 256$) et la division proposée. Cet énoncé contient également une donnée non pertinente, la relation scalaire entre l'âge de Paul et un arbre. Aux questions 12 et 13, l'élève doit, à partir du nombre de poissons dans un premier aquarium et d'une relation scalaire directe donnée, trouver le nombre de poissons dans un second aquarium. L'énoncé de la question 12 implique la relation scalaire directe « trois fois plus » appliquée à la donnée neuf poissons alors que l'énoncé 13, implique la relation scalaire « six fois moins » appliquée à la donnée vingt-quatre poissons. L'élève est invité à dessiner le nombre de poissons dans chacun des aquariums. L'énoncé 14 implique la relation indirecte « quatre fois plus » à la donnée douze ans. La solution à chacun de ces énoncés appartient au répertoire des faits mémorisés.

Une structure de produit cartésien caractérise les questions 11b, 15 et 16. L'énoncé 11b, qui est un produit de mesures, vise la reconnaissance, dans la division

$256 \div 8 = 32$, de la relation multiplicative entre les données huit mètres et trente-deux mètres dans la recherche d'une aire de deux cent cinquante-six mètres carrés. La question 15 est composée de deux énoncés de type produit cartésien qui se résolvent par la multiplication. L'énoncé 15a implique une composition cartésienne de trois espaces de mesure : cinq étampes, trois couleurs et deux certificats. Le choix de petits nombres permet le recours à des stratégies de calcul mental. L'énoncé 15b implique la composition cartésienne de deux espaces de mesure dont les valeurs ne favorisent pas la recherche du produit par calcul mental : treize modèles de colliers et treize modèles de bagues. L'énoncé 16, dont la structure est un produit cartésien à trois espaces de mesure, comporte comme données, le nombre total de combinaisons, soit douze trios possibles et un espace de mesure soit trois choix de boissons. À partir de ces données, l'élève doit trouver les deux autres espaces de mesure, soit le nombre de mets principaux possibles et le nombre de desserts possibles.

La collection de tâches sur le calcul et les propriétés de la multiplication est composée des questions 1, 7, 9, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 et 24. La première tâche porte sur le rappel de faits multiplicatifs (division et multiplication). Ces faits sont choisis de manière à couvrir des carrés de nombres (ex. : 5×5, $16 \div 4$), des doubles (ex. : 2×7, $12 \div 6$), des multiples de 10 (ex. : $70 \div 10$, 6×10), l'élément neutre de la multiplication (ex. : $6 \div 1$, 8×1) et l'élément absorbant (ex. : 3×0). D'autres faits multiplicatifs pour lesquels $a < b$, $a\text{-}b = 1$ (ex. : 8×9, $56 \div 8$) et $a > b$, $a\text{-}b = 1$ (ex. : $30 \div 5$, 7×6) complètent cette première tâche. Placée au premier rang de l'entretien, cette tâche permet de savoir si l'élève peut réinvestir les faits multiplicatifs dans la résolution des tâches du protocole.

Les questions 7, 9, 17, 18 et 19 sollicitent les connaissances sur les propriétés de la multiplication. Les questions 7 et 9 appartiennent également à la collection d'énoncés de problèmes multiplicatifs et, par conséquent, elles ont été décrites précédemment. Plus spécifiquement, la question 7 vise le recours à l'associativité et la distributivité de la multiplication sur l'addition. À l'énoncé 9, les données du problème sont : deux mille cinq cent cinquante (2 550) bonbons partagés également entre vingt-cinq enfants. L'élève doit choisir parmi cinq nombres (15, 75, 95, 102 et 305), celui qui, selon lui, correspond au nombre de bonbons que reçoit un enfant. La consigne n'invite pas l'élève à s'engager dans un calcul algorithmique, mais à réfléchir aux relations (deux mille cinq cent cinquante (2 550) est près de 25×100) entre les nombres pour éliminer les nombres peu probables - 15, 75 et 305 - et choisir entre deux nombres qui avoisinent cent, soit 95 et 102. Étant donné que deux mille cinq cent cinquante (2550) est plus grand que deux mille cinq cents (2500), le nombre recherché est plus grand que cent (100), autrement dit, 102. La solution peut ainsi faire appel à des connaissances sur la numération de position s'il y a usage de la règle de la multiplication par cent et de la propriété de la distributivité ($25 \times 100 = 2500$, $25 \times 2 = 50$; $100 + 2 = 102$). L'énoncé de la question 17 contient par écrit la multiplication $8 \times 12 = 96$. S'appuyant sur cette multiplication l'élève doit trouver le produit de quatre multiplications. Les multiplications ont été choisies pour favoriser le recours aux propriétés de la multiplication : 12×8 (commutativité); 7×12 (distributivité); 8×13 (distributivité) et 16×12 (associativité). L'énoncé 18 fait appel à la propriété de la commutativité dans un contexte de résolution de problème. Les données numériques du problème, quinze sacs et quatorze bonbons/sac, sont présentées par écrit (15 sacs et 14 bonbons/sac). Par la commutativité, l'élève doit déterminer le nombre de bonbons par sac étant donné le même nombre de bonbons répartis également entre quatorze sacs. Les nombres quatorze et quinze ne font pas partie du répertoire des faits multiplicatifs ce qui rend peu probable le calcul mental pour trouver le total de bonbons. À la question 19, l'élève doit compléter des égalités multiplicatives lacunaires en faisant appel, pour les items 19a et 19b, à la commutativité et pour les items 19c et 19d, à la distributivité.

L'énoncé 20 porte sur le comptage par intervalles de deux, cinq et dix et vise à vérifier la fluidité du comptage pouvant être sollicité dans les stratégies de calcul. La question 21 porte sur le rappel des diviseurs de vingt-quatre dans un énoncé où il est question de partage. L'élève doit trouver le nombre de joueurs et le nombre de cartes par joueur sachant qu'il dispose de vingt-quatre cartes à partager également entre les joueurs. Le rappel des diviseurs de vingt-quatre est visé par cette tâche. La question 22 vise l'évaluation des connaissances sur les critères de divisibilité par cinq, par deux et par dix. L'élève doit déterminer si, partant de quatre-vingt-quinze crayons, il y aura des crayons non emballés s'ils sont groupés par cinq, par deux ou par dix. Le nombre de crayons, quatre-vingt-quinze, peut être modifié en fonction du niveau scolaire de l'élève. Portant sur l'algorithme de la multiplication, la question 23 propose des choix de multiplications en fonction de différents critères : la présence ou non d'une retenue, la position du chiffre « 0 » et le rapport entre le nombre de chiffres au multiplicande et au multiplicateur. La question 24 porte sur l'algorithme de la division. Le choix des divisions écrites repose sur différents critères : le rapport du nombre de chiffres au quotient et au dividende ainsi que la présence d'un reste et la position d'un « 0 » au quotient.

Le découpage en collections de tâches n'est évidemment pas étanche, plusieurs tâches sollicitent des connaissances qui sont par ailleurs visées par une autre collection de tâches. Les tableaux 3.2 et 3.3 présentent des croisements entre des tâches appartenant à des collections différentes. Le tableau 3.2 croise les tâches qui portent sur le codage et l'écriture A × B aux tâches qui portent sur des énoncés de problèmes multiplicatifs.

Tableau 3.2 : Croisement de la collection de tâches sur le codage et l'écriture A × B et des énoncés de problèmes multiplicatifs

	Isomorphisme de mesures (multiplication)	**Division partage**	**Division regroupement**	**Produit scalaire**	**Produit cartésien**
Organisation en sous-collections	Questions 5 et 6a	Question 6b	Question 10	-	-
Disposition rectangulaire	Question 2	-	-	-	-

Le tableau 3.3 présente quant à lui un croisement des tâches portant sur le calcul et les propriétés de la multiplication avec les tâches qui portent sur la résolution d'énoncés de problèmes multiplicatifs.

Tableau 3.3 : Croisement de la collection calcul et propriétés de l'opération de multiplication et des énoncés de problèmes multiplicatifs

<table>
<tr><th></th><th>Isomorphisme de mesures (multiplication)</th><th>Division partage</th><th>Division regroupement</th><th>Produit scalaire</th><th>Produit cartésien</th></tr>
<tr><td>Commutativité</td><td>Question 18</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Distributivité</td><td>Question 7</td><td>Question 9</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Associativité</td><td>Question 7</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Critères de divisibilité</td><td>-</td><td>-</td><td>Question 22</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Diviseurs d'un nombre</td><td>-</td><td colspan="2">Question 21
Ce problème peut être raisonné soit par une division partage soit par une division regroupement puisque toutes les combinaisons de facteurs de 24 constituent les solutions.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Numération de position</td><td>-</td><td>Question 9</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

3.2 Collecte de données

La procédure mise en œuvre pour effectuer la collecte de données est ici décrite.

3.2.1 Sélection des élèves

Le recrutement des participants se fait par l'entremise d'une conseillère pédagogique de la commission scolaire de Montréal qui participe au projet de partenariat. Un échantillonnage intentionnel (Gaudreau, 2011) de cinq participants est prévu afin de composer un échantillon dont les élèves sont de niveaux académiques différents. Puisque l'enseignement des structures multiplicatives débute à la fin du premier cycle du primaire (deuxième année primaire) et se poursuit jusqu'à la fin de l'école primaire, les participants sont de deuxième et de troisième cycles du primaire. Ce sont également des élèves identifiés à risque par le milieu scolaire. Les élèves à risque sont des élèves dont l'enseignant et l'orthopédagogue signalent des difficultés en mathématiques et plus précisément, des difficultés liées aux structures multiplicatives. Nous visons ainsi à une observation de conduites mathématiques contrastées et représentatives de l'ensemble des stratégies répertoriées dans l'analyse *a priori*.

À cette fin, nous recrutons cinq élèves de niveaux académiques différents, E1, E2, E3, E4 et E5. E1 est un élève qui évolue en classe régulière de niveau deuxième année du deuxième cycle. Il est identifié comme élève à risque par son enseignante et ne reçoit aucun service orthopédagogique cette année. E2 est une élève qui évolue dans une classe régulière de niveau première année du troisième cycle. Elle est référée par son enseignante qui note de grandes difficultés en mathématiques. Cette année, elle bénéficie du service orthopédagogique en français, mais pas en mathématiques. E3 est une élève de classe régulière de niveau deuxième année du troisième cycle. Elle est suivie en orthopédagogie en mathématiques à raison de trois rencontres par semaine. Du fait de ses difficultés en mathématiques, l'enseignante a recommandé le redoublement l'an dernier, mesure qui fut refusée par les parents. E4 et E5 sont deux élèves de troisième cycle, dans une même classe de difficultés graves d'apprentissage (DGA). Selon l'enseignante, E5 est une élève qui éprouve plus de difficultés que E4.

3.2.2 Déroulement de la collecte de données

Les entretiens d'investigation des connaissances sont menés individuellement par la chercheure. Les rencontres sont filmées et toutes les traces écrites de l'expérimentatrice et des élève sont conservées aux fins de l'analyse. Le tableau suivant présente, pour chacun des élèves, le déroulement des entretiens, soit la date, la durée et le lieu de chaque entretien.

Tableau 3.4 : Déroulement des entretiens d'investigation des connaissances

Élève	Lieu	Dates	Durée
E1	École A, local de psychoéducation	13 janvier 2015 27 janvier 2015	47 minutes 53 minutes
E2	École B, local d'orthophonie	26 janvier 2015 26 janvier 2015 2 février 2015	40 minutes 46 minutes 34 minutes
E3	École C, classe de l'élève	13 janvier 2015 20 janvier 2015 27 janvier 2015	40 minutes 38 minutes 32 minutes
E4	École B, local d'orthophonie	12 janvier 2015 19 janvier 2015 26 janvier 2015	45 minutes 45 minutes 50 minutes
E5	École B, local d'orthophonie	12 janvier 2015 19 janvier 2015 26 janvier 2015	46 minutes 46 minutes 30 minutes

De deux à trois rencontres individuelles d'une durée moyenne de quarante-deux minutes chacune sont nécessaires pour couvrir l'ensemble du protocole d'entretien. Les entretiens se sont déroulés en janvier et en février 2015. À cause d'une erreur technique, une partie de l'entretien de E4 se déroulant le 19 janvier n'est pas enregistré.

3.3 Méthode d'analyse de données

Pour atteindre notre objectif et procéder à une validation interne du protocole d'entretien, une analyse *a posteriori*, qui s'appuie donc sur l'analyse *a priori* des conduites, est menée. La méthodologie retenue est inspirée de la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). Cette méthodologie qualitative de recherche comprend différentes étapes qui permettent une analyse fine des situations didactiques. L'ingénierie didactique comprend quatre phases dont nous nous inspirons puisque notre protocole d'entretien est constitué de tâches et non de situations didactiques : 1) analyses préalables; 2) conception et analyse *a priori;* 3) expérimentation; 4) analyse *a posteriori* et évaluation. Sont présentées, dans ce qui suit, chacune des phases et leur opérationnalisation dans notre projet de recherche.

1) Analyses préalables

Cette phase est constituée des analyses du contenu mathématique et d'une analyse des conceptions d'élèves, des difficultés et des obstacles spécifiques au contenu mathématique en jeu. Le chapitre II qui décrit le champ des structures multiplicatives ainsi que les résultats de recherches sur les différentes catégories de conduites mathématiques pour chacune des classes de problèmes multiplicatifs constitue les analyses préalables de cette recherche.

2) Conception et analyse *a priori*

Dans cette phase, les organisations générale et locale de l'ingénierie didactique sont présentées. L'objectif de cette phase est de justifier le choix des variables didactiques et de leurs valeurs. L'analyse *a priori* de chacune des tâches du protocole d'entretien, du point de vue des connaissances qu'elles sollicitent ainsi que l'identification des différentes stratégies possibles, est résumée à la section *3.1 Description des tâches du protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives* et présentée de manière plus détaillée à l'annexe C.

3) Expérimentation

Cette phase constitue la mise à l'essai à proprement parler. L'expérimentation du protocole d'entretien se fait auprès de cinq élèves identifiés à risque ou en difficulté d'apprentissage en mathématiques de deuxième et troisième cycles du primaire.

4) Analyse *a posteriori* et évaluation

Dans l'ingénierie didactique, la validation des hypothèses se fonde sur la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*. Bien que notre étude n'engage pas d'hypothèses de recherche, mais plutôt des objectifs, c'est à cette phase que seront engagées les analyses permettant d'atteindre nos objectifs spécifiques de recherche. L'analyse *a posteriori* des conduites effectives des élèves s'appuiera sur l'analyse *a priori* du protocole que nous avons réalisée. À partir des transcriptions des enregistrements vidéo et des traces écrites des élèves, nous procéderons à l'analyse des stratégies engagées par les cinq élèves à chacune des tâches du protocole d'entretien. Prenant en compte l'analyse *a priori*, les stratégies des cinq élèves à chacune des tâches seront dégagées. Les tâches pour lesquelles la confrontation *a priori/a posteriori* s'avère robuste seront jugées fiables et utiles pour une investigation des connaissances. Nous veillerons également à identifier les tâches qui apportent des informations redondantes au sein d'une même collection de tâches. L'analyse intratâche prenant également en compte les conduites des élèves après une relance nous permettra juger de leur potentiel didactique.

Puisque le protocole constitue un tout au sein duquel les tâches se complètent, les analyses intratâches, seules, s'avèrent insuffisantes pour procéder à une validation interne du protocole. Pour juger de la complémentarité des tâches, nous procéderons à des analyses intertâches pour chacun des élèves, autrement dit, à une analyse croisée des connaissances et stratégies mises en œuvre par chacun des élèves à chacune des tâches issues d'une même collection de tâches.

Il convient de rappeler que cette recherche est exploratoire. Nous ne pouvons en effet que proposer des hypothèses sur la validité de l'outil ou encore soulever des questions précises concernant certaines composantes de l'outil considérant que la recherche ne porte que sur cinq élèves.

3.4 Considération éthique

La présente recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche, intitulé *Évaluation et intervention orthopédagogiques en mathématiques,* et dirigé par la directrice du mémoire, Jacinthe Giroux. Il a reçu l'approbation au plan éthique (no S-703828). En effet, le Comité institutionnel d'éthique de la recherche avec des êtres humains de l'UQAM a examiné le protocole de recherche et l'a jugé conforme aux pratiques habituelles et normes établies pour ce type de recherche.

La participation d'un élève tient au consentement libre et éclairé de ses parents (ou tuteurs) accordé dans la suite d'une lettre d'informations précisant les membres de l'équipe de recherche, les buts poursuivis, le type de tâches et les mesures prises pour conserver l'anonymat des participants dans le traitement et la diffusion des données. Un exemplaire de cette lettre de consentement se trouve en annexe D.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET ANALYSES INTRATÂCHES

Dans ce chapitre, nous présentons les analyses *a posteriori* des conduites des élèves aux tâches du protocole d'entretien d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives, en vue d'atteindre le premier objectif spécifique de notre mémoire. Les analyses de chaque tâche sont présentées selon leur appartenance à une collection de tâches telles que regroupées au chapitre III. Pour chaque tâche, nous procédons à l'analyse intratâche, soit l'analyse des stratégies engagées par cinq élèves, avant et après les relances, et la présentation des interventions effectuées en cours de tâche en précisant si elles agissent comme relance.

4.1 Analyses intratâches des tâches du Codage et de l'interprétation de l'écriture A × B

Dans cette section, les analyses intratâches des tâches 2, 3, 4 et 5 de la collection *Codage et interprétation de l'écriture A × B* sont présentées.

4.1.1 Analyse intratâche de la question 2

L'énoncé de cette tâche comprend une disposition rectangulaire composée de huit rangées de douze cercles ainsi que cinq écritures mathématiques. La consigne est donnée oralement : « Quelles écritures mathématiques permettent de trouver rapidement combien il y a de ronds ? »

a) Analyse des conduites des élèves

Avant la relance, les conduites sont relativement variées témoignant peut-être de la nouveauté de la tâche pour les élèves, mais aussi de la recherche des termes du contrat didactique en début d'entretien, et ce, autant pour l'expérimentatrice que pour les élèves. Le tableau 4.1 présente une compilation des conduites mathématiques des cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.1 : Conduites mathématiques des élèves à la question 2 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Écritures proposées choisies										**Autres conduites**					
	8 + 12		**8 × 11**		**12 × 7**		**12 × 8**		**8 + 8 + 8...**		**Calcul**		**12 + 12...**		**La ×**	
	Av.	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*
Élèves	E2	E2	E1 E5	E5	-	-	-	E1 E3 E4 E5	-	E1 E2 E3 E4 E5	E3	E5	-	E1	E4	E4
Totaux	**1**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**4**	**0**	**5**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Légende :
Av. : Avant la relance Ap. : Après la relance

L'addition 8 + 12 n'est choisie que par E2 qui le justifie ainsi : « Le 8 + 12 parce que moi je suis plus bonne en addition. Puis je peux faire des paquets de dix et trouver combien il y en a. » Contrairement à ce qui est prévu à l'analyse *a priori*, ce n'est pas la confusion entre les écritures multiplicative et additive qui est en cause. En effet, E2 choisit l'addition puisque c'est le calcul qu'elle peut contrôler. De plus, la disposition rectangulaire semble être pour elle l'indice d'une tâche typique de codage de quantités en numération de position décimale. Elle maintient ce choix après la relance.

Deux élèves (E1 et E5) choisissent l'écriture 8 × 11, mais pour des raisons différentes de celles anticipées lors de l'analyse *a priori*. En effet, le choix de cette écriture ne relève pas du dénombrement simple d'un cercle situé au début d'une rangée et d'une colonne (« au coin » de la disposition rectangulaire)[9]. Le mot « rapidement » dans la consigne semble avoir dirigé E5 vers une stratégie d'estimation. Cette interprétation l'éloigne, dans un premier temps, d'une prise en compte des dimensions de la disposition rectangulaire. Elle justifie ainsi son choix : « Parce que 11 × 8, ça donne quatre-vingts pis je pense qu'il y en a quatre-vingts. » Cette élève maintient ce choix après la relance. E1, quant à lui, semble véritablement s'appuyer sur la disposition rectangulaire estimant qu'il y a onze rangées plutôt que douze. La relance lui permet ainsi de dénombrer le nombre de rangées et d'identifier les deux écritures appropriées.

E4, après avoir mentionné qu'il faut effectuer une multiplication, choisit l'écriture 12 × 8. Il valide ce choix en dénombrant les cercles de la première rangée et ceux de la première colonne. Alors qu'aucun élève ne choisit l'addition itérée de huit avant la relance de l'expérimentatrice, elle est choisie par tous les élèves suite à la relance. Précisons que l'écriture additive itérée de douze bien que ne figurant pas parmi les choix est évoquée par E1. Une conduite non prévue à l'analyse *a priori* est adoptée par E3, avant la relance, qui interprète les écritures comme autant de calculs à effectuer pour identifier le nombre total d'objets. E5 s'engagera aussi après la relance dans les calculs.

[9] L'écriture 12 × 7 n'a d'ailleurs pas été choisie puisqu'aucun élève n'a fait cette erreur de dénombrement.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Suite aux réponses initiales des élèves, l'expérimentatrice procède à trois types de relances. Le premier type consiste à demander à l'élève de trouver quelle écriture, parmi celles proposées, permet de trouver le nombre de ronds sans devoir compter les objets un à un. Cette relance était prévue pour les conduites spontanées de dénombrement. Elle est cependant utilisée auprès de E3 qui s'engage spontanément dans des calculs. Cette relance a pour effet la prise en compte de la disposition rectangulaire par cette élève.

Le second type de relances consiste à demander à l'élève s'il y a d'autres écritures qui représentent le dessin. Au regard des conduites des élèves, on peut avancer l'hypothèse que cette relance est pertinente seulement si la première écriture choisie est une addition itérée. Dans ce cas, elle peut favoriser chez l'élève l'identification d'une écriture multiplicative appropriée, soit 12×8. Par contre, cette relance peut également provoquer des conduites erronées lorsqu'elle est proposée à un élève qui choisit 12×8. C'est le cas, notamment de E4 qui, lorsqu'incité à identifier d'autres écritures, pointe alors 8×11. Une telle conduite s'interprète comme un effet de l'interaction serrée entre l'expérimentatrice et l'élève.

Pour contrer l'adoption de conduites erronées provoquée par la seconde relance, un troisième type de relances est effectué. Lorsqu'un élève choisit une écriture adéquate et une écriture erronée, l'expérimentatrice suggère à l'élève de comparer les résultats des écritures mathématiques choisies pour déterminer laquelle est adéquate. Cette relance suggère de s'appuyer sur le résultat des écritures au lieu de considérer les dimensions du rectangle. En ce sens, elle est peu appropriée et ne fait que prolonger une interaction centrée sur la demande de l'expérimentatrice plutôt que sur la tâche elle-même.

On peut conclure que cette tâche fournit des informations sur la liaison entre l'addition itérée, l'écriture multiplicative et la disposition rectangulaire. Elle nous informe que E4 et E1 associent d'emblée la disposition rectangulaire à l'écriture multiplicative et que E3 et E5 lient, lorsqu'invités, l'écriture itérée et l'écriture multiplicative à une disposition rectangulaire d'objets. Seul E2 n'entre pas dans une relation multiplicative au contact de cette tâche.

4.1.2 Analyse intratâche de la question 3

Pour cette tâche, on présente une grille de quinze rangées par treize colonnes, en partie cachée par un nuage. L'expérimentatrice pose la question suivante : « Dans le quadrillage suivant, en partie caché par un nuage, combien de carreaux y a-t-il en tout ? »

a) Analyse des conduites des élèves

Le tableau 4.2 présente les conduites mathématiques adoptées par chacun des cinq élèves, avant et après toute relance de l'expérimentatrice. Seule E2 met en œuvre une stratégie de dénombrement unitaire pour trouver la quantité totale de carreaux. Notons que, tel que prévu à l'analyse *a priori*, la présence du nuage offre à E2 une rétroaction utile pour invalider la stratégie de dénombrement. Par la suite, une interaction se développe entre l'expérimentatrice et E2, ce qui permet à cette dernière de faire l'apprentissage que l'addition itérée est une écriture qui convient pour décrire le nombre de carreaux d'une grille.

Tableau 4.2 Conduites mathématiques des élèves à la question 3 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Dénombrement		Écriture additive itérée de 13 ou 15		Écriture multiplicative erronée 15 × 12		Écriture multiplicative erronée 13 × 13		Écriture multiplicative 15 × 13 13 × 15	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E2	-	-	E2	E1	E1	E3	-	E4 E5	E3 E4 E5
Totaux	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**2**	**3**

Ainsi, l'écriture multiplicative, dès l'amorce de la tâche, est utilisée par E1, E3, E4 et E5. E1 fait cependant l'erreur de ne dénombrer qu'une seule fois le carreau appartenant à la fois à la première rangée et à la première colonne, ce qui le conduit à générer l'écriture 15 × 12. E3 ne dénombre que la première rangée et, jugeant que le rectangle est plutôt carré, propose d'abord l'écriture 13 × 13. La relance lui permettra de corriger son erreur. Comme il est précisé dans l'analyse *a priori*, ces réponses témoignent d'un calcul relationnel de type isomorphisme de mesures pour décrire une disposition rectangulaire.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à deux types de relances pour favoriser l'adaptation des stratégies des élèves à la tâche. Le premier type est prévu par l'analyse *a priori* et consiste à proposer la calculatrice à l'élève s'il n'est pas en mesure d'effectuer le calcul numérique qu'il a identifié. Ce fut le cas de E1 pour qui la relance a permis de mener à terme son calcul. Pour E4, ce fut l'occasion de corriger quelques erreurs effectuées dans l'application de l'algorithme de multiplication. Le second type de relances consiste à demander à l'élève de valider les dimensions qu'il a déterminées par estimation. Cette relance a permis à E2 et E3 de contrôler les grandeurs de chacune des dimensions de la grille. Enfin, une relance prévue à l'analyse *a priori*, pour rétroagir au calcul 13 + 15, n'a évidemment pas été utile.

L'analyse des conduites des élèves révèle que, pour tous les élèves sauf E2, l'écriture multiplicative est associée à une grille rectangulaire. On peut noter une progression de E2 au regard des connaissances investies à la question 2. La question 3 lui a en effet donné l'occasion d'associer l'addition itérée à une disposition rectangulaire.

4.1.3 Analyse intratâche de la question 4

Une seule élève ayant répondu à la question, l'analyse intratâche de la question 4 est impossible à réaliser.

4.1.4 Analyse intratâche de la question 5

L'énoncé se présente sous forme d'un dessin de onze sacs sur lesquels le nombre sept (7) est écrit. La consigne est formulée à l'oral : « Chacun des sacs contient 7 bonbons. Quelles écritures mathématiques représentent le dessin ? » L'énoncé est accompagné de six écritures mathématiques. Cette tâche est un problème de multiplication de la catégorie des isomorphismes de mesures et vise l'évaluation du codage par l'écriture multiplicative de l'itération d'une quantité. La consigne tel que prévu au protocole n'est pas appropriée, car elle suggère une interprétation des relations entre les grandeurs. La consigne formulée par l'expérimentatrice est plus appropriée : « Quelles écritures permettent de trouver le nombre de bonbons dans tous les sacs ? »

a) Analyse des conduites des élèves

Le tableau 4.3 présente les écritures choisies par cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.3 : Écritures choisies à la question 5 avant et après toute relance

	11 + 7		**7 × 7**		**7 + 7**		**Addition itérée de 7**		**11 × 7**		**7 × 11**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	-	-	-	-	-	-	E1 E3 E5	E1 E2 E3 E4 E5	E1 E2 E3 E4	E1 E2 E3 E4	E1 E3	E1 E2 E3 E4
Totaux	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3**	**5**	**4**	**4**	**2**	**4**

Il faut spécifier que E1 et E3 recherchent plusieurs écritures alors que les autres élèves, par effet de contrat sans doute, se limitent à identifier une seule écriture et en recherchent d'autres lorsqu'incités à le faire par l'expérimentatrice. Ainsi, la multiplication est la première écriture choisie par quatre élèves et deux d'entre eux identifient comme équivalente l'écriture 7 × 11. Seule E5 identifie l'addition itérée et non la multiplication. Tous les autres élèves choisissent également après la relance l'addition itérée.

Des interactions se dégage un élément important sur l'interprétation des écritures par les élèves. Alors que E3 et E5 analysent et justifient leur choix d'écritures sur la base du résultat associé au calcul, E1, E2 et E4 témoignent du calcul relationnel et donc, de la relation entre l'écriture et la représentation comme en témoigne le commentaire de E4 : « Il y a onze sacs puis il y a sept bonbons dans chaque sac. » Il est clair que les arguments de ces derniers élèves sont plus avancés que ceux des premiers. Cependant, il est aussi possible que, sous l'effet des interactions, la recherche de justifications conduise vers le calcul. Cela nous parait être le cas pour E3 qui passe en revue toutes les écritures pour justifier le choix ou le rejet de chaque écriture :

> 7 × 7, non… parce que moi j'avais fait 7 × 11 parce que j'avais compté onze sacs et dans chaque sac, il y a sept bonbons, mais 7 × 7, ça donne quarante-neuf… pas vraiment. 7 + 7, c'est quatorze. Puis 11 + 7, ça donne dix-huit.

En revanche, la conduite de E5 semble relever d'une centration sur les écritures en tant que calcul numérique à réaliser au détriment du calcul relationnel. En effet, elle ne décrit jamais la relation entre le nombre de bonbons/sac et le nombre de sacs et rejette, par exemple, l'écriture 7 × 7 puisque c'est « égal à quarante-neuf ».

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Suite aux conduites initiales, l'expérimentatrice utilise trois types de relances. Le premier type consiste à demander une justification du choix d'écritures. Pour E2 et E4, cette relance a l'effet escompté, soit la formulation du calcul relationnel. Par contre pour E5, cette relance entraîne un calcul fastidieux et erroné du résultat de l'addition répétée. Ce résultat sert ensuite de point de comparaison pour juger des autres écritures. Pour favoriser l'adoption d'une stratégie qui s'appuie sur une mise en relation des données du problème plutôt que sur la comparaison des résultats des écritures, un second type de relances, effectué auprès de E5, consiste à vérifier si l'addition itérée est adéquate, sans calculer le résultat. Cette relance permet à E5 de justifier son choix en s'appuyant sur un calcul relationnel de type isomorphisme de mesures : « Parce qu'ici, je l'ai compté. Il y en a onze (E5 montre les sacs) et il y en a onze (E5 montre les « 7 » de l'addition itérée). » Le troisième type de relances consiste à demander s'il y a d'autres écritures mathématiques afin de vérifier la reconnaissance d'écritures équivalentes. Cette relance effectuée auprès de E5 ne lui permet pas de maintenir une stratégie qui s'appuie sur le calcul relationnel puisqu'elle revient à sa stratégie initiale, soit comparer le résultat de chacune des écritures au résultat erroné de l'addition itérée, soixante-dix-neuf. Elle n'a donc trouvé aucune écriture équivalente.

On peut conclure que cette tâche fournit des informations sur la liaison entre l'addition itérée, l'écriture multiplicative et une représentation en sous-collections équipotentes. Cette tâche nous informe que E1 et E3 associent d'emblée une représentation en sous-collections équipotentes à l'écriture multiplicative ainsi qu'à l'addition itérée. E2 et E4 associent également la représentation à l'écriture multiplicative et lorsqu'invités, ils identifient également, par commutativité, une autre multiplication ainsi que l'addition itérée. E1, E2 et E4 présentent des arguments appuyés sur un calcul relationnel juste alors que E3 justifie son choix sur la base du résultat de l'écriture. Seule E5 n'entre pas dans une relation multiplicative et, considérant les écritures comme des calculs à réaliser, choisit seulement l'addition itérée.

4.2 Analyses intratâches des tâches d'énoncés de problèmes multiplicatifs

Les analyses intratâches des tâches de la collection *Énoncés de problèmes multiplicatifs* sont présentées. Nous présentons d'abord les analyses des tâches dont la structure est de type isomorphisme de mesures, soit les tâches 6a, 7, 6b, 8, 11a et 10. Puis les analyses des tâches 11c, 12, 13 et 14 qui sont de type scalaire sont présentées. Finalement, nous présentons les analyses intratâches qui comportent un énoncé de type produit cartésien, soit les tâches 15a, 15b et 16.

4.2.1 Analyse intratâche de la question 6a

La tâche 6a est un énoncé de problème de type isomorphisme de mesures qui se résout par la multiplication. Il est présenté sous forme écrite : « On installe des carreaux au-dessus du lavabo. On les achète dans des caisses de 10. L'ouvrier pose sur le mur, 5 rangées avec 6 carreaux à chaque rangée. Il a donc placé __ carreaux sur le mur. » Huit écritures mathématiques accompagnent l'énoncé. À l'oral, l'expérimentatrice pose la question suivante : « Quelles écritures permettent de trouver le nombre de carreaux sur le mur ? »

a) Analyse des conduites des élèves

Le tableau 4.4 présente les conduites mathématiques des cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.4 : Conduites mathématiques des élèves à la question 6a avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	10 + 5 + 6		**10 + 6**		**10 × 5**		**6 × 10**		**5 + 6**		**5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5**		**6 + 6 + 6 + 6 + 6**		**5 × 6**		**Dessin**	
	Av.	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*
Élèves	E1 E2	E2	E1	-	-	-	E1	-	E1	-	E3 E4	E3 E4 E5	E1 E3 E4	E1 E3 E4 E5	E1 E3 E4	E1 E3 E4 E5	E5	E1 E5
Totaux	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**3**	**3**	**4**	**3**	**4**	**1**	**2**

Légende :
Av. : Avant la relance *Ap. : Après la relance*

L'écriture 10 + 5 + 6, qui contient les trois données numériques de l'énoncé et dont l'une est superflue, est choisie par E1 et E2. E1 choisit, en plus de cette addition, toutes les écritures qui contiennent le nombre 6, soit 10 + 6, 6 × 10, 5 + 6, 6 + 6 + 6 + 6 + 6 et 5 × 6. Le calcul relationnel adéquat n'est donc pas mis en œuvre par ces deux élèves. Sans véritable relance, E2 maintient ce choix. Par contre, l'interaction sera beaucoup plus soutenue auprès de E1. Cet investissement différencié auprès de E1 et de E2 tient sans doute au fait que E1, contrairement à E2, a répondu de manière satisfaisante aux questions précédentes. L'expérimentatrice guidera E1 à interpréter l'énoncé, notamment, en lui précisant ce qu'est une caisse et l'invitant à dessiner l'énoncé. E1 choisira finalement 5 × 6 ainsi que l'addition itérée de six. L'écriture multiplicative 5 × 6 ainsi que les additions itérées de cinq et de six sont choisies par E3 et E4 qui contrôlent, quant à eux, le calcul relationnel de l'énoncé. À noter que les élèves choisissent d'abord l'écriture multiplicative qui témoigne de cette mise en relation : 5 rangées × 6 carreaux/rangée. Les écritures additives itérées ne pas sont liées par calcul relationnel, mais plutôt par calcul numérique. Toutes deux sont associées à la multiplication 5 × 6.

E5, tout comme à la tâche précédente, s'engage dans la résolution de l'énoncé sans considérer les écritures proposées. Comme le montre la figure 4.1, ses traces témoignent d'une bonne mise en relation entre les données du problème : cinq groupements de six objets. Elle procède par la suite à une addition répétée qui comporte cependant une erreur de calcul (18 + 12 = 20). Elle arrivera par contre, avec l'aide de l'expérimentatrice, à identifier les trois écritures adéquates.

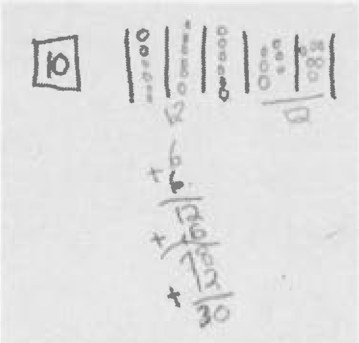


Figure 4.1 : Traces de E5 à la question 6a

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

La première intervention auprès de E1 n'est pas une relance, mais plutôt une aide directe à l'interprétation de l'énoncé. L'énoncé est d'abord interprété par E1 à l'effet qu'il y aurait dix caisses et que, dans chacune d'elles, il y aurait cinq rangées de six carreaux. L'énoncé est ensuite relu, quelques informations sont précisées et il est à nouveau demandé à E1 de dessiner. Cette intervention permet à l'élève d'établir une représentation adéquate des relations en jeu et, par la suite, de choisir les écritures appropriées. L'analyse *a priori* prévoit une relance si un élève choisit 5 + 6. Celle-ci consiste à lui demander de trouver le nombre de carreaux. Par contre, en cours d'entretien avec E1, l'expérimentatrice procède plutôt à la confrontation des résultats des calculs 5×6 et $5 + 6$ pour invalider le choix de 5 + 6.

Le rappel de la consigne est utilisé comme relance auprès de E5 qui débute la tâche en résolvant l'énoncé. E5 calcule le résultat de chacune des écritures proposées et les compare à son résultat, soit vingt. Comme son résultat est erroné, cette relance ne lui permet pas de trouver des écritures équivalentes. Pour permettre à E5 de trouver des écritures appropriées, l'expérimentatrice corrige le calcul numérique effectué. Puisque son choix d'écritures s'appuie sur la comparaison des résultats des calculs, et non sur la considération des écritures comme expressions des calculs relationnels, cette intervention n'est pas didactiquement pertinente.

Cette tâche nous informe du calcul relationnel établi dans le cas d'un énoncé de type isomorphisme de mesures suggérant une représentation selon une disposition rectangulaire. La présence de choix de réponses peut aussi nous informer de la reconnaissance de l'équivalence entre l'écriture multiplicative et l'addition itérée. L'analyse des conduites des élèves révèle que la donnée superflue peut rendre plus difficile la mise en œuvre d'un calcul relationnel et, en ce sens, elle pose problème pour l'interprétation des conduites. E1 et E2 ne mettent pas en œuvre le calcul relationnel adéquat. Guidé par l'expérimentatrice, E1 interprète l'énoncé correctement et choisit les écritures équivalentes parmi les choix proposés. E3 et E4 contrôlent le calcul relationnel et choisissent l'écriture multiplicative ainsi que les additions itérées équivalentes. Pour sa part, E5 résout l'énoncé par une addition itérée et, grâce aux échanges avec l'expérimentatrice, identifie les écritures équivalentes. Cependant, ces choix résultent d'une comparaison des résultats. Donc, on ne peut conclure que E5 associe l'écriture multiplicative à l'addition itérée.

4.2.2 Analyse intratâche de la question 7

L'énoncé 7 comporte un énoncé écrit : « Dans une boîte, il y a 24 crayons de couleur.

a) Combien de crayons il y a dans 3 boîtes ?
b) Combien de crayons il y a dans 6 boîtes ?
c) Combien de crayons il y a dans 9 boîtes ?
d) Combien de crayons il y a dans 10 boîtes ? »

Ce problème est un problème de multiplication de la catégorie des isomorphismes de mesures où la quantité recherchée est le total de crayons. Cet énoncé vise à la fois l'évaluation de la résolution d'un isomorphisme de mesures et le recours aux propriétés d'associativité et de distributivité pour alléger un calcul multiplicatif.

a) Conduites des élèves à la question 7

Les conduites observées sont moins variées que celles prévues à l'analyse *a priori*. En effet, cette tâche a déjà fait l'objet d'une expérimentation auprès d'une cinquantaine d'élèves de classe ordinaire et de classe DGA[10], permettant d'étoffer

[10] Difficultés graves d'apprentissage

l'analyse *a priori*. En effet, aucun élève n'engage une division bien que cette conduite soit prévue à l'analyse *a priori*. Le tableau 4.5 présente une compilation des calculs de chacun des cinq élèves à la question 7a, soit trouver le nombre de crayons dans trois boîtes, avant et après toute relance de la part de l'expérimentatrice.

Tableau 4.5 : Conduites mathématiques des élèves à la question 7a - nombre de crayons dans trois boîtes - avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	24 × 3		**Addition itérée avec sous-total**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1 E3 E5	E1 E3 E5	E2 E4	E2 E4
Totaux	**3**	**3**	**2**	**2**

Pour trouver le nombre de crayons dans trois boîtes, trois élèves, E1, E3 et E5, recourent à l'algorithme de la multiplication 24 × 3. E1 fait une erreur et trouve quatre-vingt-douze (92), alors que E3 et E5 obtiennent la réponse juste, soit soixante-douze (72) crayons. E2 et E4 procèdent par addition itérée de vingt-quatre avec un sous-total. E2 effectue une addition itérée en colonne avec un sous-total : 24 + 24 = 48 + 24 = 72. E4 écrit directement quarante-huit (48 crayons dans 2 boîtes), ajoute vingt-quatre (24) crayons et obtient soixante-douze (72) crayons. Pour la question 7b, l'expérimentatrice ne procède à aucune relance. Cependant, suite aux relances effectuées après la question 7c, certains élèves ont modifié leurs conduites à la question 7b. Le tableau suivant présente les calculs mis en œuvre par les élèves à la question 7b.

Tableau 4.6 : Conduites mathématiques des élèves à la question 7b - nombre de crayons dans six boîtes - avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	24 × 6		**24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24**		**72 × 2**		**72 × 3**		**72 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24**		**72 + 24**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1 E3 E5	E1 E3 E5	-	E2	-	E4	E4	-	E2	E2	-	E3
Totaux	**3**	**3**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

Tout comme pour la question 7a, E1, E3 et E5 recourent à l'algorithme de la multiplication, 24 × 6. Si E3 et E5 contrôlent le calcul numérique, E1 fait une erreur dans l'application de l'algorithme et obtient quatre-vingt-six (86). E2 écrit une addition itérée en colonne avec des sous-totaux : 72 + 24 = 96 + 24 = 120 + 24 = 144 + 24 = 168 + 24 = 192 + 24 = 216. E2, partant de la réponse obtenue pour trois boîtes, soit soixante-douze (72), ajoute à ce nombre, par addition itérée, vingt-quatre (nombre de crayons par boîte), six fois (le nombre de boîtes).

