Anneaux de Fonctions p-Adiques

Author(s): Luc Bélair

Source: *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 60, No. 2 (Jun., 1995), pp. 484-497
Published by: Association for Symbolic Logic
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2275843

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 60, Number 2, June 1995

ANNEAUX DE FONCTIONS p-ADIQUES

LUC BÉLAIR

Abstract. We study first-order properties of the quotient rings $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ by a prime ideal $\mathscr{P}$, where $\mathscr{C}(V)$ is the ring of p-adic valued continuous definable functions on some affine p-adic variety V. We show that they are integrally closed Henselian local rings, with a p-adically closed residue field and field of fractions, and they are not valuation rings in general but always satisfy $\forall x, y(x|y^2 \vee y|x^2)$.

§0. **Introduction.** Soit p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Soit V un ensemble algébrique irréductible de l'espace affine p-adique $\mathbb{Q}_p^n$ et $\mathscr{C}(V)$ l'anneau des fonctions $V \to \mathbb{Q}_p$ qui sont continues (pour la topologie p-adique) et définissables. On s'intéresse à la théorie élémentaire des anneaux quotients $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ où $\mathscr{P}$ est un idéal premier. Le résultat principal est que les anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ sont des anneaux locaux henséliens qui sont intégralement clos, dont le corps des fractions et le corps résiduel sont des corps p-adiquement clos, et qui sont presque des anneaux de valuation: ils vérifient la propriété $\forall a, b(a|b^2 \vee b|a^2)$, où $x|y$ désigne la relation de divisibilité habituelle.

Cet article fait suite à [B1] où nous avions étudié le cas d'une courbe. Les idéaux maximaux donnent alors des corps p-adiquement clos et les autres idéaux premiers donnent des modèles d'une même théorie d'anneau de valuation, à savoir celle des séries de Puiseux p-adiques. Nous considérons ici la situation en général. Soit $\operatorname{Spec}\mathscr{C}(V)$ le spectre premier de $\mathscr{C}(V)$, $\mathbb{Q}_p[V]$ l'anneau de coordonnées de V et $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ le spectre p-adique de $\mathbb{Q}_p[V]$. Notons que $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[X_1 \dots, X_n]$ peut être identifié à l'espace de types $S_n^t(\mathbb{Q}_p)$ de [Pi], et que $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ est un sous-espace fermé de $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$ de façon canonique. Notre approche repose sur un homéomorphisme entre $\operatorname{Spec}\mathscr{C}(V)$ et $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$, (voir [B1], proposition 3.1). En effet, soit $\mathscr{P}$ un idéal premier de $\mathscr{C}(V)$ et $\mathbb{Q}_p \prec {}^*\mathbb{Q}_p$ une extension élémentaire suffisamment saturée, le point de $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ correspondant à $\mathscr{P}$ peut être représenté par un homomorphisme $\alpha\colon \mathbb{Q}_p[V] \to {}^*\mathbb{Q}_p$ qui consiste en l'évaluation en un point non-standard $x^* \in V({}^*\mathbb{Q}_p)$; $\mathscr{P}$ est alors le noyau de l'homomorphisme d'évaluation en x^*, $\mathscr{C}(V) \to {}^*\mathbb{Q}_p$ et $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P} \simeq \{f(x^*) : f \in \mathscr{C}(V)\}$. On utilise cet isomorphisme pour étudier les anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$.

Dans le §1, on donne quelques propriétés algébriques des fonctions continues définissables, et on vérifie que les anneaux $\mathscr{C}(V)$ sont de dimension finie égale à la dimension de V comme variété algébrique. Dans §2 nous rassemblons les propriétés déjà connues de nos anneaux et on montre qu'ils vérifient la propriété

Received November 29, 1993; revised August 8, 1994.
Ce travail a reçu l'appui financier du CRSNG et de la Fondation UQAM.

0022-4812/95/6002-0008/$02.40

$\forall x, y(x|y^2 \vee y|x^2)$. Celle-ci entraîne que les idéaux premiers sont totalement ordonnés par l'inclusion et on a des anneaux locaux. On montre que ce sont des anneaux intégralement clos dans §3. Finalement, dans §4, on donne un exemple d'un idéal premier non maximal $\mathscr{P}$ tel que $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)/\mathscr{P}$ n'est pas un anneau de valuation, ce qui montre qu'on n'obtient pas en général la même théorie élémentaire que sur les courbes.

Les anneaux du type $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ ont déjà été considérés dans le cas réel, i.e. où on remplace partout ci-dessus $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{R}$. Dickmann (voir [D1], [D2], [D3]) a établi des résultats pour les variétés affines réelles. Ce sont aussi des exemples particuliers des anneaux réels clos de N. Schwartz (voir [Sc]). Notre approche s'applique aussi au cas réel, avec des résultats analogues. Nous croyons que nos résultats nous amènent essentiellement au même point que dans le cas réel.

Soit $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ un ensemble définissable et $\mathscr{C}(S)$ l'anneau analogue à $\mathscr{C}(V)$. La plupart des résultats ci-dessous s'appliquent aussi aux anneaux $\mathscr{C}(S)/\mathscr{P}$ où S est localement fermé, pour lesquels on a un homéomorphisme entre $\operatorname{Spec}\mathscr{C}(S)$ et un sous-ensemble $\tilde{S}$ (voir ci-dessous) de $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$ (voir [B1], corollaire 3.4). Le cas des variétés affines V se ramène au cas de $\mathbb{Q}_p^n$ lui-même, par un théorème d'extension à la Tietze-Urysohn qui assure que si $F \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ est un fermé définissable alors l'homomorphisme de restriction $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^n) \to \mathscr{C}(F)$ est surjectif. En effet, par le théorème 5.5 de [Ha] il existe un ouvert $U \supseteq F$ et une rétraction continue et définissable $r\colon U \to F$, et par le théorème 5.4 de [Ha] il existe des fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^n)$ telles que $\varphi + \psi = 1$, $\varphi|U^c = 0$ et $\psi|F = 0$; ainsi $f \in \mathscr{C}(F)$ est la restriction de $\varphi g + \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^n)$, où $g = f \circ r$. Un tel théorème existe dans le cas réel (voir [BCR], proposition 2.6.9). Une réduction plus fine serait une "paramétrisation définissable" comme la proposition 3.2 de [B1]: e.g., si $d = \dim V$, alors il existe un idéal premier $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^d)$ tel que $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^d)/\mathscr{Q} \simeq \mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$.

Nous utilisons la notation et la terminologie de [B1] auquel nous renvoyons. Rappelons-en toutefois quelques éléments. Anneau sera synonyme d'anneau unitaire commutatif et définissable sera synonyme de définissables avec paramètres dans le langage des anneaux. On utilise les prédicats auxiliaires suivants avec l'interprétation indiquée dans les anneaux: $R_n(x)$, $n \geq 1$, $R_n(x) \leftrightarrow \exists y(xy^n = 1)$; $P_n(x)$, $P_n^{\cdot}(x)$, $n \geq 2$, $P_n(x) \leftrightarrow \exists y(y^n = x)$, $P_n^{\cdot}(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge P_n(x)$; $D(x, y)$, $\Upsilon(x, y)$, $D(x, y) \leftrightarrow R_1(x) \wedge R_\varepsilon(x^\varepsilon + py^\varepsilon)$, $\Upsilon(x, y) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge P_\varepsilon^{\cdot}(x^\varepsilon + py^\varepsilon)$, où $\varepsilon = 3$, si $p = 2$, $\varepsilon = 2$, sinon. Pour $n \geq 2$, $\Delta_n = \{\lambda p^r : 0 \leq r < n,\ 1 \leq \lambda < p^{2t+1},\ (\lambda, p) = 1,\ n = mp^t,\ (m, p) = 1\}$. On désigne par v_p la valuation p-adique dans les corps p-adiquement clos. On sait que $v_p(x) \leq v_p(y) \leftrightarrow \Upsilon(x, y)$.

