

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

CHEMIN DE DYCK DE HAUTEUR BORNÉE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ROBERT PETTUS

MAI 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche, François Bergeron qui m'a guidé à travers cette procédure. Sa passion et vision m'ont énormément aidé à rester motivé et seront toujours appréciées. Son expertise des mathématiques m'étonne toujours.

Tous mes remerciements vont aux professeurs du LACIM qui ont facilité mon travail. Un accueil chaleureux et vif me permettait d'apprendre et profiter de leur savoir ainsi que de leur compétence. En plus, il faut nommer les étudiants suivants : Stéphane Leduc, Alice Remal, Marco Robado, Guillaume Truchone et Yannic Verglas.

Je dédie ce mémoire et aimerais remercier surtout ma famille et spécifiquement mes parents Jean et Paul qui m'ont soutenu tout au long de mes études. C'est vraiment grâce à eux et à leur support sans fin que j'ai pu avoir cette opportunité.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
RAPPEL DES NOTIONS DE BASE DE COMBINATOIRE	3
1.1 Suites et séries formelles	3
1.2 Série génératrice et théorie des espèces	6
1.3 Théorème d'inversion de Lagrange	9
1.4 Chemins	11
1.4.1 Chemins de taxi	12
1.4.2 Codage des chemins de taxi	13
1.4.3 Dénombrement des chemins de taxi	14
1.4.4 Statistiques	14
1.5 Conserver la pondération des ensembles par bijection	16
1.6 q -analogues	23
1.6.1 q -énumération des chemins de taxi	25
1.6.2 Enumération de sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{F}_q^n .	27
1.6.3 La formule du q -binôme de Newton	28
1.6.4 q -énumération de S_n	30
1.6.5 q -énumération des classes de conjugaison	31
CHAPITRE II	
LE CAS CLASSIQUE DES CHEMINS DE DYCK	39
2.1 Nombres de Catalan : Origines historiques	39
2.2 Chemin de Dyck	42
2.3 Codage des chemins de Dyck	44

2.4	Énumérer les chemins de Dyck	45
2.5	Récurrences sur le nombre de chemins de Dyck	47
2.6	Chemin de Dyck primitif	51
2.7	Aire	52
2.8	q -énumération des chemins de Dyck	52
CHAPITRE III		
	q -ANALOGUE DE CHEMINS DE DYCK DE HAUTEUR BORNÉE . .	57
3.1	Chemin de Dyck à hauteur bornée	57
3.2	Dénombrer les chemins de Dyck à hauteur bornée par h	58
3.3	Les séries génératrices des chemins de Dyck à hauteur bornée	62
3.4	q -énumération des chemins de Dyck à hauteur bornée	64
3.5	q -analogue : volet expérimental	65
CHAPITRE IV		
	RÉSULTATS DES EXPERIENCES	69
4.1	Réseaux carrés	69
4.1.1	Lien de causalité entre des dénombrements	70
4.1.2	Séries génératrices	70
4.1.3	Suite de polynômes des séries génératrices	71
4.2	Réseaux rectangulaire	72
4.2.1	Définition de la hauteur	79
CONCLUSION		81
RÉFÉRENCES		83

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous considérons des suites de polynômes obtenus par l'énumération pondérée de certains chemins dans le plan combinatoire. Une analyse de la combinatoire de ces chemins permet de déduire des récurrences pour ces polynômes. Habituellement, nous considérons des chemins dans le triangle du côté supérieur gauche d'un carré n par n , ce que nous appelons les chemins de Dyck. Nous ajoutons par la suite des contraintes supplémentaires sur les chemins de Dyck. Nous exigeons que les chemins ne se trouvent plus que $h + 1$ unités par dessus l'hypoténuse, nous disons que la hauteur est bornée par h . Après avoir introduit les notions nécessaires, nous expliquons comment utiliser un système de calcul formel pour manipuler toutes ces notions. En particulier, nous montrons comment automatiser la découverte des récurrences à l'aide d'outils spécialisés. Le but de tout ce travail est d'adapter les outils afin de comprendre les chemins dans les rectangles n par k de hauteur bornée par h .

Mots clés : chemin de Dyck, nombre de Catalan, série génératrice, récurrence.

INTRODUCTION

Les nombres de Catalan apparaissent dans plusieurs domaines des mathématiques, incluant le combinatoire. J'ai commencé à m'intéresser à ce sujet parce que je trouve fascinant les liens entre les récurrences dans les nombres de Catalan et la combinatoire des chemins de Dyck.

Ce texte s'inspire du travail de Richard Stanley dans son livre *Enumerative Combinatorics* (Stanley, 1999) ainsi que celui de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick dans leur livre *Analytic Combinatorics* (Flajolet et Sedgewick, 2009). Depuis le 18^e siècle, diverses personnes ont permis d'améliorer la connaissance collective de ce domaine. L'ouvrage *Catalan Numbers with Applications* écrit par Thomas Koshy (Koshy, 2009) nous livre un historique non-exhaustif des mathématiciens et de leurs recherches concernant les nombres de Catalan. On compte parmi ceux qui ne figurent pas dans cet ouvrage entre autres Xavier Viennot, Mireille Bousquet-Mélou, Jean Vuillemin et Philippe Flajolet, tous faisant partie de l'École française de recherche.

Emeric Deutsch énumère les chemins de Dyck à propos de divers paramètres dans son article *Dyck path enumeration* (Deutsch, 1999). Il emploie la série génératrice des nombres de Narayana afin d'énumérer les chemins quant à certains paramètres. Il y a d'autres personnes qui considèrent les chemins qui évitent certains sous-chemins. Il est possible de construire des posets sur les chemins et d'évaluer les statistiques sur les chemins. Paul Peart et Wen-Jin Woan considèrent les chemins de Dyck sans sommet de hauteur k dans leur article *Dyck Paths With No Peaks At Height k* (Peart et Woan, 2001).

Dans ce mémoire, nous énumérons les chemins de Dyck par quelques statistiques pertinentes. Nous évaluons la statistique de l'aire la plus souvent. Nous nous permettons de considérer les chemins de Dyck dans les réseaux rectangulaires. Les récurrences de ces énumérations des chemins de Dyck se ressemblent beaucoup. Je dirais que le motif des récurrences est agréablement surprenant à cause de sa simplicité de son élégance. Nous espérons que les récurrences sur les énumérations des chemins nous fournissent des renseignements sur les chemins eux-mêmes.

CHAPITRE I

RAPPEL DES NOTIONS DE BASE DE COMBINATOIRE

Les principaux objets d'étude de ce travail concernent les chemins de Dyck, dont la définition est donnée au chapitre 2. Dans ce chapitre, nous établissons la notation et rappelons les notions de bases nécessaires sur les suites des polynômes, les séries génératrices et leurs structures algébriques, etc. Grâce à ces notions, nous pouvons manipuler et mieux comprendre les chemins de Dyck.

1.1 Suites et séries formelles

Comme c'est souvent l'habitude, les **suites** prennent la forme $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.¹ Nous considérons les suites des entiers, des polynômes ainsi que des séries formelles.

Une série formelle est une généralisation des polynômes, où il est permis que le nombre de termes soit infini. La variable est remplacée par une indéterminée. Nous n'évaluons pas la série formelle vu que cela est interdit. Une indéterminée ne peut jamais être remplacée par une valeur numérique. Nous pouvons considérer une indéterminée plutôt en tant qu'espace réservé. Tout notre travail correspond aux fonctions génératrices ordinaires qui sont une série formelle spécifique.

Une **série formelle** est une fonction $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$, noté $\sum_{n \geq 0} F_n x^n$ où \mathcal{A} est un

1. Parfois les suites commencent plutôt avec le terme $k \in \mathbb{Z}$.

anneau et $F(n) = F_n \in \mathcal{A}$. L'anneau des séries formelles en l'indéterminée x et à coefficients dans \mathcal{A} est noté $\mathcal{A}[[x]]$. On exprime aussi les éléments de cet ensemble par des expressions infinies de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

L'addition et la multiplication sont définies de la même façon que pour les polynômes.² Il se peut que x soit un ensemble d'un nombre infini d'indéterminées. Dans ce cas, les éléments de l'anneau sont des expressions en plusieurs variables.

Exemple 1. Voici la multiplication d'une série formelle avec elle-même. Nous utiliserons ce résultat afin d'énumérer les nombres de Catalan dans le chapitre suivant. Soit $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, une série formelle quelconque. Alors nous verrons que $A(x)^2 = \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot a_{n-i-1} x^{n-1}$. Il suffit de démontrer les manipulations algébriques en tant que polynômes :

$$A(x)^2 = \left(\sum_{i \geq 0} a_i x^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} a_j x^j \right) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_i a_j x^{i+j} = \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} x^{n-1}.$$

Soient \mathcal{A} , un anneau commutatif et $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, une série formelle dans $\mathcal{A}[[x]]$. Alors $f(x)$ est inversible dans $\mathcal{A}[[x]]$ si et seulement si a_0 est inversible dans \mathcal{A} . Ce résultat est utile et nous donne une façon de construire l'inverse de la multiplication d'une série formelle.

Pour vérifier ce fait, il faut prouver qu'il existe une série formelle $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ dans $\mathcal{A}[[x]]$ tel que $f(x)g(x) = 1$. En développant le produit, nous avons

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} x^k. \end{aligned}$$

2. Le terme « formelle » implique que l'indéterminée x est un espace réservé. Nous ne préocupaons pas de notions de convergence, les séries sont considérées comme objets algébriques.

En se rappelant que nous voulons que le produit soit égal à 1, l'identité de l'opération de multiplication, nous pouvons comparer les coefficients des deux côtés de l'équation. Nous avons donc que $g(x)$ satisfait l'équation si et seulement si $a_0b_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = 0$ pour tous $k \geq 1$. Pour l'équation $a_0b_0 = 1$, il faut que a_0 soit inversible dans \mathcal{A} . Alors $g(x)$ n'existe pas et $f(x)$ n'est pas inversible dans \mathcal{A} si a_0 n'est pas inversible dans \mathcal{A} .

Si a_0 est inversible dans \mathcal{A} , alors $b_0 := a_0^{-1}$ existe. Toutes les autres équations peuvent être écrites comme $a_0b_k = -\sum_{i=1}^k a_i b_{k-i}$. Si nous multiplions les deux côtés par b_0 , nous avons

$$b_k = -b_0 \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i}. \quad (1.1)$$

Ces équations peuvent être résolues par récurrence sur $k \geq 1$, donnant une solution pour $g(x)$, l'inverse de la multiplication de $f(x)$. Nous savons donc que $f(x)$ est inversible dans \mathcal{A} .

Une généralisation de $\mathcal{A}[[x]]$ est l'**anneau des séries formelles de Laurent** sur \mathcal{A} de l'indéterminée x , noté $\mathcal{A}((x))$, qui est un anneau où les éléments sont les expressions infinies de la forme

$$f(x) = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + a_{r+2} x^{r+2} + \dots$$

et muni de l'addition et de la multiplication standard, où $r \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geq r$.

Pour toutes séries formelles de Laurent $f(x) \in \mathcal{A}((x))$ et $f(x) \neq 0$, il existe un plus petit entier n tel que le coefficient de x^n dans f n'est pas nul, noté $[x^n]f(x) \neq 0$. Cet entier s'appelle l'**indice** de $f(x)$, noté $I(f)$. Par convention, l'indice de 0 est $I(0) = +\infty$.

Exemple 2. Par exemple,

1. $I(1/x) = -1$,

$$2. I(1/(1-x)) = 0, \text{ et}$$

$$3. I(2x^3 - 4x^5) = 3$$

Soient $f(x)$ et $g(x)$, des séries formelles de Laurent dans $K((x))$. Alors $f(g(x))$ est bien définie si et seulement si au moins un des cas suivants est vrai :

$$1. g(x) = 0 \text{ et } I(f) \geq 0;$$

$$2. g(x) \neq 0 \text{ et } f(x) \text{ a un nombre fini de termes non-nuls};$$

$$3. g(x) \neq 0 \text{ et } I(g) > 0.$$

Lorsque nous voulons faire référence à l'anneau des séries formelles ou à l'anneau des séries formelles de Laurent sur un corps K , nous les notons $K[[x]]$ et $K((x))$ respectivement. En employant cette notation, nous tenons à ce que \mathbb{Q} soit un sous-corps de K .³

Ailleurs, il y a deux autres opérations bien définies si $f(0) = 0$:

$$\frac{1}{1-f(x)} := \sum_{n \geq 0} f(x)^n$$

$$e^{f(x)} := \sum_{n \geq 0} \frac{f(x)^n}{n!}$$

1.2 Série génératrice et théorie des espèces

Selon Knuth, la notion de série génératrice a d'abord été introduite par Abraham de Moivre en 1730 afin de calculer explicitement des formules provenant des suites définies par une récurrence linéaire.⁴ De Moivre est connu pour son travail sur

3. Les séries formelles sur un anneau unitaire forment une algèbre de Kleene, qui est un type d'algèbre utile en informatique ainsi qu'en combinatoire. Pour un résumé des algèbres au sens large et une introduction aux algèbres de Boole, voir (Burris et Sankappanavar, 1981). Pour un traitement associé aux treillis et aux algèbres de Boole en lien avec l'informatique, consulter (Sasao, 1999).

4. (Knuth, 1968) la section 1.2.9 : « Generating Functions »

les liens entre les nombres complexes et les fonctions trigonométriques. Il est spécifiquement connu pour la formule de de Moivre ainsi que ses oeuvres touchant la probabilité, surtout la loi normale pour le théorème de De Moivre-Laplace.⁵

Les séries génératrices sont essentielles pour ce travail puisqu'elle enregistre le nombre d'objets de taille n en tant que coefficient du terme de puissance n . Une **série génératrice ordinaire** d'un ensemble S , souvent appelée série génératrice ou fonction génératrice⁶, qui compte les objets combinatoires de taille n dans l'ensemble S est $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. C'est une série formelle telle que le coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme est le nombre d'objets de taille n que la série énumère.

Quand nous voulons faire référence au coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme d'une série génératrice $G(x) = \sum_{i \geq 0} g_i x^i$, nous l'appelons g_n par habitude. Or, quand nous voulons faire référence à un coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme d'une série génératrice plus compliquée, nous écrivons tout simplement $[x^n]$ devant la série. Par exemple, $[x^n]G(x) = [x^n] \sum_{i \geq 0} g_i x^i = g_n$. Pour un n fixe, $[x^n]$ est un opérateur linéaire. L'ensemble $x \cdot K[[x]]$ des séries formelles de forme $a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, où le terme constant est nul, forme un monoïde muni de l'opération de composition des fonctions. L'identité du monoïde est la fonction $I_{xK[[x]]} = x$. Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n \in K[[x]]$, nous appelons la série formelle $g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^n \in K[[x]]$, une fonction réciproque de l'opération de composition des fonctions notées $f^{-1}(x)$ si $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = I_d = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Un monoïde est un groupe sans la condition que chaque élément du monoïde ait un inverse.

Une **fonction de poids** sur un ensemble S est une fonction $\omega : S \rightarrow \mathbb{N}^r$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^r$, la préimage $\omega^{-1}(\alpha) := \{s \in S \mid \omega(s) = \alpha\}$ de α par ω soit un

5. (Bellhops, 2011)

6. Fonction génératrice est un anglicisme.

ensemble fini.

Soit $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$, un vecteur. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ est une suite finie d'indéterminées qui commutent entre elles, nous utilisons la notation suivante :

$$x^\alpha := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_r^{a_r}$$

pour le monome correspondant. Soit $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_r) \in \mathbb{N}^r$. Nous posons $\alpha \leq \beta$ quand $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in [r] := \{1, \dots, r\}$. Nous avons les lois des exposants standards : $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. De plus, x^α divise x^β si et seulement si $\alpha \leq \beta$.

Soit \mathbb{B} la catégorie des ensembles finis avec bijections $f : A \xrightarrow{\sim} B \in \text{Fl}(\mathbb{B})$ où $A, B \in \text{Ob}(\mathbb{B})$. Une espèce est un foncteur

$$F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$A \mapsto F[A].$$

Soient S un ensemble et ω une fonction de pondération sur S . Soit

$$F[n] := \{s \in S \mid \omega(s) = n\}.$$

Nous avons donc

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} F[n].$$

Sans rappeler tous les détails de la théorie des espèces⁷, nous savons bien associer à des constructions combinatoires $F[A]$, d'espèce F , sur les ensembles finis A , une série génératrice exponentielle

$$F(x) := \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$$

où f_n compte le nombre de constructions d'espèce F sur A de cardinal n . Rappelons aussi que la théorie donne des opérations entre espèces $F + G$, $F \cdot G$,

7. (Bergeron *et al.*, 1998)

et $F \circ G$ telles que $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$, $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$ et $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ avec $G[\emptyset] = \emptyset$.

Les g_n comptent le nombre de structures d'espèce F à isomorphisme près sur A de cardinal n . Nous avons donc

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^n \text{ où } g_n := \#(F[A]/S_A)$$

Une espèce est dite rigide si $\tilde{F}(x) = F(x)$, c'est-à-dire que $f_n = n!g_n$.

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons le théorème d'inversion de Lagrange afin d'évaluer une fonction réciproque.

1.3 Théorème d'inversion de Lagrange

Le théorème d'inversion de Lagrange, parfois appelé la formule d'inversion de Lagrange, est très connu. Il donne le développement en série de Taylor de la bijection réciproque d'une fonction analytique et il y a énormément d'applications. En particulier, il donne une autre preuve du lemme 8. Le théorème utilise les propriétés de l'anneau des séries formelles afin de définir une série formelle. Celui-ci est très utile dans plusieurs domaines dont le combinatoire, l'analyse, l'algèbre et l'informatique entre autres.⁸ Il y a plusieurs façons équivalentes de décrire le théorème. Voici une forme traditionnelle du théorème de Lagrange.

