UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES CONNAISSANCES SUR LES FRACTIONS D'ÉLÈVES DE TROISIÈME CYCLE DU PRIMAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

À LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

OUMAMA GHAILANE

JANVIER 2015

REMERCIEMENTS

Je tiens à transmettre mes vifs remerciements à madame Jacinthe Giroux, ma directrice de recherche, pour son encadrement dévoué et sa contribution inestimable à ce projet. J'admirais déjà madame Giroux durant ma formation initiale pour sa passion envers l'enseignement et l'enthousiasme qu'elle répand dans ses cours. Au cours de ce projet de maîtrise, mon interaction plus étroite avec Jacinthe m'a permis d'apprécier d'autant plus les vertus de sa personne et ses qualités de chercheure de haut niveau. Merci Jacinthe pour ton appui, ta générosité et ta rigueur, que tu as su doser avec une délicatesse professionnelle hors pair.

Mes remerciements remplis d'amour et de gratitude à mes parents, mes sœurs et frères pour leur soutien et leurs prières qui me font sentir qu'ils sont à mes côtés. Merci cher père, je te dois reconnaissance pour le désir d'apprendre que tu m'as transmis par ton exemple. Merci d'avoir semé cette graine depuis mon enfance et de continuer d'en prendre soin jusqu'à aujourd'hui. Merci pour la sagesse de tes conseils, la noblesse de tes idées et surtout pour la tendresse de ton grand cœur.

Merci à ma fille Sara, ma grande source d'inspiration, qui a remarquablement partagé tous les hauts et les bas de cette expérience. Merci pour la joie, la compassion et les rires spontanés qui ont accompagné les nombreuses et longues discussions autour de ce projet.

À tous ceux et celles qui m'ont donné un coup de main, de près ou de loin, comme je ne voudrais oublier personne, je tiens à ce que vous receviez ce message comme vous étant adressé à chacun personnellement: " Merci pour ton aide, ton écoute et ta présence au bon moment avec les bons mots."

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'intéresse à l'analyse des connaissances sur la fraction d'élèves de 3^e cycle du primaire. La fraction constitue un thème mathématique complexe et important dans le cursus scolaire de l'élève et plusieurs études rappellent les difficultés d'enseignement et d'apprentissage qui y sont liées (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983; Kieren, 1993; Post, Cramer, Behr, Lesh et Harel, 1993; Blouin, 2002; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006; Clarke et Roche, 2009). Les deux objectifs spécifiques de la recherche sont les suivants : a) spécifier les connaissances d'élèves de fin primaire sur les différentes interprétations ainsi que sur la comparaison et l'équivalence des fractions, b) comparer les performances des élèves jugés à risque à celles des élèves jugés non à risque à des tâches portant sur les différentes interprétations de la fraction, la comparaison et l'équivalence des fractions. L'échantillon de notre étude comporte 123 élèves de classes ordinaires du troisième cycle primaire, dont 27 sont jugés à risque par les titulaires de classe. Les réponses de ces élèves à une épreuve sur la fraction ont été traitées d'une part, par des analyses statistiques pour comparer les performances des élèves à risques ou non et, d'autre part, par des analyses qualitatives pour dégager les stratégies mises en œuvre par les élèves. Notre étude identifie les connaissances qui sous-tendent les stratégies mises en œuvre ainsi que les liens qu'entretiennent ces connaissances avec les différentes caractéristiques des items de l'épreuve. Les résultats tendent à montrer que les connaissances sur la fraction des élèves, qu'ils soient jugés à risque ou non, sont spécifiques aux caractéristiques du savoir mathématique. Ainsi, les connaissances mises en œuvre par les élèves, à risque ou non, varient essentiellement en fonction des exigences mathématiques particulières de chacun des items.