E4 effectue le calcul numérique 72 × 3 = 216 qu'il justifie ainsi : « Parce que là, il y avait trois boîtes. Donc là, il m'en manquait trois, alors j'ai fait fois trois. » La difficulté d'articuler la relation multiplicative qui implique trois niveaux, les éléments, les parties et le tout, est manifeste dans cette conduite. Au départ, il y a confusion entre l'addition et la multiplication, car l'élève cherche à ajouter ce qui manque à $f(x)$ pour obtenir $f(y)$. Cependant, il dégage un opérateur multiplicatif (× 3) à partir d'un nombre de parties, soit la différence entre y et x (6 boîtes - 3 boîtes = 3 boîtes). Mais, pour dégager ce qui manque à $f(x)$ pour obtenir $f(y)$, il faut plutôt considérer le nombre d'éléments que contiennent les boîtes ajoutées, obtenu par la différence entre ce qui est recherché et connu, soit $f(y - x)$. Autrement dit, on cherche le nombre de crayons pour trois boîtes, soit soixante-douze (72) crayons, à ajouter aux soixante-douze (72) crayons déjà obtenus. E4 fera ce type de glissement pour tous les calculs relationnels qui suivent, comme nous le verrons. On peut également analyser la conduite du point de vue d'un usage implicite et mal contrôlé des propriétés de la multiplication. Partant de la distributivité, six boîtes de vingt-quatre crayons chacune, c'est 3 boîtes + 3 boîtes de 24 crayons chacune : $24 \times (3 + 3) = (24 \times 3) + (24 \times 3) = 72 + 72$. On peut également dire que six boîtes de vingt-quatre crayons chacune, c'est par associativité $(3 \times 24) \times 2 = 72 \times 2$. L'élève a cependant fait, comme calcul numérique, 72×3, issu de $(24 \times 3) \times 3$, lequel marque à la fois l'ajout de trois boîtes, lié à l'écriture $24 \times (3 + 3)$ et, possiblement, la relation scalaire « deux fois plus », soit $(3 \times 24) \times 2$ qui correspond à 72×2, et non à 72×3. Remarquant cette erreur, l'expérimentatrice intervient, ce qui permet è E4 d'adapter sa stratégie. Ainsi, il effectue 72×2 par un recours adéquat à l'associativité. Le tableau suivant présente les conduites de cinq élèves à la question 7c.

Tableau 4.7 : Conduites mathématiques des élèves à la question 7c - nombre de crayons dans neuf boîtes - avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Addition itérée de 24		**24 × 9**		**3 × (3 × 24)**		**144 + 72**		**216 × 3**		**144 + 24**		**24 + 24 … 10 fois**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	-	-	E1 E3 E5	E1 E3 E5	-	E3	-	E1 E4	E4	-	-	E3	E2	-
Totaux	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Pour trouver le nombre de crayons dans neuf boîtes, E1, E3 et E5 maîtrisent la structure de l'énoncé et proposent le calcul numérique, 24×9. Si E3 applique correctement l'algorithme et obtient deux cent seize (216), E1 et E5 ne contrôlent pas l'algorithme et obtiennent respectivement cent quatre-vingt-quatre (184) et deux cent quatre-vingt-seize (296).

E4 multiplie par trois, deux cent seize crayons (obtenus pour six boîtes). Ici encore, une confusion entre l'addition et la multiplication est observée puisque l'élève multiplie par trois pour « ajouter trois boîtes » au nombre de crayons trouvé pour six boîtes : f(9 boîtes) = f(6 boîtes) × (6 boîtes – 3 boîtes).

Les échanges avec l'expérimentatrice permettent à E1 et E4 de recourir à la distributivité-en-acte pour identifier le nombre de crayons pour neuf boîtes. Pour sa part, E2 procède par addition itérée de vingt-quatre disposée en colonne avec des sous-totaux intermédiaires. Contrôlant mal le nombre d'itérations de vingt-quatre, elle en place dix au lieu de neuf et, effectuant aussi une erreur de calcul, elle obtient deux cent dix (210) crayons.

Lorsque l'expérimentatrice relance E3 sur la possibilité d'utiliser les réponses antérieures pour trouver le nombre de crayons dans neuf boîtes, l'élève propose quelques façons qui impliquent l'usage de propriétés. E3 propose d'effectuer le calcul 72 crayons × 3, qui engage un raisonnement scalaire, pour trouver le nombre de crayons dans neuf boîtes. Cette conduite témoigne d'une utilisation adéquate de l'associativité. Elle dit qu'il est également possible d'effectuer 144 crayons + 24 crayons pour obtenir le nombre de crayons dans neuf boîtes, à partir du nombre de crayons dans six boîtes. Cette réponse peut être interprétée comme une utilisation erronée de la distributivité : (6 × 24 crayons) + (1 × 24 crayons) au lieu de (6 × 24 crayons) + (3 × 24 crayons). Le tableau 4.8 présente les conduites des élèves à la question 7d.

Tableau 4.8 : Conduites mathématiques des élèves à la question 7d - nombre de crayons dans dix boîtes - avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	24 + 24 … 10 fois		**24 × 10**		**Rép. 9 boîtes + (1 × 24)**		**Rép 9 boîtes × 2 : 648 × 2**		**Rép 9 boîtes + 24 + 24 … (10 fois)**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	-	-	E1 E3 E4 E5	E1 E3 E4 E5	-	E3	E4	-	E2	E2
Totaux	**0**	**0**	**4**	**4**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Pour trouver le nombre de crayons dans dix boîtes, E1, E3, E4 et E5 posent la multiplication 24 × 10. E3, E4 et E5 ont adéquatement recours à l'algorithme de multiplication et obtiennent 240 crayons. E1 n'arrive pas à effectuer le calcul 24 × 10. E2, quant à elle, procède par addition itérée de vingt-quatre à partir de sa réponse erronée de neuf boîtes : 210 + 24 + 24... (10 fois), la relance n'ayant aucun effet sur la conduite adoptée.

Suite à une relance sur l'utilisation des propriétés, E3, poursuivant la stratégie proposée en 7c qui consiste à ajouter 24 à la réponse précédente, propose d'ajouter vingt-quatre au nombre de crayons dans neuf boîtes. Cette proposition ne peut être interprétée comme une utilisation adéquate de la distributivité, (3 × 24) + (3 × 24) + (3 × 24) + (1 × 24), puisqu'elle est donnée en lien avec la démarche erronée précédente, ajouter vingt-quatre crayons à la réponse de six boîtes pour obtenir la réponse à neuf boîtes.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Suite aux conduites des élèves, l'expérimentatrice procède à quatre types de relances. Le premier type de relances consiste à travailler la technique de l'algorithme de la multiplication avec E1 qui l'emploie sans la contrôler. L'expérimentatrice décrit à l'élève la procédure, puis lui demande de verbaliser sa procédure. Cette relance ne permet pas, en cours d'entretien, à l'élève de corriger ses erreurs.

Constatant que E1 n'est pas en mesure d'utiliser l'algorithme correctement, le deuxième type de relances vise à ouvrir sur une opportunité de calcul différente qu'il peut contrôler. Ainsi, l'expérimentatrice demande à E1 : « Est-ce qu'il y a une façon que tu pourrais le calculer sans faire l'algorithme comme ça ? Est-ce que tu as déjà vu, l'année passée, une autre façon de le calculer ou que, toi, tu as inventé ? » Cette relance permet à E1 de recourir à une addition itérée de dix, vingt-quatre fois pour trouver la réponse à la multiplication 24×10.

Afin d'évaluer si les élèves peuvent référer, implicitement, aux propriétés de la multiplication, l'expérimentatrice procède à un troisième type de relances et soumet une question de type : « Est-ce que, pour savoir combien il y a de crayons dans neuf boîtes, tu aurais pu utiliser la réponse de six boîtes ou de trois boîtes pour t'aider ? » Le recours aux propriétés d'associativité et de distributivité nécessite un certain contrôle de l'emboîtement des éléments/parties/tout. Il faut à la fois contrôler le nombre de parties, ici le nombre de boîtes, et le nombre d'éléments pour chacune des parties, soit le nombre de crayons par boîte.

Cette relance est utilisée auprès de E1, E3 et E5. Cette relance n'a eu aucun effet sur les conduites de E5. Suite à cette relance, E1 propose d'effectuer le calcul $144 + 24 + 24 + 24$ pour trouver le nombre de crayons dans neuf boîtes. E3 tente de recourir aux propriétés, mais ne contrôle pas le nombre de boîtes qu'elle ajoute. Elle semble proposer plusieurs possibilités comme s'il s'agissait de choix de réponses, et non d'une démarche systématique.

Le quatrième type de relances consiste à effectuer un retour sur l'emploi des propriétés lorsqu'un élève y a recours avec un contrôle partiel. Lorsque E4 effectue le calcul 72×3, au lieu de 72×2, l'expérimentatrice confronte le calcul de l'élève par questionnement :

> Expérimentatrice (Exp.)[11] : Si je fais fois trois. J'ai trois boîtes ici. Si je fais trois boîtes fois trois, je vais avoir combien de boîtes?
> E4 : Six ?
> Exp. : Moi, quand je fais trois fois trois, ça me donne neuf.
> E4 : Ha, neuf.

[11] Pour alléger le texte, l'abréviation Exp. est utilisée par la suite

Exp. : Trois plus trois, ça donne six.
E4 : Ha.
Exp. : Donc, ici, mon soixante-douze crayons, c'est pour trois boîtes. Si je veux trouver pour six boîtes ?
E4 : Euh, fois deux.

Cette relance auprès de E4 lui permet, par une meilleure prise en compte du nombre de sous-collections/boîte, de recourir correctement aux propriétés par la suite.

En bref, les élèves E1, E3 et E5 articulent aisément les calculs numérique et relationnel en recourant de manière systématique à la multiplication pour résoudre ce problème de structure isomorphisme de mesures. E2 recourt, quant à lui, à une procédure d'addition itérée du nombre de crayons, renvoyant alors à un calcul relationnel de type additif plutôt que multiplicatif. Le cas de E4 est particulier. Tout comme E2, il procède de manière additive pour trouver initialement le nombre de crayons pour trois boîtes. Cependant, il met en place aux numéros suivants, une stratégie multiplicative qui témoigne d'une mauvaise articulation des niveaux éléments/parties/tout spécifiques à la structure d'isomorphisme des mesures. L'élève multiplie en effet un certain nombre de parties par un certain nombre d'éléments pour trouver le tout ; soit $f(y)$, le nombre recherché et $f(x)$, le nombre connu de crayons. Son calcul numérique correspond à $f(y) = f(x) \times (y - x)$ plutôt que $f(y) = f(x) + f(y - x)$ ou dans les cas où $f(y) / f(x)$ est un naturel (par exemple 6 boîtes/3 boîtes = 2), $f(y) = f(x \times f(y)/f(x)$.

4.2.3 Analyse intratâche de la question 6b

L'énoncé de cette question relève d'une structure de division de type partage. L'énoncé se caractérise de plus par la présence d'une relation non pertinente qui suggère également une division partage. L'énoncé se lit ainsi : « Un petit train a 36 places assises. Le petit train a 4 wagons. Chaque wagon a 6 roues. Combien de places assises y a-t-il dans chacun des wagons ? » À l'oral, l'expérimentatrice pose la question suivante : « Quelles écritures mathématiques décrivent bien le problème ? »

a) Analyse des conduites des élèves

Le tableau 4.9 présente les conduites des cinq élèves à la question 6b avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.9 : Conduites mathématiques des élèves à la question 6b avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Écritures proposées												**Autres conduites**			
	36 - 4 - 6		**36 ÷ 6**		**4 × 6**		**36 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4**		**4 × ___ = 36**		**36 ÷ 4**		**36 × 4**		**Distribution effective**	
	Av.	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*
Élèves	-	-	-	E3	-	-	-	E5	E2	E1 E4 E5	E3	E1 E2	E1 E4	-	E5	-
Totaux	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**

Légende : Av. : Avant la relance Ap. : Après la relance

Cette question est relativement difficile pour quatre des cinq élèves. Les conduites de E1, E2, E3 et E4 suggèrent en effet que la relation non pertinente entre wagons et roues/wagon est celle qui s'impose aux élèves alors que celle qui est pertinente au regard de la question, entre places assises et places assises/wagon, ne se dégage qu'après une seconde lecture. La formulation de E3 à propos de l'écriture 36 ÷ 6 en témoigne :

> Trente-six divisé par six, ça donne quatre wagons… Non ? Trente-six divisé par six, ça donne cinq. Trente-six divisé par six ça donne six… mais je vais le prendre parce que trente-six divisé par six, ça donne six donc chaque wagon a six roues donc…

E2 choisit l'écriture appropriée $4 \times \_ = 36$, mais engage un calcul relationnel inadéquat en évoquant quatre wagons et six roues par wagon et un fait multiplicatif erroné, $4 \times 6 = 36$ qui engage toutes les données numériques du problème. Pour E1, la relation multiplicative est d'abord engagée en articulation avec le calcul numérique 4×36. Invité par la suite à se prononcer sur les écritures proposées, il retient $4 \times \_\_ = 36$ et, ensuite $36 \div 4$. Cette conduite nous parait éclairante du défi que pose l'articulation entre calcul numérique et calcul relationnel comme deux volets d'une même activité de mise en relation des données. Le calcul relationnel multiplicatif de type partage trouve d'abord à s'exprimer par une multiplication des données pertinentes (4×36), opération qui est ensuite rejetée lorsque l'élève est soumis à une écriture qui allie à la fois l'opération de multiplication et le raisonnement multiplicatif ($4 \times \_\_ = 36$). Cette dernière écriture semble, par la suite, associée à la division correspondante ($36 \div 4$). Cette conduite peut paraître relativement étonnante puisqu'elle est réalisée en contexte de division partage plutôt que de division regroupement, la structure de cette dernière étant plus près d'une multiplication trouée que de la division. Cependant, c'est un peu comme si les écritures s'enchaînaient les unes derrière les autres, cet enchaînement témoignant d'un processus de modélisation des relations exprimées dans l'énoncé. E4 engagera lui aussi la multiplication 4×36 et retiendra, après la relance, $4 \times \_ = 36$ sans toutefois, identifier $36 \div 4$ comme écriture pertinente.

Seule la conduite de E5 est limpide puisqu'elle procède directement à une stratégie de distribution effective et que c'est à partir de cette stratégie, qu'elle identifiera la soustraction répétée (sans doute associée à sa stratégie) et la multiplication trouée. La multiplication trouée est d'ailleurs l'écriture multiplicative qui est la première choisie par les élèves, suivie de la division.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

En cours de tâche, l'expérimentatrice procède à quatre types de relances. Le premier type, prévu dans l'analyse *a priori*, consiste à inviter l'élève qui ne choisit qu'une écriture à examiner les autres. Ce type de relances peut provoquer un glissement interprétatif de l'énoncé dans la recherche d'un sens aux écritures numériques proposées. C'est le cas notamment de E3. Il peut également engager les élèves, comme c'est le cas de E5, à faire différents calculs pour tenter d'identifier les écritures qui correspondent au résultat numérique trouvé. Une autre relance peut générer un même type de conduite. Cette relance consiste à demander à l'élève si une écriture, parmi celles proposées, permet de trouver le nombre de places assises.

Le troisième type de relances consiste à retirer la donnée superflue du problème. L'expérimentatrice a procédé à ce type de relances auprès de E2, ce qui a permis à l'élève de se dégager effectivement d'une relation non pertinente pour se centrer sur le calcul relationnel adéquat. Cependant, cette relance modifie substantiellement la tâche.

Le quatrième type de relances consiste à questionner l'élève sur le calcul relationnel associé à l'écriture mathématique. Lorsque E1 hésite devant l'écriture 4×6, l'expérimentatrice le questionne sur l'utilité de cette écriture et sur les dimensions associées aux nombres :

> E1 : Le quatre, c'est pour les wagons et le six, c'est pour les roues.
> Exp. : OK. Puis qu'est-ce que je cherche ?
> E1 : Combien il y a de places dans chaque wagon.
> Exp. : Est-ce que ça, ça va m'aider?
> E1 : Non.

Suite à cette interaction, E1 retire 4×6 de ses choix. La relance a permis à E1 de dégager le calcul relationnel adéquat. Cependant, il est clair que cette intervention relève d'un pilotage assez serré. Ce pilotage permet cependant à l'élève qui hésite d'être guidé afin de lever ses hésitations. C'est une dimension de l'interaction qui nous parait intéressante de relever.

À partir de l'ensemble des réponses des élèves, on peut distinguer trois niveaux de réponses. Le premier niveau engage un calcul relationnel adéquat, mais une stratégie numérique relativement élémentaire (voir E5). Le deuxième engage un raisonnement multiplicatif, mais sans bien contrôler l'articulation entre les calculs numérique et relationnel (voir E1, E2, E4). Enfin, le troisième engage un raisonnement multiplicatif qui se fonde sur les écritures numériques proposées (E3) sans contrôle sur les calculs relationnels.

4.2.4 Analyse intratâche de la question 8

L'énoncé, qui relève d'une structure de division partage, est présenté oralement : « On partage 104 billes également entre 8 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ? » Une fois l'énoncé résolu, une première vérification à l'aide de la calculatrice est demandée à l'élève. Puis, pour vérifier si la multiplication est considérée comme l'opération réciproque de la division, on demande de vérifier d'une autre façon sur la calculatrice.

a) Analyse des conduites des élèves

Le tableau 4.10 présente les conduites de chacun des cinq élèves avant et après toute relance, à la question 8. Aucun élève n'a procédé par addition ou soustraction répétée, deux conduites prévues à l'analyse *a priori*.

Tableau 4.10 : Conduites mathématiques des élèves à la question 8 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Former des sous-collections de 8		**104 ÷ 8**		**8 × __ = 104**		**104 × 8**		**8 × 13**		**Addition itérée en estimant le nombre d'éléments/ sous-collection : 22, 19, 9**		**Addition itérée de 13**		**104 - 8**	
	Av.	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*
Élèves	-	E4	E1 E3	E1 E3 E4 *E5*	-	-	E5	-	-	*E1* *E3*	E4	-	-	*E4*	E2	E2
Totaux	**0**	**1**	**2**	**4**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Légende : *E : conduites validant le premier calcul effectué*
Av. : avant la relance *Ap. : Après la relance*

E1 et E3 posent la division attendue, soit 104 ÷ 8. Alors que E1 effectue cette division à la calculatrice, E3 emploie correctement l'algorithme de division. Tous deux valident leur réponse à l'aide de la multiplication 8 × 13, ainsi reconnue comme l'opération réciproque de la division.

Un temps de réflexion est nécessaire à E2 pour s'approprier l'énoncé. Elle écrit d'abord huit (8) sous cent quatre (104) sans spécifier le signe d'opération. Puis, elle verbalise son hésitation entre l'addition et la soustraction. Elle justifie son hésitation par son interprétation du partage qui est : « Comme donner, mais c'est, ben dans ma tête, c'est comme donner quelque chose. » L'expérimentatrice rompt le silence de quarante secondes qui suit en demandant « tu ferais cent quatre moins huit ? » à E2, qui confirme ce calcul. Il est clair que E2 n'établit pas de relation entre le schème de partage et la division. Cependant, il est clair que E2 n'est pas pour autant satisfaite de la soustraction. Il est possible alors que cette structure puisse être interprétée par cette élève par une soustraction répétée. Aucune relance de l'expérimentatrice ne permet cependant de vérifier cette hypothèse.

E5 associe clairement les relations entre ces données à un problème multiplicatif. Elle effectue la multiplication 104×8 par le recours à l'algorithme et obtient mille quarante-deux (1042). Pour vérifier, elle effectue, sur la calculette, la division $104 \div 8$. Voyant que la réponse est treize (13), elle doute du calcul effectué, mais ne modifie pas sa solution. Nous notons que l'élève ne propose pas mille quarante-deux (1042) divisés par cent quatre (104) ou par huit (8), ce qui serait la division associée à la multiplication effectuée. Ainsi, nous formulons l'hypothèse que l'élève sait que la multiplication et la division peuvent être toutes deux associées à l'énoncé, mais sans pouvoir traiter le problème par la multiplication trouée. Aucune relance n'a été effectuée à ce propos, mais il sera opportun de confronter cette conduite à celle où l'élève doit choisir un certain nombre d'écritures associées à un énoncé de problème de division regroupement.

La stratégie initiale de E4 est sans doute de dénombrer les multiples de huit jusqu'à l'obtention de cent quatre. Ne pouvant contrôler cette stratégie de tête, l'élève propose vingt-deux. Invité à s'appuyer sur l'écrit, il part du nombre proposé, soit vingt-deux, et écrit successivement ses multiples jusqu'à cent dix, comme le montrent les traces à la figure 4.2. Il choisit alors un nombre plus petit à répliquer puisqu'il cherche à obtenir un nombre inférieur à cent dix, soit cent quatre. L'élève se met ainsi à la recherche d'un facteur de cent quatre, c'est-à-dire d'un nombre que l'on peut amplifier pour obtenir cent quatre. Cet épisode est un très bel exemple à l'effet que la résolution d'un énoncé de problème relève de l'articulation entre les calculs numérique et relationnel, et non de l'application d'un calcul numérique issu d'un calcul relationnel. En effet, l'élève établit un calcul relationnel par lequel il se met à la recherche du nombre de répliques d'un nombre (sans doute huit, au départ) dans cent quatre. Son calcul numérique va alors diriger son calcul relationnel qui glisse sur la recherche d'un facteur de cent quatre.

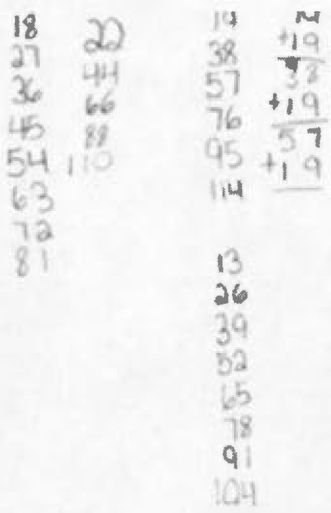


Figure 4.2 : Traces de E4 à la question 8

L'expérimentatrice l'invite alors à procéder autrement, par calcul ou dessin. E4 envisage de procéder par distribution effective, mais précise que ce sera long, ce que confirme l'expérimentatrice, qui l'invite à proposer une autre façon. Il dit qu'il pourrait faire 104 ÷ 8. Face à l'impossibilité d'effectuer le calcul, on lui propose la calculatrice. Trouvant treize billes par enfant, il effectue une addition itérée de treize (huit fois) jusqu'à cent quatre, pour valider sa division. L'élève associe donc la division à l'addition répétée, ce qui s'articule très bien à une liste de multiples.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

En cours de tâche, l'expérimentatrice procède à trois types de relances. Premièrement, si l'élève choisit une opération, mais qu'il est incapable d'effectuer le calcul, on lui propose la calculatrice pour alléger le calcul numérique et prioriser l'identification du calcul relationnel. Cette relance est utilisée avec E1 et E4 incapables d'effectuer la division 104 ÷ 8 et avec E5 afin qu'elle vérifie la réponse obtenue à 104 × 8.

Deuxièmement, l'expérimentatrice pose la question : « Est-ce qu'il y aurait une autre façon de faire ? » à E4 dont la stratégie d'addition itérée ne permet pas de trouver le nombre de billes par enfant. Cette relance l'amène à considérer d'autres stratégies possibles, soit la distribution effective, puis la division.

Troisièmement, une relance prévue à l'analyse *a priori*, est effectuée auprès de E1, E3, E4 et E5 pour vérifier si la multiplication est considérée comme l'opération réciproque de la division. On demande à l'élève s'il y a une autre façon, une autre opération permettant de valider sa réponse.

Suite à l'analyse des conduites des élèves, nous avons cependant pu identifier d'autres interventions qui auraient pu permettre la confrontation de certaines hypothèses et qui auraient aussi pu agir à titre de relances chez les élèves. Auprès d'un élève qui hésite à choisir la soustraction comme E2, il est possible de confronter ce calcul à un calcul de soustraction répétée. Aussi, si un élève présente des conduites montrant que la liaison entre l'opération de division et de multiplication n'est pas consolidée, on peut relancer en proposant des calculs réciproques.

Cette tâche nous informe sur le type de calculs relationnels engagés par les élèves pour un énoncé de division partage. De plus, la tâche permet, grâce à une relance, de vérifier la reconnaissance de la multiplication comme opération réciproque de la division. E1 et E3 contrôlent le calcul relationnel et reconnaissent la multiplication comme l'opération réciproque de la division. E5 reconnait la structure multiplicative du problème, mais le calcul relationnel convoqué est erroné. Ses conduites montrent que la liaison entre les opérations de division et de multiplication n'est pas complétée. E4 engage un calcul d'addition itérée qu'il associe à la division. Seule E2 n'engage pas de calcul de type multiplicatif.

4.2.5 Analyse intratâche de la question 11a

Cette tâche présente une division, 256 ÷ 8 = 32, ainsi qu'un énoncé, tous deux écrits sur des cartons : « 256 gommes sont partagées également entre 8 équipes. Chaque équipe est composée de 4 enfants. » La question posée par l'expérimentatrice est : « Est-ce qu'il y a un lien entre la division et l'énoncé ? » La structure de l'énoncé est une division de type partage impliquant trois mesures : les gommes, les équipes et les enfants, ce qui offre l'opportunité d'établir différents calculs relationnels.

a) Analyse des conduites des élèves

Cet énoncé demande un temps d'appropriation pour tous les élèves et l'expérimentatrice intervient dès les premières réponses. Donc, on ne peut établir si ces réponses ont été fournies avant ou après une relance. Le tableau 4.11 présente les conduites mathématiques des cinq élèves à la question 11a.

Tableau 4.11 : Conduites mathématiques des élèves à la question 11a

	Calcul relationnel juste			**Calcul relationnel erroné**	
	256 ÷ 4 ÷ 8	**256 gommes ÷ 8 équipes = 32 gommes/équipe et 32 gommes ÷ 4 enfants = __ gommes/enfant**	**256 gommes ÷ 8 équipes = 32 gommes/équipe**	**Chaque enfant a 32 gommes**	**256 gommes ÷ 4 enfants**
Élèves	E2	E3	E4	E5	E1
Totaux	1	1	1	1	1

Les réponses de E2, E3, et E4 témoignent d'un calcul relationnel juste alors que les réponses données par E1 et E5 relèvent d'un calcul relationnel erroné. E4 établit l'articulation entre la division et l'énoncé. Le calcul relationnel établi, soit

256 gommes ÷ 8 équipes = 32 gommes/équipe, témoigne du recours à l'opérateur fonction.

La conduite de E2 et E3 se distingue de celle de E4, car elle engage un calcul relationnel de l'ensemble des données, comme en témoigne le commentaire de E3 :

> Puisqu'on a fait deux cent cinquante-six (256) divisés par huit, donc là, on sait au moins chaque équipe va avoir combien de bonbons. Puisqu'il y a huit enfants, sûrement, les trente-deux, on va aussi les diviser en quatre comme pour que les quatre enfants aient une part égale.

Face à l'incompréhension de la question, l'expérimentatrice reformule ainsi la question pour E2 : « Un élève a écrit ça (256 ÷ 8 = 32). Pourquoi d'après toi ? » Affirmant que l'élève a fait une erreur, E2 propose une mise en relation multiplicative adéquate des trois données, soit deux cent cinquante-six gommes partagées également entre huit puis entre quatre. Invitée à se prononcer sur la signification de trente-deux, l'élève témoigne d'un contrôle des relations en précisant que chaque équipe a trente-deux gommes.

E1 et E5 engagent également un calcul relationnel de type division partage, mais sans considérer un partage des gommes entre les équipes. Ainsi, E1 dit que l'opération à faire est 256 gommes ÷ 4 enfants alors que E5 affirme, en se basant sur la division proposée que chaque enfant a trente-deux gommes. Le contexte suggère à ces élèves que la donnée recherchée est le nombre de gommes par enfant, ce qui est logique, car, comme le dit E3, les gommes obtenues par chacune des équipes devraient normalement être à nouveau partagées entre les enfants. On peut cependant ajouter que les énoncés de type division partage impliquent habituellement une distribution par personne, ce qui peut expliquer la prégnance de cette relation au détriment de celle que suggère la division proposée.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Pour E2, la question est reformulée ainsi : « Un élève a écrit ça ($256 \div 8 = 32$). Pourquoi d'après toi ? » E2 est ainsi amené à se prononcer sur $256 \div 8 = 32$ désormais considéré comme une procédure d'élève impliquant un calcul relationnel implicite.

Un type de relances a été effectué pour favoriser la formulation des calculs relationnels en jeu. Ainsi, la question « Que veut dire trente-deux ici ? » est posée à E1, E2 et E5 pour conduire les élèves à se prononcer sur la dimension associée à trente-deux, ce qui relance les élèves à formuler les relations entre les données du problème.

Pour conclure, cette tâche nous informe des calculs relationnels engagés par les élèves face à une tâche de division partage pour laquelle le calcul numérique est fourni. Si E2, E3 et E4 engagent des calculs relationnels justes, E1 et E5 engagent un calcul relationnel multiplicatif erroné qui vise à déterminer le nombre de gommes par enfant.

4.2.6 Analyse intratâche de la question 10

Cette question comporte un énoncé de type division regroupement qui est présenté oralement : « Il y a 78 œufs à placer dans des boîtes. On place 6 œufs dans chacune des boîtes. On met 10 boîtes par caisse. Combien de boîtes d'œufs peut-on remplir ? Quels calculs permettent de trouver le résultat ? » Huit choix d'écritures mathématiques sont présentés à l'élève sur des cartons.

a) Conduites des élèves à la question 10

Le tableau 4.12 présente une compilation des écritures mathématiques choisies par les cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice. Aucun élève ne réussit à mettre en œuvre un calcul relationnel adéquat. Des confusions d'abord entre boîtes et caisses sont relevées, mais également une difficulté à établir la relation de type regroupement entre les données du problème.

Tableau 4.12 : Écritures choisies à la question 10 avant et après toute relance

	6 × _ = 10		**6 × 10 = 60**		**78 + 6**		**78 - 6**		**6 × 78**		**Addition itérée de 6**		**6 × _ = 78**		**78 ÷ 6**	
	Av.	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*	*Av.*	*Ap.*
Élèves	-	E1	E1 E3 E5	E1 E3	-	-	E3	E3	E4	E2	-	-	-	E1	-	E5
Totaux	**0**	**1**	**3**	**2**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

Légende : Av. : avant la relance Ap. : Après la relance

L'écriture erronée, 6 × 10 = 60, impliquant la donnée superflue est choisie par trois élèves, E1, E3 et E5. Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori*, il est probable que la connaissance des multiples de 10 ait encouragé ce choix. Le retrait de la donnée superflue, dix boîtes par caisse, ne permet pas à E1 de rejeter cette écriture (il choisit aussi 6 × 10 = 60) bien qu'il choisisse alors 6 × _ = 78. E1 répond également que ces écritures lui permettent de trouver le nombre d'œufs par caisse. Cette conduite suggère que la relation non pertinente entre le nombre de caisses et le nombre de boîtes d'œufs par caisse semble persister au-delà de la relance.

Un silence de quarante secondes précède le choix de l'écriture 6 × 10 = 60 par E5 qui dit l'avoir choisie au hasard. Le retrait de la donnée superflue, dix boîtes par caisse, amène E5 à adapter ses conduites. Elle répond d'abord : « Ben, j'aurais fait six boîtes. Puis dans chacune des six boîtes, j'aurais placé comme un, deux, trois, quatre, cinq, six... jusqu'à tant que ça fasse soixante-dix-huit. » Cette réponse suggère que l'élève coordonne mal la structure éléments/parties/tout de ce problème puisque le nombre de boîtes et le nombre d'œufs par boîte semblent confondus. Cependant, l'élève évoque une situation de distribution effective des soixante-dix-huit œufs dans six sous-collections, ce qui relève d'une interprétation du sens division partage plutôt que regroupement. Puis, l'échange amène E5 à choisir $78 \div 6$ comme écriture « parce qu'il y a six boîtes et tu les divises dans chacune des six boîtes », maintenant l'interprétation d'une division partage et d'une confusion entre éléments et partie. Elle n'identifie pas d'autres écritures possibles.

E3, pour sa part, retient l'écriture $6 \times 10 = 60$ parce qu'elle lui permet de trouver le nombre d'œufs par caisse. Son explication suggère qu'il y a confusion entre les termes caisses et boîtes qui sont considérés comme des synonymes. E3 retient également $78 - 6$, choix qu'elle justifie à partir du résultat trouvé, soixante, qui est identique à l'écriture $6 \times 10 = 60$. Ce choix s'appuie donc, d'une part, sur un calcul numérique erroné et, d'autre part, sur une mise en relation erronée des données impliquant la donnée superflue.

L'écriture erronée 6×78 est choisie par deux élèves, E2 et E4. L'énoncé est présenté d'emblée sans la donnée superflue à E2. Pour ces deux élèves, ce choix témoigne de la reconnaissance de la structure multiplicative de l'énoncé sans toutefois que soit mis en place un calcul relationnel adéquat.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Parmi les relances suggérées dans l'analyse *a priori*, celle portant sur le retrait de la donnée superflue est utilisée auprès de trois élèves, soit E1, E2 et E5. E1 et E2 échouent aussi à résoudre cet énoncé modifié. Si E5 choisit une écriture appropriée suite à la relance (78 ÷ 6), le calcul relationnel qui le sous-tend ne semble toutefois pas approprié.

Cette tâche a pour objectif de nous informer sur les calculs relationnels engagés par les élèves à un énoncé de division regroupement, cependant aucun des élèves ne réussit à mettre en œuvre un calcul relationnel adéquat. Étant donné la difficulté à établir une relation de type regroupement, nous supposons que l'ajout d'une donnée superflue a modifié substantiellement la tâche originale de sorte que le contexte ne permet plus l'évaluation du calcul relationnel.

4.2.7 Analyse intratâche de la question 11c

Cette tâche comporte un énoncé écrit : « Les arbres en Colombie-Britannique vivent très vieux. Par exemple, Marie a 32 ans et elle a vu un arbre qui est 8 fois plus âgé qu'elle et Paul, un arbre qui est 10 fois plus âgé que lui. » À l'oral, l'expérimentatrice demande : « À quoi peut servir la division, 256 ÷ 8 = 32, dans ce problème ? » Ce problème de type scalaire évalue si un raisonnement multiplicatif caractérise est mis en œuvre pour traiter la relation scalaire identifiée. L'énoncé contient une donnée superflue, soit l'opérateur scalaire liant l'âge de Paul à l'âge de l'arbre.

a) Analyse des conduites des élèves

Tout comme pour la question 11a, il est impossible de déterminer si les conduites sont produites avant ou après la relance puisque l'expérimentatrice intervient dès les premières hésitations des élèves. Ainsi, le tableau 4.13 présente les conduites des élèves à la question 11c au terme des interactions avec l'expérimentatrice.

Tableau 4.13 : Conduites mathématiques des élèves à la question 11c

	Marie : 32 arbre : 256	**Paul : 32 × 8 arbre : Paul × 10**	**Arbre : 32 + 8 = 40**	**256 ÷ 8 = 32 et 32 × 8 = 256**	**Arbre : 32 ans × 8 = 256**	**Aucune interprétation**
Élèves	E3	E5	-	E1	E4	E2
Totaux	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

E1 est le seul élève qui établit clairement une articulation entre la division $256 \div 8 = 32$ et la relation scalaire qui lie l'âge de Marie et l'âge de l'arbre. La division est ainsi interprétée comme une écriture réciproque de la relation scalaire multiplicative (huit fois) directe énoncée entre l'âge de Marie et l'âge de l'arbre.

À la différence de E1, E3 et E4 ne font pas de liaison explicite entre la division et l'énoncé bien qu'ils établissent une articulation correcte entre le calcul et l'énoncé. Ces élèves font une lecture de la division qui s'appuie sur la relation scalaire directe leur permettant d'établir que Marie a trente-deux ans et l'arbre a deux cent cinquante-six ans. Si E4 réfère à l'opérateur scalaire « huit fois plus » liant l'âge de Marie et l'âge de l'arbre, E3 n'évoque pas cette relation et ne fait que préciser les mesures associées aux âges de Marie et de l'arbre.

E2, quant à elle, n'exprime aucune relation entre les données. Pressée par les questions de l'expérimentatrice, elle associe deux cent cinquante-six à l'âge de l'arbre sans que cette réponse ne témoigne cependant d'un contrôle sur le calcul relationnel.

Finalement, la division ne permet pas à E5 d'identifier l'âge de l'arbre. E5 cherche à établir un calcul relationnel qui implique l'ensemble des données incluant celle qui est superflue.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

La question 11c, qui s'intéresse à la verbalisation d'un calcul relationnel, a entraîné plusieurs interactions entre les élèves et l'expérimentatrice. Cependant, les interventions de l'expérimentatrice ne sont pas des relances à proprement parler. Ce sont plutôt des questions qui visent à conduire les élèves à identifier les dimensions associées à chaque donnée.

Cette tâche nous informe sur les calculs relationnels engagés pour un énoncé de type produit scalaire lorsqu'un calcul numérique est proposé et qu'une donnée superflue est en jeu. La donnée superflue a empêché E5 d'établir un calcul relationnel adéquat. E2 n'engage aucune relation entre les données alors que les conduites de E1, E3 et E4 manifestent une articulation entre la division proposée et la relation scalaire établie entre l'âge de Marie et l'âge de l'arbre.

4.2.8 Analyse intratâche de la question 12

L'énoncé de la tâche 12, accompagné d'un dessin de deux aquariums, est présenté oralement : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 9 poissons. Dans l'aquarium de Julie, il y en a 3 fois plus. Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Julie ? » Ce problème de produit scalaire engage une relation scalaire directe de type « fois plus ».

a) Conduites des élèves à la question 12

Le tableau 4.14 présente les conduites mathématiques de cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.14 : Conduites mathématiques des élèves à la question 12 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	$9+3=12$		$3\times 9+9=36$		$9\times 2=18$		$3\times 9=27$	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E2	-	-	E1	E1	-	E3 E4 E5	-
Totaux	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**	**0**

L'énoncé génère des conduites qui relèvent de différentes stratégies qu'elles soient additives, multiplicatives ou mixtes tel que prévu à l'analyse *a priori*. Adoptant une stratégie additive, E2 effectue mentalement le calcul $9+3=12$, associant ainsi l'expression « fois plus » à la relation « de plus ». Pour sa part, E1 adopte deux stratégies mixtes, l'une avant et l'autre après la relance. L'élève donne d'abord une réponse numérique : « Le double de neuf. » L'élève dessine ensuite, comme proposé, les poissons et précise qu'il y a 2×9 poissons, donc dix-huit poissons. Sans doute l'élève considère qu'il faut en ajouter deux fois plus de poissons à ceux déjà dessinés (9), soit 2×9 poissons. L'expérimentatrice pose alors la question de nouveau, ce qui pousse E1 à modifier sa réponse, par effet de contrat, et propose 9×4 et ensuite 9×5 et revient à 36 poissons (9×4). E1 semble alors interpréter l'expression « trois fois plus » comme trois fois de plus qu'une fois, ce qui peut se traduire par : $3 \times 9 + 1 \times 9 = 36$. Cet énoncé est correctement résolu par E3, E4 et E5 à l'aide d'une stratégie multiplicative, $9 \times 3 = 27$, sans qu'une relance ne soit nécessaire.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice a procédé à une seule intervention auprès de E1 prenant la forme d'une répétition de la question suite à une fausse réponse. Cette intervention ne joue pas le rôle d'une véritable relance permettant à l'élève d'adapter ses stratégies. La répétition d'une question ne change aucunement les caractéristiques de la tâche, cela ne change que le contrat. C'est la raison pour laquelle l'élève demeure dans un raisonnement de type mixte bien que la stratégie numérique soit modifiée. Une relance prévue dans l'analyse *a priori* consiste à proposer à l'élève une autre réponse possible s'il engage une stratégie additive. Cependant, cette relance n'a pas été utilisée auprès de E2 qui, pourtant, adopte ce type de stratégies.

En bref, E3, E4 et E5 établissent correctement la relation scalaire directe entre les données. La conduite de E2 témoigne d'une mise en relation additive, alors que l'expression « fois plus » est interprétée comme « de plus ». Pour sa part, E1 adopte une stratégie de type mixte.

4.2.9 Analyse intratâche de la question 13

La question 13 comporte un dessin de deux aquariums et un énoncé oral : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 24 poissons. Dessine les poissons de Sophie. Dessine 6 fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre. » L'énoncé implique une relation directe de type « fois moins » et par conséquent, une division: $24 \div 6 = 4$.

a) Conduites des élèves à la question 13

Suite à l'observation de la prégnance de stratégies additives aux tâches précédentes chez E2, les nombres de l'énoncé sont modifiés pour quatorze poissons et deux fois moins. Nous formulons l'hypothèse que les nombres quatorze et deux sont plus facilement associés à sept, par la multiplication, que vingt-quatre et six et qu'ainsi, la relation multiplicative sera plus aisément identifiée. Le tableau 4.15 présente les conduites mathématiques des élèves à la question 13 avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.15 : Conduites mathématiques des élèves à la question 13 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	24 – 6 = 18 14 – 2 = 12		**24 ÷ (6 × 4) = 0**		**24 ÷ 6 = 4**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1 E2 E3 E4 E5	E1 E4 E5	-	-	-	E3
Totaux	**5**	**3**	**0**	**0**	**0**	**1**

Les cinq élèves engagent une stratégie additive. Ainsi, la relation scalaire directe de type « fois moins » est interprétée comme « de moins » et l'énoncé est résolu à l'aide de la soustraction 24 – 6 = 18 pour l'ensemble des élèves sauf E2, pour qui les données numériques appellent plutôt le calcul 14 - 2 = 12. Suite à la relance qui invite les élèves à se prononcer sur la stratégie multiplicative employée par un élève fictif, E1, E4 et E5 maintiennent la stratégie additive bien qu'ils affirment hésiter entre les deux. Malgré un pilotage un peu serré, cette relance entraîne une réponse juste chez E3. Aucune relance n'est faite auprès de E2.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâches

Une relance prévue dans l'analyse *a priori* consiste à proposer à l'élève une autre réponse possible s'il engage une stratégie additive : « Un élève avec qui j'ai fait ce problème m'a dit que, s'il y a six fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre, il fait 24 ÷ 6 = 4. Il y a donc quatre poissons dans l'aquarium de Pierre. Qu'en penses-tu ? » Cette relance utilisée auprès de quatre élèves (E1, E3, E4 et E5) n'a permis qu'à E3 de modifier sa stratégie initiale. Cependant, elle a déséquilibré les autres élèves sans toutefois les faire basculer vers un raisonnement approprié.

4.2.10 Analyse intratâche de la question 14

L'énoncé de la question 14 est présenté oralement : « Laurent a 12 ans. Il est 4 fois plus âgé que son frère. Quel âge a son frère ? » Cet énoncé de produit scalaire engage une relation indirecte de type « fois plus » et, par conséquent, une division.

a) Conduites des élèves à la question 14

Puisque l'intervention consiste à demander à l'élève de formuler un problème semblable, il n'y a pas de conduite de type « après relance » à la question 14. Le tableau 4.16 présente donc les conduites mathématiques de cinq élèves à la question 14.