Théorème 1. (Le Théorème d'inversion de Lagrange) Soit $F = x/R$ où $R = \sum_{n \geq 0} R_n x^n$, une série quelconque dans $K[[x]]$ l'anneau des séries formelles sur le corps K tel que $R_0 \neq 0$. Soit G , la fonction réciproque de F pour la compo-

8. (Comtet, 1970)

sition. Alors, pour tous $n > 0$ ⁹

$$[x^n]G = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} R^n \right]_{x=0}$$

Considérons le développement des séries binomiales :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (1+x)^\alpha \right]_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Nous ferons référence à cet exemple lorsque nous évaluerons les nombres de Catalan.

Exemple 3. Voici une illustration de l'utilisation de ce théorème. La solution en série de $G = x(1+G)^\alpha$ se calcule comme suit. Nous prenons le R -constructeur des arbres, soit $R(x) = (1+x)^\alpha$. Nous savons que

$$R = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Autrement dit, le coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme est le terme constant de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée divisé par $n!$. Nous avons donc :

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} (1+x)^{\alpha} \Big|_{x=0} = \frac{1}{n} \binom{n\alpha}{n-1}$$

qui nous permet de conclure avec le théorème d'inversion de Lagrange que

$$G(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{n\alpha}{n-1} x^n.$$

Dans le cas des arbres binaires qui sont isomorphes aux chemins de Dyck, nous avons $\alpha = 2$ qui nous donne :

$$G(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Nous allons voir un autre preuve du cas des chemins de Dyck dans le chapitre suivant.

9. Le lecteur intéressé au sujet est encouragé à lire le chapitre intitulé The combinatorics of formal power series de (Loehr, 2011). C'est élégant et riche.

1.4 Chemins

Afin de définir un chemin de Dyck formellement, il faut d'abord quelques définitions. Voici la définition d'une grille, que nous appelons un réseau, d'un chemin de réseau et finalement d'un chemin de taxi. Le chapitre suivant est dédié aux chemins de Dyck.

Soit $\Lambda = (V, E)$ un **réseau** qui modélise mathématiquement un espace discret dans le quart du plan combinatoire. Il y a deux ensembles qui forment un réseau : un ensemble $V \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de sommets et un ensemble $E \subset V \times V$ d'arêtes.

Nous nommerons les arêtes qui appartiennent à un chemin un pas du chemin, ou tout simplement un pas. Dans le contexte de ce mémoire, nous ne considérons que les réseaux euclidiens où l'ensemble des sommets est $V \subset \mathbb{Z}^2$. Ils sont périodiques et la distance traversée par chaque pas est une unité soit verticale soit horizontale.

Les pas sont définis par un ensemble de pas acceptables, $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$, **l'ensemble des pas admissibles**.

La direction *est* et la direction *nord* correspondront au sens horizontal et vertical de nos diagrammes ainsi que la première et la deuxième variable que nous étiquetons x et y par convention. Nous avons alors l'ensemble des pas admissibles $\mathcal{S} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Un chemin de réseau dans le réseau $\Lambda = (V, E)$ ayant l pas où le point de départ est $(0, 0) \in V$ et où le point d'arrivée est $x \in V$, est une suite $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_l)$ des éléments dans V , tels que :

1. $\omega_0 = (0, 0), \omega_l = x$,
2. $(\omega_i, \omega_{i+1}) \in E$,

$$3. \omega_{i+1} - \omega_i \in S = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Informellement, un chemin de réseau est une liste ordonnée des sommets de la trajectoire tel que le sommet ω_{i+1} peut suivre le sommet ω_i si (ω_i, ω_{i+1}) est une arête dans le réseau et $\omega_{i+1} - \omega_i$ est un pas admissible. Vu que nous employons un réseau très constant avec une période très régulière, il est simple de visualiser un tel chemin. La **longueur** $|\omega|$ du chemin est le nombre l de pas (arêtes) de la suite ω .

1.4.1 Chemins de taxi

Les ensembles de chemins de taxi nous permettrons de prouver le lemme 1 ainsi qu'une autre preuve formidable dans une annexe, soit le théorème 2, ma preuve préférée du texte.

Un **chemin de taxi** est une chemin de réseau dans le réseau $\Lambda = (V, E)$ où :

1. $V = \mathbb{N}^2$, et
2. $E = \{(v_1, v_2) | v_1, v_2 \in V, v_2 - v_1 = (1, 0) \text{ ou } (0, 1)\}$.

En plus, le point de départ est l'origine. L'ensemble des pas admissibles des chemins de taxi est $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Nous remarquons qu'un chemin de taxi peut aller jusqu'à l'infini vers l'est ou vers le nord mais qu'il ne recule jamais. Voir la figure 1.1 pour un exemple d'un chemin de taxi.

L'ensemble des chemins de taxi,¹⁰ $\mathcal{L}(a, b)$ est l'ensemble des chemins de réseau qui débutent à l'origine et se terminent en (a, b) dans le réseau $\Lambda = (V, E)$ où

1. $V = \{(i, j) | i \in [0, a], j \in [0, b]\}$, et

10. Cet ensemble peut faire référence à l'ensemble des diagrammes de Young qui rentrent dans un rectangle (a, b) . Il existe une bijection entre les deux ensembles. Voir (Stanley, 1999).

$$2. E = \{(v_1, v_2) | v_1, v_2 \in V, v_2 - v_1 = (1, 0) \text{ ou } (0, 1)\}.$$

1.4.2 Codage des chemins de taxi

Un chemin de taxi dans $\mathcal{L}(a, b)$ est une suite $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{a+b})$ où $\omega_0 = (0, 0)$, $\omega_{a+b} = (a, b)$ et $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Parfois, nous voulons faire référence à un chemin en particulier. Afin de le faire, nous allons étiqueter chaque chemin de taxi dans $\mathcal{L}(a, b)$ de deux façons.

La première technique est une suite de b numéros où le $i^{\text{ième}}$ numéro de la suite est la distance entre l'axe des y et le $i^{\text{ième}}$ pas vers le nord. Par exemple, le chemin dans la figure 1.1 est étiqueté $(1, 4, 4, 7, 7, 8)$. Pour tout chemin de taxi, les numéros d'une suite croissent.

La deuxième technique a besoin de la notion de mots. Soit A , un ensemble que nous appelons aussi alphabet. Un **mot** sur l'alphabet A est une suite $w = w_1 w_2 \cdots w_k$. La longueur de w est k . Deux mots $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ et $y = y_1 y_2 \cdots y_n$ sont dits égaux si et seulement si $m = n$ et $x_i = y_i$ pour tout $i \in [1, n]$.

Nous étiquetons un chemin de taxi dans $\mathcal{L}(a, b)$ par un mot ayant $a + b$ lettres de l'alphabet $A = \{N, E\}$. Nous remplaçons les pas vers le nord par N et les pas vers l'est par E . Alors, le chemin de la figure 1.1 est étiqueté par le mot *ENEEENNEEENNEN*.

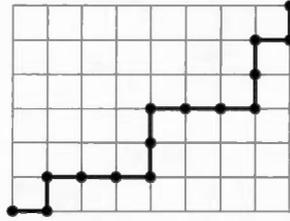


Figure 1.1: Voici un chemin de taxi dans $\mathcal{L}(8, 6)$. Nous l'étiquetons soit par la suite $(1,4,4,7,7,8)$ soit par le mot ENEEEENNEEENNEN.

1.4.3 Dénombrement des chemins de taxi

Lemme 1. (*Énumération des chemins de taxi*) Pour tout $a, b \geq 0 \in \mathbb{Z}$, le nombre de chemins de taxi de l'origine vers (a, b) est

$$|\mathcal{L}(a, b)| = \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a! \cdot b!}.$$

Démonstration. Nous nous souvenons qu'un chemin de taxi est une suite de sommets tel que la différence entre deux sommets de suite est un pas admissible. Une façon équivalente d'enregistrer un chemin est un mot où les lettres du mot sont les pas. Comme nous avons vu pour les chemins de Dyck, nous écrivons E et N à la place de $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement.

Vu que les chemins commencent à l'origine et se terminent en (a, b) , il faut que chaque chemin ait exactement a pas vers l'est et b pas vers le nord. Alors, nous avons le nombre de combinaisons de E et N est $\binom{a+b}{a}$. \square

1.4.4 Statistiques

Nous présentons les statistiques des inversions, des descentes et des index majeurs qui agissent sur les mots ayant des alphabets totalement ordonnés. Par la suite

nous verrons la statistique coaire ainsi qu'une bijection qui conserve la pondération.

Soit $w = w_1 \cdots w_n$ un mot tel que l'alphabet est totalement ordonné. Une **inversion** de w est une paire d'indices $i < j$ telles que $w_i > w_j$. Nous écrivons $\text{inv}(w)$ pour indiquer le nombre d'inversions de w ,

$$\text{inv}(w_1 \cdots w_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi(w_i > w_j), \text{ où}$$

$$\chi(w_i > w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i > w_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, un mot sur un alphabet totalement ordonné. Une **descente** est une indice des lettres tel que la lettre suivante diminue. L'**ensemble des descentes** de w , noté $\text{Des}(w)$, est le sous-ensemble des indices de lettres de w telles qu'elles sont des descentes :

$$\text{Des}(w) = \{i \in [n-1] \mid w_i > w_{i+1}\}.$$

Le **nombre de descentes**, noté $\text{des}(w)$ est égal à $\#\text{Des}(w)$. L'**index majeur** de w est la somme des indices qui sont une descente, c'est-à-dire que :

$$\text{des}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} \chi(w_i > w_{i+1}); \text{ et } \text{maj}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i \chi(w_i > w_{i+1}).$$

Si $\pi \in \mathcal{L}(a, b)$ est étiqueté par le mot w , alors on pose $\text{inv}(\pi) = \text{inv}(w)$ et $\text{maj}(\pi) = \text{maj}(w)$.

Nous considérons des bijections qui conservent la pondération des statistiques entre les domaines et les codomaines. Nous présentons quelques statistiques. Nous examinerons de façon plus détaillée l'aire d'un chemin dans le chapitre 3.

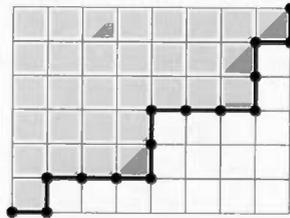
Une statistique que nous considérons sur l'ensemble des chemins de taxi de $(0, 0)$ vers (a, b) , la chaire soit $\pi \in \mathcal{L}(a, b)$, alors **coaire** (π) est le nombre de carrés dans

le rectangle défini par le réseau des entiers de l'origine au point (a, b) et au-dessus du chemin π .

Exemple 4. Voici un chemin de taxi $\pi \in \mathcal{L}(8, 6)$ où

$$\pi = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), \\ (5, 3), (6, 3), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (8, 5), (8, 6)\}.$$

Nous l'étiquetons soit par la suite $(1, 4, 4, 7, 7, 8)$ soit par le mot ENEEENNEEEN-NEN. Nous pouvons compter les carrés afin de calculer la coaire ou nous pouvons prendre la somme des entrées de la suite $(1, 4, 4, 7, 7, 8)$ et nous voyons que $\text{coaire}(\pi) = 1 + 4 + 4 + 7 + 7 + 8 = 31$. Sauf indication contraire, nous employons par défaut la notation $(1, 4, 4, 7, 7, 8)$ afin de faire référence au chemin π .



1.5 Conserver la pondération des ensembles par bijection

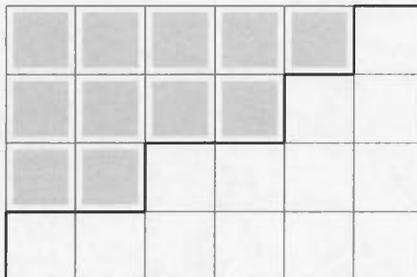
Considérons $\mathcal{R}(w_1^{a_1} w_2^{a_2} \dots w_n^{a_n})$, l'ensemble des réarrangements de a_i copies de la $i^{\text{ème}}$ lettre d'un alphabet totalement ordonné pour tout $i \in [n]$. Il est évident que $f : \mathcal{L}(a, b) \rightarrow \mathcal{R}(0^b 1^a)$ qui réétiquette les chemins de taxi par 0 et 1 au lieu de N et E respectivement, est une bijection.

Lemme 2. La bijection $f : \mathcal{L}(a, b) \rightarrow \mathcal{R}(0^a 1^b)$ conserve la pondération, c'est-à-dire que pour tout $\pi \in \mathcal{L}(a, b)$, nous avons :

$$\text{coaire}(\pi) = \text{inv}(f(\pi)).$$

Démonstration. Soit $\pi \in \mathcal{L}(a, b)$, étiqueté par $w \in \mathcal{R}(0^a 1^b)$. Vu qu'il n'y a que deux lettres, $\text{inv}(w)$ est la somme pour chaque lettre 0, du nombre de lettres 1 qui précèdent chaque 0. En revanche, nous voyons que le $i^{\text{ième}}$ 0 représente la $i^{\text{ième}}$ ligne du réseau du taxi. Aussi le déplacement du chemin vers l'est dans la $i^{\text{ième}}$ ligne est exactement le nombre de 1 qui précèdent le $i^{\text{ième}}$ 0. Alors, par définition, ces statistiques, $\text{coaire}(\pi)$ et $\text{inv}(f(\pi))$ sont égales. \square

Exemple 5. Voici un chemin $\pi = NEENEENE \in \mathcal{L}(6, 4)$. Nous calculons simplement que $w = f(\pi) = 0110110101 \in \mathcal{R}(0^4 1^6)$ et que $\text{coaire}(\pi) = 11 = \text{inv}(f(\pi))$.



Nous comptons $\text{coaire}(\pi) = 11$. Voici un tableau qui liste le nombre de carrés qui se trouvent dans chaque colonne suivi des nombres d'inversions qui correspondent à chaque lettre 0 de $f(\pi)$. Le nombre d'inversions incluant la lettre 0 est exactement le nombre de 1 qui précède la lettre 0 que nous sommes en train de considérer.

π	N	E	E	N	E	E	N	E	N	E	$\text{coaire}(\pi)$
	0			2			4		5		11
$f(\pi)$	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	$\text{inv}(f(\pi))$
	0			2			4		5		11

Lemme 3. Soit u , un mot sur un alphabet totalement ordonné de longueur $m \geq 2$, un entier positif tel que la dernière lettre est y . Soit z , une lettre quelconque. Alors, nous avons les propriétés suivantes :

1. si $y \leq z$, alors $\text{maj}(uz) = \text{maj}(u)$;
2. si $y > z$, alors $\text{maj}(uz) = \text{maj}(u) + m$;
3. finalement, $\text{inv}(uz) = \text{inv}(u) + n_{>z}(u)$ où $n_{>z}(u)$ est le nombre de lettres dans u , incluant la répétition des lettres, qui sont plus grandes que z .

Démonstration. Pour la partie 1, nous savons que $\text{maj}(uz)$ est la sommation des indices qui sont une descente. Puisque $y \leq z$, nous remarquons que uz et u ont le même ensemble de descentes, donc leurs sommations sont égales. Pour la partie 2 il s'agit du contraire. uz et u ont quasiment le même ensemble de descentes. La seule différence se trouve dans l'ensemble de descentes de uz qui contient un indice de plus, le dernier. La partie 2 va donc de soi. Il suffit de lire la partie 3 pour constater que c'est vrai. \square

Voici un lemme qui va nous permettre de prouver le q -analogue de la récurrence des nombre de Catalan, le lemme 10. De plus, nous utiliserons le lemme suivant afin de justifier la série génératrice des chemins de Dyck pondérés par la statistique d'index majeur, lemme 9. Par ailleurs, la preuve de ce lemme emploie une technique de preuve très commune et encore plus utile. Nous créons une bijection qui a l'air d'être arbitraire, mais qui en fin de compte nous fournira des résultats extraordinaires.

Lemme 4. ¹¹ Pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\sum_{w \in \mathcal{R}(0^{n_0} 1^{n_1} \dots s^{n_s})} q^{\text{maj}(w)} = \sum_{w \in \mathcal{R}(0^{n_0} 1^{n_1} \dots s^{n_s})} q^{\text{inv}(w)} = \begin{bmatrix} n_0 + n_1 + \dots + n_s \\ n_0, n_1, \dots, n_s \end{bmatrix}_q$$

11. (McMahon, 1983).

Démonstration. Voici une preuve du lemme basée sur les résultats de Dominique Foata. Soient $n = (n_0, n_1, \dots, n_s) \in \{\mathbb{N} \setminus \{0\}\}^{s+1}$ et $S = \mathcal{R}(0^{n_0} 1^{n_1} \dots s^{n_s})$. Nous construirons une bijection $f : (S, \text{maj}) \rightarrow (S, \text{inv})$ qui préserve la pondération, c'est-à-dire que pour tout $w \in S$, nous avons $\text{inv}(g(w)) = \text{maj}(w)$.

Soit W , l'ensemble de mots sur l'alphabet totalement ordonné $\{0, 1, 2, \dots, s\}$. Nous définissons une fonction $g : W \rightarrow W$, ayant les quatre propriétés suivantes :

1. g est une bijection ;
2. pour tout $w \in W$, w et $g(w)$ sont anagrammes ;
3. si w n'est pas le mot vide, alors la dernière lettre de w et de $g(w)$ sont les mêmes lettres ;
4. pour tout $w \in W$, nous avons $\text{inv}(g(w)) = \text{maj}(w)$.

Une fois que nous savons que w et $g(w)$ sont des anagrammes pour tout $w \in W$, nous pouvons conclure que si $w \in S$ alors $g(w) \in S$ vu que g est une fonction de classe. Cela nous permet de restreindre la fonction g à la classe des anagrammes de $\{(0^{n_0} 1^{n_1} \dots s^{n_s})\}$ afin de définir la fonction f . Ensuite, nous démontrerons que f préserve la pondération de la bijection.