MOTS-CLÈS : fraction, élève à risque, mathématiques au primaire, troisième cycle du primaire

INTRODUCTION

La notion de fraction est un thème problématique qui tourmente autant les enseignants que les élèves. L'historique de l'évolution de cette notion porte les traces de sa complexité. D'ailleurs, ce n'est que vers 850, que les nombres rationnels sont enfin considérés comme un ensemble de rapports ou d'opérateurs (Blouin, 2002). Au XIIe siècle, le mot « fraction » fait son entrée en occident par traduction (Kasr en arabe signifie rompu ou fracturé)[1]. Au XIVe siècle, la notation des fractions avec barre est empruntée et les termes « numérateur » et « dénominateur » sont définis pour la première fois. Fruit d'une construction échelonnée sur plusieurs siècles, les nombres rationnels ne sont traités comme des nombres que vers 1585 grâce aux travaux de Stevin (Blouin, 2002).

Notre recherche s'inscrit d'abord dans le domaine des recherches didactiques en mathématiques. Elle vise particulièrement l'évaluation des connaissances sur la notion de fraction chez les élèves de troisième cycle du primaire. Les élèves à risque, maintenus dans des classes régulières, constituent notre second objet d'intérêt dans cette recherche.

Au premier chapitre, nous présentons la problématique de notre recherche. Nous traiterons du retard scolaire à la fin du primaire et de l'importance de la transition

---

[1]http://www.math.uqam.ca/~charbon/mat6221/CoursFractns1.html visité le 2014-01-12.

primaire secondaire ainsi que sur le défi que soulève l'enseignement dans les classes régulières. Par la suite, nous aborderons l'enjeu important que constitue l'enseignement des mathématiques, notamment celui des fractions. Ces éléments nous permettent de dégager l'objectif général qui guidera notre recherche.

Le deuxième chapitre, le cadre théorique, porte sur la notion de fraction d'abord en tant que savoir mathématique. Ensuite, cette notion sera traitée en tant que connaissance chez l'apprenant, sa construction et ses obstacles seront précisés. Suivront des descriptions de cinq outils d'évaluation de la fraction. Enfin, les objectifs spécifiques seront énoncés.

La méthodologie constitue le troisième chapitre qui débute par une description des sujets visés par la recherche. Ensuite, une bonne partie du chapitre est consacrée à l'analyse de l'outil d'évaluation utilisée. La modalité de passation ainsi que les deux types d'analyses exploitées sont présentés avant de clore le chapitre par les considérations éthiques de la recherche.

Le quatrième chapitre présente et analyse les différents résultats de la recherche. Découle ensuite le cinquième chapitre sur la discussion des résultats obtenus pour les deux objectifs spécifiques de la recherche. Enfin, la conclusion relève les apports de la recherche, ses limites ainsi que ses perspectives.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

À titre d'orthopédagogue à la Commission scolaire de Montréal, mon expérience professionnelle m'a donné l'occasion de travailler auprès d'élèves du primaire principalement en lecture et écriture. Les demandes pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques se font très rares. Ma situation n'est pas singulière puisque la plupart des orthopédagogues sont appelés à intervenir principalement au soutien à l'apprentissage du français. J'ai pu cependant constater les besoins non seulement des élèves, mais également des enseignants en mathématiques. Plusieurs enseignants titulaires de classes m'ont exprimé le sentiment d'incompétence qu'ils éprouvent à enseigner les mathématiques et se sentent particulièrement démunis pour adapter cet enseignement aux élèves faibles ou à risque. Malgré les outils mis en place, la politique ministérielle visant au maintien des élèves en difficulté dans les classes ordinaires fait, de cet inconfort chez les enseignants, un enjeu scolaire sensible.

Au troisième cycle du primaire, l'enjeu est exacerbé par la pression qu'exercent les examens ministériels ainsi que la transition anticipée vers le secondaire. Plusieurs enseignants côtoyés considèrent que la mise en place de moyens d'enseignement adaptés aux élèves en difficulté alourdit leur tâche et réduit le temps d'enseignement et d'accompagnement consacré aux autres élèves. La situation est pour eux délicate car ils veulent offrir à tous les élèves, qu'ils soient repérés en difficulté ou non, un enseignement qui favorise une transition réussie au secondaire.