Nous utilisons aussi la notation suivante. Dans un espace spectral (i.e. homéomorphe au spectre premier d'un anneau), on dit qu'un point β est une *spécialisation* d'un point α si β appartient à l'adhérence de $\{\alpha\}$. La relation de spécialisation définit un ordre partiel sur les points: $\alpha \leq \beta$ si et seulement si β est une spécialisation de α. La longueur d'une chaîne de spécialisations $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ est n. La dimension (combinatoire) d'un espace spectral est le supremum des longueurs de chaîne de spécialisations. Ainsi la dimension d'un anneau est égale à la dimension de son spectre premier comme espace spectral. Tout ensemble définissable $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$

induit un sous-ensemble $\widetilde{S} \subseteq \mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$ tel que $S \subseteq \widetilde{S}$ par l'inclusion canonique $\mathbb{Q}_p^n \hookrightarrow \mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$ (voir [B1] §0). Soit A un anneau et $\alpha \in \mathrm{Spec}_p\, A$, on associe à α l'idéal premier $\mathscr{P}(\alpha) = \{a \in A : \alpha \in [\varphi(a)]\}$, où $\varphi(a)$ est la formule $(a = 0)$, et $[\varphi(a)]$ le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}_p\, A$ associé à la formule $\varphi(a)$ (voir [B1], §0). On note Ω_p le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ pour la valuation p-adique, $|x|_p$ la norme p-adique sur Ω_p normalisée telle que $|p|_p = p^{-1}$, et v la valuation de Ω_p (voir e.g. [Am]). Pour $a \in \Omega_p$ et $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, on pose $B_\Omega(a,\delta) = \{x \in \Omega_p : |x - a|_p < \delta\}$, et pour un corps intermédiaire $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \Omega_p$ on pose $B_K(a,\delta) = B_\Omega(a,\delta) \cap K$, en particulier on pose $B(a,\delta) = B_\Omega(a,\delta) \cap \mathbb{Q}_p$. On fixe $\mathbb{Q}_p \prec {}^*\mathbb{Q}_p$ une extension élémentaire suffisamment saturée.

Je remercie D. Barsky pour ses indications sur le polygone de Newton.

§**1. Fonctions continues définissables.** Les fonctions p-adiques définissables ont été étudiées plus précisément avec les théorèmes de décomposition cellulaire ou cylindrique p-adique (voir [De2] et [SV]). Nous nous limitons ici à rassembler quelques propriétés algébriques des fonctions continues. On suit d'abord l'exposé de Dickmann sur les fonctions réelles (voir [D2], §9).

C'est une conséquence du théorème d'élimination de Macintyre que les fonctions définissables p-adiques sont algébriques. À cause du manque de connexité de $\mathbb{Q}_p$, une fonction continue algébrique, même sur un ouvert, n'est pas nécessairement définissable contrairement à la situation dans le contexte de $\mathbb{R}$; elle est par contre localement définissable.

PROPOSITION 1.1. *Soit $f : S \to \mathbb{Q}_p$ une fonction sur un sous-ensemble définissable S de $\mathbb{Q}_p^n$.*

(1) *Si f est définissable alors f est une fonction algébrique, i.e. il existe $F(\boldsymbol{X}, Y) \in \mathbb{Q}_p[\boldsymbol{X}, Y]$ tel que $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$, pour tout $\boldsymbol{x} \in S$.*

(2) *Si f est continue et algébrique, alors tout $\boldsymbol{x} \in S$ possède un voisinage ouvert U tel que la restriction $f|_{U\cap S}$ est définissable.*

DÉMONSTRATION. (1). Voir [SV], lemme 1.2.

(2) Soit $F(\boldsymbol{X}, Y)$ un polynôme sur $\mathbb{Q}_p$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in S$ on a $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$. Par le lemme 1.1 de [SV] il existe une partition de S en un nombre fini d'ensembles définissables T tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in T$, il existe un voisinage ouvert U et des fonctions continues définissables $F_1, \dots, F_k : T \cap U \to \mathbb{Q}_p$, qui donnent les racines (distinctes) de F dans $\mathbb{Q}_p$. Par continuité, f doit coïncider avec l'un des F_i sur un voisinage ouvert $U_0 \subseteq U$ de x. ■

Sur un ouvert définissable $U \subseteq \mathbb{Q}_p^n$, une fonction algébrique f possède un polynôme minimal. En effet l'idéal $I_f = \{F \in \mathbb{Q}_p[\boldsymbol{X}, Y]$: pour tout $\boldsymbol{x} \in U$, $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0\}$ est principal (voir [D2], proposition 9.3) et on prend un générateur dont le plus grand commun diviseur des coefficients est 1. Un polynôme minimal est un polynôme de plus petit degré en Y dans I_f et est essentiellement unique, mais pas nécessairement irréductible. Par exemple, soit $n \geq 2$ fixé et $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}$ un système exact et complet de représentants des translatés du groupe multiplicatif $P_n^{\cdot}$ des puissances n-ièmes de $\mathbb{Q}_p$. Soit τ la fonction défini par $\tau(0) = 0$ et $\tau(x) = e_i$ si $x \in e_i P_n^{\cdot}$, et soit $\delta(x) = x\tau(x)$. Alors $\delta \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ et son polynôme minimal est $(Y - e_i X) \cdots (Y - e_k X)$. Cependant on a

PROPOSITION 1.2 (cf. [BR], proposition 8.13.15). *Soit $U \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ un ouvert définissable, $f \in \mathscr{C}(V)$, F un polynôme minimal de f, et $F = F_1 \cdots F_k$ la décomposition de F en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}_p[X, Y]$. Alors on a*

(1) *Les F_i sont distincts.*

(2) *Soit $Q_i = F/F_i$ et $U_i = \{x \in U : F_i(x, f(x)) \neq 0\}$, alors les U_i sont des ouverts disjoints non vides et pour tout $x \in U_i$, $Q_i(x, f(x)) = 0$.*

(3) *$\bigcup_i U_i$ est dense dans U.*

DÉMONSTRATION. (1) et (2) découlent de la minimalité de F. Pour (3), supposons que $U \setminus \bigcup_i U_i$ contienne un ouvert non vide W. Soit f_W la restriction de f à W, G un polynôme minimal de f_W, et Q un facteur irréductible de G. Or, pour tout i on a $F_i(x, f_W(x)) = 0$ sur W. Ainsi on a $F_i \in (Q)$ pour tout i, ce qui est absurde puisque les F_i sont irréductibles et distincts. ■

De façon semblable au cas réel, les fonctions p-adiques continues et définissables d'une variable possèdent un développement en série de Puiseux (voir [SV], lemme 2.5). Nous avons déjà exploité ce phénomène pour étudier $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)/\mathscr{P}$ (voir [B1]). Elles satisfont aussi une inégalité de Lojasiewicz (voir [BS], théorème 2.5) qui est à la base l'homéomorphisme entre Spec $\mathscr{C}(V)$ et $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$. Une conséquence de cet homéomorphisme est que les anneaux $\mathscr{C}(V)$ sont de dimension finie égale à celle de V comme variété algébrique, puisqu'il en est ainsi de la dimension de $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ comme espace spectral. Ces faits sont bien connus dans le cas réel (voir [CR], §8) et l'analogue p-adique se démontre de façon semblable. Nous esquissons ici la preuve qui couvre le cas plus général des ensembles définissables.

DÉFINITION 1.3 (cf. [CR], §8). Soit $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ un ensemble définissable et $x \in S$. La dimension p-adique de S en x, notée $\dim_p(S, x)$, est définie comme étant le supremum des longueurs de chaînes de spécialisations de points de S se terminant en x. La dimension p-adique de S, notée $\dim_p S$, est le supremum des $\dim_p(S, x)$ pour $x \in S$. Notons que si $S = V$ est une variété affine, alors $\dim_p V = \dim \operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$.

LEMME 1.4. *Soit A un anneau, alors toute chaîne de spécialisations, de* $\operatorname{Spec}_p A$ *induit une chaîne de spécialisations d'idéaux premiers de A de la même longueur. Ainsi* $\dim \operatorname{Spec}_p A \leq \dim \operatorname{Spec} A = \dim A$.

DÉMONSTRATION. On associe à $\alpha \in \operatorname{Spec}_p A$ l'idéal premier $\mathscr{P}(\alpha)$, et il est clair que si $\alpha \leq \beta$, alors $\mathscr{P}(\alpha) \subseteq \mathscr{P}(\beta)$. Il suffit donc de voir que si $\alpha < \beta$ alors $\mathscr{P}(\alpha) \subset \mathscr{P}(\beta)$. Supposons $\alpha < \beta$ et $\mathscr{P}(\alpha) = \mathscr{P}(\beta)$. Par hypothèse il existe un ouvert du type $D_n(a)$, pour un $n \geq 2$ et $a \in A$, tel que $\alpha \in D_n(a)$ et $\beta \notin D_n(a)$. Mais $\beta \in D_1(a)$ puisque $\mathscr{P}(\alpha) = \mathscr{P}(\beta)$. Alors il existe $e \in \Delta_n$ tel que $P_n(e)$ n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}_p$ et $\beta \in D_n(ea)$. Mais ceci entraîne $\alpha \in D_n(ae)$ car $\alpha \leq \beta$, ce qui est absurde puisque $D_n(a) \cap D_n(ea) = \varnothing$. ■

Une conséquence immédiate de ce lemme est que $\dim_p S \leq \dim \overline{S}^Z$, où $\overline{S}^Z$ est la fermeture de Zariski de S dans $\mathbb{Q}_p^m$ et $\dim \overline{S}^Z$ est la dimension au sens de la géométrie algébrique.

