The Journal of Symbolic Logic
Volume 56, Number 3, Sept. 1991

DÉFINISSABILITÉ DANS LES CORPS DE FONCTIONS p-ADIQUES

LUC BÉLAIR ET JEAN-LOUIS DURET

Abstract. We study function fields over p-adically closed fields in the first-order language of fields. Using ideas of Duret [D], we show that the field of constants is definable, and that the genus is an elementary property.

§0. Introduction. Soit p un nombre premier fixé. Un corps p-adiquement clos est un corps élémentairement équivalent au corps des nombres p-adiques, $\mathbf{Q}_p$.

Le langage des corps sera le langage constitué de deux constantes 0 et 1, et de deux fonctions de deux variables $+$ et $\cdot$.

Nous allons nous intéresser aux propriétés élémentaires des corps de fonctions sur un corps p-adiquement clos, en utilisant des idées de [D]. On montre que le corps des constantes est définissable, et que le genre est une notion du premier ordre.

Nous appellerons corps de fonctions sur un corps p-adiquement clos k, un corps K finiment engendré sur k et tel que k soit relativement algébriquement clos dans K. Donc K est une extension régulière de k, et un polynôme à coefficients dans k absolument irréductible est aussi absolument irréductible sur K. Nous appellerons corps de courbe sur k un corps de fonctions de degré de transcendance 1 sur k.

Pour la définition de $\Gamma(K,k)$, $(\mathscr{F}_0)$ et $(\mathscr{F}_1)$, on se reportera à [D,4,5,6].

§1. Définition du corps des constantes. On montre qu'un corps p-adiquement clos est définissable dans tous ses corps de fonctions, la définition pouvant varier selon le corps de fonctions. La démonstration repose sur le travail de [D] et le fait que dans tout corps p-adiquement clos, et pour tout entier naturel n, le sous-groupe multiplicatif $k^{\cdot n}$ des puissances n-ièmes est d'indice fini avec des représentants des translatés parmi les entiers naturels (voir, par exemple, [H, chap. 15, p. 231] ou [B, lemme 5]). Plus précisément, soit k un corps p-adiquement clos et $k^{\cdot}$ son groupe multiplicatif.

Lemme 1. *Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, il existe des entiers naturels $e_1, \dots, e_r$ tels que $k^{\cdot} = k^{\cdot n} \,\dot\cup\, e_1 k^{\cdot n} \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, e_r k^{\cdot n}$.*

Lemme 2. *Soit K un corps de fonctions sur k, et e un entier naturel, $e \geq 2$. Il existe un entier naturel $\Gamma(K,k)$ tel que si n est un entier naturel satisfaisant à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) > \Gamma(K,k)$, alors on a:*

$$(\forall x_1, x_2 \in K)(e x_1^n + x_2^n = e \rightarrow x_1, x_2 \in k).$$

Received April 4, 1990.

0022-4812/91/5603-0002/$01.30

DÉMONSTRATION. Si le degré de transcendance de K sur k est 1, alors $\Gamma(K,k)$ est le genre de K et c'est le lemme 3 de [D] mais avec la courbe projective plane non singulière d'équation $eX_1^n + X_2^n = eX_3^n$. Le cas général se ramène à celui-ci comme dans la proposition 9 de [D]. $\square$

Soit m un entier naturel et $\mathscr{C}_m(x)$ une formule $\bigvee_{i=1}^r \exists y\,(e_i x^n + y^n = e_i)$ du langage des corps où n est un entier naturel tel que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) > m$, et les e_i comme dans le lemme 1.

COROLLAIRE 3. *Soit K un corps de fonctions sur un corps p-adiquement clos k. Si $m \geq \Gamma(K,k)$, alors k est définissable dans K par la formule $\mathscr{C}_m(x)$.*

Puisque k porte une valuation définissable (voir, par exemple, [B, lemme 1]), on obtient le

COROLLAIRE 4. *Si K est un corps de fonctions sur k, alors K est instable.*

Dans ce qui précède, on peut remplacer K par une extension de k satisfaisant les hypothèses $(\mathscr{F}_1)$ de [D], notamment les extensions trancendantes pures de k.

En outre, on n'a utilisé ici que le fait qu'il existe des entiers naturels $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tels que $k^{\cdot n_i}$ est d'indice fini dans $k^{\cdot}$. Le corollaire 3 se généralise donc en conséquence, et on aura besoin de paramètres dans la définition $\mathscr{C}_m(x)$ selon la disponibilité de représentants des translatés des groupes $k^{\cdot n}$. Par exemple pour les corps élémentairement équivalents à une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, qui ont la propriété voulue (voir, par exemple, [H, ibid.] ou [B, ibid.]) on peut utiliser des nombres algébriques (car la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ est engendré par des nombres algébriques (voir, par exemple, [N, chap. V, théorème 5.4])).