Notre problématique s'inscrit donc dans le soutien à l'apprentissage des mathématiques d'élèves faibles en classe ordinaire de fin primaire. Pour son élaboration, nous avons consulté quelques documents pour saisir les orientations ministérielles concernant la réussite dans la transition primaire/secondaire.

1.1 Orientations ministérielles relatives à la réussite scolaire

En 2009, le programme de lutte contre le décrochage scolaire « *L'école J'y tiens! Tous ensemble pour la réussite scolaire* » (MELS, 2009a) a été mis sur pied par le gouvernement du Québec sous forme d'une stratégie d'action visant à hausser le niveau de persévérance et de réussite scolaires. Le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) a fixé à 80% l'objectif de taux de diplomation et de qualification pour l'ensemble des jeunes de moins de 20 ans (MELS, 2009a). En ce sens, la mobilisation des parents d'élèves, du milieu scolaire et de tous les acteurs concernés est requise dans une démarche concertée faisant ainsi de la persévérance et la réussite scolaire des valeurs fondamentales de la société québécoise. Pour y parvenir, treize voies ont été identifiées pour aider à la réussite des élèves à la fois dans le milieu scolaire et social (MELS, L'école J'y tiens, p12).

1. Établir l'éducation et la persévérance scolaire à l'échelle du Québec;
2. Établir les cibles de réussite pour chaque commission scolaire et en assurer le suivi;
3. Mobiliser les acteurs régionaux;
4. Préparer l'entrée à l'école des enfants de milieux défavorisés ou en difficulté;
5. Réduire le nombre d'élèves par classe au primaire;
6. Réduire les retards d'apprentissage au primaire;
7. Renforcer la stratégie d'intervention *Agir* autrement en prenant appui sur l'action de plus d'une centaine d'écoles;
8. Offrir un accompagnement individualisé aux élèves du secondaire;

9. Augmenter l'offre d'activités parascolaires sportives et culturelles;
10. Réaliser des projets communautaires en ciblant les jeunes à risque au secondaire, notamment dans les quartiers les plus défavorisés de Montréal;
11. Mieux accompagner les élèves des 4^{e} et 5^{e} années secondaires pour les mener à la diplomation;
12. Faciliter et encourager l'accès à la formation professionnelle;
13. Raccrocher le maximum de décrocheuses et de décrocheurs.

Il importe de souligner qu'une seule voie, sur les treize énoncées, concerne le retard scolaire au primaire : « 6. Réduire les retards d'apprentissage au primaire. » Les moyens d'action suggérés pour réduire ces retards sont : l'aide aux devoirs, l'accompagnement individualisé en lecture ou en mathématiques et, à l'intention des parents, la contribution des centres d'éducation des adultes. Pourtant, à partir des études aux États-Unis et au Canada, Hardy (1994) précise que les difficultés d'apprentissage sont au cœur du décrochage scolaire et risquent d'être amplifiées par des facteurs individuels, familiaux et scolaires. Fortin, Royer, Potvin, Marcotte et Yergeau (2004) rapportent que les recherches identifient la difficulté des apprentissages comme une variable particulièrement importante et la plus souvent rapportée dans les études sur le décrochage scolaire.

Par ailleurs, le programme de lutte contre le décrochage scolaire définit quatre moments considérés névralgiques, par le MELS (2009a), dans le cheminement scolaire. Le passage du primaire au secondaire compte parmi ces moments puisqu'il s'agit d'une période critique où le décrochage scolaire risque de s'enraciner, selon le MELS (2009a). Ce moment est particulièrement sensible du fait des changements importants que vivent les élèves dans le passage de l'enfance à l'adolescence. Ils font en effet face à plusieurs défis sur le plan physique, psychique, social et environnemental (MELS, 2012). Le document « Guide pour soutenir une transition de qualité vers le secondaire» (MELS, 2012) informe les acteurs principaux sur les facteurs de risque et de protection de type scolaires, familiaux ou individuels dans la transition primaire/secondaire. Le premier facteur de risque de type scolaire, énoncé dans le document, est « le retard scolaire ». Certes, c'est le cumul de plusieurs facteurs de risque qui augmente la probabilité qu'un jeune abandonne l'école avant l'obtention d'une qualification ou d'un diplôme secondaire. Cependant, les difficultés d'apprentissage au primaire demeurent un des plus puissants prédicteurs de décrochage scolaire au secondaire (Potvin et Lapointe, 2010).

