

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MONOÏDE PLAXIQUE DÉCALÉ ET TABLEAUX DE YOUNG

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

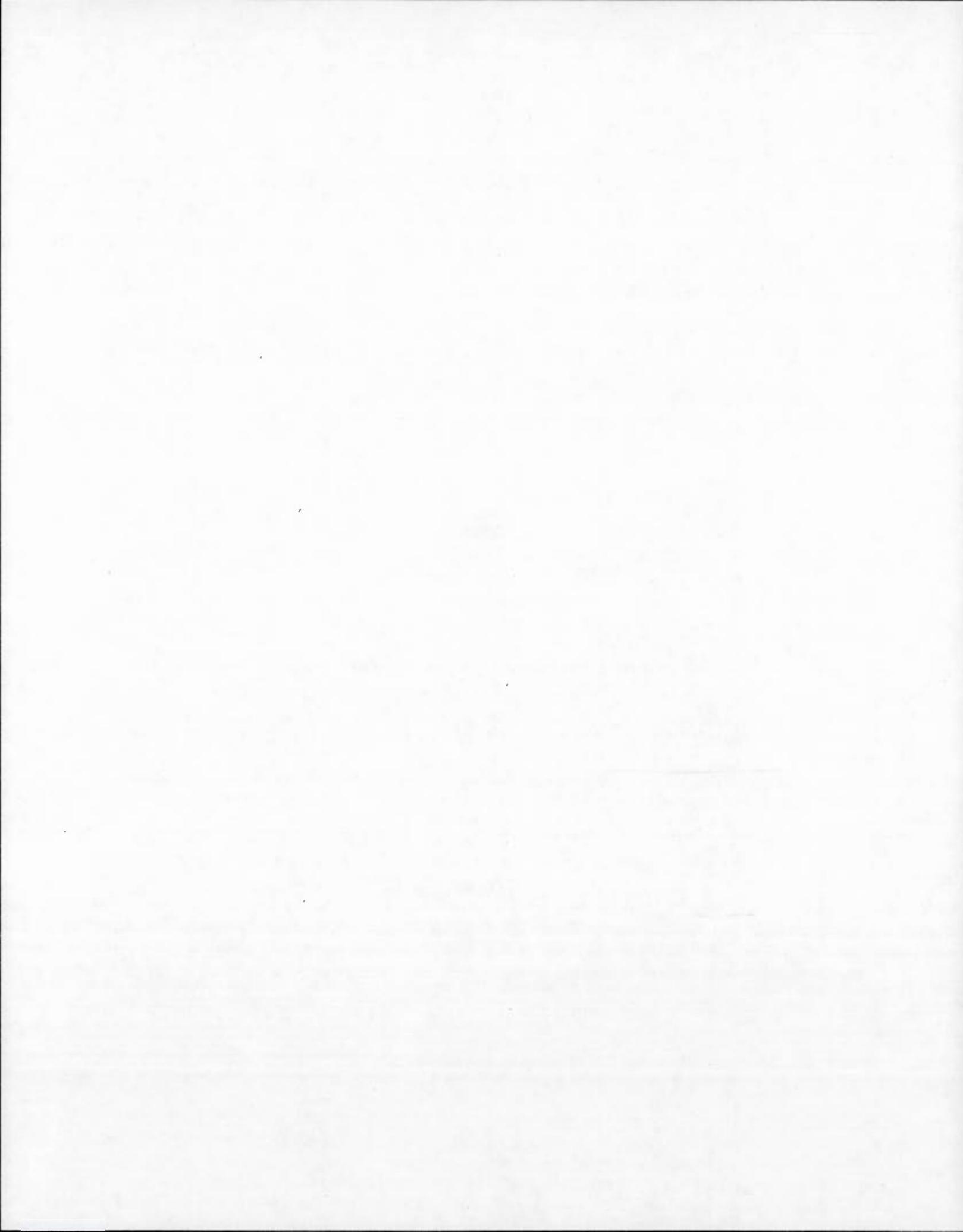
WIAM SERHAN

NOVEMBRE 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais remercier très chaleureusement mon directeur de maîtrise Franco Saliola, pour la confiance qu'il m'a accordée, sa générosité, sa dévouement, je le remercie également pour sa relecture attentive et patiente de mon mémoire, la clarté de ses explications et le temps qu'il m'a consacré. Sans sa confiance et son encouragement je n'aurais jamais fait terminé la rédaction de ce mémoire.

Je souhaite aussi remercier sincèrement Luis Serrano qui m'a guidé au début de la rédaction de mon mémoire. Je le remercie pour sa patience, pour toutes les fois où je l'ai rencontré pour lui poser des questions à propos de son article et pour ses suggestions qui ont amélioré le texte de manière significative.

Un grand merci à Olivier Collin le directeur des programmes de cycles supérieurs pour la confiance et le soutien qu'il m'a accordée.

Je remercie mes parents, mes soeurs et mon frère qui m'ont encouragée à continuer malgré les épreuves. Je remercie plus particulièrement mes enfants pour leur patience et leur soutien durant le temps de mes études.

Je tiens à remercier mon collègue José Eduardo Blazek, pour sa générosité et pour l'assistance avec Latex, ce qui a amélioré les figures et les exemples.

Enfin je voudrais remercier le Département de Mathématiques pour sa générosité en me soutenant pendant le temps de mes études, et je souhaite dire merci aux membres des laboratoires, Gisèle Légault du laboratoire des cycles supérieurs et Jérôme Tremblay de LaCIM pour leur disponibilité et leur générosité.

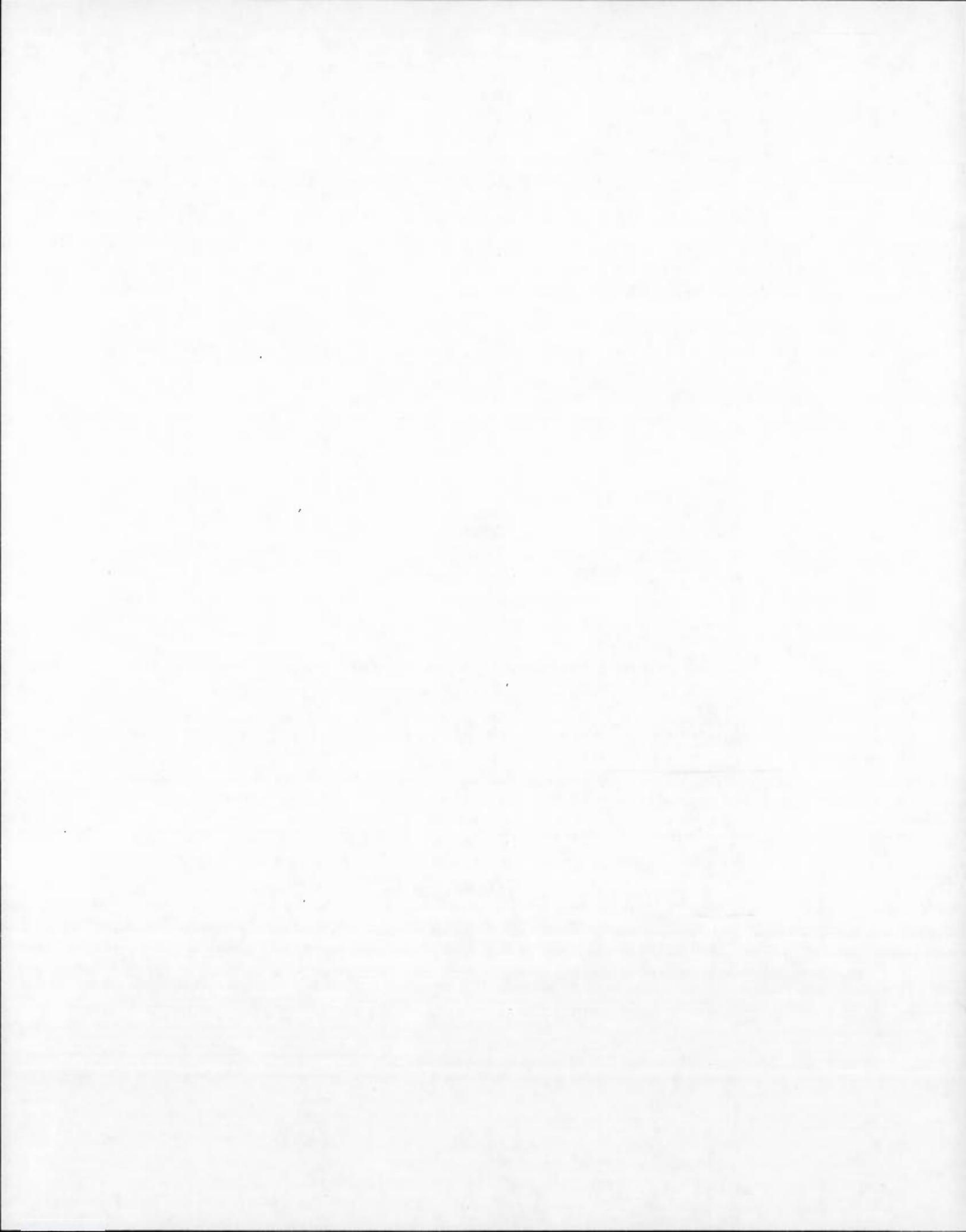


TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉLIMINAIRES	7
1.1 Introduction	7
1.2 Définitions et Propriétés	7
1.2.1 Les mots	7
1.2.2 Monoïde	8
1.2.3 Partages et diagrammes de Ferrers	9
1.2.4 Ordres partielles sur les partages	11
1.2.5 Diagramme gauche	11
1.2.6 Composition	12
1.2.7 Partage associé à une composition	13
1.2.8 Tableaux de Young	13
1.2.9 Formule des équerres	15
1.2.10 Le groupe symétrique	16
1.2.11 Décompositions des permutations	17
1.2.12 Algorithme de Robinson-Schensted- Knuth	19
1.2.13 Jeu de taquin	23
1.2.14 Le jeu de taquin simule l'algorithme de RSK	25
CHAPITRE II	
MONOÏDE PLAXIQUE ET TABLEAU DE YOUNG	27

2.1	Mots de tableaux	27
2.1.1	Insertion dans les mots de tableaux	28
2.1.2	Relations de Knuth	30
2.1.3	Jeu de taquin et relations de Knuth	32
2.1.4	Monoïde plaxique	33
2.1.5	Monoïde de tableaux semi-standards	34
2.1.6	Sous-mots croissants (décroissants) et les invariants de Greene	36

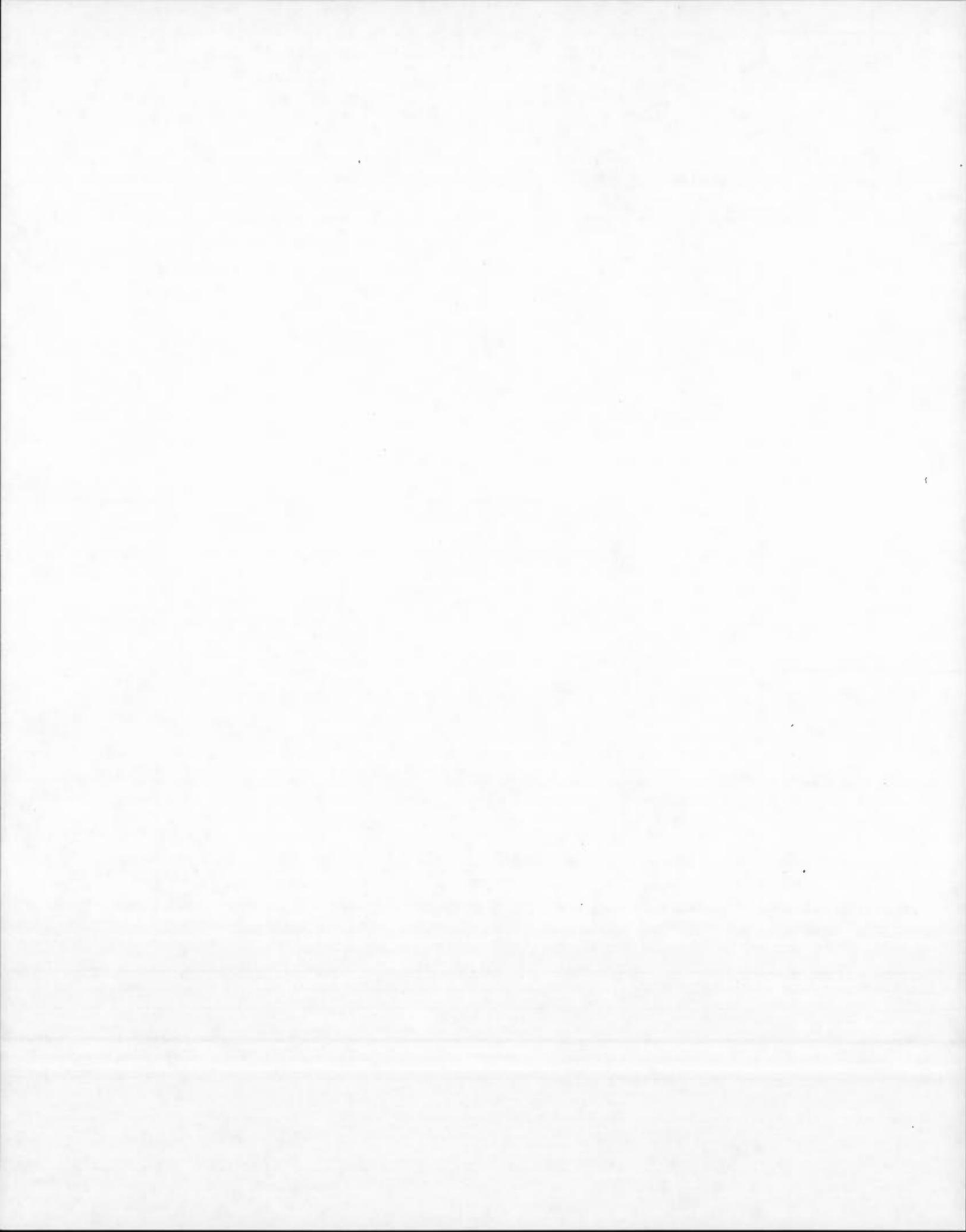
CHAPITRE III

	TABLEAU DE YOUNG DÉCALÉ	41
3.1	Introduction	41
3.2	Définitions et Propriétés	41
3.2.1	Partages stricts et diagrammes décalés	41
3.2.2	Tableaux de Young décalés	43
3.2.3	Formule des'équerres de Tableau de Young standard décalé	44
3.2.4	Insertion de Sagan-Worley	45
3.2.5	Le Jeu de taquin simule l'insertion de Sagan-Worley	48
3.2.6	Insertion mixte décalée	49

CHAPITRE IV

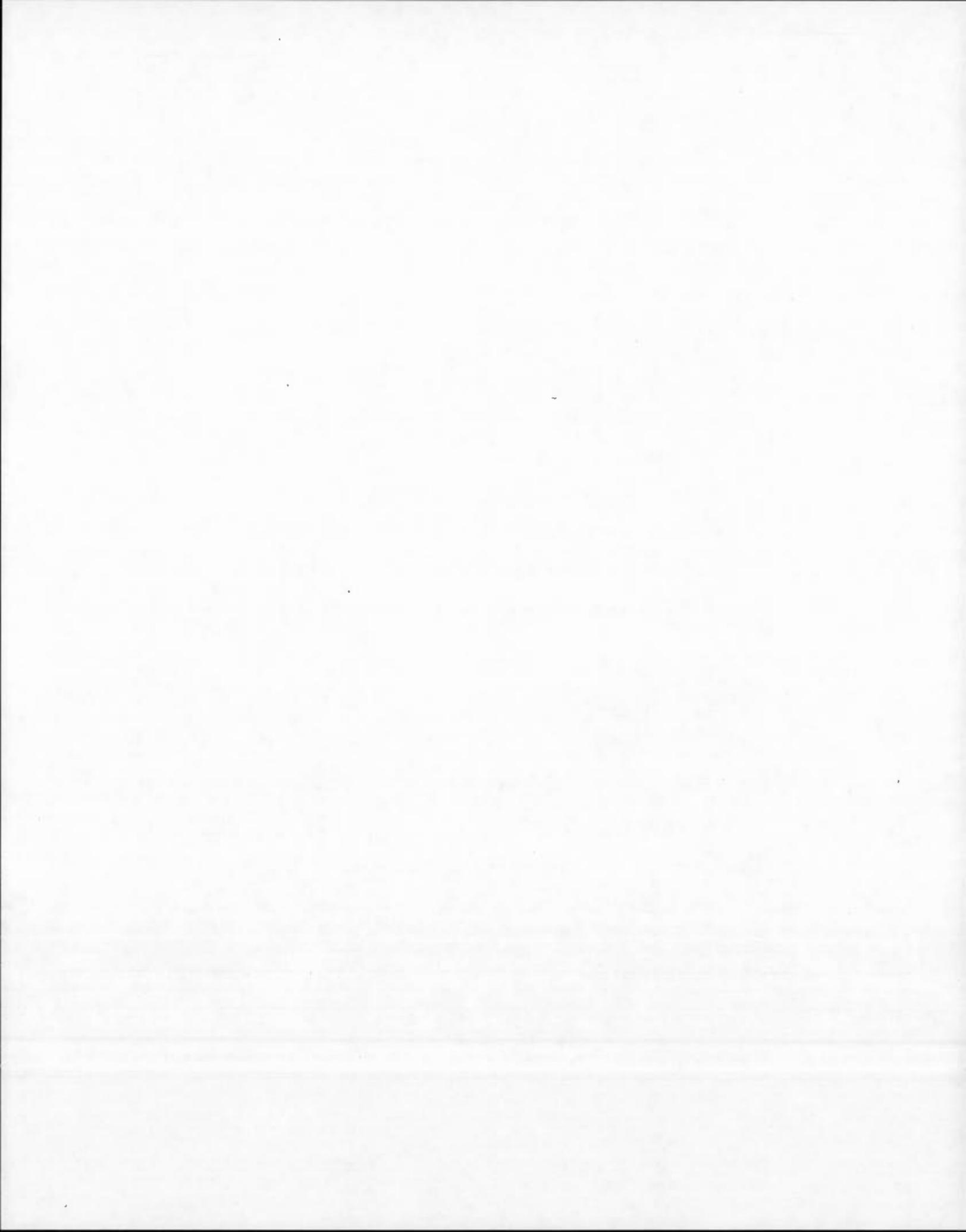
	MONOÏDE PLAXIQUE DÉCALÉ ET MOTS DE TABLEAUX DÉCALÉS	57
4.1	Introduction	57
4.2	Mots de tableaux décalés	57
4.2.1	Tableau vé	57
4.2.2	Tableau d'enregistrement spécial et mot de tableau décalé	58
4.2.3	Relations de Sagan-Worley	61
4.2.4	Relations plaxiques décalées	62
4.2.5	Monoïde plaxique décalé	69
4.2.6	Les invariants décalés de Greene	69