Voici comment définir g par récurrence sur la longueur des mots du codomaine. Si la longueur de w est 0 ou 1, alors $g(w) = w$. Évidemment il faut que les quatre conditions soient vraies. Si $|w| \geq 2$, nous écrivons $w = w'yz$, où $w' \in W$ et où y, z sont les deux dernières lettres du mot w . Par récurrence, nous supposons que $g(w'y) = u$ existe, que $\text{inv}(u) = \text{maj}(w'y)$ et que u et $w'y$ sont des anagrammes où la dernière lettre de u est y . Nous définissons $g(w) = g(w'yz) = h_z(w'y)z = h_z(u)z$ où $h_z : W \rightarrow W$ est une fonction que nous définissons de la manière suivante.

Tout d'abord nous considérons le cas trivial où h_z renvoie le mot vide vers lui-même. Dans les deux cas non-trivial, soit u , un mot non-vide. Les voici :

Cas 1 : $y \leq z$. Dans ce cas-ci, nous allons diviser u dans une séquence de listes de lettres telle que chaque liste ne contient qu'une lettre plus petite ou égale à z et que cette lettre se trouve à la fin de la liste. Par exemple, si $u = 1342434453552$ et $z = 3$, alors nous aurons la décomposition de u en liste :

$$u = [1][3][4, 2][4, 3][4, 4, 5, 3][5, 5, 2].$$

h_z change l'ordre de chaque liste en déplaçant chaque élément d'une place vers la droite cycliquement. En continuant cet exemple, nous voyons que :

$$h_3(u) = [1][3][2, 4][3, 4][3, 4, 4, 5][2, 5, 5].$$

Nous devons nous demander quelles sont les conséquences de cette procédure sur $\text{inv}(u)$. Il est évident que chaque liste ne contient qu'un élément minimal à la dernière position. Quand nous le déplaçons en première position, le nombre d'inversions diminue par le nombre d'entrées qui sont plus grand que z dans cette liste. En sommant toutes les listes, nous remarquons que le mot u diminue par le nombre de lettres plus grandes que z dans le mot, c'est-à-dire que :

$$\text{inv}(h_z(u)) = \text{inv}(u) - n_{>z}(u). \quad (1.2)$$

Il est maintenant clair que la fonction h_z respecte les parties (2) et (3).

Cas 2 : $y > z$. Encore une fois, nous divisons les mots en une série de listes telle que chaque liste se termine par une lettre $> z$ et que la liste n'a qu'une lettre plus grande que z . Par exemple, prenons $z = 3$ ainsi que le mot $u = 134243445355$. Alors, la décomposition de u en liste serait la suivante :

$$u = [1, 3, 4][2, 4][3, 4][4][5][3, 5][5].$$

De la même manière que nous le faisons dans le cas 1, nous poussons cycliquement les lettres de chaque liste d'une position vers la droite. Dans notre exemple, nous trouvons le mot suivant :

$$h_3(u) = [4, 1, 3][4, 2][4, 3][4][5][5, 3][5].$$

Dans ce cas-ci, les dernières lettres de toutes les listes de u sont $> z$ et, en plus, elles sont plus grandes que toutes les autres lettres de la même liste. Le déplacement cyclique de chaque liste augmente donc le nombre d'inversions par le nombre de lettres $\leq z$ dans la liste. Quand nous considérons le mot, il faut faire la sommation des listes et alors, nous voyons que dans le deuxième cas nous obtenons :

$$\text{inv}(h_z(u)) = \text{inv}(u) + n_{\leq z}(u). \quad (1.3)$$

Il est important de remarquer que dans le premier cas, la première lettre de $h_z(u)$ est toujours $\leq z$. Par contre, dans le deuxième cas, la première lettre de $h_z(u)$ est toujours $> z$. C'est de cette façon que nous définirons les fonctions réciproques. Afin de calculer l'inverse, la première lettre indique dans quel cas nous nous trouvons. S'il s'agit du cas 1, nous divisons le mot en une série de listes qui commence par une lettre $\leq z$ et qui ne contient qu'une telle lettre. Nous déplaçons cycliquement toutes les lettres d'une position vers la gauche. S'il s'agit du cas 2, nous divisons le mot en une série de listes qui commence par une lettre $> z$ et qui ne contient qu'une telle lettre. Encore une fois, nous déplaçons cycliquement les lettres de chaque liste d'une position vers la gauche. Vu qu'il y a une fonction réciproque, il est clair que h_z est une bijection.

Nous voulons que h_z respecte les quatre conditions mentionnées précédemment. Nous venons de voir que les conditions de (1), (2) et (3) sont vraies. Il nous reste à démontrer que la condition finale est vraie, c'est-à-dire que $\text{inv}(u) = \text{maj}(w'y)$. Nous savons déjà que $g(w) = g(w'yz) = h_z(u)z$ où $u = g(w'y)$. Afin de démontrer la dernière condition, nous verrons que $\text{inv}(g(w)) = \text{inv}(h_z(u)z) = \text{maj}(w)$ en considérant les deux cas. Supposons que $y \leq z$, avec l'hypothèse de récurrence nous avons :

$$\text{maj}(w) = \text{maj}(w'yz) = \text{maj}(w'y) = \text{inv}(g(w'y)) = \text{inv}(u).$$

De plus, avec le lemme 3 et l'équation 1.2 nous avons :

$$\text{inv}(h_z(u)z) = \text{inv}(h_z(u)) + n_{>z}(h_z(u)) = \text{inv}(u) - n_{>z}(u) + n_{>z}(u) = \text{inv}(u)$$

Nous remarquons que $n_{>z}(h_z(u)) = n_{>z}(u)$ vu que $h_z(u)$ et u sont des anagrammes. Dans le deuxième cas, où $y > z$, nous avons :

$$\text{maj}(w) = \text{maj}(w'yz) = \text{maj}(w'y) + n - 1 = \text{inv}(u) + n - 1.$$

Ensemble, nous savons que le lemme 3 et l'équation Équation 1.3 avec le fait que u contient exactement $n - 1$ lettres nous donnent :

$$\text{inv}(h_z(u)) = \text{inv}(h_z(u)) + n_{>z}(h_z(u)) = \text{inv}(u) + n_{\leq z}(u) + n_{>z}(u) = \text{inv}(u) + n - 1$$

Nous venons de voir que h_z est une bijection, il nous reste donc à vérifier que g est également une bijection. Voici comment fonctionne la fonction réciproque g^{-1} de g des deux cotés. Pour le mot vide et les mots d'une lettre, g^{-1} est l'identité. Dans le cas où l'argument se compose d'au moins deux lettres, nous définissons $g^{-1}(uz) = (g^{-1}(u'))z$ où $u' = h_z^{-1}(u)$. Nous répétons cette procédure jusqu'au moment où l'argument devient le mot vide. \square

Exemple 6. Voici le calcul complet de $g(w)$ et $g^{-1}(w)$ du lemme ci-dessus :

$g(w)$		Mot Actuel :
		2, 1, 3, 3, 1, 3, 2, 2
$h_1(2)$	= 2	2, 1, 3, 3, 1, 3, 2, 2
$h_3(2, 1)$	= 2, 1	2, 1, 3, 3, 1, 3, 2, 2
$h_3(2, 1, 3)$	= 2, 1, 3	2, 1, 3, 3, 1, 3, 2, 2
$h_1(2, 1, 3, 3)$	= 2, 3, 1, 3	2, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 2
$h_3(2, 3, 1, 3, 1)$	= 2, 3, 1, 3, 1	2, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 2
$h_2(2, 3, 1, 3, 1, 3)$	= 3, 2, 3, 1, 3, 1	3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 2
$h_2(3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$	= 2, 3, 1, 3, 1, 3, 2	2, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 2

$g^{-1}(w)$		<i>Mot Actuel :</i>
		2, 1, 3, 3, 1, 3, 2, 2
$h_2^{-1}(2, 1, 3, 3, 1, 3, 2)$	$= 2, 3, 3, 1, 3, 1, 2$	2, 3, 3, 1, 3, 1, 2, 2
$h_2^{-1}(2, 3, 3, 1, 3, 1)$	$= 3, 3, 2, 3, 1, 1$	3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 2
$h_1^{-1}(3, 3, 2, 3, 1)$	$= 3, 3, 2, 1, 3$	3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2
$h_3^{-1}(3, 3, 2, 1)$	$= 3, 3, 2, 1$	3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2
$h_1^{-1}(3, 3, 2)$	$= 3, 3, 2$	3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2
$h_2^{-1}(3, 3)$	$= 3, 3$	3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2
$h_3^{-1}(3)$	$= 3$	3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2

1.6 q -analogues

Dans cette section, nous présentons les idées générales des q -analogues sans l'encadrement des chemins suivis du cas des chemins de taxi. Un q -analogue nous permet de mieux comprendre une statistique pertinente. En examinant cette statistique, nous exposons les détails autrement inconnus. Dans la combinatoire, nous enregistrons énormément de renseignements dans un nombre. Nous verrons que les récurrences fortement reliées aux chemins de Dyck sont toujours respectées par les statistiques. Par la suite, nous verrons un exemple d'un q -analogue qui respecte certaines propriétés des objets mais pas toutes.

Un q -analogue¹² d'une série, d'un nombre ou d'une formule est une expression en terme de q qui enregistre une statistique reliée à la série, au chiffre ou à la formule respectivement. L'expression évaluée à $q = 1$ devrait retourner aux renseignements originaux. De plus, nous exigeons que les caractères algébriques soient toujours respectés.

Voici quelques q -analogues de notions fondamentales. Il n'existe pas qu'un q -

12. (Haglund, 2008)

analogue universel pour toutes notions en mathématiques. Par contre, nous observons qu'il y a quelques formules qui se manifestent en plusieurs champs de mathématiques diverses. Il est donc normal de présenter ces notions.

Pour commencer, nous présentons les q -analogues des nombres, des factoriels, des formules du binôme de Newton, ainsi que des coefficients du binôme de Gauss.

Pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons le **q -analogue du nombre entier**¹³ n , noté $[n]_q$ qui est égal à la somme des puissances de q de 0 jusqu'à $n - 1$. Alors,

$$[n]_q := \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Le **q -analogue de la factorielle** de n est le produit auquel nous sommes habitués en remplaçant les numéros par les q -analogues de ceux-ci :

$$[n]!_q := \prod_{i=1}^n [i]_q = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^i}{1 - q}.$$

Nous définissons également les **coefficients binomiaux en q** de la même façon que les analogues des factorielles en q , c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]!_q}{[n-k]!_q [k]!_q} = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q^k)(1 - q^{k-1}) \cdots (1 - q)}.$$

Il est important de remarquer que les trois définitions précédentes nous renvoient vers les définitions originales quand $q = 1$. Il faut noter aussi que les coefficients binomiaux en q sont des polynôme dont tous les coefficients sont des entiers. Cela n'est pas de toute évidence mais peut être démontré, soit algébriquement par récurrence ou soit combinatoirement en énumérant les éléments d'un même ensemble de deux façons différentes.

13. (Wagner, 2008)

1.6.1 q -énumération des chemins de taxi

La proposition suivante démontre la puissance du q -analogue. Nous verrons quelques preuves qui sont plutôt simples à comprendre grâce à ces techniques, mais qui étaient extrêmement compliquées auparavant.

Proposition 1. Coefficients q -binomiaux.¹⁴ Soit $a, b \geq 0$, des entiers fixés. Soit $\pi \in \mathcal{L}(a, b)$. Soit $\mathcal{L}(a, b)_{\text{coaire}}(q)$ la série génératrice de tels chemins munie de la fonction de poids coaire. Nous avons :

$$\mathcal{L}(a, b)_{\text{coaire}}(q) := \sum_{\pi \in \mathcal{L}(a, b)} q^{\text{coaire}(\pi)} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q := \frac{[a+b]_q!}{[a]_q! \cdot [b]_q!}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $n = a + b$ pour tout $a, b \in \mathbb{N}$. Soit $g(a, b) = \mathcal{L}(a, b)_{\text{coaire}}(q)$. *Cas de Base ($n=2$) :* Nous avons trois possibilités : $(a, b) \in \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$.

(a, b)	Chemin, π	coaire(π)	$q^{\text{coaire}(\pi)}$
(2, 0)		0	1
(1, 1)		0	1
(1, 1)		1	q
(0, 2)		0	1

Nous avons donc $g(2, 0) = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q$, $g(1, 1) = 1 + q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q$ et finalement $g(0, 2) = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q$. *Hypothèse de récurrence :* Supposons que l'énoncé soit vrai pour tout $a + b \leq n - 1$.

Conclusion : Nous tenons à ce que $g(a, b) = q^a g(a, b - 1) + g(a - 1, b)$. Voici la justification : $\mathcal{L}(a, b)$ est l'ensemble des chemins de taxi de $(0, 0)$ vers (a, b) . Nous

14. (Stanley, 1999).

pouvons diviser cet ensemble en deux parties disjointes ; L_E et L_N où L_E et L_N sont les ensembles des chemins de taxi de $(0, 0)$ vers (a, b) tels que les derniers pas sont vers l'est et vers le nord respectivement. Un chemin n'a qu'un seul dernier pas. Il est donc évident que l'intersection est vide.

Il y a une bijection entre les ensembles L_E et $\mathcal{L}(a-1, b)$. Pour tout $\pi \in L_E$, nous effaçons le dernier pas pour obtenir $\pi' \in \mathcal{L}(a-1, b)$. De plus, $\text{coaire}(\pi) = \text{coaire}(\pi')$.¹⁵ Parallèlement, nous avons une bijection entre les ensembles L_N et $\mathcal{L}(a, b-1)$. Pour tout $\sigma \in L_N$, nous effaçons le dernier pas afin de trouver $\sigma' \in \mathcal{L}(a, b-1)$. Par contre, nous voyons que $\text{coaire}(\sigma) = \text{coaire}(\sigma') + a$. Nous pouvons donc confirmer la formule suivante :

$$g(a, b) = q^a g(a, b-1) + g(a-1, b).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et les manipulations algébriques, nous voyons que :

$$g(a, b) = q^a \begin{bmatrix} a+b-1 \\ a \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} a-1+b \\ a-1 \end{bmatrix}_q = q^a \frac{[a+b-1]!_q}{[a]!_q [b-1]!_q} + \frac{[a-1+b]!_q}{[a-1]!_q [b]!_q}$$

Afin d'additionner deux fractions, il faut un dénominateur commun. Nous voyons aussi que $q^a [b]_q + [a]_q$ est égal à $q^a(1+q+\dots+q^{b-1}) + 1+q+\dots+q^{a-1}$ qui est tout simplement $[a+b]_q$. Alors, nous avons

$$= \frac{[a+b-1]!_q (q^a [b]_q + [a]_q)}{[a]!_q [b]!_q} = \frac{[a+b-1]!_q ([a+b]_q)}{[a]!_q [b]!_q} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q$$

qui est la définition des coefficients q -binomiaux. □

15. Nous disons qu'une telle bijection préserve le poids.

1.6.2 Enumération de sous-espaces vectoriels de dimension k de

$$\mathbb{F}_q^n$$

Voici le plus beau théorème du texte. Nous appliquons la même technique de preuve en comptant un ensemble relié au nôtre de deux façons différentes.

Théorème 2. Grassmannienne. *Soient q , la puissance d'un nombre premier et \mathbb{F}_q , le corps fini¹⁶ avec q éléments. Le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{F}_q^n , noté $G(n, k)$ est égal à $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.¹⁷*

Démonstration. (Stanley, 1999) Soit $N = N(n, k)$, le nombre de k -tuples ordonnés (v_1, v_2, \dots, v_k) des vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{F}_q^n . Nous pouvons choisir v_1 de $q^n - 1$ façons vu que nous n'acceptons pas le vecteur nul. De ce fait, nous pouvons choisir v_2 parmi $q^n - q$ vecteurs étant donné que nous n'acceptons pas $q_0 \cdot v_1$ pour tout $q_0 \in \mathbb{F}$ incluant le vecteur nul. Nous répétons cet argument k fois au total pour nous donner :

$$N = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}).$$

En revanche, nous pouvons en premier lieu choisir un sous espace W de \mathbb{F}_q^n tel que $\dim(W) = k$. Il y a ainsi $G(n, k)$ sous-espaces vectoriels. Ensuite, nous choisissons k vecteurs linéairement indépendants dans W . Nous sélectionnons v_1 parmi $q^k - 1$ dans W , v_2 parmi $q^k - q$ avec le même argument qu'avant et ainsi de suite. Alors, nous avons :

$$N = G(n, k)(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})$$

16. Un corps $(\mathbb{F}, +, \times)$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et \times tel que $(\mathbb{F}, +)$ et $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens. Nous avons aussi la distributivité.

17. (Stanley, 1999)

En comparant ces deux expressions et en isolant la variable désirée, nous obtenons la formule suivante :

$$G(n, k) = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}$$

qui nous donne la définition du résultat de l'énoncé lorsque nous remarquons que le dénominateur et le numérateur contiennent la même puissance de q . Il est intéressant de remarquer que la puissance de q dans le numérateur et le dénominateur est $q^{\binom{k}{2}}$. Alors,

$$G(n, k) = \frac{[n]!_q}{[k]!_q [n-k]!_q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

□

La preuve que nous venons de voir nous démontre que \mathbb{F}_q^n est un bon q -analogue de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ et qu'un sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{F}_q^n est un bon q -analogue d'un sous-ensemble avec k éléments de $[n]$.

1.6.3 La formule du q -binôme de Newton

Le lemme suivant s'appelle *la formule du binôme de Newton en q* vu que nous retrouvons la formule du binôme de Newton quand nous évaluons la formule en $q = 1$. Il est possible de démontrer ce lemme par récurrence sur n . Or, il y a une preuve plus combinatoire que nous aimerions présenter. Elle emploie la technique des corps finis que nous avons utilisé afin de prouver le lemme précédent.

Lemme 5. *La formule du q -binôme de Newton.*¹⁸ *Nous avons le q -analogue de la formule du binôme de Newton suivant :*

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + q^i t) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k$$

18. (Stanley, 1999)

Démonstration. Soient q , une puissance d'un nombre premier, \mathbb{F}_q , le corps fini ayant q éléments et \mathbb{F}_q^n , l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_q de dimension n . Nous procédons en nous demandant ce qu'est le coefficient du terme t^k .