Bien que le décrochage ou l'abandon scolaire soit une réalité de l'ordre de l'enseignement au secondaire, il résulte généralement d'un processus de plusieurs échecs répétés sur le plan scolaire et social. Par des mesures préventives et afin de mieux préparer les élèves à des transitions potentiellement exigeantes, les efforts se multiplient par divers professionnels (psychoéducateur, technicien en éducation spécialisée, psychologue, etc.) qui visent essentiellement le domaine socioaffectif. Cependant, il nous paraît également essentiel que les enseignants puissent tout autant soutenir les élèves en difficulté d'apprentissage de manière à favoriser la transition primaire/secondaire sur le plan scolaire. L'étude proposée s'inscrit dans cette perspective. Elle vise plus particulièrement à documenter les connaissances des élèves de fin primaire dans le domaine mathématique.

1.2 Les élèves à risque dans une classe ordinaire

Depuis le rapport COPEX (Comité provincial sur l'enfance exceptionnelle, MEQ, 1976), qui promut l'intégration scolaire des élèves en difficulté, plusieurs plans d'action ministériels furent produits. En 1999, le ministère de l'Éducation du Québec adopte *La politique de l'adaptation scolaire* qui préconise la réussite scolaire de tous les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Plus récemment, avec une intention préventive, le MELS (2007) introduit la notion *d'élève à risque* par substitution à *l'élève en difficulté*, visant ainsi à accroitre un traitement individuel à tout élève qui rencontre des difficultés, sans obligation de codification préalable en tant qu'élève handicapé ou en difficulté.

Selon le référentiel intitulé « Les élèves à risque et HDAA »[2] FSE (2013), une classe ordinaire se retrouve avec une moyenne de six à sept élèves à risque, soit plus ou moins le tiers de la classe. Même si l'intégration des élèves en difficulté fait partie de la culture scolaire, bon nombre d'enseignants considèrent que les mesures de soutien à l'intégration sont insatisfaisantes. Les enseignants ont l'impression d'être laissés à eux-mêmes lorsqu'il s'agit de gérer des classes dont l'effectif comporte un pourcentage relativement élevé d'élèves qui présentent différents besoins particuliers.

En mathématiques, il y a peu d'études portant sur le soutien aux élèves faibles de fin primaire. Pourtant, les besoins sont importants pour soutenir la transition primaire/secondaire dans une perspective de prévention du décrochage scolaire et ce, dans un contexte où les élèves à risque et les élèves HDAA sont intégrés en classe ordinaire.

1.3 Un enjeu didactique sensible dans la transition au secondaire : Les fractions

Les nombres rationnels, et donc la fraction, sont un thème mathématique fort important dans le cursus scolaire de l'élève. Commençant au primaire, son apprentissage s'échelonne sur plusieurs années d'enseignement et s'étend, souvent, jusqu'à l'âge adulte (Blouin, 2002). Selon la proposition du document ministériel sur la progression des apprentissages au primaire (MELS, 2009b), les fractions sont

---

[2] Émis par la FSE (Fédération des syndicats de l'enseignement) pour répondre aux besoins de l'enseignant d'être informé sur les catégories de difficultés et de l'handicap afin d'être en mesure de les comprendre et de pouvoir demander le soutien dont les élèves ont besoin.

introduites dès le premier cycle au moyen d'exemples concrets permettant à l'élève la reconnaissance des fractions se rapportant à des éléments significatifs de sa vie quotidienne. Au deuxième cycle, commence un enseignement plus formel par la lecture et l'écriture des fractions, la présentation d'une fraction de « différentes façons », etc. Certaines connaissances sont supposées être acquises et réutilisées par l'élève au troisième cycle, telles que la comparaison d'une fraction à 0, à ½ et à 1, l'ordre des fractions ayant le même dénominateur, etc. Selon le même document du MELS (2009b), d'autres processus et concepts reliés aux fractions sont à développer au cours des deux dernières années du primaire dont la vérification de l'équivalence de deux fractions, l'ordre des fractions (le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre), la traduction d'une situation impliquant les fractions dans des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication par un nombre naturel à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'une opération et vice versa, situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique).