LEMME 1.5 (cf. [CR], proposition 7.5). *Pour tout x dans $\mathbb{Q}_p^n$, n il y a dans* $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ *une chaîne de spécialisations de longueur n et se terminant en x. Ainsi* $\dim \operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n] = \dim_p \mathbb{Q}_p^n = n$.

DÉMONSTRATION. Soit x^* un point non standard tel que $\mathbb{Z}v_p(x_n^* - x_n) >$

$\mathbb{Z}v_p(x^*_{n-1} - x_{n-1}) > \cdots > \mathbb{Z}v_p(x^*_1 - x_1) > v_p(\mathbb{Q}_p)$, et soit α_0 le point de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ induit par x^*. Soit α_i le point de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ induit par $(x^*_1, \ldots, x^*_{n-i}, x_{n-i+1}, \ldots, x_n)$. Alors α_n s'identifie à x et $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n = x$ est une chaîne de spécialisations de longueur n. D'autre part on sait déjà que $\dim \mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n] \leq \dim \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n] = n$. ■

REMARQUE 1.6. Ce lemme s'applique à tout ouvert définissable $U \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ avec une chaîne de spécialisations dans $\widetilde{U}$.

PROPOSITION 1.7 (cf. [CR], proposition 8.11, et [SV], théorème 3.4). *Soit $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$, un ensemble définissable non vide, et d la dimension de la fermeture de Zariski de S dans $\mathbb{Q}_p^n$, au sens de la géométrie algébrique. Alors $d = \dim_p S$.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 1.4 on peut supposer $d \geq 1$. Il reste à voir que $d \leq \dim_p S$. Soit $\overline{S}^Z = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, où les V_i sont irréductibles. Alors $\overline{S \cap V_i}^Z = V_i$, et on peut supposer que $\overline{S}^Z = V$ est irréductible. On peut exprimer S sous la forme d'une réunion d'ensembles $S_1, \ldots, S_k$ de la forme $S_i = Z(f_i) \cap U_i$, où f_i est un polynôme et U_i un ouvert définissable. Puisque V est irréductible, on doit avoir $\overline{S_i}^Z = V$ pour un certain i, disons $\overline{S_1}^Z = V$. Alors $V \subseteq Z(f_1)$ car la fermeture de Zariski est monotone et $Z(f_1)$ un fermé de Zariski. Ainsi on a $\boldsymbol{z} \in S \leftrightarrow \boldsymbol{z} \in V \;\&\; \boldsymbol{z} \in U_1$. Puisque le lieu singulier de V est un sous-ensemble algébrique propre de V, S_1 n'y est pas inclus et contient un point non singulier $\boldsymbol{y}$ (cf. [BCR], proposition 3.3.13). Par le critère jacobien (voir [BCR], définition 3.3.1) et le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage définissable ouvert de $\boldsymbol{y}$ dans V, qui est homéomorphe par un homéomorphisme définissable à un ouvert définissable de $\mathbb{Q}_p^d$. Par la remarque 1.6, on obtient une chaîne de spécialisations dans $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$ de longueur d et se terminant en $\boldsymbol{y}$. Puisque $\boldsymbol{y} \in S_1$ est ouvert dans V, $\tilde{S}_1$ est aussi ouvert dans $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$ (voir, par exemple, [B1], corollaire 3.6) et cette chaîne de spécialisations doit se trouver dans $\tilde{S}_1$, d'où $\dim_p(S_1, \boldsymbol{y}) \geq d$, et donc $\dim_p(S, \boldsymbol{y}) \geq d$. ■

La dimension p-adique $\dim_p S$ coïncide donc avec celle introduite dans [SV] (cf. théorème 3.4; voir aussi [VD]).

§**2. Anneaux p-adiques.** Dans ĉe paragraphe nous rassemblons quelques propriétés des anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$. Considérons $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$, $\boldsymbol{x}^* \in V({}^*\mathbb{Q}_p)$ un point non-standard correspondant à $\mathscr{P}$ et $A = \{f(\boldsymbol{x}^*) : f \in \mathscr{C}(V)\} \simeq \mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$.

PROPOSITION 2.1. (a) ([B1], lemme 3.9) *Soit $n \geq 2$, $a \in A$ tel que $a \neq 0$ et ${}^*\mathbb{Q}_p \vDash P_n^{\cdot}(a)$, alors $A \vDash P_n^{\cdot}(a)$.*

(b) ([B1], corollaire 3.10) *Pour tout $n \geq 2$, $A \vDash a \neq 0 \to \bigvee_{e \in \Delta_n} \exists b (a = eb^n)$.*

(c) ([B1], lemme 3.11) *Soit $a_j \in A$ tels que $v_p(a_1) = 0$ et $v_p(a_j) \geq v_p(p)$, pour $j > 1$. Alors il existe $y \in A$ tel que $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ et $v_p(y) = 0$.*

(d) ([B1], corollaire 3.12) *Si $\mathscr{P}$ est maximal alors $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ est un corps p-adiquement clos.*

(e) *Le corps des fractions de A est p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. (e). Le corps des fractions de $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ est canoniquement isomorphe au corps résiduel du localisé $\mathscr{C}(V)_{\mathscr{P}}$, et par le corollaire 3.3 de [Pi] ce dernier est un corps p-adiquement clos. ■

On peut donner un argument direct pour montrer que le corps résiduel du localisé $\mathscr{C}(V)_{\mathscr{P}}$ est p-adiquement clos, et donc aussi le corps des fractions de $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$. Nous l'esquissons ici; il met en relief un lien plus étroit entre $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ et $\operatorname{Spec} \mathscr{C}(V)$.

LEMME 2.2 (cf. [CC], §3). *Soit* $f \in \mathscr{C}(V)$ *et* $U = \{\boldsymbol{x} \in V; f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$, *alors* $\mathscr{C}(U)$ *est isomorphe au localisé* $\mathscr{C}(V)_f$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 3.3 de [B1], on a pour tout $g \in \mathscr{C}(U)$ un entier N tel que la fonction $f^N \cdot g$ prolongée par 0 appartienne à $\mathscr{C}(V)$. Ceci assure que l'homomorphisme naturel $\mathscr{C}(V)_f \to \mathscr{C}(U)$ est surjectif. Il est injectif puisque son noyau est l'idéal des fonctions g tel que $f \cdot g = 0$. ■

Ce lemme entraîne que l'espace annelé $(\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V], \mathscr{C}\mathscr{D})$, où $\mathscr{C}\mathscr{D}$ est le faisceau des fonctions continues définissables, est isomorphe au schéma affine de l'anneau $\mathscr{C}(V)$, comme dans le cas réel (voir [CC], §3).

Dans [B1] nous introduisions la théorie ALpC qui axiomatise les anneaux locaux henséliens dont le corps résiduel est p-adiquement clos. Par commodité nous la reproduisons ici, c'est la théorie d'anneau formée des axiomes suivants:

(i.0) axiomes d'anneau;
(i.1) $0 = 1 \to \perp$;
(i.2) $R_1(x + y) \to R_1(x) \vee R_1(y)$;
(i.3) $R_n(x) \to R_1(x - y) \vee R_n(y)$;
(ii.1) $D(x, y) \leftrightarrow R_1(x) \wedge R_\varepsilon(x^\varepsilon + py^\varepsilon)$, $\varepsilon = 3$, si $p = 2$, $\varepsilon = 2$, sinon;
(ii.2) $U(x) \leftrightarrow D(x, 1) \wedge D(1, x)$;
(ii.3) $R_1(x) \to D(x, y) \vee D(y, x)$;
(ii.4) $D(x, y) \wedge D(y, z) \to D(x, z)$;
(ii.5) $D(x, y) \wedge D(x', y') \to D(xx', yy')$;
(ii.6) $D(x, y) \wedge D(x, y') \to D(x, y + y')$;
(iii.1) $D(p, 1) \to \perp$;
(iii.2) $D(1, x) \to \bigvee\{D(p, x - i) : 0 \leq i < p\}$;
(iii.3) $D(x, 1) \vee D(p, x)$;
(iii.4_n) $R_1(x) \to \bigvee\{R_n(ex); e \in \Delta_n\}$;
(iv$_n$) $\bigwedge\{U(x_1), D(p, x_j) : 1 < j \leq n\} \to \exists y(y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_n = 0 \wedge U(y))$.