Tableau 4.16 : Conduites mathématiques des élèves à la question 14

	12 + 4	**12 - 4**	**12 × 4**	**12 ÷ 4**
Élèves	E2 E5	-	E1	E3 E4
Totaux	**2**	**0**	**1**	**2**

Deux élèves (E2, E5) engagent des calculs relationnels de type additif où la relation scalaire est interprétée comme « de plus ». E2 et E5 effectuent 12 + 4 = 16, ce qui ne respecte pas la relation scalaire multiplicative indirecte.

Trois élèves (E1, E3, E4) engagent des calculs relationnels de type multiplicatif. E1 engage le calcul numérique 12 × 4, ce qui suggère un calcul relationnel impliquant une relation directe (4 fois plus). Ce fait multiplicatif n'étant pas mémorisé, il a recours à une stratégie de calcul mental qui est mal contrôlée. E3 et E4 reconnaissent la relation indirecte et ont recours à la division 12 ÷ 4 = 3.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'intervention prévue à l'analyse *a priori* consiste à demande à l'élève de formuler un problème semblable. E5 formule le problème suivant : « Julie a 40 ans et son père en a... je ne sais pas moi, 10 fois plus qu'elle. On veut savoir combien son père a quel âge. » Bien que l'élève engage un calcul additif pour résoudre l'énoncé proposé, le problème qu'elle formule réfère à l'expression « fois plus » selon une relation directe plutôt qu'indirecte. Il aurait été intéressant de demander à l'élève de résoudre le problème qu'elle a formulé pour voir si elle recourt à une stratégie additive ou plutôt multiplicative.

4.2.11 Analyse intratâche de la question 11b

Cette tâche présente une division, $256 \div 8 = 32$, ainsi qu'un énoncé, tous deux écrits sur des cartons : « Il faut acheter de la pelouse pour couvrir le sol d'un parc. Le parc fait 8 mètres de large et 32 mètres de long. Je dois dire au jardinier combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires. » L'expérimentatrice donne la consigne suivante : « Est-ce que cette écriture mathématique peut m'aider à trouver combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires ? » Cette tâche évalue la reconnaissance d'un problème de type produit de mesures et la connaissance de l'opération inverse de la multiplication. L'élève doit d'abord établir le calcul relationnel lié au problème, c'est-à-dire $8 \text{ m} \times 32 \text{ m} = 256 \text{ m}^2$. À partir de ce calcul, l'élève doit faire le lien avec la division proposée.

a) Conduites des élèves à la question 11b

Cet énoncé demande un temps d'appropriation pour tous les élèves. Le tableau 4.17 présente les conduites mathématiques des élèves à la question 11b avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.17 : Conduites mathématiques des élèves à la question 11b avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Calcul relationnel erroné				**Calcul relationnel juste**	
	Identifier les données, mais sans établir de relation		**$32 \div 8 = 256$ pelouses**		**Reconnaissance de la multiplication $8\ m \times 32\ m = 256\ m^2$**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1 E5	E5	E2	-	E3 E4	E1
Totaux	**2**	**1**	**1**	**0**	**2**	**1**

Deux élèves (E1 et E5) ne font que repérer les données, huit et trente-deux, présentes à la fois dans l'énoncé et dans la division sans qu'une relation ne soit établie. Pour E1, la division proposée est nécessairement le calcul à effectuer pour répondre à la question, raison pour laquelle lorsqu'invité à préciser la mesure associée à trente-deux, il répond d'abord trente-deux mètres de long, puis, se rétracte et dit que trente-deux est le nombre de mètres carrés de pelouse. Constatant la difficulté à établir un calcul relationnel à partir des informations fournies par la division, l'expérimentatrice relance E1 et E5 en leur demandant ce qu'ils feraient pour trouver le nombre de mètres carrés de pelouse. Alors que E1 identifie correctement la multiplication 32×8 comme opération pour trouver deux cent cinquante-six mètres carrés de pelouse, E5 ne trouve pas de réponse.

La conduite de E2 se distingue de celle de E1 et E5, car elle engage un calcul relationnel, soit $32 \div 8 = 256$ pelouses. Le calcul proposé témoigne d'une tentative d'établir une relation multiplicative entre les données du problème. Est-ce une confusion entre le signe de division et celui de multiplication ou encore, un manque de contrôle des relations multiplicatives ? Les conduites de l'élève aux autres tâches du protocole permettront sans doute de préciser laquelle des deux hypothèses est la plus plausible.

Un calcul relationnel adéquat est établi par E3 et E4 qui convoquent la multiplication 32 m × 8 m. La justification de E3 témoigne de la reconnaissance de la multiplication en tant qu'opération réciproque de la division et de la création d'une nouvelle mesure, soit des mètres carrés, sans qu'une relance soit nécessaire. Une erreur technique a empêché l'enregistrement de l'entretien auprès de E4.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à un type de relances lorsqu'un élève, face à la division présentée, est centré sur les données et qu'il est incapable d'établir un calcul relationnel. Ainsi, la question « Qu'est-ce que tu ferais pour résoudre l'énoncé ? » est posée à E1 et E5. Cette relance permet à E1 de formuler adéquatement une relation alors que E5 n'y arrive pas.

Suite aux analyses des conduites des élèves, cette tâche nous informe des calculs relationnels engagés par chacun d'eux pour un énoncé de problème de type produit de mesures alors qu'un calcul numérique est fourni. Avec ces contraintes, E1, E3 et E4 engagent un calcul relationnel multiplicatif adéquat pour cet énoncé alors que E5 et E2 n'y arrivent pas.

4.2.12 Analyse intratâche de la question 15a

La question 15a comporte un énoncé de produit cartésien à trois espaces de mesures qui est présenté oralement : « Un professeur a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Elle a aussi 2 certificats différents pour la réussite aux tables de multiplication. Combien de certificats avec des motifs différents peut-elle faire pour ses élèves ? » Nous ne sommes pas surprise des résultats considérant la complexité du calcul relationnel de ce type de problèmes, mais également le contexte et la formulation même de l'énoncé.

a) Conduites des élèves à la question 15a

Cette tâche impliquant trois dimensions est peu réussie par les élèves. Dans un premier temps, plusieurs élèves précisent qu'ils ne comprennent pas et proposent des solutions variées. L'échange avec les élèves permet cependant à quelques-uns de construire le sens de la situation, autrement dit de dégager qu'il y a création d'un nouvel objet par la combinaison d'étampes et de couleurs. La troisième dimension, les certificats, est abandonnée dans les échanges pour une centration sur la combinaison des étampes et des couleurs. Les stratégies demeurent très variées. Cette variété illustre, qu'à ce type de problème, les élèves n'associent pas une procédure canonique de résolution. Le tableau 4.18 répertorie les propositions à la question 15a avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.18 : Propositions des élèves à la question 15a avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	5×3		**$3 \times 5 + 3 = 18$**		**$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$**		**$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$**		**$3 + 5 = 8$**		**Dessin de quelques possibilités**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	-	E4	E5	E5	-	E1	-	E3	-	E2	E3	-
Totaux	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0

E5 amorce une démarche suite à la présentation de l'énoncé. La figure 4.3 montre les traces écrites de E5 qui dessine trois collections de cinq éléments.

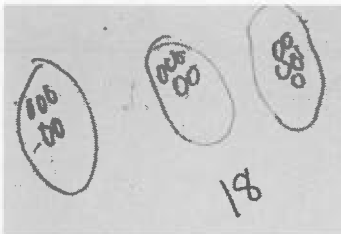


Figure 4.3 : Traces de E5 à la question 15a

L'interprétation est tout à fait intéressante. L'élève formule à l'oral ce qu'il ferait pour résoudre le problème : « Ben, moi j'aurais fait une couleur, une couleur, une couleur (en traçant des ronds au-dessus de la feuille). Puis dans chaque couleur, j'aurais mis chacune cinq étampes. » Cette formulation s'appuie sur une structure d'isomorphisme de mesures où les sous-collections correspondent aux couleurs et les éléments aux étampes. Cette stratégie est en effet appropriée pour dénombrer toutes les possibilités puisqu'à chaque couleur sont associées les cinq étampes, pour un total de quinze motifs différents. Invité à mettre en place sa stratégie, l'élève dénombre dix-huit objets : « Ça me donne dix-huit. Ça fait cinq, dix, quinze (en pointant les ronds dans chacun des cercles), seize, dix-sept, dix-huit (en pointant chacun des cercles). » Ainsi, E5 trouve dix-huit possibilités en procédant au comptage, par intervalles, des éléments qui représentent les étampes dans chacune des sous-collections, qui elles-mêmes représentent les couleurs. Autrement dit, au moment de dénombrer, l'élève ne considère pas que chaque élément est un produit issu à la fois d'une étampe et d'une couleur alors que le dessin est, par ailleurs, une modélisation correcte des relations. Est-ce que le dessin a entraîné un glissement vers un dénombrement et donc, une stratégie additive ; ou bien le dessin, malgré son intérêt, ne témoigne pas d'une mise en relation correcte entre les données du problème ? La question reste ouverte.

Des interventions de l'expérimentatrice sont nécessaires pour que les autres élèves amorcent une démarche. Dans le cas de E1, l'expérimentatrice explique ce qu'est une étampe, relance en retirant les certificats de l'énoncé et donne un exemple d'une étampe utilisée à deux reprises. E1 trouve, par la suite, trente motifs différents en effectuant l'addition itérée de six. Ce calcul numérique est difficile à interpréter comme en témoigne l'extrait suivant :

> Exp. : Comment tu as fait ?
> E1 : J'ai compté six, six, six, six, six.
> Exp. : Ok, pourquoi six ?
> E1 : Parce qu'on peut l'utiliser trois fois, et il y a trois couleurs.
> Exp. : On peut l'utiliser trois fois et il y a trois couleurs. Ok. Puis, la même chose pour chacun ?
> E1 : Oui.

L'expérimentatrice répète la réponse de l'élève sans toutefois interpréter cette réponse : qu'est-ce qui est donc répété trois fois ? Y a-t-il confusion entre $3 + 3$ et 3×3 ? Entre six et $3 + 3$? Le protocole ne nous permet pas de répondre à ces questions.

Le même type d'échange est réalisé avec E2 qui énonce d'abord plusieurs appariements possibles de façon aléatoire. Puis, de façon plus structurée, elle dit :

> Je pourrais prendre le bonhomme sourire, ici il y a trois sortes de encre. Je pourrais… je pourrais tremper dans le rose, dans le bleu ou dans le orange et le soleil aussi et je pourrais calculer combien il y a de motifs.

Malgré la forme relativement structurée de sa démarche, invitée par l'expérimentatrice à dire quel calcul elle engagerait, E2 conclut par le calcul numérique $3 + 5 = 8$. Il semble que cette relance ait provoqué une mise à distance de l'interprétation initiale de l'énoncé pour engager un calcul numérique additif. Il est clair que E2 n'associe pas d'emblée ce problème à une multiplication bien qu'il soit clair qu'elle engage une modélisation de la relation en jeu. Cette modélisation pourrait éventuellement lui permettre de dénombrer l'ensemble des possibilités et d'agir comme outil efficace de résolution. Contrainte de mettre en place un calcul, l'élève se rabat sur un calcul connu et maîtrisé, l'addition, puisque l'opération de multiplication n'est pas, pour elle, associée à la modélisation qu'elle a amorcée.

E3 commence par dessiner deux possibilités puisqu'il y a deux certificats. Le premier certificat avec un sourire, un cœur et une lune et le deuxième avec un soleil, une étoile et un sourire, sans préciser la couleur des étampes. Il n'y a donc pas une combinaison correcte des différentes grandeurs. Il n'y a, en effet, que deux certificats et, sur chacun d'eux, il y a trois étampes différentes. Les couleurs ne sont donc pas considérées, sauf, pourrions-nous dire, dans la quantité d'étampes qui correspond à celle des couleurs (trois). L'expérimentatrice relance le problème en enlevant la donnée des certificats et demande à E3 de sortir trois crayons de couleur. L'impasse sera alors dénouée. E3 s'appuie sur sa collection de crayons pour itérer la quantité trois, cinq fois (3 + 3 + 3 + 3 + 3), ce qui lui permet de trouver la réponse numérique recherchée, soit quinze motifs différents.

Pour relancer E4, l'expérimentatrice s'appuie sur la relance prévue dans l'analyse *a priori* et propose des images d'étampes, de couleurs et de certificats. E4 trouve quinze motifs possibles, en multipliant trois et cinq. Cette réponse ne tient pas compte des certificats cependant.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à trois types de relances dont deux sont prévues *a priori*. Étant donné l'enchaînement des relances au cours des échanges plutôt serrés, il est difficile de spécifier l'effet de chacune d'elles. Le premier type de relances consiste à proposer des images des étampes, des couleurs et des modèles de certificats. Étant donné les difficultés de compréhension rencontrées, les images sont présentées rapidement à quatre élèves (E1, E2, E3 et E4). Le deuxième type de relances consiste à retirer les certificats, ce qui crée un énoncé de problème à deux dimensions. Cette relance fut utilisée pour trois élèves, E1, E2 et E3. Bien que cette relance ne soit pas utilisée avec E4 et E5, ceux-ci ne considèrent pas les certificats dans leur mise en relation. C'est sans doute la relance la plus utile dans la mesure où les élèves s'engagent alors dans la modélisation du produit cartésien.

L'expérimentatrice procède à un troisième type de relances, improvisé, auprès de trois élèves (E1, E2 et E3), soit de donner un exemple de possibilités lorsque l'élève ne conçoit pas l'usage multiple des étampes, des couleurs et des modèles de certificats. Cette relance mène à des échanges serrés où, en donnant un exemple, l'expérimentatrice explicite une stratégie d'appariement.

Suite aux analyses des conduites des élèves, cette tâche impliquant trois dimensions s'avère trop complexe pour l'investigation des connaissances sur le produit cartésien. Cependant, les échanges permettent tout de même aux élèves d'engager une démarche qui nous fournit certaines informations sur les connaissances engagées. E3 résout l'énoncé par une addition itérée et E4, par une multiplication. Tous deux engagent donc un calcul relationnel adéquat. Les démarches proposées par E1, E2 et E5 ne permettent pas d'interpréter le calcul relationnel engagé. Cependant, aucun d'entre eux ne résout l'énoncé par un calcul multiplicatif.

4.2.13 Analyse intratâche de la question 15b

La question 15b comporte un énoncé de produit cartésien à deux espaces de mesures qui est présenté oralement : « Un artisan bijoutier a créé 13 modèles de colliers et 13 modèles de bagues. Il veut vendre des ensembles composés d'un collier et d'une bague. Combien d'ensembles différents peut-il offrir ? »

a) Conduites des élèves à la question 15b

Considérant que E2 recourt à une stratégie additive pour résoudre l'énoncé 15a qui est un produit cartésien à deux dimensions, cet énoncé de produit cartésien impliquant de plus grands nombres n'a pas été présenté parce qu'il est jugé plus difficile que le précédent. Donc, quatre élèves résolvent cette tâche et le tableau 4.19 présente les conduites mathématiques des élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.19 : Conduites mathématiques des élèves à la question 15b avant et après toute relance

	Sans interprétation		**13 + 13 / 4 + 5**		**Appariement unique: 13 ensembles**		**CR et CN : addition itérée de 13**		**CR: addition itérée de 13 CN: 13 × 13**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1	-	E3	E1 E3	E4 E5	-	-	E5	-	E4
Totaux	**1**	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

Légende *CR : Calcul relationnel* *CN : Calcul numérique*

L'interprétation des relations entre les données n'est aisée pour aucun des élèves. Plusieurs, d'ailleurs, demandent à l'expérimentatrice une seconde lecture de l'énoncé et expriment leur incompréhension dès le départ. La création d'un ensemble pose des difficultés de conceptualisation, comme bien des études l'ont démontré. Cette difficulté consiste, ici plus particulièrement, à saisir que chaque modèle, soit de collier ou de bague, peut se répliquer autant de fois que nécessaire, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a un élément à apparier pour former un nouvel ensemble. C'est bien l'idée de recherche d'un nombre de possibilités qui est en cause.

E1 mentionne qu'il ne comprend pas, mais avance tout de même qu'il y a deux possibilités, ce qui réfère aux deux items, un collier et une bague, qui composent tous deux un ensemble. L'expérimentatrice propose alors le même énoncé avec quatre colliers et cinq bagues pour faciliter la mise en relation. E1 détermine alors qu'il y a 5 + 4 = 9 possibilités. Cette stratégie additive ne permet pas la création d'une mesure composée qui caractérise le produit cartésien.

E3, tout comme E1 a recourt à une stratégie additive : 13 + 13 = 26 possibilités. Puisque l'élève ne conçoit pas l'usage multiple d'un modèle de colliers ou de bagues, l'expérimentatrice amorce l'appariement d'un collier avec trois bagues, successivement. Suivant cette même stratégie, E3 effectue l'appariement du premier collier avec les trois premières bagues, puis du deuxième collier avec les quatrième, cinquième et sixième bagues. Voyant qu'elle ne dispose pas de suffisamment d'exemplaires d'une même bague, elle abandonne la stratégie et malgré un pilotage serré de l'expérimentatrice, maintient sa réponse initiale, soit vingt-six possibilités.

Deux élèves, E4 et E5 effectuent une représentation de treize ronds pour les colliers et treize autres pour les bagues. Puis par appariement d'un collier avec une bague, concluent qu'il y a treize ensembles possibles. L'expérimentatrice relance par un exemple d'appariement, ce qui permet aux élèves de concevoir l'usage multiple de chacun des modèles de colliers et de bagues et ainsi déterminer qu'il y a treize possibilités d'ensemble par collier, qui peut se traduire par un calcul relationnel d'addition itérée de treize. Alors que E4 effectue la multiplication 13 × 13 pour déterminer le nombre total de possibilités, E5 procède à l'addition itérée de treize.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à deux types de relances. Le premier type de relances, prévu à l'analyse *a priori*, consiste à proposer des nombres plus petits, quatre colliers et cinq bagues, afin de faciliter la mise en relation des données. Cette relance effectuée auprès de E1 l'a amené à modifier sa conduite, sans pour autant lui permettre d'établir une relation multiplicative de type produit cartésien.

Le second type de relances, improvisé auprès de E3, E4 et E5, consiste à donner un exemple de possibilités lorsque l'élève ne conçoit pas l'usage multiple des bagues et des colliers. Cette relance mène à des échanges serrés où, en donnant un exemple, l'expérimentatrice explicite une stratégie d'appariement. Cette relance a permis à E4 et E5 de se représenter les relations et d'établir des calculs relationnel et numérique adéquats. L'extrait suivant, tiré de l'entretien avec E4, permet de voir comment l'élève est en appropriation de sens du produit cartésien et qu'il contrôle les relations. Au cours de l'échange, l'élève rejette 13×2, pour envisager treize possibilités pour chaque bague et de là, engager une addition répétée qui, sous l'invitation de l'expérimentatrice, se modifie en calcul numérique multiplicatif. L'élève envisage un temps de multiplier par deux le résultat obtenu comme si, partant des colliers, il faudrait doubler les possibilités. Cependant, l'élève reconnait de lui-même que ce calcul est inutile. Cet extrait, bien qu'un peu long, nous semble digne d'intérêt pour saisir comment l'accompagnement à travers une relance peut engager l'élève à un contrôle sur les relations.

> E4 : Fait que il y en a vingt-six… parce que si je fais ça fois deux, 13×2, ça, ça me donne vingt-six.
> E4 écrit $13 \times 2 = 26$.
> Exp. : Ok. Fait qu'avec cette bague-là…
> E4 : Je peux mettre avec celle-là, celle-là, n'importe qu'elle.
> Exp. : Ça fait combien de possibilités pour cette bague-là ?
> Exp. pointe une bague.
> E4 : Treize.
> Exp. : Ok. Pour celle-là ?
> Exp. pointe une autre bague.
> E4 : Treize.
> Exp. : Pour celle-là ?
> Exp. pointe la troisième bague.
> E4 : Treize, treize, treize, treize, treize, treize, treize, treize, treize, treize, puis treize. Mais... chaque collier ou chaque bague, ça peut être avec un des treize colliers ?
> Exp. : Henhen.
> E4 : Et les colliers aussi peuvent être avec une des treize bagues.
> Exp. : Penses-tu que ça fait plus que vingt-six possibilités ?

E4: Oui. C'est un gros calcul ça.
Exp. : Comment tu pourrais faire ?
E4 : Je pourrais prendre, ben compter avec lui, combien je peux en mettre. Avec lui, je peux en mettre treize, treize, treize, treize.
E4 écrit treize (13) sous chaque bague. Il compte le nombre de treize.
E4 : Fait que là, je fais 13 × 13 ?
Exp. : Oui, ça se pourrait.
E4 effectue 13 × 13 avec l'algorithme de multiplication.
E4 : Puis là, comme avec cette ligne il y en a treize et je peux en faire encore, là, je fais 169 + 169.
E4 effectue l'algorithme de l'adition.
E4 : C'est ça.
Exp. : OK.
E4 : Trois cent trente-huit possibilités. Non, attends. Je crois que c'est cent soixante-neuf parce que ça fait la même chose.
Exp. : Oui je pense que tu as raison.
E4 : Ce calcul (169 + 169) n'est pas bon.

En somme, malgré la difficulté des élèves à établir des calculs relationnels de type produit cartésien, cette tâche nous informe des stratégies déployées pour résoudre des énoncés de produit cartésien. E4 et E5 qui modélisent l'énoncé par une représentation dessinée établissent un calcul relationnel adéquat. E4 a recours à la multiplication pour trouver le nombre de possibilités, alors que E5 procède par addition itérée. E1 et E3 engagent tous deux un calcul relationnel additif inadéquat, ce qui ne permet pas la création d'une mesure composée.

4.2.14 Analyse intratâche de la question 16

La question 16 comporte un énoncé de produit cartésien à trois dimensions qui est présenté oralement : « Dans un restaurant, on propose des trios. Un trio repas est composé d'une boisson, d'un met principal et d'un dessert. Par exemple, un trio peut être : un lait, un spaghetti et un gâteau. Le restaurateur veut proposer un choix de 12 trios différents. Il propose 3 choix de boissons. Combien de choix de mets principaux et combien de choix de desserts peut-il proposer à ses clients ? » Une image d'un trio est montrée en même temps que l'énoncé.

a) Conduites des élèves à la question 16

Le niveau de difficulté est supérieur celui des problèmes précédents étant donné que les deux mesures recherchées sont les choix de mets principaux et de desserts, et non le nombre de combinaisons possibles ($M_1 \times M_2 \times M_3 = MC$, $3 \times \_\_ \times \_\_ = 12$). Aucun des élèves ne déploie une stratégie permettant de résoudre l'énoncé. Cependant, les conduites sont variées. Le tableau 4.20 répertorie les conduites mathématiques de quatre élèves à la question 16.

Tableau 4.20 : Conduites mathématiques des élèves à la question 16

	6 desserts et 12 mets principaux	**Dessin de 12 trios différents**	**CN : 12 ÷ 3 CR : division regroupement**
Élèves	E1	E4	.E3 E5
Totaux	**1**	**1**	**2**

Légende : CR : Calcul relationnel CN : Calcul numérique

E1 a besoin d'un temps d'appropriation et il considère d'abord qu'il ne peut y avoir que neuf trios différents, ayant compris qu'il y a trois boissons et trois desserts différents. Bien que E1 résolve un autre problème, sa démarche est juste puisqu'il crée neuf combinaisons à partir de trois boissons et trois desserts. L'expérimentatrice lui répète que l'on cherche le nombre de desserts et de mets principaux. E1 répond qu'il y a six desserts et douze mets principaux. L'échange ne permet pas de déterminer sur quelle stratégie repose cette réponse.

Un élève, E4, dessine douze trios différents. Tout comme E1, un temps d'appropriation est nécessaire. Suite à un échange un peu serré où il pose des questions à l'expérimentatrice afin de valider sa compréhension, il amorce une stratégie qui consiste à dessiner douze trios différents en variant les boissons, les mets principaux et les desserts sans pour autant respecter les contraintes, soit avoir un nombre limité de boissons, de mets principaux et de desserts. La figure 4.4 présente les traces de E4 lors de la résolution de la question 16.

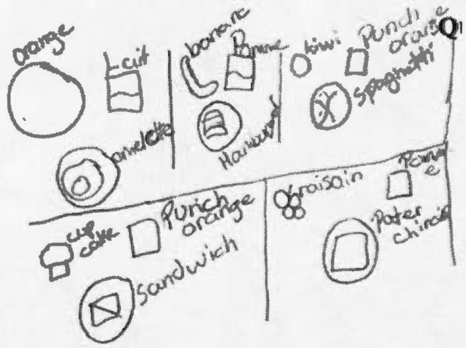


Figure 4.4 : Traces de E4 à la question 16

En cours de réalisation, l'expérimentatrice relance l'élève : elle lui fait remarquer qu'il a quatre boissons différentes alors que dans l'énoncé, il n'y en a que trois. E4 pose des questions pour orienter sa stratégie et l'expérimentatrice relit l'énoncé. Il ajuste donc celle-ci en utilisant de nouveau la même boisson pour les trios subséquents. Considérant que la stratégie ne permet pas de contrôler l'ensemble des contraintes, l'expérimentatrice l'arrête après le dessin du cinquième trio.

Deux élèves, E3 et E5, modélisent l'énoncé selon une division regroupement et convoquent la division $12 \div 3$ pour le résoudre. Alors que E3 précise qu'il y a trois éléments par trio, un jus, un dessert et un met principal, E5 interprète qu'il y a trois boissons par trio.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Tel que nous l'avons mentionné, cette tâche est complexe et difficilement comprise par les élèves, ce qui donne lieu à quelques échanges serrés. Bien que l'expérimentatrice intervienne, aucune intervention ne permet à un élève de mener cette tâche correctement à terme. La seule relance claire effectuée auprès de E4 consiste à lui faire remarquer qu'il a une boisson de plus que ce qu'il y a dans l'énoncé. Après avoir posé quelques questions, E4 cherche à ajuster sa stratégie en utilisant de nouveau la même boisson pour les trios subséquents.

4.3 Analyses intratâches des tâches de *Calcul et propriétés*

Dans cette section, nous présentons les analyses intratâches des tâches 1, 9, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 et 24 de la collection *Calcul et propriétés*.

4.3.1 Analyse intratâche de la question 1

Les faits multiplicatifs sont demandés oralement. On laisse un maximum de cinq secondes à l'élève, par fait demandé, pour répondre. Le but de cette tâche est de vérifier la connaissance des faits multiplicatifs et, éventuellement, vérifier si cette connaissance est utilisée en résolution de problèmes.

a) Conduites des élèves à la question 1

Le tableau 4.21 présente une compilation des réponses de cinq élèves lors du rappel des faits multiplicatifs. Les douze multiplications demandées sont réparties comme suit : deux carrés (3×3 et 5×5), deux doubles (2×7 et 2×6), un multiple de 10 (6×10), trois carrés plus ou moins une fois (8×9, 3×4 et 7×6), trois éléments neutres (4×1, 1×5 et 8×1) et un élément absorbant (3×0). Les réponses des élèves sont comptabilisées selon trois niveaux : *connu*, si l'élève répond correctement à l'ensemble des faits de cette catégorie; *un peu connu,* si l'élève a au moins une bonne réponse sur trois; *non connu,* si l'élève n'a aucune bonne réponse.

Tableau 4.21 : Rappel des faits multiplicatifs de cinq élèves à la question 1 : connaissances des multiplications

	Carré			**Double**			**Multiple de 10**			**Carré + ou – une fois**			**Élément neutre (× 1)**			**Élément absorbant (× 0)**		
	*	**	***	*	**	***	*	**	***	*	**	***	*	**	***	*	**	***
Élèves	-	-	E1 E2 E3 E4 E5	-	-	E1 E2 E3 E4 E5	-	-	E1 E2 E3 E4 E5	E1	E2 E4 E5	E3	-	-	E1 E2 E3 E4 E5	-	-	E1 E2 E3 E4 E5
Totaux	**0**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**	**1**	**3**	**1**	**0**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**

Légende : *** *: connu 2/2 ou 3/3*
** *: un peu connu 1/2 ou 1/3 ou 2/3 (au moins une bonne réponse)* * *: non connu 0/2 ou 0/3*

Par rappel direct, les cinq élèves répondent correctement à l'ensemble des questions impliquant un carré, un double, un multiple de 10, l'élément neutre et l'élément absorbant. Des erreurs sont observées lors du rappel des faits multiplicatifs impliquant des carrés plus ou moins une fois, sauf pour E3 qui répond correctement à l'ensemble des questions. Une stratégie de comptage rythmé sans compteur est employée par E1 et E2 pour trouver le produit de 3×4. Si E2 contrôle cette stratégie et obtient douze, E1 commet une erreur et obtient treize.

Le tableau 4.22 présente une compilation des réponses de cinq élèves lors du rappel des faits multiplicatifs. Les douze divisions demandées sont réparties comme suit : deux carrés (16 ÷ 4 et 36 ÷ 6), deux doubles (12 ÷ 6, 18 ÷ 2), deux multiples de 10 (50 ÷ 5 et 70 ÷ 10), quatre carrés plus ou moins une fois (56 ÷ 8, 72 ÷ 9, 30 ÷ 5 et 20 ÷ 5) et deux éléments neutres (7 ÷ 7 et 6 ÷ 1). Les réponses des élèves sont compilées dans le tableau 4.22 selon trois niveaux : *connu*, si l'élève répond correctement à l'ensemble des faits de cette catégorie; *un peu connu*, si l'élève a au moins une bonne réponse sur deux ou sur trois; *non connu*, si l'élève n'a aucune bonne réponse ou une bonne réponse sur quatre.

Tableau 4.22 : Rappel des faits multiplicatifs de cinq élèves à la question 1 : connaissances des divisions

	Carré			**Double**			**Multiple de 10**			**Carré + ou – une fois**			**Élément neutre**		
	*	**	***	*	**	***	*	**	***	*	**	***	*	**	***
Élèves	E2 E5	E1	E3 E4	E1 E2	E4 E5	E3	E2 E5	E1	E3 E4	E1 E5	E3 E4	-	E2	E5	E1 E3 E4
Totaux	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**0**	**1**	**1**	**3**

Légende : *** *: bien connu 2/2 ou 3/3* ** *: un peu connu 1/2 ou 1/3 ou 2/3*
* *: non connu 0/2 ou 0/3 ou 1/4*

Les résultats montrent que les divisions sont moins connues que les multiplications. Étant donné les difficultés de E2 à rappeler les quotients, les divisions impliquant des carrés plus ou moins une fois ne lui ont pas été demandées. Outre le rappel direct qui constitue la principale stratégie employée, d'autres stratégies sont observées en cours d'entretien. Pour trouver la réponse de 36 ÷ 6, E3 met en place un double réseau et procède par comptage, sans compteur, par intervalles : « ... Dix-huit, vingt-quatre, trente... six. » Nous observons également une confusion entre l'élément neutre et l'élément absorbant chez E5 qui répond 7 ÷ 7 = 0.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Une seule relance faite auprès de E2 est effectuée. Elle porte sur la division comme opération réciproque de la multiplication. L'expérimentatrice écrit $2 \times 7 = 14$ ainsi que $14 \div 7 = 2$. À partir de ces écritures, elle demande à E2 de trouver l'autre division associée et E2 identifie alors $14 \div 2 = 7$. Suite à ces écritures, E2 propose une multiplication, soit $8 \times 7 = 56$, et écrit les deux divisions réciproques de cette multiplication. Les divisions ne sont cependant pas demandées suite à cette relance.

4.3.2 Analyse intratâche de la question 9

L'énoncé de la tâche 9 est présenté oralement et on écrit les nombres 2 550 et 25 sur un papier : « J'ai 2 550 bonbons à partager entre 25 enfants. On se demande combien chaque enfant va recevoir de bonbons. » Quelques nombres inscrits sur un carton sont présentés, 15, 75, 95, 102 et 305, puis on demande : « Lequel de ces nombres, selon toi, indique ce que chaque enfant va recevoir. Pourquoi ? » Ce problème est une division partage et il vise à circonscrire les connaissances (notamment, la numération de position, les critères de divisibilité et la division partage) que l'élève sollicite pour identifier le quotient.

a) Conduites des élèves à la question 9

Le tableau 4.23 présente les réponses choisies par cinq élèves avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.23 : Réponses choisies à la question 9 avant et après toute relance

	102		305		95		75		15	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E1 E4	E3	E5	-	E2	-	-	-	-	-
Totaux	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Deux élèves (E1 et E4) choisissent correctement cent deux (102). Cependant, nous ne disposons pas d'informations pour préciser sur quelles connaissances s'appuie le choix de E4. L'expérimentatrice presse E1 de justifier son choix et le questionne sur les autres nombres proposés. Les justifications données par E1 n'apportent aucune précision sur ce qui fonde son choix. Cependant la conviction de E1 suggère qu'un contrôle par des connaissances numériques est exercé.

E3 et E5 reconnaissent l'utilité de l'opération 2 550 ÷ 25 pour résoudre l'énoncé. E3 veut effectuer la division 2 550 ÷ 25, mais sollicitée par l'expérimentatrice, elle évoque que chaque enfant pourrait avoir soixante-quinze bonbons. Puis, invitée à se prononcer sur les autres nombres, elle retient comme solution possible, trois cent cinq (305). Ces nombres s'appuient sur une appréciation qualitative de la quantité de bonbons reçus et sur la connaissance, activée au départ, que la réponse doit être un multiple de cinq. Invitée à vérifier sa réponse, E3 recourt, par calcul mental, à ses connaissances de l'algorithme de division de manière très efficace comme le montre l'extrait suivant. Elle détermine ainsi que la réponse est de l'ordre de la centaine, et elle choisit donc cent deux (102) :

> Puisque deux dans vingt-cinq, ça ne se peut pas. Donc là, j'ai fait comme ça (E3 fait un arc sous le 25 dans 2550) dans ma tête. Donc là, vingt-cinq fois vingt-cinq, bon comme vingt-cinq fois un, ça fait vingt-cinq. Donc là, j'ai mis un un comme dans ma tête. Ensuite, j'ai fait ... ça m'a donné zéro. Donc, j'aurais dit que ça commence par un cent. Puis un zéro parce que comme vingt-cinq fois zéro, ben c'est zéro. Puis sûrement le fois deux, ...

Elle conforte d'ailleurs sa solution en éliminant les nombres quinze (15) et trois cent cinq (305), jugés respectivement trop petit et trop grand, en faisant encore appel à ses connaissances de l'algorithme de division et peut-être, également, aux relations numériques impliquées dans le problème :

> Comme j'avais fait le calcul et puisque le premier nombre m'a donné un, ça ne peut pas être quinze parce que c'est beaucoup trop bas et 305 non. Donc, j'y vais pour 102.

E5 écrit d'emblée la division 2 550 ÷ 25 et choisit trois cent cinq (305). Ce choix repose sur la relation entre le dividende, deux mille cinq cent cinquante (2550), considéré par E5 comme un grand nombre, et le quotient qui devrait, en conséquence, être un grand nombre. L'élève ne considère donc pas le diviseur pour établir son estimation. L'expérimentatrice l'invite alors à résoudre l'énoncé, ce qu'elle ne peut accomplir. Les nombres sont alors modifiés par l'expérimentatrice qui propose successivement deux cent cinquante (250) et vingt-cinq (25). Reconnaissant l'élément neutre de la multiplication, elle est capable d'identifier que chaque enfant a un bonbon s'il y a vingt-cinq bonbons, mais elle ne peut prévoir le nombre de bonbons pour chaque enfant, s'il y a deux cent cinquante bonbons. Les connaissances sur la numération de position ne sont donc pas utilisées.

E2 choisit quatre-vingt-quinze (95). Interrogée par l'expérimentatrice, elle rejette les autres nombres proposés, mais sans justifier son choix. Nous ne pouvons ainsi pas juger des connaissances sur lesquelles est fondée sa réponse.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

La plupart des interventions de l'expérimentatrice visent à amener l'élève à justifier son choix. Outre ces interventions, l'expérimentatrice procède à deux types de relances. Un premier type de relances est effectué auprès de E3 qui engage l'algorithme de division. L'expérimentatrice l'invite plutôt à examiner les nombres et à choisir celui qui est le plus approprié. Cette relance a pour effet d'éloigner l'élève d'un contrôle numérique au profit d'une appréciation strictement qualitative.

Un deuxième type de relances consiste à modifier les nombres proposés pour faciliter le calcul mental. Auprès de E5, à qui on propose deux cent cinquante bonbons et vingt-cinq enfants, puis vingt-cinq bonbons et vingt-cinq enfants, cette relance ne permet pas de convoquer des connaissances sur la numération de position.

En bref, même si E1 et E4 choisissent la bonne réponse, leur justification ne permet pas de savoir si les connaissances sur la numération de position décimale sont convoquées. Par ailleurs, les conduites de E3 et de E5 montrent qu'ils mettent en œuvre un calcul relationnel de division accompagné de l'algorithme de division. Pour sa part, E2 choisit une mauvaise réponse et ne peut la justifier.

4.3.3 Analyse intratâche de la question 17

On présente par écrit l'énoncé suivant : « Marie sait que $8 \times 12 = 96$. Peux-tu l'aider à trouver des réponses à d'autres multiplications à partir de ce qu'elle connait et donc, sans lui donner la réponse ! » Cet énoncé est suivi de quatre questions qui évaluent l'utilisation des propriétés de la multiplication pour le calcul mental : a) 12×8; b) 7×12; c) 8×13; d) 16×12. L'enjeu mathématique n'est pas d'emblée circonscrit par les élèves qui cherchent plutôt à identifier les écritures qui correspondent à 96.

a) Conduites des élèves à la question 17

Cette question, dont le contenu s'adresse aux élèves de troisième cycle du primaire, n'est pas posée à E1, qui est au deuxième cycle ni à E2, dont le profil est aussi celui d'un élève de deuxième cycle. Les trois autres élèves (E3, E4 et E5) réfèrent à la commutativité pour trouver la réponse à 17a) 12×8. Sachant que $8 \times 12 = 96$, 12×8 « c'est la même chose, c'est juste qu'on a inversé les nombres » comme le mentionne E3.

Le tableau 4.24 présente les conduites mathématiques de trois élèves (E3, E4 et E5) à la question 17b) 7×12 qui peut être interprétée comme une fois douze de moins que 8×12.

Tableau 4.24 : Conduites mathématiques de trois élèves à la question 17 b) 7×12

	Impossible	**Distributivité erronée : 96 – 7**	**Distributivité : 96 - 12 = 84**
Élèves	E4	E3	E5
Totaux	**1**	**1**	**1**

E4 considère qu'il est impossible de trouver la réponse à partir de la multiplication donnée, même lorsque les nombres sont modifiés. E4 n'arrive pas à saisir l'enjeu mathématique et affirme qu'il est impossible que Marie obtienne quatre-vingt-seize (96) à partir de 7×12. Suite à la question 17c, l'expérimentatrice revient sur 17b en modifiant les nombres. Il s'agit alors de trouver le résultat de 4×12 sachant que $5 \times 12 = 60$. N'identifiant pas le terme commun aux deux multiplications (12), il affirme de nouveau l'impossibilité d'arriver à la réponse, car on ne peut s'aider d'une multiplication par cinq pour trouver le résultat d'une multiplication par quatre. Il semble donc que, pour cet élève, ces deux écritures ne soient pas liées à la table des faits multiplicatifs de douze, mais plutôt associées à la « table de quatre » et à la « table de cinq » qui n'entretiendraient entre elles aucune relation.

E3 réfère quant à elle explicitement à l'apprentissage des « tables de multiplication ». Elle mentionne d'abord que Marie devrait connaitre 7×12 « puisque sept est avant le huit, sûrement qu'elle le sait déjà ». Autrement dit, la table de sept étant apprise avant celle de huit, elle devrait savoir la table de sept. E3, invitée à proposer une démarche alternative à partir de $8 \times 12 = 96$, propose d'effectuer $96 - 7$. Cette démarche témoigne d'un emploi mal contrôlé de la distributivité puisque $96 - (1 \times 7)$ est effectué à partir de 8×12, au lieu de $96 - (1 \times 12)$ à partir de 8×12.

E5 est la seule qui utilise correctement la distributivité en proposant $96 - 12$, car : $7 \times 12 = 8 \times 12 - 1 \times 12 = 96 - 12$. Le tableau 4.25 présente les conduites mathématiques de trois élèves (E3, E4 et E5) à la question 17c) 8×13 avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.25 : Conduites de trois élèves à la question 17 c) 8×13 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Impossible		**Distributivité erronée : $8 \times 12 + 1 \times 12$ ou $96 + 12$**		**Distributivité : $8 \times 12 + 8 \times 1$ ou $96 + 8$ $60 + 5$**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E4	-	E5	-	E3	E4
Totaux	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Tout comme pour la question précédente, E4 n'interprète pas l'enjeu mathématique et considère qu'il est impossible d'obtenir quatre-vingt-seize (96) à partir de 8×13. Une fois les nombres modifiés, E3 est appelé à se prononcer sur la possibilité de trouver 5×13 sachant que $5 \times 12 = 60$. Puisque le premier terme des deux multiplications est identique (5), E4 est en mesure de recourir à la distributivité pour trouver 1×5 de plus que 5×12 et effectue mentalement $60 + 5$, qui peut se traduire par $5 \times (12 + 1) = 5 \times 12 + 5 \times 1$. E3 convoque directement la distributivité en s'appuyant sur la démarche engagée dans la question précédente : « C'est la même chose, c'est juste qu'on a fait plus un et qu'on a multiplié. » Elle précise judicieusement qu'il faut effectuer $96 + 8 = 104$. Tout comme E3, E5 s'appuie sur la démarche déployée à la question précédente, mais sans l'adapter aux nouvelles conditions, ce qui occasionne une erreur dans l'application de la distributivité. En effet, E3 fait un emploi mal contrôlé de la distributivité puisqu'elle effectue, à partir de 7×12, le calcul $96 + (1 \times 12)$ au lieu d'utiliser 8×12 pour faire $96 + (1 \times 8)$.

Les conduites mathématiques de trois élèves (E3, E4 et E5) à la question 17d) 16×12, avant et après toute relance, sont présentées dans le tableau 4.26.

Tableau 4.26 : Conduites mathématiques de trois élèves à la question 17d) 16×12 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	Calcul numérique erroné : $16 \times 12 \times 2$		**Associativité : $(8 \times 2) \times 12 = (8 \times 12) \times 2$**		**Pas de réponse**		**$(10 \times 10) + (2 \times 10)$**	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E3	-	-	E3	E5	-	-	E4
Totaux	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**

E3 convoque d'abord correctement l'associativité en précisant qu'on doit, pour obtenir 16×12 à partir de 8×12, multiplier le huit par deux et conserver le douze tel quel. Par contre, elle poursuit en affirmant qu'il faut multiplier par deux la réponse de 12×16. On pourrait traduire son raisonnement par l'écriture suivante : $(8 \times 2) \times 12 = 16 \times 12$. Mais il y a redondance de la multiplication par deux, dans la conclusion, puisqu'elle propose $16 \times 12 \times 2$. L'échange avec l'expérimentatrice permet à E3 de corriger son erreur et de proposer comme calcul, 96×2.