CONCLUSION	71
RÉFÉRENCES	73



LISTE DES FIGURES

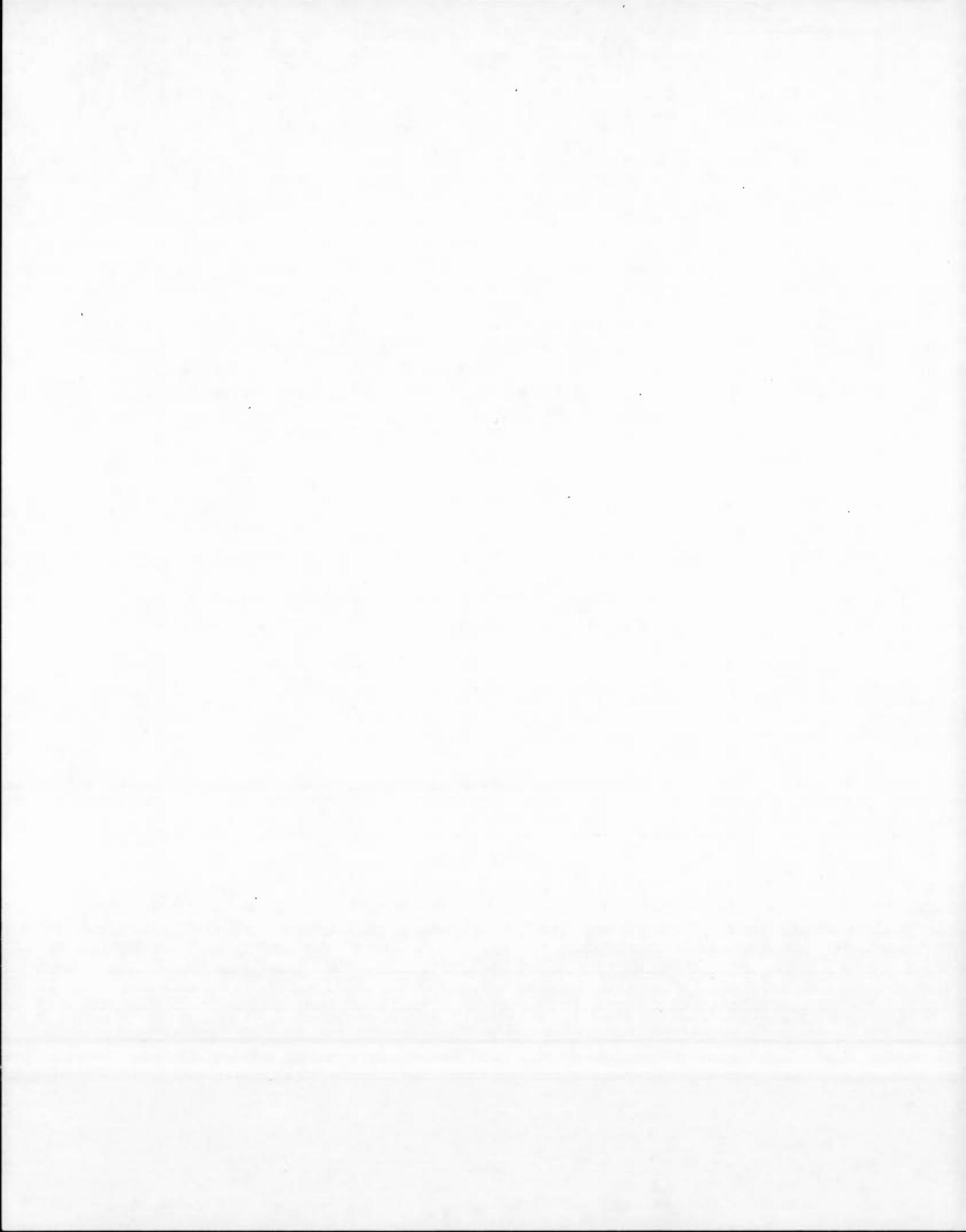
Figure	Page
1.1 Diagramme de Ferrers associé à $(4, 4, 2, 1)$, (notation française)	10
1.2 Diagramme de Ferrers conjugué de $(4, 4, 2, 1)$	11
1.3 Diagramme gauche	12
1.4 Tableau de Young de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans [12].	14
1.5 Tableau de Young semi-standard T_1 de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans [8].	14
1.6 Tableau de Young standard T_2 de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans [9]. . .	14
1.7 (a) Les longueurs des équerres associées au partage $(5, 4, 1)$ et (b) l'équerre associée à la case $(2, 1)$	16
1.8 Tableau obtenu $T \leftarrow 6$	20
1.9 Glissement de jeu du taquin	25
3.1 Diagramme décalé	42
3.2 Diagramme décalé gauche $(5,4,2) / (3,2)$ qui est une bande frontalière. .	43
3.3 Tableau de Young décalé.	44
4.1 Les classes plaxiques décalées de mot de 4 lettres	67



RÉSUMÉ

Ce mémoire se concentre sur la théorie des tableaux de Young décalés. Nous introduisons un analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et de Schützenberger, *le monoïde plaxique décalé*. Ce monoïde peut être défini de deux manières différentes soit par les relations de Knuth décalées, soit en utilisant l'insertion mixte de Haiman.

MOTS-CLÉS: tableaux de Young, algorithme de Robinson-Schensted, jeu de taquin, monoïde plaxique, tableaux de Young décalés, insertion de Haiman.



INTRODUCTION

Les tableaux de Young sont des objets combinatoires qui jouent un rôle important en théorie des représentations du groupe symétrique, dans la théorie des fonctions symétriques, et dans la théorie des représentations du groupe général linéaire. Ils ont été introduits en 1901 par Alfred Young [Youn01] comme un outil pour développer la théorie des représentations du groupe symétrique. Ils permettent en particulier de construire les représentations irréductibles du groupe symétrique. Après ce développement la théorie de tableaux de Young joue un rôle important dans plusieurs domaines mathématiques comme la combinatoire énumérative et la combinatoire géométrique. Nous étudions dans ce mémoire la théorie de tableaux de Young décalés qui est un analogue de la théorie de tableaux de Young du point de vue de la combinatoire algébrique. L'objectif principal de cet article est d'étudier la construction d'un analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et de Schützenberger, le monoïde plaxique décalé. Il s'appuie sur l'article de Luis Serrano "Noncommutative Schur P-functions and the shifted plactic monoïde", 2010. Dans cet article, Serrano a développé une théorie de monoïde plaxique pour les tableaux décalés similaire à celle de Lascoux et de Schützenberger, pour aider à obtenir une règle similaire de Littlewood-Richardson pour les fonctions P-Schur, un algorithme permettant de calculer le produit de deux fonctions de P-Schur [Serrano].

Il existe une gamme de monoïdes définis en tant que quotients du monoïde libre et dont les classes d'équivalence sont indexées par des objets combinatoires. Le monoïde historique et le plus fondamental, est le monoïde plaxique [LaSc], [Lot]. Ce monoïde a des importantes applications dans la théorie de la représentation et de la théorie de fonctions symétriques, voir [LaLe]. La principale illustration de l'importance du mo-

noïde plaxique est son intervention dans la démonstration de la règle de Littlewood-Richardson pour calculer les coefficients qui apparaissent lors de la multiplication de deux fonctions de Schur [Mac].

Une définition de ce monoïde repose sur la donnée d'une congruence sur les mots obtenue à partir des relations de Knuth [Knu]. Une autre approche, plus algorithmique, consiste à partir de l'algorithme de Schensted [Sche], qui permet de déterminer sur l'entrée d'un mot, la longueur de son plus long sous-mot croissant. Cet algorithme construit un tableau de Young à partir d'un mot, et il est naturel de considérer que deux mots sont équivalents s'ils produisent le même tableau lorsqu'on applique l'algorithme de Schensted. Il s'avère que ces deux approches mènent à la construction du même monoïde, que les éléments de ce dernier peuvent s'interpréter comme des tableaux de Young (semi-standards) et que le produit de ce monoïde se calcule par deux manières soit par l'intermédiaire de l'algorithme de Schensted, soit par le jeu de taquin.

Dans le chapitre 1 nous étudions la théorie de tableaux de Young, la célèbre correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), le théorème fondamental du jeu de taquin dû à Schützenberger (Théorème 1.2.2) qui affirme que le redressé par jeu de taquin d'un tableau gauche quelconque ne dépend que de ce tableau, et pas de la suite de glissements choisis. Nous étudions dans le chapitre 2 la construction du monoïde plaxique, en définissant un mot de lecture canonique pour chaque classe plaxique et indiquant ses propriétés importantes.

La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) [Sche] est une bijection entre des mots sur l'alphabet totalement ordonné $A = \{1 < 2 < 3 < \dots\}$ et les paires de tableaux de Young de même forme dont les entrées sont dans A , telle que, à chaque mot correspond une paire de tableaux (P, Q) avec P un tableau semi-standard et Q un tableau standard de même forme. On appelle P le tableau d'insertion du mot et Q le tableau d'enregistrement. Les mots qui produisent un tableau d'insertion donné forment

une classe plaxique. A. Lascoux et M. P. Schützenberger [LaSc] ont fait une observation basée sur un résultat par D. E. Knuth [Knu] : les classes plaxiques $\langle u \rangle$ et $\langle v \rangle$ de deux mots u et v déterminent la classe plaxique $\langle uv \rangle$ de leur concaténation. Cela donne l'ensemble de toutes les classes plaxiques, d'une manière équivalente l'ensemble de tous les tableaux semi-standards de Young, la structure d'un monoïde plaxique. Par conséquence, nous pouvons définir le monoïde plaxique dans lequel le produit est obtenu soit par la concaténation, soit par l'insertion de RSK ou soit par les glissements du jeu de taquin en concaténant deux tableaux de façon diagonale. On obtient donc le théorème principal suivant : deux mots sont équivalents selon la relation d'équivalence de Knuth si et seulement s'ils ont le même tableau d'insertion. Lascoux a développé une approche en prenant le monoïde plaxique comme l'objet fondamental, et identifie chaque tableau T avec une représentation canonique de la classe plaxique correspondante, le mot de lecture $w(T)$. Ce mot est obtenu par la lecture des lignes de T de gauche à droite, et de haut en bas. Un mot w tel que $w = w(T)$ pour un tableau semi-standard T est appelé un mot de tableau. Ce mot a la propriété suivante : Un mot w est un mot de tableau pour un tableau T si et seulement si w est une concaténation des mots $u_l u_{l-1} \dots u_2 u_1$ tels que pour $1 \leq i \leq l-1$, le plus long sous-mot croissant du mot $u_l u_{l-1} \dots u_i$ est u_i . Pour un mot de tableau w , la longueur de u_i est λ_i , pour $1 \leq i \leq l$ (les u_i sont les lignes du tableau de Young correspondant à w).

Notre objet principal est développé dans les chapitres 3 et 4, nous étudions un analogue approprié du monoïde plaxique pour des tableaux de Young décalés, avec des propriétés similaires, et un analogue de mot des tableaux dans le cadre décalé.

La théorie de tableaux décalés a été développée par D. Worley [Worley] et B. Sagan [Sagan] en deux points de vues différents, mais, les deux approches sont fondamentalement la même. Les tableaux de Young décalés sont des diagrammes de Young décalés (un diagramme décalé associé à un partage strict) remplis des lettres dans l'alphabet $A' = \{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$, voir, e.g., [Sagan]. M. Haiman [Haim] a intro-

duit l'insertion mixte (décalée) comme une bijection entre permutations et paires de tableaux de Young standards décalés, chaque paire est composé d'un tableau d'insertion mixte et d'un tableau d'enregistrement mixte. Cette correspondance peut être un analogue décalé de Robinson-Schensted-Knuth. La correspondance de Haiman est généralisée à une bijection entre des mots sur l'alphabet A et paires de tableaux tels que chaque paire est composé d'un tableau d'insertion mixte semi-standard et d'un tableau d'enregistrement mixte standard. Sagan [Sagan] et Worley [Worley] ont introduit la correspondance de Sagan-Worley, un autre analogue de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth pour les tableaux décalés. Haiman [Haim] a prouvé qu'il y a une dualité entre la correspondance d'insertion mixte et la correspondance de Sagan-Worley.

Dans chapitre 3 nous étudions la relation entre le jeu du taquin et l'insertion de Sagan-Worley, nous trouverons que le tableau décalé obtenu par les glissements de jeu de taquin est le même tableau d'insertion décalé obtenu par l'insertion de Sagan-Worley à un mot w . Nous essayons de construire un monoïde plaxique décalé, en utilisant les relations de Sagan-Worley (4.2.4), mais nous trouvons que ces relations ne permettent pas de définir une structure de monoïde, car ils ne sont pas compatibles avec la concaténation.

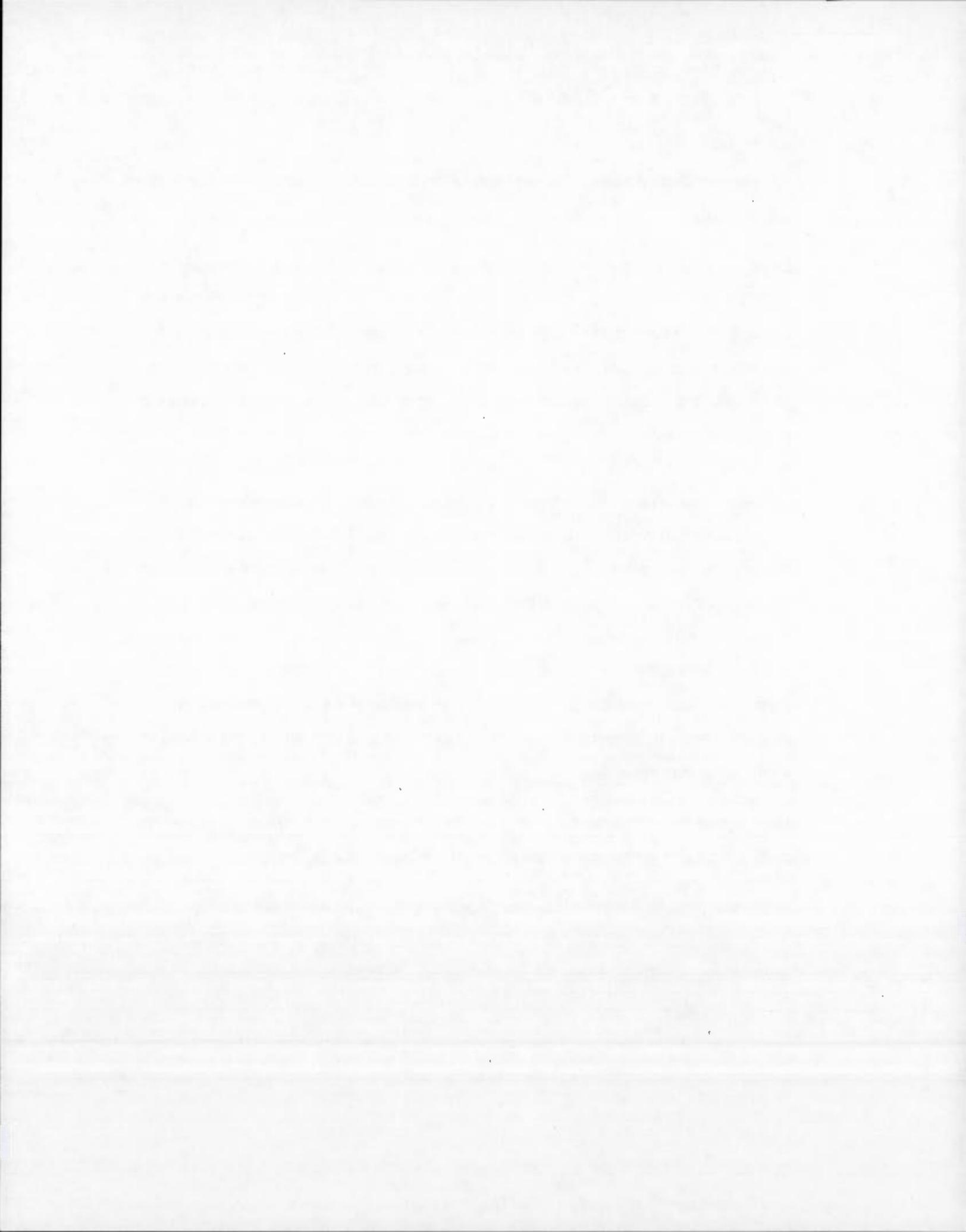
Alors pour construire ce monoïde nous utilisons les relations d'équivalences (plaxiques) décalées définis dans chapitre 4 (4.2.5). Nous définissons la classe plaxique décalée, la classe d'équivalence pour les relations plaxiques décalées comme l'ensemble de tous les mots qui ont un tableau d'insertion mixte donné. La propriété suivante, analogue à celle de Lascoux et Schützenberger, dévient : la classe plaxique décalée de la concaténation des deux mots u et v ne dépend que des classes décalées de u et de v . Par conséquence, on peut munir l'ensemble de classes plaxiques décalées d'une structure de monoïde où le produit est donné par la concaténation des mots. Par analogie avec le cas ordinaire, on obtient le théorème suivant : deux mots sont équivalents selon les

relations de Knuth décalées si et seulement s'ils ont le même tableau d'insertion mixte (de Haiman).

Donc, on peut également définir le monoïde plaxique décalé comme l'ensemble de tableaux semi-standards décalés dans lequel le produit est défini par la concaténation de mots de tableaux décalés. Ces mots sont développés par Serrano [Serrano]. Il a construit une représentation canonique pour chaque classe plaxique décalée, le mot de lecture mixte. Comme les tableaux de Young décalés ont des entrées marquées et les mots dans leurs classes plaxiques décalées n'en pas, alors le mot de lecture d'un tableau de Young décalé ne peut pas être défini d'une manière simple que dans le cas classique. Alors nous définissons le mot de lecture mixte $w_m(T)$ d'un tableau décalé T comme le seul mot dans la classe plaxique décalée correspondante et qui a un tableau d'enregistrement spécial (4.2.1). Cette notion est un homologue de tableau de lecture dual de P. Edelman et C. Greene [EGR]. Un mot w est un mot de tableau décalé s'il est le mot de lecture d'un tableau de Young décalé de telle sorte que $w = w_m(T)$. Ces mots ont une propriété similaire à la propriété de mots de tableaux ordinaires, mais avec les mots faiblement croissants $u_i u_{i-1} \dots u_2 u_1$ sont remplacés par des mots d'équerre (un mot d'équerre est un mot composé d'un segment strictement décroissant suivi d'un autre faiblement croissant).