PROPOSITION 2.3. *On a* $\mathscr{C}(V)_{\mathscr{P}} \vDash$ *ALpC, en particulier son corps résiduel est p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme précédent on a $\mathscr{C}(V)_{\mathscr{P}} \simeq \varinjlim_{x^* \in U_i} \mathscr{C}(U_i)$, où les U_i sont les ouverts définissables de V qui contiennent $\boldsymbol{x}^*$. Vérifions l'axiome (i.3). Soit $B = \varinjlim_{x^* \in U_i} \mathscr{C}(U_i)$, $x, y \in B$, représentés disons par $f, g \in \mathscr{C}(U_i)$ respectivement, tel que $B \vDash R_n(x)$. Alors il existe $U_j \subset U_i$ et $h \in \mathscr{C}(U_j)$ tel que sur U_j, $f = h^n$ et f est non nul; en particulier comme $\boldsymbol{x}^* \in U_j$, on a $f(\boldsymbol{x}^*) = h(\boldsymbol{x}^*)^n$. Si $g(\boldsymbol{x}^*) \neq f(\boldsymbol{x}^*)$ alors $\boldsymbol{x}^*$ appartient à l'ouvert $\{\boldsymbol{x} \in U_j : g(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})\}$ et on a $B \vDash R_1(x - y)$. Sinon, alors $g(\boldsymbol{x}^*) = h(\boldsymbol{x}^*)^n \neq 0$ et $\boldsymbol{x}^*$ appartient à l'ouvert $U = \{\boldsymbol{x} \in U_j : P_n^{\cdot}(g(\boldsymbol{x}))\}$. En utilisant par exemple les fonctions de Skolem explicites de [De1], on peut définir une fonction $\zeta : U \to \mathbb{Q}_p$ continue et définissable telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in U$, $g(\boldsymbol{x}) = \zeta(\boldsymbol{x})^n \neq 0$, d'où $B \vDash R_n(y)$. Les axiomes (ii) et (iii) se traitent de façon similaire. Pour (iv$_n$), soit a_j représenté par $f_j \in \mathscr{C}(U_i)$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in U_i$ on ait $v_p(f_1(x)) = 0$ et $v_p(f_j(x)) > 0$, pour $j > 1$. Alors pour tout

$\boldsymbol{x} \in U_i$ il existe un seul et unique $y \in \mathbb{Q}_p$ tel que $y^n + f_1(\boldsymbol{x})y^{n+1} + \cdots + f_n(\boldsymbol{x}) = 0$ et $v_p(y) = 0$. Ceci définit une fonction $\zeta : U_i \to \mathbb{Q}_p$, et on vérifie facilement que l'unicité en question et la compacité de $\mathbb{Z}_p$ entraîne que ζ est continue. Ainsi $\zeta \in \mathscr{C}(U_i)$ et le germe de ζ donne la racine cherchée. ■

LEMME 2.4. *On a* $A \models \Upsilon(x,y) \wedge R_1(x) \leftrightarrow D(x,y)$.

DÉMONSTRATION. $(\to)$ Supposons $\Upsilon(x,y)$ et x inversible. Il suffit de vérifier que $x^\varepsilon + py^\varepsilon$ est inversible. Mais sinon, alors $x^\varepsilon + py^\varepsilon \in \mathscr{M}$, pour un certain idéal maximal $\mathscr{M}$, et on aurait $x^\varepsilon \equiv -py^\varepsilon$ et $x \not\equiv 0$ modulo $\mathscr{M}$, ce qui contredirait l'existence d'une valuation p-adique sur $A/\mathscr{M}$ puisque $A/\mathscr{M}$ est p-adiquement clos (proposition 2.1 (d)). ■

DÉFINITION 2.5. Soit ApC la théorie d'anneau obtenue de ALpC en supprimant (i.2), (i.3) et en remplaçant partout dans les autres axiomes $D(x,y)$ par $\Upsilon(x,y)$, et $R_1(x)$ par $x \neq 0$.

LEMME 2.6. *On a* $A \models ApC$.

DÉMONSTRATION. On sait que ${}^*\mathbb{Q}_p \models$ ApC ([B1], lemme 1.4). D'autre part, après traduction, les axiomes (i), (ii), (iii) de ApC sont universels en termes des prédicats $P_n^{\cdot}$. Le résultat découle donc directement de la proposition 2.1. ■

LEMME 2.7. *On a* $A \models \Upsilon(x,1) \to R_1(x)$.

DÉMONSTRATION. Supposons $x, z \in A$, $x \neq 0$ tels que $x^\varepsilon + p = z^\varepsilon$. Or on a toujours que $z^\varepsilon - p$ est inversible dans A, sinon $z^\varepsilon - p \in \mathscr{M}$ pour un certain idéal maximal $\mathscr{M}$ et on obtient une contradiction comme ci-dessus en passant au quotient modulo $\mathscr{M}$. Ainsi $x^\varepsilon + p - p = x^\varepsilon$ est inversible et x est inversible. ■

La dernière propriété que nous mettons en évidence est analogue à la propriété $0 < y < x \to x|y^2$ des anneaux réels clos de N. Schwartz. Nous avons d'abord besoin de l'observation suivante. Fixons un ordre (arbitraire) sur les translatés du sous-groupe multiplicatif $P_\tau^\bullet$, où $\tau = 2$, si $p = 2$, $\tau = p - 1$, sinon. Pour $x, y \in \mathbb{Q}_p$, on définit les fonctions suivantes.

$$\inf(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x = y, \\ x, & \text{si } v(x) < v(y) \text{ et } x \neq 0, \\ y, & \text{si } v(y) < v(x) \text{ et } y \neq 0, \\ z, & \text{si } x \neq y \text{ et } v(x) = v(y), \text{ où } z = x \text{ ou } y \text{ selon que} \\ & \quad \frac{x-y}{2} \text{ ou } \frac{y-x}{2} \text{ appartienne au plus petit translaté de } P_\tau^\bullet; \end{cases}$$

$$\sup(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x = y, \\ x, & \text{si } v(x) > v(y) \text{ et } y \neq 0, \\ y, & \text{si } v(y) > v(x) \text{ et } x \neq 0, \\ z, & \text{si } x \neq y \text{ et } v(x) = v(y), \text{ où } z = x \text{ ou } y \text{ selon que} \\ & \quad \frac{x-y}{2} \text{ ou } \frac{y-x}{2} \text{ appartienne au plus grand translaté de } P_\tau^\bullet. \end{cases}$$

Par la preuve du lemme 7.1 de [De1] sur les fonctions de Skolem définissables, les fonctions inf et sup sont bien définies. On vérifie directement qu'elles appartiennent à $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)$.

LEMME 2.8. *On a* $A \models \Upsilon(a,b) \to a|b^2$.

DÉMONSTRATION. Soit $a, b \in A$, $a = f(\boldsymbol{x}^*)$, $b = g(\boldsymbol{x}^*)$, alors $f_1(\boldsymbol{x}) = \inf(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}))$ et $g_1(\boldsymbol{x}) = \sup(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}))$ appartiennent à $\mathscr{C}(V)$. Prenons un ordre sur les translatés de $P_\tau^\bullet$ de sorte que $f_1(\boldsymbol{x}^*) = f(\boldsymbol{x}^*)$ et $g_1(\boldsymbol{x}^*) = g(\boldsymbol{x}^*)$. D'autre part, on note que pour tout $\boldsymbol{x} \in V$ on a $v_p(f_1(\boldsymbol{x})) \le v_p(g_1(\boldsymbol{x}))$, si $f_1(\boldsymbol{x}) \ne 0$, et $f_1(\boldsymbol{x}) = 0$ entraîne $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$. Il s'ensuit que la fonction $h = g_1^2 f_1^{-1}$ prolongée par 0 sur $Z(f_1)$ appartient à $\mathscr{C}(V)$, et $g_1(\boldsymbol{x})^2 = h(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})$, pour tout $x \in V$. Posant $c = h(\boldsymbol{x}^*)$, on obtient $b^2 = ca$. ∎

Corollaire 2.9. (1) *On a* $A \vDash \forall a, b(a|b^2 \vee b|a^2)$.

(2) *Les idéaux premiers de A sont linéairement ordonnés par l'inclusion.*

(3) *A est un anneau local.*

Démonstration. (1). Par le lemme 2.6 on a $\Upsilon(a,b)$ ou $\Upsilon(b,a)$, pour tout $a,b \in A,\ a \ne 0$. ∎

Remarque 2.10. Soit $f,g \in \mathscr{C}(V)$ et $\bar{f},\bar{g}$ les éléments correspondants dans $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$. La preuve du lemme 2.8 indique que $\Upsilon(\bar{f},\bar{g})$ si et seulement si il existe $f_1, g_1 \in \mathscr{C}(V)$ tel que $f \equiv f_1 \bmod \mathscr{P}, g \equiv g_1 \bmod \mathscr{P}$ et pour tout $\boldsymbol{x} \in V$, $v_p(f_1(\boldsymbol{x})) \le v_p(g_1(\boldsymbol{x}))$. On se rapproche donc de la structure naturelle d'anneau réticulé de $\mathscr{C}(V)$ du cas réel.