Au secondaire, la progression des apprentissages (MELS, 2010) indique que le développement des différents sens de la fraction et les processus associés aux opérations se poursuivent durant les deux premières années du premier cycle. Par la suite, le sens et les opérations des nombres rationnels, notamment les fractions, ne font normalement plus partie des savoirs à enseigner. Ainsi, le traitement de ces nombres se trouve intégré dans tous les domaines de la mathématique du secondaire: en algèbre, en arithmétique, en géométrie, ainsi qu'en statistique et en probabilité. De plus, l'application de ces nombres est requise par d'autres disciplines telles que les sciences et technologies.

La place considérable occupée par la fraction dans le programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2009; 2010) témoigne non seulement de l'importance de cette notion, mais également de sa richesse et de sa lenteur d'acquisition (Blouin, 2002). Il s'agit d'une des plus complexes et importantes notions rencontrées par l'élève dans les années présecondaires (Behr, Harel, Post et Lesh (1993). Ces chercheurs considèrent cette importance selon trois perspectives. D'un point de vue utilitaire, l'habileté à appliquer efficacement ces nombres favorise une compréhension et un meilleur traitement des problèmes de la vie réelle. D'un point de vue psychologique, les rationnels sont un ensemble de nombres riche qui favorise le développement des fonctions cognitives et donc le développement intellectuel de l'élève. Du point de vue mathématique, la compréhension des nombres rationnels sert d'assise au développement des opérations algébriques élémentaires. En ce sens, Kieren (1988) souligne que si la construction des nombres rationnels implique des connexions avec l'ensemble des nombres naturels, elle est aussi liée à l'ensemble des nombres réels, lequel ensemble est aussi un objet d'apprentissage au secondaire.

Nombreuses sont les recherches théoriques et empiriques qui ont démontré le rôle crucial des nombres rationnels dans les mathématiques et ses applications (Boulet, 1998; Behr, Harel, Post et Lesh, 1993; Lamon, 1999; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006). Elles sont aussi nombreuses à rappeler les difficultés d'enseignement et d'apprentissage qui y sont liées (Post, Cramer, Behr, Lesh et Harel, 1993; Behr, Lesh, Post et Silver, 1983; Kieren, 1993; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006; Clarke et Roche, 2009). L'un des grands points d'achoppement dans l'apprentissage des mathématiques au primaire réside, en effet, dans le passage des naturels aux rationnels (Hiebert et Behr, 1988). Behr, Harel, Post et Lesh (1993) affirment que les études sur l'apprentissage de la notion de fraction s'accordent sur le défi important que constitue l'acquisition des nombres rationnels chez les élèves sans avoir, toutefois, une vue commune sur les interventions d'enseignement favorables à cette acquisition.

Du côté de l'enseignement, Cramer, Post et del Mas (2002) précisent le défi majeur que représente l'enseignement des fractions à l'école élémentaire, tandis que Moss et Case (1999) associent, en partie, les difficultés des élèves aux pratiques d'enseignement qui mettent l'accent sur l'apprentissage des règles et techniques au détriment du sens. On peut inscrire les propos de ces chercheurs dans le débat, toujours vif, particulièrement aux États-Unis, entre un enseignement orienté soit vers les habiletés fondamentales (essentiellement, les techniques de calcul) soit vers la compréhension (Giroux, à paraître). Au Québec cependant, l'opposition entre technique et compréhension n'a pas véritablement fait l'objet de débat au sein de la didactique des mathématiques puisque, selon Dionne et Voyer (2009 in Giroux, à paraître), les pratiques d'enseignement ont été mieux équilibrées qu'aux États-Unis.