Cette notion de mot de lecture mixte est précisément la notion qui nous permet de décrire le produit en termes de tableaux semi-standards décalés.

On conclut que le monoïde plaxique décalé peut être défini de deux manières différentes : soit par les relations de Knuth décalées, ou en utilisant l'insertion mixte de Haiman.



CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Ce chapitre rappelle les définitions et les concepts de base de combinatoire utilisés dans ce mémoire. Nous fixons nos notations et rappelons les définitions à propos des monoïdes, des mots, des permutations qui sont des mots particuliers, de diagramme et des tableaux de Young. Nous rappelons également de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth et du jeu de taquin ainsi que certaines de leurs propriétés importantes.

1.2 Définitions et Propriétés

1.2.1 Les mots

Notons $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, avec n un entier positif.

Définition 1.2.1. Soit $A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un ensemble fini ou infini totalement ordonné par $a_i < a_j$ si et seulement si $i < j$. A s'appelle alphabet, les éléments de A sont appelés lettres. Un mot sur l'alphabet A est une suite finie de lettres de A . Soit $u := u_1 u_2 \dots u_n$ un mot où $u_i \in A$. La longueur de u , c'est le nombre de lettres qui le constituent et est notée $l(u)$. Alors, $l(u) = n$. L'unique mot de longueur 0 est le mot vide et est noté ϵ . Un facteur de u est un mot de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_j$ avec $i \leq j \in [n]$. Lorsque $i = 1$, ce facteur est également un préfixe de u , alors un préfixe est tout mot de la forme $u_1 u_2 \dots u_j$. Et lorsque $j = n$, il s'agit d'un suffixe, alors un suffixe est tout

mot de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_n$. Un sous-mot de u est un mot de la forme $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ où

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq l(u).$$

L'image miroir de u est le mot $u^* := u_n \dots u_2 u_1$.

Exemple 1. Considérons sur l'alphabet $A = \{a < b < c < e < f\}$, le mot $u = abecbbfec$. Alors on a bcf est un sous mot de u , ecb est un facteur, abe est un préfixe et $bfec$ est un suffixe de u .

On appelle *concaténation* de deux mots u et v le mot $w = u \cdot v$ obtenu en écrivant les lettres de v à la suite de celles de u . Pour simplifier, on écrit uv au lieu de $u \cdot v$ quand ceci ne créera pas d'ambiguïté. C'est -à- dire si $u := u_1 \dots u_n$ et $v := v_1 \dots v_m$ sont deux mots, la concaténation de u et v , notée uv , est le mot $u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$. Cette opération est associative, et elle n'est pas nécessairement commutative.

Exemple 2. Soient u et v deux mots tel que $u = ab$ et $v = bba$ alors $uv = abbba$, $u^3 = ababab$ et $v^2 = bbabba$.

Dans un souci d'alléger les notations, les mots seront notés par des suites d'entiers, spécifiant sans ambiguïté les lettres de A correspondantes. Ainsi, à titre d'exemple, la suite 213211 sera la notation du mot $a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 a_1$.

1.2.2 Monoïde

Définition 1.2.2. Un monoïde est un ensemble M muni d'une loi de composition interne de la forme $\cdot : M \times M \rightarrow M$ et telle que

(i) \cdot est associative : $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pour tous $x, y, z \in M$

(ii) \cdot admet un élément neutre $1 \in M : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ pour tout $x \in M$.

Nous notons un monoïde sous la forme de triplet $(M, \cdot, 1)$ ou bien $(M, 1)$. Soit G un sous-ensemble de M . Nous notons par G^* le monoïde engendré par G , c'est-à-dire le

plus petit sous-monoïde de M qui contient G . La partie $M' \subseteq M$ est un sous-monoïde de M si $1 \in M'$ et $x \cdot y \in M'$ pour tout $x, y \in M'$. Soit $(N, \cdot_N, 1_N)$ et $(M, \cdot_M, 1_M)$ deux monoïdes. Un morphisme de monoïde est une application $\varphi : M \rightarrow N$ telle que

$$\varphi(1_M) = 1_N \text{ et pour tout } x, y \in M,$$

$$\varphi(x \cdot_M y) = \varphi(x) \cdot_N \varphi(y).$$

L'ensemble des mots sur l'alphabet A muni du produit de concaténation est un monoïde appelé monoïde libre engendré par A , que l'on note A^* . Le monoïde A^* est fermé par la concaténation tel que soit u et v deux mots dans A^* , alors $uv \in A^*$, et admet ϵ comme élément neutre ; il est de plus engendré par l'ensemble A . Si K est un corps, on note $K\langle A \rangle$ l'espace vectoriel engendré par les mots de A^* ou, de manière équivalente, l'espace vectoriel des polynômes non commutatifs dont les variables sont des éléments de A . La concaténation munit $K\langle A \rangle$ d'une structure d'algèbre non commutative appelé algèbre libre engendré par A .

D'après les notes du cours de François Bergeron [Ber], on introduit les notions suivantes.

1.2.3 Partages et diagrammes de Ferrers

Définition 1.2.3. Un diagramme est un sous-ensemble fini $D = \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Les éléments de D sont appelés les cases de D . Si le diagramme a n cases, on dit que D est un n – diagramme. Une case (i, j) d'un diagramme correspond à un carré unitaire dans le plan $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Définition 1.2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un partage ou une partition λ de n est une suite décroissante finie d'entiers positifs. Dans ce texte on va utiliser le mot partage pour λ . On note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ vérifiant :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = |\lambda| = n.$$

On écrit $\lambda \vdash n$ lorsque λ est un partage de n . Si la suite d'entiers est nulle, on dénote par \emptyset et on l'appelle partage vide. De plus, si λ a m_i parts de taille i , on écrit encore $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$. On dit alors que m_i est la multiplicité de la part i dans λ . La longueur $l(\lambda) = k$ de λ est le nombre de parts de λ .

Par exemple $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ est un partage de 11, alors $\lambda = 1^1 2^1 4^2$, et $l(\lambda) = 4$.

Définition 1.2.5. On appelle diagramme de Ferrers ou de Young de forme λ le diagramme de $l(\lambda)$ lignes ayant λ_i cases cadrées à gauche dans la i -ème ligne. Explicitement, il est le diagramme

$$Y(\lambda) = \{(i, j); 1 \leq i \leq l(\lambda) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Les cases d'un diagramme de Young sont généralement indicées par des paires d'entiers, le premier indice dénotant la ligne, le deuxième la colonne. La notation française correspond aux coordonnées cartésiennes de manière que les coordonnées i et j sont les y et x du plan cartésien.

On identifie λ à son diagramme de Ferrers $Y(\lambda)$.

Exemple 3. Diagramme de Ferrers associé au partage $(4, 4, 2, 1)$ de 11

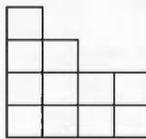


Figure 1.1: Diagramme de Ferrers associé à $(4, 4, 2, 1)$, (notation française)

Avec $l(\lambda) = 4$ et $Y(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Dans ce travail nous utilisons la notation française. La notation anglaise est obtenue par la réflexion par rapport à l'axe horizontal du plan.

Définition 1.2.6. *Le conjugué de λ , notée λ' , est le partage liée à λ par la réflexion sur la diagonale principale, avec $Y(\lambda') = \{(j, i) \mid (i, j) \in Y(\lambda)\}$.*

On a $|\lambda| = |\lambda'| = |Y(\lambda)|$, $l(\lambda') = \lambda_1$ et $(\lambda')' = \lambda$.

Exemple 4. *Le partage $(4, 3, 2, 2)$ conjugué de $(4, 4, 2, 1)$*

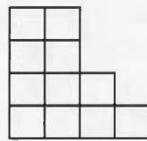


Figure 1.2: Diagramme de Ferrers conjugué de $(4, 4, 2, 1)$.

avec $|\lambda| = |\lambda'| = |Y(\lambda)| = 11$, et $l(\lambda') = 4 = \lambda_1$.

1.2.4 Ordres partielles sur les partages

L'ensemble des partages admet trois ordres partiels

- **Ordre d'inclusion** : Un partage λ est contenu dans le partage μ si leurs diagrammes associés satisfont $\lambda \subseteq \mu$, où \subseteq est l'inclusion par sous-ensembles. Par abus de notation, on dénote par \subseteq l'ordre d'inclusion sur les partages.
- **Ordre de dominance** : On dit que le partage λ domine le partage μ si $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$, pour tout $k \geq 0$. On écrit $\lambda \triangleleft \mu$ lorsque λ domine μ .
- **Ordre lexicographique** : On écrit $\lambda < \mu$ si la première différence non nulle $\mu_i - \lambda_i$ est positive.

1.2.5 Diagramme gauche

Définition 1.2.7. *Une forme gauche est un couple (λ, μ) de partages tel que $\lambda \supset \mu$ c'est-à-dire le diagramme de Young du partage λ contient le diagramme de Young du*

partage μ ; ceci signifie que si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, alors $\lambda_i \geq \mu_i$ pour tout i . Une forme gauche est notée λ/μ ou $\lambda \setminus \mu$. Le diagramme gauche d'une forme gauche est la différence ensembliste des diagrammes de Young de λ et de μ .

Exemple : si $\lambda = (5, 2, 2, 1)$ et $\mu = (2, 1)$, le diagramme gauche de forme λ/μ est

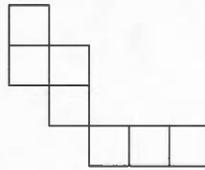


Figure 1.3: Diagramme gauche

1.2.6 Composition

Définition 1.2.8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une composition α de n est une suite finie $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ d'entiers positifs tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$. Si α est une composition de n on écrit $\alpha \models n$.

La taille de α est le nombre $|\alpha| = n$, la longueur de α , dénotée par $l(\alpha)$ est k . Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont les parties de α . On appelle composition vide si le nombre de parties est $n = 0$.

Exemple 5. Exemples de compositions de 12

Soient $\alpha_1 = (3, 3, 4, 2)$, $\alpha_2 = (4, 5, 3)$ et $\alpha_3 = (1, 2, 1, 5, 3)$.

On a $l(\alpha_1) = 4$, $l(\alpha_2) = 3$ et $l(\alpha_3) = 5$.

1.2.7 Partage associé à une composition

Soit $\alpha \models n$, on peut produire un partage de n en ordonnant de façon décroissante les parties de α . On dénote par $\lambda(\alpha)$ le partage obtenu à partir de α et on l'appelle partage dérivé de α .

Les partages dérivés des compositions de α_1, α_2 et α_3 dans l'exemple précédent sont

$$\lambda(\alpha_1) = (4, 3, 3, 2), \quad \lambda(\alpha_2) = (5, 4, 3), \quad \lambda(\alpha_3) = (5, 3, 2, 1, 1).$$

1.2.8 Tableaux de Young

Un tableau de Young de forme λ et à valeur dans $[n]$ est une fonction

$$T : \lambda \rightarrow [n]$$

Rappelons que, on identifie λ à son diagramme de Ferrers

$$Y(\lambda) = \{(i, j); 1 \leq i \leq l(\lambda) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

Définition 1.2.9. *Un tableau de Young est construit à partir du diagramme de Ferrers tel que ses cases sont remplies avec des éléments de l'ensemble $[n]$. Il est indexé*

$$T = \{T(i, j); 1 \leq i \leq l(\lambda) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Exemple 6. *La figure 1.4 montre un tableau de forme $(4, 2, 2, 1)$.*

Définition 1.2.10. *Un tableau de Young T est dit semi-standard si les nombres placés dans ses cases sont en ordre croissant pour chaque ligne et strictement croissant pour chaque colonne, c'est-à-dire*

$$T(i, j) \leq T(i + 1, j) \text{ et } T(i, j) < T(i, j + 1).$$

4			
1	6		
3	8		
5	12	3	7

Figure 1.4: Tableau de Young de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans $[12]$.

7			
5	8		
3	5		
2	2	2	6

Figure 1.5: Tableau de Young semi-standard T_1 de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans $[8]$.

Exemple 7. La figure 1.5 montre un tableau semi-standard de forme $(4, 2, 2, 1)$.

Un tableau de Young T est dit *standard* s'il est semi-standard et chaque chiffre de $\{1, 2, \dots, n\}$ apparaît exactement une fois dans le tableau, où $|\lambda| = n$.

Exemple 8. La figure 1.6 montre un tableau standard de forme $(4, 2, 2, 1)$.

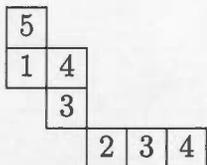
9			
6	8		
3	5		
1	2	4	7

Figure 1.6: Tableau de Young standard T_2 de forme $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans $[9]$.

On dénote par $SST_\lambda[n]$ (respectivement $ST_\lambda[n]$) l'ensemble des tableaux semi-standards (respectivement standards) de forme λ à valeur dans $[n]$. On dénote par SST l'ensemble de tableaux semi-standard à valeurs positifs.

Définition 1.2.11. Un tableau de Young gauche est obtenu en remplissant les cases du diagramme gauche correspondant.

Exemple 9.



Définition 1.2.12. Soit T un tableau de Young. Le contenu c de T est

$$c(T) = 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots$$

où m_i est la multiplicité de l'entier i dans T .

Pour le tableau T_1 de la figure 1.5, on a $c(T_1) = 2^3 3^1 5^2 6^1 7^1 8^1$. Si $T \in ST_\lambda$, alors $c(T) = 123 \dots |\lambda|$. Alors, pour le tableau T_2 de la figure 1.6, on a $c(T_2) = 123456789$.

Définition 1.2.13. Soit T un tableau, on appelle poids de T et on note x^T le monôme dont l'exposant de x_i est égale au nombre d'occurrences de l'entier i dans T .

Exemple 10. Le monôme de T_1 est $x_2^3 x_3 x_5^2 x_6 x_7 x_8$.

1.2.9 Formule des équerres

Définition 1.2.14. On appelle équerre associée à une case (i, j) du diagramme, l'ensemble $H_{i,j}$ qui contient (i, j) ainsi que les cases du diagramme qui se trouvent en-dessus ou à droite de (i, j) .

$$H_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \{(i, j') \mid j' > j\} \cup \{(i', j) \mid i' > i\}$$

On désigne par $h_{i,j}$ la longueur de l'équerre partant de la case (i, j) , c'est-à-dire $h_{i,j} := |H_{i,j}|$.

La formule des équerres (voir, par exemple, [Stanley]) est une formule qui permet de calculer le nombre de tableaux de Young standards de forme λ donnée. Le nombre de tableaux de Young standards de forme donnée λ est égal à la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique \mathfrak{S}_n correspondant à un partage λ de n .

Théorème 1.2.1. (Frame-Robinson-Thrall) [FRT] Soit f^λ le nombre de tableaux de Young standard de forme λ pour un partage de n . Alors on a :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}}$$

où le produit porte sur toutes les cases du diagramme de Ferrers de forme λ .



Figure 1.7: (a) Les longueurs des équerres associées au partage $(5, 4, 1)$ et (b) l'équerre associée à la case $(2, 1)$.

Exemple 11. Pour le partage $\lambda = (5, 4, 1)$ (figure 1.7), on obtient

$$f^\lambda = \frac{10!}{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 288.$$

Il y a donc 288 tableaux de Young standard de cette forme, et il y a autant de dimension à la représentation irréductible du groupe symétrique \mathfrak{S}_{10} correspondant à ce partage.

1.2.10 Le groupe symétrique

Définition 1.2.15. Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même. L'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des permutations de l'ensemble E muni de l'opération de composition \circ , forme un groupe appelé le groupe symétrique de E . Dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, n\}$, cet ensemble se note \mathfrak{S}_n , et $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

On représente toute permutation σ de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Nous adopterons la notation mot des permutations où σ sera en effet notée par le mot $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$. La taille d'une permutation est la longueur du mot qui la représente.

La permutation qui envoie chaque élément sur lui-même est l'application *identité*, on la note *Id*. L'inverse de σ est la permutation σ^{-1} telle que $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id = \sigma^{-1} \circ \sigma$. Une permutation qui échange deux éléments distincts i et j en laissant tous les autres inchangés est appelée *transposition*. Une permutation σ est dite *cyclique* ou *circulaire* s'ils existent $a_1, a_2, \dots, a_p \in [n]$ différents tels que σ envoie a_1 sur a_2 , puis a_2 sur a_3 etc. et enfin a_p sur a_1 , tandis que les $n - p$ éléments restants de l'ensemble $[n]$ sont fixés par σ . On note

$$\sigma = (a_1 a_2 \dots a_p).$$

Là encore $(a_1 \dots a_p) = (a_2 \dots a_p a_1) = \dots$. On appelle σ un p -*cycle* et le nombre p est la longueur du cycle. L'ordre d'un p -*cycle* est donc égal à p . Donc, une transposition est un 2-cycle.

1.2.11 Décompositions des permutations

Décomposition en produit de transpositions

Toute permutation de support fini peut être décomposée en un produit de transpositions, alors pour toute permutation σ , il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ transpositions telle que $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_m = \prod_{i=1}^m \sigma_i$, une telle décomposition n'est pas unique. Or, la parité du nombre de transpositions demeure la même dans chaque décomposition en produit de transpositions.

Une permutation paire (respectivement impaire) est une permutation qui peut être ex-

primée comme le produit d'un nombre pair (respectivement impaire) de transpositions.

On appelle signature de σ l'application

$$\text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{si } \sigma \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } \sigma \text{ est impair.} \end{cases}$$

La permutation identité est une permutation paire car elle peut être considérée comme le produit de 0 transposition.

Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

L'orbite d'un élément selon une permutation σ est l'ensemble de ses images successives obtenues par applications répétées de σ .

Par exemple, considérons la permutation de \mathfrak{S}_6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

L'orbite de 1 est donc l'ensemble $\{1, 3, 5\}$. L'orbite de 3 est également l'ensemble $\{1, 3, 5\}$, mais l'orbite de 2 est $\{2, 4\}$. Plus généralement, pour une permutation quelconque, les orbites sont disjointes et forment une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Toute permutation peut s'écrire de façon unique comme produit de cycles disjoints. Pour chaque orbite de σ dans \mathfrak{S}_n , on construit un cycle en suivant l'ordre de succession des éléments de l'orbite par itération de σ . Ainsi, $\sigma = \prod_{i=1}^r \sigma_i$ où chaque σ_i est un k_i -cycle, avec k_i égal au nombre d'éléments de l'orbite associée à σ_i . Les longueurs des cycles d'une permutation σ forment une partition de n appelé le type cyclique de σ . Il s'agit d'un 1 dans le type de cycle pour chaque point fixe de σ , un 2 pour chaque transposition, et ainsi de suite.