E4, appelé à se prononcer sur 10×12, fait abstraction de la multiplication proposée et convoque plutôt ses connaissances des multiples de dix pour produire le calcul suivant : $(10 \times 10) + (2 \times 10) = 100 + 20 = 120$. Notons que ce calcul est très approprié et économique pour trouver le produit de 10×12. Seule E5 ne trouve pas de réponse, affirmant qu'elle opterait pour l'utilisation de l'algorithme de multiplication pour trouver la solution de 16×12.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Deux relances sont effectuées auprès de E4. Devant la difficulté à saisir l'enjeu mathématique, l'expérimentatrice donne un exemple :

> Disons que tu connais $3 \times 4 = 12$ et tu dis, est-ce que je suis capable de trouver 3×5 à partir de la réponse que je connais. Là, elle, elle connaît 8×12 par cœur, elle sait que ça donne quatre-vingt-seize. Est-ce qu'elle peut se servir de ça pour trouver 8×13 ? Pour trouver la réponse à 8×13 ?

Cette relance n'est pas utile et ne permet pas à l'élève de saisir que l'enjeu est de considérer le produit 8×12, soit quatre-vingt-seize (96), pour produire celui de 8×13. Constatant que cette relance a peu d'effet, l'expérimentatrice procède à un second type de relances qui consiste à modifier les variables numériques. Celles-ci deviennent alors : 5×12 ; b) 4×12 ; c) 5×13 ; d) 10×12. Le choix des nombres s'avère approprié pour les questions b et c. Par contre, la multiplication 10×12 est peu appropriée pour évaluer l'associativité puisqu'elle favorise le recours aux connaissances des multiples de dix, contournant ainsi la nécessité de recourir à l'associativité.

Cette tâche nous informe si les élèves peuvent avoir recours aux propriétés de la multiplication pour le calcul mental. E3, E4 et E5 convoquent leurs connaissances de la commutativité pour le calcul mental. Tous les trois contrôlent une fois sur deux l'emploi de la distributivité. Alors que E3 recourt à l'associativité, E5 ne le fait pas. Le changement des nombres, suite à la relance, n'offre pas un contexte propice à E4 pour l'emploi de l'associativité.

4.3.4 Analyse intratâche de la question 18

L'énoncé de la question est présenté oralement pendant que l'on écrit 14 sacs et 15 bonbons par sac : « J'ai préparé des petits sacs de bonbons à offrir à mes invités pour les remercier d'être venus à mon anniversaire. J'ai préparé 14 sacs et, dans chacun, j'ai mis 15 bonbons. Mais, oups, il n'y avait pas 14 amis à ma fête, mais 15 amis ! Vite ! Vite ! J'ai refait mes sacs. J'ai donc préparé 15 sacs avec les mêmes bonbons. Peux-tu me dire combien de bonbons il y a maintenant dans chacun de mes sacs ? » On écrit alors : 15 sacs et _______ bonbons par sac. Ce problème est un isomorphisme de mesures. La solution de ce problème fait appel à l'usage de la propriété de la commutativité puisque les nombres font obstacle au calcul mental.

a) Conduites des élèves à la question 18

Le tableau 4.27 présente les conduites mathématiques de quatre élèves (E1, E3, E4 et E5) à la question 18 avant et après toute relance de l'expérimentatrice.

Tableau 4.27 : Conduites mathématiques de quatre élèves à la question 18 avant et après toute relance de l'expérimentatrice

	16 bonbons/sac (parce que un de plus)		15 bonbons/sac		15 sacs × 15 bonbons/sac		14 bonbons/sac : 15 × 14 = 14 × 15	
	Avant	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*	*Avant*	*Après*
Élèves	E3	-	E4	-	E1 E5	E4	-	-
Totaux	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**

Une lecture un peu rigide de l'énoncé de la part de l'expérimentatrice et la difficulté à l'adapter à un contexte d'échange n'a pas favorisé l'appropriation de cet énoncé véritablement inhabituel pour les élèves. L'expérimentatrice n'a pas reformulé le problème en rappelant que les bonbons sont redistribués dans quinze sacs, et ce, bien que le nœud de l'énoncé soit l'invariance du nombre total de bonbons.

Trois des quatre élèves, E1, E4 et E5, semblent associer l'énoncé à un problème multiplicatif d'isomorphisme de mesures et proposent le calcul numérique 15 × 15 associé au calcul relationnel suivant : 15 bonbons par sac × 15 sacs (puisque quinze amis). Cependant, E4 semble déconcerté, non assuré de sa réponse, puisque la question posée ne correspond pas à cette interprétation. E3 quant à lui propose seize bonbons (15 bonbons/sac + 1 bonbon/sac) puisqu'un ami s'est ajouté (14 sacs + 1 sac puisque 14 amis + 1 ami). Aucun élève ne réfère donc à la commutativité.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Une seule relance est effectuée auprès de E4 et consiste à confronter sa réponse à une donnée de l'énoncé. Alors qu'il dit qu'il y a maintenant quinze bonbons par sac, l'expérimentatrice lui demande si c'est possible et répète l'énoncé. Cette intervention ne fait que modifier la dimension recherchée, soit le total de bonbons, par le calcul 15 × 15, au lieu du nombre de bonbons par sac.

4.3.5 Analyse intratâche de la question 19

La question 19 s'adresse aux élèves du troisième cycle et vise l'évaluation de l'utilisation des propriétés de la multiplication. Il est demandé à l'élève de compléter les égalités suivantes :

a) 3 × ___ = 7 × ____ b) 453 432 × 98 654 = 98 654 × _______

c) 7 × (8 + 3) = _____________ d) 8 × ___ = 8 × (10 + ___)

Aux questions c et d, on laisse l'élève calculer par lui-même pour voir s'il traite les parenthèses.

a) Conduites des élèves à la question 19

Cette question, dont le contenu s'adresse aux élèves de troisième cycle du primaire, n'est pas posée à E1, qui est au deuxième cycle, ni à E2, dont les connaissances sont du deuxième cycle. Aucun élève ne semble familier avec les écritures proposées.

L'égalité $3 \times \_ = 7 \times \_$ est réussie par E3 et E4 qui réfèrent à la commutativité. E5 ne propose aucune réponse. E4 et E5 complètent correctement l'égalité $453\,432 \times 98\,654 = 98\,654 \times \_$. Alors que E3 a répondu correctement à la première écriture, elle complète celle-ci avec le nombre un. Il est difficile de juger si les réponses adéquates témoignent d'une maîtrise de la commutativité, c'est la raison pour laquelle le protocole propose une écriture avec des grands nombres. Ainsi, il est possible que E3 ne maitrise pas la propriété de la commutativité. L'égalité, $7 \times (8 + 3) = \_$, n'est complétée correctement que par E3 et E4. E5 précise qu'elle ne sait pas comment faire. E3 convoque la distributivité et traite la parenthèse comme suit : $(7 \times 8) + (7 \times 3) = 84 + 21 = 105$. La procédure est correcte, mais une erreur de calcul fausse la réponse. Cependant, cette élève complète avec le nombre un les deux espaces à combler dans l'écriture suivante : $8 \times \underline{1} = 8 \times (10 + \underline{1})$. Faisant l'hypothèse qu'elle fait abstraction du nombre dix dans la parenthèse, l'expérimentatrice lui demande si le résultat est identique des deux côtés du signe d'égalité. E3 modifie sa réponse et, cette fois, fait abstraction du deuxième terme de la parenthèse, préférant y inscrire le résultat obtenu par la multiplication, 8×10, qui se trouve de part et d'autre du signe d'égalité : $8 \times \underline{10} = 8 \times (10 + \underline{80})$. E3 ne semble donc pas maîtriser une écriture qui s'appuie sur la distributivité. Pour sa part, E4 écrit d'abord 8 partout : $8 \times \underline{8} = 8 \times (10 + \underline{8})$. Puis, voulant valider sa réponse, il tente de calculer 8×8.

L'expérimentatrice l'invite à porter son attention non pas sur le résultat des multiplications, mais sur les termes qui les composent, à savoir 8×8 et 8×18. Cette intervention amène E4 à se corriger : $8 \times \underline{18} = 8 \times (10 + \underline{8})$.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à trois relances différentes. La première relance effectuée auprès de E3 consiste à lui demander si le résultat est identique de chaque côté de l'égalité. Bien que E3 modifie sa réponse, cette relance n'amène pas E3 à mieux utiliser la distributivité. La seconde relance est effectuée auprès de E4. L'expérimentatrice l'invite à considérer les écritures au lieu du résultat, de part et d'autre du signe d'égalité, afin de valider sa réponse, ce qui l'amène à recourir correctement à la distributivité. Cette relance semble plus adaptée que la première puisqu'elle suggère d'observer les nombres et les opérations impliqués. La troisième relance effectuée auprès de E5 n'a pas d'effet. Puisque E5 semblait rejeter une écriture dont plus d'un nombre se trouvait à droite de l'égalité, l'expérimentatrice lui donne un exemple dont le résultat est quinze, soit $3 \times 5 = 10 + 5$. Cependant, un seul exemple ne peut modifier la conception de l'élève selon laquelle le « résultat » d'une opération est écrit à droite du signe d'égalité.

En bref, la tâche nous informe que E4 maîtrise la commutativité alors que les contraintes didactiques influencent l'emploi de la commutativité par E3 et E5. Ainsi, E5 ne propose aucune réponse s'il y a deux inconnus et E3 ne convoque pas la commutativité lorsque de très grands nombres sont impliqués. Dans un contexte impliquant des écritures lacunaires, E4 convoque adéquatement la distributivité. Si E3 manque de contrôle sur l'emploi de la distributivité, E5 n'y arrive pas du tout.

4.3.6 Analyse intratâche de la question 20

La question est posée à l'oral : « Peux-tu compter par 2 à partir de 150 ? Peux-tu compter par 5 à partir de 175 ? Peux-tu compter par 10 à partir de 360 ? » Cette tâche permet d'évaluer la fluidité du comptage par intervalles en ordre croissant.

a) Conduites des élèves à la question 20

L'expérimentatrice ayant omis de poser la question à E5, quatre élèves ont répondu à cette question : E1, E2, E3 et E4. Le tableau 4.28 présente les conduites mathématiques des quatre élèves selon la justesse et la fluidité du comptage par intervalles de deux, de cinq et de dix.

Tableau 4.28 : Conduites mathématiques de quatre élèves à la question 20

	Comptage rythmé qui respecte les intervalles avec une ou deux erreurs.			**Comptage rythmé qui respecte les intervalles avec quelques hésitations.**			**Le comptage est fluide et sans difficulté.**		
Intervalles	*2*	*5*	*10*	*2*	*5*	*10*	*2*	*5*	*10*
Élèves	E1 E2 E3	-	E2	-	E1 E2 E3 E4	E1 E3 E4	E4	-	-
Totaux	**3**	**0**	**1**	**0**	**4**	**3**	**1**	**0**	**0**

Le comptage par intervalles de deux est fluide et sans erreur pour un seul élève, E4. Trois élèves, E1, E2 et E3, exercent un comptage rythmé qui respecte les intervalles, mais avec une ou deux erreurs. E1 omet d'abord cent cinquante-six (156), puis se reprend. Dans les décades complexes, on note une certaine hésitation lors du passage aux dizaines supérieures. Il répète la centaine puis dit le terme suivant : « cent soixante-huit, *cent…* cent soixante-dix » et « cent soixante-dix-huit, *cent...* cent quatre-vingts ». Avec quelques hésitations, E2 et E3 commettent également une erreur lors du passage à la dizaine supérieure dans les décades complexes. Si E2 répète la décade inférieure : « cent soixante-dix-huit, cent soixante-dix euh cent quatre-vingts », E3 passe à la décade supérieure : « cent soixante-huit, cent soixante-dix-huit... cent soixante-dix ».

Les quatre élèves comptent par 5 de manière rythmée en respectant les intervalles, en particulier lors de passage à la dizaine ou la centaine supérieure. Par exemple, E4 hésite un peu lors du changement de centaines : « cent quatre-vingt-dix, cent quatre-vingt-quinze, cent... euh, deux cents ». Cette conduite témoigne qu'il y a traitement sur l'ordre de grandeur associé à l'intervalle – ici, les mots nombres inférieurs à cent d'intervalles de cinq - et concaténation, du mot centaine. Ainsi, l'élève recherche d'abord ce qui succède à « quatre-vingt-dix », soit « quatre-vingt-quinze » et ensuite, ajoute le mot « cent » pour former « cent quatre-vingt-quinze ». Cette procédure ne peut cependant pas s'appliquer pour trouver ce qui, par intervalles de cinq, suit cent quatre-vingt-quinze. L'élève identifie effectivement d'abord « cent » comme successeur de « quatre-vingt-quinze » et, ne pouvant ajouter « cent » à ce mot-nombre, le modifie pour effectuer le passage à la centaine supérieure, soit « deux cents ».

Le comptage par dix est rythmé et sans erreur pour trois élèves, E1, E3 et E4. Les hésitations se situent surtout lors du passage à la centaine supérieure, pour les mêmes raisons que celles développées pour les hésitations à la centaine supérieure lorsqu'il y a intervalle de cinq. E1 hésite et répète un terme : « trois cent quatre-vingt-dix euh... trois cent quatre-vingt-dix ...quatre cents » alors que E4 revient à la décade inférieure pour relancer la suite sans erreur : « trois cent soixante-dix, *trois cent soix...*, trois cent quatre-vingts, trois cent quatre-vingt-dix ». Pour sa part, E2 commet une erreur dans les décades complexes, mais se corrige : « Trois cent soixante-dix, trois cent soixante-dix quatr...., euh, trois cent quatre-vingt-dix, trois cent quatre-vingts… euh non... je me suis trompée, trois cent quatre-vingts, trois cent quatre-vingt-dix ».

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Quelques interventions ont été effectuées pour rappeler à un élève le nombre de départ. Cette contrainte est effectivement difficile à respecter pour E1, qui compte d'abord par deux, en partant de deux à quelques reprises avant de réussir à partir de cent cinquante, comme demandé.

En bref, E2 montre une structuration de la suite un peu moins solide que les autres élèves ayant plus d'hésitations et E1 a plus de difficulté à respecter la contrainte du nombre de départ.

4.3.7 Analyse intratâche de la question 21

L'énoncé de la question 21 est présenté à l'oral : « Il y a 24 cartes à jouer. Chaque joueur doit avoir le même nombre de cartes et toutes les cartes doivent être distribuées. Combien de joueurs peuvent jouer et combien chacun aura-t-il de cartes ? Voici un exemple : s'il y a 1 joueur, il aura 24 cartes. » Cette tâche permet d'évaluer les connaissances sur les diviseurs d'un nombre. Si la structure de l'énoncé se présente comme un isomorphisme de mesures, l'énoncé peut s'interpréter soit comme une division partage, soit comme une division regroupement puisque la solution à ce problème comporte tous les couples de nombres ordonnés dont le produit est vingt-quatre.

a) Conduites des élèves à la question 21

Tous les élèves, sauf E2, engagent des calculs relationnels associés à la division. Aucun élève ne peut rappeler tous les diviseurs de vingt-quatre. N'anticipant pas le nombre de possibilités, l'expérimentatrice doit encourager les élèves à rechercher l'ensemble des solutions. Ces interventions permettent toutefois à quelques-uns de s'approprier la démarche et de recourir à la commutativité pour étoffer la liste des couples de nombres ordonnés. Le tableau 4.29 présente les propositions initiales et les solutions finales des cinq élèves à la question 21.

Tableau 4.29 : Propositions initiales et solutions finales de cinq élèves à la question 21

	Chaque joueur a 24 cartes		**Généralisation Nb de cartes : ÷ 2 nb de joueurs : + 1**		**Distribution effective non complétée**		**Rappel de certains de quelques couples diviseurs de 24**		**Rappel de la plupart des diviseurs de 24**		**Rappel de tous les diviseurs de 24**	
	Initiale	*Finale*	*Initiale*	*Finale*	*Initiale*	*Finale*	*Initiale*	*Finale*	*Initiale*	*Finale*	*Initiale*	*Finale*
Élèves	E1 E4 E5	-	-	E1	E2	E2 E5	E3	-	-	E4	-	-
Totaux	**3**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

Trois élèves (E1, E4 et E5) interprètent au départ le problème comme un multiplication qui engage le calcul relationnel suivant : *n* joueurs × 24 cartes/joueur = *x* cartes. L'expérimentatrice rappelle alors qu'il n'y a que vingt-quatre cartes au total. Suite à cette intervention, E1 détermine que s'il y a deux joueurs, chacun aura douze cartes. Il connaît alors les couples vingt-quatre cartes et un joueur ainsi que douze cartes et deux joueurs. Il dégage alors la règle que le nombre de cartes est successivement divisé par deux, et le nombre de joueurs est augmenté successivement de un et propose alors les couples suivant : six cartes et trois joueurs, trois cartes et quatre joueurs. Ainsi, cet élève ne contrôle pas ses réponses par un calcul numérique qui s'appuie sur la division partage. Pour sa part, E5 propose le calcul numérique 24 ÷ 2. Ne sachant pas effectuer une division, elle procède par distribution effective des vingt-quatre cartes entre deux joueurs. Elle utilise également la distribution effective pour identifier le couple trois joueurs et huit cartes.

Dans la suite de cette intervention de l'expérimentatrice, l'élève E4 identifie quatre couples de nombres : deux joueurs et douze cartes, quatre joueurs et six cartes, trois joueurs et huit cartes, six joueurs et quatre cartes ainsi que huit joueurs et trois cartes. Ces couples sont trouvés en s'appuyant sur un calcul relationnel, associé à une division partage, de type : 2 joueurs × ___ cartes/joueur = 24 cartes. Il détermine ainsi d'abord le nombre de joueurs, puis cherche le second facteur de 24. Finalement, s'appuyant sur la commutativité-en-acte, il trouve une sixième possibilité, soit douze joueurs et deux cartes.

E2 a besoin d'un temps d'appropriation. Elle propose initialement qu'« à chaque joueur, il y a sept cartes et ce qu'on va calculer, peut-être ça va arriver à vingt-quatre ». Cette proposition peut être interprétée comme une procédure de multiplication trouée qui correspond à une division regroupement. Invitée à trouver le nombre de cartes que chaque joueur aura s'il y a deux joueurs, E2 trouve douze par une procédure de distribution, effectuée mentalement. Sur cette lancée, l'expérimentatrice l'invite à trouver le nombre de cartes s'il y a trois joueurs, ce que E2 n'arrive pas à trouver. Il semble que E2 n'est pas suffisamment en contrôle du calcul relationnel de ce problème.

Une élève, E3, trouve quelques couples de nombres en s'appuyant sur la connaissance des faits multiplicatifs : « Il y a la table de sept et la table de huit aussi. Ça serait la même chose que ça (trois joueurs et huit cartes), mais juste l'inverse. » Par ce commentaire, elle évoque également la propriété de la commutativité, stratégie qui est confirmée utile par l'expérimentatrice. Lorsque E3 mentionne qu'elle a terminé, l'expérimentatrice l'invite à recourir de nouveau à la commutativité, ce qui permet à E3 d'identifier une autre réponse, soit douze joueurs et deux cartes.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

L'expérimentatrice procède à trois types de relances dont aucune n'est prévue à l'analyse *a priori*. Le premier type de relances est proposé aux élèves qui n'identifient pas correctement la structure de l'énoncé. Cette relance consiste à rappeler qu'il faut conserver le nombre total de cartes, soit vingt-quatre, ce qui permet alors aux élèves de s'engager dans un calcul relationnel qui correspond à une division.

Le second type de relances est proposé à deux élèves, soit E3 et E4, qui évoquent la commutativité alors qu'ils dressent la liste des possibilités des parties de cartes. Lorsqu'ils mentionnent avoir terminé, l'expérimentatrice les invite à considérer les couples déjà identifiés pour compléter leur liste, ce qui leur permet d'ajouter des possibilités. Il faut ici préciser que le contexte du problème permet d'envisager que, sur le plan numérique, deux facteurs, peu importe leur ordre, donne nécessairement un même produit. Cependant, il faut convenir que la situation réelle n'est pas commutative, car il y a bien deux situations distinctes s'il y a deux joueurs avec douze cartes chacun et douze joueurs avec deux cartes chacun. Sur le plan des relations, la situation n'est pas commutative. Ainsi, la connaissance en acte de la commutativité permet d'épuiser toutes les possibilités de couples ordonnés de facteurs de vingt-quatre. Le troisième type de relances consiste à organiser, sous forme d'un tableau, tel que présenté à la figure 4.5, les réponses afin de mettre en lumière les relations multiplicatives.

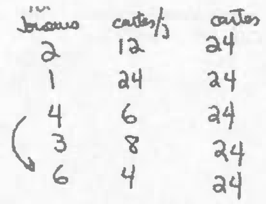


Figure 4.5 : Exemple d'une organisation des données pour la question 21

Cette relance est utilisée auprès de trois élèves, E1, E4 et E5. E4 identifie que ces nombres sont reliés par la multiplication, ce que ne dégagent pas E1 et E5.

Somme toute, cette question permet de couvrir plusieurs dimensions : les diviseurs de vingt-quatre, la division et ses stratégies de résolution ainsi que la propriété de la multiplication.

4.3.8 Analyse intratâche de la question 22

L'énoncé ainsi que les questions sont présentés à l'écrit : « Au magasin scolaire, il y a 195 crayons à l'encre : a) Si on fait des boîtes de 5 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? b) Si on fait des boîtes de 2 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? c) Si on fait des boîtes de 10 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? » Cette tâche évalue la connaissance des critères de divisibilité par cinq, par deux et par dix ainsi que la reconnaissance de la structure de type division regroupement.

a) Conduites des élèves à la question 22

Le tableau 4.30 présente les conduites des élèves E2, E3, E4 et E5 à la question 22. L'échange avec E1 a favorisé une mauvaise interprétation du problème et la réponse de cette élève ne peut être comptabilisée dans le tableau. L'expérimentatrice n'a pas pu repérer, sur le coup, comment les interactions ont favorisé un glissement dans l'interprétation de l'énoncé. Lorsque l'expérimentatrice dit que « dans une boîte, il y a cinq crayons », l'élève perd de vue qu'il y a cinq crayons dans chacune des boîtes et qu'il faut épuiser les cent quatre-vingt-quinze crayons. Il interprète donc que c'est un problème relevant d'une structure additive et répond qu'il reste cent quatre-vingt-dix crayons. Bien que E1 réponde correctement aux questions b et c, il ne justifie aucune d'elles. Auquel cas, il est impossible de comptabiliser ses arguments.

Tableau 4.30 : Arguments évoqués par quatre élèves à la question 22

	Critères de divisibilité	**Division**	**Interprétation selon une division partage**	**Appréciation qualitative**
a) Boîtes de 5 crayons	E2 E3 E4	E5		
b) Boîtes de 2 crayons	E2 E3 E4		E3 E5	E5
c) Boîtes de 10 crayons	E2 E4		E3 E5	E3 E5

Pour déterminer s'il restera des crayons non emballés, deux élèves, E2 et E4, évoquent les critères de divisibilité pour répondre aux trois questions. Voici quelques exemples. Invité à justifier qu'il ne restera aucun crayon non emballé si on fait des boîtes de cinq, E2 mentionne qu'il y a un cinq dans cent quatre-vingt-quinze. E4, pour sa part, évoque plutôt une soustraction répétée de cinq qui, à terme, lui permet d'arriver à zéro : « Je pars de mille deux cent quatre-vingt-quinze, mille deux cent quatre-vingt-dix, mille deux cent quatre-vingt-cinq, quatre-vingts puis là, je reviens comme ça jusqu'à zéro. » Dans le cas des boîtes de deux crayons, E2 s'appuie sur le fait que cent quatre-vingt-quinze est un nombre impair pour déclarer qu'il restera des crayons non emballés.

Pour déterminer s'il restera des crayons non emballés si on fait des boîtes de cinq crayons, E3 fait appel au quotient entier ou décimal (« une division [ça peut] se terminer par virgule trois et tu dois encore diviser...») comme résultat de l'opération de division ou à la notion de reste de la division euclidienne, comme le montre cet extrait où l'élève est invité à dire pourquoi elle juge qu'il va rester des crayons non emballés si on fait des boîtes de deux :

> Parce que comme je t'avais dit tout à l'heure, si on divise, ben c'est sûr qu'il va nous en rester. En même temps, je dis non parce que si on divise par deux on pourra trouver la moitié.

Interprétant l'énoncé comme une division partage, E5 affirme qu'il restera des crayons parce que mille deux cent quatre-vingt-quinze crayons n'entrent pas dans deux boîtes. Cette interprétation erronée de la structure est accompagnée d'une appréciation qualitative selon laquelle les boîtes ne peuvent contenir autant de crayons.

Pour répondre à la question c, soit restera-t-il des crayons non emballés si on fait des boîtes de dix crayons, E3 et E5 n'interprètent plus la structure de l'énoncé comme une division regroupement, mais bien comme une division partage où mille deux cent quatre-vingt-quinze crayons sont partagés également dans dix boîtes. Elles affirment, par appréciation qualitative, qu'il ne restera pas de crayons puisqu'il est possible de placer mille deux cent quatre-vingt-quinze crayons dans dix boîtes.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Aucune relance n'est prévue *a priori*. Cependant, en cours d'entretien, l'expérimentatrice relance les élèves par des questions en fonction des connaissances évoquées. Chacune d'elles s'adapte en fonction des connaissances évoquées par les élèves, soit essentiellement la nature du quotient de la division, soit les critères de divisibilité. Ces relances permettent aux élèves d'argumenter davantage leur réponse.

Ainsi, E2, E3, E4 peuvent avancer des arguments mathématiques recevables qui réfèrent aux critères divisibilité pour juger s'il y a ou non un reste aux divisions de type regroupement évoquées par deux, par cinq et par dix.

4.3.9 Analyse intratâche de la question 23

Selon la progression des apprentissages en mathématiques (MELS, 2009b, p.12), l'algorithme de multiplication est enseigné en première année du troisième cycle et sa maîtrise est visée en deuxième année du troisième cycle du primaire : « À l'aide de processus conventionnels, déterminer le produit d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à deux chiffres. » Trois multiplications écrites sont demandées aux quatre élèves de niveau troisième cycle du primaire (E2, E3, E4 et E5) : $34 \times 21 = 714$, $133 \times 20 = 2660$ et $56 \times 34 = 1904$.

a) Conduites des élèves à la question 23

E2, de niveau première année du troisième cycle, effectue la première multiplication alors que les trois autres effectuent les trois multiplications.

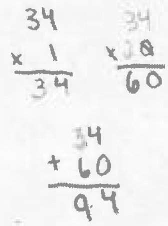


Figure 4.6 : Traces de E2 à la question 23

Pour effectuer le calcul, 34 × 21, E2 décompose le deuxième terme de la multiplication et effectue (34 × 1) + (34 × 20). Pour la multiplication de 34 × 20, elle pose un « 0 » dans la colonne des unités (sans doute pour 4 × 0) et un « 6 » dans la colonne des dizaines (3 × 2). Elle additionne ainsi trente-quatre (34) et soixante (60) pour obtenir quatre-vingt-quatorze (94). Les règles de la numération de position ne sont pas prises en considération lors du calcul puisque 20 × 30 donnent six cents (600), et non soixante (60).

E3 et E4 appliquent les algorithmes sans erreur. E5 effectue deux des trois multiplications sans erreur et commet une erreur liée à la multiplication par zéro dans 133 × 20.

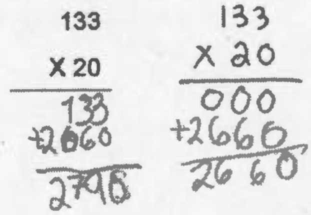


Figure 4.7 : Traces de E5 à la question 23

Tout comme à la question 1, on remarque que E5 confond l'élément absorbant et l'élément neutre. L'expérimentatrice questionne E5 en lui demandant combien fait 0 × 3 et 1 × 3, ce qui conduit E5 à corriger son erreur.

Bref, E3 et E4 appliquent correctement l'algorithme de multiplication qu'elles nécessitent ou non la gestion de retenues. E5 fait une erreur dans le recours aux tables de multiplication, mais applique correctement l'algorithme. E2, cependant, n'applique pas correctement l'algorithme. Enfin, E1 ne connaît pas du tout l'algorithme de multiplication.

b) Analyse des interventions effectuées en cours de tâche

Les quelques relances effectuées le sont en fonction aux connaissances investies par les élèves et visent à confronter celles qui s'avèrent inefficaces. Par exemple, une relance est effectuée auprès de E5 qui confond l'élément neutre et l'élément absorbant de la multiplication.

4.3.10 Analyse intratâche de la question 24

Selon la progression des apprentissages en mathématiques (MELS, 2009b), l'algorithme de division est enseigné en première année du troisième cycle et sa maîtrise est visée en deuxième année du troisième cycle du primaire :

> À l'aide de processus conventionnels, déterminer le quotient d'un nombre naturel à quatre chiffres par un nombre naturel à deux chiffres, exprimer le reste de la division sous la forme d'un nombre en écriture décimale sans dépasser la position des centièmes.

Parmi les élèves sélectionnés, quatre sont de niveau troisième cycle. E2, de niveau première année du troisième cycle, dit être incapable d'appliquer l'algorithme de division. E4 et E5 affirment, quant à eux, qu'il n'a pas été encore enseigné. Ainsi, sur quatre élèves susceptibles d'engager ce calcul, une seule, E3 est en mesure d'effectuer les divisions écrites proposées. Les réponses d'une seule élève ne sont pas suffisantes pour mener une analyse intratâche telle que nous l'avons réalisée pour les autres tâches. Cependant, les réponses de E3 nous permettront d'enrichir notre analyse intertâche pour cette élève.

E3 réussit la première division, $656 \div 4$, qui ne présente aucune contrainte particulière. La deuxième division, $540 \div 5$, implique un chiffre dans le dividende (4) qui est plus petit que le diviseur (5), ce qui occasionne une erreur lors de la résolution comme nous pouvons le voir à la figure 4.8.

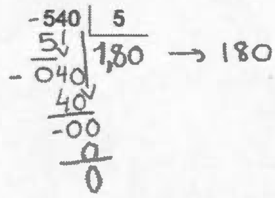


Figure 4.8 : Traces de E3 à la question 24

L'élève débute par la gauche et effectue la division du chiffre à la position des centaines sans problème, $5 \div 5 = 1$. Cependant, lorsqu'elle divise le quatre à la position des dizaines par cinq, elle pose une virgule au quotient et ajoute un zéro au dividende qui devient quarante (40). Ici, l'erreur est d'ajouter un zéro au dividende et une virgule au quotient au lieu de poser le zéro au quotient. Puis, elle effectue la division $40 \div 5 = 8$ et écrit huit au quotient. Elle poursuit en ajoutant le zéro de la position des unités au dividende restant, puis effectue la division $00 \div 5 = 0$ et écrit zéro au quotient. L'élève doute de sa réponse, soit un et quatre-vingts centièmes (1,80). L'expérimentatrice confirme qu'il y a un problème et invite l'élève à recourir à l'estimation pour ajuster sa réponse : « 540 ÷ 5, ça donne combien environ ? » Un échange permet à l'élève d'estimer que la réponse se trouve dans les centaines et donc, d'enlever la virgule. Cependant, cette réponse est toujours erronée et la réponse finale devrait être 108, et non 180.

CHAPITRE V

ANALYSES INTERTÂCHES ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, des analyses intertâches sont menées. Autrement dit, des analyses croisées des conduites et des stratégies de chaque élève à chacune des tâches, par collection de tâches, sont réalisées. Ces analyses complètent les analyses intratâches menées au chapitre IV. S'ensuit une synthèse des connaissances des élèves sur les structures multiplicatives. De cette synthèse sont dressés les profils de connaissances de chacun des élèves. À partir des résultats de l'ensemble des analyses intratâches et intertâches, nous pouvons atteindre notre second objectif spécifique, soit rendre compte de la fiabilité et de l'utilité didactiques de chacune des tâches au regard d'une démarche d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. Dans cette perspective, nous recommandons certaines modifications aux tâches du protocole pour le bonifier. Finalement, une section est consacrée au potentiel didactique des relances. À partir de nos résultats, nous discutons des conditions et des caractéristiques du milieu didactique qui influencent le potentiel didactique des relances.

5.1 Analyses intertâches par collection de tâches

Respectant l'ordre de présentation des tâches établie au chapitre III, nous effectuons pour chacune des collections de tâches, une analyse croisée des connaissances et stratégies mises en oeuvre par les élèves. Ces analyses croisées viennent appuyer les analyses intratâches pour sélectionner les tâches pertinentes à l'évaluation des structures multiplicatives en assurant leur complémentarité pour l'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives.

5.1.1 Analyse croisée aux tâches sur le codage et l'interprétation de l'écriture a × b

Quatre tâches portent sur le codage et l'interprétation de l'écriture a × b. Si les tâches 2 et 3 permettent d'investiguer les connaissances sur le codage d'une quantité organisée selon une disposition rectangulaire, la tâche 5 porte sur le codage d'une quantité organisée en sous-collections équipotentes. Les tâches de cette collection permettent d'investiguer à quel type d'écritures, additives ou multiplicatives, sont associées des organisations de quantités en sous-collections équipotentes et selon une disposition rectangulaire. Le tableau 5.1 présente une compilation des conduites des élèves.

Tableau 5.1 : Conduites mathématiques des cinq élèves aux tâches de la collection – Codage et interprétation de l'écriture a × b

	Disposition rectangulaire		**Sous-collections équipotentes**
	Q2 8 × 12 Choix d'écritures	**Q3 15 × 13**	**Q5 11 × 7 Choix d'écritures**
E1	+ itérée = ×	×	+ itérée = ×
E2	+ erronée	Dénombrement → + itérée	× → + itérée = ×
E3	→ + itérée = ×	×	+ itérée = ×
E4	× → + itérée = ×	×	× → + itérée = ×
E5	→ • + itérée • ×	×	+ itérée

Légende   *→ : effet de relance*   *× : conduite multiplicative*
+ : conduite additive   *+ itérée : conduite d'addition itérée*
= : est équivalent à

D'après les résultats, E1, E3 et E4 adoptent des conduites multiplicatives lorsqu'ils résolvent des tâches sur le codage et l'interprétation de l'écriture a × b. Contrairement à ces trois élèves qui adoptent tous des conduites similaires peu importe le contexte, E2 et E5 recourent à des stratégies différentes si la quantité est organisée selon une disposition rectangulaire ou en sous-collections équipotentes. La variation de la représentation est, dans ce cas-ci, une variable didactique intéressante.

Si une conduite multiplicative est observée à la tâche 5 pour E2, des conduites additives (addition et addition itérée) sont observées aux tâches sur la disposition rectangulaire. À la tâche 2, E2 propose une addition pour déterminer le nombre d'objets organisés selon une disposition rectangulaire. On peut noter une progression des connaissances investies, puisqu'à la question 3, l'addition itérée est utilisée. Pour E5, c'est plutôt le profil inverse qui se dessine. Elle adopte des conduites multiplicatives aux tâches 2 et 3 alors que la tâche suggérant une organisation en sous-collections est résolue par une addition itérée. De plus, invitée à trouver des écritures équivalentes, elle s'appuie sur les résultats, et non sur les dimensions en jeu pour les identifier. Par conséquent, on ne peut dire que, pour E5, la multiplication est considérée équivalente à l'addition itérée.

Les analyses intra et intertâches des conduites des élèves aux questions 2, 3 et 5 nous permettent de préciser qu'à partir de ces questions, nous pouvons investiguer les dimensions suivantes liées à l'interprétation de l'écriture en contexte de disposition rectangulaire et de sous-collections équipotentes.

1) Recours à l'addition itérée
2) Reconnaissance de la pertinence de l'écriture multiplicative pour représenter
   - une disposition rectangulaire
   - organisation en sous-collections (itération d'une même quantité)
3) Reconnaissance de l'équivalence entre l'addition itérée et l'écriture multiplicative.

Si certains élèves interprètent les écritures comme une expression des relations exprimées dans une représentation, d'autres interprètent plutôt les écritures comme les indices d'une opération à effectuer et vont ainsi juger de l'adéquation de l'écriture à une représentation, en fonction du résultat de l'opération considérée. Ainsi, certains élèves comparent entre elles deux ou trois écritures via le résultat du calcul, et non en termes de relations entre la représentation et l'écriture. Il faut également considérer que cette dernière conduite peut aussi se lire selon des termes contractuels, sur le plan didactique, puisque les écritures additives ou multiplicatives ne sont souvent considérées qu'en terme de calculs à effectuer dans les classes.

5.1.2 Analyse croisée aux tâches sur la résolution d'énoncés de problèmes multiplicatifs

Cette collection de tâches regroupe des énoncés de problèmes de différentes structures. Par conséquent, les analyses croisées de tâches appartenant à une même structure sont effectuées. Les tâches de cette collection permettent d'investiguer l'articulation des calculs relationnels et numériques pour chacune des structures de problèmes multiplicatifs.

Les énoncés 6a et 7 présentent une structure de type isomorphisme de mesures qui se résout par une multiplication. Le tableau 5.2 présente les conduites mathématiques engagées par les élèves lors de la résolution de ces tâches.

Tableau 5.2 : Conduites mathématiques des cinq élèves aux énoncés d'isomorphisme de mesures avec multiplication

	Q6a Donnée superflue 5 × 6	**Q7a 3 boîtes de 24 crayons**	**Q7b 6 boîtes de 24 crayons**	**Q7c 9 boîtes de 24 crayons**	**Q7d 10 boîtes de 24 crayons**
E1	→ × erronée *(pilotage pour l'interprétation)*	×	×	× → distributivité	×
E2	+ erronée	+ itérée	+ itérée erronée → + itérée	+ itérée	+ itérée erronée
E3	×	×	×	× → associativité	×
E4	×	+ itérée	+/× erronée → associativité	+/× erronée → distributivité	×
E5	+ itérée	×	×	×	×

Légende *→ : effet de relance* *+ : calcul relationnel additif*
× : calcul relationnel multiplicatif *+ itérée : calcul relationnel d'addition itérée*

E1 et E3 engagent des calculs multiplicatifs aux énoncés de problèmes 6a et 7. À la question 7, tous deux recourent à l'algorithme de multiplication et articulent ainsi, calcul relationnel et calcul numérique. Par contre, seule E3 applique correctement l'algorithme. Suite à la relance, E1 et E3 recourent respectivement à la distributivité-en-acte et à l'associativité-en-acte pour alléger le calcul multiplicatif. Les conduites de E3 témoignent aussi d'une articulation adéquate entre calculs relationnel et numérique à la question 6a. Cette articulation lui permet notamment de choisir d'abord, la multiplication 5 × 6 en s'appuyant sur un calcul relationnel de type 5 rangées × 6 carreaux/rangée, puis les additions itérées de cinq et de six. E1 n'est pas en mesure d'engager le bon calcul relationnel sous ces conditions.

Les trois autres élèves (E2, E4 et E5) présentent des profils de conduites plus variés. E2 établit, à la question 6a, un calcul relationnel additif comprenant la donnée superflue et un calcul d'addition itérée aux questions de la tâche 7. Ses conduites à la question 7 témoignent d'une mauvaise articulation des niveaux éléments/parties/tout puisque le nombre de sous-collections additionnées, soit le nombre de boîtes de crayons ajoutées, est erroné. Donc, pour un énoncé sans donnée superflue et dont la structure est de type isomorphisme de mesures, E2 engage une procédure d'addition itérée, soit un calcul relationnel de type additif.

E4 présente sans doute les conduites les plus variées, et ce, pour une même tâche. Ainsi, E4 préfère la multiplication à l'addition itérée dans un contexte où, d'une part, des choix d'écritures sont proposés et d'autre part, le calcul implique un fait multiplicatif connu, 5×6. La succession des données numériques à la question 7, induit un effet sur les calculs relationnels et numériques engagés par E4. À la première question, il engage une addition itérée alors que des calculs de type mixte, additifs et multiplicatifs, sont engagés aux questions suivantes. Étant donné ses connaissances de l'algorithme de multiplication et donc, son contrôle du calcul numérique de type multiplicatif, c'est le calcul relationnel, et non numérique, qui est de type mixte. Les conduites de E4 montrent que l'enchaînement des nombres provoque le passage d'un calcul relationnel additif vers un calcul relationnel multiplicatif. Les relances effectuées permettent également à E4 de recourir de façon judicieuse aux propriétés d'associativité et de distributivité.

Pour sa part, E5 engage un calcul d'addition itérée à la question 6a après avoir dessiné une représentation en sous-collections de l'énoncé, ce qui est cohérent avec sa conduite à la question 5, où elle choisit l'addition itérée comme écriture représentant onze sacs de sept bonbons. Par ailleurs, elle applique l'algorithme pour résoudre les questions de la tâche 7 qui, pourtant, présente aussi une structure de type isomorphisme de mesures.

Notre deuxième sous-collection de tâches sur les énoncés de problèmes multiplicatifs est composée de quatre énoncés (6b, 8, 11a et 10) de type isomorphisme de mesures qui se résolvent par une division. Le tableau 5.3 présente les conduites mathématiques de chacun des élèves aux énoncés de division partage et de division regroupement.

Tableau 5.3 : Conduites mathématiques des cinq élèves aux énoncés d'isomorphisme de mesures de type division partage et division regroupement

	Division partage			**Division regroupement**
	Q6b **36 ÷ 4** **(donnée superflue)**	**Q8** **104 ÷ 8 = 13** **× opération réciproque de la ÷**	**Q11a** **256 ÷ 8 = 32**	**Q10** **78 ÷ 6 (6 × __ = 78)** **(donnée superflue)**
E1	× erronée → ×	÷ → × réciproque	× erronée	× erronée
E2	× erronée → ×	- erronée	×	→ × erronée
E3	×	÷ → × réciproque	×	× erronée
E4	× erronée → ×	+ itérée → ÷ → + itérée réciproque	×	× erronée
E5	- répétée → ×	× erronée	× erronée	× erronée → division partage

Légende *× : conduite multiplicative* *÷ : division*
+ : conduite additive *+ itérée : conduite d'addition itérée*
- répétée : conduite de soustraction répétée *→ : effet de relance*

Trois tâches proposent différents contextes de division partage. À ces questions, les cinq élèves présentent des profils de réponses contrastés, ce qui nous laisse croire que la diversité des contextes favorise l'observation de conduites variées. La tâche de division regroupement s'avère inadéquate pour l'investigation des connaissances puisqu'aucun des élèves n'a été en mesure d'établir un calcul relationnel adéquat dû à la présence d'une donnée superflue.