Le corollaire 2.9(2) entraîne que dans l'anneau $\mathscr{C}(V)$ les idéaux premiers qui contiennent un idéal premier donné sont totalement ordonnés par l'inclusion. D'où le résultat suivant, qui en donne la traduction topologique dans Spec $\mathscr{C}(V)$, qui se transmet à $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$.

Corollaire 2.11. *Dans* Spec $\mathscr{C}(V)$ *et* $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$, *les spécialisations d'un point forment une chaîne totalement ordonnée. En particulier,* Spec $\mathscr{C}(V)$ *et* $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$ *sont des espaces spectraux normaux, i.e. où l'adhérence d'un point contient un unique point fermé.*

Remarque 2.12. La propriété de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$ mise en évidence dans le corollaire précédent est une propriété générale des spectres réels inhérente à la notion d'ordre (voir [CR], proposition 2.1). C'est aussi une propriété générale des spectres p-adiques, i.e. dans le spectre p-adique d'un anneau, les spécialisations d'un point forment une chaîne totalement ordonnée. En effet, soit B un anneau et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Spec}_p\, B$ tel que $\alpha \le \beta$ et $\alpha \le \gamma$. Supposons que ni β ni γ ne soient une spécialisation l'un de l'autre. Alors il existe $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in B$ et des formules $\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})$ qui définissent des fermés, tel que $\beta \in [\varphi(\boldsymbol{b})]$, $\gamma \notin [\varphi(\boldsymbol{b})]$, $\gamma \in [\psi(\boldsymbol{c})]$ et $\beta \notin [\psi(\boldsymbol{c})]$. Par le lemme 3.8 de [B1], il existe des fonctions continues définissables $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})$ tel que $\beta \in [f(\boldsymbol{b}) = 0]$, $\gamma \in [f(\boldsymbol{b}) \ne 0]$, $\gamma \in [g(\boldsymbol{c}) = 0]$, $\beta \in [g(\boldsymbol{c}) \ne 0]$. On a alors $\alpha \in [f(\boldsymbol{b}) \ne 0\ \&\ g(\boldsymbol{c}) \ne 0]$, d'où $\alpha \in [\Upsilon(f(\boldsymbol{b}), g(\boldsymbol{c})) \vee \Upsilon(g(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{b}))]$ et ainsi $\alpha \in [\Upsilon(f(\boldsymbol{b}), g(\boldsymbol{c}))]$ ou $\alpha \in [\Upsilon(g(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{b}))]$. Si $\alpha \in [\Upsilon(f(\boldsymbol{b}), g(\boldsymbol{c}))]$, alors $\beta \in [\Upsilon(f(\boldsymbol{b}), g(\boldsymbol{c}))]$, puisque $\alpha \le \beta$, mais comme $\beta \in [f(\boldsymbol{b}) = 0]$ on obtient $\beta \in [g(\boldsymbol{c}) = 0]$, ce qui est absurde. De même si $\alpha \in [\Upsilon(g(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{b}))]$. ∎

Proposition 2.13. *On a* $A \vDash$ ALpC.

Démonstration. Les axiomes (i.0)–(i.2) disent qu'on a un anneau local. Vérifions (i.3). Soit $x, y \in A$ tel que x est inversible et $x - y$ n'est pas inversible, et $b \in A$ tel que $x = b^n$. Alors y est inversible et on a $c \in A$ et $e \in \Delta_n$ tel que $y = ec^n$ (proposition 1.1), d'où $b^n \equiv ec^n$ modulo l'idéal maximal $\mathscr{M}$ de A. Comme $A/\mathscr{M}$ est p-adiquement clos on doit avoir $e = \zeta^n$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{Q}_p$, et ainsi $y = (\zeta c)^n$. Les autres axiomes découlent des lemmes 2.6 et 2.4 et de leur forme particulière. Par exemple l'axiome (ii.5): par les lemmes 2.6 et 2.4 on se ramène à voir que si x et x' sont inversibles alors xx' l'est aussi, ce qui est bien le cas.

Dans [B1] (définition 2.1) nous introduisions la théorie AIpC qui est un analogue p-adique des anneaux réels clos de Cherlin et Dickmann (voir [CD]). Précisément, AIpC est la théorie d'anneau de valuation non triviale obtenue de ALpC en demandant en plus que chaque entier soit inversible et en remplaçant l'axiome (iii.4_n) par $x \neq 0 \to \bigvee_{e \in \Delta_n} \exists y(x = ey^n)$. Par la proposition 2.1 et le corollaire 2.9, A est un anneau de valuation si et seulement si c'est un modèle de AIpC. Voici la propriété de AIpC qui fera défaut dans notre exemple au §4.

LEMME 2.14. *On a* AIpC $\models \Upsilon(x,y) \to x|y$.

DÉMONSTRATION. Soit $A \models$ AIpC et $x, y \in A$, $x \neq 0$, tel que $\Upsilon(x,y)$. On peut supposer $y \neq 0$. On a $x^{-1}y \in A$ ou $xy^{-1} \in A$. On sait d'autre part que Υ définit la relation de divisibilité d'une valuation p-adique sur A, qui se prolonge de façon unique à son corps des fractions ([B1], proposition 2.4). Si $x^{-1}y \in A$, on a fini. Si $xy^{-1} \in A$, alors en passant par le corps des fractions on tire de $\Upsilon(x,y)$ que $\Upsilon(xy^{-1}, 1)$; par le lemme 2.7, xy^{-1} est inversible, i.e. $x^{-1}y \in A$. ■

Cette propriété est analogue à la propriété $0 < y < x \to x|y$ des anneaux réels clos de Cherlin et Dickmann. Rappelons que ceux-ci peuvent être axiomatisés par cette propriété et le fait que tout élément positif soit un carré et que tout polynôme unitaire de degré impair ait une racine. De façon semblable, on obtient une axiomatisation équivalente de AIpC en ajoutant l'axiome $\Upsilon(x,y) \to x|y$ à la théorie précédente ApC (AIpC $\models$ ApC, cf. preuve du lemme 2.14). Cette remarque équivaut à la proposition 2.5 de [B1].

§3. **Intégralement clos.** On montre maintenant que les anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ sont intégralement clos. Illustrons la structure de la preuve en considérant le cas réel. Comme nous l'avons déjà mentionné, notre approche s'applique aussi aux anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathscr{P}$ où on remplace partout $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{R}$. Soit donc $\mathscr{P}$ un idéal de fonctions réelles, $\mathbb{R} \prec {}^*\mathbb{R}$ une extension élémentaire suffisamment saturée, $\boldsymbol{x}^* \in V({}^*\mathbb{R})$ un point non-standard de V correspondant à $\mathscr{P}$, et soit $A = \{f(\boldsymbol{x}^*) : f \in \mathscr{C}(V)\}$. Soit $F(X) = X^m + g_1(\boldsymbol{x}^*)X^{m-1} + \cdots + g_m(\boldsymbol{x}^*)$, $g_i(\boldsymbol{x}^*) \in A$, il faut voir que toute racine de F appartenant au corps des fractions de A se trouve déjà dans A. Considérons $F(X, \boldsymbol{x}) = X^m + g_1(\boldsymbol{x})X^{m-1} + \cdots + g_m(\boldsymbol{x})$ comme fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit les fonctions $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, où les $\rho_i(\boldsymbol{a})$ désignent les parties réelles des racines complexes du polynôme $F(X, \boldsymbol{a})$ compte tenu de la multiplicité et rangées en ordre croissant i.e. $\rho_1(\boldsymbol{a}) \leq \rho_2(\boldsymbol{a}) \leq \cdots \leq \rho_m(\boldsymbol{a})$. On sait par le théorème de Rouché que les ρ_i sont des fonctions continues ([GJ], §13.3, p. 174) et on note qu'elles sont aussi définissables (e.g. voir [D1]). Comme $\mathbb{R} \prec {}^*\mathbb{R}$, on obtient que les racines de $F(X)$ dans ${}^*\mathbb{R}$ sont toutes parmi $\rho_1(\boldsymbol{x}^*), \ldots, \rho_m(\boldsymbol{x}^*) \in A$, ce qui établit le résultat. Pour transposer cet argument au cas p-adique on vérifie ci-dessous (1) qu'on dispose d'une fonction «partie p-adique» sur une partie adéquate de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, (2) que cette «partie p-adique» permet d'obtenir des ρ_i qui sont bien des fonctions définissables, et (3) que ces ρ_i sont bien des fonctions continues; les points (1) et (2) ont déjà été mis en évidence par Denef ([De1], preuve du lemme 7.2) et (3) s'obtient de la théorie du polygone de Newton dans Ω_p qui donne un analogue du théorème de Rouché.