On peut supposer $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$. On dénote

$$T(\sigma) = (k_1, k_2, \dots, k_r).$$

$T(\sigma)$ s'appelle le type cyclique de la permutation σ .

Exemple 12. On peut écrire σ de façon unique comme la décomposition en cycles disjoints suivante

$$\sigma = (135)(24)(6).$$

On peut aussi décomposer σ comme les produits de transpositions

$$\sigma = (13)(35)(24).$$

Le type cyclique de σ est $(3,2,1)$ qui est une partition de 6, on peut aussi l'écrire $\sigma = 3^1 2^1 1^1$. La signature de σ est donc $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$.

1.2.12 Algorithme de Robinson-Schensted- Knuth

Définition 1.2.16. La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, aussi appelée RSK, permet d'associer de manière récursive à tout mot w de A^* une paire de tableaux de Young de même forme.

C'est-à-dire à w on fait correspondre deux suites (P_0, P_1, \dots, P_n) et (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) avec P_k un tableau de Young semi-standard et Q_k un tableau de Young standard, définies récursivement de la manière suivante

(1) Si w est le mot vide alors $P = \emptyset$, et $Q = \emptyset$.

(2) Si w est non vide, alors on insère w_k dans P_{k-1} pour $k = 1, 2, \dots, n$ de la manière suivante

– si w_k est plus grand que ou égal à tous les éléments de la première ligne, on ajoute w_k à la fin de cette ligne.

– si non, soit a_1 le plus petit des éléments de la première ligne tel que $a_1 > w_k$, on remplace a_1 par w_k et on insère a_1 dans la ligne suivante, et on continue ligne par ligne.

La procédure se termine lorsque l'élément a_i supplanté de la ligne i est supérieur ou égal à chaque élément de la ligne $i + 1$ (qui pourrait être vide), dans ce cas, a_i est placé à l'extrémité droite de la ligne $i + 1$, et alors l'algorithme arrête. Le tableau obtenu P_k est un tableau semi-standard dénoté $P_{k-1} \leftarrow w_k$.

Voir les exemples détaillés 13 et 14 pour cette correspondance.

En générale, pour un tableau $T = [T(i, j)]$ à k éléments, et x un entier, on désigne par $T \leftarrow x$ le tableau semi-standard correspondant à l'insertion (par ligne) de x dans T .

Exemple 13. Si T est le tableau

11			
5	8		
2	3	7	9

et si $x = 6$, alors le tableau obtenu $T \leftarrow 6$ est

11			
8			
5	7		
2	3	6	9

Figure 1.8: Tableau obtenu $T \leftarrow 6$

Pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$ notons (i_k, j_k) la nouvelle case qu'on a ajouté à P_{k-1} en lui appliquant l'algorithme d'insertion. Le tableau Q_k est alors obtenu en ajoutant à Q_{k-1} la case $T(i_k, j_k) = k$. C'est-à-dire Q_k est obtenu en ajoutant une lettre à Q_{k-1} , dans une nouvelle case en même position que celle par laquelle P_k diffère de P_{k-1} .

Posons $P_n = P$ et $Q_n = Q$, alors la paire (P, Q) est la paire de tableaux de Young associés à w par l'algorithme de RSK où P est semi-standard et Q est un tableau standard.

On appelle P le tableau d'insertion et Q le tableau d'enregistrement dénoté respectivement par P_{RSK} et Q_{RSK} .

Exemple 14. Soit le mot $w = 1332212$, l'algorithme décrit par RSK donne les paires (P_k, Q_k) suivantes, pour $k = 1, 2, \dots, 7$

$$P_k: \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_k: \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

On a donc

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

La correspondance RSK généralise la correspondance de Robinson-Schensted, en ce sens si w est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, alors la paire (P, Q) est le couple de tableaux standards associé à la permutation par la correspondance Robinson-Schensted.

La correspondance de RSK possède un nombre des propriétés remarquables.

Proposition 1.1. *La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth établit une bijection*

$$\pi : A^* \rightarrow \{(P, Q) \mid P \text{ semi-standard, } Q \text{ standard, et } \lambda(P) = \lambda(Q)\},$$

entre les mots, et les paires de tableaux P semi-standard et Q standard de même forme.

Si on applique l'algorithme de RSK sur les permutations w^* et w^{-1} , on obtient les relations suivantes, découvertes par Schützenberger.

Proposition 1.2. *Pour toute permutation w , si (P, Q) est la paire de tableaux associé par la correspondance de RSK à w , on a*

$$P(w^{-1}) = Q(w) \text{ et } Q(w^{-1}) = P(w)$$

Exemple 15. *Pour $w = 3641725$, on a $w^{-1} = 4613725$. La correspondance de RSK nous donne*

$$P(w^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad Q(w^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

et

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Alors on trouve que $Q(w^{-1}) = P(w)$ et $P(w^{-1}) = Q(w)$.

La permutation miroir de $w = w_1 w_2 \dots w_n$ est la permutation $w^* = w_n w_{n-1} \dots w_1$.

D'autre part, pour tout tableau de Young T de forme λ , on note P^* le tableau transposé de T dont la forme λ^* est le partage conjugué de λ .

Proposition 1.3. *Pour toute permutation w , on a*

$$P(w^*) = P^*(w).$$

Exemple 16. *Pour $w = 3641725$, on a $w^* = 5271463$. Le tableaux d'insertion est*

$$P(w^*) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 7 & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

On remarque que $P(w^*)$ est le tableau transposé de $P(w)$ de l'Exemple 15.

Soit A et B deux alphabets, une bi-lettre de $A \times B$ est dénoté $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Un bi-mot W est un élément de $(A \times B)^*$, on le dénote

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}.$$

Un bi-mot est dit lexicographique, si ses bi-lettres (les colonnes) sont ordonnées en ordre lexicographique croissant. Plus Précisément, on définit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{si } a < c \text{ ou } a = c \text{ et } b \leq d.$$

Alors W est lexicographique si $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \preceq \cdots \preceq \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$.

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ est un bi-mot.}$$

La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth peut être généralisée aux bi-mots. Elle associe récursivement à tout bi-mot lexicographique U une paire de tableaux semi-standards $(P, Q) = (P(U), Q(U))$ de même forme. Les propositions précédentes ont été étendues aux bi-mots par Knuth, (voir, par exemple, [Ber]).

1.2.13 Jeu de taquin

Le *jeu de taquin* a été introduit par Schützenberger [Sch63], [Sch77], au cours de ses recherches sur les tableaux de Young. C'est un algorithme qui transforme un tableau gauche semi-standard en un tableau semi-standard.

Définition 1.2.17. Les glissements du jeu de taquin sont définies sur des tableaux semi-standards gauches contenant une case vide par :

$$(1) \begin{array}{|c|c|} \hline b & \\ \hline \cdot & a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \\ \hline b & a \\ \hline \end{array} \quad \text{si } b \leq a;$$

$$(2) \begin{array}{|c|c|} \hline b & \cdot \\ \hline \cdot & a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline b & \\ \hline a & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \text{si } b > a;$$

$$(3) \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline a \\ \hline \end{array};$$

$$(4) \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a & \cdot \\ \hline \end{array}.$$

Un *redressement* d'un tableau semi-standard consiste à appliquer une suite des glissements pour obtenir un tableau semi-standard. Le tableau résultant est appelé le redressé de T . Soit

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

un tableau gauche de forme $(3, 2, 2)/(2, 1)$.

On applique la suite de glissements suivante pour avoir un tableau semi-standard

Le tableau résultant

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

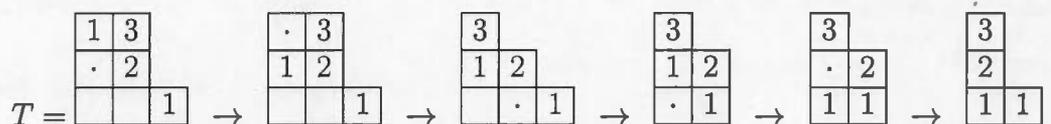
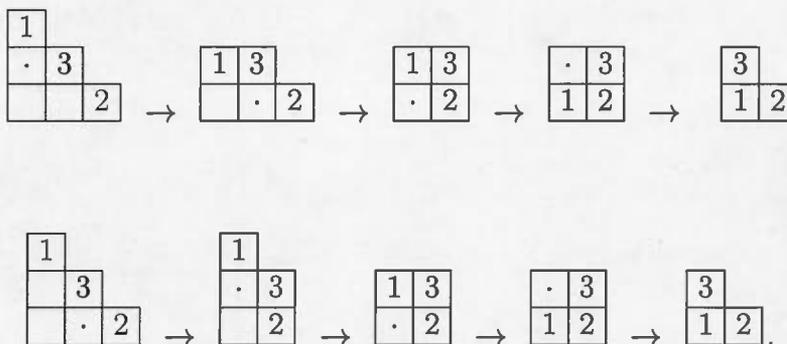


Figure 1.9: Glissement de jeu du taquin

est appelé le redressé de T .

Théorème 1.2.2. [Sch77], [Thom] *Le choix des glissements intermédiaires n'importe pas sur le résultat. Autrement dit, quel que soit le choix des glissements, le tableau obtenu à partir d'un tableau donné, est unique.*

On va illustrer le théorème avec un exemple



1.2.14 Le jeu de taquin simule l'algorithme de RSK

Il existe une relation remarquable, démontrée par Schützenberger [Sch77], entre le jeu de taquin et l'algorithme de RSK.

Avant illustrer cette relation, on a besoin de définir le tableau de forme anti-diagonale.

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot de longueur n . Le tableau de forme anti-diagonale associé à w est le tableau gauche composé des cellules $(n, 1); (n-1, 2); \dots; (1, n)$ et tel que

w_j est situé dans la colonne j , pour $1 \leq j \leq n$. Par exemple, soit $w = 4251$. Le tableau de forme anti-diagonale associé à w est

4			
	2		
		5	
			1

Théorème 1.2.3. *À tout mot w , on associe le tableau T de forme anti-diagonale. Si on applique le jeu de taquin à ce tableau, on retrouve le tableau d'insertion obtenu par l'algorithme de RSK.*

Exemple 17. Soit $w = 4251$. On associe à w le tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline \cdot & 2 & & \\ \hline & & 5 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline & & 5 & \\ \hline & & \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline & & 5 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline & & 5 & \\ \hline & \cdot & & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & \cdot 5 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

et l'insertion de RSK pour $w = 4251$ donne

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

CHAPITRE II

MONOÏDE PLAXIQUE ET TABLEAU DE YOUNG

Dans ce chapitre, nous étudions les approches développées par Lascoux et Schützenberger pour le monoïde plaxique et le mot de tableau. Nous commençons par présenter l'équivalence entre l'insertion par ligne dans un tableau semi-standard et l'insertion dans les mots de tableaux, puis nous étudions les classes plaxiques du monoïde plaxique en présentant une bijection entre l'ensemble de toutes les classes plaxiques et l'ensemble de tous les tableaux de Young semi-standards. Nous définissons ensuite le produit du monoïde plaxique de trois manières différentes. Nous terminons en étudiant les sous-mots et les invariants de Greene.

2.1 Mots de tableaux

Le mot de lecture $w(T)$ d'un tableau T de forme λ est la suite $w(T) = T(c_1) \dots T(c_n)$ obtenu par la lecture des lignes de T de gauche à droite, et de haut en bas, où $\{c_1, \dots, c_n\}$ est l'ensemble des cases de λ . Par exemple, soit le tableau semi-standard T du partage $(3, 3, 1)$ suivant

4		
2	3	4
1	2	2

Le mot de lecture de T est $w(T) = 4|234|122$. Si $u = w(T)$ est le mot de lecture d'un tableau semi-standard alors u s'appelle un *mot de tableau*. La correspondance entre

mots de tableaux et tableaux semi-standard est bijective.

2.1.1 Insertion dans les mots de tableaux

Soit $u = w(T)$ le mot de lecture d'un tableau semi-standard T , et $u = u_1u_2 \dots u_{k-1}u_k$ où u_1, u_2, \dots, u_k sont les mots correspondants aux lignes de T .

Pour $u = u_1u_2 \dots u_{k-1}u_k$, on pose $v = u_1u_2 \dots u_{k-1}$, alors le mot obtenu par l'insertion d'une lettre x dans u est défini par

$$(u \leftarrow x) := \begin{cases} vu_kx & \text{si } \alpha = u_k \\ (v \leftarrow x')\alpha x\beta & \text{si non} \end{cases}$$

où $u_k = \alpha x' \beta$ avec

- α formé par les lettres de u_k qui sont plus petite ou égale à x ; et
- x' est une lettre tel que $x' > x$, si une telle lettre existe.

Généralement, pour $v = x_1x_2 \dots x_k$, et $u \in A^*$ le mot obtenu en insérant successivement les lettres de v dans u est dénoté

$$u \leftarrow v := (((\dots((u \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots) \leftarrow x_{k-1}) \leftarrow x_k.$$

Exemple 18. Soit $u = 312$ et $v = 12213142$. Alors,

$$(312 \leftarrow 12213142) = (((((((((312 \leftarrow 1 = 3211) \leftarrow 2 = 32112) \leftarrow 2 = 321122) \leftarrow 1 = 3221112) \leftarrow 3 = 32211123) \leftarrow 1 = 322211113) \leftarrow 4 = 3222111134) \leftarrow 2 = 32223111124.$$

Proposition 2.1.

1. Si u est un mot de tableau, alors $u \leftarrow x$ est un mot de tableau, où x est un entier.
2. $u = (\epsilon \leftarrow u)$ si et seulement si u est un mot de tableau.

Exemple 19. Soit $u = 213$ le mot de tableau associé à

2	
1	3

Alors le mot $(u \leftarrow 1)$ résultant de l'insertion d'une lettre 1 dans u est 2311 qui est le mot de tableau associé à

2	3
1	1

On a que $213 = (\epsilon \leftarrow 213)$ car 213 est le mot de tableau associé à

2	
1	3

Il est clair que la réciproque est vraie.

Alors on peut définir le tableau semi-standard $T \leftarrow x$ comme l'unique tableau dont le mot de lecture est $w(T) \leftarrow x$. Plus généralement pour $v = x_1x_2 \dots x_k$ un mot et T un tableau semi-standard, alors

$$T \leftarrow v := (((\dots ((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots) \leftarrow x_{k-1}) \leftarrow x_k$$

dénote le tableau semi-standard en insérant tous les lettres de v (l'insertion de RSK).

Théorème 2.1.1. *L'insertion RSK dans un tableau semi-standard équivaut à l'insertion dans les mots de tableaux, c'est-à-dire que*

$$w(T \leftarrow x) = w(T) \leftarrow x,$$

où la flèche à gauche dénote l'insertion RSK, et la flèche à droite dénote l'insertion de mots.

Exemple 20. *Pour le tableau*

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

on a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \leftarrow 12213142 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array},$$

avec

$$w \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \leftarrow 12213142 \right) = 32223111124.$$

Pour les mots, on a aussi : $(312 \leftarrow 12213142) = 32223111124$. D'où l'égalité.

2.1.2 Relations de Knuth

Donald Knuth a défini des règles de réécriture sur l'ensemble des mots sur $[m]$ [Knu]. Ces règles de réécriture induisent une relation d'équivalence sur les mots qui s'appelle relation de Knuth ou relation plaxique, noté \equiv .

Définition 2.1.1. Deux mots sont dits équivalents au sens de Knuth si l'on peut obtenir l'un à partir de l'autre par une séquence de transformations de Knuth élémentaires suivantes.

Si x, y, z sont des lettres, alors on a

1. $yzx \equiv yxz$ lorsque $x < y \leq z$;
2. $xzy \equiv zxy$ lorsque $x \leq y < z$.

Exemple 21. On examine les mots de longueur 3, on trouve les mots équivalents suivants :

$231 \equiv 213$ et $221 \equiv 212$ correspondant à la relation 1 dans la Def. 2.1.1. On a aussi $132 \equiv 312$ et $121 \equiv 211$ correspondant à la relation 2 dans la Def. 2.1.1. Voir aussi l'exemple prochain 22.

Définition 2.1.2. Une relation d'équivalence \equiv définie sur A^ est une congruence de monoïde si pour tout mot $u, u', v, v' \in A^*$, $u \equiv u'$ et $v \equiv v'$ impliquent $u \cdot v \equiv u' \cdot v'$.*

Autrement dit, la relation d'équivalence \equiv est compatible avec la concaténation.

Une classe plaxique est une classe pour la congruence engendrée par les relations de Knuth. La classe plaxique contenant un mot u est noté $\langle u \rangle$. On verra qu'il existe une bijection entre les tableaux semi-standard et les classes plaxiques, donnée par

$$T \rightarrow \langle w(T) \rangle.$$

Exemple 22. Pour $n = 4$, les classes d'équivalence sont :

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	1234
1	2	3	4		
<table border="1"><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	2	1	3	4	2134 \equiv 2314 \equiv 2341
2					
1	3	4			
<table border="1"><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	3	1	2	4	3124 \equiv 1324 \equiv 1342
3					
1	2	4			
<table border="1"><tr><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	4	1	2	3	4123 \equiv 1243 \equiv 1423
4					
1	2	3			
<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	2	4	1	3	2413 \equiv 2143
2	4				
1	3				
<table border="1"><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	4	1	2	3412 \equiv 3142
3	4				
1	2				
<table border="1"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	3	2	1	4	3214 \equiv 3241 \equiv 3421
3					
2					
1	4				
<table border="1"><tr><td>4</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	4	2	1	3	4213 \equiv 2431 \equiv 4213
4					
2					
1	3				
<table border="1"><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	3	1	2	4312 \equiv 1432 \equiv 4132
4					
3					
1	2				
<table border="1"><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	4	3	2	1	4321
4					
3					
2					
1					

Rappel : un mot de tableau est un mot de lecture d'un tableau semi-standard.

Théorème 2.1.2. *Chaque mot w de A^* est équivalent au sens de Knuth (selon la relation d'équivalence de Knuth) à un et un seul mot de tableau*

$$w \equiv (\epsilon \leftarrow w).$$

Exemple 23. *Si $w = 2314 \in A^*$ et 2134 est le mot de tableau associé à*

2			
1	3	4	

on a $2314 \equiv 2341 \equiv 2134$, alors $2134 = (\epsilon \leftarrow 2314)$ est le seul mot de tableau dans $\langle 2314 \rangle$.