À l'ensemble des énoncés de division partage, E3 engage correctement des calculs de type multiplicatif. De plus, la multiplication est reconnue comme l'opération réciproque de la division tel qu'en témoignent ses conduites à la question 8. Cependant, E3 engage un calcul relationnel multiplicatif erroné à la question 10. La mauvaise formulation de l'énoncé ainsi que la présence d'une donnée superflue en sont probablement la cause.

Pour sa part, E4 reconnait la structure multiplicative des énoncés et, grâce aux relances, arrive à engager des calculs multiplicatifs adaptés aux énoncés. Cependant, les conduites aux questions 6b et 8 montrent que la multiplication n'est pas considérée comme l'opération réciproque de la division. C'est plutôt l'addition itérée qui, à la question 8, permet de valider la division.

E1 et E5 reconnaissent également la structure multiplicative des énoncés. Cependant, les calculs multiplicatifs engagés sont tantôt adéquats, tantôt erronés. E1 engage un calcul relationnel erroné lorsque l'énoncé comporte plusieurs relations multiplicatives. Par exemple, à la question 11a, qui implique des relations entre le nombre de bonbons, le nombre d'équipe et le nombre d'enfants, E1 fait abstraction du nombre de gommes distribuées à chaque équipe et engage plutôt un calcul relationnel entre les gommes et les enfants. E1 engage des calculs relationnels erronés aux questions 6b et 10, toutes deux comportant une donnée superflue et deux relations multiplicatives.

Ce sont plutôt les écritures multiplicatives associées à une division qui semblent poser problème à E5. L'énoncé 6b est résolu par une stratégie de distribution effective et, à partir de cette stratégie, E5 identifie la soustraction répétée et la multiplication trouée parmi les écritures proposées. Par ailleurs, à la question 8, E5 effectue la multiplication 104×8 et tente de vérifier sa réponse obtenue, mille quarante-deux (1042), par la division $104 \div 8$. Bref, E5 sait que la multiplication et la division sont liées à l'énoncé, mais ne peut traiter l'énoncé par une multiplication trouée, telle que $8 \times \_ = 104$.

À la question 6b qui implique une donnée superflue, E2 engage un calcul relationnel multiplicatif erroné. Le retrait de la donnée superflue, en relance, permet à E2 d'établir le bon calcul relationnel et de choisir, parmi les écritures proposées, la division. Elle est également capable d'engager un calcul relationnel adéquat à la question 11a. Par contre, à l'énoncé de la question 8, elle engage un calcul de type additif en posant la soustraction 104 – 8. La présence de calculs écrits et l'absence de donnée superflue semblent faciliter une mise en relation multiplicative adéquate des données.

Les analyses intra et intertâches des conduites des élèves aux questions 6a, 6b, 7, 8, 10 et 11a nous permettent de préciser qu'à partir de ces questions, nous pouvons investiguer l'articulation entre le calcul relationnel et le calcul numérique pour une structure d'isomorphisme de mesures. Cette articulation semble se dessiner selon quatre profils :

1) Calcul relationnel multiplicatif et mise en place d'une stratégie numérique relativement élémentaire.
2) Raisonnement multiplicatif, mais manque de contrôle de l'articulation des calculs relationnel et numérique.
3) Raisonnement multiplicatif qui se fonde sur les écritures numériques proposées sans mise en relation avec les données du problème.
4) Contrôle de l'articulation entre calculs relationnel et numérique.

Les conduites de E5, qui établit un calcul relationnel multiplicatif et recourt à une stratégie de distribution effective, sont emblématiques du premier profil. E1, E2 et E4 présentent des conduites du deuxième profil, alors que E3 présente des conduites du troisième profil. Les tâches proposées permettent aussi d'investiguer la reconnaissance de la division en tant qu'opération réciproque de la multiplication, reconnaissance qui est une condition nécessaire à l'achèvement de l'emboîtement éléments/parties/tout. Le profil 4 n'est pas ici représenté par nos élèves, mais il est possible qu'effectivement, un élève montre une telle articulation.

Quatre énoncés (11c, 12, 13 et 14) ont une structure de type produit scalaire. Les questions 11c et 12 comportent une relation directe de type « fois plus ». La question 14 comporte une relation indirecte de type « fois plus » alors que la question 13 comporte une relation directe de type « fois moins ». Le tableau 5.4 présente les calculs relationnels engagés par chacun des élèves aux énoncés de type produit scalaire.

Tableau 5.4 : Calculs relationnels engagés par cinq élèves aux énoncés de problèmes multiplicatifs de type produit scalaire

	Q11 c **Directe « fois plus », donnée superflue** **Arbre :** **32 ans × 8 = 256**	**Q12** **Directe « fois plus »,** **3 × 9 poissons = 27 poissons**	**Q13** **Directe « fois moins »** **24 poissons ÷ 6 = 4 poissons**	**Q14** **Indirecte « fois plus »** **12 × 3 = 4**
E1	×	mixte (+ et ×) → mixte (+ et ×)	+ → +	× erronée
E2	aucun CR	+	+	+
E3	×	×	+ → ×	×
E4	×	×	+ → +	×
E5	× erronée	×	+ → +	+

Légende *× : conduite multiplicative* *+ : conduite additive*
CR : calcul relationnel *→ : effet de relance*

E3 et E4 résolvent adéquatement des énoncés impliquant une relation de type « fois plus », qu'elle soit directe ou indirecte. Après relance, E3 établit le bon calcul relationnel dans le cas d'une relation directe de type « fois moins » ce qui n'est pas le cas de E4.

E1 présente des conduites différentes à chacun des énoncés de produit scalaire. Il identifie correctement le calcul relationnel d'un énoncé scalaire de type « fois plus » si, comme à la question 11c, un calcul numérique est fourni. Cependant, une stratégie mixte est adoptée lorsqu'il doit lui-même établir les calculs relationnel et numérique. À la question 14, la relation indirecte n'est pas reconnue, mais une stratégie multiplicative est tout de même mise en œuvre. Finalement, E1 convoque une stratégie additive face à l'énoncé de produit scalaire de type « fois moins ».

La donnée superflue est prise en compte dans l'établissement des relations par E5. E5 engage un calcul relationnel de type multiplicatif dans le cas d'une relation directe de type « fois plus ». Cependant, E5 convoque une stratégie additive dans le cas d'une relation indirecte et d'une relation scalaire de type « fois moins ».

Des calculs relationnels de type additif sont engagés par E2 pour l'ensemble des tâches, mis à part à la question 11c, pour laquelle les relations ne sont pas interprétées. En bref, E2 ne reconnaît pas la structure multiplicative des énoncés de type produit scalaire.

Les quatre tâches impliquant des relations scalaires s'avèrent complémentaires pour l'investigation des connaissances puisque des relations directes et indirectes de type « fois plus » et « fois moins » sont proposées. D'après les conduites des élèves, les énoncés impliquant une relation de type « fois plus » sont plus facilement réussis que ceux impliquant une relation de type « fois moins ». Les analyses intra et intertâches des conduites des élèves aux questions 11c, 12, 13 et 14 nous permettent de préciser qu'à partir de ces questions, nous pouvons investiguer l'articulation des calculs relationnels et numériques pour les énoncés de produit scalaire. Plusieurs niveaux de conduites sont ainsi dégagés :

1) Non reconnaissance de la structure multiplicative d'un produit scalaire. Calcul relationnel de type additif dans le cas d'une relation directe de type « fois plus ».
2) Calcul relationnel de type mixte dans le cas d'une relation directe de type « fois plus ». Calcul relationnel de type additif dans le cas d'une relation directe de type « fois moins » et dans le cas d'une relation indirecte de type « fois plus ».
3) Reconnaissance et contrôle d'un calcul relationnel de type multiplicatif dans le cas d'une relation scalaire directe de type « fois plus ». Calcul relationnel de type additif dans le cas d'une relation directe de type « fois moins » et dans le cas d'une relation indirecte de type « fois plus ».

4) Calcul relationnel de type multiplicatif dans le cas d'une relation directe ou indirecte de type « fois plus ». Calcul relationnel de type additif dans le cas d'une relation directe de type « fois moins ».
5) Reconnaissance de la structure multiplicative et contrôle du calcul relationnel de type multiplicatif autant pour une relation directe ou indirecte de type « fois plus » que pour une relation directe de type « fois moins ».

Quatre énoncés (11b, 15a, 15b et 16) présentent une structure de type produit cartésien. Le tableau 5.5 présente les calculs relationnels engagés par chacun des élèves aux énoncés de produit cartésien.

Tableau 5.5 : Calculs relationnels engagés par cinq élèves aux énoncés de problèmes multiplicatifs de type produit cartésien

	Q11b **32 m × 8 m = 256 m²**	**Q15a** **Proposé : 3 × 5 × 2** **Résolu : 3 × 5**	**Q15b** **13 × 13**	**Q16** **12 = 3 × __ × __**
E1	Aucun CR → ×	→ + itérée erronée	Aucun CR → + erronée	?
E2	× erronée	Appariement aléatoire → + erronée		
E3	×	Dessin erroné → + itérée	+ erronée → + erronée	Division regroupement
E4	×	→ ×	Appariement unique → + itérée	Dessin erroné
E5	Aucun CR	Mixte + /× erronée	Appariement unique → + itérée	Division regroupement

Légende *× : conduite multiplicative* *+ : conduite additive*
CR : calcul relationnel *→ : effet de relance*

Suite à une relance, E4 met en œuvre une démarche permettant la création d'une mesure composée. Ainsi, il est l'élève qui, parmi ceux rencontrés, contrôle le mieux les relations des énoncés de type produit cartésien. Pour sa part, E3 amorce une démarche pour chacun des énoncés et arrive, sous certaines conditions, à mener à terme une démarche adéquate. Ainsi, si du matériel lui permet de concevoir la possibilité d'utiliser un item à plusieurs reprises, elle procède par appariement. E5 n'établit aucun calcul relationnel à la tâche 11b et engage, pour les énoncés 15a et 16, une démarche qui s'appuie sur une structure de type isomorphisme de mesures. Comme E3, elle ne dégage pas qu'il y a création d'un nouvel objet par combinaison. Par ailleurs, tout comme E4, elle représente l'énoncé de la question 15b et procède ainsi à une modélisation du produit cartésien lui permettant d'établir un calcul relationnel adéquat. E1 établit un calcul relationnel adéquat seulement à la question 11b qui implique un produit de mesures.

Pour sa part, E2 semble manquer de contrôle sur les relations multiplicatives. On note également un décalage des connaissances relatives au calcul numérique par rapport au calcul relationnel. Même s'il est peu probable que E2 ait les connaissances suffisantes pour engager un calcul relationnel de type multiplicatif, le manque de connaissances sur le calcul numérique multiplicatif freine la mise en relation adéquate des données. Ses conduites à la question 15a en sont un exemple. Débutant par un appariement aléatoire, elle amorce une modélisation adéquate bien qu'additive. Cependant, la relance contraint l'élève à poser un calcul numérique. Elle se rabat donc sur une addition, un calcul maîtrisé, mais aucunement représentatif de la modélisation amorcée. Considérant que le produit cartésien est une structure plus complexe que celle de type isomorphisme de mesures, il est cohérent que E2, qui engage des calculs relationnels de type additif dans les énoncés d'isomorphisme de mesures, n'engage pas de calculs relationnels multiplicatifs.

Les conduites des élèves montrent que ces énoncés, d'une part à cause de leur structure et d'autre part, à cause de leur facture (formulation employée et nombres impliqués), sont complexes et permettent difficilement d'investiguer les connaissances sur le produit cartésien. D'autant plus qu'un échange soutenu et des relances sont nécessaires pour que les élèves engagent une démarche. Il est intéressant de préciser que les deux élèves (E4 et E5) qui procèdent à une modélisation du produit cartésien à la question 15b sont les seuls qui ont correctement engagé le calcul relationnel menant à la création d'une nouvelle mesure, soit un ensemble d'un collier et d'une bague. Tout comme nous avons vu pour 15a, il semble encore ici que la représentation est un support facilitant l'appropriation du problème, ce qui favorise possiblement la conceptualisation du produit cartésien. Il s'avère donc pertinent, pour les énoncés de type produit cartésien, d'offrir des représentations des items à apparier.

5.1.3 Analyse croisée aux tâches sur le calcul et les propriétés

Cette collection de tâches regroupe des questions qui portent à la fois sur le calcul et sur les propriétés. Par conséquent, une analyse croisée par sous-collection de tâches est d'abord effectuée pour les tâches impliquant des connaissances liées au calcul, puis pour celles qui visent l'investigation des propriétés de la multiplication. Les questions 1, 20, 21 22, 23 et 24 visent l'investigation des connaissances sur le calcul. Le tableau 5.6 présente les conduites des élèves à ces questions.

Tableau 5.6 : Conduites mathématiques des cinq élèves aux tâches pour l'investigation des connaissances sur le calcul

	Q1 Faits multiplicatifs × **et** ÷ ***- : non connu*** **** : peu connu*** ***** : connu***	**Q 20 Comptage par intervalles de 2, 5 et 10**	**Q 21 Diviseurs de 24**	**Q 22 Critères de divisibilité Pour 2, 5 et 10** ***- : non réussi, non justifié*** **** réussi, non justifié*** ***** réussi et justifié***	**Q23 et Q 24 Algorithmes** × **et** ÷ ***- : non connu*** **** : peu connu*** ***** : connu***
E1	× : * ÷ : *	Fluide : Aucun Hésitations : par 5, par 10 Erreurs : par 2	Non réussi	Pour 2 : * Pour 5 : ** Pour 10 : *	× : - ÷ : -
E2	× : * ÷ : -	Fluide : Aucun Hésitations : par 5 Erreurs : par 2, par 10	Distribution effective (1 couple)	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 : **	× : - ÷ : -
E3	× : ** ÷ : **	Fluide : Aucun Hésitations : par 5, par 10 Erreurs : par 2	Rappel de quelques couples	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 : *	× : ** ÷ : *
E4	× : * ÷ : *	Fluide : par 2 Hésitations : par 5, par 10	Rappel de plusieurs couples	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 : **	× : ** ÷ : -
E5	× : * ÷ : -	Sans donnée	Distribution effective et ÷ (2 couples)	Pour 2 : - Pour 5 : - Pour 10 : -	× : ** ÷ : -

E1 et E2 montrent tous deux des connaissances minimales sur le calcul bien que leurs profils soient différents. E1 connaît un peu les faits multiplicatifs, autant les produits que les quotients alors que E2 connaît un peu les produits des faits multiplicatifs. Aucun des deux n'applique les algorithmes correctement. Si E2 recourt aux critères de divisibilité et rappelle, grâce à une stratégie de distribution effective, un couple de diviseurs de vingt-quatre, E1 n'y arrive pas. Le comptage par intervalles de E1 présente des hésitations par cinq et par dix et des erreurs par quatre, alors que E2 présente un comptage par intervalles avec des erreurs par deux et par dix et des hésitations par cinq.

Tout comme E2, E5 connaît un peu les produits des faits multiplicatifs et elle recourt à une stratégie de distribution effective, associée à la division, pour trouver deux couples de diviseurs. Contrairement à E2, E5 connait l'algorithme de multiplication, mais n'évoque pas les critères de divisibilité.

E3 a de bonnes connaissances sur le calcul. Elle connaît aussi bien les produits que les quotients des faits multiplicatifs. Elle applique les algorithmes de multiplication et de division sans problème. Ses connaissances sur les faits multiplicatifs lui permettent de rappeler quelques diviseurs de vingt-quatre. Pour répondre à la question 22, elle réfère aux critères de divisibilité.

Une particularité du profil des connaissances de E4 est le comptage fluide par intervalles de deux. De plus, en s'appuyant sur ses connaissances des faits multiplicatifs et de la commutativité, il rappelle plusieurs couples de vingt-quatre. Il évoque les critères de divisibilité et applique adéquatement l'algorithme de multiplication.

Trois élèves (E3, E4 et E5) répondent aux questions sur les propriétés de la multiplication. Néanmoins, il est possible d'apprécier le recours aux propriétés lors de résolution d'énoncés de problèmes pour E1 et E2. Le tableau 5.7 présente les conduites de trois élèves aux tâches sur les propriétés de la multiplication.

Tableau 5.7 : Conduites mathématiques de trois élèves aux tâches pour l'investigation des connaissances sur les propriétés de la multiplication

	COMMUTATIVITÉ				DISTRIBUTIVITÉ				ASSOCIATIVITÉ
	Q17a $8 \times 12 = 12 \times 8$	**Q19a** $3 \times \_ = 7 \times \_$	**Q19b** $453\,432 \times 98\,654 = 98\,654 \times \_\_\_$	**Q18** (en contexte) $14 \times 15 = 15 \times 14$	**Q17b** $7 \times 12 = (8 - 1) \times 12$	**Q17c** $8 \times 13 = 8 \times (12 + 1)$	**Q19c** $7 \times (8 + 3)$	**Q19d** $8 \times \_ = 8 \times (10 + \_)$	**Q17d** $16 \times 12 = (2 \times 8) \times 12$ $10 \times 12 = (2 \times 5) \times 12$
E3	**	**	-	-	-	**	**	-	**
E4	**	**	**	-	-	→ **	**	**	→ × 10
E5	**	-	**	-	**	-	-	-	-

*Légende : → : effet de relance - : non réussi ** réussi et justifié*

E4 maîtrise la propriété de la commutativité et il recourt à la distributivité lorsqu'il peut contrôler les nombres en jeu. Ainsi, à la question 17, une relance qui modifie les nombres permet l'utilisation de la distributivité pour soutenir le calcul mental. Par écrit, E4 est aussi capable de recourir à la distributivité. Dans le cas de E3, bien qu'elle ait réussi la plupart des questions sur la commutativité, elle n'a pas réussi la question 19b. Ainsi, nous pouvons avancer qu'elle ne contrôle pas aussi bien que E4 cette propriété. La distributivité semble être une connaissance en cours d'appropriation, c'est-à-dire que E3 ne contrôle pas le recours à cette propriété dans tous les contextes. Pour sa part, E5 amorce un recours aux propriétés de façon variable en fonction du contexte. Pour E3 et E5, les propriétés ne sont pas encore reconnues valides dans tous les contextes.

Les tâches 5 et 7 offrent des contextes propices à E1 et E2 pour faire usage des propriétés de la multiplication. En contexte d'énoncés de problèmes, lorsqu'invité à choisir plusieurs écritures, E1 choisit deux multiplications équivalentes, 7×11 et 11×7, comme calculs associés à un même énoncé. À la question 7, les échanges avec l'expérimentatrice lui permettent de recourir à la distributivité-en-acte pour déterminer le nombre de crayons dans neuf boîtes. Dans le cas de E2, l'emploi de la commutativité est plus difficilement observable puisque les calculs établis sont, pour la plupart, de type additif. Cependant, à la question 5, elle identifie 7×11 et 11×7 comme écritures équivalentes. Cependant, ce qu'on identifie comme « commutativité-en-acte » doit être interprété avec nuance. Il est possible que les élèves reconnaissent par exemple que chacune de ces écritures correspond à l'énoncé de problème, mais pas nécessairement que ces écritures sont, entre elles, équivalentes.

Les analyses intra et intertâches des conduites des élèves aux questions sur le calcul et les propriétés, 6a, 6b, 7, 8, 10 et 11a, nous permettent de préciser qu'à partir de ces questions, nous pouvons investiguer plusieurs dimensions du calcul et des propriétés de la multiplication. Pour chacune de ces dimensions, des niveaux de structuration des connaissances sont dégagés.

- Distinction de niveaux de structuration de la commutativité.
  1) Identification d'écritures multiplicatives telles que $a \times b$ et $b \times a$ comme modélisation d'un même énoncé de problème et commutativité-en-acte dans la complétion d'égalités lacunaires qui impliquent de petits nombres.
  2) Maîtrise de la commutativité autant en résolution d'énoncé de problème qu'en contexte strictement numérique.

- Distinction de niveaux de structuration de la distributivité.
  1) Recours à la distributivité-en-acte pour faciliter le calcul mental dans le cas d'une fois de plus ou une fois de moins.
  2) Recours à la distributivité pour contrôler des écritures mathématiques impliquant des parenthèses.

- Fluidité du comptage, à partir d'un nombre différent de zéro,
  1) par intervalles de cinq et de dix.
  2) par intervalles de deux.

Ces tâches nous permettent également d'investiguer d'autres connaissances, notamment la propriété de l'associativité, les diviseurs d'un nombre et les algorithmes de multiplication et de division.

Dans cette section, nous avons procédé, pour chacune des collections de tâches, aux analyses croisées des conduites des élèves aux tâches. Puisque l'investigation des connaissances est menée pour l'ensemble du champ conceptuel des structures multiplicatives et qu'on ne peut, par conséquent, considérer les collections de tâches en vase clos, nous procédons, dans la section suivante, à l'analyse croisée de l'ensemble des collections de tâches.

5.2 Analyse croisée des collections de tâches pour chaque élève

Dans cette section, nous réalisons une analyse croisée des collections de tâches par élève, ce qui nous conduit à dresser un profil de connaissances sur les structures multiplicatives pour chacun des élèves.

5.2.1 Profils de connaissances de cinq élèves sur les structures multiplicatives

Pour chacun des élèves, nous présentons un profil des connaissances sur les structures multiplicatives. Le tableau 5.8 présente une synthèse des connaissances des élèves sur les structures multiplicatives. Suite au tableau, nous décrivons les profils de connaissances en débutant avec celui qui présente le plus bas niveau de structuration des connaissances jusqu'à celui qui témoigne d'une structuration des connaissances la plus aboutie. Ainsi, les profils des connaissances des élèves sont présentés selon l'ordre suivant : E2, E5, E1, E3 et E4.

Tableau 5.8 : Tableau synthèse des connaissances des élèves sur les structures multiplicatives

	Codage	Structures d'énoncés de problèmes							Calcul					Propriétés
		Isomorphisme de mesures			Produit cartésien		Produit scalaire		Comptage par intervalles	Faits	Algo.	Diviseurs de 24	Critères de divisibilité	Commutativité : Co Associativité : As Distributivité : Di Élément neutre : EN Élément absorbant : EA
		×	÷ Partage	÷ Regr.[1] Situation des diviseurs	×	÷	Fois plus D (×) et I (÷)	Fois moins D (÷)	de 2, de 5 et de 10	× ÷	× ÷		Pour 2; Pour 5; Pour 10	
E1	• + itérée = × • Écriture × : *Disposition rectangulaire* *Sous-collections*	CR ×	CR ×	CR erroné CR erroné	CR erroné	CR erroné	D : CR mixte I : CR erroné	D : CR erroné	Fluide : Aucun Hésitations : par 5, par 10 Erreurs: par 2	× : * ÷ : *	× : - ÷ : -	-	Pour 2 : * Pour 5 : ** Pour 10 *	Co : Réussi avec choix d'écritures As : - Di : En acte, énoncé EN : Réussi EA : Réussi
E2	• Amorce + itérée • Écriture × : *Sous-collections*	CR + itérée	CR + erroné	CR erroné CR réussi (distribution effective)	CR erroné	CR erroné	D : CR + erroné I : CR , erroné	D : CR erroné	Fluide : Aucun Hésitations : par 5 Erreurs : par 2, par 10	× : * ÷ : -	× : - ÷ : -	Distribution effective (1 couple)	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 **	Co : Réussi avec choix d'écritures As : - Di : - EN : Réussi EA : Réussi
E3	• + itérée = × • Écriture × : *Disposition rectangulaire* *Sous-collections*	CR ×	CR ×	CR erroné CR × erroné	CR erroné	CR erroné	D : CR × I : CR ×	D : CR erroné	Fluide : Aucun Hésitations : par 5, par 10 Erreurs: par 2	× : ** ÷ : **	× : ** ÷ : *	Rappel de quelques couples	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 *	Co : Réussi à l'écrit As : En acte, énoncé Di : En appropriation à l'écrit EN : Réussi EA : Réussi
E4	• + itérée = × • Écriture × : *Disposition rectangulaire* *Sous-collections*	CR ×	CR ×	CR erroné CR ×	CR erroné	CR erroné	D : CR × I : CR ×	D : CR erroné	Fluide : par 2 Hésitations : par 5, par 10	× : * ÷ : *	× : ** ÷ : -	Rappel de plusieurs couples	Pour 2 : ** Pour 5 : ** Pour 10 **	Co : Maîtrisé à l'écrit As : En acte, énoncé Di : En acte et réussi à l'écrit EN : Réussi EA : Réussi
E5	• Écriture × : *Disposition rectangulaire*	CR ×	CR × erroné	CR erroné CR × erroné	CR erroné	CR erroné	D : CR × I : CR erroné	D : CR erroné	Sans donnée	× : * ÷ : -	× : ** ÷ : -	Distribution effective et ÷ (2 couples)	Pour 2 : - Pour 5 : - Pour 10 : -	Co : Amorce As : - Di : Amorce EN et EA : Confusion

[1] L'énoncé de type regroupement comportait une donnée superflue qui semble être l'élément de distraction pour tous les élèves.

Légende : *× : multiplicatif/multiplication* ÷ : division *÷: additif* *+ itérée : addition itérée* *CR : calcul relationnel* *D : relation directe* *I : relation indirecte*
= : est équivalent à *- : non réussi* ** : peu connu* *** : connu*

Concernant le codage et l'interprétation de l'écriture $a \times b$, E2 associe seulement la représentation en sous-collections équipotentes à l'écriture multiplicative et elle ne considère pas l'addition itérée comme une écriture équivalente à la multiplication. Aux énoncés de problèmes, E2 n'engage pas un calcul relationnel multiplicatif juste. Le seul type de calcul relationnel juste engagé est de type additif. Ces conduites témoignent d'une pensée additive qui comprend deux niveaux d'emboîtement : parties/tout. E2 maîtrise peu de connaissances sur le calcul et les propriétés : le comptage par intervalles présente des hésitations par cinq et des erreurs par deux et par dix, les produits des faits multiplicatifs sont un peu connus alors que les quotients ne le sont pas et les seules propriétés convoquées sont l'élément neutre, l'élément absorbant et la commutativité lorsque des choix d'écritures sont proposés. De plus, l'opération de division n'est pas reconnue comme l'opération réciproque de la multiplication. Cependant, elle recourt aux critères de divisibilité, ce qui constitue une force. Son profil se caractérise donc par une amorce des structures multiplicatives. Au regard du modèle interprétatif des conduites, on peut dire qu'en fonction des exigences et des contraintes, E2 engage des stratégies d'additions ne témoignant d'aucun emboîtement de type éléments/parties/tout ou encore des stratégies témoignant d'une première articulation entre les éléments et les parties.

Tout comme E2, E5 ne reconnaît pas l'équivalence entre l'addition itérée et la multiplication. Pour sa part, c'est plutôt la disposition rectangulaire qui est associée à la multiplication. Une particularité des conduites de E5 est de considérer les écritures proposées en tant que calculs à résoudre, et non comme des écritures qui modélisent une situation. Elle engage un calcul relationnel multiplicatif juste lorsque l'énoncé se résout par une multiplication que ce soit un énoncé d'isomorphisme de mesures ou un produit scalaire. Les énoncés qui requièrent une division sont, quant à eux, résolus par une distribution effective ou ne sont pas réussis. On note également cette césure entre la multiplication et la division pour les connaissances des faits multiplicatifs et des algorithmes de calcul. Les connaissances sur les propriétés sont plutôt faibles puisque, d'une part, elle confond l'élément neutre avec l'élément absorbant et, d'autre part, ses connaissances de la commutativité et la distributivité ne sont qu'amorcées et leur emploi varie selon les exigences et contraintes des tâches. E5 présente un profil de connaissances tranché en fonction de l'opération nécessaire à la résolution de la situation. Lorsque l'opération de multiplication est requise, E5 engage des stratégies qui témoignent d'une interprétation des relations multiplicatives selon une structure d'inclusion hiérarchique à trois niveaux. Par contre, lorsque l'opération de division est en jeu, les stratégies engagées témoignent plutôt de la nécessité de représenter les parties ainsi que chacun des éléments qui les constituent.

Pour sa part, E1 reconnaît l'équivalence entre la multiplication et l'addition itérée. De plus, l'écriture multiplicative est associée aux représentations selon une disposition rectangulaire et par sous-collections équipotentes. Il engage un calcul relationnel de type multiplicatif aux énoncés ayant une structure d'isomorphisme de mesures qui se résolvent par la multiplication et aux énoncés de division partage. Cependant, la présence, dans un même énoncé, de plusieurs relations multiplicatives rend difficile l'identification d'un calcul relationnel adéquat. E1 engage un calcul relationnel erroné lorsqu'un énoncé présente une structure de division regroupement ou de produit scalaire. Le comptage par intervalles de deux présente des erreurs alors que des hésitations sont notées lors du comptage par intervalles de cinq et de dix. Les faits multiplicatifs sont un peu connus alors que les algorithmes de multiplication et de division ne le sont pas. Même si la tâche sur les critères de divisibilité est réussie, ceux-ci sont évoqués seulement pour cinq. La commutativité est reconnue si des choix d'écritures sont proposés. En contexte d'énoncés de problèmes, E1 peut recourir à la distributivité. Son profil se démarque de celui de E2 par sa capacité à établir des calculs relationnels de type multiplicatif et des connaissances plus développées sur les propriétés de la multiplication. Le profil de connaissances de E1 est contrasté puisque les stratégies varient en fonction des exigences et des contraintes des tâches. Lorsqu'elles sont justes, elles témoignent d'un emboîtement contrôlé des éléments/parties/tout et lorsqu'elles sont erronées, elles témoignent plutôt d'un manque de contrôle de l'articulation entre la valeur d'une partie et le nombre de parties.

En plus des connaissances, la dimension affective mérite d'être commentée puisqu'elle colore le profil de l'élève. Lors des entretiens, lorsque E1 est confronté à l'échec, par exemple lorsqu'il ne comprend pas un énoncé de type produit cartésien, son comportement change. Il se frappe la tête et dit qu'il ne comprend rien. Cette attitude déstabilise l'expérimentatrice qui cherche à soutenir l'élève tout en poursuivant l'entretien, et ce, sans lui donner les réponses. N'ayant pas directement accès au potentiel de l'élève, l'expérimentatrice intervient en fonction de composantes affectives plutôt que didactiques. C'est-à-dire que les interventions et relances proposées par l'expérimentatrice dépendent de l'attitude de l'élève plutôt que de ses connaissances effectives. L'enseignante mentionne également que cet élève éprouve des difficultés à persévérer face à une difficulté ou un échec.

E3 et E4 présentent des profils similaires pour les collections de tâches sur le codage et sur les énoncés de problèmes. Tous deux reconnaissent l'équivalence entre l'addition itérée et la multiplication et aussi que l'écriture multiplicative permet de décrire autant une représentation organisée selon une disposition rectangulaire qu'une représentation organisée en sous-collections équipotentes. Ils engagent des calculs relationnels multiplicatifs pour des énoncés de type isomorphisme de mesures. Cependant, seul E4 engage un calcul relationnel juste pour une division regroupement. Des calculs relationnels multiplicatifs sont aussi engagés par E3 et E4 pour des produits scalaires de type « fois plus » que la relation soit directe ou indirecte.

Leurs profils se distinguent quant aux connaissances sur le calcul et les propriétés. E3 maîtrise les faits multiplicatifs ainsi que les algorithmes de multiplication et de division alors que E4 les connaît un peu et contrôle seulement l'algorithme de multiplication. Tous les deux ont des hésitations lors du comptage par intervalles de cinq et de dix. Si E3 effectue un comptage par intervalles de deux avec des erreurs, E4 effectue un comptage fluide par 2. E3 et E4 connaissent les critères de divisibilité. Alors que les connaissances semblent acquises pour la commutativité, l'associativité ainsi que pour les éléments neutre et absorbant, seul E4 a recours à la distributivité pour résoudre des égalités. Ses conduites, notamment la question 7, manifestent une plus grande capacité d'adaptation quant à l'utilisation des propriétés, puisqu'en fonction des contraintes de la tâche, il recourt à l'associativité ou la distributivité. Pour E4, les propriétés constituent de véritables outils pour faciliter le calcul. E3 reconnaît la division comme l'opération réciproque de la multiplication, ce qui n'est pas le cas de E4 qui résout des situations de division par des stratégies telles que l'addition itérée, la multiplication trouée et la distribution effective. Au regard des structures multiplicatives, nous émettons l'hypothèse que E4 présente une structuration des connaissances plus achevée que E3. Cependant, les situations qui requièrent une opération de division sont mieux contrôlées par E3.

Ces profils rendent compte des connaissances sur les structures multiplicatives que le protocole d'entretien permet d'investiguer.

5.3 Modifications proposées au protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives

Suite aux analyses menées, nous émettons des recommandations de modifications au protocole d'investigation des connaissances des structures multiplicatives. Pour la collection de tâches *Codage et interprétation de l'écriture a* × *b*, nous proposons quelques modifications.

À la tâche 2, le terme *rapidement,* dans la consigne, incite quelques élèves à estimer le nombre d'objets au lieu de considérer les dimensions de la disposition rectangulaire. Nous proposons donc de remplacer la consigne pour : « Quelles écritures correspondent bien aux jetons dessinés ? » À la tâche 3, nous recommandons de présenter une grille dont l'écart entre les dimensions est plus grand, par exemple une grille de treize par dix-huit carreaux, pour assurer un contrôle des grandeurs de chacune des dimensions de la grille. À la tâche 5, différentes consignes sont utilisées par l'expérimentatrice : « Quelles écritures permettent de trouver le nombre de bonbons dans tous les sacs ? » et « Dans chacun des sacs, il y a 7 bonbons. » La deuxième formulation comporte une description des relations d'isomorphisme de mesures et donc, une interprétation des relations, ce qui n'est pas le cas dans la première consigne. Ainsi, nous devrions retirer la seconde consigne de l'énoncé.

Les tâches 2, 3 et 5 offrent des contextes différents (une disposition rectangulaire d'objets, une grille et une quantité organisée en sous-collections) qui permettent d'observer des profils de conduites variés. Elles s'avèrent donc utiles et complémentaires pour l'investigation des connaissances sur le codage et l'interprétation de l'écriture a × b. L'utilité didactique de la tâche 4 n'a pu être démontrée par le projet puisqu'une seule élève l'a complétée. Cependant, les conduites observées ne viennent en aucun cas compléter les informations obtenues aux autres tâches. Pour compléter cette collection de tâches, nous suggérons de remplacer la tâche 4 par une tâche qui évalue le codage par l'écriture a × b, dont la structure d'énoncé est de type produit de mesures. Par exemple, on présente une représentation rectangulaire d'un plancher où les dimensions linéaires sont fournies :

huit mètres de largeur et six mètres de longueur. On demande à l'élève quelle est la surface du plancher.

Les analyses effectuées nous permettent aussi de proposer quelques modifications pour certaines tâches de la collection *Énoncés de problèmes multiplicatifs*. À la question 6a, nous suggérons de retirer la donnée superflue qui nuit à l'identification du calcul relationnel. Nous recommandons également de demander d'abord à l'élève de résoudre le problème, puis, si l'élève n'amorce pas de démarche, on peut relancer à partir des écritures proposées. On devrait compter un maximum de quatre ou cinq écritures proposées en précisant que ce sont des calculs que d'autres élèves ont effectués. L'énoncé de la tâche 6b doit être modifié afin que la question porte sur la relation entre les roues et les wagons. Les conduites de E1, E2, E3 et E4 suggèrent en effet que la relation non pertinente entre wagons et roues/wagon est celle qui s'impose aux élèves, alors que celle qui est pertinente au regard de la question, entre places assises et places assises/wagon, ne se dégage qu'après une seconde lecture. Ainsi, l'énoncé devrait se lire comme suit : « Un petit train est composé de 4 wagons. En tout, il a 36 roues. Combien chaque wagon compte-t-il de roues ? » On laisse l'élève résoudre l'énoncé. Puis s'il commet une erreur, on peut lui proposer, en guise de relance, une ou deux écritures parmi les suivantes afin de valider le calcul relationnel qu'il engage : $36 - 4$, 36×4, $36 \div 4$ et $4 \times \_ = 36$. Ces écritures sont accompagnées de la consigne suivante : « Un élève a fait ça comme démarche, qu'en penses-tu ? »

À la question 11a, nous proposons de retenir plusieurs formulations de la question : « Est-ce qu'il y a un lien entre le problème et l'écriture ? », « Un élève a écrit ça (la division). Pourquoi a-t-il écrit ça ? », « Est-ce que la division m'apprend quelque chose de ce problème ? » L'expérimentatrice pourra choisir la formulation la plus appropriée au contexte d'entretien.

À la question 10, aucun élève ne réussit à mettre en œuvre un calcul relationnel adéquat. Des confusions d'abord entre boîtes et caisses sont relevées, mais également une difficulté à établir la relation de type regroupement entre les données du problème. La présence d'une donnée superflue a influencé les réponses de plusieurs élèves. Le fait également que l'énoncé comporte à la fois des boîtes d'oeufs et des caisses de boîtes d'oeufs peut avoir semé la confusion. Cette tâche a été utilisée dans des versions antérieures sans donnée superflue et l'ajout de celle-ci se révèle plutôt nuisible pour l'évaluation d'un énoncé de type division regroupement. Nous suggérons de retirer la donnée superflue ainsi que les choix d'écritures qui y sont associés afin de faciliter le repérage des mises en relation par les élèves.

Afin d'équilibrer le nombre de questions par structure, nous suggérons de retirer la question 11c, qui présente une structure de produit scalaire, et la remplacer par un énoncé de type division regroupement.

Pour permettre une investigation plus précise et graduée des connaissances des élèves relatives aux produits cartésiens, nous proposons des modifications aux tâches 15a, 15b et 16. À la tâche 15a, aucun élève n'établit un calcul relationnel impliquant les trois dimensions. De plus, le fait de pouvoir utiliser plusieurs fois la même étampe est difficile à saisir, ce qui conduit à des échanges où l'expérimentatrice explicite une stratégie par une démonstration. Il faut donc réduire à deux dimensions et clarifier les termes utilisés. Nous suggérons la formulation suivante : « Une enseignante a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Combien de motifs différents peut-elle faire (ou étamper, selon le langage des enfants) ? » La relance proposée est maintenue, soit proposer des images d'étampes et de couleurs d'encre si l'élève n'engage aucune action.

Le contexte de la question 15b est complexe à saisir pour les élèves. Nous proposons de modifier le contexte afin qu'il soit plus facilement compréhensible. Ainsi, nous proposons un contexte de jeu de cartes. L'énoncé pourrait se lire comme suit : « Un jeu de cartes comporte 9 cartes de cœur et 12 cartes de pique. Combien de paires différentes, composées d'une carte de cœur et d'une carte de pique, est-il possible de former ? » Si l'élève ne peut rien faire, il est possible de lui fournir les cartes afin qu'il modélise la situation.

Nous proposons de retirer la question 16 qui n'apporte aucune information supplémentaire sur les connaissances du produit cartésien sachant que l'investigation pourra être complétée par la nouvelle tâche 4.

À partir des analyses effectuées, nous proposons quelques modifications pour certaines tâches de la collection *Calcul et propriétés*. À la question 1, il convient de mieux équilibrer le nombre de faits multiplicatifs de chacune des catégories demandées. Parmi les multiplications demandées, nous pouvons demander qu'une seule multiplication qui implique l'élément neutre, plutôt que trois, et ajouter deux autres multiplications, par exemple 4×7 et 3×9. Il faut changer 2×7 et 2×6 par 2×7 et 6×2. Il conviendrait de s'assurer que les divisions demandées soient les opérations réciproques des multiplications demandées.

Les tâches proposées semblent adaptées pour l'investigation des connaissances sur les propriétés de la multiplication. Quelques modifications sont tout de même souhaitables. Il serait intéressant d'ajouter une question sur l'équivalence entre les écritures additives itérées et multiplicatives de type : $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 =$ ___ × ____ de manière à confronter la conduite à cette tâche aux choix des écritures associées à des dispositions rectangulaires ou des sous-collections équipotentes. À la question 17, nous proposons d'ajouter une relance qui consiste à modifier les nombres en jeu dans le cas où la taille des nombres semble poser problème. Par exemple, les écritures suivantes, respectant les relations établies à l'énoncé de départ peuvent être proposées : $4 \times 6 = 24$; a) 6×4; b) 3×6; c) 5×6; d) 8×6. À la question 19b, qui permet de distinguer les élèves qui maîtrisent la commutativité, les nombres peuvent être diminués sans modifier l'enjeu : $453 \times 986 = 986 \times$ __. Bien qu'aucun élève n'ait réussi la question 18, celle-ci a été expérimentée dans le cadre du projet en partenariat et certains élèves ont convoqué la commutativité pour résoudre la tâche. Ainsi, aucune modification n'est souhaitable.

5.4 Discussion du potentiel didactique des relances

Notre recherche vise aussi à rendre compte du potentiel didactique des relances réalisées au regard des caractéristiques spécifiques des tâches dans lesquelles elles s'insèrent. Par potentiel didactique d'une relance, nous entendons leur pertinence à stimuler une stratégie dans la résolution d'une tâche. Les résultats montrent que des conditions particulières sont nécessaires pour assurer le potentiel didactique d'une relance.

Nos résultats confortent un premier facteur contribuant au potentiel didactique des relances déjà identifié par Giroux et Ste-Marie (2015b). La relance doit être prévue et réalisée en fonction des caractéristiques spécifiques de la tâche. Un certain nombre de relances prévues à l'analyse *a priori* ont été expérimentées auprès des élèves rencontrés. Ces relances, mises à l'essai lors des entretiens, ont parfois eu les effets escomptés, soit favoriser l'adaptation des stratégies de l'élève et ainsi, stimuler la progression du savoir. L'adéquation de la relance à la tâche est certes une condition nécessaire, mais non suffisante pour assurer le potentiel des relances. Ainsi, nous nous sommes intéressée aux autres facteurs susceptibles de l'influencer.