Pour chaque facteur $(1 + q^i t)$ du côté gauche, nous choisissons soit 1, soit $q^i t$. Si nous choisissons ce dernier, nous prenons un vecteur ligne $\gamma^i \in \mathbb{F}_q^n$ tel que le premier élément du vecteur non-nul est 1 et qu'il se trouve dans la position $n - i$. Nous savons que le vecteur γ^i se compose de $n - i - 1$ éléments nuls suivis d'un élément 1 suivi de i éléments en \mathbb{F}_q . Nous choisissons donc γ^i parmi q^i choix.

Soit $V = \langle \gamma^i \text{ pour tout } i \in [n] \rangle$. Si nous avons choisi k vecteurs lignes, la dimension de V est égal à k . Soit M , une matrice $k \times n$ telle que les lignes de M sont les γ^i dans l'ordre décroissant d' i . Nous voyons que M est une matrice triangulaire supérieur.

Nous voulons évaluer le coefficient du terme x^k . Nous ne considérons que le cas où nous avons choisi le terme $q^i t$ du facteur $(1 + q^i t)$ exactement k fois. Remarquons que le nombre de choix de γ^i est égal au coefficient de t , précisément q^i . Après avoir choisi k facteurs parmi le produit du côté gauche, par exemple $q^{i_1} \cdot q^{i_2} \cdot \dots \cdot q^{i_k} \cdot t^k$, il y a exactement $q^{i_1} \cdot q^{i_2} \cdot \dots \cdot q^{i_k}$ choix pour M , qui est égal au coefficient du produit après avoir choisi les k facteurs parmi un produit de n facteurs.

Nous obtenons la matrice en sa forme échelonnée réduite en remplaçant toutes les entrées au-dessus des pivots par des zéros. Nous venons de changer $\binom{k}{2}$ éléments de la matrice M à 0. Alors, nous obtenons toutes les matrices en forme échelonnée réduite $q^{\binom{k}{2}}$ fois. Selon le Théorème 2, nous savons qu'il y a exactement $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ façons de choisir un sous-espace vectoriel de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n .

Il y a donc exactement $q^{\binom{k}{2}} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ façon de choisir la matrice M qui est le coefficient

de t^k . Nous avons :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + q^i t) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{n}{k}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k.$$

□

1.6.4 q -énumération de S_n

Une permutation, ω de l'ensemble $[n]$ peut être considérée en tant qu'automorphisme de $[n]$. Nous remarquons que la structure des ensembles est toujours préservée par les bijections. Nous ne nous en occupons donc pas.

Si nous considérons une permutation ω en tant qu'automorphisme $\omega : [n] \rightarrow [n]$, nous nous permettons de construire le q -analogue d'une permutation en tant qu'automorphisme, A , de \mathbb{F}_q^n , le q -analogue de la permutation de l'ensemble $[n]$. Alors, $A : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, un automorphisme, est un q -analogue de ω qui préserve la structure de \mathbb{F}_q^n en tant qu'espace vectoriel. Nous pouvons donc conclure que A est une transformation linéaire inversible de \mathbb{F}_q^n .

L'ensemble de ces transformations est le groupe général linéaire de degré n sur le corps \mathbb{F}_q , noté $GL(n, q)$. Alors, $GL(n, q)$ est un q -analogue du groupe symétrique S_n .

Nous analysons deux propriétés du groupe symétrique, le nombre de permutations ainsi que la distribution des permutations parmi les classes de conjugaisons. Nous allons voir que $GL(n, q)$ n'est pas un bon q -analogue quand nous considérons la distribution des permutations parmi les classes de conjugaison.

La preuve suivante répète l'argument du Théorème 2. L'égalité entre les deux formules est évidente en rassemblant les facteurs de q et en se souvenant de la définition du q -analogue des factoriels. Il est intéressant de remarquer que le facteur $q^{\binom{n}{2}}$ se retrouve ailleurs aussi.

Lemme 6. ¹⁹ Nous avons :

$$\#GL(n, q) = (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) = q^{\binom{n}{2}} (q - 1)^n [n]_q!$$

Démonstration. Considérant $A \in GL(n, q)$ en tant que matrice n par n . Il faut qu'une matrice n par n quelconque inversible ait n lignes linéairement indépendantes. Il y a donc $q^n - 1$ choix de la première ligne vu que tous les éléments de \mathbb{F}_q^n non-nul fonctionnent. Il y a exactement q vecteurs dans \mathbb{F}_q^n qui sont linéairement dépendants de la première ligne. Afin de choisir une $i^{\text{ième}}$ ligne linéairement indépendante de celles qui ont déjà été choisies, il faut éviter toutes combinaisons linéaires des premières $i - 1$ lignes. Cela nous laisse $q^n - q^{i-1}$ options. Donc, nous répétons cet argument pour les n lignes et nous trouvons l'équation désirée. \square

1.6.5 q -énumération des classes de conjugaison

Maintenant, nous considérons les classes de conjugaisons qui sont plus compliquées. Deux éléments $u, v \in S_n$ se trouvent dans la même classe de conjugaison si et seulement s'il existe un élément $w \in S_n$ telle que $u = wvw^{-1}$, c'est-à-dire qu'ils ont le même type de cycle ou qu'ils se trouvent dans la même orbite. Alors, la classe de conjugaison d'un élément de $GL(n, q)$ est un bon q -analogue pour le type de cycle de $GL(n, q)$. Nous considérons l'ensemble de toutes les matrices n par n sur le corps \mathbb{F}_q^n , noté $\text{Mat}(n, q)$ ²⁰. Après, nous raffinons notre travail en ne considérant que les matrices inversibles, l'ensemble des matrices \mathbb{F}_q .

Nous avons besoin des idées de la théorie de l'action adjointe ²¹ de $GL(n, q)$ sur

19. (Stanley, 1999).

20. En fait, c'est une algèbre sur \mathbb{F}_q de dimension n^2 .

21. L'action adjointe est équivalente à la représentation adjointe qui est fortement reliée aux

$\text{Mat}(n, q)$. Nous ferons nos évaluations dans le contexte des algèbres commutatives. Voici les concepts ce qu'il faut.

Il n'est pas nécessaire de travailler sur un corps fini. Nous commençons par un corps quelconque. Soient K , un corps quelconque et $V = K^n$, un espace vectoriel sur K . Soit $K[U]$, l'ensemble des polynômes en l'indéterminée U avec les coefficients dans K .

Soit R , un anneau principal, mais pas un corps. Deux éléments $x, y \in R$ sont équivalents si $xR = yR$, c'est-à-dire, s'il existe $e \in R$ un élément inversible de R tel que $y = ex$. Soit P , un ensemble maximal d'éléments non-équivalents et irréductibles de R .

Le théorème des facteurs invariants nous dit que si M est un module de type fini sur R , alors M est isomorphe à une somme directe finie de copies de R et $R/x^i R$, où $x \in P$ et $i \geq 1$. De plus, les termes de la somme directe sont uniques à l'ordre près. Alors, il existe un entier $k \geq 0$ unique ainsi que pour tout $x \in P$ il existe une partition²² $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots)$ unique telle que

$$M \cong R^k \oplus \bigoplus_{x \in P} \bigoplus_{i \geq 1} R/x^i R.$$

Si M a une longueur finie d ²³, alors $k = 0$.

$K[U]$ est un anneau principal. Prenons $R = K[U]$. Soit $I(K)$, l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $K[U]$. Soit Par , l'ensemble des partitions de

groupes Lie. Nous ne présentons pas les définitions de ce domaine des mathématiques. Nous appuierons notre travail sur un théorème très puissant et classique sans preuve dans ce mémoire.

22. Une partition d'un entier n est une façon de décrire n en tant que somme d'autres entiers positifs. La partition peut être vide.

23. C'est-à-dire que pour toutes chaînes propres $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_j$ de sous-modules de M , alors $j \leq d$.

tous les nombres positifs. Soit $M \in \text{Mat}(n, K)$. M définit une structure de $K[U]$ -module sur V , notée $K[M]$, tel que pour tout $v \in V$ et $f(U) \in K[U]$ nous avons :

$$f(U) \cdot v := f(M) \cdot v.$$

Vu que $K[M]$ a une longueur finie, en tant que $K[U]$ -module, nous obtenons l'isomorphisme suivant :

$$K[M] \cong \bigoplus_{f \in I(K)} \bigoplus_{i \geq 1} K[U] / (f(U)^{i_i(f)})$$

Nous savons que l'ensemble $I(K)$ est maximal et irréductible. Afin de confirmer que les éléments de l'ensemble soient aussi non-équivalents, il suffit de remarquer que les seuls éléments inversibles dans $K[U]$ sont les constantes et que les polynômes de $I(K)$ sont unitaires non-constants. Alors si $I(K)$ contient deux éléments équivalents, ils sont égaux.

Maintenant, $GL(n, K)$ agit sur $\text{Mat}(n, K)$ par conjugaison, c'est-à-dire pour $A \in GL(n, K)$ et $M \in \text{Mat}(n, K)$, alors, $A \cdot M = AMA^{-1}$.²⁴ Deux matrices $M, N \in \text{Mat}(n, K)$ se trouvent dans la même orbite de cette action si et seulement si $K[M]$ et $K[N]$ sont isomorphes en tant que $K[U]$ modules vu que :

$$N = AMA^{-1} \iff NA = AM \iff K[M] \simeq K[N].$$

Soit $\Phi_M : I(K) \rightarrow \text{Par}$. Nous pouvons conclure que :

$$\sum_{f \in I(K)} |\Phi_M(f)| \cdot \deg(f) = n$$

24. Cette action s'appelle l'action adjointe de $GL(n, K)$.

car

$$\begin{aligned}
n = \dim(K[M]) &= \dim \left(\bigoplus_{f \in I(K)} \bigoplus_{i \geq 1} K[U]/(f(U)^{\lambda_i(f)}) \right) \\
&= \sum_{f \in I(K)} \sum_{i \geq 1} \dim \left(K[U]/(f(U)^{\lambda_i(f)}) \right) \\
&= \sum_{f \in I(K)} \sum_{i \geq 1} \deg \left(f(U)^{\lambda_i(f)} \right) \\
&= \sum_{f \in I(K)} \sum_{i \geq 1} \deg(f) \cdot \lambda_i(f) \\
&= \sum_{f \in I(K)} \deg(f) \cdot \sum_{i \geq 1} \lambda_i(f) \\
&= \sum_{f \in I(K)} \deg(f) \cdot |\lambda(f)| \\
&= \sum_{f \in I(K)} \deg(f) \cdot |\Phi_M(f)|
\end{aligned}$$

Nous appelons Φ_M le type d'orbite de M . Ceci est le q -analogue de $\text{Mat}(n, K)$ pour les types de cycle d'une permutation $w \in S_n$.

Nous restreignons le corps K à \mathbb{F}_q . Nous pouvons énumérer le nombre d'orbites en faisant agir $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ sur $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$ par l'action adjointe. Afin de le faire, il nous faut la fonction $\beta(n, q)$ qui compte le nombre de polynômes unitaires irréductibles, $f(z)$, de degré n sur \mathbb{F}_q .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, nous pouvons construire un sous-corps $\mathbb{F}_q(\alpha)$. L'ordre de $\mathbb{F}_q(\alpha)$ est q^d où d est un entier positif non nul tel que $d|n$. Nous pouvons donc conclure qu'il existe un polynôme unitaire irréductible, f_α , de degré d sur \mathbb{F}_q qui est unique telle que $f_\alpha(\alpha) = 0$. Une telle fonction a d racines distinctes de \mathbb{F}_{q^n} vu qu'elle est

irréductible. Alors, $q^n = \sum_{d|n} d \cdot \beta(d, q)$. Par l'inversion de Möbius²⁵, nous avons :

$$n\beta(n, q) = \sum_{d|n} \mu(n/d)q^d = \sum_{d|n} \mu(d)q^{n/d}.$$

Ce résultat nous permet de compter les orbites et finalement voir quel est le bon q -analogue de S_n qui respecte les classes de conjugaison.

Proposition 2. Soit $\omega(n, q)$ le nombre de fonctions distinctes $\Phi : I(\mathbb{F}_q) \rightarrow \text{Par}$ qui respecte $\sum_{f \in I(\mathbb{F}_q)} |\Phi_M(f)| \cdot \deg(f) = n$, c'est-à-dire le nombre d'orbites de l'action adjointe de $GL(n, q)$ sur $\text{Mat}(n, q)$. Alors

$$\omega(n, q) = \sum_j p_j(n)q^j,$$

où $p_j(n)$ est le nombre de partitions de n en j parties. Autrement dit,

$$\sum_{n \geq 0} \omega(n, q)x^n = \prod_{j \geq 1} (1 - qx^j)^{-1}.$$

Démonstration. Nous cherchons le nombre des fonctions $\Phi : I(\mathbb{F}_q) \rightarrow \text{Par}$ distinctes. Nous avons qu'elles satisfont l'équation suivante :

$$n = \sum_{f \in I(\mathbb{F}_q)} |\Phi_M(f)| \cdot \deg(f).$$

La somme des parties du partage, $\Phi(f)$, est égal à la somme de toutes les valeurs possibles des parties fois le nombre de fois que chaque valeur apparaît. Alors, nous obtenons :

$$n = \sum_{f \in I(\mathbb{F}_q)} \sum_{i \geq 1} i \cdot m_i(\Phi(f)) \cdot \deg(f).$$

Le degré d'une fonction fois un nombre est équivalent au degré de la fonction à la puissance de ce même nombre. Alors, nous avons :

$$n = \sum_{f \in I(\mathbb{F}_q)} \sum_{i \geq 1} i \cdot \deg(f^{m_i(\Phi(f))}).$$

25. Si f et g sont des fonctions telles que pour tout n entier positif non-zéro, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, alors pour tout n , $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d)$ où μ est la fonction de Möbius.

Maintenant, si nous changeons l'ordre des sommations, nous pouvons retirer le i de la sommation à l'intérieur. De plus, nous savons que la somme des degrés des polynômes est égale au degré du produit de ces mêmes polynômes. Nous concluons que :

$$n = \sum_{i \geq 1} i \cdot \deg \left(\prod_{f \in I(\mathbb{F}_q)} f^{m_i(\Phi(f))} \right).$$

Nous voyons bel et bien la définition de p_i . Nous faisons la substitution pour voir la relation suivante. Nous savons aussi que les polynômes p_i sont arbitraires et unitaires puisque le produit des polynômes unitaires est aussi unitaire. Voici la relation désirée :

$$n = \sum_{i \geq 1} i \cdot \deg(p_i).$$

Maintenant nous pouvons compter les fonctions Φ telles que la contrainte ci-dessus est respectée. Soit $\lambda = \langle 1^{d_1}, 2^{d_2}, \dots \rangle \vdash n$, nous choisirons des fonctions arbitrairement telles que $\deg(p_i) = d_i$ et que p_i est unitaire avec les coefficients dans \mathbb{F}_q , c'est-à-dire, nous choisissons d_i coefficients parmi q éléments du corps. Nous avons donc exactement q^{d_i} choix pour p_i . Cela donne $q^{\sum d_i} = q^{\sum \ell(\lambda)}$, alors :

$$w(n, q) = \sum_{\lambda \vdash n} q^{\ell(\lambda)} = \sum_j p_j(n) q^j.$$

Afin de calculer la fonction génératrice, nous considérons les partages pondérés par le nombre de parties.

$$\sum_{n \geq 0} w(n, q) x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} p_j(n) q^j x^n$$

Pour toutes les valeurs possibles d'une partie λ_i , nous nous demandons combien de fois la valeur d_i apparaît. Sans contrainte sur n , nous voyons que cette valeur peut être n'importe quel entier positif. Alors, pour chaque partie, nous choisissons une multiplicité. Par exemple, $\langle \dots, \lambda_i^{d_i}, \dots \rangle$ nous donne le terme $q^{d_i} x^{\lambda_i \cdot d_i}$. Il faut

répéter cette procédure pour toutes les parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 &= (1 + qx + q^2x^2 + \dots)(1 + qx^2 + q^2x^4 + \dots)(1 + qx^3 + q^2x^6 + q^3x^9 + \dots) \dots \\
 &= \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} q^n x^{jn} \right) = \prod_{j \geq 1} (1 - qx^j)^{-1}
 \end{aligned}$$

□

Nous voyons un bon q -analogue où $w(n, 1) = p(n)$ le nombre des classes de conjugaison.

CHAPITRE II

LE CAS CLASSIQUE DES CHEMINS DE DYCK

Dans ce chapitre, nous étudions la notion des chemins de Dyck. Pour cela, nous exposerons d'abord les nombre de Catalan. Nous commencerons brièvement par la série non-appliquée aux chemins de Dyck suivis du cas relié aux chemins de Dyck dans le cas classique, c'est-à-dire sur un réseau carré. De suite, nous les classifierons selon diverses statistiques dans la section finale. La statistique la plus pertinente est celle de l'aire.

2.1 Nombres de Catalan : Origines historiques

Les nombres de Catalan portent leur nom en l'honneur du mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) pour sa solution des triangulations des $(n + 2)$ -gon. En vérité, Segner avait déjà prouvé ce fait, mais d'une façon moins élégante quant aux combinatoiristes.¹

Plus récemment, l'un des plus grands mathématiciens de notre époque, Richard Stanley a écrit un livre dédié aux nombres de Catalan « Catalan Numbers. » (Stan-

1. (Hilton et Pedersen, 1991)

ley, 2015) Pendant une entrevue en 2008, avec *Math Major Magazine*, il décrit sa passion pour les nombres de Catalan de la manière suivante :

I'd have to say my favorite number sequence is the Catalan numbers. [...] Catalan numbers just come up so many times. It was well-known before me that they had many different combinatorial interpretations.[...] When I started teaching enumerative combinatorics, of course I did the Catalan numbers. When I started doing these very basic interpretations - any enumerative course would have some of this - I just liked collecting more and more of them and I decided to be systematic. Before, it was just a typed list. When I wrote the book, I threw everything I knew in the book. Then I continued from there with a website, adding more and more problems. (Kim, 2008)

Dans le deuxième volume du livre *Enumerative Combinatorics* (Stanley, 1999), Richard Stanley a ramassé des centaines d'exemples d'objets combinatoires dont les énumérations nous donnent les nombres de Catalan.