Alors, on conclut le théorème principal suivant.

Théorème 2.1.3. *[Knu] Deux mots u et v de A^* sont équivalents selon les relations de Knuth 1 et 2 dans la Def. 2.1.1 si et seulement s'ils ont le même tableau d'insertion de RSK. Autrement dit,*

$$u \equiv v \text{ ssi } P_{RSK}(u) = P_{RSK}(v)$$

2.1.3 Jeu de taquin et relations de Knuth

Proposition 2.2. *Les glissements du jeu de taquin sont compatibles avec la relation d'équivalence de Knuth.*

C'est-à-dire que si T et U sont des tableaux semi-standard gauches et si U est obtenu à partir de T par un glissement, alors leurs mots de lecture (obtenus de même manière que pour un tableau) sont équivalents. Notamment,

$$w(T) \equiv w(U).$$

Exemple avec un seul glissement :

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \cdot & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = U$$

Le mot de lecture du tableau semi-standard gauche T est $w(T) = 132$ et le mot de lecture du tableau semi-standard U obtenu par le glissement est $w(U) = 312$. On a $132 \equiv 312$, alors ces deux mots de lectures sont équivalents au sens de Knuth.

Corollaire 2.1.1. *Le redressé d'un tableau gauche T semi-standard est l'unique tableau semi-standard dont le mot de lecture est équivalent à $w(T)$.*

Exemple 24. Soit T le tableau semi-standard gauche

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 5 & 5 \\ \hline & & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Le mot de lecture de T est $w(T) = 5614635523$. On applique le jeu de taquin à T , on obtient le redressé de T , le tableau semi-standard

$$U = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Le mot de lecture de U est $w(U) = 5463561235$. Le lecteur peut vérifier que les deux mots de lecture sont plaxiquement équivalents. Avec U est l'unique tableau semi-standard dont $w(T) \equiv w(U)$. ($w(U)$ est le seul mot de tableau dans $\langle 5614635523 \rangle$).

2.1.4 Monoïde plaxique

Lascoux et Schützenberger [LaSc] ont introduit une structure de produit pour l'ensemble de tableaux semi-standard, le monoïde plaxique, en utilisant les 2 relations de Knuth.

La congruence \equiv définie dans la Def.2.1.2 permet de définir une structure de monoïde quotient du monoïde libre que nous notons A^*/\equiv .

Définition 2.1.3. Le monoïde plaxique est le monoïde quotient A^*/\equiv du monoïde libre sur un alphabet A totalement ordonné, où \equiv est la congruence engendrée par les relations de Knuth 1 et 2 dans la def. 2.1.1. On a que :

- Les générateurs du monoïde plaxique sont les classes d'équivalence des lettres de l'alphabet.
- Les relations sont déterminées par les transformations de Knuth élémentaires.

Si $\varphi : A^* \rightarrow A^*/\equiv$ est la projection canonique, l'ensemble A^*/\equiv est muni du produit \cdot défini, pour toutes classes d'équivalence X et Y de A^*/\equiv , par $X \cdot Y = \varphi(x \cdot y)$, où x et y sont des éléments quelconques de X et de Y respectivement. C'est à dire que le monoïde plaxique est l'ensemble de classes d'équivalence où le produit est donné par la concaténation, noté, $\langle u \rangle \cdot \langle v \rangle = \langle uv \rangle$.

2.1.5 Monoïde de tableaux semi-standards

L'ensemble de tableaux semi-standards SST forme un monoïde, avec pour des tableaux semi-standards T_1 et T_2 , le produit défini par

$$T_1 \cdot T_2 := (T_1 \leftarrow w(T_2)) \quad [RSK].$$

Il est clair que le tableau vide \emptyset est un élément neutre pour ce produit, mais il est moins évident que ce produit est associatif. Il y a un isomorphisme de monoïdes entre SST et A^*/\equiv défini par

$$w : SST \rightarrow A^*/\equiv,$$

puisque

$$w(T_1 \cdot T_2) \equiv w(T_1)w(T_2).$$

D'où, on obtient une deuxième façon de définir le produit de deux tableaux T_1 et T_2 : $T_1 \cdot T_2$ est l'unique tableau semi-standard dont le mot de lecture est dans la classe plaxique de $w(T_1)w(T_2)$.

Exemple 25. *Le produit de deux tableaux donne*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \leftarrow 213 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 & 6 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

on a :

$$\begin{aligned}
 w(T_1 \cdot T_2) &= w(T_1 \leftarrow w(T_2)) \\
 &= 5466345223511223 \\
 &\equiv 5644623551223213 \\
 &= 5644623551223 \cdot 213 \\
 &= w(T_1)w(T_2).
 \end{aligned}$$

Une troisième façon de définir le produit de deux tableaux semi-standards T et U est de concaténer ces deux tableaux de façon diagonale et appliquer les glissements du jeu de taquin. (voir Exemple 26)

En résumé, il y a trois façons de définir le produit :

- 1- Par l'insertion de RSK ;
- 2- par la concaténation de mots de lecture ;
- 3- par le jeu du taquin.

Théorème 2.1.4. *Le produit de deux tableaux T et U est le même, en utilisant les trois définitions différentes.*

Exemple 26. *Soit les deux tableaux*

$$T_1 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

On va trouver le produit en utilisant les trois façons.

Par RSK : $w(T_2) = 5423$, alors $T_1 \cdot T_2 = (T_1 \leftarrow w(T_2)) = (T_1 \leftarrow 5423)$. Le produit donne

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Par concaténation :

$w(T_1) = 5361446$ et $w(T_2) = 5423$, on a deux classes plaxiques

$\{5361446, 5316446, \dots\} = \langle 5361446 \rangle$ et $\{5243, 2543, 5423\} = \langle 5423 \rangle$.

Nous concaténons les mots d'équivalents par relation de Knuth on obtient une classe d'équivalence $\{53614465423, 65563441234, \dots\} = \langle 53614465423 \rangle$ qui contient un seul mot de tableau 65563441234 qui est exactement le mot de lecture de tableau associé à $T_1 \cdot T_2$.

Par les glissement du jeux de taquin :

Le produit est obtenu en concaténant T_1 à T_2 de façon diagonale et on applique les glissements du taquin on obtient le redressé

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

2.1.6 Sous-mots croissants (décroissants) et les invariants de Greene

En 1961, C. Schensted [Sche] décrit une méthode pour calculer la longueur du plus grand sous-mot croissant et décroissant pour un mot $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ de A^* .

Théorème 2.1.5. [*Sche*] *La longueur du plus long sous-mot croissant (resp. strictement décroissant) de u est la longueur de la première ligne (resp. la première colonne) des tableaux de Young correspondant à u par RS.*

Greene [*Gree*] a étendu le théorème de Schensted en interprétant le reste de la forme de λ .

Nous introduisons les invariants de Greene comme suit

Soit $u = u_1u_2 \cdots u_k$ un mot de A^* où $u_1, u_2, \dots, u_k \in A$ et un sous-mot $v = u_{i_1}u_{i_2} \cdots u_{i_m}$.

Le sous-mot v est dit croissant si et seulement si

$$u_{i_1} < u_{i_2} < \cdots < u_{i_m}$$

Définition 2.1.4. *Pour un entier j et un mot u , $l_j(u)$ (resp. $d_j(u)$) est le plus grand entier qui peut s'écrire comme somme de longueur de m -sous-mots croissants (respectivement décroissant) disjoints de u .*

Exemple 27. *Pour $u = 134234122332$, on a $l_1(u) = 6$, car le plus long sous-mot croissant apparaît dans u est $v_1 = 122233$; $l_2(u) = l(v_1) + l(v_2) = 9$ avec $v_2 = 334$; et $l_3(u) = l(v_1) + l(v_2) + l(v_3) = 12$ avec $v_3 = 134$; et $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 9$, $d_4 = 11$, et $d_5 = 12$.*

Théorème 2.1.6. [*Gree*] *Si $u = w(T)$ est le mot d'un tableau semi-standard $T = P_{RSK}(u)$ de forme*

$$\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1} = 0,$$

Alors, on a pour tout $k \geq 1$,

$$l_k(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

et

$$d_k(u) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_k$$

avec λ' le conjugué de λ .

Exemple 28. Le tableau semi-standard T correspondant à $u = 134234122332$ par RSK est

3	4	4			
2	3	3			
1	1	2	2	2	3

alors la forme de T est $\lambda = (6, 3, 3)$, et on a $l_1(u) = \lambda_1 = 6$, $l_2(u) = \lambda_1 + \lambda_2 = 9$ et $l_3(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$.

On remarque que l'ensemble des valeurs $l_k(w(T))$ ne dépend que de la forme de T et que pour tout mot u , il existe un entier j tel que

$$l_1(u) < l_2(u) < \dots < l_j(u) = l_{j+1}(u) = \dots$$

Pour l'exemple précédent on a, $l_1(u) = 6 < l_2(u) = 9 < l_3(u) = 12$.

Démonstration du théorème 2.1.5 :

D'après le théorème 2.1.6, on a : $l_k(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ et $l_{k-1}(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}$. On a donc

$$\lambda_k = l_k(u) - l_{k-1}(u),$$

avec $l_0 = 0$ alors $\lambda_1 = l_1 - 0 = l_1$ et l_1 est la longueur du plus long sous-mot croissant de u .

Exemple 29. Pour $u = 134234122332$ on a $v_1 = 122233$ est le plus long sous-mot de u car aucun sous-mot croissant de longueur 7 n'apparaît dans u et on a

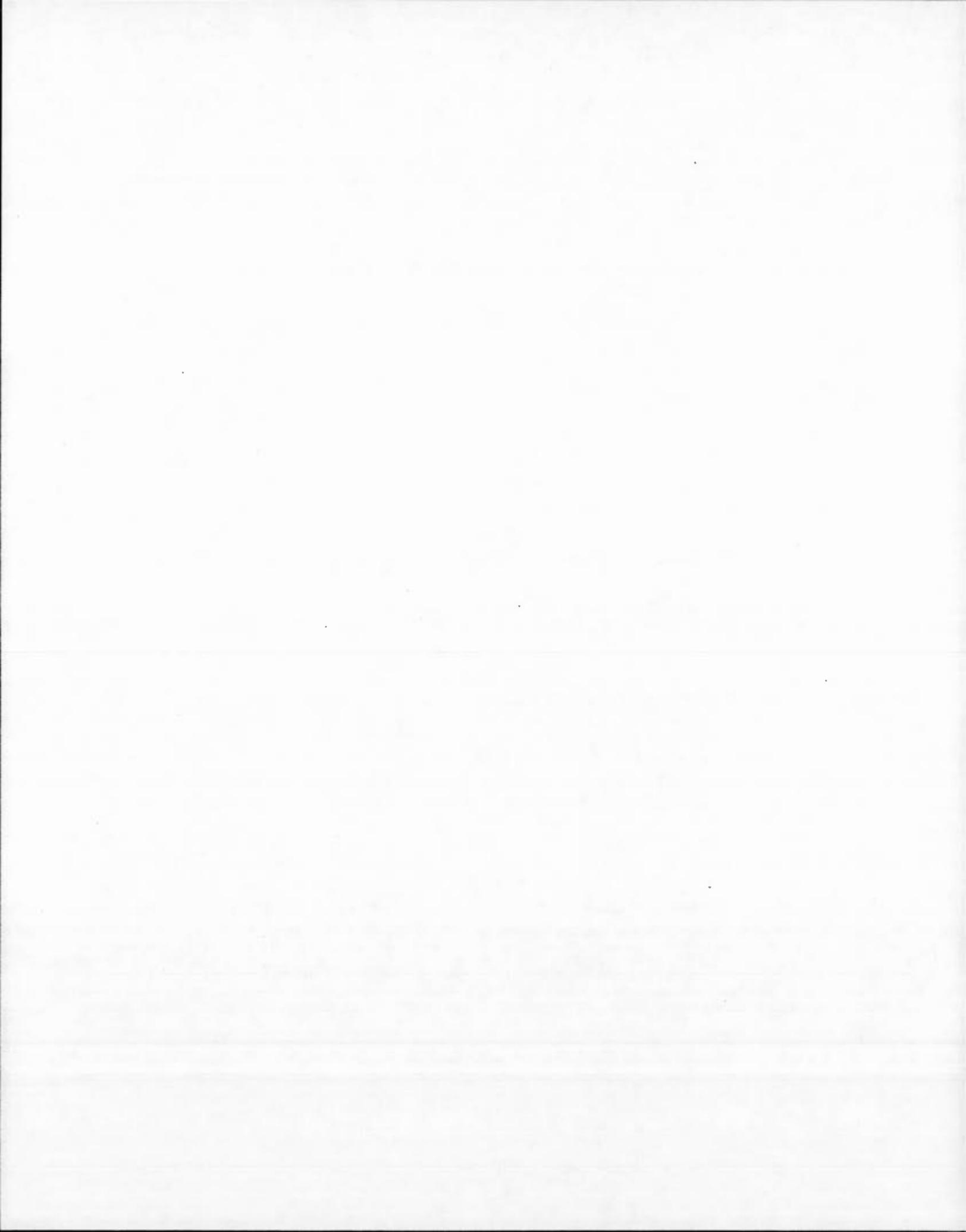
$$l(v_1) = l_1(u) = 6 = \lambda_1 \text{ et } d_1(u) = 3 = \lambda'_1.$$

Proposition 2.3. Si u et v sont équivalents au sens de Knuth, alors pour tout $k \geq 1$,

$$l_k(u) = l_k(v)$$

En effet :

Si u et v sont équivalents au sens de Knuth, alors $P_{RSK}(u) = P_{RSK}(v)$, alors les lignes de tableaux associés à u et v sont les mêmes et par le théorème 2.1.6, on a $l_k(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$. On a donc $l_k(u) = l_k(v)$.



CHAPITRE III

TABLEAU DE YOUNG DÉCALÉ

3.1 Introduction

Ce chapitre pose les définitions fondamentales utilisées dans le chapitre quatre. En particulier les définitions à propos de partage strict, des diagrammes décalés, des tableaux de Young décalés et de la formule des équerres décalées. Nous introduisons les deux correspondances principales qui peuvent être considérés comme des analogues décalés de la correspondances de Robinson-Schensted-Knuth pour les tableaux de Young décalés, l'insertion de Sagan-Worley et l'insertion mixte de M. Haiman avec des propriétés similaires.

3.2 Définitions et Propriétés

3.2.1 Partages stricts et diagrammes décalés

Définition 3.2.1. Un partage strict λ de n est une suite décroissante finie d'entiers positifs, tel que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$ et $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_k > 0$. On dénote la longueur de λ , $l(\lambda) = k$ le nombre de lignes. On a $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k$. On note $D(n)$ l'ensemble des partages de n . Par exemple $\lambda = (4, 2, 1)$ est un partage strict de 7.

Définition 3.2.2. On appelle diagramme décalé de forme λ un tableau de m lignes ayant λ_i cases dans la i ème ligne, et il est décalé $i - 1$ unités de la gauche. Explicite-

ment, pour un partage $\lambda \in D(n)$, nous associons le diagramme décalé

$$Y'(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq l(\lambda), i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

Supposons que λ est un partage strict de n ayant une longueur l , la diagonale principale de $Y'(\lambda)$ se compose de cases (i, i) tel que $1 \leq i \leq l$. Toutes les autres cases sont hors diagonale. Dans ce travail, on identifie le diagramme décalé correspondant au partage strict λ par λ lui même.

Exemple 30. Le diagramme décalé de forme $\lambda = (4, 2, 1)$ est

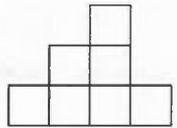


Figure 3.1: Diagramme décalé

Avec $|\lambda| = 7$, $l(\lambda) = 3$ et $Y'(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Définition 3.2.3. Soit λ et μ des partages stricts telles que le diagramme décalé λ contient le diagramme décalé μ . Un diagramme gauche décalé de forme λ/μ est obtenu par la suppression du diagramme décalé de forme μ du diagramme décalé de forme λ .

Nous appelons un diagramme décalé gauche λ/μ , une bande horizontale (resp. verticale) si λ/μ n'a pas de paire de boites dans la même colonne (resp. ligne) et on appelle une bande frontalière, un diagramme décalé gauche qui ne contient pas de 2×2 bloc carré. Par exemple

Si $\lambda = (5, 4, 2)$ et $\mu = (3, 2)$, alors le diagramme décalé gauche de forme λ/μ est

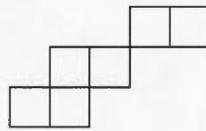


Figure 3.2: Diagramme décalé gauche $(5,4,2) / (3,2)$ qui est une bande frontalière.

3.2.2 Tableaux de Young décalés

Soit A' l'alphabet ordonné $\{1' < 1 < 2' < 2 < 3' < 3 < \dots\}$. Les lettres $1', 2', \dots$ sont appelées lettres marquées, et les autres sont non-marquées.

Un tableau de Young décalé T de forme λ est une fonction

$$T : Y'(\lambda) \rightarrow A'.$$

Définition 3.2.4. *Un tableau semi-standard décalé de Young de forme λ est un remplissage du diagramme de Young décalé de forme λ par les lettres de l'alphabet A' , tel que pour $k \in \{1, 2, \dots\}$*

- *Les lignes et les colonnes sont faiblement croissantes,*
- *chaque k apparaît au plus une fois dans chaque colonne de T ,*
- *chaque k' apparaît au plus une fois dans chaque ligne de T ,*
- *Il n'y a aucune entrée marquée sur la diagonale principale.*

Alors on dit que le tableau T a un contenu (c_1, c_2, \dots) , où c_k est le nombre de fois que les lettres k et k' apparaissent dans T . Un tableau gauche décalé de forme λ/μ où μ est un partage avec $Y'(\mu) \subseteq Y'(\lambda)$ est obtenu en remplissant les cases du diagramme gauche correspondant.

Exemple 31. *Un tableau de Young décalé*

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 4 & 5' \\ 1 & 1 & 2' & 3 \end{array}$$

Figure 3.3: Tableau de Young décalé.

de forme $\lambda = (4, 2, 1)$ et de contenu $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$.