Les connaissances mathématiques et didactiques ainsi que l'expérience de l'expérimentatrice sont un premier facteur déterminant du potentiel didactique d'une relance. Ceci est un résultat spécifique de notre recherche et ajoute à la discussion sur les relances lancée par Giroux et Ste-Marie (2015b). Les connaissances mathématiques et didactiques de l'expérimentatrice réfèrent à sa maîtrise des analyses *a priori* des tâches, lui permettant d'anticiper les conduites des élèves et les effets possibles des relances effectuées. L'expérience réfère aux situations et tâches effectuées par le passé qui lui permettent d'improviser des relances adaptées à la fois aux caractéristiques de la tâche et aux conditions particulières des interactions didactiques en cours. Lorsque l'expérimentatrice effectue une relance pour laquelle elle ne maîtrise pas tout à fait l'objectif ou encore, si elle n'anticipe pas les conduites des élèves, la relance peut ne pas produire l'effet escompté. Par exemple, à la question 19, l'expérimentatrice improvise deux relances formulées différemment, chacune d'elle ayant un effet différent. La première relance effectuée auprès de E3 consiste à lui demander si le résultat est identique de chaque côté de l'égalité alors que la seconde relance effectuée auprès de E4 consiste à inviter l'élève à considérer les écritures au lieu du résultat, de part et d'autre du signe d'égalité, afin de valider sa réponse. Cette relance semble plus adaptée que la première puisqu'elle suggère d'observer les nombres et les opérations impliqués. Elle permet aussi à E4 de recourir à la distributivité, ce que E3 n'arrive pas à faire. Ainsi, les deux relances improvisées, bien qu'elles visent toutes deux à stimuler le recours à la distributivité, n'ont pas le même potentiel didactique. Dans ce cas-ci, les connaissances et l'expérience de l'expérimentatrice ont certainement influencé le choix des relances effectuées.

L'expérimentatrice procède à deux autres relances dont le potentiel didactique est amoindri parce qu'elle n'anticipe pas les conduites des élèves, ce qui l'empêche de mener à terme ces relances. Lors du rappel des faits multiplicatifs, un échange porte sur la division en tant qu'opération réciproque de la multiplication. Il aurait été pertinent, une fois cet échange terminé, que l'expérimentatrice invite l'élève à résoudre quelques divisions sur la base de cette nouvelle connaissance, ce qui n'a pas été fait. À la question 14, en guise de relance, on demande à E5 de composer un problème semblable, c'est-à-dire qui implique une relation scalaire. Bien que E5 formule un problème, l'expérimentatrice ne lui demande pas de le résoudre. Sur le vif, l'expérimentatrice n'a pas considéré que la seule formulation du problème soit insuffisante pour déterminer le calcul relationnel engagé par l'élève. Donc, une maîtrise de l'analyse *a priori* des tâches et de l'outil par l'orthopédagogue s'avère un facteur déterminant pour identifier les relances utiles.

Nos résultats nous ont aussi permis de dégager un autre facteur qui influence le potentiel didactique d'une relance. En accord avec Giroux et Ste-Marie (2015b), il s'avère qu'une relance doit être adaptée à l'activité mathématique de l'élève pour permettre à celui-ci de progresser dans la tâche. Donc, si une relance est effectuée en fonction des connaissances investies par l'élève, elle est susceptible de stimuler l'adaptation de ses stratégies. Par exemple, à la question 7 lorsque l'élève cherche le nombre de crayons dans six et neuf boîtes, l'expérimentatrice note que E4 recourt aux propriétés sans toutefois contrôler complètement leur emploi. Une relance permet à E4 d'ajuster sa stratégie. Aussi, pour trouver les diviseurs de vingt-quatre, E3 et E4 évoquent à un certain moment la commutativité et l'expérimentatrice leur rappelle cette stratégie ce qui leur permet de trouver d'autres diviseurs. Dans ces deux cas, c'est l'activité mathématique des élèves qui a guidé le choix des relances effectuées par l'expérimentatrice. Autrement dit, la lecture que fait l'expérimentatrice des interactions de l'élève avec la tâche lui permet de proposer une relance qui s'articule à l'activité mathématique de l'élève.

Au cours de notre expérimentation, nous avons aussi constaté que demander « Y a-t-il une autre écriture qui représente ce dessin ? » s'est avéré une relance pertinente seulement si l'élève choisit l'addition itérée puisque cette question permet à l'élève de progresser vers la reconnaissance de la multiplication en tant qu'écriture équivalente à l'addition itérée. Cependant, une question demeure. Considérant que les élèves rencontrés ont prioritairement choisi une écriture multiplicative, de quelle façon pouvons-nous investiguer l'équivalence entre l'écriture additive et multiplicative sans poser la question ?

Effectuer une relance en considérant l'activité mathématique de l'élève nécessite aussi la prise en compte du répertoire de stratégies et des connaissances dont l'élève dispose. Par exemple, à l'énoncé de la question 10 qui implique une division regroupement et une donnée superflue, l'expérimentatrice retire la donnée superflue de l'énoncé pour faciliter la mise en relation. Cet énoncé, sans la donnée superflue, a déjà été expérimenté et les élèves engageaient, sous ces conditions, un calcul relationnel adéquat. Cependant, même si la donnée superflue est retirée, les élèves n'établissent pas de calcul relationnel adéquat. On peut supposer qu'ils ne disposent pas des connaissances suffisantes pour y arriver. Cette relance n'a donc pas l'effet souhaité.

Au terme de l'investigation, nous disposons d'un profil des connaissances des élèves ce qui nous permet de juger *a posteriori* de la pertinence des relances effectuées au regard de l'activité mathématique de l'élève. Cependant, en cours d'entretien, nous ne disposons pas d'un tel profil et donc, certaines relances ont été utilisées malgré leur inadéquation à l'activité mathématique de l'élève. Ainsi, même si *a priori* certaines relances peuvent être considérées didactiquement justifiées, elles n'ont pas nécessairement les effets escomptés. Nous ne pensons toutefois pas qu'il faille éviter d'effectuer des relances par crainte d'entraîner des effets indésirables. D'abord, même si une relance n'a aucun effet, elle peut nous renseigner sur les connaissances des élèves, information pertinente dans le contexte d'investigation des connaissances. Par exemple, les relances effectuées auprès de E5 nous ont montré qu'elle considère les écritures comme des calculs à effectuer, ce qui permet d'enrichir son profil des connaissances. Ensuite, ne pas effectuer de relances diminue les possibilités d'apprentissage d'un élève. Nous remarquons que l'expérimentatrice propose moins de relances à E2 parce qu'elle juge que E2 ne dispose pas des connaissances nécessaires pour en formuler. Cependant, au terme de l'entretien, E2 a eu moins d'occasions d'apprendre que les autres élèves. Cet exemple montre de plus qu'au cours de l'entretien, l'expérimentatrice est en recherche d'adaptation en fonction de l'activité mathématique de son interlocuteur.

Certaines interventions sont reconnues pour avoir peu d'effet puisqu'elles sont moins spécifiques des caractéristiques de la tâche. D'après nos résultats, il arrive qu'une telle intervention relance l'élève et lui permette d'engager une stratégie efficace. Ces relances sont utiles lorsqu'elles répondent à une demande de l'élève, par exemple si celui-ci demande une seconde lecture de l'énoncé. De plus, elles sont utiles si elles sont effectuées en fonction de l'activité mathématique de l'élève. À la question 21, l'expérimentatrice relit la consigne, en rappelant la contrainte de la tâche selon laquelle il n'y a que vingt-quatre cartes. Puisque les élèves engageaient une démarche multiplicative, le rappel de la consigne leur permet d'ajuster leur stratégie et de s'engager dans une structure de division, car ils disposent des connaissances minimales pour que la relance ait un effet.

En somme, une relance peut être bien fondée du point de vue didactique et mathématique, mais elle n'a de potentiel didactique que si elle est calibrée aux connaissances convoquées par l'élève.

CONCLUSION

Les demandes du milieu scolaire pour le développement d'outils d'évaluation orthopédagogique se font de plus en plus pressantes. En réponse à cette demande, un projet de recherche en partenariat dirigé par Giroux est mis sur pied en 2013 en ayant pour objectif la mise à l'épreuve et la bonification d'outils d'évaluation et d'intervention orthopédagogiques en mathématiques. S'inscrivant dans ce projet de recherche, la présente étude a pour objectif de procéder à une validation interne du protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives.

Pour atteindre cet objectif général, nous avons réalisé des entretiens didactiques avec cinq élèves de quatrième, cinquième et sixième années du primaire.

Dans un premier temps, nous avons procédé à des analyses intratâches pour atteindre le premier objectif spécifique portant sur la confrontation des analyses *a priori/a posteriori*. Ainsi, pour valider chacune des tâches du protocole, les conduites mathématiques de chacun des cinq élèves ont été analysées au regard de stratégies identifiées à l'analyse *a priori*. La presque totalité des conduites effectives était prévue par l'analyse *a priori*. Par ailleurs, nous avons formulé quelques propositions pour bonifier à la fois le protocole et l'analyse *a priori*.

Dans un second temps, nous avons effectué des analyses intertâches. Ce type d'analyses a permis d'atteindre le second objectif spécifique de ce mémoire, soit de rendre compte de la fiabilité et de l'utilité didactiques de chacune des tâches prévues au protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. Pour dresser un profil détaillé et contrasté des connaissances des élèves sur les structures multiplicatives, il est essentiel que le protocole présente une certaine cohérence au plan des tâches. Ainsi, les analyses intratâches doivent être complétées par des analyses intertâches. À partir de ces analyses, nous avons précisé le type de connaissances que chacune des collections de tâches permet d'investiguer au regard des structures multiplicatives. Nous avons ensuite dressé les profils de connaissances des élèves grâce à l'analyse croisée des connaissances de chaque élève à l'ensemble des collections de tâches.

Suite aux analyses intratâches et intertâches, nous proposons certaines modifications pour bonifier le protocole d'entretien. Ces recommandations sont détaillées au chapitre V. Cependant, nous présentons, dans ce qui suit, un résumé des modifications proposées. Nous proposons de changer la formulation des questions 2, 5, 6a, 6b et 11a. Les tâches 11c et 16 doivent être retirées alors qu'un énoncé de problème de division regroupement doit être ajouté pour mieux équilibrer le nombre de questions appartenant à chaque structure de problèmes multiplicatifs. Parce qu'ils ne permettent pas l'investigation des connaissances, les énoncés des questions 4 et 15b doivent être remplacés par des énoncés de mêmes structures. Certaines modifications relatives aux variables didactiques sont aussi proposées. Les variables numériques des questions 3, 15a et 19b doivent être modifiées, alors qu'il faut retirer les données superflues des questions 6a, 6b et 10.

Le troisième objectif de notre étude est de rendre compte du potentiel didactique des relances réalisées au regard des caractéristiques spécifiques des tâches dans lesquelles elles s'insèrent. Nous entendons, par potentiel didactique d'une relance, sa pertinence à stimuler une stratégie dans la résolution d'une tâche. Au chapitre IV, nous présentons les relances effectuées à chacune des tâches du protocole et, à partir des conduites des élèves avant et après ces relances, l'effet de chacune d'elles est précisé. Les résultats tendent à montrer que des conditions particulières sont nécessaires pour assurer le potentiel didactique d'une relance. D'abord, nos résultats montrent que la relance doit être prévue et réalisée en fonction des caractéristiques didactiques de la tâche, condition nécessaire qui a déjà été identifiée par Giroux et Ste-Marie (2015b). Nos résultats enrichissent la discussion au sujet des relances par l'identification d'autres facteurs susceptibles d'influencer le potentiel didactique d'une relance. Tout d'abord, une maîtrise de l'analyse *a priori* des tâches et de l'outil par l'orthopédagogue s'avère un facteur déterminant pour identifier les relances utiles. Donc, les connaissances mathématiques et didactiques ainsi que l'expérience de l'expérimentatrice constituent un facteur déterminant du potentiel didactique d'une relance. Ensuite, en accord avec Giroux et Ste-Marie (2015b), une relance doit être adaptée à l'activité mathématique de l'élève pour permettre à celui-ci de progresser dans la tâche. Bref, si une relance est effectuée en fonction des connaissances investies par l'élève et en fonction du répertoire de stratégies dont il dispose, elle est susceptible de stimuler l'adaptation de ses stratégies. La lecture que fait l'expérimentatrice des interactions de l'élève avec la tâche lui permet de proposer une relance qui s'articule à l'activité mathématique de l'élève.

Limites du projet de mémoire

Cette étude présente certaines limites dont certaines sont inhérentes à la méthodologie employée. Notre étude de nature qualitative est réalisée auprès de cinq élèves. Les résultats sont fort intéressants pour une validation du protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. Cependant le nombre restreint de participants rencontrés ne nous permet pas de généraliser les résultats. Puisque le protocole a aussi été mis à l'épreuve par d'autres orthopédagogues dans le cadre du projet en partenariat, nous savons d'ores et déjà que d'autres conduites sont possibles même si celles-ci n'ont pu être observées dans le cadre de cette étude.

Puisque le protocole comporte de nombreuses questions, nous avons préféré une présentation économique des analyses *a priori* et des résultats. Cependant, il aurait été possible d'étayer davantage certaines analyses *a priori* et *a posteriori*.

La méconnaissance du milieu scolaire par l'expérimentatrice qui mène les entretiens constitue également une limite. Les analyses des tâches sont réalisées en fonction des conduites des élèves dans le cadre d'entretiens sans tenir compte de la culture scolaire et de l'enseignement que les élèves ont reçu sur les structures multiplicatives. Par exemple, il est possible qu'un type de représentation de la multiplication, soit une disposition rectangulaire ou une organisation en sous-collections équipotentes, ait dominé dans l'enseignement ou dans les manuels utilisés. L'outil d'évaluation est conçu pour des orthopédagogues travaillant dans le milieu scolaire. Ainsi, l'interprétation des conduites des élèves prendra en considération les informations supplémentaires dont ils disposent quant à la culture scolaire et aux méthodes d'enseignement utilisées.

Puisque cette étude est réalisée dans le cadre d'un mémoire de maîtrise, les objectifs de recherche sont limités. Par conséquent, l'objectif principal est restreint à une validation du protocole, sans que le modèle interprétatif, qui fait également partie de l'outil d'évaluation, soit pris en considération.

Il aurait été intéressant de dresser un profil de connaissances détaillé pour chacun des élèves et de situer le niveau de structuration des connaissances des structures multiplicatives selon le modèle interprétation des conduites. Toutefois, réaliser de tels profils dépasse l'objectif de cette étude. Même si ceux-ci s'avèrent peu développés, des profils de connaissances des élèves ont été présentés puisqu'ils étaient nécessaires pour juger de la pertinence des tâches. Il est quelque peu difficile, voire impossible, de juger de la pertinence des tâches pour rendre compte d'un profil de connaissances étoffé et cohérent sans mener d'analyses croisées des conduites de chaque élève à l'ensemble des tâches du protocole. Considérant que les stratégies des élèves varient selon les caractéristiques des tâches, l'outil doit rendre compte de ces variations et mener à un profil contrasté. Les résultats montrent que le protocole permet de rendre compte d'un profil de connaissances contrasté lorsque cela s'y prête.

Au terme des analyses croisées par collection de tâches, il aurait été intéressant de mettre en évidence les liaisons entre les tâches de manière à cerner leur complémentarité. Étant donné le nombre restreint d'élèves rencontrés, nous n'avons identifié ces liaisons qu'entre certaines tâches du protocole lorsque les données s'y prêtaient, ce que nous n'avons pu réaliser pour l'ensemble des tâches jugées pertinentes.

Malgré ces limites, ce travail a quand même atteint son objectif principal, soit de procéder à une première validation interne de l'outil et proposer des modifications qui devront, éventuellement être à nouveau soumises à la contingence.

Perspectives de recherche

Cette recherche constitue un apport important pour le projet de recherche en partenariat. Il a permis de bonifier le protocole d'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives. La nouvelle version du protocole, avec les modifications proposées, devra être expérimentée auprès d'un nombre plus important d'élèves. Cette seconde validation pourrait être réalisée dans le cadre du projet de recherche en partenariat, ce qui permettrait de dévoluer la passation du protocole à des orthopédagogues du milieu scolaire. Cette passation est nécessaire pour juger, non seulement de sa pertinence, mais également des conditions de son utilisation par des orthopédagogues. Il est probable que certains ajustements soient nécessaires pour adapter le protocole à la réalité scolaire des orthopédagogues.

Dans le cadre de ce projet de mémoire, nous avons expérimenté l'ensemble des tâches auprès des élèves. Cette passation exhaustive du protocole d'une durée de deux à trois rencontres de quarante-deux minutes en moyenne était nécessaire pour procéder à la validation. Cependant, cet outil destiné à la pratique orthopédagogique doit présenter une certaine souplesse que nous n'avons pu expérimenter. Les contraintes professionnelles auxquelles font face les orthopédagogues dans le milieu scolaire restreignent le temps consacré à l'évaluation individuelle d'un élève. Donc, l'outil doit permettre aux orthopédagogues de choisir les tâches appropriées et laisser de côté celles qui s'avèrent moins pertinentes pour l'évaluation.

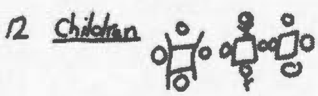
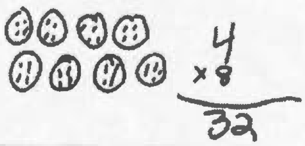
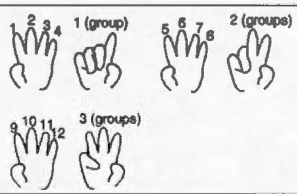
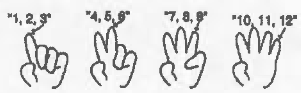
L'analyse du potentiel des relances nous a révélé que les connaissances et l'expérience de l'orthopédagogue constituent un facteur déterminant pour identifier les relances appropriées. Nous pouvons penser qu'il en est de même pour sélectionner, à partir du protocole, les tâches pertinentes pour l'évaluation d'un élève en particulier. Ainsi, pour garantir une utilisation adéquate de l'outil d'investigation, un accompagnement auprès des orthopédagogues est essentiel pour assurer, entre autres, une appropriation adéquate de l'analyse *a priori* du protocole. D'autant plus que l'appropriation d'un tel outil n'est aucunement comparable à l'appropriation d'un instrument tel que Key Math (Connoly, 2008) où il suffit de passer à la section suivante lorsqu'un élève échoue trois questions consécutives.

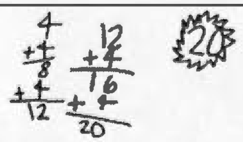
La mise à l'essai du protocole montre également le potentiel de l'outil à fournir des pistes interprétatives des conduites mathématiques, notamment en dressant un profil de connaissances de l'élève. Les résultats montrent que certaines tâches ne permettent pas d'investiguer les connaissances mathématiques attendues. Cependant, il serait intéressant de mettre en valeur les connaissances mathématiques investies qui ne correspondent pas aux réponses prévues par l'analyse *a priori*.

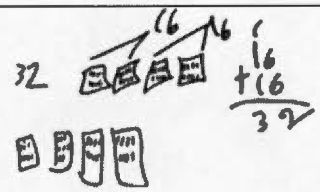
L'outil est une contribution importante pour l'orthopédagogie des mathématiques puisqu'il est conçu dans une perspective d'articulation de l'évaluation à l'intervention orthopédagogique. La seconde phase du projet en partenariat dirigée par Giroux portera plus précisément sur l'intervention orthopédagogique, ce qui permettra de développer des interventions adaptées aux profils de connaissances des élèves. D'ici là, ce projet constitue une avancée intéressante pour soutenir les orthopédagogues pour l'évaluation et les élèves dans leur appropriation des structures multiplicatives.

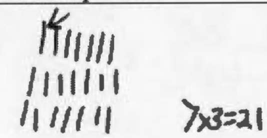
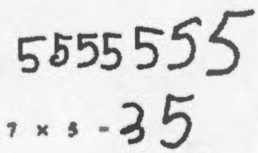
ANNEXE A

TRADUCTION LIBRE DE LA TYPOLOGIE DES STRATÉGIES DE CALCUL TIRÉE DE SHERIN ET FUSON (2005) PAR FORTIER-MOREAU, GIROUX ET STE-MARIE (2014)

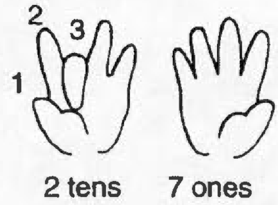
Tout compter *Count-all*	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques clés :	Aucune Toutes les valeurs sont représentées entre un et le total
	Différents exemples	
Compter à partir d'un dessin / dessin semi-réaliste de la situation *Count after drawing/semi-situational drawing*		L'élève complète un dessin, dénombre chacun des groupes séparément. Puis, il compte à partir de un la collection totale.
Compter à partir d'un dessin/ «dessin mathématique simplifié» *Count after drawing / math drawing*		Même stratégie que ci-dessus, mais en ayant recours à ce qu'on appelle des « dessins mathématiques » selon l'organisme CMW. Ces dessins sont plus abstraits et constituent une représentation moins directe des éléments de la situation.
Double comptage à deux mains *Count-all with fingers*		L'élève compte à voix haute à partir de un en utilisant ses doigts comme repère. « Un, deux, trois, quatre – un. Cinq, six, sept, huit – deux. Neuf, dix, onze, douze – trois. »
Comptage rythmé à l'aide des doigts (mains) *Rythmic counting with fingers*		L'élève compte à voix haute et met de l'emphase sur le nombre qui correspond au nombre d'éléments dans le groupe pendant qu'il s'appuie sur ses doigts pour maintenir le décompte des groupes : « un, deux, **trois**, quatre, cinq, **six**, sept, huit, **neuf**, dix, onze, **douze** »

Calcul additif *additive calculation*	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques clés :	Aucune Toutes les valeurs NE sont PAS représentées entre un et le total. En utilisant l'addition répétée, l'élève procède par sommes partielles.
Addition répétée *Repeated addition*		Le problème est transformé en une séquence d'additions dans laquelle la valeur de la sous-collection (éléments) est répétée autant de fois que le nombre de sous-collections (partie)

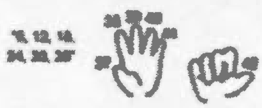
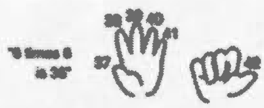
Composition additive de sous-collections *Collapse groups and add*		L'élève regroupe des sous-collections, habituellement par paires, pour composer des sommes partielles qu'il additionne en se référant à l'algorithme habituel. (Dans certains, cas, les sommes peuvent être regroupées de nouveau avant d'être additionnées à l'aide de l'algorithme en colonnes)

Compter par intervalles *Count-by*	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques clés :	Comptage régulier par *n*; ce qui correspond au rappel des multiples de n: n, 2n, 3n, 4n, etc.
Compter par intervalles avec une représentation dessinée des sous-collections à l'appui *Count-by with full drawing*		L'élève représente la situation par un «dessin» complet : représentation dessinée de chacune des sous-collections. Comptage par intervalle de chacune des sous-collections : 7, 14, 21.
Compter par intervalles en s'appuyant une écriture répétée de la valeur de la sous-collection. *Count-by with written groups*		L'élève écrit la valeur de chacune des sous-collections (éléments) autant de fois qu'il y a de sous-collections (parties) et ensuite rappelle les multiples en pointant chaque nombre.
Compter par intervalles avec un appui sur les doigts *Count-by using fingers*		Rappelle les multiples à voix haute en se servant de ses doigts pour contrôler le nombre de sous-collections : « 4, 8, 12, 16, 24 ». L'élève peut commencer avec le pouce, l'index ou l'annuaire.

Règles qui s'appuient sur des propriétés de la multiplication *Pattern-based*	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques clés :	Des règles spécifiques telles Nx1= N, Nx0=0 et quelques techniques pour les produits du 9. Comprendre les règles de la multiplication par 10 peut impliquer une nouvelle connaissance sur la valeur de position. Les solutions sont généralement données rapidement. Une des techniques pour calculer les produits du 9 utilise les doigts d'une façon spécifique.
Règle du 0 Règle du 1 Règle du 10	Aucun recours visible aux doigts ou au dessin	La réponse est rapide et sans calcul apparent : « un fois sept égale sept »

Technique du 9 avec les doigts *9's finger technique*		Pour multiplier 9xN, l'élève tient ses deux mains dans les airs et abaisse le doigt correspondant à N, en commençant par la gauche. Les dizaines correspondent au nombre de doigts levés à la gauche du doigt abaissé et les unités correspondent au nombre de doigts levés à la droite du doigt abaissé.

Faits multiplicatifs *Learned products*	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques clés :	Association des paires de facteurs avec le produit (faits multiplicatifs) Les solutions sont généralement rapides. Il n'y a pas de verbalisation sauf pour donner le résultat.
Faits multiplicatifs *Learned products*	Aucun recours visible aux doigts ou au dessin	La réponse est rapide et sans calcul apparent : « 7 fois 6 font 42 »

Hybrides ***Hybrids***	Nouvelles ressources de calcul : Caractéristiques observables clés :	L'élève emploie des combinaisons de nouvelles ressources nommées ci-haut ainsi que des connaissances sur le calcul connues auparavant.
Compter par intervalle + tout compter *Count-by + count-all*		Utilisation de la stratégie du rappel des multiples pour obtenir la somme partielle, suivi du compter tout. « 6, 12, 18, 24, 30, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42. »
Fait multiplicatif + tout compter *Learned product + count-all*		L'élève commence avec un fait multiplicatif plus petit que le total et poursuit avec compter-tout (une des procédures démontrées) « 6 fois 6 fait 36. 37, 38, 39, 40, 41, 42. »
Fait multiplicatif + calcul additif *Learned products + additive calculation*	(Il pourrait y avoir des éléments écrits pour représenter l'addition)	« 6 fois 7 fait 42, plus 7 fait 49, plus 7, fait 56 »
Distributivité + fait multiplicatif + calcul additif *Split factor + learned product + additive calculation*	7x8=56 $\underbrace{(7x4)}_{28}+\underbrace{(7x4)}_{28}$	Un des deux facteurs est décomposé, donc le problème est séparé en deux parties. Les deux sous-produits sont trouvés par le rappel direct de faits multiplicatifs. Ils sont ensuite additionnés.

ANNEXE B

PROTOCOLE D'ENTRETIEN DIDACTIQUE D'INVESTIGATION DES CONNAISSANCES (GIROUX, 2013b)

PROTOCOLE ORTHOPÉDAGOGIQUE SUR LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

VERSION PROVISOIRE. PROJET GEMAS-UQAM/LLL

INTRODUCTION

Les consignes et questions sont données à l'oral. Il est préférable qu'elles n'apparaissent pas sur la feuille de l'élève.

PLAN DU PROTOCOLE

	COLLECTION DE TÂCHES	NUMÉRO DES TÂCHES
Codage et écriture A × B	Codage d'une quantité organisée en sous-collections	5
	Codage d'une quantité organisée selon une disposition rectangulaire	2; 3; 4
Résolution d'énoncés de problèmes multiplicatifs	Résolution de problèmes d'isomorphisme de mesures : multiplication	6a; 7
	Résolution de problèmes d'isomorphisme de mesures : division partage	6b; 8; 11a
	Résolution de problèmes d'isomorphisme de mesures : division regroupement	10
	Résolution de problèmes de produit scalaire	11c; 12; 13; 14
	Résolution de problèmes de produits de mesures	11b
	Résolution de problèmes de produit cartésien	15a; 15b; 16
Calcul et propriétés	Propriétés de la multiplication; faits multiplicatifs; facteurs	1; 7; 9; 17; 18; 19; 20; 21; 22
	Algorithmes de multiplication et de division	23; 24

QUESTION 1. RAPPEL DE FAITS MULTIPLICATIFS

Rappel de faits à l'oral : multiplications et divisions

Quelques critères sont retenus pour le choix des multiplications et des divisions: des carrés, des doubles, des multiples de 10, a<b et a>b où |a-b| = 1, élément neutre, élément absorbant.

16 ÷ 4	4	18 ÷ 2	9	30 ÷ 5	6
56 ÷ 8	7	6 ÷ 1	6	36 ÷ 6	6
12 ÷ 6	2	50 ÷ 5	10	72 ÷ 9	8
70 ÷ 10	7	20 ÷ 5	4	7 ÷ 7	1

3 × 3 =	9	2 × 7 =	14	7 × 6 =	42
8 × 9 =	72	1 × 5 =	5	5 × 5 =	25
8 × 1 =	8	3 × 0 =	0	2 × 6 =	12
6 × 10 =	60	3 × 4 =	12	4 × 1 =	4

1. Codage et écriture A × B

A. Disposition rectangulaire et écriture × (dissociation écritures + et ×)

Question 2

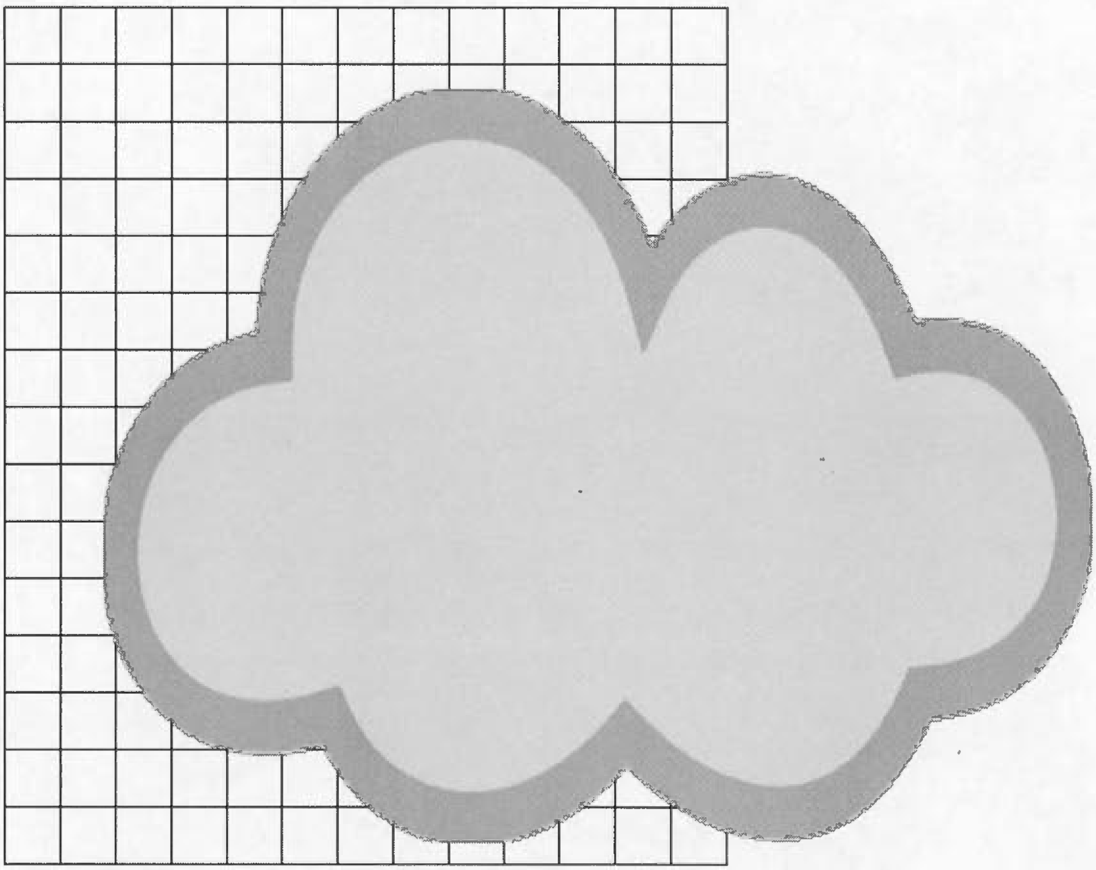
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Quelles écritures mathématiques permettent de trouver rapidement combien il y a de ronds?

12 × 7
8 × 11
8 + 12
12 × 8
8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 +8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

Question 3

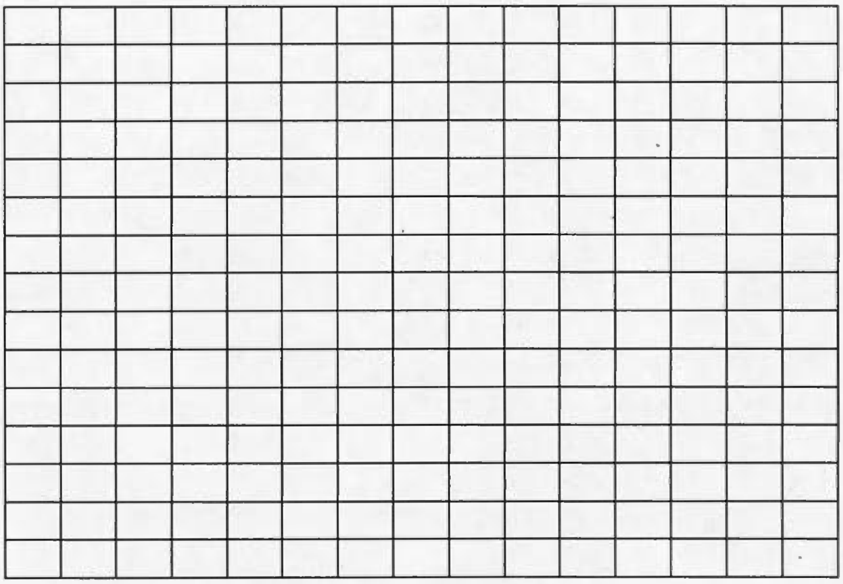
Dans le quadrillage suivant, en partie caché par un nuage, combien de carreaux y a-t-il en tout?



QUESTION 4

RELANCE AUX QUESTIONS 2 ET 3 QUAND L'ADDITIF PRIME SUR LE MULTIPLICATIF

Ceci est un plancher. On veut mettre un tapis qui fait 9 par 5 carreaux.



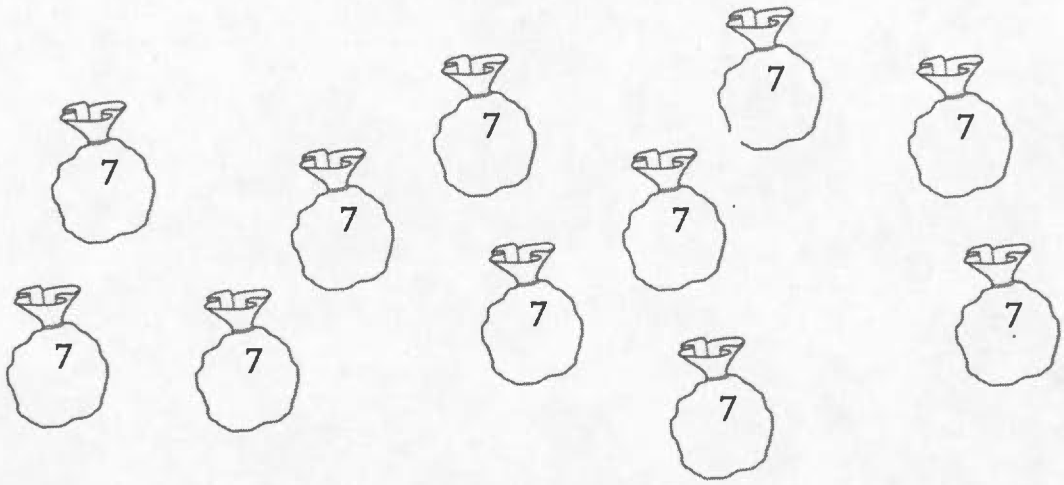
Combien de carreaux sont recouverts par le tapis?

Si l'élève n'a pas dessiné, demandez de le dessiner.

B. <u>ADDITION RÉPÉTÉE ET MULTIPLICATION. (Collection organisée en sous-collections)</u>

QUESTION 5

Chacun des sacs contient 7 bonbons.



Quelles écritures mathématiques permettent de trouver le nombre de bonbons dans tous ces sacs ?

7×7
$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$
$7 + 7$
$11 + 7$
7×11
11×7

2. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MULTIPLICATIFS ET ÉCRITURES MULTIPLICATIVES

QUESTION 6

a) Quelle(s) écriture(s) correspond(ent) bien au nombre de carreaux posés sur le mur ?

On installe des carreaux sur le mur au-dessus du lavabo. On les achète dans des caisses de 10. L'ouvrier pose, sur le mur, 5 rangées. Chacune des rangées a 6 carreaux. Il a donc placé ________ carreaux sur le mur.

10 +5 + 6	10 × 5
5 × 6	6 + 6 + 6 + 6 +6
10 + 6	5 +5 + 5 + 5 + 5 + 5
5 + 6	6 × 10

b) Quelle(s) écriture(s) correspond(ent) aux places assises dans chacun des wagons ?

Un petit train a 36 places assises. Le petit train a 4 wagons. Chaque wagon a 6 roues. Combien de places assises y a-t-il dans chacun des wagons?

36 - 4 - 6	36 ÷ 4
36 ÷ 6	4 × ___ = 36
4 × 6	
36 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4	

2. ÉNONCÉS DE PROBLÈMES MULTIPLICATIFS

QUESTION 7 - ADDITION RÉPÉTÉE ET MULTIPLICATION. ISOMORPHISME DE MESURES X.

Dans une boîte, il y a 24 crayons de couleur.

a) Combien de crayons il y a dans 3 boîtes? __________

b) Combien de crayons il y a dans 6 boîtes? __________

c) Combien de crayons il y a dans 9 boîtes? __________

d) Combien de crayons il y a dans 10 boîtes? __________

Note : La calculatrice n'est pas permise dans ce problème puisqu'on peut voir l'effet des relations entre les nombres sur le calcul relationnel et numérique. Les questions sont présentées à l'écrit pour que l'élève puisse référer aux données.

Relance possible : Si l'élève procède par division, par exemple : 24 ÷ 3 = 8 pour tous les numéros, demandez à l'élève de formuler un problème semblable : Peux-tu formuler un problème semblable à celui-ci : Il y a 24 crayons dans une boîte, combien de crayons y a-t-il dans 3 boîtes ?

Après la résolution, si l'élève n'a pas établi de liens entre 3, 6 et 9… (ce n'est pas une erreur en soi) on peut demander à l'élève si on peut s'aider de la réponse à 3 boîtes ou 6 boîtes, pour trouver combien il y en a dans 9 boîtes. Cela vérifie si l'élève peut recourir, en acte, aux propriétés de l'associativité (3 b. × 3 = 9 boites) ou de la distributivité (9 b. × 24 cr/b. = 6b × 24 cr/b. + 3b. × 24 cr./b) De la même manière, pour 10 boîtes, on peut prendre le résultat de 9 boites et d'1 boite.

QUESTION 8 ISOMORPHISME DE MESURES. DIVISION PARTAGE

On partage 104 billes également entre 8 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ?

<u>Relance</u> : on peut demander aux élèves de vérifier leur réponse avec une calculette. On note alors l'opération qu'ils entrent sur la calculette.

On peut demander de vérifier sur la calculette d'une autre manière. (voir l'emploi de la <u>×</u> pour vérifier le résultat de la division)

QUESTION 9 ISOMORPHISME DE MESURES. DIVISION PARTAGE → MULTIPLICATION TROUÉE (LACUNAIRE)

J'ai 2 550 bonbons à partager entre 25 enfants.

On se demande combien chaque enfant va recevoir de bonbons. On te donne quelques nombres. Lequel dit le nombre de bonbons que chaque enfant va recevoir. Pourquoi ?

15 75 95 102 305

Ex. : 25 × ____ = 2550

25 × 100 = 2500, 2550 > 2 500 DONC, IL FAUT UN PEU PLUS QUE 100 (102)

DANS CE CAS, IL Y A UN LIEN AVEC LES CONNAISSANCES SUR LA NUMÉRATION DE POSITION DÉCIMALE.

AVEC DISTRIBUTIVITÉ (MENTALEMENT OU «EN ACTE »)

(25 × 100) + (2 × 25) = 2500 + 50 = 2550; 102 × 25 = 2550

QUESTION 10 ISOMORPHISME DE MESURES. DIVISION REGROUPEMENT → MULTIPLICATION TROUÉE

Il y a 78 œufs à placer dans des boîtes. On place 6 œufs dans chacune des boîtes. On met 10 boîtes par caisse. Combien de boîtes d'œufs peut-on remplir ? Entoure le ou les calculs qui permettent de trouver le résultat.

$\boxed{78 \div 6}$ $\boxed{6 \times 78}$ $\boxed{78 - 6}$

$\boxed{6 \times 10 = 60}$ $\boxed{6 \times \_\_ = 10}$

$\boxed{6 \times \_\_ = 78}$

$\boxed{6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6 = 78}$

QUESTION 11. DIVISION - PARTIR DE L'ÉCRITURE POUR INTERPRÉTER UN ÉNONCÉ DE PROBLÈME

On donne, par écrit sur un carton, la division suivante. 256 ÷ 8 = 32

On présente, par écrit, quelques énoncés de problèmes.

ÉNONCÉ A (CHOIX DES DONNÉES, ARTICULATION CALCUL NUMÉRIQUE → CALCUL RELATIONNEL)

256 gommes sont partagées également entre 8 équipes. Chaque équipe est composée de 4 enfants.

Consigne orale : Est-ce qu'il y a un lien entre le problème et l'écriture ?

Première relance : Que veut dire 32 ici ?

Relances : si l'élève ne peut rien dire, demandez Quelle question pourrait-on poser à ce problème pour qu'un élève fasse la division 256 ÷ 8 = 32 pour le résoudre ?

ÉNONCÉ B

Il faut acheter de la pelouse pour couvrir le sol d'un parc. Le parc fait 8 mètres de large et 32 mètres de long. Je dois dire au jardinier combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires.

Consigne orale : Est-ce que cette écriture mathématique peut m'aider à trouver combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires ?

ÉNONCÉ C

Marie et Paul visitent les forêts de la Colombie-Britannique. Les arbres en Colombie-Britannique vivent très vieux. Par exemple, Marie a 32 ans et elle a vu un arbre qui est 8 fois plus âgé qu'elle et Paul, un arbre qui est 10 fois plus âgé que lui.

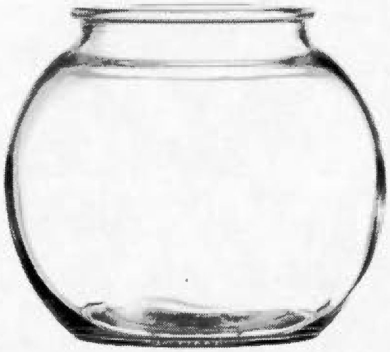
Consigne orale : À quoi peut servir la division dans ce problème ?

QUESTION 12. PRODUIT SCLAIRE – MULTIPLICATION – RELATION DIRECTE

Dans l'aquarium de Sophie, il y a 9 poissons.
Dans l'aquarium de Julie, il y en a 3 fois plus.

Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Julie ?

Sophie



Julie

QUESTION 13 PRODUIT SCALAIRE – DIVISION – RELATION DIRECTE

Dans l'aquarium de Sophie, il y a 24 poissons. Dessine les poissons de Sophie.
Dessine 6 fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre.

Sophie

Pierre

QUESTION 14. PRODUIT SCALAIRE – DIVISION - RELATION INDIRECTE

Laurent a 12 ans. Il est 4 fois plus âgé que son frère.
Quel âge a son frère ?