La suite des **nombres de Catalan**² se définit comme suit pour tout $n \geq 0$:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Nous verrons que les nombres de Catalan sont en fait les entiers qui énumèrent le nombre des chemins de Dyck de longueur $2n$. Cependant, cette affirmation n'est pas évidemment vraie.

La première personne à découvrir les nombres de Catalan est Ming-gatu (nom complet : Sharabiin Myangat) (1692 - 1763)³. Il était mathématicien et astronome de la Mongolie. Il était aussi la première personne à calculer une série infinie en

2. Richard Stanley et plusieurs autres mathématiciens choisissent de définir le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan par le nombre de triangulations d'un $(n+2)$ -gon, car c'est la première instance combinatoire de la série. Vu que le texte n'aborde pas le sujet des triangulations, nous avons donc choisi une définition plus pertinente mais toujours équivalente. Voir (Stanley, 2015) pour une preuve de l'équivalence.

3. Les dates sont approximatives.

Chine. Son livre, *La méthode rapide afin d'obtenir les valeurs exactes des segments de cercle*, n'a été publié qu'en 1839, après sa mort, même s'il a été écrit aux environs de 1730. Son livre présente l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} \sin^{2n+1} \alpha.$$

Il présente aussi la récurrence suivante sans porter attention aux liens forts entre cette série et la combinatoire :

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_{n+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+1-k}{k+1} C_{n-k}.$$

Dans une lettre à Christian Goldbach en 1751, Euler se demande combien de triangulations d'un n -gone sont possibles? Euler a résolu ce problème en terme de la formule suivante :

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}$$

qui est égale algébriquement au $(n-2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, C_{n-2} . Avec le lemme 8, nous voyons que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. En 1758, Johann Segner a identifié la récurrence

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1}.$$

Une preuve de cette récurrence est présentée plus tard dans le chapitre. La preuve va être présentée en énumérant les chemins de Dyck et ensuite en démontrant l'équivalence entre les séries.⁴

Voici les dix premiers numéros de Catalan :⁵

4. Voir 7 pour une preuve que les nombres des chemins de Dyck respectent cette récurrence et 2.5 pour une preuve que les nombres des chemins de Dyck sont égaux aux nombres de Catalan.

5. (OEIS, 2011)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Voici la fonction génératrice des nombres de Catalan. Soit $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ la fonction génératrice des nombres de Catalan.

$$C(x) = 1 + 1x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \dots$$

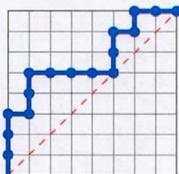
Le fait que les nombres de Catalan sont des entiers peut être démontré en remarquant que $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$

2.2 Chemin de Dyck

J'aime m'imaginer qu'un chemin de Dyck est la trajectoire d'un serpent qui s'enfuit du jardinier d'un coin à l'angle opposé d'un jardin carré. De plus, le serpent reste toujours dans le triangle formé au dessus du segment de droite entre le coin de départ et le coin d'arrivée. Motivé par la peur du jardinier, le serpent ne recule pas afin de lui échapper le plus vite possible. Par convention, nous considérons le jardin comme étant une grille n par n où le serpent ne va que vers le nord ou vers l'est. Il ne peut tourner que sur les points de la grille. Le serpent entre dans le jardin carré par le coin sud-ouest. Le premier déplacement que fait le serpent est vers le nord afin de rester au-dessus de la diagonale. Il sort du jardin en se déplaçant vers l'est par le coin nord-est. Nous étiquetons le coin d'entrée *origine* $(0,0)$ et le coin d'arrivée *point d'arrivée* (n,n) . La diagonale est le segment de droite entre l'origine et le point d'arrivée.

Exemple 7. La figure 2.1 est un exemple d'un chemin de Dyck. En particulier, cette figure est dite comme étant un chemin de Dyck de longueur 16 parce que la taille de la grille est de huit par huit.

Figure 2.1: Un chemin de Dyck de longueur 16, étiqueté par $(0, 0, 0, 1, 1, 5, 5, 6)$ ainsi que par $NNNENNEEEENNENE$



Un chemin de Dyck de $2n$ pas est un chemin de réseau dans le réseau $\Lambda = (V, E)$ où :

1. $V = \{(i, j) | i, j \in [0, n]\}$, et
2. $E = \{(v_1, v_2) | v_1, v_2 \in V, v_2 - v_1 = (1, 0) \text{ ou } (0, 1)\}$.

Un chemin de Dyck est une suite $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2n})$ où $\omega_0 = (0, 0)$, $\omega_{2n} = (n, n)$. L'ensemble des pas admissible est $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Finalement, si $\omega_i = (x, y) \in \omega$, nous exigeons que $y \geq x$, c'est-à-dire que le chemin reste toujours au-dessus de la diagonale. Souvent, nous appelons un chemin de $2n$ pas un chemin de Dyck de longueur $2n$ et nous disons que l'ordre est n .

L'ensemble des chemins de Dyck, \mathcal{D} est l'ensemble de tous chemins de Dyck d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quand nous voulons énumérer les chemins, nous le faisons en divisant l'ensemble des chemin en parties où la $n^{\text{ième}}$ partie contient tous les chemins de Dyck de longueur $2n$. L'ensemble des chemins de Dyck d'ordre n , D_n , est l'ensemble des chemins de Dyck d'ordre n pour tout $n \geq 0$ un entier.

Nous avons donc une union infinie d'ensembles disjoints finis égal à l'ensemble des chemins de Dyck.

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 0} D_n$$

2.3 Codage des chemins de Dyck

Nous étiquetons les chemins de Dyck des mêmes manières que les chemins de taxi. La première façon est une suite de n numéros croissants, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ où le $i^{\text{ième}}$ numéro de la suite est la distance entre l'axe des y et le $i^{\text{ième}}$ pas vers le nord. Afin de ne pas dépasser la diagonale, nous avons $0 \leq i < a_i$. Cela nous exige que $a_1 = 0$.

Par exemple, le chemin dans la figure 2.1 est étiqueté $(0, 0, 0, 1, 1, 5, 5, 6)$. La liste des numéros de tous les chemins de Dyck étiquetés de cette façon va toujours commencer par un 0 vu que tous les chemins de Dyck commencent par un pas vers le nord.

Cette technique est très utile pour calculer l'aire d'un chemin de Dyck, une statistique que nous verrons dans le chapitre suivant. Nous verrons que

$$\text{aire}(a) = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^n a_i$$

La deuxième technique étiquète un chemin de Dyck de longueur $2n$ un mot de Dyck ayant $2n$ lettres de l'alphabet $A = \{N, E\}$. Nous remplaçons les pas vers le nord par N et les pas vers l'est par E . Alors, le chemin de cette figure est étiqueté $NNNENNEEEENNENE$.

Un mot de Dyck, $c = c_1 c_2 \dots c_{2n}$ est un mot sur un alphabet de deux lettres tel que tous mots commencent par la même lettre, N dans notre cas, et que si

$$|c|_i^N = \#\{c_j | c_j = N, 1 \leq j \leq i\}, \text{ et}$$

$$|c|_i^E = \#\{c_j | c_j = E, 1 \leq j \leq i\}$$

est le nombre de copies des lettres N et E respectivement dans les premières i lettres du mot de Dyck, alors,

$$|c|_i^N \geq |c|_i^E$$

pour tout $i \in [1, 2n]$, c'est-à-dire que pour tous les lettres du mots, il n'y a jamais plus des copies de E qui précèdent cette lettre que des copies de N .

Cette technique est utile quand nous voulons manipuler ou transformer les chemins, par exemple dans la preuve suivante.

2.4 Énumérer les chemins de Dyck

Tout d'abord, nous nous posons la question la plus naturelle : combien y a-t-il de chemins de Dyck de longueur $2n$? Vu que nous pouvons prendre un réseau d'ordre n et qu'il existe au moins un chemin sur ce réseau pour tout n , nous aimerions plutôt énumérer les chemins en considérant l'ordre des chemins, c'est-à-dire leur longueur. Dans ce cas, nous avons besoin d'une suite de numéros.

Proposition 3. *Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ est $d_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.*

Démonstration. ⁶ Soient $\mathcal{L}(n, n)$ et $\mathcal{L}(n+1, n-1)$, les ensembles de chemins de taxi de l'origine aux points (n, n) et $(n+1, n-1)$ respectivement. Soit $U \subseteq \mathcal{L}(n, n)$, le sous-ensemble de chemins de taxi de l'origine vers (n, n) tel que tous les chemins dans U ne sont pas un chemin de Dyck, c'est-à-dire que $\mathcal{L}(n, n) \cap U = \emptyset$ et que $U \cup D_n = \mathcal{L}(n, n)$. Puisque les ensembles sont finis, nous pouvons conclure que

$$d_n = |D_n| = |\mathcal{L}(n, n)| - |U|.$$

Grâce au lemme 1, nous avons déjà :

$$|\mathcal{L}(n, n)| = \binom{2n}{n} \text{ ainsi que } |\mathcal{L}(n+1, n-1)| = \binom{2n}{n+1}.$$

6. (André, 1887).

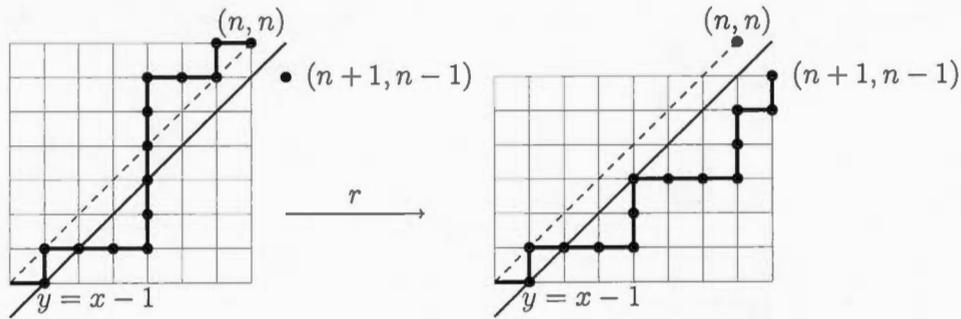


Figure 2.2: La fonction r envoie le chemin de Dyck vers un chemin de taxi.

Il ne nous reste donc qu'à établir une bijection $r : U \rightarrow \mathcal{L}(n+1, n-1)$ afin de conclure que le résultat désiré soit vrai vu que deux ensembles finis isomorphes ont la même cardinalité.

Nous définissons r de la manière suivante. Soit $P \in U$, alors P est un chemin de taxi qui se promène au moins une fois en-dessous de la diagonale. Soit (x_i, y_i) , le dernier sommet dans le chemin qui se trouve sous la diagonale. Il faut que le point croise la droite $y = x - 1$. Nous avons donc $(x_i, y_i) = (x_i, x_i - 1)$. De plus, nous pouvons considérer le chemin P comme étant deux chemins de taxi concaténés, P_1 et P_2 . Soit P_1 , le chemin de taxi de l'origine vers $(x_i, x_i - 1)$. Soit P_2 , le chemin de taxi de $(x_i, x_i - 1)$ vers (n, n) . Soit P'_2 , le chemin de taxi de $(x_i, x_i - 1)$ vers $(n+1, n-1)$ en prenant le chemin P_2 et en remplaçant les pas *est* par les pas *nord* et vice versa. Nous définissons $r(P)$ comme étant la concaténation de P_1 et P'_2 . Voir la figure 2.2 pour un exemple de la fonction.

Afin de démontrer que r est une bijection, nous présentons une fonction inverse qui fonctionne plutôt de la même façon que r . Soient $r' : \mathcal{L}(n+1, n-1) \rightarrow U$ et $Q \in \mathcal{L}(n+1, n-1)$. Il existe un i maximal tel que (x_i, y_i) est un sommet de Q et que $y_i = x_i - 1$. Soit $Q = Q_1 Q_2$ où Q_1 suit le chemin Q de l'origine au point

(x_i, y_i) . Soit Q_2 , le reste du trajet de Q . Soit Q'_2 , la réflexion de Q_2 par rapport à la droite $y = x - 1$. Alors $r'(Q) = Q_1Q'_2 \in \mathcal{L}(n+1, n-1)$. La bijection est évidente.

□

2.5 Récurrences sur le nombre de chemins de Dyck

Le nombre de chemins de Dyck d'ordre n est égal au $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, c'est-à-dire que $d_n = C_n$. Avec la proposition 3 et les manipulations algébrique, nous avons :

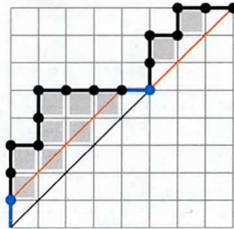
$$d_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n.$$

La récurrence suivante nous fournit un util qui nous permis de mieux comprendre les chemins de Dyck dans les résultats qui suivent.

Lemme 7. *Soit d_n , le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Nous avons donc $d_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot d_{n-i-1}$*

Démonstration. Tout chemin de Dyck commence en $(0, 0)$. Le premier pas est toujours $(0, 1)$, puisque le chemin de Dyck reste au-dessus de la diagonale. De plus, il faut que le chemin se termine à (n, n) . Il y a donc au moins un pas vers l'est qui touche la diagonale. Il se peut qu'il y ait quelques pas de mêmes, mais nous ne considérons que le premier pas qui traverse la diagonale que nous appelons le **pas décisif**. Le pas décisif peut se trouver soit tout de suite après le pas de départ, soit à mi-chemin, soit en dernier. Voyez la figure 2.3 pour une illustration. Les pas après le pas décisif forment un chemin de Dyck de taille inférieure ou égal à $2n - 2$. Il se peut que ce chemin soit vide puisqu'il commence et se termine sur la diagonale et qu'il ne la dépasse jamais. Les pas entre le pas de départ et le pas décisif forment aussi un chemin de Dyck vu qu'ils commencent et finissent et

Figure 2.3: Voici un chemin de Dyck. Les pas bleus marquent le pas de départ ainsi que le pas décisif. L'aire de ce chemin est le nombre de carrés unitaire se situant entre le chemin et la diagonale. Dans ce cas-ci, l'aire du chemin est dix.



que le pas décisif est le premier pas à y retourner. La longueur de ces chemins est entre 0 et $2n - 2$ telles que la somme des tailles est exactement $2n - 2$. S'il y a donc $(2i)$ pas entre le pas de départ et le pas décisif où $2i \in [0, 2n - 2]$, il y a aussi $(2n - 2i - 2)$ pas après le pas décisif. Le nombre de paires de tels chemins est donc $d_i \cdot d_{n-i-1}$. Alors, le nombre de tous chemins de Dyck de taille $2n$ est

$$|D_n| := d_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot d_{n-i-1}$$

□

Lemme 8. La série génératrice des nombres de Catalan $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ est algébrique et satisfait

$$C(x) = 1 + xC(x)^2$$

ce qui nous donne immédiatement

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} C_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Autrement dit

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Démonstration. Nous définissons la série génératrice ordinaire des chemins de Dyck de longueur $2n$ de la manière suivante : $C(x) := \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ qui est égale à

$$1 + \sum_{n \geq 1} C_n x^n.$$

Étant donné que $C_0 = 1$, pour le chemin vide. Nous pouvons décrire le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ par la récurrence du lemme 7 :

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} x^n.$$

Avec l'exemple 1, nous pouvons réécrire la double somme en tant que série génératrice carré, mais il faut décaler l'exposant par x , ce qui nous donne :

$$= 1 + \left(\sum_{n \geq 0} C_n x^n \right)^2 x = 1 + x C(x)^2$$

Étant donné que $0 = x C(x)^2 - C(x) + 1$ est une fonction quadratique en $C(x)$ avec des coefficients en x , nous pouvons conclure que C est algébrique et en appliquant la formule quadratique. Nous voyons que :

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Nous savons que $C_0 = 1$ et que $C(0) = C_0$ alors $C(0)$ devrait être aussi égal à 1. Or, nous observons qu'en prenons le positif $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$, nous avons $C(0) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} \Big|_{x=0} = 0 \neq 1 = C_0$. Par contre, si nous prenons le négatif, nous avons $C(0) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \Big|_{x=0} = 1 = C_0$ et donc tout simplement :

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Vu que :

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Par l'expansion de séries binomiales, nous avons donc ⁷

$$(1 - 4x)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-4x)^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \binom{1/2}{n} (-4x)^n.$$

Pour tout $n \geq 1$, nous savons que le coefficient du terme x^n est :

$$\begin{aligned} (-4)^n \binom{1/2}{n} &= (-4)^n \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \dots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \\ &= (-4)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(1)(1)(3) \dots (2n-3)}{n!} \\ &= (-2)^n \frac{(1)(1)(3) \dots (2n-3)}{n(n-1)!} \frac{(2)(4)(6) \dots (2n-2)}{(2)(4)(6) \dots (2n-2)} \\ &= \frac{(-2)^n \cdot (2n-2)!}{2^{n-1} n(n-1)!(n-1)!} \\ &= -\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

et avec l'exemple 3, nous déduisons que :

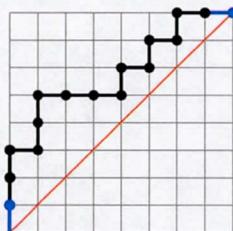
$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2x^2} \left(1 - 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n} (-1)x^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(2 \sum_{n \geq 1} \binom{2n-2}{-1} \frac{1}{n} x^{2n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n} x^{2n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} x^{2n} \end{aligned}$$

Et donc $C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$. □

7. Pour interpréter l'évaluation "négative" du binôme, nous le considérons comme polynôme en la variable α où pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Figure 2.4: Un chemin primitif.



2.6 Chemin de Dyck primitif

Un **chemin primitif** est un chemin de Dyck dont le pas décisif est aussi le pas d'arrivée, c'est-à-dire que le chemin ne croise la diagonale qu'au point de départ et qu'au point d'arrivée. La figure 2.4 en est un exemple. Il faut remarquer que le chemin vide n'est pas un chemin primitif.