Rappelons qu'un tableau de Young de forme λ est dit standard s'il contient chacune des entrées $1, 2, \dots, |\lambda|$ exactement une fois. Dans le cas d'un tableau standard décalé, ces entrées sont toutes de lettres non-marquées, et a un contenu $(1, 1, 1, \dots, 1)$. Le nombre de tableaux de Young standards décalés de forme λ est dénoté g^λ . Par exemple, la liste ci-dessous affiche toutes les tableaux standards de forme décalé $(4, 2, 1)$, ce qui démontre que $g^{4,2,1} = 7$

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & , & \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} & , & \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} & , & \begin{array}{cccc} & & & 6 \\ & & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \\ \\ \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} & , & \begin{array}{cccc} & & & 7 \\ & & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array} & , & \begin{array}{cccc} & & & 6 \\ & & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array} \end{array}$$

3.2.3 Formule des équerres de Tableau de Young standard décalé

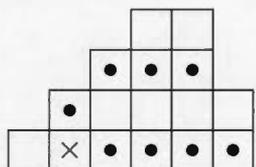
On appelle équerre décalée associée à une case $(i, j) \in \lambda$ l'ensemble

$$H'_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \{(i, j') | j' > j\} \cup \{(i', j) | i' > i\} \cup \{(j+1, j') | j' > j\}$$

avec $h'_{i,j} = |H'_{i,j}|$.

Exemple 32. L'équerre associée à la case $(1, 2)$ dans le diagramme $\lambda = (6, 5, 3, 2)$,

avec longueur $h'_{1,2} = 9$:

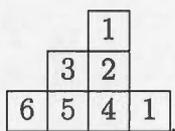


Théorème 3.2.1. [Thrall] Si λ est un partage strict de n , alors

$$g^\lambda = \frac{n!}{\prod h'_{i,j}}$$

Pour l'histoire de ce théorème voir [Sagan90].

Exemple 33. Les longueurs des équerres décalées associées au partage strict $(4, 2, 1)$ est



et alors

$$g^{(4,2,1)} = \frac{7!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^2} = 7.$$

3.2.4 Insertion de Sagan-Worley

L'insertion de Sagan-Worley introduit par Sagan [Sagan] et Worley [Worley], c'est une correspondance entre des permutations et des paires de tableaux de Young décalés. Le premier tableau est un tableau standard décalé et le deuxième est semi-standard décalé avec le contenu $(1, 1, \dots, 1)$ et contient des lettres marquées.

Pour construire cette correspondance on va définir d'abord l'insertion de Sagan-Worley par ligne et par colonne.

Définition 3.2.5. (Insertion par ligne / colonne de Sagan-Worley)

L'insertion d'un élément a dans la ligne l d'un tableau décalé :

(i) Si a est plus grand que tous les éléments de la ligne l , on ajoute a à la fin de cette ligne.

(ii) Si non, soit a' le plus petit élément de la ligne l tel que $a' > a$. Alors a supplante a' et puis :

Si a' n'est pas situé dans la diagonale principale, a' est inséré par ligne dans la ligne $l + 1$.

Si a' est situé dans la diagonale principale, disons dans la case (i, i) , a' est inséré par colonne dans la colonne $i + 1$.

Remarque 1. *Le procédé de l'insertion par colonne est similaire à la procédure de l'insertion par ligne. On peut définir évidemment l'insertion par colonne d'un élément a dans la colonne c d'un tableau en inversant les rôles des lignes et des colonnes dans la définition de l'insertion : a supplante le plus petit élément plus grand que a de la colonne c . Cet élément est inséré par colonne dans la colonne $c + 1$, etc.*

Définition 3.2.6. (Insertion de Sagan-Worley) Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ une permutation, on construit de manière récursive une séquence de tableaux $(U_0, V_0), \dots, (U_n, V_n) = (U, V)$, où U_i est un tableau semi-standard décalé, et V_i est un tableau standard décalé, les deux tableaux ont la même forme. On construit les deux tableaux de manière similaire à l'insertion de Robinson-Schensted-Knuth.

On définit $U_0 = \emptyset$ et $V_0 = \emptyset$. Supposons que (U_{k-1}, V_{k-1}) est déjà construit, pour un $k \geq 1$.

Pour insérer un élément w_k dans le tableau décalé U_{k-1} , nous commençons à insérer w_k dans la première ligne de U_{k-1} en suivant la définition 3.2.5.

Le processus d'insertion se termine une fois que la lettre placée à l'extrémité d'une ligne ou d'une colonne ne supplante aucun nouveau élément. On obtient donc le tableau

U_k . Les tableaux U_k et U_{k-1} se diffèrent à une seule case. V_k est obtenu en ajoutant un élément à V_{k-1} , dans une nouvelle case à la même position que celle par laquelle U_k diffère de U_{k-1} . On écrit dans cette case k ou k' selon que la dernière lettre soit insérée dans U_k par ligne ou par colonne.

On appelle U le tableau d'insertion de Sagan-Worley et V le tableau d'enregistrement de Sagan-Worley et on les dénote respectivement par P_{sw} et Q_{sw} .

L'insertion de Sagan-Worley a été définie généralement comme une correspondance entre des mots sur l'alphabet A et les paires de tableaux décalés tels que chaque paire est composée de deux tableaux, le premier est un tableau semi-standard décalé qui ne contient pas de lettres marquées et le deuxième est un tableau semi-standard décalé tel que son contenu est $(1, 1, \dots, 1)$.

Exemple 34. Soit la permutation $w = 7512364$, les tableaux décalés (U, V) associés à w par l'insertion de Sagan-Worley sont obtenus par les étapes successives suivantes :

$$U_i: \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 7 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$V_i: \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2' & 3' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 4 \\ \hline 1 & 2' & 3' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2' & 3' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2' & 3' & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 7 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2' & 3' & 6 \\ \hline \end{array}$$

On a donc,

$$U = P_{sw}(w) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 7 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad V = Q_{sw}(w) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 7 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2' & 3' & 6 \\ \hline \end{array}$$

3.2.5 Le Jeu de taquin simule l'insertion de Sagan-Worley

Les glissements du jeu de taquin sur des tableaux décalés gauches sont définies de la même manière que les glissement du jeu de taquin sur des tableaux semi-standards gauches.

Le théorème suivant donne la relation entre le jeu de taquin et l'insertion de Sagan-Worley.

Avant illustrer la simulation entre le jeu de taquin et l'insertion de Sagan-Worley, on a besoin de définir le tableau décalé de forme anti-diagonale.

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot de longueur n . Le tableau décalé de forme anti-diagonale associé à w est le tableau décalé gauche composé des cellules (n, n) ; $(n - 1, n + 1)$; $(n - 2, n + 2)$; \dots ; $(1, 2n - 1)$ et tel que l'entrée dans la case $(n - i, n + i)$ est w_{i+1} , pour $0 \leq i \leq n - 1$. Par exemple, soit $w = 1423$. Le tableau décalé de forme anti-diagonale associé à w est

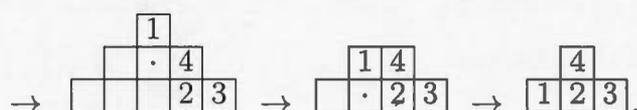
			1			
				4		
					2	
						3

Théorème 3.2.2. [*Worley*; *Sagan*] À tout mot w on associe le tableau décalé T de forme anti-diagonale dans un demi plan cartésien, si on applique le jeu de taquin à ce tableau décalé, on retrouve le tableau décalé d'insertion de Sagan-Worley. C'est-à-dire, on a $P_{sw}(w) = \text{redressé de } T$.

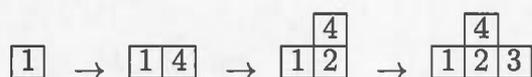
On va illustrer ce théorème par un exemple

Exemple 35. Soit $w = 1423$. On associe à w le tableau décalé

$$T = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & \cdot & 4 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 4 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & \cdot & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 4 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & 2 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & \cdot & & \\ & & & & 4 & \cdot & \\ & & & & \cdot & 2 & 3 \end{array}$$



Le tableau d'insertion décalé associé à w par l'insertion de Sagan-Worley est obtenu par les étapes suivantes



On a donc,

$$P_{sw}(1423) = \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

On retrouve que le tableau décalé obtenu par le jeu de Taquin est le même tableau d'insertion décalé. Dans la prochaine section, on verra qu'on peut calculer $Q_{sw}(w)$ en utilisant un analogue de RSK introduit par M. Haiman.

3.2.6 Insertion mixte décalée

M. Haiman [Haim] a introduit l'insertion mixte (décalée) comme une correspondance entre une permutation et deux tableaux de Young décalés. La construction de Haiman peut être vue comme un analogue décalé de Robinson-Schensted-Knuth.

La généralisation de l'insertion mixte décalée ce qu'on appelle insertion mixte décalée semi-standard, c'est une correspondance entre des mots sur l'alphabet A et les paires de tableaux de Young semi-standards décalés dont un de ces deux tableaux est standard.

Dans ce travail nous nous référons à l'insertion mixte décalée semi-standard comme insertion mixte.

Définition 3.2.7. (*Insertion mixte décalée de Haiman*) Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n \in A^*$. On construit récursivement une suite de tableaux $(U_0, V_0), \dots, (U_n, V_n) = (U, V)$, où U_i

est un tableau de Young décalé, et V_i est un tableau standard décalé qui ne contient pas de lettres marquées comme suit :

On définit $(U_0, V_0) = (\emptyset, \emptyset)$. Pour $i = 1, \dots, n$, nous obtenons U_i à partir de U_{i-1} en insérant w_i dans U_{i-1} en répétant le processus suivant :

Si w_i est plus grand que tous les éléments de la première ligne, on ajoute w_i à la fin de cette première ligne. Sinon, soit a le plus petit élément de la première ligne tel que $a > w_i$ (en respectant l'ordre donné sur l'alphabet A'). Alors w_i supplante a , et puis :

1- Si a n'est pas situé dans la diagonale principale, il y a deux possibilités, soit a est une lettre marquée, ou soit a n'est pas une lettre marquée, car les tableaux U_0, U_1, \dots, U_n sont des tableaux décalés qui peuvent contenir de lettres marquées.

Alors, nous procédons comme suit :

(i) Si a n'est pas une lettre marquée, insérer a par ligne dans la prochaine ligne.

(ii) Si a est une lettre marquée, insérer a par colonne dans la prochaine colonne vers la droite.

2- Si a est situé sur la diagonale principale, a doit être non-marquée. Marquez-la et insérez-la par colonne dans la prochaine colonne vers la droite.

Le processus d'insertion se termine une fois que la lettre placée à l'extrémité d'une ligne ou d'une colonne ne supplante aucun nouveau élément. On obtient donc le tableau U_i . Les tableaux U_i et U_{i-1} se diffèrent par une seule case. Pour obtenir V_i , on ajoute cette case à V_{i-1} et on écrit i à l'intérieur de cette case. U s'appelle tableau d'insertion mixte, on le dénote par P_{mix} , et V tableau d'enregistrement mixte, on le dénote par Q_{mix} .

Exemple 36. Soit $u = 3457261$. Les tableaux de Young décalés (U, V) associés à u par l'insertion mixte sont obtenus par les étapes successives suivantes.

$$\emptyset \xrightarrow{3} \boxed{3} \xrightarrow{4} \boxed{3\ 4} \xrightarrow{5} \boxed{3\ 4\ 5} \xrightarrow{7} \boxed{3\ 4\ 5\ 7}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{7} \\ & \uparrow_{3'} & & & \end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{3'} & \boxed{5} & \boxed{7} \\ & & & & \end{array}$$

car on a : 2 supplante le $a = 3$ et comme 3 est situé dans la diagonale principale, on marque le 3. On insère $3'$ dans la deuxième colonne. $3'$ supplante le 4, comme 4 n'est pas marqué on l'insère dans la deuxième ligne.

Puis, on insère 6, on obtient

$$\xrightarrow{6} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{3'} & \boxed{5} & \boxed{7} \\ & & & & \end{array} \xrightarrow{7} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4\ 7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{3'} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ & & & & \end{array}$$

On a inséré 7 dans la deuxième ligne car il n'est pas marqué. Et enfin on insère 1, on obtient

$$\xrightarrow{1} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4\ 7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{3'} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ & & & & \end{array} \xrightarrow{2'} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4\ 7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{3'} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ & & \uparrow_{2'} & & \end{array} \xrightarrow{3'} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4\ 7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2'} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ & & \uparrow_{3'} & & \end{array} \xrightarrow{5} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{4\ 7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2'} & \boxed{3'} & \boxed{6} \\ & & & & \end{array} \xrightarrow{7} \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \boxed{7} \\ & & & \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2'} & \boxed{3'} & \boxed{6} \\ & & & & \end{array}$$

Car, on a : 1 supplante le 2 et comme 2 est sur la diagonale, on marque le 2. On insère $2'$ dans la deuxième colonne. $2'$ supplante $3'$ et comme $3'$ est marqué on l'insère dans la prochaine colonne. $3'$ supplante 5, comme 5 n'est pas marqué on l'insère dans la deuxième ligne. Comme 5 est plus petit que 7, il supplante le 7, alors on insère 7 dans la prochaine ligne et on arrête le processus car 7 ne supplante aucun nouveau élément.

$$V_i : \emptyset, \boxed{1}, \boxed{1\ 2}, \boxed{1\ 2\ 3}, \boxed{1\ 2\ 3\ 4}, \begin{array}{cccc} & & & \boxed{5} \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array}, \begin{array}{cccc} & & & \boxed{5\ 6} \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array}, \begin{array}{cccc} & & & \boxed{7} \\ & & & \boxed{5\ 6} \\ \rightarrow & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array}.$$

On a donc,

$$U = P_{mix}(u) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 4 & 5 & \\ 1 & 2' & 3' & 6 \end{array} \quad \text{et} \quad V = Q_{mix}(u) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}.$$

Proposition 3.1. *L'insertion mixte est une bijection entre des mots sur l'alphabet A et les paires de tableaux décalés (U, V) tels que U est un tableau décalé et V est un tableau standard décalé de même forme.*

Pour montrer la bijection de l'insertion mixte de Haiman, on construit son inverse étape par étape. Voir aussi Exemple 37.

L'algorithme inverse de l'insertion mixte : On définit $(U_n, V_n) = (U, V) = (P_{mix}, Q_{mix})$.

Supposons que (U_k, V_k) est déjà construit, où $k = 1, \dots, n$. Pour obtenir (U_{k-1}, V_{k-1}) et w_k le kème élément de w , nous procédons comme suit :

Nous localisons l'entrée (i, j) contenant k dans V_k . Soit $p_{i,j}$ l'entrée (i, j) de U_k . Comme k est le plus grand élément de V_k , $p_{i,j}$ doit être le dernier élément inséré pendant la construction de U_k . Puis,

(1) Si l'élément $p_{i,j}$ est non- marqué, alors il était inséré par ligne. On cherche l'élément $p_{i-1,j_{i-1}}$ le plus grand élément de la ligne $i - 1$ tel que $p_{i-1,j_{i-1}} < p_{i,j}$ (ce qui a été supplanté par $p_{i,j}$). Alors, on remplace $p_{i-1,j_{i-1}}$ par $p_{i,j}$. Puis,

(1a) si $p_{i-1,j_{i-1}}$ est non-marqué, alors on cherche de la même façon l'entrée de la ligne $i - 2$ qui avait déplacée $p_{i-1,j_{i-1}}$.

(1b) Si $p_{i-1,j_{i-1}}$ est marqué, on cherche le plus grand élément plus petit que $p_{i-1,j_{i-1}}$ de la colonne précédente qui avait déplacé $p_{i-1,j_{i-1}}$ (comme décrit dans l'étape 2), etc.

(2) Si l'élément $p_{i,j}$ est marqué, alors il était inséré par colonne. On cherche l'élément $p_{i_{j-1},j-1}$ de la colonne précédente qui est le plus grand élément plus petit que $p_{i,j}$. Puis,

(2a) si $p_{i_{j-1},j-1}$ est marqué, on remplace $p_{i_{j-1},j-1}$ par $p_{i,j}$ et on continue de la même façon que l'étape (2).

(2b) Si $p_{i_{j-1},j-1}$ est non-marqué, et s'il se trouve sur la diagonale principale, on enlève la marque de $p_{i,j}$ et on remplace $p_{i_{j-1},j-1}$ par $p_{i,j}$. On continue de la même façon que l'étape (1) parce que $p_{i_{j-1},j-1}$ est non-marqué.

(2c) Si $p_{i_{j-1},j-1}$ est non marqué et s'il n'est pas situé sur la diagonale principale, on remplace $p_{i_{j-1},j-1}$ par $p_{i,j}$ et puisque $p_{i_{j-1},j-1}$ n'est pas marqué, on continue de la même façon que l'étape (1).

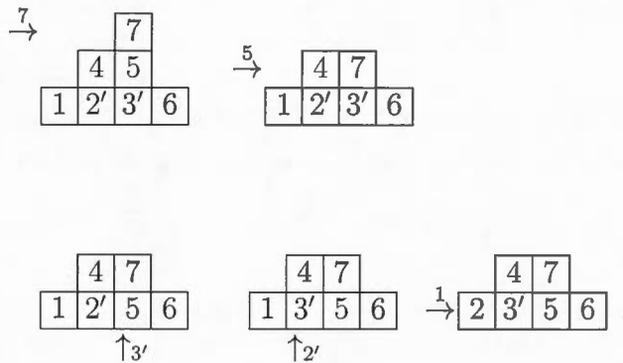
On continue, nous allons enfin supprimer un élément p_{1,j_1} de la première ligne. Le kème élément de w est $w_k = p_{1,j_1}$. On dénote U_{k-1} le tableau obtenu par ce processus. Le tableau V_{k-1} est obtenu en enlevant le k du tableau V_k . En continuant de cette manière, nous allons récupérer tous les éléments de w .

Exemple 37. *L'insertion inverse de l'exemple précédent. Soit les deux tableaux*

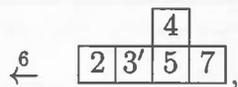
$$U = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 4 & 5 & \\ 1 & 2' & 3' & 6 \end{array} \quad \text{et} \quad V = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}.$$

Pour trouver le mot w associé au tableau (U, V) , nous procédons par les étapes inverses suivantes :

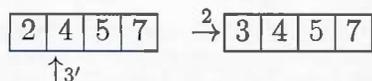
Nous commençons avec le dernier élément inséré dans le tableau V qui est 7, l'élément correspondant à 7 dans le tableau U est 7. On trouve que 7 a été supplanté par 5 par l'insertion ligne. 5 a été supplanté à son tour par 3' par l'insertion ligne. Comme 3' est marqué, il doit être supplanté par 2' par l'insertion colonne. 2' est supplanté par 1 par l'insertion colonne car il avait touché la diagonale. Donc, on retire l'élément 1 du tableau U et on remplace le 2' par 2. On obtient donc la dernière lettre de w , qui est 1.