3.1. Avec la même notation que ci-dessus mais de retour au cas p-adique, soit $F(X) = X^m + g_1(\boldsymbol{x}^*)X^{m-1} + \cdots + g_m(\boldsymbol{x}^*)$, $g_i(\boldsymbol{x}^*) \in A$, et $F(X, \boldsymbol{x}) = X^m +$

$g_1(\boldsymbol{x})X^{m-1} + \cdots + g_m(\boldsymbol{x})$ vu comme fonction de $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$ dans $\mathbb{Q}_p$. Comme m est fixé et que $\mathbb{Q}_p$ n'a qu'un nombre fini d'extensions d'un degré donné dans une clôture algébrique, il existe une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$ telle que K contienne les racines de tout polynôme de degré m sur $\mathbb{Q}_p$. Fixant un tel K et une base $\xi_1 = 1, \xi_2, \ldots, \xi_d$ de K sur $\mathbb{Q}_p$ on obtient une fonction «partie p-adique» $\rho : K \to \mathbb{Q}_p$, $\rho(\Sigma\lambda_i\xi_i) = \lambda_1$, et pour tout $x \in \mathbb{Q}_p^n$, K contient les racines de $F(X, x)$.

3.2. Soit $G(X, \boldsymbol{x}) = X^m + x_1X^{m-1} + \cdots + x_m$ le polynôme unitaire générique de degré m en X. Notons qu'en interprétant K dans $\mathbb{Q}_p^d$ à l'aide de la base $\xi_1, \ldots, \xi_d$, les ensembles suivants sont des sous-ensembles définissables de $\mathbb{Q}_p^{m+1}$: $S = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{Q}_p^{m+1} : y = \rho(\xi)$ pour un certain $\xi \in K$ tel que $G(\xi, \boldsymbol{x}) = 0\}$ et $S_k = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{Q}_p^{m+1} : y = \rho(\xi)$ pour exactement k racines $\xi \in K$, $G(\xi, \boldsymbol{x}) = 0$, compte tenu de la multiplicité$\}$, $k = 1, \ldots, m$. En utilisant les fonctions de Skolem explicites de Denef ([De1], lemme 7.1) on obtient une fonction définissable $\rho_1 : \mathbb{Q}_p^m \to \mathbb{Q}_p$ telle que pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}_p^m$, $(\boldsymbol{a}, \rho_1(\boldsymbol{a})) \in S$. Considérant maintenant $S^{(2)} = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{Q}_p^{m+1} : (\boldsymbol{x}, y) \in S$ et $y \neq \rho_1(\boldsymbol{x})\}$ on obtient une fonction définissable $\rho_2 : \mathbb{Q}_p^m \to \mathbb{Q}_p$ tel que pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}_p^m$, ou bien $\rho_2(\boldsymbol{a}) = \rho_1(\boldsymbol{a})$, si $(\boldsymbol{a}, \rho_1(\boldsymbol{a})) \in S_k$ pour un certain $k \geq 2$, ou bien $(\boldsymbol{a}, \rho_2(\boldsymbol{a})) \in S^{(2)}$. Continuant ce procédé on obtient inductivement des fonctions définissables $\rho_1, \ldots, \rho_m : \mathbb{Q}_p^m \to \mathbb{Q}_p$ tel que pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}_p^m$ on ait $\{y \in \mathbb{Q}_p : (\boldsymbol{a}, y) \in S\} = \{\rho_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \rho_m(\boldsymbol{a})\}$ et pour $(\boldsymbol{a}, y) \in S_k$ et $t = \min\{i : y = \rho_i(\boldsymbol{a})\}$, on a $\rho_t(\boldsymbol{a}) = \rho_{t+1}(\boldsymbol{a}) = \cdots = \rho_{t+k-1}(\boldsymbol{a})$ et $\rho_i(\boldsymbol{a}) \neq \rho_t(\boldsymbol{a})$, $i \neq t, t+1, \ldots, t+k-1$. Les fonctions définissables $r_i(\boldsymbol{x}) = \rho_i(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))$ donnent alors les «parties p-adiques» des racines du polynôme $F(X, \boldsymbol{x})$ comme fonctions de $\boldsymbol{x}$ et compte tenu de la mutiplicité.

3.3. Il suffit maintenant de voir que les fonctions ρ_i sont aussi continues. Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}_p^m$ et $r_1, \ldots, r_h$ les valeurs distinctes parmi $\rho_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \rho_m(\boldsymbol{a})$ tel que $r_j = \rho_{i_j}(\boldsymbol{a})$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_h$, et soit W_j une boule centrée en r_j. On peut supposer les W_j disjoints. Il suffit de trouver un voisinage U de $\boldsymbol{a}$ tel que pour tout $\boldsymbol{b} \in U$, si $\rho_k(\boldsymbol{a}) = r_j$ alors $\rho_k(\boldsymbol{b}) \in W_j$. Travaillons dans K. Pour $j = 1, \ldots, h$, soit $\Gamma_j \subset K$ une réunion de boules disjointes tel que $\rho(\Gamma_j) \subset W_j$ et que Γ_j contienne toutes les racines α de $G(X, \boldsymbol{a})$ tel que $\rho(\alpha) = r_j$ avec une seule racine par boule. On peut trouver de tels Γ_j en utilisant une base séparante de $K/\mathbb{Q}_p$ i.e. tel que $v(x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d) = \min v(x_i\xi_i)$(e.g. voir [De1], preuve du lemme 7.2, pp. 15–16). On peut supposer les boules de la forme $B(\xi, q)$, où $q \in \mathbb{Q}$. Pour $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}_p^m$ et $q \in \mathbb{Q}$, et $\xi \in K$, soit

$$G(X, \boldsymbol{b}) = (X - \xi)^m + b'_{m-1}(X - \xi)^{m-1} + \cdots + b'_1(X - \xi) + b'_0$$

et posons:

$$v(G_{\boldsymbol{b}}, q) = \inf\{v(b'_i) + iq : 0 \leq i \leq m\},$$

$$N(G_{\boldsymbol{b}}, q) = \sup\{i : v(b'_i) + iq = v(G_{\boldsymbol{b}}, q)\}.$$

Citons un cas particulier de la théorie du polygone de Newton qui permet de compter les racines d'un polynôme dans une boule, compte tenu de la multiplicité.

LEMME 3.3.1 (cf. [Am], corollaire 4.5.5). *Soit* $B = B(\xi, q)$, $\xi \in K$, $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, *soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}_p^m$ *et* $Z = \{z \in K : G(z, \boldsymbol{b}) = 0$ *et* $z \in B\}$, *et pour* $z \in Z$ *soit* $\mu(z)$ *la multiplicité de* z *comme zéro de* $G(X, \boldsymbol{b})$. *Alors* $\Sigma_{z \in A} \mu(z) = N(G_{\boldsymbol{b}}, q)$.

D'autre part on voit qu'il existe un voisinage U de $\boldsymbol{a}$ tel que pour tout $\boldsymbol{b} \in U$ et chaque boule $B(\xi, q)$ apparaissant dans un des Γ_j on ait $N(G_{\boldsymbol{b}}, q) = N(G_{\boldsymbol{a}}, q)$. Par le lemme 3.3.1 on a que pour tout $\boldsymbol{b} \in U$, Γ_j contient autant de racines de $G(X, \boldsymbol{b})$ que de $G(X, \boldsymbol{a})$ compte tenu de la multiplicité. À ce stade-ci on sait que pour tout $\boldsymbol{b} \in U$, $\{\rho_1(\boldsymbol{b}), \ldots, \rho_m(\boldsymbol{b})\} \subset \bigcup_j W_j$, et que chaque W_j contient le nombre adéquat d'éléments de $\{y : (\boldsymbol{b}, y) \in S\}$ compte tenu de la multiplicité. Par exemple si r_1 est "partie p-adique" d'une seule racine et que cette racine est de multiplicité 5 alors W_1 peut contenir disons deux éléments mais la somme des multiplicités des racines correspondantes est 5. Or il y a une certaine continuité dans le procédé explicite de Denef pour prélever un élément d'un ensemble fini de cardinalité au plus m. Désignons par Sk le procédé de Denef et par $\mathrm{Sk}(E)$ l'élément prélevé dans l'ensemble fini E avec $\mathrm{card}(E) \leq m$ (voir [De1], preuve du lemme 7.1).