Relance : Peux-tu inventer un problème semblable ? Ex: Laurent a 12 bonbons. Il a 4 fois plus de bonbons que son frère. Combien de bonbons a son frère ?

QUESTION 15. PRODUIT CARTÉSIEN - MULTIPLICATION

a) Une enseignante a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Elle a aussi 2 certificats différents pour la réussite aux tables de multiplication. Combien de certificats avec des motifs différents peut-elle faire ?

<u>Relance</u> *: La relance ici est de proposer aux élèves des images des étampes, des couleurs et aussi des certificats. Si l'élève n'arrive pas à trouver le nombre exact de possibilités, on peut proposer le problème suivant : Un professeur a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Combien de motifs différents peut-elle faire pour ses élèves ?*

b) Un artisan bijoutier a créé 13 modèles de colliers et 13 modèles de bagues. Il veut vendre des ensembles composés d'un collier et d'une bague. Combien d'ensembles différents peut-il offrir ?

QUESTION 16. PRODUIT CARTÉSIEN - DIVISION

Dans un restaurant, on propose des trios. Un trio est un repas composé d'une boisson, d'un met principal et d'un dessert. Par exemple, un trio peut être : un lait, un spaghetti et un gâteau. *(présenter une image d'un trio).*

Le restaurateur veut proposer un choix de 12 trios différents. Il propose 3 choix de boissons. Combien de choix de mets principaux et combien de choix de desserts peut-il proposer à ses clients ?

3. PROPRIÉTÉS ET CALCUL (5^{E} ET 6^{E} ANNÉES)

À explorer avec les élèves. La propriété de la distributivité est peu maîtrisée par les élèves, bien souvent.

QUESTION 17 UTILISER LES PROPRIÉTÉS DE LA MULTIPLICATION POUR LE CALCUL MENTAL

Marie sait que 8 × 12 = 96. Peux-tu l'aider à trouver des réponses à d'autres multiplications à partir de ce qu'elle connait et donc, sans lui donner la réponse !

a) 12 × 8
(commutativité)

b) 7 × 12
(distributivité: 7 × 12 = 8 × 12 – 1 × 12 = 96 – 12)

c) 8 × 13
(distributivité : 8 × 13 = 8 × (12 + 1) = 8 × 12 + 8 × 1 = 96 + 8 = 104)

d) 16 × 12
(associativité: (2 × 8) × 12 = 2 × (8 × 12) = 2 × 96 = 192
ou distributivité : 8 × 12 + 8 × 12 = 16 × 12 = 96 + 96 = 192)

QUESTION 18 COMMUTATIVITÉ.

On peut écrire : 14 sacs et 15 bonbons par sac en énonçant le problème à l'oral.

J'ai préparé des petits sacs de bonbons à offrir à mes invités pour les remercier d'être venus à mon anniversaire. J'ai préparé 14 sacs, et dans chacun, j'ai mis 15 bonbons.

Mais, oups, il n'y avait pas 14 amis à ma fête, mais 15 amis!!! Vite! Vite! J'ai refait mes sacs. J'ai donc préparé 15 sacs avec les mêmes bonbons.

On écrit alors : 15 sacs et______ bonbons par sac

Peux-tu me dire combien de bonbons il y a maintenant dans chacun de mes sacs ?

QUESTION 19 PROPRIÉTÉS ET ÉCRITURE
(5E ET 6E ANNÉES)

À présenter à l'écrit
Complète les égalités suivantes.

a) 3 × ___ = 7 × ___

b) 453 432 × 98 654 = 98 654 × ______

c) 7 × (8 + 3) = ________________

Laissez l'élève calculer par lui-même pour voir s'il traite les parenthèses.

d) 8 × ___ = 8 × (10 + ___).

Que pourrais-tu choisir pour que ce soit égal des deux côtés ?

QUESTION 20. FLUIDITÉ DU COMPTAGE PAR INTERVALLES OU RAPPEL DES MULTIPLES

Note : Observer si le comptage de l'élève est rythmé et fluide.

Peux-tu compter par 2 à partir de 150 ?

Peux-tu compter par 5 à partir de 175 ?

Peux-tu compter par 10 à partir de 360 ?

QUESTION 21. FACTEURS EN RÉSOLUTION DE PROBLÈME (PARTAGE / DIVISEURS D'UN NOMBRE)

Il y a 24 cartes à jouer. Chaque joueur doit avoir le même nombre de cartes et toutes les cartes doivent être distribuées.

Combien de joueurs peuvent jouer et combien chacun aura-t-il de cartes ?

Voici un exemple : s'il y a 1 joueur, il aura 24 cartes.

-
- S'il y a ___ joueurs, chacun des joueurs aura ____ cartes.
- S'il y a ___ joueurs, chacun des joueurs aura ____ cartes.
- ...

QUESTION 22. CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

ON PEUT CHANGER LES NOMBRES.

Au magasin scolaire, il y a 95 crayons à l'encre.

a) Si on fait des boîtes de 5 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? _____________

b) Si on fait des boîtes de 2 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? _____________

c) Si on fait des boîtes de 10 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? _____________

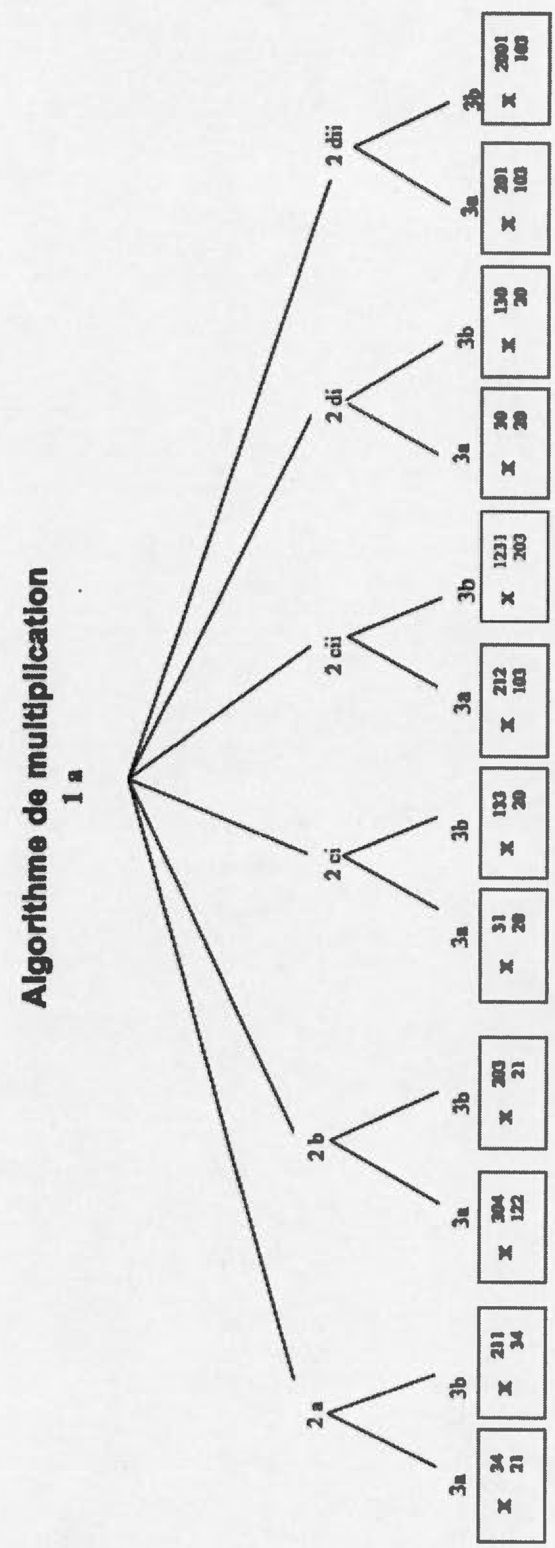
QUESTION 23. ALGORITHMES DE MULTIPLICATION

Voir les arbres des différents cas possibles qui se trouvent aux pages suivantes (algorithme de multiplication 1a et algorithme de multiplication 1b). On peut choisir parmi ces multiplications selon le niveau de l'élève.

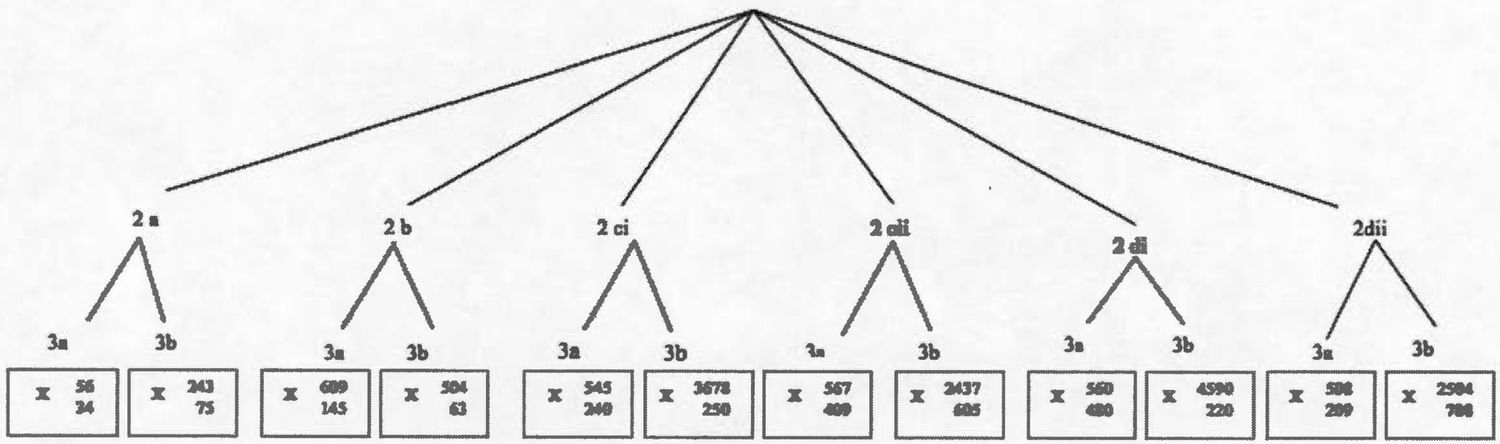
Ces multiplications ont été générées à partir de certains critères sur le choix des nombres.
On pourrait modifier, raffiner nos critères, par exemple sur la position de retenues, la longueur des facteurs, etc. Les critères retenus couvrent différents cas qui combinent des critères sur la retenue (2 possibilités), sur la position du chiffre «0» (6 possibilités) et sur le rapport entre le nombre de chiffres au multiplicande et au multiplicateur (2 possibilités) pour un total de 24 cas (2 × 6 × 2).

1. Retenue
    - a. sans retenue
    - b. avec retenue
2. Chiffre «0» :
    - a. Sans chiffre «0»
    - b. Seulement au multiplicande :
        - «0» intercalaire
    - c. Seulement au multiplicateur :
        - i. avec «0» à la fin
        - ii. avec «0» intercalaire
    - d. aux multiplicateur et multiplicande
        - i. avec «0» à la fin
        - ii. avec «0» intercalaire

3. Rapport du nombre de chiffres multiplicateur/multiplicande
    - a. Même nombre de chiffres au multiplicateur qu'au multiplicande
    - b. Au moins un chiffre de plus au multiplicande qu'au multiplicateur


Algorithme de multiplication
1 a
2 a
2 b
2 ci
2 cii
2 di
2 dii
3a
x 34 21
3b
x 211 34
3a
x 304 122
3b
x 203 21
3a
x 31 20
3b
x 133 20
3a
x 212 103
3b
x 1231 203
3a
x 30 20
3b
x 130 20
3a
x 201 103
3b
x 2001 103

Algorithme de multiplication
1 b



QUESTION 24. ALGORITHMES DE DIVISION

Voir les arbres de cas possibles qui se trouvent aux pages suivantes (algorithme de division 1bi et algorithme de division 1bii)

Les divisions ont été générées à partir de certains critères pour le choix des nombres. Ces critères ont été choisis sur la base d'études qui portent sur l'analyse des difficultés et des schèmes dans l'application de l'algorithme de division.

On peut se référer à l'article de Brun, Conne, Lemoyne et Portugais (1994) pour des pistes d'interprétation des erreurs.

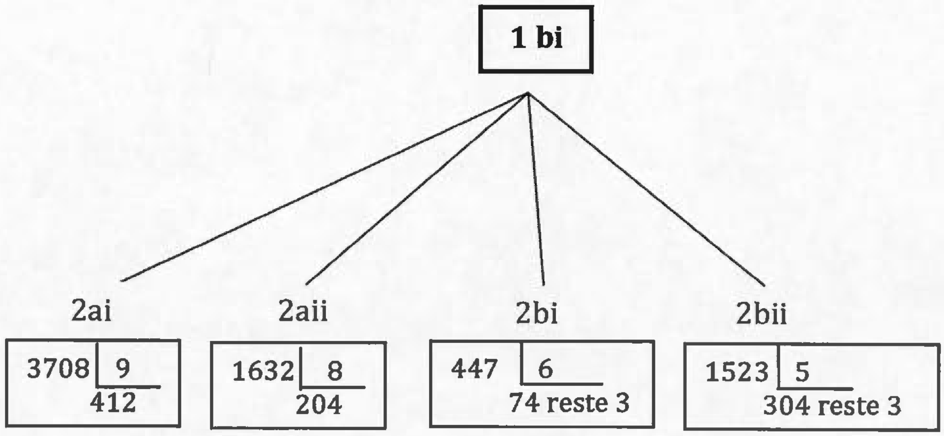
On pourrait modifier, raffiner les critères. Ceux qui sont retenus sont : 1) le rapport du nombre de chiffres au quotient et au dividende (3); 2) Le quotient (4) pour un total de 12 cas (3 × 4). Ils couvrent différents cas et différentes difficultés rencontrées par les élèves.

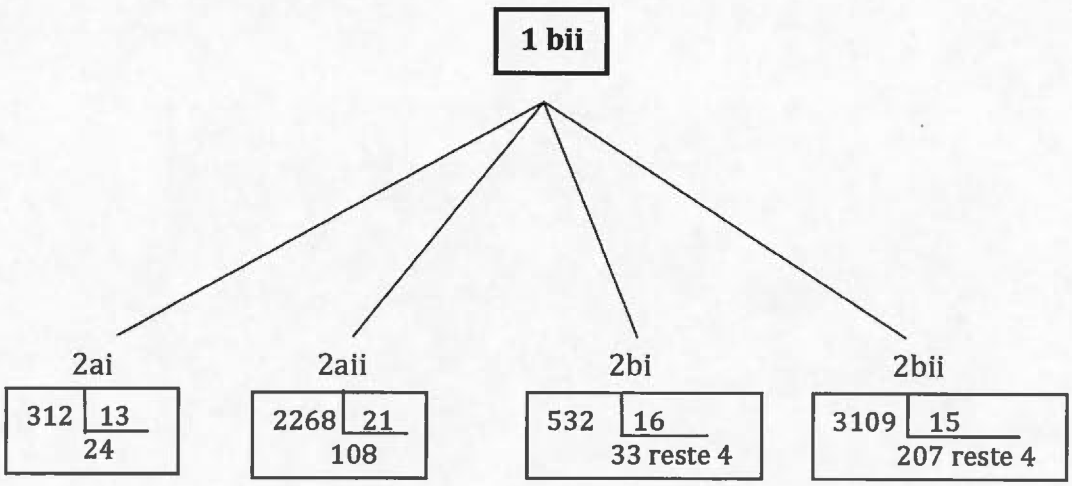
1. Rapport nombre de chiffres au quotient et au dividende
    a. Même nombre de chiffres au quotient qu'au dividende
    b. Moins de chiffres au quotient qu'au dividende
        i. Un chiffre au diviseur
        ii. Deux chiffres ou plus au diviseur

2. Quotient
    a. Quotient sans reste (le dividende est un multiple du diviseur)
        i. Sans zéro intercalaire au quotient
        ii. Avec zéro intercalaire au quotient

    b. Quotient avec reste
        i. Sans zéro intercalaire au quotient
        ii. Avec zéro intercalaire au quotient

Algorithmes de division





ANNEXE C
ANALYSES *A PRIORI* DES TÂCHES DU PROTOCOLE D'ENTRETIEN D'INVESTIGATION DES CONNAISSANCES

Pour chacune des questions du protocole, nous présentons l'analyse *a priori* qui se décline en trois parties : 1) description de la tâche; 2) conduites anticipées et; 3) relance possible. Dans la description de la tâche, on trouve une présentation de l'énoncé, les connaissances visées et une description des variables didactiques. Pour ne pas alourdir la présentation, les conduites anticipées décrites sont essentiellement celles qui permettent de solutionner le problème selon les caractéristiques de chacune des tâches. En effet, les conduites erronées attendues, qu'elles soient additives ou mixtes (additif et multiplicatif), peuvent parfois prendre des formes variées pour une même tâche, ce qui rend leur description lourde et pas nécessairement exhaustive. Nous avons donc choisi de nous centrer sur les conduites multiplicatives efficaces. Finalement, les relances prévues sont décrites en précisant sous quelles conditions elles devraient être faites. En situation, d'autres relances adaptées aux interactions de l'élève avec la tâche sont toutefois possibles.

Question 1

Description de la tâche

Cette tâche est constituée de douze multiplications et de douze divisions. Le choix des faits multiplicatifs s'appuie sur des critères et est réparti comme suit :

- Carrés : $16 \div 4$, $36 \div 6$, 3×3, 5×5
- Doubles : $12 \div 6$, $18 \div 2$, 2×7, 2×6
- Multiples de 10 : $70 \div 10$, $50 \div 5$, 6×10
- Sachant que $a \times b = c$ et $c \div a = b$, $a < b$ où $|a - b| = 1$: $56 \div 8$, $20 \div 5$, $72 \div 9$, 8×9, 3×4
- Sachant que $a \times b = c$ et $c \div a = b$, $a > b$ où $|a - b| = 1$: $30 \div 5$, 7×6
- Élément neutre : $6 \div 1$, $7 \div 7$, 8×1, 1×5, 4×1
- Élément absorbant : 3×0

Les faits multiplicatifs sont demandés oralement un à la fois. On laisse un maximum de 5 secondes à l'élève pour répondre oralement. Le but de cette tâche est de vérifier la connaissance des faits multiplicatifs et éventuellement vérifier si cette connaissance est utilisée lors de résolution de problèmes. Par contre, s'il ne les connaît pas, des stratégies autres que le recours aux faits multiplicatifs pourront être appréciées.

Conduites anticipées

Puisqu'il s'agit essentiellement de rappel de faits mémorisés, nous ne décrivons pas les conduites anticipées dans la mesure où la tâche ne permet pas de vérifier si l'élève fait appel à des propriétés pour trouver des produits inconnus.

Cependant, il est possible de prévoir que les faits multiplicatifs les mieux réussis devraient être ceux de la table de 1, les doubles, les carrés et la multiplication par 10. Aussi, les produits devraient être rappelés plus facilement que les quotients.

Question 2

Description de la tâche

L'énoncé de cette tâche comprend une disposition rectangulaire composée de 8 rangées de 12 cercles ainsi que cinq écritures mathématiques. La consigne est donnée oralement : « Quelles écritures mathématiques permettent de trouver rapidement combien il y a de ronds ? » L'objectif est de vérifier l'association d'une représentation rectangulaire à l'écriture multiplicative. La réponse est attendue sous forme orale. Les variables numériques, 8 et 12, ont été choisies pour rendre inefficace le recours au répertoire mémorisé des faits numériques.

Nous présentons les différentes écritures proposées ainsi que leur justification. Chaque justification est associée à une stratégie, juste ou erronée, pouvant être mise en œuvre par les élèves.

- $8 + 12$: Mise en relation additive des nombres. Erreur de signe possible où le symbole de l'addition est confondu avec celui de la multiplication.
- 8×11 : La disposition rectangulaire est associée à une écriture multiplicative. Dénombrement du nombre d'objets par rangée, soit 8. Dénombrement du nombre d'objets par colonne, sans recompter l'objet déjà dénombré soit 11 au lieu de 12.
- 12×7 : La disposition rectangulaire est associée à une écriture multiplicative. Dénombrement du nombre d'objets par colonne, soit 12. Dénombrement du nombre d'objets par rangée sans recompter l'objet déjà dénombré, soit 7 au lieu de 8.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$: La disposition rectangulaire est associée à l'addition répétée. 8 objets/colonne sont additionnés autant de fois qu'il y a de colonnes, soit 12.
- 12×8 : La disposition rectangulaire est associée à une écriture multiplicative représentant 12 objets/rangée × 8 rangées ou 8 objets/colonne × 12 colonnes.

Outre les stratégies qui viennent d'être décrites, il est également possible d'envisager la conduite suivante :

Dénombrement de tous les cercles pour trouver le total. Choix d'écritures mathématiques dont le résultat correspond au nombre total de cercles.

Relances possibles

- Si la stratégie élémentaire de comptage unitaire est utilisée, il est suggéré de procéder à une relance. Par exemple : « Sans trouver le nombre de ronds qu'il y a, peux-tu identifier quelles écritures mathématiques permettraient de le trouver ? »
- Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : « Peux-tu trouver une autre écriture ? »
- Si l'additif prime sur le multiplicatif dans cette question ainsi que dans la question 3, proposer la question 4.

Question 3

Description de la tâche

Une grille de 15 rangées par 13 colonnes, en partie cachée par un nuage, est présentée. L'orthopédagogue pose la question suivante : « Dans le quadrillage suivant, en partie caché par un nuage, combien de carreaux y a-t-il en tout ? » Le but est de vérifier l'association d'une représentation rectangulaire à l'écriture multiplicative. Les nombres ne font pas partie du répertoire mémorisé des faits multiplicatifs. Un nuage est placé devant la grille pour rendre inefficace le comptage unitaire des carreaux.

Conduites anticipées

1) Stratégie de dénombrement

Compléter les lignes de la grille pour dénombrer tous les carreaux de la grille. Le choix des nombres ainsi que la présence d'un nuage visent à rendre inefficace cette stratégie.

Pour les stratégies qui suivent, une erreur consistant à ne pas compter deux fois le carreau de la première rangée et de la première colonne peut être effectuée entraînant les mesures suivantes : 15 carreaux/colonne et 12 colonnes ou encore 14 carreaux/colonne et 13 colonnes.

2) Stratégie additive fondée sur la reconnaissance de l'itération d'une même quantité par colonne ou par rangée

En s'appuyant sur la disposition rectangulaire, déterminer le nombre de carreaux dans une rangée, soit 13, et le nombre de carreaux dans une colonne, soit 15. Effectuer l'addition : 15 + 13 ou 13 + 15

3) Stratégie fondée sur la disposition rectangulaire avec addition itérée

En s'appuyant sur la disposition rectangulaire, déterminer le nombre de carreaux dans une rangée, soit 13, et le nombre de carreaux dans une colonne, soit 15. Effectuer une des deux additions itérées suivantes :
15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 ou
13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13

Pour résoudre l'addition répétée, différentes stratégies de calcul sont possibles par exemple, le recours à l'algorithme conventionnel de l'addition ou une composition additive.

4) Stratégie multiplicative fondée sur la disposition rectangulaire

En s'appuyant sur la disposition rectangulaire, déterminer le nombre de carreaux dans une rangée, soit 13, et le nombre de carreaux dans une colonne, soit 15. S'appuyant sur un calcul relationnel de type isomorphisme de mesures, effectuer la multiplication 13 × 15 ou 15 × 13. Pour résoudre le calcul, quelques stratégies sont possibles :

- algorithme conventionnel de la multiplication
- addition répétée.

Relances possibles

- Si l'élève engage la stratégie élémentaire, on doit l'empêcher de compléter la grille.
- Si l'élève engage le calcul 13 + 15 et qu'une erreur de signe est soupçonnée, il est possible de questionner l'élève : « Combien donne 13 + 15 ? Est-ce que tu crois qu'il y a 28 carreaux au total dans la grille ? » Cette relance vise à vérifier si l'élève est capable de modifier sa stratégie.
- Si l'élève n'est pas en mesure d'effectuer le calcul numérique 13 × 15 = 195, on peut proposer une calculatrice une fois qu'il a déterminé le calcul à effectuer.

Question 4

Description de la tâche

La consigne est donnée oralement : « Ceci est un plancher. On veut mettre un tapis qui fait 9 par 5 carreaux. Combien de carreaux sont recouverts par le tapis ? » Cette tâche constitue une relance aux questions 2 et 3 afin de vérifier l'association de l'écriture multiplicative à une disposition rectangulaire. Alors que les tâches précédentes engagent le codage d'une quantité présentée sous forme de disposition rectangulaire, celle-ci vise à représenter par une disposition rectangulaire la quantité correspondant à 9 × 5.

Conduites anticipées

1) Stratégie ne faisant pas appel à la disposition rectangulaire
   Calculer $9 \times 5 = 45$ et dessiner une forme quelconque dont la surface couvre 45 carreaux.

2) Stratégie multiplicative inadaptée
   Calculer $9 \times 5 = 45$ et dessiner une forme rectangulaire qui couvre 45 carreaux ayant pour dimension 3 par 15 carreaux.

3) Stratégie faisant appel à la disposition rectangulaire
   En considérant les dimensions 9 et 5, colorier 45 carreaux selon une représentation rectangulaire de 5 colonnes par 9 rangées ou de 9 colonnes par 5 rangées.

Question 5

Description de la tâche

L'énoncé se présente sous forme d'un dessin de 11 sacs sur lesquels le nombre 7 est écrit. La consigne est formulée à l'oral ainsi : « Chacun des sacs contient 7 bonbons. Quelles écritures mathématiques représentent le dessin ? » L'énoncé est accompagné de six écritures mathématiques. Cette tâche est un problème de multiplication de la catégorie des isomorphismes de mesures. Elle vise l'évaluation du codage par l'écriture multiplicative d'une quantité organisée en sous-collections. Le choix des variables numériques, 11 collections de 7 éléments, rend inefficace le comptage par intervalles et le recours au répertoire mémorisé des faits multiplicatifs. Certains élèves peuvent savoir que $7 \times 11 = 77$.

Nous présentons les différentes écritures proposées ainsi que leur justification. Chaque justification est associée à une stratégie, juste ou erronée, pouvant être mise en œuvre par les élèves.

- $11 + 7$: Mise en relation additive des données. Erreur de signe possible où le signe de l'addition est mélangé avec le signe de la multiplication.
- 7×7 : Mise en relation multiplicative des données avec un contrôle sur le nombre de bonbons/sac, mais sans contrôle du nombre de sacs.
- $7 + 7$: Association d'une quantité organisée en sous-collections à l'addition répétée. La relation additive témoigne d'un contrôle du nombre de bonbons/sac, mais sans contrôler le nombre de sacs.
- $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$: Association d'une quantité organisée en sous-collections à l'addition répétée. La relation additive témoigne d'un contrôle à la fois du nombre de bonbons/sac et du nombre de sacs.

- 11 × 7 : Écriture mathématique d'une mise en relation multiplicative de 11 sacs de 7 bonbons/sacs.
- 7 × 11 : Par la commutativité, cette écriture mathématique est équivalente à 11 × 7.

Relances possibles

- Si les conduites rendent impossible l'évaluation de l'association d'une écriture multiplicative à une représentation organisée en sous-collections, l'orthopédagogue devrait tenter une relance qui lui permette d'avoir plus d'information. Une relance possible serait: « Sans trouver le nombre de bonbons au total, es-tu capable d'identifier quelles écritures mathématiques permettraient de le trouver ? »
- Si l'élève ne choisit qu'une écriture : « Est-ce que d'autres écritures permettent de trouver le nombre de bonbons ? »
- Il est aussi possible que l'élève fait une erreur de signe en mélangeant le signe × et +, lui proposer l'écriture 7 × 11 et lui demander si ces écritures sont identiques ou différentes.

Question 6a)

Description de la tâche

L'énoncé suivant est présenté sous forme écrite : « On installe des carreaux au-dessus du lavabo. On les achète dans des caisses de 10. L'ouvrier pose sur le mur, 5 rangées avec 6 carreaux à chaque rangée. Il a donc placé __ carreaux sur le mur. » À l'oral l'orthopédagogue pose la question suivante : « Quelles écritures permettent de trouver le nombre de carreaux sur le mur? » Ce problème est une multiplication de la catégorie des isomorphismes de mesures. « On les achète dans des caisses de 10 » est une donnée superflue. La mesure recherchée est le total de carreaux, soit f(x'). Cet énoncé permet l'évaluation du codage par l'écriture multiplicative d'une quantité organisée en sous-collections et de la résolution d'un problème d'isomorphismes de mesures. Des écritures mathématiques accompagnent l'énoncé.

Ces écritures sont présentées ainsi que leurs justifications auxquelles sont associées des stratégies possibles d'élèves.

- 10 + 5 + 6 : Mise en relation additive de toutes les données du problème, incluant la donnée superflue.
- 10 + 6 : Mise en relation additive de 6 carreaux/rangée et de 10 carreaux/caisse.
- 10 × 5 : Mise en relation multiplicative de 10 carreaux par caisse et 5 rangées.
- 6 × 10 : Mise en relation multiplicative de 10 carreaux par caisse et 6 carreaux.
- 5 + 6 : Mise en relation additive des données. Erreur de signe possible où le symbole de l'addition est confondu avec celui de la multiplication.

- 6 + 6 + 6 + 6 + 6 : Une organisation en sous-collections est associée à l'addition répétée. Addition répétée de 6 carreaux/rangée autant de fois qu'il y a de rangées, soit 5.
- 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 : Une disposition rectangulaire est associée à l'addition répétée. Le calcul relationnel est bien établi et l'élève passe par le calcul numérique de l'itération de 5. Ce calcul relationnel est possible mais peu probable. Il implique une interprétation selon l'opérateur fonction, soit l'addition itérée 5 carreaux, 6 fois (pour 5 rangées de 6 carreaux) = 30 carreaux pour 5 rangées de 6 carreaux.
- 5 × 6 : Mise en relation multiplicative de 5 rangées et de 6 carreaux/rangée selon une interprétation impliquant l'opérateur fonction. Le calcul relationnel peut également impliquer l'opérateur scalaire où il y a 5 fois plus de carreaux dans 5 rangées que dans une rangée. Donc, 5 × 6 carreaux.

<u>Relances possibles</u>
- Si une seule écriture est choisie, poser la question : « Est-ce que d'autres écritures permettent de trouver le nombre de carreaux installés sur le mur ? »
- Si l'élève choisit 5 + 6, il est possible de vérifier s'il s'agit d'une erreur de signe en lui demandant de trouver le nombre de carreaux qui sont installés sur le mur.

Question 6b)

<u>Description de la tâche</u>

L'énoncé écrit est le suivant : « Un petit train a 36 places assises. Le petit train a 4 wagons. Chaque wagon a 6 roues. Combien de places assises y a-t-il dans chacun des wagons? » À l'oral l'orthopédagogue pose la question suivante : « Quelle écriture mathématique décrit bien le problème ? » L'énoncé est accompagné de six choix d'écritures mathématiques. Cet énoncé est de type division partage. Les trois données numériques du problème (36, 4 et 6) font partie du répertoire des faits numériques appris au primaire (4 × 9 = 36 et 6 × 6 = 36). On pourra ainsi apprécier l'influence du calcul numérique sur le calcul relationnel.

Des écritures mathématiques sont proposées ainsi que leur justification auxquelles des stratégies possibles d'élèves sont associées.

- 36 - 4 - 6 : Mise en relation additive de toutes les données de l'énoncé incluant la donnée superflue, 6 roues.
- 36 ÷ 6 : Mise en relation multiplicative des données : 36 enfants et 6 roues/wagon. Le calcul numérique ou la connaissance du fait multiplicatif 36 ÷ 6 = 6 a pu influencer le calcul relationnel et induit l'association entre 36 et 6.
- 4 × 6 : mise en relation multiplicative de 4 wagons et de 6 roues/wagons qui permet de trouver le nombre total de roues.

- $36 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4$: 36 places – 4 places (1 place dans chacun des 4 wagons) ... jusqu'à 0. Soustraction répétée jusqu'à l'épuisement de la quantité initiale. Le nombre de 4 soustrait correspond au nombre de places assises/wagon.
- $4 \times$ ___ $= 36$: Mise en relation multiplicative des données du problème. 4 wagons × __ places assises/wagon = 36 places assises. L'élève interprète le problème à l'aide de l'opérateur fonction.
- $36 \div 4$: mise en relation multiplicative où le calcul relationnel est : 36 places assises ÷ 4 wagons.

Relance possible

- Si un seul choix de réponse est sélectionné, poser la question suivante : Peux-tu trouver une autre écriture ?

Question 7

Description de la tâche

Un énoncé écrit est présenté et lu : « Dans une boîte, il y a 24 crayons de couleur.

a) Combien de crayons il y a dans 3 boîtes ?
b) Combien de crayons il y a dans 6 boîtes ?
c) Combien de crayons il y a dans 9 boîtes ?
d) Combien de crayons il y a dans 10 boîtes ? »

Ce problème est un problème de multiplication de la catégorie des isomorphismes de mesures où la quantité recherchée est le total de crayons, soit f (x'). Cet énoncé vise à la fois l'évaluation de la résolution d'un isomorphisme de mesures et le recours aux propriétés d'associativité et de distributivité pour alléger un calcul. Les variables numériques choisies en a) et b) font partie du répertoire des faits numériques : $3 \times 8 = 24$, $6 \times 4 = 24$. Il est possible que ces faits multiplicatifs appris induisent un calcul relationnel erroné de type : 24 crayons ÷ 3 boites = 8 crayons par boîte puisque 3 et 8 ainsi que 6 et 4 sont des facteurs de 24. La calculatrice n'est pas permise et les questions sont présentées par écrit.

<u>Conduites anticipées : Stratégies pour chacun des items de la question 7</u>

STRATÉGIES	3 BOITES	6 BOITES	9 BOITES	10 BOITES
Stratégie multiplicative erronée Les nombres mobilisent des faits X qui orientent un calcul relationnel erroné	CN : 24 ÷ 3 = 8 CR : 24 crayons ÷ 3 boîtes = 8 crayons/boîtes	CN : 24 ÷ 6 = 4 CR : 24 crayons ÷ 6 boîtes = 4 crayons/boîtes	Le nombre de boîtes permet de rencontrer la « limite » de cette stratégie erronée	Le nombre de boîtes permet de rencontrer la « limite » de cette stratégie erronée
Stratégie itérative	CN : Addition répétée de 24 CR : Il y a autant de 24c qu'il y a de boîtes	CN : Addition répétée de 24 CR : Il y a autant de 24c qu'il y a de boîtes	CN : Addition répétée de 24 CR : Il y a autant de 24c qu'il y a de boîtes	CN : Addition répétée de 24 CR : Il y a autant de 24c qu'il y a de boîtes
Stratégie multiplicative avec opérateur scalaire	CN : 24 × 3 (ou 3 × 24) CR : 24 crayons amplifiés par 3	CN : 24 × 6 (ou 6 × 24) CR : 24 crayons amplifiés par 6	CN : 24 × 9 (ou 9 × 24) CR : 24 crayons amplifiés par 9	CN : 24 × 10 (ou 10 × 24) CR : 24 crayons amplifiés par 10
Stratégie multiplicative avec opérateur fonction	CN : 3 × 24 (ou 24 × 3) CR : 3 boîtes de 24 crayons par boîte	CN : 6 × 24 (ou 24 × 6) CR : 6 boîtes de 24 crayons par boîte	CN : 9 × 24 (ou 24 × 9) CR : 9 boîtes de 24 crayons par boîte	CN : 10 × 24 (ou 24 × 10) CR : 10 boîtes de 24 crayons par boîte
Stratégie multiplicative et recours aux propriétés de la multiplication	CN : 3 × 24 (ou 24 × 3) CR : Juste	CN : Associativité : 2 × (3 × 24) ou distributivité : (3 × 24) + (3 × 24) CR : 6 boîtes = 3 boîtes amplifiées par 2	CN : Associativité : 3 × (3 × 24) ou distributivité : (3 × 24) + (3 × 24) + (3 × 24) CR : 9 boîtes = 3 boîtes amplifiées par 3	CN : Distributivité : (3 × 24) + (3 × 24) + (3 × 24) + (1 × 24) CR : 10 boîtes = 3 boîtes amplifiées par 3 et 1 boîte

Légende : CN : calcul numérique CR : calcul relationnel

Relances possibles

- Si l'élève procède par division, pour tous les items, demandez à l'élève de formuler un problème semblable pour vérifier le calcul relationnel qu'il établit : « Peux-tu formuler un problème semblable à celui-ci : Il y a 24 crayons dans une boîte, combien de crayons y a-t-il dans 3 boîtes ? »
- Suite à la résolution de toutes les tâches, si l'élève n'a pas eu recours aux propriétés, l'orthopédagogue peut tenter une relance : « Peux-tu t'aider des réponses de 3 boîtes ou 6 boîtes pour trouver le nombre de crayons dans 9 boîtes ? »

Question 8

Description de la tâche

L'énoncé est présenté à l'oral : « On partage 104 billes également entre 8 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ? » Ce problème est une division partage où la quantité recherchée est la valeur unitaire, soit le nombre de billes/enfant. Les nombres favorisent le recours à des calculs numériques autres que les faits multiplicatifs pour résoudre le problème. Une fois l'énoncé résolu, on demande à l'élève de vérifier sur la calculatrice d'une façon. Puis, pour vérifier si l'élève reconnait la multiplication comme l'opération réciproque de la division, on lui demande de vérifier d'une autre façon sur la calculatrice.

Conduites anticipées

a) Stratégie de distribution effective
Une stratégie de distribution effective est possible par laquelle, par représentation dessinée, les 104 billes sont distribuées entre 8 collections représentant les 8 enfants. Cette distribution peut se faire de façon unitaire, une bille à la fois, ou par groupement de billes.

b) Stratégie de soustraction répétée
Cette stratégie est une modélisation de la stratégie de distribution effective par une soustraction répétée. Partir du nombre total de billes et retirer 8 (correspondant à 8 billes/tour) à répétition jusqu'à épuisement du des billes : 104 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8. Le nombre de 8 répété correspond au nombre de billes distribuées par enfant, soit 13.

c) Stratégie d'addition répétée
Cette stratégie est une modélisation de la stratégie de distribution effective par une addition répétée. Itérer le nombre de 8 autant de fois que nécessaire pour atteindre 104. Le nombre de répétitions du nombre 8 correspond au nombre de billes distribuées par enfant, soit 13.

d) Stratégie opérateur fonction
Établir un calcul relationnel qui s'appuie sur l'opérateur fonction : 104 billes ÷ 8 enfants = 13 billes / enfant ou 8 enfants × ___ billes / enfant = 104 billes. La recherche du résultat peut se faire par soustraction ou addition répétée.

e) Stratégie opérateur scalaire
Établir un calcul relationnel qui s'appuie sur l'opérateur scalaire : s'il y a 104 billes pour 8 enfants, pour chaque enfant il y a 8 fois moins de billes alors, 104 billes ÷ 8 = 13 billes ou 8 × __ billes = 104 billes. La recherche du résultat peut se faire par soustraction ou addition répétée.

Relance possible

- Lorsque la division n'est pas effectuée, on relance en demandant à l'élève de vérifier sa réponse sur la calculatrice une première fois. Cette relance permet de noter s'il associe l'énoncé à une division ou une multiplication lacunaire.

Question 9

Description de la tâche

L'énoncé est présenté oralement, mais on écrit les nombres 2 550 et 25 sur un bout de papier : « J'ai 2 550 bonbons à partager entre 25 enfants. On se demande combien chaque enfant va recevoir de bonbons. » La consigne est : « On te donne quelques nombres. Lequel de ces nombres, selon toi, indique ce que chaque enfant va recevoir. Pourquoi ? » Les nombres sont inscrits sur un carton : 15, 75, 95, 102 et 305. Si l'enfant engage une division, on l'invite à examiner les nombres et à choisir celui qui est le plus approprié. Ce problème est une division partage où la quantité recherchée est la valeur unitaire, soit le nombre de bonbons que chaque enfant reçoit. Cette tâche favorise des stratégies de calcul mental en recourant, notamment, aux connaissances sur la numération de position décimale.

Conduites anticipées

- Reconnaître la division partage. 2550 bonbons ÷ 25 enfants = __ bonbons/enfant ou par la multiplication, 25 enfants × _ bonbons/enfant = 2550 bonbons. La réponse attendue est 102 bonbons.
    a. Recourir à la distributivité en acte pour résoudre le problème : $25 \times 100 + 25 \times 2 = 2500 + 50 = 2550$; $102 \times 25 = 2550$.
    b. Reconnaître la division partage et recourir aux connaissances en calcul mental liées à la multiplication par 100 : 2550 ÷ 25 = un peu plus que 100, donc 102.
    c. Engager le calcul relationnel impliquant l'opérateur fonction : 2550 bonbons ÷ 25 enfants = __ bonbons/enfant ou par la multiplication, 25 enfants × _ bonbons/enfant = 2550 bonbons.

d. Engager le calcul relationnel impliquant l'opérateur scalaire : s'il y a 2550 billes pour 25 enfants, pour chaque enfant, il y a 25 fois moins de bonbons alors, 2550 bonbons ÷ 25 = __ billes. La multiplication, 25 × __ bonbons = 2550, est aussi un calcul relationnel possible.

Relance possible

- Si l'élève engage un calcul algorithmique pour trouver le quotient de 2550 ÷ 25, demandez à l'élève de se prononcer, avant de calculer, sur chacun des nombres proposés pour stimuler des stratégies d'estimation et de calcul mental.

Question 10

Description de la tâche

L'énoncé est présenté oralement : « Il y a 78 œufs à placer dans des boîtes. On place 6 œufs dans chacune des boîtes. On met 10 boîtes par caisse. Combien de boîtes d'œufs peut-on remplir ? Quels calculs permettent de trouver le résultat ? » On présente les choix de réponses à l'élève sur une feuille ou sur des cartons. Ce problème est une division regroupement et permet d'évaluer, à la fois, la résolution de cette classe de problèmes. L'énoncé comprend une donnée superflue (une caisse contient 10 boîtes d'œufs) qui ajoute une relation multiplicative, créant ainsi un énoncé de double proportionnalité. La connaissance des multiples de 10 peut inciter l'élève à utiliser cette donnée. La multiplication des variables numériques utiles (6 et 78) ne fait pas partie du répertoire des faits multiplicatifs mémorisés. Par contre, une multiplication impliquant la donnée superflue (10 boîtes/caisse) en fait partie lorsqu'elle est associée au nombre d'œufs/boîte (10) : 6 × 10 = 60.

Nous présentons les écritures mathématiques proposées ainsi que leur justification. Chaque justification est associée à une stratégie, juste ou erronée, pouvant être mise en œuvre par les élèves.