§2. Le genre. Nous ne pouvons pas définir le genre (même par un ensemble infini de formules). Cependant nous allons montrer qu'il demeure une propriété du premier ordre. Notons $\tilde{k}$ la clôture algébrique de k.

Si K est un corps de courbe de genre g, et si C est une courbe définie sur k dont K est le corps, alors il existe une courbe plane d'équation $F(X_1, X_2) = 0$ de degré au plus $D(g)$ (voir [D, 18]) birationnellement équivalente à C, et donc il existe $(x_1, x_2) \in (K \otimes_k \tilde{k})^2 \backslash (\tilde{k})^2$ tel que $F(x_1, x_2) = 0$. Donc, on voit qu'il existe une extension finie L de k (le corps engendré sur k par les coefficients de F et de x_1, x_2) telle qu'il existe une courbe plane d'équation $F(X_1, X_2) = 0$, où $F \in L[X_1, X_2]$ est de degré au plus $D(g)$, et $(x_1, x_2) \in (K \otimes_k L)^2 \backslash (L)^2$. Notons que: 1) chaque élément d'une extension L de K de degré fini, disons d, se "code" par une suite de d éléments de k; 2) les opérations de L se "code" à l'aide de formules avec comme paramètres les coefficients d'un polynôme minimal de L; 3) une suite $(x_1, \ldots, x_d)$ "code" un élément de k si et seulement si $x_1 \in k$ et $x_2 = \cdots = x_d = 0$; 4) $K \otimes_k L$ se code à l'aide des mêmes formules que L. On définit donc l'énoncé du premier ordre $\varphi_{m,d}$ par: "Il existe un polynôme $f(x)$ sur k (i.e. dont les coefficients satisfont $\mathscr{C}_m(x)$),de degré d, irréductible, un polynôme absolument irréductible $F(X_1, X_2) \in L[X_1, X_2]$ (où L est l'extension de k de degré d donnée par f) de degré au plus $D(m)$, de genre m, dont les singularités (s'il y en a) sont des points doubles ordinaires, et $(x_1, x_2) \in (K \otimes_k L)^2 \backslash (L)^2$ tel que $F(x_1, x_2) = 0$" (d'après [D, 19] et l'élimination des quantificateurs). On a donc

PROPOSITION 5. *Si K est un corps de courbe sur un corps p-adiquement clos et si K est de genre g, alors K satisfait $\varphi_{g,d}$ pour un certain entier naturel $d \geq 1$.*

Réciproquement, supposons que K satisfasse $\varphi_{g,d}$ et que le genre de K soit strictement inférieur à g. Alors $\mathscr{C}_g(x)$ définit k dans $\tilde{K}$ (Corollaire 3) et il existe une courbe de genre g définie sur $\tilde{k}$ qui possède un point rationnel sur $(K \otimes_k \tilde{k})\backslash\tilde{k}$; on peut raisonner comme dans le lemme 1 de [D] pour conclure que le genre de K est au moins g, ce qui est contradictoire. Donc,

PROPOSITION 6. *Soit K un corps de courbe sur un corps p-adiquement clos. Si K satisfait $\varphi_{g,d}$, alors le genre de K est au moins g.*

PROPOSITION 7. *Deux corps de courbe sur un même corps p-adiquement clos qui sont élémentairement équivalents ont même genre. Précisément, si K est un corps de courbe sur un corps p-adiquement clos, alors:*

1. *K satisfait $\{\neg\varphi_{m,\delta};\, m,\, \delta \geq 1\}$ si et seulement si K est de genre* 0.
2. *Pour tout d, si K satisfait $\{\varphi_{g,d}\} \cup \{\neg\varphi_{m,\delta};\, m > g$ et $\delta \geq 1\}$, alors K est de genre g.*
3. *Si K est de genre $g > 0$, alors il existe $d \geq 1$ tel que K satisfasse*

$$\{\varphi_{g,d}\} \cup \{\neg\varphi_{m,\delta};\, m > g \text{ et } \delta \geq 1\}.$$

RÉFÉRENCES

[B] L. BÉLAIR, *Théorie des modèles des corps p-adiques*, ***Séminaire de structures algébriques ordonnées, année 1985–1986*** (F. Delon et al., éditeurs), Université Paris-VII, Paris, 1986.

[D] J.-L. DURET, *Sur la théorie élémentaire des corps de fonctions*, ce JOURNAL, vol. 51 (1986), pp. 948–956.

[H] H. HASSE, ***Number theory***, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[N] W. NARKIEWICZ, ***Elementary and analytic theory of algebraic numbers***, PWN, Warsaw, 1974.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE QUÉBEC À MONTRÉAL
MONTRÉAL, QUÉBEC H3C 3P8, CANADA

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ D'ANGERS
49045 ANGERS, FRANCE

ÉQUIPE DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-VII
75251 PARIS, FRANCE

Sorting: The Canadian address is Bélair's; the French ones are Duret's.