On supprime le 7 du tableau V , et on continue de la même manière. On choisit le dernier élément de V_6 qui sera 6 et on cherche l'élément correspondant dans U_6 , on trouve l'élément correspondant 7, et on trouve que 7 a été supplanté par 6. Comme 6 n'est pas supplanté par aucun élément, on arrête et on le retire du tableau U_6 . On obtient l'avant dernière lettre du w , qui est 6.



On supprime le 6 du tableau V_6 , on continue à chercher l'élément correspondant au dernier élément 5 de V_5 , on trouve que c'est 4. 4 a été supplanté par 3' dans le tableau U_5 et 3' a été déplacé par 2 par colonne et comme 2 n'est pas déplacé par aucun élément. On arrête et on retire 2 du U_5 , on remplace 3' par 3. On obtient la lettre 2.



Les éléments 7, 5, 4, 3 sont insérées étape par étape à la première ligne, par l'algorithme d'insertion alors, on supprime le 7, puis le 5, le 4 et le 3 et on obtient le mot

$$w = 3457261.$$

Haiman a prouvé qu'il y a une dualité entre l'insertion mixte et l'insertion de Sagan-Worley dans le sens suivant.

Proposition 3.2. [Haim] Soit w une permutation, alors

$$P_{sw}(w) = Q_{mix}(w^{-1}), \text{ et } Q_{sw}(w) = P_{mix}(w^{-1})$$

D'après les exemples 34 et 36, on voit que $u = w^{-1}$, alors on peut voir aussi que

$$P_{sw}(w) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} = Q_{mix}(w^{-1})$$

et

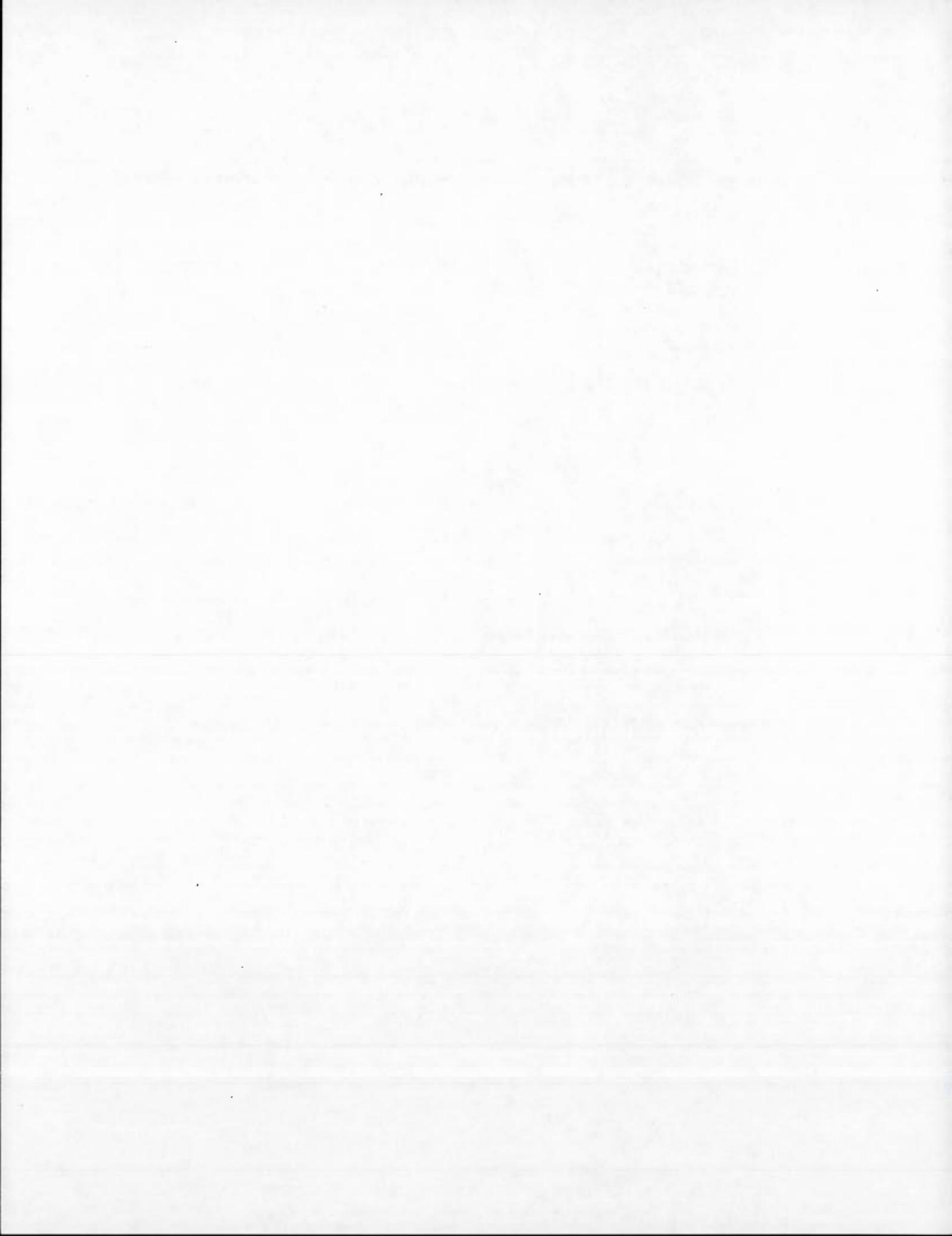
$$Q_{sw}(w) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 4 & 5 & \\ 1 & 2' & 3' & 6 \end{array} = P_{mix}(w^{-1}).$$

Les deux insertions, l'insertion de Haiman et l'insertion de Sagan-Worley peuvent être généralisés aux bi-mots.

La proposition précédente a été étendue aux bi-mots par Fomin [Fom], comme suit,

Proposition 3.3. (Fomin). Soit w un bi-mot. Alors

$$P_{sw}(w) = Q_{mix}(w^{-1}), \text{ et } Q_{sw}(w) = P_{mix}(w^{-1}).$$



CHAPITRE IV

MONOÏDE PLAXIQUE DÉCALÉ ET MOTS DE TABLEAUX DÉCALÉS

4.1 Introduction

Les principaux résultats de ce mémoire sont introduits dans ce chapitre, nous étudions la construction d'un analogue approprié du monoïde plaxique pour les tableaux de Young décalés (semi-standards), avec des propriétés similaires. Nous étudions un analogue de l'approche développée par Schützenberger, le mot de tableau, le mot de lecture mixte pour un tableau de Young semi-standard décalé, et affirmons ses propriétés importantes. Nous montrons les théorèmes principaux en utilisant les lemmes de la standardisation. Nous introduisons la théorie du monoïde plaxique décalé en définissant un représentant canonique (un mot de lecture mixte) pour chaque classe plaxique décalée.

4.2 Mots de tableaux décalés

4.2.1 Tableau vé

Un tableau gauche décalé T est appelé un *vé* si sa forme est une bande frontalière (peut être déconnectée), et les entrées $i, i + 1, \dots, k$ apparaissent dans T de la manière suivante. Pour un $i \leq j \leq k$, on a :

- Les entrées $i, i + 1, \dots, j$ forment une bande verticale et ces entrées sont croissantes de bas en haut ;
- Les entrées $j, j + 1, \dots, k$ forment une bande horizontale et ces entrées sont crois-

santes de gauche à droite ;

- Chaque case dans la bande verticale est située à gauche des cases dans la bande horizontale qui sont sur la même ligne.

La taille d'un tableau vé est le nombre $k - i + 1$ de ses entrées. On dit que le tableau vé est connecté si le tableau gauche correspondant est connecté.

Exemple 38. *Un tableau vé des entrées 6, 7, 8, 9, 10*

$$V = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline & 7 \\ \hline 6 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Avec $i = 6$, $k = 10$ et la taille du tableau vé est 5. les entrées 6, 7, 8 forment une bande verticale, et 8, 9, 10 forment une bande horizontale.

4.2.2 Tableau d'enregistrement spécial et mot de tableau décalé

Définition 4.2.1. *Un tableau d'enregistrement spécial c'est un tableau de Young standard décalé de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, et pour chaque i tel que $1 \leq i \leq l$, les entrées $\lambda_i + \dots + \lambda_{i+1} + 1$, $\lambda_i + \dots + \lambda_{i+1} + 2, \dots$, $\lambda_i + \dots + \lambda_{i+1} + \lambda_i$ forment un tableau vé décalé connecté.*

Le nombre de lignes du tableau d'enregistrement spécial est égal au nombre de tableaux de vés composés.

Notons que pour chaque forme λ , le tableau d'enregistrement spécial est unique.

Le tableau d'enregistrement spécial est un analogue décalé du tableau d'enregistrement double (dual) défini par P. Edelman et C. Greene [EGR].

Exemple 39. *La construction du tableau d'enregistrement spécial de forme $(6, 4, 3)$ est obtenue en ajoutant les vés connectés formés par les ensembles $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$ et*

$\{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ pour chaque $1 \leq i \leq 3$, par les étapes suivants :

1	2	3	,	1	2	3	4	,	1	2	3	4	8	13	
							5		6		7				
									5		6		7		9
											10		11		12

Le tableau d'enregistrement est donc

					10		11		12
			5		6		7		9
1	2	3	4	8	13				

Définition 4.2.2. Le mot de lecture mixte d'un tableau de Young décalé T défini par Serrano [Serrano] est le mot correspondant à la paire de tableaux (T, V) sous la correspondance d'insertion mixte de Haiman, où V est le tableau d'enregistrement spécial, de la même forme que T . Le mot de lecture mixte décalé est dénoté $w_m(T)$.

Pour obtenir le mot de lecture mixte d'un tableau décalé T , on utilise l'algorithme inverse de l'insertion mixte. Voir Proposition 3.1 dans chapitre 3.

Exemple 40. Soit le tableau décalé de forme $\lambda = (5, 3, 2)$

		4		5
		2	3'	4
1	1	2'	2	3

$T =$

Le tableau d'enregistrement spécial de la même forme que T obtenu par les vés formés par $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$ et $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, est

		8		9
		4	5	7
1	2	3	6	10

$V =$

Le mot de lecture mixte décalé de T est obtenu en utilisant l'algorithme inverse de l'insertion mixte :

Nous trouvons le plus grand élément du tableau V qui est 10. L'élément correspondant à 10 du tableau T est l'élément 3 (3 est le dernier élément inséré pendant la construction du T). Comme 3 est le plus grand élément inséré par l'algorithme de l'insertion mixte dans la première ligne, on supprime le 3 du T . On obtient donc la dernière lettre de $w_m(T)$ qui est 3. On enlève le 10 du tableau V . Maintenant, nous trouvons que 9 est le plus grand élément du tableau V , l'élément correspondant à l'élément 9 du T est 5. On trouve que 5 a été déplacé par l'élément 4 qui est le plus grand élément plus petit que 5 placé dans la deuxième ligne. Alors remplaçons le 4 par 5 et cherchons l'élément qui a déplacé 4. Nous trouvons que 4 a été déplacé par le 2 dans la première ligne. Comme 2 est le plus grand élément inséré dans la première ligne, on supprime le 2 du T et on remplace le 2 par 4. On obtient l'avant dernière lettre de $w_m(T)$ qui est 2. On enlève le 9 du tableau V . En continuant de cette manière, nous allons obtenir le mot de lecture mixte décalé

$$w_m(T) = 2341254123.$$

Définition 4.2.3. Un mot w est un mot de tableau décalé s'il est le mot de lecture d'un tableau de Young décalé T de telle sorte que $w = w_m(T)$. La forme d'un mot de tableau décalé est définie comme la forme du tableau correspondant.

Un mot d'équerre est un mot composé d'un segment strictement décroissant suivi d'un autre faiblement croissant, c'est-à-dire c'est un mot $u = a_1 a_2 \dots a_m$ tel que pour $1 \leq k \leq m$, on a

$$a_1 > a_2 > \dots > a_k \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_m.$$

Théorème 4.2.1. [Serrano] Un mot w est un mot de tableau décalé s'il est un union de mots $u_l u_{l-1} \dots u_2 u_1$, tels que

- Chaque u_i est un mot d'équerre.
- Le plus grand sous-mot d'équerre du mot $u_i \dots u_1$ est u_i , pour tout i . ($1 \leq i \leq l - 1$)

Aussi, pour $1 \leq i \leq l-1$, la forme de $P_{mix}(u_l u_{l-1} \dots u_{i+1} u_i)$ est $(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)$, où λ_i est la longueur de u_i . En particulier, la forme du tableau $P_{mix}(w)$ est $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Autrement dit, pour un mot de tableau décalé w , les longueurs des u_i sont précisément les longueurs des lignes du tableau de Young décalé associées à w .

Exemple 41. Soit $w = 2341254123$ le mot de lecture obtenu de l'exemple 40. On voit que w est l'union de trois mots d'équerre $u_3 = 23$, $u_2 = 412$ et $u_1 = 54123$, alors $w = 23|412|54123$ avec, le plus long sous-mot d'équerre de $w = u_3 u_2 u_1$ est u_1 ; le plus grand sous-mot d'équerre de $u_3 u_2$ est u_2 ; etc. De plus, on a $\lambda_1 = l(u_1) = 5$, $\lambda_2 = l(u_2) = 3$ et $\lambda_3 = l(u_3) = 2$. Alors w est un mot de tableau décalé, et on a, la forme du tableau associé à w par l'insertion mixte est $\lambda = (5, 3, 2)$.

4.2.3 Relations de Sagan-Worley

Définition 4.2.4. Deux mots sont dits équivalents au sens de Sagan-Worley si l'on peut obtenir l'un de l'autre par les transformations suivantes.

Si a, b, c sont des lettres, alors, on a

1. $acb \equiv cab$ lorsque $a \leq b < c$;
2. $bac \equiv bca$ lorsque $a < b \leq c$.
3. $ab = ba$ si a et b sont les deux premières lettres du mot.

En particulier, les relations 1 et 2 sont les relations plaxiques de Knuth déjà considérées.

Les relations de Sagan-Worley ne permettent pas de définir une structure de monoïde, car ces relations ne sont pas compatibles avec la concaténation.

Exemple 42. Soit les mots $u = 12$, $u' = 21$, $v = 34$ et $v' = 43$, on a

$$12 \equiv 21 \text{ et } 34 \equiv 43,$$

alors $wv = 1234$ et $u'v' = 2143$. Puisque

$$P_{sw}(1234) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \text{ et } P_{sw}(2143) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array},$$

on voit que 1234 et 2143 ne sont pas équivalents car ils n'ont pas le même tableau d'insertion de Sagan-Worley. Donc, d'après la définition de monoïde (si $u \equiv u'$ et $v \equiv v'$ alors $wv \equiv u'v'$), on trouve qu'il y a une contradiction.

4.2.4 Relations plaxiques décalées

Pour construire un monoïde plaxique décalé, on doit utiliser des relations différentes aux relations de Sagan-Worley. On va utiliser les relations suivantes.

Définition 4.2.5. Deux mots sont dits plaxiquement équivalents décalés si l'on peut obtenir l'un de l'autre par une suite de transformations parmi les huit transformations suivantes.

Si a, b, c, d sont des lettres (dans A), alors, on a

$$- abdc \equiv adbc \text{ lorsque } a \leq b \leq c < d; \quad (4.1)$$

$$- acdb \equiv acbd \text{ lorsque } a \leq b < c \leq d; \quad (4.2)$$

$$- dacb \equiv adcb \text{ lorsque } a \leq b < c < d; \quad (4.3)$$

$$- badc \equiv bdac \text{ lorsque } a < b \leq c < d; \quad (4.4)$$

$$- cbda \equiv cdba \text{ lorsque } a < b < c \leq d; \quad (4.5)$$

$$- dbca \equiv bdca \text{ lorsque } a < b \leq c < d; \quad (4.6)$$

$$- bcda \equiv bcad \text{ lorsque } a < b \leq c \leq d; \quad (4.7)$$

$$- cadb \equiv cdab \text{ lorsque } a \leq b < c \leq d. \quad (4.8)$$

Remarque 2. Les relations (4.1) - (4.8) sont appelées les relations plaxiques décalées.

Ces relations peuvent être décrites de la façon suivante :

Soit $w \in A^*$. Nous observons que w est un mot d'équerre si et seulement si $P_{mix}(w)$ se

compose d'une seule ligne. Par exemple

$$P_{mix}(4123) = \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4'}$$

Alors, deux mots de quatre lettres w et w' sont plaxiquement équivalents décalés si et seulement si

- w et w' sont équivalents selon les relations plaxiques de Knuth, et
- ni w et ni w' sont des mots d'équerre.

Le théorème ci-dessous est le théorème principal dans ce chapitre, est un analogue décalé des relations plaxiques 1 et 2 dans la Def. 2.1.1.

Théorème 4.2.2. *Deux mots sont équivalents selon les relations plaxiques décalées si et seulement s'ils ont le même tableau d'insertion mixte.*

Pour la démonstration, on va suivre la présentation dans [Serrano]. La démonstration de ce théorème s'appuie sur des lemmes de la standardisation qui est définie comme suit

Définition 4.2.6. *Soit un mot $w = w_1 w_2 \dots w_m$ et son contenu (c_1, c_2, \dots, c_m) i.e. c_i est le nombre de lettre i dans w . La standardisation de w , dénoté $stand(w)$ est la permutation obtenue par réétiquetage les éléments étiquetés i par $c_1 + c_2 + \dots + c_{i-1} + 1, \dots, c_1 + c_2, \dots + c_{i-1} + 2, \dots, c_1 + c_2 + \dots + c_i$, de gauche à droite.*

Exemple 43. *Soit $w = 23314211$, on a : $c_1 = 3, c_2 = 2, c_3 = 2, c_4 = 1$. Alors, $c(w) = (3, 2, 2, 1)$. Pour calculer la standardisation de w , on commence à réétiqueter la lettre 2, on obtient $c_1 + 1 = 3 + 1 = 4$, puis la lettre 3, on obtient $c_1 + c_2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$, la deuxième occurrence de 3 devient $c_1 + c_2 + 2 = 3 + 2 + 2 = 7$ et ainsi de suite. On obtient $stand(w) = 46718523$.*

Haiman dans [Haim] définit la standardisation pour le tableau de Young décalé T , dénoté $stand(T)$ par la procédure suivante : Soit (c_1, c_2, \dots, c_m) le contenu de T . Les

entrées étiquetées i ou i' sont réétiquetées par $c_1 + c_2 + \dots + c_{i-1} + 1, \dots, c_1 + c_2, \dots + c_{i-1} + 2, \dots, c_1 + c_2 + \dots + c_{i-1} + c_i$, comme suit : On réétiquete ces nouveaux éléments dans l'ordre croissant, en commençant par les entrées étiquetées i' , de bas en haut en suivant les colonnes, et puis on réétiquete les entrées étiquetées par i , de gauche à droite en suivant les lignes. Si l'élément étiqueté est marqué, alors son élément réétiqueté est marqué aussi.