Puisque les défis sont de taille autant pour l'enseignement que pour l'apprentissage de la notion de fraction (Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006), plusieurs chercheurs ont étudié ces difficultés, en tentant de les circonscrire et d'en préciser l'origine. Ces études mettent en évidence plusieurs facteurs qui semblent concourir à l'émergence d'obstacles de nature didactique ou épistémologique[3]. Il importe de préciser que toutes les études consultées, dans le cadre du présent travail, s'accordent sur le fait que le caractère pluraliste des interprétations et des représentations de la fraction en fait un objet d'enseignement et d'apprentissage très complexe.

Kieren (1980) a été un des premiers chercheurs à montrer que la fraction peut être considérée selon cinq interprétations différentes : partie/tout, mesure, quotient, opérateur et rapport. Ainsi, la fraction 5/7 peut désigner 5 billes d'une collection de 7 billes (partie/tout). Elle peut également représenter le quotient $5 \div 7$ dans le cadre

[3] Le chapitre II fait le point sur ces études.

d'une situation où 5 barres de chocolat sont partagées également entre 7 enfants; la part de chacun constitue en effet 5/7 de chocolat. Comme opérateur, la fraction 5/7 peut référer à une transformation effectuée sur une image pour la réduire à 5/7 de sa taille originale. Le sens mesure intervient généralement en lien avec l'itération de la fraction unitaire : l'unité de mesure de référence n'est alors plus 1, mais 1/n. La fraction 5/7 est alors interprétée comme la réplique de cinq fois, 1/7. Finalement, 5/7 peut désigner le rapport entre deux quantités différentes, par exemple, 5 portions de jus concentré pour 7 portions d'eau.

Dans le processus d'apprentissage de la notion de fraction, la prise en compte de ces différentes interprétations doit être accompagnée d'une articulation avec les relations multiplicatives sur les naturels, (Empson, Junk, Dominguez et Turner, 2006; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006). Cette articulation est nécessaire pour que se construise la fraction en tant que nombre, c'est à dire pour que soit considérée la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. La notion d'équivalence prend alors son sens. Rappelons d'abord que la relation d'équivalence peut être exprimée par : $a/a' = b/b'$ si et seulement si $a.b' = a'.b$, avec a' et $b' \neq 0$. Cette relation peut être appréhendée par l'équivalence du rapport qu'entretient respectivement a et b avec a' et b'. Ainsi, puisque 3 entretient la même relation multiplicative avec 6 que 4 avec 8, 3/6 = 4/8. La fraction reconnue en tant que nombre permet d'exprimer non seulement une quantité (la ½ d'une tarte), mais aussi une relation multiplicative entre deux entiers : a est a/b de b. Ainsi, pour reprendre l'exemple de 3/6 = 4/8, 3 est 3/6 de 6 comme 4 est 4/8 de 8 et que 1 est ½ de 2. La compréhension de la relation d'équivalence entre fractions marque un pas décisif pour appréhender la fraction en tant que nombre, étape ultime de la compréhension de la fraction selon Kieren (1993).

Un certain nombre d'études portent sur la genèse de la notion de fraction chez des jeunes élèves (Piaget, Inhelder et Szeminska, 1948; Pothier et Sawada, 1983; Parrat-Dayan et Vonèche, 1991) ainsi qu'à l'introduction de la notion de fraction dans l'enseignement, c'est à dire, au deuxième cycle du primaire (Desjardins et Hétu, 1974; Hiebert et Behr 1988). Nous disposons ainsi de résultats de recherche sur les premiers pas dans l'acquisition de la fraction. Cependant, les données de recherche récentes concernant les élèves du troisième cycle du primaire sont moins nombreuses. Les recherches se font encore plus rares sur l'acquisition de la fraction chez les élèves du troisième cycle du primaire qui présentent des difficultés d'apprentissage. L'étude de Moesley et Okamoto (2008) porte sur les connaissances des élèves du primaire sur les différentes interprétations de la fraction. Cependant, si elle a été conduite auprès d'élèves moyens, forts et excellents, elle ne concerne toutefois pas les élèves faibles ou en difficulté.