LEMME 3.3.2. *Soit* $E_1 = \{y_1, \ldots, y_s\} \subset \mathbb{Q}_p$, *fixé*, $1 \leq s \leq m$. *Il existe* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *tel que* $\delta < \inf\{|y_k - y_l|_p : \mathrm{k} \neq l\}$ *et pour tout ensemble* $E_2 = \{z_1, \ldots, z_t\}$, $1 \leq t \leq m$, *si* $E_2 \subset \bigcup_j B(y_j, \delta)$ *et* $\mathrm{Sk}(E_1) = y_j$ *alors* $\mathrm{Sk}(E_2) \in B(y_j, \delta)$.

DÉMONSTRATION. Dans le procédé Sk le choix d'un élément se fait en passant successivement à des ensembles de cardinalité plus petite pour se réduire à un singleton. À une étape où l'on fait diminuer la cardinalité, on choisit des éléments de valuation minimale ou des éléments appartenant à un translaté minimal de $P_k^{\cdot}$ pour un ordre fixé (arbitraire) des translatés et $k \geq 2$ qui dépend de m seulement. Ce choix se fait parmi les éléments disons w_j dont on dispose si leur moyenne $\bar{w}$ est nulle, sinon on effectue ce choix parmi les $w_j - \bar{w}$ et on choisit les w_j correspondants. Il y a quatre cas de figure: (1) pour tout j, $w_j \neq 0$ et $w_j - \bar{w} \neq 0$; (2) pour tout j, $w_j \neq 0$ mais il y a un j (nécessairement unique) tel que $w_j - \bar{w} = 0$; (3) il y a un j (nécessairement unique) tel que $w_j = 0$ mais pour tout j, $w_j - \bar{w} \neq 0$; (4) il y a un j tel que $w_j = 0$ et un k tel que $w_k - \bar{w} = 0$. Alors il existe $\delta' > 0$ tel que $\delta' < \inf\{|w_k - w_l| : k \neq l\}$ et pour tous $z_1, \ldots, z_t$, $1 \leq t \leq m$, distincts tels que $\{z_1, \ldots, z_t\} \subset \bigcup_j B(w_j, \delta')$ on a:

Cas (1). $|z_i - w_j| < \delta'$ entraîne $v(z_i) = v(w_j)$, $v(z_i - \bar{z}) = v(w_j - \bar{w})$, $z_i w_j^{-1} \in P_k^{\cdot}$ et $(z_i - \bar{z})(w_j - \bar{w})^{-1} \in P_k^{\cdot}$. On choisit alors les w_j, ou les $w_j - \bar{w}$, de valuation minimale ou appartenant à un translaté minimal de $P_k^{\cdot}$ et on obtient un singleton ou un ensemble de cardinalité plus petite (voir Denef, ibid.) et les propriétés des z_i assurent que z_i est choisi parmi $z_1, \ldots, z_t$ par le même procédé dès que $|z_i - w_j|_p < \delta'$ et que w_j est choisi.

Cas (2). Disons $w_1 - \bar{w} = 0$, alors $|z_i - w_j|_p < \delta'$ entraîne $v(z_i) = v(w_j)$, $v(z_i - \bar{z}) = v(w_j - \bar{w})$ si $j \neq 1$, et $v(z_i - \bar{z}) > \max\{v(w_1), v(w_j), v(w_j - \bar{w}) : j \neq 1\}$. Alors on choisit les w_j, ou les $w_j - \bar{w}$, de valuation minimale et on obtient un singleton ou un ensemble de cardinalité plus petite, et les propriétés des z_i assurent la même conclusion que dans le cas (1). Les cas (3) et (4) se traitent de façon semblable.

En considérant toutes les configurations possibles pour le nombre d'éléments

$\leq m$ et chaque étape du procédé Sk pour faire diminuer la cardinalité, il s'ensuit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < \inf\{|y_k - y_l|_p : k \neq l\}$ et pour tous $z_1, \dots, z_t$, $1 \leq t \leq m$, distincts, si $\{z_1, \dots, z_t\} \subset \bigcup_j B(y_j, \delta)$ alors le procédé Sk prélève en même temps z_i parmi certains z_k et y_j parmi certains y_l dès que $|z_i - y_j|_p < \delta$. Par exemple si à la première étape Sk choisit y_1, y_2 parmi E_1 alors Sk choisira tous les z_i tels que $|z_i - y_j|_p < \delta$, $j = 1, 2$, et seulement ceux-là. Ainsi, de proche en proche, on atteint le stade où il ne reste qu'un seul élément de E_1, disons y_j, et alors $\mathrm{Sk}(E_1) = y_j$ et tous les z_i restants sont tels que $z_i \in B(y_j, \delta)$. En continuant le procédé Sk pour E_2 on obtient bien $\mathrm{Sk}(E_2) \in B(y_j, \delta)$. ■

Soit $\delta > 0$ donné par le lemme pour $E = \{r_1, \dots, r_h\}$ et prenons $W_j = B(r_j, \delta)$. Il s'ensuit que pour tout $\boldsymbol{b} \in U$ le prélèvement successif des $\rho(\beta)$ pour les racines β de $G(X, \boldsymbol{b})$, compte tenu de la multiplicité, est adéquat, i.e. si $\rho_k(\boldsymbol{a}) = r_j$ alors $\rho_k(\boldsymbol{b}) \in W_j$. Par exémple reprenant la configuration suggérée ci-dessus, disons que r_1 est partie p-adique d'une seule racine de multiplicité 5 et que W_1 contient deux éléments r_1', r_2' tels que $(b, r_i') \in S$ et que la somme des multiplicités des racines correspondant à r_1' est 4 et à r_2' est 1. On a alors $\rho_1(a) = \cdots = \rho_5(a) = r_1$ et $\rho_j(a) \neq r_1$ si $j > 5$. On sait que $\rho_1(b) = r_1'$ ou r_2', disons $\rho_1(b) = r_1'$. Alors $\rho_1(b) = \cdots = \rho_4(b)$ et au moment de calculer $\rho_5(b)$ il ne reste que r_2' pour s'appareiller à r_1 dans le calcul de $\rho_5(a)$. On obtient donc $\rho_5(b) = r_2'$ et on aura $\rho_j(b) \neq r_1', r_2'$, pour $j > 5$.

§**4. Exemple.** On donne ici un exemple d'un idéal premier $\mathscr{P}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)$ tel que l'anneau quotient $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)/\mathscr{P}$ n'est pas un anneau de valuation. Cet exemple en induit immédiatement d'autres en dimension supérieure, i.e. des idéaux de $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^n)$ avec la même propriété, ce qui montre qu'on n'obtient pas en général la même théorie élémentaire que sur les courbes.

Soit $\lambda \in \mathbb{Q}_p$, $\lambda \neq 0$, fixé tel que $v_p(\lambda) \geq 0$, et soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fixés tel que $\rho_n, \sigma_n \in \Delta_n$ et $\mathbb{Q}_p \models P_n^{\cdot}(\rho_n \rho_m{}^{-1})$ et $\mathbb{Q}_p \models P_n^{\cdot}(\sigma_n \sigma_m{}^{-1})$, quand n divise m. Soit $\Sigma(x, y)$ l'ensemble de formules suivantes:

$$f(x,y) \neq 0, \qquad v_p(x) \geq N_1, \qquad v_p(y) \geq N_2, \qquad v_p(y - \lambda x) \geq N_3,$$
$$v_p(x) \leq v_p(y), \qquad v_p(Mx^{n+1}) > v_p((\lambda x - y)^n),$$
$$P_n^{\cdot}((\lambda x^n - y x^{n-1})\rho_n), \qquad P_n^{\cdot}(x \sigma_n),$$

tel que $f \in \mathbb{Q}_p[X, Y]$, $f \neq 0$; $n \geq 2$; $N_1, N_2, N_3, M \geq 1$. Par compacité, cet ensemble de formules est réalisable dans une extension élémentaire de $\mathbb{Q}_p$. Pour en réaliser un sous-ensemble fini on prend les paramètres n, N_i, M assez grands et un point (x, y) du plan p-adique assez près de l'origine sur une droite assez près de la droite $y = \lambda x$, et on utilise que les ensembles $P_n^{\cdot}$ sont ouverts. Pour $x, y \in {}^*\mathbb{Q}_p$ on utilise la notation $x \approx y$ pour signifier $v_p(x - y) > N$, pour tout $N \in \mathbb{N}$. Soit $x^*, y^* \in \mathbb{Q}_p$ qui réalisent Σ, i.e. tels que $\Sigma(x^*, y^*)$ est vrai. On a alors x^*, y^* algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$; $x^* \approx 0$, $y^* \approx 0$; $(^*1)$ $y^*(x^*)^{-1} \approx \lambda$; pour tout $n \geq 2$ et $M \geq 1$, $(^*2)$ $v_p(Mx^*) > v_p((\lambda - y^*(x^*)^{-1})^n)$; et pour tout $n \geq 2$, $P_n^{\cdot}((\lambda - y^*(x^*)^{-1})\rho_n)$ et $P_n^{\cdot}(x^* \sigma_n)$.