Rappelons qu'un tableau de Haiman est un tableau standard décalé de contenu $(1, \dots, 1)$ et peut avoir des lettres marquées hors diagonale. La standardisation d'un tableau de Young décalé est le tableau de Haiman de la même forme.

Exemple 44. Soit les deux tableaux de Young décalés suivants :

$$\begin{array}{l}
 T = \begin{array}{cccc} & & 3 & \\ & 2 & 3' & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2' \end{array}, \quad \text{on a : } c(T) = (3, 2, 2, 1) \text{ et } \text{stand}(T) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6' & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4' \end{array} \\
 \\
 T' = \begin{array}{cccc} & & & 3 \\ & & 3 & 3 \\ & 2 & 3' & 3' \\ 2 & 2 & 3' & 3' \\ 1 & 1 & 1 & 2' & 2 \end{array}, \quad \text{on a : } c(T') = (3, 5, 7) \text{ et } \text{stand}(T') = \begin{array}{cccc} & & & & 15 \\ & & & 13 & 14 \\ & & 8 & 10' & 12' \\ & 6 & 7 & 9' & 11' \\ 1 & 2 & 3 & 4' & 5 \end{array}.
 \end{array}$$

Lemme 4.2.1. Deux mots u et v sont plaxiquement équivalents décalés si et seulement s'ils ont le même contenu, et $\text{stand}(u) \equiv \text{stand}(v)$.

On va illustrer ce lemme par un exemple sur les relations plaxiques décalées.

Exemple 45. On va examiner la relation (4.1) avec un exemple.

Il y a 4 mots qui admettent 1243 comme standardisation : 1121, 1132, 1232, 1243, et 4 mots qui admettent 1423 comme standardisation : 1211, 1312, 1322, 1423.

On remarque d'après (4.1) que

$$1121 \equiv 1211, \quad 1132 \equiv 1312,$$

$$1232 \equiv 1322, \quad 1243 \equiv 1423.$$

Alors les mots plaxiquement équivalents selon (4.1) ont le même contenu et leurs standardisations sont équivalentes ($1243 \equiv 1423$). La réciproque est claire.

On peut examiner le lemme aussi sur les autres relations plaxiques.

Lemme 4.2.2. Soit w un mot et T un tableau de Young décalé. Alors

$$P_{mix}(stand(w)) = stand(P_{mix}(w));$$

$$Q_{mix}(stand(w)) = stand(Q_{mix}(w));$$

$$w_m(stand(T)) = stand(w_m(T));$$

Exemple 46. Soit $w = 23314211$, on a $c(w) = (3, 2, 2, 1)$ et $stand(w) = 46718523$.

Alors, on a

$$P_{mix}(stand(w)) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6' & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4' \end{array}$$

et

$$P_{mix}(w) = \begin{array}{cccc} & & 3 & \\ & 2 & 3' & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2' \end{array}$$

D'après Exemple 44. on a

$$stand(P_{mix}(w)) = \begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 6' & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4' \end{array}$$

D'où $P_{mix}(stand(w)) = stand(P_{mix}(w))$.

Proposition 4.1. ([Haim92], corollaire (3.2)) Soit u et v deux permutations.

Alors, $P_{mix}(u) = P_{mix}(v)$ ssi u et v sont équivalents selon les relations suivantes :

$$xzy\bar{x} \equiv zxy\bar{x}, yxz\bar{x} \equiv yzx\bar{x}, \bar{x}xzy \equiv \bar{x}zxy, \bar{x}yxz \equiv \bar{x}yzx.$$

Avec $x < y < z$, et $\bar{x} < y$.

Deux permutations u et v sont équivalentes selon ces relations si et seulement si u et v sont plaxiquement équivalents décalés.

Par exemple, considérons $xzy\bar{x}$ avec $x < \bar{x}$. D'après la relation (4.3), on a que $xzy\bar{x} \equiv zxy\bar{x}$, et si $\bar{x} < x$, alors d'après la relation (4.6) on a que $xzy\bar{x} \equiv zxy\bar{x}$.

Même chose pour les autres relations.

Comme $stand(u)$ et $stand(v)$ sont des permutations, on conclut alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.1. Pour tous mots u et $v \in A^*$, on a que

$$stand(u) \equiv stand(v) \text{ si et seulement si } P_{mix}(stand(u)) = P_{mix}(stand(v)).$$

Preuve du théorème 4.2.2

Soit les deux mots u et v sur A tel que $u \equiv v$, alors d'après Lemme 4.2.1, on a u et v ont le même contenu et $stand(u) \equiv stand(v)$. D'après Corollaire 4.2.1 et Lemme 4.2.2, on a $stand(P_{mix}(u)) = stand(P_{mix}(v))$. Comme u et v ont le même contenu, alors par la définition de la standardisation d'un tableau de Young décalé, on trouve que $P_{mix}(u) = P_{mix}(v)$. Réciproquement : soit u et v deux mots tels que $P_{mix}(u) = P_{mix}(v)$. Alors, $stand(P_{mix}(u)) = stand(P_{mix}(v))$. D'après Lemme 4.2.2, on a $P_{mix}(stand(u)) = P_{mix}(stand(v))$. Alors, d'après Corollaire 4.2.1, $stand(u) \equiv stand(v)$, et par le lemme 4.2.1, comme u et v ont le même contenu et $stand(u) = stand(v)$, on a que $u \equiv v$.

Exemple 47. Par la relation (4.1), on a $1243 \equiv 1423$, alors

$$P_{mix}(1243) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} = P_{mix}(1423).$$

Une classe plaxique décalée est une classe d'équivalence pour la relation plaxique \equiv . La classe plaxique décalée contenant un mot w est dénotée $\langle\langle w \rangle\rangle$. On peut identifier une classe plaxique décalée avec le tableau semi-standard décalé $T = P_{mix}(w)$ et $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle\langle w \rangle\rangle$.

La forme d'une classe plaxique est définie comme la forme du tableau semi-standard décalé correspondant.

Exemple 48. Les classes plaxiques décalées de mot de 4 lettres sont :

1 2 3 4	1234			
			4	
1 2' 3	2341 \equiv 2314		1 2 3'	3142 \equiv 3412
1 2' 3 4	2134			
			1 2' 3'	3421 \equiv 3241
			1 2' 3' 4	3214
1 2 4	1342 \equiv 1324			
1 2 3' 4	3124		1 2' 4'	2431 \equiv 4231
			1 2' 3 4'	4213
1 2 3	1243 \equiv 1423			
1 2 3 4'	4123		1 2 4'	1432 \equiv 4132
			1 2 3' 4'	4312
			1 2' 3' 4'	4321
1 2' 3	2143 \equiv 2413			

Figure 4.1: Les classes plaxiques décalées de mot de 4 lettres

Si on compare ces classes plaxiques décalées avec les classes plaxiques du même mot, on remarque les propositions suivantes.

Proposition 4.2. [Serrano] Si deux mots sont équivalents selon les relations plaxiques décalées, alors ils sont plaxiquement équivalents, et chaque classe plaxique est une réunion disjointe des classes plaxiques décalées.

On va illustrer la proposition en comparant les deux exemples 48 et 22.

Si on compare ces deux exemples, on remarque que la classe plaxique $\langle 1243 \rangle$ est l'union de deux classes plaxiques décalées $\langle\langle 1423 \rangle\rangle$ et $\langle\langle 4123 \rangle\rangle$.

Théorème 4.2.3. Chaque classe plaxique décalée $\langle\langle T \rangle\rangle$ contient exactement un seul mot de tableau décalé noté $w_m(T)$.

Preuve : D'abord, on démontrera l'existence d'un mot de tableau.

Soit un mot w sur \mathcal{A} , d'après la définition du mot de tableau décalé, w est un mot de tableau, alors il existe un tableau de Young décalé T , tel que $w = w_m(T)$. On a donc, $T = P_{mix}(w)$. Alors $T = P_{mix}(w_m(T))$ car, chaque classe plaxique correspond à un tableau T décalé, tel que $T = P_{mix}(w) = P_{mix}(w_m(T))$. Ceci montre qu'il existe un mot de tableau décalé dans la classe plaxique décalée $\langle\langle T \rangle\rangle$.

Unicité : Soit S un tableau décalé tel que $\langle\langle w_m(S) \rangle\rangle = \langle\langle w_m(T) \rangle\rangle$. On montrera que $S = T$.

D'après le théorème 4.2.2, on a que

$$P_{mix}(w_m(S)) = P_{mix}(w_m(T))$$

car $w_m(S)$ et $w_m(T)$ sont équivalents selon les relations plaxiques décalées. Mais, $P_{mix}(w_m(S)) = S$ et $P_{mix}(w_m(T)) = T$, d'où $S = T$.

4.2.5 Monoïde plaxique décalé

Définition 4.2.7. [Serrano] *Le monoïde plaxique décalé noté M^* est l'ensemble des classes plaxiques décalées avec le produit donné par $\langle\langle u \rangle\rangle \cdot \langle\langle w \rangle\rangle = \langle\langle uw \rangle\rangle$. M^* est défini de façon que deux mots sont équivalents selon les relations plaxiques décalées si et seulement s'ils ont le même tableau d'insertion mixte. Alors le monoïde plaxique se définit par la représentation suivante : Il est engendré par les lettres de l'alphabet A soumis aux relations décalées (4.1) - (4.8).*

On peut voir M^* aussi comme l'ensemble de tableaux semi-standards décalés. Alors le monoïde plaxique décalé muni du produit défini par la concaténation de mots de tableau. Il peut être également défini, avec les tableaux décalés et l'insertion mixte de M.Haiman.

Exemple 49.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2' & 2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 4' & \\ \hline 1 & 1 & 2' & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\langle\langle 2412 \rangle\rangle \cdot \langle\langle 143 \rangle\rangle = \langle\langle 2412143 \rangle\rangle.$$

4.2.6 Les invariants décalés de Greene

Dans cette section, nous introduisons un analogue décalé des invariants de Greene qui déterminent précisément quelles conditions doit satisfaire un mot pour que son tableau d'insertion ait la forme λ .

Rappel : un mot d'équerre est un mot $w = w_1 w_2 \dots w_l$ tel que, pour $1 \leq k \leq l$, on a

$$w_1 > w_2 > \dots > w_k \leq w_{k+1} \leq \dots \leq w_l.$$

Définition 4.2.8. *Un k -sous-mot d'équerre de w est l'union de k sous-mots d'équerre de w tel que :*

- n'importe quel élément ne peut apparaître que dans deux des mots, au plus, et
- chaque deux mots d'équerre ne peuvent avoir plus qu'un élément en commun.

Exemple 50. Soit $w = 3415961254$. On a que le plus grand 1-sous-mot d'équerre est 96125, le plus grand 2-sous-mot d'équerre est 96125, 4159 et le plus long 3-sous-mot d'équerre est 96125, 4159, 3124.

Le longueur de k -sous-mot d'équerre de w est la somme des longueurs des sous-mots d'équerre qui les contient.

L'analogie des invariants de Greene pour le tableau décalé est

Théorème 4.2.4. Soit w un mot dans A^* , la forme λ du $P_{mix}(w)$. Alors, on a pour tout $k \leq l(\lambda)$,

$$I_k(w) = \lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_k + \binom{k}{2}$$

avec $I_k(w)$ est le plus long sous-mot d'équerre de w .

Exemple 51. Soit $w = 3415961254$, le tableau d'insertion de w ,

$$P_{mix}(w) = \begin{array}{cccc} & & 6 & 9' \\ & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3' & 4 \end{array}$$

a la forme $(5, 3, 2)$. On a $I_1(w) = 5$, $I_2(w) = 9$ et $I_3(w) = 13$, alors, on voit que

$$\lambda_1 = 5 = I_1(w), I_2(w) = \lambda_1 + \lambda_2 + \binom{2}{2}, I_3(w) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \binom{3}{2}.$$

CONCLUSION

Ce mémoire se concentre sur la théorie combinatoire de tableaux de Young décalés. Nous avons construit une structure de produit sur l'ensemble de tableaux de Young décalés, le monoïde plaxique décalé. Cette théorie est parallèle à la théorie de tableaux de Young ordinaire.

Nous avons divisé ce mémoire en deux parties parallèles. Nous avons étudié dans la première partie la théorie de tableaux de Young et la construction du monoïde plaxique développées par Schützenberger et Lascoux dans lequel le produit de ce monoïde est obtenu de trois manières différentes, soit par la concaténation, soit par l'insertion de RSK et soit par les glissements de jeu du taquin.

Nous nous sommes concentré dans la deuxième partie sur la théorie de tableaux de Young décalés telle que développée par Sagan et nous avons construit un analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et de Schützenberger, le monoïde plaxique décalé qui a été développé par Serrano. Comme nous l'avons illustré, ce monoïde possède de nombreuses similarités avec le monoïde plaxique.

Nous avons étudié de cette théorie les éléments principaux suivants :

(1) Deux analogues de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth [développés par Haiman et Sagan-Worley] qui transforment des mots en paires des tableaux de Young décalés.

(2) Les relations de Knuth, la classe plaxique décalée qui caractérise l'ensemble de mots qui produise le même tableau d'insertion.

(3) Une version de l'opération de Schützenberger, le jeu de taquin, dans laquelle une ligne diagonale des lettres est réduit au premier tableau (tableau d'insertion décalé) sous l'algorithme d'insertion de Sagan-Worley.

(4) Les invariants de Greene, la longueur du plus long sous-mot croissant d'un mot de tableau qui ne change pas sous les relations de Knuth, détermine la forme du tableau.

Nous avons utilisé ces éléments pour construire un analogue décalé, le monoïde plaxique décalé. Nous avons introduit cette théorie en définissant un mot de lecture mixte pour chaque classe plaxique décalée. Le produit de ce monoïde plaxique est défini de deux manières différentes : soit par la concaténation de mots de tableaux et soit par l'insertion mixte de Haiman. Décrire ce monoïde avec l'utilisation de jeu de taquin reste une question ouverte.

RÉFÉRENCES

- [Ber] F. BERGERON. "Combinatoire algébrique". Dans : *Lacim, Université du Québec à Montréal* (2001).
- [EGR] P. EDELMAN et C. GREENE. "Balanced tableaux". Dans : *Adv. Math* 63 (1987), p. 42–99.
- [Fom] S. FOMIN. "Schur operators and Knuth correspondences". Dans : *J. Combin. Theory Ser. A* 72 (1995), p. 277–292.
- [FRT] G. de B. ROBINSON J.S. FRAME et R.M. THRALL. "The hooklengths of S_n ". Dans : *Canad. J. Math.* 6 (1954), p. 316–325.
- [Gree] C. GREENE. "An extension of Schensted's theorem". Dans : *Adv. Math* 14 (1974), p. 254–265.
- [Haim] M. D. HAIMAN. "On mixed insertion, symmetry, and shifted Young tableaux". Dans : *J. Combin. Theory Ser. A* 50 (1989), p. 196–225.
- [Haim92] M. D. HAIMAN. "Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor". Dans : *Discrete Math* 99 (1992), p. 79–113.
- [Knu] D. E. KNUTH. "Permutations, matrices, and generalized Young tableaux". Dans : *Pacific J. Math* 34 (1970), p. 709–727.
- [Kras] W. KRASKIEWICZ. "Reduced decompositions in hyperoctahedral groups". Dans : *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, Paris* 309 (1989), p. 903–907.
- [LaLe] Alain LASCOUX, B. LECLERC et Jean-Yves THIBON. "The Plactic Monoid". Dans : *Algebraic Combinatoric on Words*. Sous la dir. de Lothaire M. Cambridge University Press, 2002, 10pp.

- [LaSc] A. LASCOUX et M.-P. SCHÜTZENBERGER. "Le monoïde plaxique". Dans : *Noncommutative Structurei in Algebra and Geometric Combinatorics* (1981), p. 129–156.
- [Lot] M. LOTHAIRE. "Algebraic combinatorics on words". Dans : *Cambridge University Press* (2002).
- [Mac] I. G. MACDONALD. "Symmetric Functions and Hall Polynomials". Dans : *Oxford University Press* (1995).
- [Rob] G. de B. ROBINSON. "On the representations of the symmetric group". Dans : *Amer. J. Math* 60 (1938), p. 745–760.
- [Sagan] B. SAGAN. "Schifted tableaux, Schur Q-functions and a cojecture of R. P. Stanley". Dans : *J. Combin. Theory Ser. A* 45 (1987), p. 62–103.
- [Sagan79] B. SAGAN. "An Analog of Schented's Algorithm for Shifted Young Tableaux". Dans : *J. Combin. Theory Ser. A* 27 (1979), p. 10–18.
- [Sagan90] B. SAGAN. "The ubiquitous Young tableau". Dans : *Invariant theory and Young tableaux*. Sous la dir. de D. STANTON. Springer-Verlag, 1990, p. 262–298.
- [Sch63] M. P. SCHÜTZENBERGER. "Quelques remarques sur une construction de Schensted". Dans : *Math. Scand* 12 (1963), p. 117–128.
- [Sch77] M. P. SCHÜTZENBERGER. "La correspondance de Robinson". Dans : *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*. T. 579. Lecture Notes in mathematics. 1977, p. 59–133.
- [Sch97] M. P. SCHÜZENBERGER. "Pour le monoïde plaxique". Dans : *Math. Inform. Sci. Humaines* 140 (1997), p. 5–10.
- [Sche] C. SCHENSTED. "Longest increasing and decreasing subsequences". Dans : *Canad. J. Math* 13 (1961), p. 179–191.

- [Serrano] L. SERRANO. “Noncommutative Schur P-functions and the shifted plactic monoïde”. Dans : *University of Michigan* (2010).
- [Stanley] R. P. STANLEY. “Enumerative Combinatorics”. Dans : *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* vol.2 (1999).
- [Thom] G.P.THOMAS. “On a construction of Schützenberger”. Dans : *Discrete Math* 17 (1977), p. 107–118.
- [Thrall] R. M. THRALL. “A combinatorial problem”. Dans : *Michigan Mth. J* (1952), p. 81–88.
- [Worley] D.R.WORLEY. “A theory of shifted Young tableaux”. Dans : *MIT* (1984).
- [Youn01] A. YOUNG. “Quantative substitutional analysis I”. Dans : *Proc. London Math. Soc.* 33 (1901), p. 97–146.