Une des rares études sur l'apprentissage de la fraction auprès d'élèves en grandes difficultés est celle de Blouin (2002). Cette étude montre l'importance de présenter à ces élèves des situations riches et complexes. S'appuyant à la fois sur le modèle de Kieren (1988), sur la séquence sur les décimaux de Brousseau (1986) ainsi que sur les analyses conceptuelles de Vergnaud (1981,1988), Blouin a expérimenté une séquence didactique originale auprès d'un groupe de 5 élèves en grandes difficultés d'apprentissage de 13-14 ans. La séquence a été élaborée de manière à confronter les élèves à des situations qui impliquent la fraction en tant qu'applications linéaires. Le développement des connaissances des élèves au cours de l'expérimentation montre la pertinence de ce choix.

Les résultats de Keijzer et Terwel (2003) confortent ceux de Blouin (2002) sur la nécessité d'offrir aux élèves faibles des situations qui dépassent les interprétations élémentaires de la fraction. Ils ont réalisé une étude longitudinale, comparant les effets de deux séquences d'introduction à la fraction. La première (groupe expérimental) met l'accent sur la fraction en tant que mesure, ainsi que sur la comparaison et l'équivalence des fractions alors que la seconde (groupe contrôle), d'une facture plus classique, repose essentiellement sur l'interprétation partie/tout. Les auteurs ont relevé que les élèves faibles du groupe expérimental ont moins progressé que les autres élèves du même groupe. Cependant, à l'issue de la séquence, les élèves faibles du groupe expérimental se révèlent plus compétents sur les fractions que les élèves du groupe contrôle. Les chercheurs en concluent, à l'instar de Blouin (2002), que les élèves faibles doivent pouvoir profiter d'un enseignement relativement substantiel. Cet avis est renforcé par la nécessité de respecter le potentiel de ces élèves ainsi que leurs droits à une éducation de qualité.

Dans la même veine, Empson (2003) décrit, dans une analyse de situations d'enseignement/apprentissage, comment deux élèves faibles ont pu profiter des interactions d'une classe régulière autour de la fraction. L'analyse porte sur des extraits de situations d'enseignement ainsi que sur les résultats des élèves aux pré-tests et post-tests. La chercheuse conclut à l'importance de considérer les élèves faibles en tant que « mathématiquement compétents » et ce, durant différentes situations, que ce soit en groupe classe, en sous-groupe ou individuellement. Cette posture aurait un impact positif sur leur participation ainsi que sur leur apprentissage. Ainsi, la progression de la compréhension des élèves faibles, précise la chercheuse, passe fondamentalement par les interactions en classe qui soutiennent les relations positives à l'égard du contenu du savoir.

Notre étude s'intéresse aux connaissances sur la fraction des élèves de fin primaire en classes ordinaires et, plus particulièrement, les élèves faibles ou en difficulté intégrés à ces classes. Au Québec, la politique ministérielle d'intégration des élèves faibles en classes ordinaires a généré des profils de classe très hétérogènes sur le plan des connaissances des élèves. Considérant, de plus, la difficulté ressentie et exprimée par les enseignants à adapter leur enseignement pour soutenir les élèves à risque intégrés dans leur classe, il semble pertinent d'investiguer sur les différents profils de connaissances sur la fraction dans les classes ordinaires de fin primaire au Québec.

Ainsi, l'objectif principal de notre étude est d'évaluer les connaissances d'élèves de classes ordinaires de fin primaire, identifiés à risque ou non, sur la notion de fraction.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

La première section de ce chapitre porte sur la notion de fraction. Ensuite, sont exposés les travaux qui proposent des modèles sur l'acquisition de la notion de fraction en précisant les défis que cet apprentissage pose. Puis, les items des outils permettant l'évaluation des connaissances des élèves sur les fractions seront décrits. Les objectifs spécifiques de l'étude complèteront ce chapitre.