LEMME 4.2. *Les conditions $\Sigma(x, y)$ axiomatisent le type de (x^*, y^*) sur $\mathbb{Q}_p$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la sous-structure $\mathbb{Q}_p[x^*, y^*]$ de ${}^*\mathbb{Q}_p$ dans le langage d'élimination de Macintyre est complètement déterminée. Vérifions d'abord que la valuation p-adique v_p est déterminée. On note qu'un polynôme $f(x^*, y^*) \in \mathbb{Q}_p[x^*, y^*]$ peut s'exprimer comme un polynôme en x^* dont les coefficients sont des polynômes en $\lambda - y^*(x^*)^{-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, i.e. $\mathbb{Q}_p[x^*, y^*] \subseteq (\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$. Aussi, les conditions $x^* \approx 0$, $\lambda - y^*(x^*)^{-1} \approx 0$ et $v_p(Mx^*) > v_p((\lambda - y^*(x^*)^{-1})^n)$ déterminent la valuation v_p sur $(\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$, à savoir que le semi-groupe de valuation en est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N}v_p(\lambda - y^*(x^*)^{-1}) \oplus \mathbb{N}v_p(x^*)$ de la façon naturelle. Plus précisément, soit $f \in \mathbb{Q}_p[X, Y]$, $f \neq 0$, $f = \sum a_{ij}X^iY^j$, et soit $f = f_t + f_{t+1} + \cdots + f_m$ où $f_i \in \mathbb{Q}_p[X, Y]$ est homogène de degré i, alors

$$f_i(x^*, y^*) = \left(\sum a_{j,i-j}(y^*(x^*)^{-1})^{i-j}\right)(x^*)^i$$

et $\sum a_{j,i-j}(y^*(x^*)^{-1})^{i-j}$ peut s'exprimer comme élément de $\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}]$. D'autre part, soit $g \in (\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$, disons $g = b_t(x^*)^t + b_{t+1}(x^*)^{t+1} + \cdots + b_m(x^*)^m$, où $b_j \in \mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}]$, on a $v_p(g) = v(b_t(x^*)^t) = v(b_t) + tv(x^*)$ par (*2); disons $b_t = a_s(\lambda - y^*(x^*)^{-1})^s + a_{s+1}(\lambda - y^*(x^*)^{-1})^{s+1} + \cdots + a_k(\lambda - y^*(x^*)^{-1})^k$, $a_j \in \mathbb{Q}_p$, alors $v(b_t) = v(a_s(\lambda - y^*(x^*)^{-1})^s) = v(a_s) + sv(\lambda - y^*(x^*)^{-1})$ par (*1). Ceci montre que v_p est complètement déterminée sur $(\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$. D'autre part les prédicats P_n sur $\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}]$ sont déterminés par la valuation v_p et les conditions $P_n((\lambda - y^*(x^*)^{-1})\rho_n)$, comme dans le lemme 2.9 de [B2]. En appliquant de nouveau la discussion du lemme 2.9 de [B2] avec la valuation de $(\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$ et les conditions $P_n(x^*\sigma_n)$, les prédicats P_n sont déterminés sur $(\mathbb{Q}_p[\lambda - y^*(x^*)^{-1}])[x^*]$, et donc sur $\mathbb{Q}_p[x^*, y^*]$. ∎

Soit $\mathscr{P}$ l'idéal premier correspondant au point (x^*, y^*), alors $\{f(x^*, y^*) : f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)\} \simeq \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)/\mathscr{P}$ n'est pas un anneau de valuation. En effet, sinon il devrait satisfaire la propriété du lemme 2.14. Or on a $v_p(x^*) \leq v_p(y^*)$. Supposons $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^2)$ tel que $f(x^*, y^*)x^* = y^*$; alors $f(x^*, y^*) = y^*(x^*)^{-1} \approx \lambda$ et par continuité $f(0,0) = \lambda$. D'autre part, par compacité, il existe un ouvert définissable U de $\mathbb{Q}_p^2$ donné par un nombre fini de conditions appartenant à $\Sigma(x, y)$, tel que pour tout $x, y \in U$ on ait $f(x, y) = yx^{-1}$. On peut supposer que U est donné par les conditions suivantes: $f(x, y) \neq 0$, $0 < v_p(x) < v_p(y)$, $v_p(x) > N$, $v_p(y) > N$, $v_p(\lambda - yx^{-1}) > N$, $v_p(Mx) > v_p((\lambda - yx^{-1})^n)$, $P_n^\cdot((\lambda - yx^{-1})\rho_n)$, $P_n^\cdot(x\sigma_n)$, où M, N, n sont fixés. Or il existe $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, $a \neq \lambda$, et une suite $(x_m, y_m) \in U$ tel que $y_m x_m^{-1} = a$ et $(x_m, y_m) \to (0, 0)$. Mais alors par continuité de f on devrait avoir $f(x_m, y_m) \to a \neq \lambda$, ce qui est absurde.

REMARQUE 4.3. La même idée donne un exemple semblable pour le cas réel.

RÉFÉRENCES

[Am] Y. AMICE, ***Les nombres p-adiques***, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

[B1] L. BÉLAIR, *Anneaux p-adiquement clos et anneaux de fonctions définissables*, this JOURNAL, vol. 56 (1991), pp. 539–553.

[B2] ———, *Substructures and uniform elimination for p-adic fields*, ***Annals of Pure and Applied Logic***, vol. 39 (1988), pp. 1–17.

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, et M.-F. Roy, ***Géométrie algébrique réelle***, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BS] L. Bröcker et J. H. Schinke, ***On the L-adic spectrum***, Schrittenreihe des Mathematischen Instituts des Universität Münster, ser. 2, vol. 40, Mathematisches Institut Universität Münster, Münster, 1986.

[BR] G. W. Brumfiel, ***Partially ordered rings and semi-algebraic geometry***, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[CC] M. Carral et M. Coste, *Normal spectral spaces and their dimension*, ***Jounal of Pure and Applied Algebra***, vol. 30 (1983), pp. 227–235.

[CD] G. Cherlin et M. Dickmann, *Real closed rings*. II, ***Annals of Pure and Applied Logic***, vol. 25 (1983), pp. 213–231.

[CR] M. Coste et M.-F. Roy, *La topologie du spectre réel*, ***Ordered fields and real algebraic geometry***, Comtemporary Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1982, pp. 27–59.

[De1] J. Denef, *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, ***Inventiones Mathematicae***, vol. 77 (1984), pp. 1–23.

[De2] ———, *p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition*, ***Jounal für Reine und Angewandte Mathematik***, vol. 369 (1986), pp. 154–166.

[D1] M. Dickmann, *A property of the continuous semialgebraic functions defined on a real curve*, manuscrit.

[D2] ———, *Applications of model theory to real algebraic geometry: a survey*, ***Methods in Mathematical logic, Proceedings, Caracas, 1983*** (C. A. Di Prisco, editor), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1130, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 76–150.

[D3] ———, ***Applications of model theory to real algebraic geometry*** (à paraître).

[GJ] L. Gilman et M. Jerison, ***Rings of continuous functions***, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

[Ha] D. Haskell, ***Topics in constructive p-adic algebra***, Ph.D. thesis, Stanford University, Stanford, California, 1990.

[Pi] A. Pillay, *Sheaves of continuous definable functions*, this Journal, vol. 53 (1988), pp. 1165–1169.

[Sc] N. Schwartz, *Real closed rings*, ***Algebra and order: proceedings of the first international symposium on ordered algebraic structures, Luminy-Marseille, 1984*** (S. Wolfenstein, editor), Helderman-Verlag, Berlin, 1986, pp. 175–194.

[SV] P. Scowcroft et L. van den Dries, *On the structure of semialgebraic set over p-adic fields*, this Journal, vol. 53 (1988), pp. 1138–1164.

[VD] L. van den Dries, *Dimension of definable sets, algebraic boundedness and Henselian fields*, ***Annals of Pure and Applied Logic***, vol. 45 (1989), pp. 189–209.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
MONTRÉAL, QUÉBEC H3C 3P8, CANADA

E-mail: belair@math.uqam.ca