Nous étiquetons les chemins de Dyck primitif des mêmes manières que les chemins de taxi. Or, nous ajoutons des contraintes supplémentaires. La première façon est une suite de n numéros croissants, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ où le $i^{\text{ième}}$ numéro de la suite est la distance entre l'axe des y et le $i^{\text{ième}}$ pas vers le nord. Afin de ne pas croiser la diagonale avant du point d'arrivée, nous avons $a_1 = a_2 = 0$ et $0 \leq i < a_i - 1$ pour tout $i \in [2, n]$.

Les chemins de Dyck de longueur $2n$ sont étiquetés par un mot de Dyck ayant $2n$ lettres de l'alphabet $A = \{N, E\}$, selon la deuxième technique. Pour un chemin de Dyck primitif, nous remarquons que,

$$|c|_i^N \geq |c|_i^E$$

pour tout $i \in [1, 2n - 1]$.

Soit \mathcal{P} , l'ensemble des chemins de Dyck primitifs. Soit P_n , l'ensemble des chemins de Dyck primitifs d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $p_n = \#P_n = |P_n|$.

Il y a une bijection entre les chemins de Dyck primitifs d'ordre n et les chemins de Dyck d'ordre $n - 1$ en oubliant le premier et le dernier pas du chemin primitif afin d'obtenir un chemin de Dyck inférieur. Nous avons donc $d_{n-1} = p_n$ ainsi que

$$\mathcal{P} = \sum_{n \geq 1} p_n x^n = \sum_{n \geq 1} d_{n-1} x^n = x \cdot \mathcal{D} \quad (2.1)$$

2.7 Aire

Voici la définition de la statistique la plus pertinente du texte à laquelle le chapitre suivant est dédié. L'**aire d'un chemin de Dyck**⁸ noté, $aire(\pi)$ où $\pi \in D_n$ est le nombre de carrés unitaires complets situés en-dessous de π ainsi qu'au-dessus de la diagonale. Dans la figure 2.3, nous voyons que l'aire du chemin est de 10.

Nous voyons que pour tout $\pi \in D_n$,

$$aire(\pi) + coaire(\pi) = \binom{n}{2}. \quad (2.2)$$

2.8 q -énumération des chemins de Dyck

Voici le q -analogue de proposition 3. Cette preuve fait référence aux résultats du lemme 4. De plus, c'est un exemple qui démontre que notre choix du q -analogue des nombre de Catalan soit sensé.

Lemme 9. Les chemins de Dyck pondérés par la statistique majeure.⁹

Pour tout $n \geq 0$ nous savons que la fonction génératrice des chemins de Dyck pondérés par la statistique majeure est le q -analogue des nombres de Catalan, c'est-à-dire que

$$\mathcal{D}_{maj}(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - q \begin{bmatrix} 2n \\ n+1 \end{bmatrix}_q \right) x^n.$$

8. (Flajolet et Sedgewick, 2009)

9. (Loehr, 2011).

Démonstration. Afin de démontrer le lemme ci-dessus, nous comparerons les coefficients de x^n vu que deux séries sont égaux si leur coefficients sont égaux. La première égalité peut être démontrée par les manipulations algébriques.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q \cdot \left(1 - \frac{q[n]!_q}{[n+1]!_q} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q \cdot \left(\frac{(1+q+q^2+\dots+q^n) - q(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}{[n+1]!_q} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q \cdot \frac{1}{[n+1]!_q}. \end{aligned}$$

Cela nous permet de démontrer la deuxième égalité. Nous pouvons la réécrire de la manière suivante :

$$[x^n] \mathcal{D}_{\text{maj}}(x; q) + q \begin{bmatrix} 2n \\ n+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

La preuve construira une bijection entre un ensemble dans une union de deux ensembles. L'exemple suivant nous donne une visualisation de la bijection. Nous considérerons trois ensembles tels que chaque terme de l'équation correspond au q -analogue de l'énumération pondérée par la majeure d'un ensemble parmi les trois. De plus, nous allons voir qu'un ensemble est égal à l'union de deux autres ensembles afin de démontrer l'égalité de la formule. Soit S l'ensemble de mots $S = \mathcal{R}(0^n 1^n)$, pondéré par la statistique majeure. Grâce au 4, nous savons que

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{w \in \mathcal{R}(0^n 1^n)} q^{\text{maj}(w)} x^n = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q x^n.$$

Ici, nous voyons la fonction génératrice des mots sur deux lettres tel que le nombre d'occurrences des deux lettres sont égales. Malheureusement, il existe plus d'une moitié de mots qui ne correspondent pas à un chemin de Dyck. Par exemple, nous prenons la bijection entre W_n et D_n où les lettres 0 et 1 correspondent aux pas vers le nord et vers l'est respectivement. Alors tous les mots, qui commencent par un 1, ne peuvent correspondre à un chemin de Dyck.

Nous diviserons S en deux ensembles disjoints. Soit W_n , l'ensemble de mots dans S tels que les éléments de W_n qui correspondent aux chemins de Dyck. Soit T , l'ensemble $S \setminus W_n$. Il est clair que $S = W_n \sqcup T$. Cela nous permet d'énumérer T vu que le q -analogue de l'énumération de W_n est égal à $[x^n] \mathcal{D}_{\text{maj}}(x; q)$. Afin d'énumérer T , nous prenons une fonction $g : T \rightarrow \mathcal{R}(0^{n+1}1^{n-1})$ telle que $\text{maj}(w) = 1 + \text{maj}(g(w))$ pour tout $w = w_1 w_2 \cdots w_{2n} \in T$. Cela va nous donner le résultat :

$$\begin{aligned} [x^n] S_{\text{maj}}(x; q) &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = [x^n] \mathcal{D}_{\text{maj}}(x; q) + [x^n] T_{\text{maj}}(x; q) \\ &= [x^n] \mathcal{D}_{\text{maj}}(x; q) + q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix}_q, \end{aligned}$$

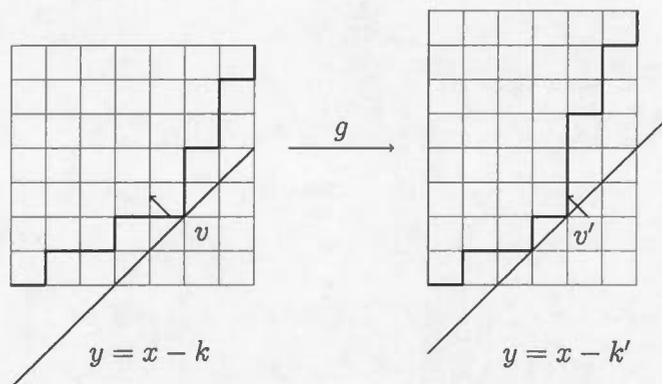
comme désiré. Nous définissons la fonction g par les chemins de taxi qui correspondent à chaque mot du domaine de la façon standard, c'est-à-dire soient les lettres 0 des pas vers l'est et les lettres 1 des pas vers le nord. Soit $k > 0 \in \mathbb{N}$ l'entier le plus grand tel que le chemin w touche la droite $y = x - k$. Un tel k existe vu que $w \in T = S \setminus W_n$.

Soit v , le premier sommet qui se trouve sur le chemin correspondant à w . Le chemin devrait précéder le sommet v d'un pas vers l'est et le suivre d'un pas vers le nord. De plus, nous exigeons que v soit la première occurrence où le chemin croise la droite. Il faut qu'il y ait deux pas de suite vers l'est avant le sommet v s'il y a au moins deux pas avant v . Cela veut dire que si v se trouve entre les pas w_i et w_{i+1} alors $w_i = 1$ et $w_{i+1} = 0$. Aussi, si $i - 1 \geq 0$ alors $w_{i-1} = 1$. g change $w_i = 1$ vers $w_i = 0$. Donc $g(w) = g(w_1 \cdots w_{i-2} 110 \cdots w_{2n}) = w_1 \cdots w_{i-2} 100 \cdots w_{2n}$. Nous obtenons finalement $\text{maj}(w) = \text{maj}(g(w)) - (i - 1) + i = \text{maj}(g(w)) + 1$.

Il est facile de voir la fonction réciproque. Soit $g' : \mathcal{R}(0^{n+1}1^{n-1}) \rightarrow T$. Soit $P \in \mathcal{R}(0^{n+1}1^{n-1})$. Soit $k' > 0 \in \mathbb{N}$, l'entier le plus grand tel que le chemin P touche la droite $y = x - k'$. Soit v' , le dernier sommet. Le pas devant v' est vers l'est. v' est suivi de deux pas vers le nord. g' va changer la direction du premier pas après v' de nord à est. Alors $g'(P) \in T$.

Pour vérifier que g et g' sont les réciproques de l'une et l'autre, nous analysons les algorithmes. Commençons avec $g(w) = P$ et k comme précédemment. Il est facile de voir que $k' = k - 1$. Sélectionnons v en tant que premier sommet sur la droite. En appliquant g , le chemin qui suit le pas qui change le sens est déplacé d'un sommet vers l'ouest et d'un vers le nord. Il est donc impossible qu'un sommet après v puisse se trouver sur la droite $y = x - k - 1$. Cela fait que v' est le sommet avant v sur le chemin et que le seul effet de g' est de défaire la fonction g . Pour vérifier l'autre côté, nous utilisons le même argument. Ils sont donc des fonctions réciproques. \square

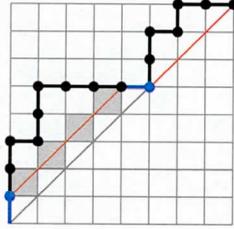
Exemple 8. *Voici une visualisation de la bijection utilisée dans la preuve précédente :*



Le lemme suivant est très intéressant puisqu'il démontre surtout que le q -aire analogue des nombres de Catalan respecte toujours la récurrence des nombres de Catalan qui définit le caractère et le personnage des nombres. De plus, nous utiliserons ce résultat dans le chapitre suivant afin d'établir le q -aire analogue de la série génératrice des chemins de Dyck, un résultat principal du texte.

Lemme 10. *La récurrence des chemins de Dyck pondérés par l'aire. Soit $C_n(q)$ le q -aire analogue des nombres de Catalan pour tous $n \geq 0$. Nous avons*

Figure 2.5: Dans la bijection de $D_{n,k}$ vers $D_{k-1} \times D_{n-k}$, nous voyons que nous perdons $k-1$ carrés quand nous considérons le chemin primitif en tant que chemin de Dyck de la même longueur du chemin primitif diminué par 2.



donc $C_0(q) = 1$ pour tout $n \geq 1$,

$$C_n(q) = \sum_{k=1}^n q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{n-k}(q).$$

Démonstration. Nous présentons le q -analogue de la preuve du 7. Nous considérons la pondération de l'aire d'un chemin de Dyck. Soit $D_{n,k}$, l'ensemble des chemins de Dyck d'ordre n tel que les pas décisifs retournent sur la diagonale au point (k, k) . Nous avons vu dans la preuve du 7 que l'ensemble des chemins de Dyck d'ordre n est égal à l'union disjointe de $D_{n,k}$ pour tout $k \in [n]$.

De plus, en fixant k , nous avons vu la bijection entre $D_{n,k}$ et $D_{k-1} \times D_{n-k}$. Or, cette bijection ne préserve pas la pondération de l'aire des chemins. La 2.5 démontre que nous perdons $k-1$ carrés quand nous considérons le chemin primitif d'ordre k en tant que chemin de Dyck d'ordre $k-1$.

Nous avons donc $C_n(q) = \sum_{k=1}^n q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{n-k}(q)$. □

CHAPITRE III

q-ANALOGUE DE CHEMINS DE DYCK DE HAUTEUR BORNÉE

Ce chapitre réunit toutes les idées présentées dans les chapitres précédentes. Nous évaluons les chemins de Dyck en ajoutant un nouveau contrainant : nous exigerons que les chemins aient une hauteur maximale au dessus de la diagonale. Ensuite, nous classifions les chemins de Dyck par rapport à la statistique de l'aire. Finalement, nous allons examiner l'effet de limiter la hauteur sur les q -analogues.

Bien que tout ce qui se trouve ici est bien "connu", nous construirons des outils "calculatoires" pour manipuler ces notions. Dans le chapitre suivant nous étendrons ces notions pour en arriver à des questions nouvelles.

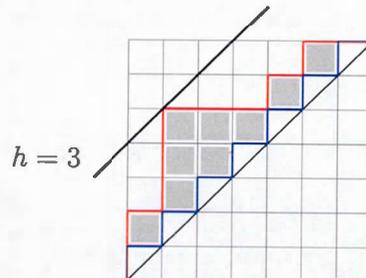
3.1 Chemin de Dyck à hauteur bornée

Le **chemin minimal** est le chemin le plus proche de la diagonale que soit possible. Dans un réseau carré comme où les chemins de Dyck se trouvent, le chemin minimal ressemble à un escalier : une répétition n fois d'une pair de pas dont l'un est vers le nord et l'autre vers l'est. Nous voulons que le chemin minimal ait hauteur maximal de 0.

Un **chemin de Dyck de longueur $2n$ à hauteur bornée par h** ¹ est un chemin de Dyck de longueur $2n$ tel que le chemin n'est jamais plus que h pas nord du chemin minimal.² Soit \mathcal{D}^h l'ensemble des chemins de Dyck de toute longueur à hauteur bornée par h . Soit D_n^h l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$ à hauteur bornée par h . Soit $d_n^h = \#D_n^h$. Nous avons donc

$$\mathcal{D}^h = \bigcup_{n \geq 0} D_n^h.$$

Dans le diagramme suivant, nous voyons un chemin quelconque de longueur 14 à hauteur $h = 3$ en rouge et le chemin minimal en bleu. Nous voyons la diagonale comme elle était avant. La deuxième droite parallèle à la diagonale est la hauteur maximale. Le chemin touche la hauteur maximale mais il ne la dépasse pas. Voici le diagramme :



3.2 Dénombrer les chemins de Dyck à hauteur bornée par h

Grâce au logiciel « Maple » et au programme « GFUN », nous avons compté les chemins de Dyck de longueur $2n$ à hauteur bornée par h pour plusieurs valeurs

1. (Flajolet et Sedgewick, 2009)
2. Nous choisissons cette définition parce qu'elle correspond bien aux chemins de Dyck. Quand nous évaluons les chemins dans des réseaux non-carrés, cette définition de la hauteur bornée n'est plus le seul choix possible.

de n et de h . Voici une petite partie des résultats³ :

d_n^h	h=0	h=1	h=2	h=3	h=4
n=1	1	1	1	1	1
n=2	1	2	2	2	2
n=3	1	4	5	5	5
n=4	1	8	13	14	14
n=5	1	16	34	41	42
n=6	1	32	89	122	131

Nous pouvons nous demander en observant la deuxième colonne s'il existe une récurrence sur le nombres de chemins en fonction de la hauteur. Si oui, est-ce que ces récurrences sont reliées entre elles. Par le programme « GFUN », nous pouvons entrer les donnés d'une suite des entiers et il nous retourne une récurrence. Si nous considérons les entrées des colonnes en tant que suites d'entiers, le programme nous assure qu'elles suivent une récurrences et il nous la fournit.

La récurrence de la première et la deuxième suites sont évidentes à l'oeil. Quand nous évaluons les suites de hauteur bornée par $h = 2$, nous commençons à voir le motif. En fait, la récurrence est une somme pondérée des chemins de longueur plus petites. Les coefficients de cette somme pondérée forment le triangle de Pascale. Voici les huit premières récurrences qui définissent les suites :

3. Pour consultez des résultats des expériences supplémentaires, voir l'annexe 4

$$d_n^0 = 1$$

$$d_n^1 = 2 \cdot d_{n-1}^1$$

$$d_n^2 = 3 \cdot d_{n-1}^2 - 1 \cdot d_{n-2}^2$$

$$d_n^3 = 4 \cdot d_{n-1}^3 - 3 \cdot d_{n-2}^3$$

$$d_n^4 = 5 \cdot d_{n-1}^4 - 6 \cdot d_{n-2}^4 + 1 \cdot d_{n-3}^4$$

Alors, la récurrence des suites nous démontre qu'il y a un lien fort entre les chemins de Dyck de longueur $2n$ et les chemins de Dyck des longueurs plus petites. Maintenant nous examinons les fonctions génératrices qui nous permettent de démontrer qu'il y a aussi une récurrence qui est dépendante de la hauteur des chemins de Dyck. En employant encore le programme « GFUN », nous pouvons générer les fonctions génératrices des suites. Nous voyons de cette évaluation que le dénominateur de la fonction génératrice de hauteur bornée par h devient le numérateur de la fonction génératrice de hauteur bornée par $h + 1$. Voici les huit premières fonctions génératrices :

$$D^0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$D^1(x) = \frac{1-x}{1-2x}$$

$$D^2(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}$$

$$D^3(x) = \frac{1-3x+x^2}{1-4x+3x^2}$$

$$D^4(x) = \frac{1-4x+3x^2}{1-5x+6x^2-1x^3}$$

Le dénominateur de la fonction génératrice pour tout h est égal au numérateur de la fonction génératrice de $h + 1$. Nous avons donc une suite des fonctions $F_h(x)$

telle que

$$D^{(h)}(x) = \frac{F_h(x)}{F_{h+1}(x)}$$

Voici les premières dix fonctions :

$$F_{-1}(x) = 1$$

$$F_0(x) = 1$$

$$F_1(x) = 1 - 1x$$

$$F_2(x) = 1 - 2x$$

$$F_3(x) = 1 - 3x + 1x^2$$

$$F_4(x) = 1 - 4x + 3x^2$$

$$F_5(x) = 1 - 5x + 6x^2 - 1x^3$$

Comme nous pouvons en tout évidence dans la section 4.1.1, les coefficients ressemblent beaucoup au triangle de pascal avec un décalage dans chaque colonne. Nous pouvons décrire les polynômes explicitement et alors nous pouvons écrire une fonction génératrice explicitement :

$$D^h(x) = \frac{F_h(x)}{F_{h+1}(x)}$$

où

$$F_h(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor + 1} \binom{h+1-k}{k} (-x)^k.$$

En utilisant le programme « GFUN », nous nous rendons compte qu'il y a une récurrence que les polynômes suivent :

$$F_{-1}(x) = 1$$

$$F_0(x) = 1$$

$$F_{h+1}(x) = F_h(x) - x \cdot F_{h-1}(x)$$

3.3 Les séries génératrices des chemins de Dyck à hauteur bornée

Il nous faut nous demander si nous pouvons démontrer que cette observation est belle et bien vraie? Voici la démonstration de cette conjecture :

Rappelez qu'un chemin de Dyck primitif⁴ est un chemin de Dyck qui ne coïncide avec la diagonale qu'au point de départ et qu'au point d'arrivée. Nous notons par \mathcal{P} l'ensemble de tous les chemins primitifs. Soient P_n^h l'**ensemble des chemins de Dyck primitifs à hauteur bornée par h** . Soit p_n^h le nombre de tels chemins et alors nous voyons que :

$$P^h(x) := \sum_{k \geq 0} p_k^h x^k$$

la fonction génératrice des chemins primitifs de Dyck à hauteurs bornés au plus h .