- 6 × __ = 10 : Calcul relationnel impliquant les mauvaises données. Cette multiplication trouée n'est pas représentative du problème.
- 6 × 10 = 60 : l'élève établit une relation multiplicative entre des données non nécessaires pour trouver le nombre d'œufs dans une boîte.
- 78 + 6 : Mise en relation additive entre les données utiles du problème correspondant à un mauvais calcul relationnel.
- 78 – 6 : Mise en relation additive des données du problème correspondant à un mauvais calcul relationnel. Autre interprétation : soustraction répétée sans contrôle du nombre de répétitions du 6.
- 6 × 78 : Relation multiplicative, mais la relation est inadéquate.
- 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 78 : Addition répétée où le nombre d'œufs/boîte (6) est répété 13 fois (le nombre de boîtes).

- 6 × __= 78 : Multiplication lacunaire qui témoigne d'une mise en relation multiplicative des données dont le calcul relationnel est : 6 œufs/boîte × __ boîtes = 78 œufs.
- 78 ÷ 6 : Division qui représente le calcul relationnel : 78 œufs ÷ 6 œufs/boîtes = __ boîtes.

Relances possibles

- Si l'élève n'est pas en mesure de répondre ou bloque, il est possible de :
    - modifier l'énoncé en enlevant la donnée superflue (10 boîtes par caisse)
    - lui proposer de représenter le problème avec du matériel ou un dessin.

- Si l'élève choisit une seule écriture, il est possible de lui demander si une autre écriture pourrait permettre de trouver le nombre de boîtes d'œufs. Cette relance vise à évaluer si l'élève est capable de reconnaître des écritures mathématiques équivalentes.

Question 11

Cette question est composée de 3 tâches. On présente une division écrite sur un carton: 256 ÷ 8 = 32. Puisque toutes les données numériques sont fournies, les tâches permettent d'évaluer le calcul relationnel en levant l'exigence de procéder au calcul.

Question 11a)

Description de la tâche

Pour la première tâche, l'énoncé suivant est présenté sur un carton : « 256 gommes sont partagées également entre 8 équipes. Chaque équipe est composée de 4 enfants. » La question posée est : « Est-ce qu'il y a un lien entre la division et l'énoncé ? » Ce problème est une division partage impliquant trois mesures : les gommes, les équipes et les enfants. Les données numériques ont été choisies pour offrir l'opportunité d'établir différents calculs relationnels.

Le schéma suivant présente les rapports pouvant être établis entre les différentes données du problème. Les nombres soulignés correspondent aux données de l'énoncé. Les nombres en gras sont les données qui peuvent découler des relations entre les données du problème.

équipes	enfants	gommes
	1	**8**
<u>1</u>	<u>4</u>	**32**
<u>8</u>	**32**	<u>256</u>

Si 256 ÷ 8 = 32, 256 ÷ 32 = 8 puisque 8 et 32 sont les facteurs de 256, le calcul relationnel suivant est aussi possible : 256 gommes ÷ 32 enfants = 8 gommes/enfant, où 8 équipes de 4 enfants/équipe = 32 enfants.

Conduites anticipées

a) Stratégie opérateur scalaire
Établir un calcul relationnel qui s'appuie sur l'opérateur scalaire : s'il y a 256 gommes pour 8 équipes, il y a 8 fois moins de gommes pour 1 équipe : 256 gommes ÷ 8 = 32 gommes ou 8 × 32 gommes = 256 gommes. Donc 32 gommes/équipe. La division permet de trouver le nombre de gommes pour une équipe.

b) Stratégie opérateur fonction impliquant 8 équipes et 32 gommes/équipe
À l'aide de l'opérateur fonction, établir une relation entre les gommes et les équipes. La division serait donc interprétée comme : 256 gommes ÷ 8 équipes = 32 gommes/équipe. La division permet de trouver le nombre de gommes/équipe.

c) Stratégie opérateur fonction impliquant 32 enfants et 8 gommes/enfant
À l'aide de l'opérateur fonction, établir une relation entre les enfants et les gommes : 256 gommes ÷ 32 enfants = 8 gommes/enfant, où 8 équipes de 4 enfants/équipe = 32 enfants.

Relances possibles

- Si l'élève n'interprète pas la division ou ne dit rien, on peut d'abord relancer en demandant : « Que veut dire 32 ici ? »
- Il est également possible de relancer en demandant : « Quelle question pourrait-on poser pour qu'un élève fasse la division pour le résoudre ? » La question qu'il formule peut nous informer sur la relation qu'il établit entre les données.

Question 11b)

Description de la tâche
L'énoncé écrit sur un carton est : « Il faut acheter de la pelouse pour couvrir le sol d'un parc. Le parc fait 8 mètres de large et 32 mètres de long. Je dois dire au jardinier combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires. » L'orthopédagogue donne la consigne suivante : « Est-ce que cette écriture mathématique peut m'aider à trouver combien de mètres carrés de pelouse sont nécessaires ? » Cette tâche évalue la reconnaissance d'un problème de type produit de mesures et la connaissance de l'opération inverse de la multiplication. L'élève doit d'abord établir le calcul

relationnel lié au problème, c'est-à-dire 8 m × 32 m = 256 m^2. À partir de ce calcul, l'élève doit faire le lien avec la division qui est proposée.

Conduites anticipées

a) Reconnaissance du calcul relationnel 8m × 32 m. La multiplication doit être opérée pour trouver la réponse, soit 256 m^2. Suite à ce calcul, identifier que 256 correspond au nombre de m^2.
b) Reconnaissance du calcul relationnel 8m × 32 m. Par la connaissance que la division est l'opération inverse de la multiplication, associer la division 256 ÷ 8 = 32 à cette relation et identifier que 256 correspond au nombre de mètres carrés.

Question 11c)

Description de la tâche
L'énoncé de problème est : « Les arbres en Colombie-Britannique vivent très vieux. Par exemple, Marie a 32 ans et elle a vu un arbre qui est 8 fois plus âgé qu'elle et Paul, un arbre qui est 10 fois plus âgé que lui. » À l'oral, l'orthopédagogue lui demande : « À quoi peut servir la division dans ce problème ? » Ce problème est de type scalaire et évalue si un raisonnement multiplicatif caractérise la relation scalaire identifiée. L'énoncé contient une donnée superflue, soit l'opérateur scalaire liant l'âge de Paul à l'âge de l'arbre.

Conduites anticipées

a) Établir une relation multiplicative entre l'âge de Marie et l'âge de l'arbre. L'âge de l'arbre est obtenu par une relation directe établie à partir de l'âge de Marie : 32 ans (âge de Marie) × 8 (8 fois plus âgé) = 256 ans (âge de l'arbre).
b) Reconnaître que la division permet de trouver l'âge de l'arbre puisque les relations dans la division sont équivalentes aux relations dans la multiplication : 256 ans (âge de l'arbre) ÷ 8 (8 fois moins âgé) = 32 ans (âge de Marie).

Question 12

Description de la tâche
L'énoncé de cette question est présenté oralement : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 9 poissons. Dans l'aquarium de Julie, il y en a 3 fois plus. Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Julie ? »

Ce problème de type scalaire engage une relation directe. La multiplication qui lie les variables numériques, 9 et 3 fait partie du répertoire mémorisé des faits multiplicatifs.

Conduites anticipées

Des stratégies erronées additives (9 + 3), mixtes (de type 3 × 9 + 9) sont possibles.

Stratégie multiplicative

a) Engager le calcul relationnel suivant : si Sophie a 9 poissons et que Julie a 3 fois plus de poissons, Julie a 3 × 9 poissons, donc 27 poissons.

Relance possible

- Si l'élève répond à l'aide du raisonnement additif, il est possible de le relancer en proposant une autre réponse : « Un élève m'a dit qu'il fallait faire la multiplication 9 × 3 pour trouver le nombre de poissons de Julie. Que penses-tu de sa réponse ? » Cette relance permet de voir si l'élève a accès au raisonnement multiplicatif sans succès immédiat (Clark et Kamii, 1996).

Question 13

Description de la tâche

L'énoncé suivant est formulé oralement : « Dans l'aquarium de Sophie, il y a 24 poissons. Dessine les poissons de Sophie. Dessine 6 fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre. » L'énoncé implique une relation directe de type « fois moins » et par conséquent, une division. La division nécessaire à la résolution fait partie du répertoire mémorisé des faits multiplicatifs : 24 ÷ 6 = 4.

Conduites anticipées

Des stratégies erronées additives (24 – 6), mixtes (de type : 24 ÷ (6 × 4) = 0) sont anticipées.

Stratégie multiplicative

a) Engager le calcul relationnel : 6 fois moins de 24 poissons fait 4 poissons ou l'opération correspondante : 24 ÷ 6 = 4.

Relance possible

- Si l'élève répond à l'aide du raisonnement additif, il est possible de le relancer en proposant une autre réponse: « Un élève m'a dit qu'il fallait faire la division 24 ÷ 6 pour trouver le nombre de poissons de Julie. Que penses-tu de sa réponse ? » Cette relance permet de voir si l'élève a accès au raisonnement multiplicatif sans succès immédiat (Clark et Kamii, 1996).

Question 14

Description de la tâche

L'énoncé de la tâche est présenté oralement : « Laurent a 12 ans. Il est 4 fois plus âgé que son frère. Quel âge a son frère ? » Ce problème est un produit scalaire impliquant une relation indirecte de type « fois plus ». Cette tâche évalue les relations scalaires. Les nombres, 12 et 4, font partie du répertoire mémorisé des faits multiplicatifs : $12 \div 4 = 3$.

Conduites anticipées

Des stratégies erronées additives (12 + 4), mixtes ($12 \times 4 + 12$) ou multiplicative (12×4) sont anticipées.

Stratégie multiplicative

Engager le calcul relationnel, permettant d'interpréter la relation indirecte, 4 fois plus et déterminer que le frère a 12 ans ÷ 4 = 3 ans.

Relance possible

- Si l'élève utilise un raisonnement additif, on peut demander à l'élève s'il peut inventer un problème semblable. Un problème acceptable qui implique une relation indirecte avec les mêmes données numériques serait, par exemple : Laurent a 12 bonbons. Il a 4 fois plus de bonbons que son frère. Combien de bonbons a son frère?

Question 15a)

Description de la tâche

L'énoncé est donné oralement : « Un professeur a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Elle a aussi 2 certificats différents pour la réussite aux tables de multiplication. Combien de certificats avec des motifs différents peut-elle faire pour ses élèves ? » Ce problème est un produit cartésien à trois espaces de mesure. Les nombres choisis sont relativement petits, ce qui rend possible le calcul mental.

Conduites anticipées

1) Stratégie de combinaisons

   a) Procéder par appariement et établir la liste de possibilités : Coordonner la sélection répétée des items et épuiser chacune des possibilités reliées aux items majeurs et mineurs. Ainsi, la liste complète des combinaisons possibles est dressée. Cette stratégie peut se concrétiser sous différentes formes, par exemple, un diagramme en arbre ou une liste exhaustive des possibilités.

2) Stratégie numérique multiplicative

   a) Opérer directement sur les nombres, par une multiplication pour trouver le nombre de combinaisons possibles :
   5 étampes × 3 couleurs × 2 certificats = 30 possibilités.

Relances possibles

- Si l'élève ne peut rien faire, proposer des images des étampes, des couleurs et des certificats.
- Proposer le problème à deux espaces de mesure : « Un professeur a 5 étampes différentes et 3 couleurs d'encre. Combien de motifs différents peut-elle faire pour ses élèves ? »

Question 15b)

Description de la tâche

L'énoncé est donné oralement : « Un artisan bijoutier a créé 13 modèles de colliers et 13 modèles de bagues. Il veut vendre des ensembles composés d'un collier et d'une bague. Combien d'ensembles différents peut-il offrir ? » Ce problème est un produit cartésien à 2 espaces de mesure. Les nombres ne permettent pas le recours aux faits multiplicatifs mémorisés.

Conduites anticipées

1) Stratégie de combinaison

   Procéder par appariement et établir la liste de possibilités : la liste complète des combinaisons possibles est dressée. Sélectionner le collier 1 qui sera combiné successivement aux différentes bagues et refaire ce cycle de combinaisons avec tous les colliers. Cette stratégie peut se concrétiser sous différentes formes, par exemple, un diagramme en arbre ou une liste exhaustive des possibilités. Considérant qu'il y a 169 combinaisons possibles (13 colliers × 13 bagues), il est peu probable que cette stratégie amorcée par un élève soit menée à terme.

2) Stratégie numérique multiplicative

Opérer directement sur les nombres, par une multiplication pour trouver le nombre de combinaisons possibles : 13 bagues × 13 colliers = 169 ensembles.

Relance possible

- Si l'élève ne peut rien faire, proposer le même problème avec des nombres plus petits, par exemple 7 colliers et 7 bagues.

Question 16

Description de la tâche

L'énoncé est présenté oralement : « Dans un restaurant, on propose des trios. Un trio repas est composé d'une boisson, d'un met principal et d'un dessert. Par exemple, un trio peut être : un lait, un spaghetti et un gâteau. Le restaurateur veut proposer un choix de 12 trios différents. Il propose 3 choix de boissons. Combien de choix de mets principaux et combien de choix de desserts peut-il proposer à ses clients ? » Une image d'un trio est montrée en même temps que l'énoncé. Ce problème est un produit cartésien impliquant trois espaces de mesure. Le niveau de difficulté est supérieur aux problèmes précédents étant donné que les deux mesures recherchées sont les mesures, les choix de mets principaux et de desserts, et non le nombre de combinaisons possibles ($M_1 \times M_2 \times M_3 = MC$, $3 \times \_\_ \times \_\_ = 12$).

Conduites anticipées

1) Stratégie de combinaison

Représenter les 12 possibilités par un objet (ex un rectangle). Répartir les 3 boissons et donc, avoir 4 cases pour chaque boisson. Ensuite, trouver par essais/erreurs le nombre de choix de mets principaux et de desserts dont le produit égale 4 : 1 et 4 ou 2 et 2.

2) Stratégie numérique multiplicative

a) Établir une relation multiplicative erronée entre les données. Établir le calcul relationnel de type produit cartésien suivant :

12 possibilités = 3 boissons × 4 choix. À partir de ce calcul, déterminer qu'il y a 4 choix de mets principaux et 4 choix de desserts.

b) Établir le calcul relationnel de type produit cartésien :

12 possibilités = 3 boissons × __ mets principaux × __ desserts. Effectuer le calcul 12 ÷ 3 = 4 et identifier une des deux réponses possibles, soit 2 et 2 comme diviseur de 4 ou 1 et 4 comme diviseurs de 4.

Question 17

<u>Description de la tâche</u>
On présente par écrit l'énoncé suivant : « Marie sait que $8 \times 12 = 96$. Peux-tu l'aider à trouver des réponses à d'autres multiplications à partir de ce qu'elle connait et donc, sans lui donner la réponse ! » Cet énoncé est suivi de quatre questions, a) à d) qui évaluent l'utilisation des propriétés de la multiplication pour le calcul mental.

a) 12×8
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la commutativité

b) 7×12
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la distributivité :
$7 \times 12 = 8 \times 12 - 1 \times 12 = 96 - 12$

c) 8×13
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la distributivité :
$8 \times 13 = 8 \times (12 + 1) = 8 \times 12 + 8 \times 1 = 96 + 8 = 104$

d) 16×12
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de :
- o l'associativité: $(2 \times 8) \times 12 = 2 \times (8 \times 12) = 2 \times 96 = 192$ ou
- o la distributivité : $8 \times 12 + 8 \times 12 = 16 \times 12 = 96 + 96 = 192$

Question 18

<u>Description de la tâche</u>
On peut écrire : 14 sacs et 15 bonbons par sac en énonçant le problème à l'oral : « J'ai préparé des petits sacs de bonbons à offrir à mes invités pour les remercier d'être venus à mon anniversaire. J'ai préparé 14 sacs, et dans chacun, j'ai mis 15 bonbons. Mais, oups, il n'y avait pas 14 amis à ma fête, mais 15 amis !!! Vite ! Vite ! J'ai refait mes sacs. J'ai donc préparé 15 sacs avec les mêmes bonbons. Peux-tu me dire combien de bonbons il y a maintenant dans chacun de mes sacs ? » On écrit alors : 15 sacs et _______ bonbons par sac. Ce problème est un isomorphisme de mesures. Ce problème permet de voir si l'élève peut référer à la propriété de la commutativité en situation. Les nombres sont assez grands pour faire obstacle au calcul mental.

<u>Conduites anticipées</u>

1) Stratégie numérique multiplicative
- Résoudre un problème d'isomorphisme de mesures de type multiplication en identifiant le nombre total de bonbons 14 sacs × 15 bonbons/sac = 210

bonbons et procéder à une division : 210 bonbons ÷ 15 sacs = 14 bonbons/sac.

2) Stratégie faisant appel à la commutativité de la multiplication
La commutativité est utilisée et le nombre de bonbons/sac est modifié. S'il y a 15 amis, il y a 14 bonbons/sac.

Question 19

Description de la tâche
L'énoncé est présenté à l'écrit. On demande à l'élève de compléter les égalités suivantes :

Que pourrais-tu choisir pour que ce soit égal des deux côtés ?
a) 3 × ___ = 7 × ____
b) 453 432 × 98 654 = 98 654 × ________
c) 7 × (8 + 3) = ______________________
Laissez l'élève calculer par lui-même pour voir s'il traite les parenthèses.
d) 8 × ___ = 8 × (10 + ___).

Cette tâche s'adresse aux élèves du 3[e] cycle et vise l'évaluation de l'utilisation des propriétés de la multiplication.

Conduites anticipées
a) 3 × _7_ = 7 × _3_
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la commutativité

b) 453 432 × 98 654 = 98 654 × _453 432 _
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la commutativité

c) 7 × (8 + 3) = (7 × 8) + (7 × 3) = 7 × 11 = 77_
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la distributivité

d) 8 × _1*a*__ = 8 × (10 + _*a*_)
Conduite anticipée : la stratégie optimale est l'utilisation de la distributivité

Question 20

Description de la tâche
La question est posée à l'oral : « Peux-tu compter par 2 à partir de 150? Peux-tu compter par 5 à partir de 175 ? Peux-tu compter par 10 à partir de 360 ? » Ce problème permet d'évaluer la fluidité du comptage par intervalles ou le rappel des multiples. Il faut observer si le comptage est fluide et rythmé.

Conduites anticipées

1) stratégie élémentaire
   a) Le comptage est rythmé. On énonce tous les nombres de la suite numérique avec emphase sur les intervalles : 150, 151, **152**, 153, **154**, 155, **156**, 157, **158**, 159, **160**…

2) stratégie intermédiaire
   a) Le comptage est fluide et respecte les intervalles. On observe certaines hésitations lors des changements de décades et des centaines. Ex : 150, 152, 154, 156, 158, 160, 163, 164, 168, … 198, 100 (hésitation), 200.

3) Stratégie optimale
   a) Le comptage est fluide et sans difficulté.

Question 21

Description de la tâche
L'énoncé est présenté à l'oral : « Il y a 24 cartes à jouer. Chaque joueur doit avoir le même nombre de cartes et toutes les cartes doivent être distribuées. Combien de joueurs peuvent jouer et combien chacun aura-t-il de cartes ? Voici un exemple : s'il y a 1 joueur, il aura 24 cartes. » Cette tâche permet d'évaluer les connaissances sur les diviseurs d'un nombre. Si la structure de l'énoncé se présente comme un isomorphisme de mesures, l'énoncé peut s'interpréter soit comme une division partage, soit comme une division regroupement puisque la solution à ce problème comporte tous les couples de nombres ordonnés dont le produit est 24.

Conduites anticipées

1) Stratégie de distribution effective
   Modéliser le problème à l'aide d'un dessin. Choisir un nombre de joueurs et effectuer une distribution des cartes. S'il ne reste aucune carte, écrire cette possibilité comme réponse.

2) Stratégie faisant appel aux diviseurs de 24
   Rappel de certains facteurs en s'appuyant sur la connaissance des faits multiplicatifs dont le produit est 24. N'utilise pas la commutativité pour identifier l'ensemble des couples ordonnés dont le produit est 24.

3) Stratégie optimale faisant appel aux diviseurs de 24
   Rappel de tous les facteurs en s'appuyant sur la connaissance des faits multiplicatifs dont le produit est 24. Utilisation de la commutativité pour identifier l'ensemble des couples ordonnés dont le produit est 24

Question 22

Description de la tâche

L'énoncé ainsi que les questions sont présentés à l'oral : « Au magasin scolaire, il y a 95 crayons à l'encre : a) Si on fait des boîtes de 5 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? b) Si on fait des boîtes de 2 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? c) Si on fait des boîtes de 10 crayons chacune, restera-t-il des crayons non emballés ? » Cette tâche évalue la connaissance des critères de divisibilité par 5, par 2 et par 10. Le nombre de crayons, 95, peut être changé avant de débuter la tâche. Par exemple pour un élève de 2^{e} cycle, on peut proposer un nombre entre 200 et 1000 et pour un élève de 3^{e} cycle, un nombre entre 1000 et 1500.

Conduites anticipées

1) Stratégie faisant appel à la division

La division est effectuée pour trouver le résultat.

2) Stratégie faisant appel aux critères de divisibilités

Les critères de divisibilité sont connus et utilisés pour répondre correctement aux trois questions : Un nombre est divisible par 5, si le chiffre à la position des unités est un 0 ou 5. Un nombre est divisible par 2, si le chiffre à la position des unités est pair : 0, 2, 4, 6, 8. Un nombre est divisible par 10, si le chiffre à la position des unités est un 0.

Question 23

Description de la tâche

On présente différentes multiplications écrites que l'élève doit résoudre à l'aide de l'algorithme. Les critères retenus couvrent différents cas de figure qui combinent des critères sur la retenue (2 possibilités), la position du chiffre «0» (6 possibilités) et le rapport entre le nombre de chiffres au multiplicande et au multiplicateur (2 possibilités) pour un total de 24 cas ($2 \times 6 \times 2$).

1. Retenue
    a. sans retenue
    b. avec retenue
2. Chiffre «0» :
    a. Sans chiffre «0»
    b. Seulement au multiplicande :
        «0» intercalaire
    c. Seulement au multiplicateur :
        i. avec «0» à la fin
        ii. avec «0» intercalaire

d. aux multiplicateur et multiplicande
i. avec «0» à la fin
ii. avec «0» intercalaire

3. Rapport du nombre de chiffres multiplicateur/multiplicande
a. Même nombre de chiffres au multiplicateur qu'au multiplicande
b. Au moins un chiffre de plus au multiplicande qu'au multiplicateur

Cette tâche vise à évaluer l'application de l'algorithme de la multiplication.

Conduites anticipées
Les erreurs répertoriées dans les études permettent d'anticiper des difficultés liées à la gestion de la retenue, de la gestion «0» ou du décalage pour chaque produit partiel ainsi qu'à la disposition des facteurs s'ils comportent un nombre de chiffres différents.

Question 24

Description de la tâche
On présente différentes divisions écrites à résoudre à l'aide de l'algorithme de la division. Les critères retenus couvrent différents cas qui combinent ces critères: 1) le rapport du nombre de chiffres au quotient et au dividende (3); 2) Le quotient (4) pour un total de 12 cas (3 × 4). Ils couvrent différents cas et différentes difficultés rencontrées par les élèves.

1. Rapport nombre de chiffres au quotient et au dividende
   a. Même nombre de chiffres au quotient qu'au dividende
   b. Moins de chiffres au quotient qu'au dividende
      i. Un chiffre au diviseur
      ii. Deux chiffres ou plus au diviseur
2. Quotient
   a. Quotient sans reste (le dividende est un multiple du diviseur)
      i. Sans zéro intercalaire au quotient
      ii. Avec zéro intercalaire au quotient
   b. Quotient avec reste
      i. Sans zéro intercalaire au quotient
      ii. Avec zéro intercalaire au quotient

Conduites anticipées
Les erreurs répertoriées dans les études (Brun et al., 1994) permettent d'anticiper des difficultés liées à la gestion des quotients partiels lorsqu'il a plusieurs chiffres au diviseur et donc de la gestion du nombre de chiffres au quotient, en particulier lorsqu'il y a présence du 0.

ANNEXE D
FORMULAIRE DE CONSENTEMENT ÉTHIQUE REMIS À CHAQUE PARTICPANT

UQÀM

Projet sur l'évaluation et l'intervention orthopédagogiques en mathématiques (consentement parent/élève)

IDENTIFICATION DE L'ÉQUIPE

Chercheur responsable du projet : Jacinthe Giroux, UQAM
Département : Éducation et formation spécialisées
Adresse postale : C.P. 8888, Succ. Centre-Ville, Montréal (Québec) Canada H3C 3P8
Adresse courriel : Giroux.jacinthe@uqam.ca
Co-chercheur(s) : Anik Ste-Marie, Gustavo Barallobres (UQAM)

BUT GÉNÉRAL DU PROJET

Un projet de recherche mené par des professeurs de l'UQAM et dirigé par le professeur Jacinthe Giroux est actuellement en cours. Le but de ce projet est de mettre à l'épreuve et de bonifier des instruments d'évaluation et d'intervention orthopédagogiques. Mon mémoire de maîtrise s'inscrit dans le cadre de ce projet de recherche et porte plus spécifiquement sur les instruments d'évaluation des connaissances des élèves sur la multiplication et la division.

La direction et l'orthopédagogue de l'école de votre enfant ont donné leur accord à ce projet. Nous sollicitons la participation de votre enfant à des entretiens orthopédagogiques sur la multiplication et la division. La contribution de votre enfant favorisera l'avancement des connaissances dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

TÂCHES DEMANDÉES À VOTRE ENFANT

Avec votre permission et l'accord de votre enfant, il sera invité à résoudre des tâches mathématiques dans le cadre de 3 ou 4 rencontres d'une durée d'environ 45 minutes. En tant qu'orthopédagogue, je mènerai personnellement les entretiens auprès des élèves. Le contenu de ces rencontres respecte bien sûr le programme de mathématiques correspondant au niveau scolaire de votre enfant.

Nous comptons également filmer votre enfant dans ses interactions avec l'orthopédagogue. Ces enregistrements sont nécessaires pour analyser l'outil d'évaluation utilisé.

AVANTAGES ET RISQUES D'INCONFORT

Il n'y a pas de risque associé à la participation de votre enfant à ce projet. Les activités proposées à votre enfant sont similaires à celles qu'il rencontre dans une journée de classe ordinaire. Néanmoins, soyez assurés que je resterai attentive à toute manifestation d'inconfort chez votre enfant durant sa participation.

ANONYMAT ET CONFIDENTIALITÉ

Il est entendu que les renseignements recueillis auprès de votre enfant, au cours des entretiens orthopédagogiques, sont confidentiels et que seuls les membres de l'équipe de recherche auront accès au contenu de la transcription et à l'enregistrement vidéofilmé des rencontres. L'ensemble du matériel de recherche sera conservé sous clé au laboratoire du chercheur responsable pour la durée totale du projet. Les enregistrements vidéofilmés, les documents écrits ainsi que les formulaires de consentement seront détruits 5 ans après les dernières publications.

PARTICIPATION VOLONTAIRE

La participation de votre enfant à ce projet est volontaire. Cela signifie que même si vous consentez aujourd'hui à ce que votre enfant participe à cette recherche, il demeure entièrement libre de ne pas participer ou de mettre fin à sa participation en tout temps sans justification ni pénalité. Vous pouvez également retirer votre enfant du projet en tout temps.

La participation à ce projet n'est pas une condition pour que votre enfant reçoive des services orthopédagogiques. Un refus de participer à ce projet de recherche ne le prive aucunement du droit de recevoir les services orthopédagogiques.

Votre accord à participer implique également que vous acceptez que l'équipe de recherche puisse utiliser aux fins de la présente recherche (articles, mémoires, thèses, conférences et communications scientifiques) les renseignements recueillis à la condition qu'aucune information permettant d'identifier votre enfant ne soit divulguée publiquement à moins d'un consentement explicite de votre part et de l'accord de votre enfant.

Ainsi, l'équipe de recherche souhaiterait, avec votre accord, pouvoir diffuser des extraits vidéo des rencontres orthopédagogiques auxquelles votre enfant a participé dans le cadre de conférences scientifiques ou de formation universitaire en orthopédagogie.

DES QUESTIONS SUR LE PROJET OU SUR VOS DROITS ?

Pour des questions additionnelles sur le projet ou sur vos droits ou ceux de votre enfant en tant que participant de recherche, ou pour retirer votre enfant du projet, vous pouvez communiquer avec :

Jacinthe Giroux, professeure, Département d'éducation et formation spécialisées, UQAM
Numéro de téléphone : 514-987-3000 poste 4781
Adresse courriel : Giroux.jacinthe@uqam.ca

Le Comité institutionnel d'éthique de la recherche avec des êtres humains de l'UQAM (CIÉR) a approuvé le projet de recherche auquel votre enfant est invité à participer. Pour des informations concernant les responsabilités de l'équipe de recherche au plan de l'éthique de la recherche avec des êtres humains ou pour formuler une plainte, vous pouvez contacter la présidence du CIÉR, par l'intermédiaire de son secrétariat au numéro (514) 987-3000 # 7753 ou par courriel à CIEREH@UQAM.CA

Votre collaboration et celle de votre enfant sont importantes à la réalisation de notre projet et l'équipe de recherche tient à vous en remercier.

AUTORISATION PARENTALE

En tant que parent ou tuteur légal de ,
je reconnais avoir lu le présent formulaire de consentement et consens volontairement à ce que mon enfant participe à ce projet de recherche. Je reconnais aussi que le chercheur responsable a répondu à mes questions de manière satisfaisante, et que j'ai disposé suffisamment de temps pour discuter avec mon enfant de la nature et des implications de sa participation. Je comprends que sa participation à cette recherche est totalement volontaire et qu'il peut y mettre fin en tout temps, sans pénalité d'aucune forme, ni justification à donner.

J'autorise mon enfant à participer aux entretiens orthopédagogiques et que les enregistrements de ces entretiens puissent être visionnés, à des fins d'analyse, par les membres de l'équipe de recherche

OUI NON

J'accepte que des extraits vidéo où apparaît mon enfant soient diffusés dans le cadre de rencontres scientifiques ou de formations universitaires en orthopédagogie.

OUI NON

Signature de l'enfant :
Date :

____

Signature du parent/tuteur légal : Date :

____

Nom (lettres moulées) et coordonnées : ______________________________

____

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques du projet et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du chercheur responsable du projet
ou de son, sa délégué(e) : Date :

Geneviève Fortier-Moreau, étudiante à la maîtrise

RÉFÉRENCES

Anghileri, J. (1989). An Investigation of Young Children's Understanding of Multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 367-385.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 281-308.

Association Mathématique du Québec (1964). *Les entiers naturels*. Canada : Washington National Council of Teachers of Mathematics.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children's Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241.

Bednarz, N. et Garnier C. (1989) *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. Ottawa : Édition Agence Arc.

Bessette, L. et Boutin, G. (2001). Qu'en est-il des services aux enfants en difficulté dans le contexte de la réforme actuelle. *La feuille orthopédagogique*, 2(4), 1-4.

Boudreau, C., Cadieux, A., Laplante, L. et Turcotte, S. (2009). *Cadre de référence pour une formation de 2e cycle spécialisée en orthopédagogie*. Plan pour soutenir la réussite des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (mesure 16). Document de travail, version non révisée.

Boutin, G. et Daneau, C. (2004). *Réussir : prévenir et contrer l'échec scolaire*. Montréal : Éditions nouvelles.

Boutin, G. (2011). *L'entretien de recherche qualitatif.* Montréal : Presses de l'Université du Québec.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brun, J . et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et Recherche*, 3, 261-285.

Brun, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. Dans M. Artigue, R.Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* (p.67-83). Paris : La Pensée sauvage éditions.

Brun, J., Conne, F. Lemoyne, G et Portugais, J. (1994) La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Nouveaux c@hiers de la recherche en éducation, 1* (1), 117-132

Cadieux, A. (2010). Élève à risque... oui, mais de quoi ? *Éducation Canada, 44*(1). Récupéré de : http://www.cea-ace.ca.proxy.bibliotheques.uqam.ca: 2048/sites/default/files/EdCan-2004-v44-n1-Cadieux.pdf

Carless, D. R. (2003). Factors in the implementation of task-based teaching in primary schools. *System, 31*(4), 485-500.

Cherel, C. (2003). *Étude didactique d'une intégration partielle aux leçons de mathématiques en classe ordinaire de deux élèves d'une classe d'adaptation scolaire.* (mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Montréal.

Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire le temps... des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique.

Clark, F. B., et Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(jan. 1996), 41-51.

Clarke, D., Clarke, B., et Roche, A. (2011). Building teachers' expertise in understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: the power of task-based, one-to-one assessment interviews. *The International Journal on Mathematics Education, 43*(6), 901-913.

Connolly, A.J. (2008). *Key Math 3. Édition canadienne.* [Test] Toronto : Pearson.

Conseil supérieur de l'éducation. (2007). *Les projets pédagogiques particuliers au secondaire : diversifier en toute équité*. Québec : Conseil supérieur de l'éducation.

Dumas, B. (2011) *Protocole DEMMI. Document inédit.* Service régional de soutien et d'expertise à l'intention des élèves présentant des difficultés et troubles d'apprentissage, Commission scolaire de Montréal.

Entente entre le Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones (CPNCF) et la Fédération des syndicats de l'enseignement (FSE-CSQ) 2010-2015 (2011), L.R.Q., c. R-8.2. Récupéré de : http://cpn.gouv.qc.ca/fileadmin/documents/CPNCF/04_Conv_coll_2010_2015/enseignant/FSE-CSQ/2014-01-27_FSE_Conv_2010-2015_Internet.pdf

Entente entre le Comité patronal de négociation pour les commissions scolaires francophones (CPNCF) et la Fédération autonome de l'enseignement (FAE) 2010-2015 (2011), L.R.Q., c. R-8.2. Récupéré de : http://www.lafae.qc.ca/wp-content/uploads/2012/04/Entente_FAE_2010-20151.pdf

English, L. (1991). Young children combinatoric strategies. *Education Studies in Mathematics, 22*, 451-474.

English, L. (1993). Children's Strategies for Solving Two- and Three-Dimensional Combinatorial Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 255-273.

English, L. (1996). Children's Construction of Mathematical Knowledge in Solving Novel Isomorphic Problems in Concrete and Written Form. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 81-112.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M. et Sciolis Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Soving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Gaudreau, L. (2011). *Guide pratique pour créer et évaluer une recherche scientifique en éducation.* Montréal : Guérin Éditeur.

Gaudreau, L., Legault, F., Brodeur, M., Hurteau, M., Dunberry, A., Séguin , S. et Legendre, R. (2008). *Rapport d'évaluation de l'application de la Politique de l'adaptation scolaire*. Déposé au ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Direction de l'Adaptation scolaire. Montréal : UQAM.

Giroux, J. (2010). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Dans V. Freiman, A. Roy et L. Théis (dir.). *L'enseignement des mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quels supports didactiques privilégier.* Actes du colloque organisé par le Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec, du 10 au 12 juin à Moncton (p. 148-158). Moncton : Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec.

Giroux, J. (2013a) Variations sur les processus interprétatifs dans l'étude des difficultés d'apprentissage en mathématiques. *17e École d'été de didactique des mathématiques* Actes du colloque organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, du 19 au 26 août 2013, Nantes.

Giroux, J. (2013b). *Outil d'investigation et d'interprétation des connaissances sur les structures multiplicatives d'élèves du primaire*. Document inédit. Projet de partenariat MELS-LLL/ UQAM. Université du Québec à Montréal.

Giroux, J. (2013c). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique.* 7 (1),59-86.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. Deblois (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (p.11-44). Montréal : Éditions PUQ.

Giroux, J., Fortier-Moreau, G., Ste-Marie, A. (2013). *Projet en orthopédagogie des mathématiques UQAM/LLL*. Document inédit. Université du Québec à Montréal.

Giroux, J., et Ste-Marie, A. (2015a). Approche didactique en orthopédagogie des mathématiques dans le cadre d'un partenariat. Dans I. Nedelec-Trohel, L. Numa-Bocage, J-C. Kalubi (dir.), *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* 70-71, 195-207.

Giroux, J. et Ste-Marie, A. (2015b). *Le jeu didactique des relances en orthopédagogie des mathématiques*. Conférence présentée dans le cadre du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques, 20 au 22 mai 2015, Université de Sherbrooke, à Sherbrooke.

Goldin, G. A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9(*Research Methods in Mathematics Education), 40-62, 164-177.

Gouvernement du Québec. (2009). *À la même école. Les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage : évolution des effectifs et cheminement scolaire à l'école publique*. Québec : Gouvernement du Québec.

Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. Dans D. A. Grouws (dir.*), Handbook of research on mathematics teaching and learning :*

a project of the National Council of Teachers of Mathematics (p.243-275). Reston, Virginie : National Council of Teachers of Mathematics.

Hirtt, N. (2007). Impact de la liberté de choix sur l'équité des systèmes éducatifs ouest-européens. Aped, Bruxelles. Récupéré de : http://www.skolo.org/IMG/pdf/Liberte_de_choix.pdf

Houssart, J., & Evens, H. (2011). Conducting Task-Based Interviews with Pairs of Children : Consensus, Conflict, Knowledge Construction and Turn Taking. *International Journal of Research & Method in Education, 34*(1), 63-79.

Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne : Peter Lang.

Kamii, C. (2000). *Young children reinvent arithmetic (2nd ed.)*. New York : Teachers College Press.

Laborde, C. et Vergnaud, G. (1994). L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Dans Vergnaud, G. et D. P. Chartier (dir.), *Apprentissages et didactiques, où en est-on?* (p. 63-98). Paris : Hachette.

Laval, C., Vergne, F., Clément, P. et Dreux, G. (2012). *La nouvelle école capitaliste*. Paris : La Découverte/ Poche.

Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. *Éducation et francophonie, XXXI* (2),13-44.

Lemoyne, G. et Tremblay, C. (1986). Addition and Multiplication: Problem-Solving and Interpretation of Relevant Data. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 97-123.

Ling, G. W., & Ghazali, M. (2007). Solution Strategies, Modes of Representation and Justifications of Primary Five Pupils in Solving Pre Algebra Problems : An Experience of Using Task-Based Interview and Verbal Protocol Analysis. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 30*(1), 45-66.

Mainini, M. (2006). *Analyse descriptive et comparative des réponses apportées par les systèmes d'éducation luxembourgeois et québécois aux élèves ayant des besoins particuliers.* (mémoire de maîtrise). Université de Québec à Montréal, Montréal.

Merri, M. (2014). *L'œuvre méthodologique de Piaget.* Communication présentée dans le cadre de la journée d'étude sur l'entretien, GEMAS. Université du Québec à Montréal, Montréal, le 26 juin 2014.

Ministère de l'Éducation (MEQ). (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves, Politique de l'adaptation scolaire* (19-6509, 19-6509-A). Gouvernement du Québec. Québec : Bibliothèque nationale du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et des Sport (MELS). (2007). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA).* Produit no 2007-07-00523. Gouvernement du Québec, Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2009a). *L'école j'y tiens! Tous ensemble pour la réussite scolaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (2009b). *Programme de formation de l'école québécoise, progression des apprentissages au primaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (2011). *Agir Autrement.* Québec : Gouvernement du Québec.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Nesher, P. (1992). Solving Multiplicative Word problems. Dans G. Leinhardt, R. Putnam et R.A. Hattrup (dir). *Analysis of Arithmetic for Mathematics teaching.* (p. 189-219). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Organisation de la coopération et du développement économique (OCDE). (2010). *Comment en finir avec l'échec scolaire : les mesures efficaces. Description du projet de l'OCDE.* Paris : OCDE.

Organisation de la coopération et du développement économique (OCDE). (2012). *Équité et qualité dans l'éducation. Comment soutenir les élèves et les établissements défavorisés.* Pari s: OCDE.

Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant Paris : Paris Presses universitaires de France.* Récupéré de : http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono.php

Piaget, J. (1956). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Rocher, G (2001). La mondialisation : un phénomène pluriel. Dans Daniel Mercure (dir). *Une société-monde ? Les dynamiques sociales de la mondialisation.* (p.17-31). Québec : Les Presses de l'Université Laval et De Boeck Université.

Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en S.E.G.P.A. Une contribution à la question des inégalités scolaires*. Thèse inédite de doctorat, Bordeaux : Université Victor-Segalen.

Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* (52), 73-87.

Roiné, C. (2011). Des "besoins éducatifs particuliers" aux "parcours spécifiques" – Étayage anthropologique et didactique. *Esquisse (*54-55), 23-37.

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour les élèves en grande difficulté scolaire. Dans Giroux, J. et D. Gauthier (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (p. 195-217). Montréal : Éditions Bande didactique.

Sarrazy B. (2002). *Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques* : Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Bordeaux : Université de Bordeaux 2.

Schmidt, S., et Weiser, W. (1995). Semantic Structures of One-Step Word Problems Involving Multiplication or Division. *Educational Studies in Mathematics, 28*(1), 55-72.

Sherin, B. et Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 347-395.

Tillema, E. S. (2013). A power meaning of multiplication : Three eighth graders' solutions of Cartesian product problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 331-352.

Tondreau, J. (2011). *L'école québécoise : débats, enjeux et pratiques sociales.* Anjou : Éditions CEC.

Vannier, M.-P.(2010) L'activité du professeur : entre ajustement aux besoins d'élèves «scolairement fragilisés» et maintien d'une exigence didactique. Dans L. Alvarez, R. Rckenmann et J. Vallès *Actes du Congrés Internacional de Didàctiques.* Colloque tenu à Girona, du 3 au 6 février 2010 (no 317 p. 1-6). Récupéré de : http://www.udg.edu/portals/3/didactiques2010/guiacdii/ACABADES%20FINALS/317.pdf

Vergnaud, G. (1983). Multiplicatives structures. Dans Lesh, R. A., M. Landau et H. Ginsburg (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 127-174). New York : Academic Press.

Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (3e édition).* Berne : P. Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques, 10*(2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual Field : What and Why? Dans G. Harel et J. Confrey (dir.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 41-60). Albany, New York: University of New York Press.

Vergnaud, G. (2013). Compétence, activité et conceptualisation, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 23*(1), 81-95.

Vermot-Desroches, B. (2007). *Le financement public de l'enseignement privé au Québec.* Étude déposée au ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Québec : Gouvernement du Québec.

Vincent, S. (1992). *Construction des structures multiplicatives chez les jeunes élèves du primaire.* (thèse de doctorat), Université de Montréal.

Wechsler, D. (2005). *Test de rendement individuel de Wechsler. WIAT-II.* 2e édition, version pour francophone du Canada. [Test] Toronto : Harcourt.