En reprenant la décomposition des chemins de Dyck en deux chemins que nous avons fait dans la preuve du Lemme 7, nous voyons alors qu'un chemin de Dyck est soit le chemin vide soit la concaténation d'un chemin primitif avec un chemin de Dyck. Nous savons alors que

$$\mathcal{D} = 1 + \mathcal{P} \cdot \mathcal{D} \tag{3.1}$$

et que

$$D^h(x) = 1 + P^h(x) \cdot D^h(x).$$

Tous chemins primitifs commencent par un pas vers le haut, $(0, 1)$, et se terminent par un pas vers l'est, $(1, 0)$. Entre le premier et dernier pas, il y a un chemin de Dyck quelconque de longueur $2(n - 1)$ à hauteur bornée par $h - 1$, c'est-à-dire que :

$$P^h(x) = x^{1/2} \cdot D^{h-1}(x) \cdot x^{1/2} = x \cdot D^{h-1}(x),$$

4. (Flajolet et Sedgewick, 2009)

ce qui implique que

$$\begin{aligned} D^h(x) &= 1 + x \cdot D^{h-1}(x) \cdot D^h(x) \\ &= \frac{1}{1 - xD^{h-1}(x)}. \end{aligned}$$

Cette formule nous démontre la récurrence dans une fraction continue. Chaque fois que la hauteur maximale augmente d'une unité, le nombre de niveaux de la fraction continue augmente aussi par de un.

Cette formule n'est pas une récurrence linéaire. Or, nous trouvons une récurrence linéaire si nous considérons les numérateurs ou les dénominateurs en tant que suite de polynômes.

Lemme 11. *Pour toute hauteur $h \in \mathbb{N}$, $D^h(x) = \frac{P^h}{Q^h}$ où P^h, Q^h sont des récurrences linéaires suivantes*

$$\begin{aligned} P^h &= Q^{h-1} \\ Q^h &= Q^{h-1} - x \cdot Q^{h-2} \end{aligned}$$

où $Q^{-1} = 1$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence. Voici le cas de base : Nous avons $D^0(x) = 1$ et $D^1(x) = 1/(1-x)$. Nous nous attendons à ce que

$$D^2(x) = \frac{P^2}{Q^2} = \frac{Q^1}{Q^1 - xQ^0} = \frac{1-x}{1-2x}$$

et nous voyons que

$$D^2(x) = \frac{1}{1 - xD^1(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}$$

Ces résultats coïncident avec les données du programme « GFUN » que nous avons auparavant vu. Alors, nous pouvons supposer que l'hypothèse est vraie pour un

certain $h \in \mathbb{N}$ et nous démontrerons qu'elle est toujours vrai pour $h + 1$, c'est-à-dire que $D^{h+1}(x) = \frac{Q^n}{Q^n - xQ^{n-1}}$ ainsi que $Q^n = Q^{n-1} - xQ^{n-2}$.

$$\begin{aligned} D^{h+1}(x) &= \frac{1}{1 - xD^h(x)} = \frac{1}{1 - x \frac{Q^{n-1}}{Q^{n-1} - xQ^{n-2}}} = \frac{1}{1 - \frac{xQ^{n-1}}{Q^{n-1} - xQ^{n-2}}} \\ &= \frac{Q^{n-1} - xQ^{n-2}}{Q^{n-1} - xQ^{n-2} - xQ^{n-1}} = \frac{Q^n}{Q^n - xQ^{n-1}} \end{aligned}$$

Par récurrence, nous avons le résultat escompté. \square

3.4 q -énumération des chemins de Dyck à hauteur bornée

Définition 1. *L'aire d'un chemin de Dyck à hauteur bornée est le nombre des carrés qui se trouvent entièrement entre la diagonale et la droite $y = x - (h+1)$.*

Pour qualifier le q -analogue pondéré par l'aire des chemins de Dyck, nous modifions la fonction génératrice des chemins de Dyck en ajoutant la deuxième variable, q . Pour le faire, nous reconsidérons le nombre des chemins de Dyck de longueur $2n$ à hauteur bornée par h , d_n^h comme une fonction en q , $d_n^h(q)$, qui compte l'aire des chemins de Dyck de la manière suivante :

$$d_n^h(q) = \sum_{\gamma \in D_n^h} q^{\text{aire}(\gamma)}$$

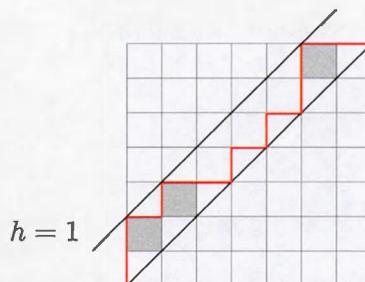
Définition 2. *Le q -analogue de la fonction génératrice des chemins de Dyck à hauteur au plus h est*

$$D^h(x; q) = \sum_{n \geq 0} d_n^h(q) x^n$$

Nous définissons également le q -analogue des chemins primitifs de la même manière.

3.5 q -analogue : volet expérimental

Le nombre des chemins de Dyck de longueur 14 à hauteur au plus $h = 1$ est $d_7^1 = 64$. Voici un exemple d'un tel chemin avec l'aire égal à trois :



Nous voyons qu'il est facile d'identifier les chemins ayant une certaine aire quand la hauteur maximale est $h = 1$. Il est encore plus facile de compter de tels chemins. Voici un tableau qui donne les nombres de chemins pour tous valeur d'aire possible :

Aire	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins	1	6	15	20	15	6	1

Alors, quand nous considérons d_7^1 comme une fonction en q , nous trouvons l'équation suivante :

$$d_7^1(q) = 1 + 6q + 15q^2 + 20q^3 + 15q^4 + 6q^5 + q^6$$

Dans cette exemple, nous voyons que le nombre de tels chemins, où la hauteur $h = 1$ et l'aire égal à i , est $\binom{n-1}{i}$. La fonction évaluée à $q = 1$ nous redonne le nombre de chemin sans considérer l'aire. $d_7^1(1) = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = d_7^1$.

Nous voyons que pour tout $n \geq 1$ le q -analogue des nombres des chemins de Dyck de longueur $2n$ à hauteur au plus 1 est

$$d_n^1(q) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} q^i = (q+1)^{n-1}.$$

Maintenant, nous avons que la fonction génératrice est la suivante :

$$D^1(x; q) = \sum_{n \geq 0} d_n^1(q) x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} (q+1)^{n-1} x^n = \frac{1 - qx}{1 - (1+q)x}$$

Nous nous servons encore du programme « GFUN » afin d'énumérer les nombres de chaque longueur $2n$ et de hauteur au plus h ainsi que les aires. Nous trouvons que les quelques premières fonctions génératrices sont les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} D^0(x; q) &= \frac{1}{1-x} \\ D^1(x; q) &= \frac{1 - qx}{1 - (1+q)x} \\ D^2(x; q) &= \frac{1 - (1+q)qx}{1 - (1+q+q^2)x + q^2x^2} \\ D^3(x; q) &= \frac{1 - (1+q+q^2)qx + q^4x^2}{1 - (1+q+q^2+q^3)x + (1+q+q^2)q^2x^2} \\ D^4(x; q) &= \frac{1 - (1+q+q^2+q^3)qx + (1+q+q^2)q^4x^2}{1 - (1+q+q^2+q^3+q^4)x + (1+q^2)(1+q+q^2)q^2x^2 - q^6x^3} \end{aligned}$$

En regardons les numérateurs ou les dénominateurs en tant que suites de polynômes, nous voyons qu'il y a clairement une structure fortement liée aux polynômes précédents. Comme nous l'avons fait, avant de considérer les q -analogues, nous employons « GFUN » pour comprendre les structures récurrences ici.

Nous considérons les dénominateurs et les numérateurs en tant que suites de polynômes en x et en q , $Q_h(x; q)$ et $P_h(x; q)$ respectivement. Nous avons $Q_h(x; q) =$

$P_h(xq; q)$.

$$Q_{-1} = 1$$

$$P_{-1} = 1$$

$$Q_0 = 1$$

$$P_0 = 1$$

$$Q_1 = 1 - x$$

$$P_1 = 1 - qx$$

$$Q_2 = 1 - (1 + q)x$$

$$P_2 = 1 - (1 + q)qx$$

$$Q_3 = 1 - (1 + q + q^2)x + q^2x^2$$

$$P_3 = 1 - (1 + q + q^2)qx + q^2(qx)^2$$

Nous savons aussi que la suite de polynômes $Q_h(x; q)$ suit la récurrence suivante :

$$Q_{-1}(x; q) = 1$$

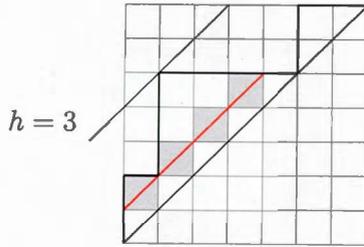
$$Q_0(x; q) = 1$$

$$Q_{h+1}(x; q) = Q_h(qx; q) - x \cdot Q_{h-1}(qx; q)$$

Afin de compter le nombre de chemins par rapport à l'aire, nous décomposons les chemins de la même manière que nous le faisons sans considérer l'aire. Nous avons

$$\mathcal{D}(x; q) = 1 + \mathcal{P}(x; q) \cdot \mathcal{D}(x; q) \quad (3.2)$$

Il est clair qu'une telle décomposition des chemins préserve la statistique de l'aire. Nous décomposons un chemin de Dyck primitif de longueur $2n$ à hauteur bornée au plus h de la manière suivante : un pas vers le nord, un chemin de Dyck quelconque de longueur $2(n-1)$ à hauteur bornée au plus $h-1$, et un pas vers l'est. En faisant cette décomposition, l'aire du chemin de Dyck de la composition a $n-1$ unités d'aire en moins que l'aire du chemin de Dyck primitif.



Dans le diagramme précédent, il y a un chemin de Dyck non-primitif de longueur 14 à hauteur bornée par $h = 3$. Ce chemin se décompose en un chemin de Dyck primitif de longueur 10 suivi d'un autre chemin de Dyck de longueur 4. Le chemin de Dyck primitif se décompose alors comme un pas vers le nord, un chemin de Dyck de longueur 8 et un pas vers l'est. Le chemin de Dyck primitif est toujours suivi du même chemin de Dyck de longueur 4.

Quand nous enlevons le premier et le dernier pas du chemin de Dyck primitif, nous remarquons que le nouveau chemin de Dyck a exactement $n - 1$ unité d'aire moins que le chemin primitif. Nous avons donc

$$P_n^h(x; q) = q^{n-1} x \cdot D_{n-1}^{h-1}(x; q) = x \cdot D_{n-1}^{h-1}(xq; q)$$

Et alors quand nous considérons l'ensemble des chemins de Dyck de tout longueur, nous voyons que :

$$P^h(x; q) = x \cdot D^{h-1}(xq; q)$$

ainsi que :

$$D^h(x; q) = 1 + P^h(x; q) \cdot D^h(x; q)$$

qui nous permet de conclure que :

$$D^h(x; q) = \frac{1}{1 - x \cdot D^{h-1}(xq; q)} \quad \text{où } D^{-1}(xq; q) = 1$$

CHAPITRE IV

RÉSULTATS DES EXPERIENCES

4.1 Réseaux carrés

Ici, nous présentons les résultats de calculs explicites qui correspondent aux cas classique bien connu. Pour plus de détails, retournez à la section 3.2. La table suivante énumère d_n^h , le nombre de chemins de Dyck de l'ordre n à au hauteur au plus h .

d_n^h	h=0	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7	h=8
n=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
n=3	1	4	5	5	5	5	5	5	5
n=4	1	8	13	14	14	14	14	14	14
n=5	1	16	34	41	42	42	42	42	42
n=6	1	32	89	122	131	132	132	132	132
n=7	1	64	233	365	417	428	429	429	429
n=8	1	128	610	1094	1341	1416	1429	1430	1430
n=9	1	256	1597	3281	4334	4744	4846	4861	4862
n=10	1	512	4184	9842	14041	16016	16645	16778	16795
n=11	1	1024	10946	29525	45542	54320	57686	58598	58766

4.1.1 Lien de causalité entre des dénombrements

Nous remarquons que chaque colonne suit une récurrence. Nous avons déjà vu les premières quatre récurrences. Les voici encore suivis des 5 prochaines récurrences de plus :

$$d_n^0 = 1$$

$$d_n^1 = 2 \cdot d_{n-1}^1$$

$$d_n^2 = 3 \cdot d_{n-1}^2 - 1 \cdot d_{n-2}^2$$

$$d_n^3 = 4 \cdot d_{n-1}^3 - 3 \cdot d_{n-2}^3$$

$$d_n^4 = 5 \cdot d_{n-1}^4 - 6 \cdot d_{n-2}^4 + 1 \cdot d_{n-3}^4$$

$$d_n^5 = 6 \cdot d_{n-1}^5 - 10 \cdot d_{n-2}^5 + 4 \cdot d_{n-3}^5$$

$$d_n^6 = 7 \cdot d_{n-1}^6 - 15 \cdot d_{n-2}^6 + 10 \cdot d_{n-3}^6 - 1 \cdot d_{n-4}^6$$

$$d_n^7 = 8 \cdot d_{n-1}^7 - 21 \cdot d_{n-2}^7 + 20 \cdot d_{n-3}^7 - 5 \cdot d_{n-4}^7$$

$$d_n^8 = 9 \cdot d_{n-1}^8 - 28 \cdot d_{n-2}^8 + 35 \cdot d_{n-3}^8 - 15 \cdot d_{n-4}^8 + 1 \cdot d_{n-5}^8$$

4.1.2 Séries génératrices

Une grande partie de notre propre motivation est l'apparence du triangle de Pascal ici ainsi que le cas des réseaux non-carrés. Quand nous énumérons les séries génératrices, nous voyons une suite de polynômes.

$$D^0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$D^1(x) = \frac{1-x}{1-2x}$$

$$D^2(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}$$

$$\begin{aligned}
D^3(x) &= \frac{1 - 3x + x^2}{1 - 4x + 3x^2} \\
D^4(x) &= \frac{1 - 4x + 3x^2}{1 - 5x + 6x^2 - 1x^3} \\
D^5(x) &= \frac{1 - 5x + 6x^2 - 1x^3}{1 - 6x + 10x^2 - 4x^3} \\
D^6(x) &= \frac{1 - 6x + 10x^2 - 4x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 1x^4} \\
D^7(x) &= \frac{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 1x^4}{1 - 8x + 21x^2 - 20x^3 + 5x^4} \\
D^8(x) &= \frac{1 - 8x + 21x^2 - 20x^3 + 5x^4}{1 - 9x + 28x^2 - 35x^3 + 15x^4 - 1x^5}
\end{aligned}$$

4.1.3 Suite de polynômes des séries génératrices

Comme nous avons déjà vu, nous pouvons définir les séries génératrices après la suite des polynômes suivante par ce formule :

$$D^{(h)}(x) = \frac{F_h(x)}{F_{h+1}(x)}.$$

Voici les premières dix fonctions de la suites :

$$F_{-1}(x) = 1$$

$$F_0(x) = 1$$

$$F_1(x) = 1 - 1x$$

$$F_2(x) = 1 - 2x$$

$$F_3(x) = 1 - 3x + 1x^2$$

$$F_4(x) = 1 - 4x + 3x^2$$

$$F_5(x) = 1 - 5x + 6x^2 - 1x^3$$

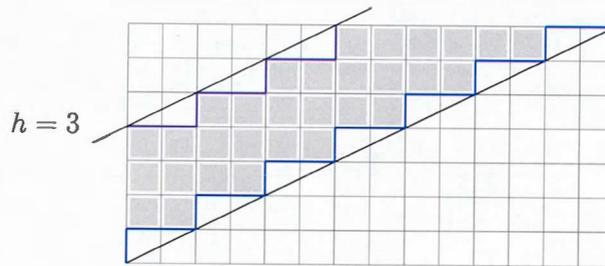
$$F_6(x) = 1 - 6x + 10x^2 - 4x^3$$

$$F_7(x) = 1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 1x^4$$

$$F_8(x) = 1 - 8x + 21x^2 - 20x^3 + 5x^4$$

4.2 Réseaux rectangulaire

Nous aimerions répondre par la suite à la question, « qu'est-ce qui se passe dans le cas des réseaux non-carrés ? » Nous voulons dénombrer les chemins de Dyck de longueur $3n$ modifiés tels que nous nous permettons de travailler dans un réseau $2n$ par n . Afin de faire ça, il faut faire attention à comment définir la hauteur d'un chemin. Nous définissons la hauteur par rapport au chemin minimal, qui est toujours périodique dans les réseau $2n$ par n , comme nous pouvons voir dans le diagramme suivante. Quand le période n'est plus aussi simple, la hauteur devient moins évidente.



Nous changeons légèrement la notation. Le nombre de chemins de Dyck de longueur $kn + in$ modifiés dans un réseau kn par in à hauteur bornée par h sera noté, $d_{kn,in}^h$. La série génératrice de tels chemins sera notée, $D_{k,i}^h(x)$. Voici quelques tables de dénombrements calculer avec *GFUN*. Nous n'incluons plus la colonne où $h = 0$ car il n'y a jamais plus qu'un chemin dans ce cas. Nous ne sommes limités par que la puissance de nos ordinateurs.

$d_{2n,n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7	h=8
n=1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	2	3	3	3	3	3	3	3
n=3	4	9	11	12	12	12	12	12
n=4	8	27	41	51	54	55	55	55
n=5	16	81	153	219	252	268	272	273
n=6	32	243	571	942	1188	1338	1399	1422
n=7	64	729	2131	4053	5616	6741	7332	7615
n=8	128	2187	7953	17439	26568	34075	38759	41403
n=9	256	6561	29681	75036	125712	172453		
n=10	512	19683	110771	322863	594864	873162		

Nous considérons à nouveau les entrées des colonnes en tant que des suites où $a_h(k) := (A_{2,1})_{k,h} = \#\mathcal{D}_{2k,1k}^h$, nous remarquons qu'elles respectent les récurrences suivantes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 2 \cdot a_1(k-1)$$

$$a_2(k) = 3 \cdot a_2(k-1)$$

$$a_3(k) = 4 \cdot a_3(k-1) - 1 \cdot a_3(k-2)$$

$$a_4(k) = 5 \cdot a_4(k-1) - 3 \cdot a_4(k-2)$$

$$a_5(k) = 6 \cdot a_5(k-1) - 6 \cdot a_5(k-2)$$

$$a_6(k) = 7 \cdot a_6(k-1) - 10 \cdot a_6(k-2) + 1 \cdot a_6(k-3)$$

$$a_7(k) = 8 \cdot a_7(k-1) - 15 \cdot a_7(k-2) + 4 \cdot a_7(k-3)$$

$$a_8(k) = 9 \cdot a_8(k-1) - 21 \cdot a_8(k-2) + 10 \cdot a_8(k-3)$$

De plus, nous trouvons que les séries génératrices $D_{2,1}^h$ où $D_{2,1}^h := \sum_{k \geq 0} d_{2k,1k}^h x^k = \sum_{k \geq 0} a_h(k) x^k$ peuvent être définies de la manière que les cas carrés. Nous voyons que

$$D_{2,1}^h = \frac{F_{2,1}^{h-1}}{F_{2,1}^h}$$

où :

$$F_{2,1}^{-1} = 1$$

$$F_{2,1}^0 = 1 - x$$

$$F_{2,1}^1 = 1 - 2x$$

$$F_{2,1}^2 = 1 - 3x$$

$$F_{2,1}^3 = 1 - 4x + 1x^2$$

$$F_{2,1}^4 = 1 - 5x + 3x^2$$

$$F_{2,1}^5 = 1 - 6x + 6x^2$$

$$F_{2,1}^6 = 1 - 7x + 10x^2 - 1x^3$$

$$F_{2,1}^7 = 1 - 8x + 21x^2 - 4x^3$$

Nous observons que les termes sont exactement les mêmes termes que les cas carrés. La seule différence est le période auquel les nouveaux termes sont ajoutés. Nous voyons en plus que ce motif se répète pour tous les cas rectangulaire de la forme kn par n .

$d_{3n,n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7	h=8
n=1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	2	3	4	4	4	4	4	4
n=3	4	9	16	19	21	22	22	22
n=4	8	27	64	91	114	130	136	139
n=5	16	81	256	436	621	778	868	925
n=6	32	243	1024	2089	3384	4666	5584	6262
n=7	64	729	4096	10009	18441	27994	35992	42622
n=8	128	2187	16384	47956	100494	167962	232096	290593

Voici les récurrences sur les entrées des colonnes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 2 \cdot a_1(k-1)$$

$$a_2(k) = 3 \cdot a_2(k-1)$$

$$a_3(k) = 4 \cdot a_3(k-1)$$

$$a_4(k) = 5 \cdot a_4(k-1) - 1 \cdot a_4(k-2)$$

$$a_5(k) = 6 \cdot a_5(k-1) - 3 \cdot a_5(k-2)$$

$$a_6(k) = 7 \cdot a_6(k-1) - 6 \cdot a_6(k-2)$$

$$a_7(k) = 8 \cdot a_7(k-1) - 10 \cdot a_7(k-2)$$

$$a_8(k) = 9 \cdot a_8(k-1) - 15 \cdot a_8(k-2) + 1 \cdot a_8(k-3)$$

$$a_9(k) = 10 \cdot a_9(k-1) - 21 \cdot a_9(k-2) + 4 \cdot a_9(k-3)$$

$d_{4n,n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7	h=8
n=1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	2	3	4	5	5	5	5	5
n=3	4	9	16	25	29	32	35	35
n=4	8	27	64	125	169	209	265	275
n=5	16	81	256	625	985	1367	2035	2225
n=6	32	243	1024	3125	5741	8942	15665	18125
n=7	64	729	4096	15625	33461	58493	120635	147875

Voici les récurrences sur les entrées des colonnes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 2 \cdot a_1(k-1)$$

$$a_2(k) = 3 \cdot a_2(k-1)$$

$$a_3(k) = 4 \cdot a_3(k-1)$$

$$a_4(k) = 5 \cdot a_4(k-1)$$

$$a_5(k) = 6 \cdot a_5(k-1) - 1 \cdot a_5(k-2)$$

$$a_6(k) = 7 \cdot a_6(k-1) - 3 \cdot a_6(k-2)$$

$$a_7(k) = 8 \cdot a_7(k-1) - 6 \cdot a_7(k-2)$$

$$a_8(k) = 9 \cdot a_8(k-1) - 10 \cdot a_8(k-2)$$

$$a_9(k) = 10 \cdot a_9(k-1) - 15 \cdot a_9(k-2)$$

$d_{5n,n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7	h=8
n=1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	2	3	4	5	6	6	6	6
n=3	4	9	16	25	36	41	48	50
n=4	8	27	64	125	216	281	396	440
n=5	16	81	256	625	1296	1926	3276	3900
n=6	32	243	1024	3125	7776	13201	27108	34600

Voici les récurrences sur les entrées des colonnes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 2 \cdot a_1(k-1)$$

$$a_2(k) = 3 \cdot a_2(k-1)$$

$$a_3(k) = 4 \cdot a_3(k-1)$$

$$a_4(k) = 5 \cdot a_4(k-1)$$

$$a_5(k) = 6 \cdot a_5(k-1)$$

$$a_6(k) = 7 \cdot a_6(k-1) - 1 \cdot a_6(k-2)$$

$$a_7(k) = 8 \cdot a_7(k-1) - 3 \cdot a_7(k-2)$$

$$a_8(k) = 9 \cdot a_8(k-1) - 6 \cdot a_8(k-2)$$

$$a_9(k) = 10 \cdot a_9(k-1) - 10 \cdot a_9(k-2)$$

$d_{n,2n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6	h=7
n=1	1	1	1	1	1	1	1
n=2	3	3	3	3	5	3	3
n=3	9	12	12	12	12	12	12
n=4	27	51	55	55	55	55	55
n=5	81	219	268	273	273	273	273
n=6	243	942	1338	1422	1428	1428	1428
n=7	729	4053	6741	7615	7745	7752	7752
n=8	2187	17439	34075	41403	43067	43255	43263

Voici les récurrences sur les entrées des colonnes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 3 \cdot a_1(k-1)$$

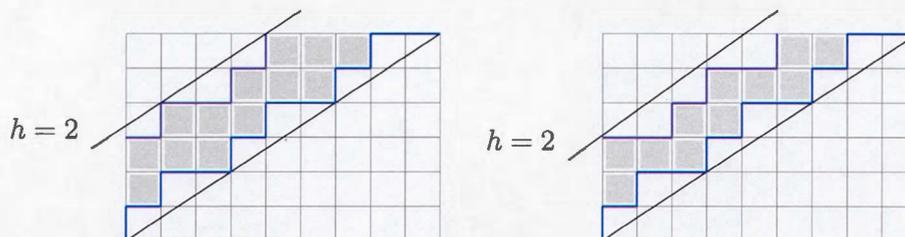
$$a_2(k) = 5 \cdot a_2(k-1) - 3 \cdot a_2(k-2)$$

$$a_3(k) = 7 \cdot a_3(k-1) - 10 \cdot a_3(k-2) + 1 \cdot a_3(k-3)$$

$$a_4(k) = 9 \cdot a_4(k-1) - 21 \cdot a_4(k-2) + 10 \cdot a_4(k-3)$$

$$a_5(k) = 11 \cdot a_5(k-1) - 36 \cdot a_5(k-2) + 36 \cdot a_5(k-3) - 5 \cdot a_5(k-4)$$

Figure 4.1: Voici une illustration de deux définitions possibles de la hauteur.



- (a) Dans ce diagramme, la hauteur est bornée par h pas vers le nord du chemin par une droite $h + 1$ pas par dessus de la diagonale.
- (b) Dans ce cas, la hauteur est bornée par h pas par dessus de la diagonale.

4.2.1 Définition de la hauteur

Il semble y avoir de la place pour un certain choix dans la définition de hauteur. Nous pouvons toujours définir la hauteur comme avant, c'est-à-dire qu'un chemin bornée par h ne se trouve jamais plus que h pas par dessus du chemin minimal. Un autre choix serait de construire une droite parallèle de la diagonale et $h + 1$ pas par dessus de la diagonale. Les deux options présentent des complications. Tout de suite, nous remarquons que les récurrences qui nous inspirent ne sont plus visibles. Il faut se demander qu'est-ce qui nous échappe.

$d_{3n,2n}^h$	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6
n=1	2	2	2	2	2	2
n=2	8	16	22	23	23	23
n=3	32	128	258	332	365	376
n=4	128	1024	3030	4898	6198	6894
n=5	512	8129	35586	72392	106463	130480
n=6	2048	65536	4147942	1070108	1832121	2489500

Voici les récurrences sur les entrées des colonnes :

$$a_0(k) = 1 \cdot a_0(k-1) = 1$$

$$a_1(k) = 4 \cdot a_1(k-1)$$

$$a_2(k) = 8 \cdot a_2(k-1)$$

$$a_3(k) = 12 \cdot a_3(k-1) - 1 \cdot a_3(k-2)$$

$$a_4(k) = 16 \cdot a_4(k-1) - 18 \cdot a_4(k-2)$$

$$a_5(k) = 20 \cdot a_5(k-1) - 48 \cdot a_5(k-2) + 1 \cdot a_5(k-3)$$

$$a_6(k) = 24 \cdot a_6(k-1) - 94 \cdot a_6(k-2) + 16 \cdot a_6(k-3)$$

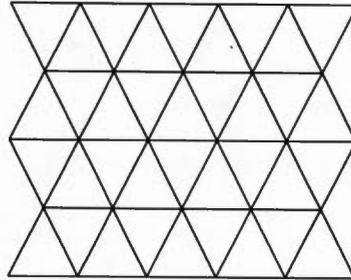
CONCLUSION

Il existe une relation inhérente entre les nombres de Catalan et les chemins de Dyck de par leurs récurrences. Les récurrences qui se manifestent dans les cas classiques se répètent aussi dans les cas rectangulaires. Nous aimerions savoir pourquoi cette structure persiste autant. Il nous restera également à voir ce qui se passe quand nous évaluons l'aire des chemins dans les réseaux rectangulaires. Comment se fait-il qu'il existe une relation entre les formules des récurrence des nombre des chemins de Dyck dans les réseaux de la forme $1 \cdot n$ par $k \cdot n$? Pourquoi la relation est-elle aussi étroite? Par ailleurs, il faut définir ce qu'est une hauteur. À la lumière d'expérimentations plus poussées, nous serons peut-être amener à considérer d'autres définitions. Finalement, nous aimerions connaître l'effet des réseaux rectangulaires sur les récurrences des q -énumérations de chemin de Dyck de hauteur bornée.

Dans leur livre *Analytic Combinatorics* (Flajolet et Sedgewick, 2009), Philippe Flajolet et Robert Sedgwick reformulent des problèmes classiques de scrutins avec votes pondérés, en terme de généralise de chemins de Dyck qui dépendent du choix de certains pas admissibles. En particulier, ils considèrent les chemin de Motzkin où l'ensemble de pas admissible est $S = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Dans son article *Discret excursions* (Bousquet-Mélou, 2007), Mireille Bousquet-Mélou considère les chemins de hauteur bornée et non-bornée encore plus généralisé ayant un nombre fini de pas admissibles.

Une avenue d'exploration est de considérer les q -énumération de chemins de Motzkin et de borner la hauteur de tels chemins. Nous aimerions aussi tenir compte des

chemins de Schröder. Nous espérons éventuellement évaluer les chemins de Dyck, de Motzkin et de Schröder en plus de profondeur dans les réseaux rectangulaire ainsi que les réseaux différent du plan combinatoire, comme par exemple le réseau triangulaire suivant :



Un chemin auto-évitant est un chemin qui ne traverse pas le même sommet plus qu'une fois. Dans plusieurs articles, par exemple *Families of prudent self-avoiding walks* (Bousquet-Mélou, 2009), Mireille Bousquet-Mélou considère les chemins auto-évitants dans d dimensions. Ce sujet est particulièrement intéressant vu qu'il y a plusieurs applications dans la physique statistique. Il sera aussi intéressant de permettre les chemins de Dyck de se balader dans les réseaux de dimension d .

RÉFÉRENCES

- André, D. (1887). *Solution directe du problème résolu par M. Bertrand*. Paris, France : C. R. Acad. Sci. Paris.
- Bellhops, D. (2011). *Abraham De Moivre : Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications*. Boca Raton, Fl : A K Peters/CRC Press.
- Bergeron, F., Labelle, G. et Leroux, P. (1998). *Combinatorial species and tree-like structures*. Cambridge University Press.
- Bousquet-Mélou, M. (2007). Discret excursions. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire, vol. 57*.
- Bousquet-Mélou, M. (2009). Families of prudent self-avoiding walks. *Journal of Combinatorial Theory Series A*.
- Burris, S. et Sankappanavar, H. (1981). *A Course in Universal Algebra*. University of Waterloo : Springer Verlag.
- Comtet, L. (1970). *Analyse Combinatoire tomes I et II*. Paris, France : Presses universitaires de France.
- Deutsch, E. (1999). Dyck path enumeration. *Discret mathematics*.
- Flajolet, P. et Sedgewick, R. (June 26, 2009). *Analytic Combinatorics*. Le Chesnay, France et Princeton, USA : Cambridge University Press.
- Haglund, J. (2008). *The q, t -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics : With an Appendix on the Combinatorics of Macdonald Polynomials*. Philadelphia, PA : American Mathematical Society.
- Hilton, P. et Pedersen, J. (1991). Catalan numbers, their generalization, and their uses. [Online; accessed 20-May-2015]. Récupéré de <http://www.math.uakron.edu/~cossey/636papers/hilton%20and%20pedersen.pdf>
- Kim, H. S. (2008). Interview with professor stanley. [Online; accessed 11-May-2015]. Récupéré de <http://www.math.ucla.edu/~pak/lectures/Cat/Stanley-interview.pdf>

- Knuth, D. (1968). *The Art of Computer Programming, Volume 1 - Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley.
- Koshy, T. (2009). *Catalan numbers with applications*. New York, New York : Oxford University Press.
- Loehr, N. (2011). *Bijjective Combinatorics*. Blacksburg, Virginia : CRC Press.
- McMahon, P. (1983). *Combinatory analysis. AMS Chelsea Publishing (Second Addition)*.
- OEIS (2011). The on-line encyclopedia of integer sequences. [Online; accessed 11-May-2015]. Récupéré de <http://oeis.org>
- Peart, P. et Woan, W.-J. (2001). Dyck paths with no peaks at height k . *Journal of Integer Sequences*.
- Sasao, T. (1999). *SWITCHING THEORY FOR LOGIC SYNTHESIS*. Iizuka, Japan : Springer.
- Stanley, R. (1999). *Enumerative Combinatorics (second éd.)*, volume I. Massachusetts Institute of Technology : Cambridge University Press.
- Stanley, R. (2015). *Catalan Numbers*. Cambridge University Press.
- Wagner, D. (2008). Introduction to combinatorial enumeration. *Lecture Notes CO330*.

INDEX

- q -analogues des factoriels, 11
 q -analogues des nombres entiers, 11
 Aire d'un chemin de Dyck, 35
 anneau des séries formelles de Laurent,
 4
 Chemin de Dyck, 15, 17
 Chemin de réseau, 16
 Chemin de treillis, 54
 Chemin minimal, 41
 Chemin primitif, 26
 Chemins de Dyck à hauteur bornée, 40
 Chemins de Dyck primitifs à hauteur
 bornée par h , 46
 Chemins de taxi, $\mathcal{L}(a, b)$, 18
 Coefficients q -binomiaux, 54
 Coefficients du binôme en q , 11
 Corps fini, 56
 Descente, 27
 Ensemble des chemins de Dyck, 20
 Ensemble des chemins de Dyck d'ordre
 n , 20
 Ensemble des chemins de Dyck primi-
 tifs, 26
 Ensemble des marches admissibles \mathcal{S} , 16
 Expansion de séries binomiaux, 9
 Fonction pondérée, 6
 Formule du binôme négatif, 25
 GFUN, 45
 Grassmannienne, 56
 Index majeur, 27, 28
 Inversion, 27
 L'ordre d'un chemin de Dyck, 19
 Le formule du binôme de Newton en q ,
 58
 Mots, 19
 Nombre de chemins de Dyck d'ordre n ,
 17
 Nombre de descentes, 28
 Nombres de Catalan, 13
 Opérateur linéaire, 6
 Pas de chemin, 16
 promenade irréductible ou primitive, 71
 Réseau, 16
 Réseau euclidien, 16

86

Série formelle, 2

Série génératrice ordinaire, 6

Suite, 2

Théorème d'inversion de Lagrange, 8