2.1 La notion de fraction

Le terme « fraction » est souvent utilisé quand le nombre rationnel est visé, et vice versa (Lamon, 2007). Dans le langage courant, la fraction désigne, surtout, une petite partie, une parcelle ou une portion de quelque chose. Se limiter à une telle interprétation risque de dissimuler plusieurs caractéristiques de la fraction, soit par rapport aux fractions impropres ou en lien avec les différentes interprétations que peut prendre la fraction. Dans les paragraphes qui suivent, sont situées les fractions par rapport aux nombres rationnels. Les propriétés de ces nombres sont également soulignées par contraste avec celles des nombres naturels. Cette comparaison nous permettra non seulement d'apprécier la complexité et la richesse de cette notion mais également de souligner les défis importants que posent l'enseignement et l'apprentissage, de ce que désigne Wagner (1976, in Kieren, 1980) comme un méga-concept[4] .

2.1.1 Fraction et nombre rationnel

Tel que précisé par le National Council of Teachers of Mathematics[5], parmi les représentations que peuvent prendre les nombres rationnels, on retrouve:

a) les fractions, telles 3/7 désignant trois septièmes. Le nombre 3 est appelé numérateur et le nombre 7 est un dénominateur. Le terme « fraction » fait référence à un nombre rationnel désigné sous la forme *a/b* où *a* et *b* sont des entiers naturels et *b* est non nul.

b) Les couples ordonnés, tels que (3,7). Cette paire d'entiers naturels peut être représentée par la fraction 3/7. L'ordre des nombres entiers dans le couple est important.

c) Expressions fractionnaires, telles que (1 3/8) peut être représenté par la fraction 11/8 ainsi que par le couple (11,8) c'est une notation dans laquelle apparaissent un entier naturel et une fraction. L'expression fractionnaire ne peut désigner alors que les nombres rationnels plus grands ou égaux à 1.

d) Écritures décimales, tels que 2,75 ou 0,348.

Ainsi, la fraction est une des représentations du nombre rationnel. Or, dans la plupart de ses écrits, Kieren (1980, 1988, 1993, 1995) utilise le terme « *rational and*

---

[4] *The person rational numbers should be a méga-concept involving many interwoven strands.*

[5] Traduction du document Rational Numbers (NCTM,1964) effectuée par l'AMQ (Association Mathématique du Québec).

fractional numbers » pour désigner les nombres rationnels en général et la fraction en particulier. Dans le présent cadre théorique, le terme *nombre rationnel* est utilisé en référence aux éléments de l'ensemble des nombres rationnels, alors que le terme «fraction » est utilisé pour référer spécifiquement à la notion de fraction.

Désigner un nombre rationnel par plusieurs codes numériques tel qu'illustré ci-dessus constitue un des grands défis d'apprentissage surtout lors des premières rencontres avec la fraction. Habitué à représenter les nombres naturels par un seul code numérique, l'élève se retrouve devant une infinité d'écritures qui peuvent référer à un seul nombre (3/8; 0,375; (6,16); etc.). En d'autres termes, ce n'est pas en maîtrisant des techniques opérationnelles pour convertir les nombres d'un système à l'autre que l'élève réussit à donner du sens à cette caractéristique pluraliste de désignation de nombres rationnels (Kieren,1993).

2.1.2 Caractéristique des nombres rationnels

Dans (NCTM, 1964), deux définitions caractérisent les particularités fondamentales des nombres rationnels. La première précise que « *le nombre rationnel est le quotient de deux entiers naturels* ». La deuxième renvoie au lien avec les classes d'équivalences : « *Un nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels* ».

Concernant la première définition, la fraction *a/b* désigne le quotient de l'entier naturel *a* et l'entier naturel *b* (non nul) répondant ainsi à l'équation b.x=a. Les nombres rationnels sont, par définition, un champ de quotients (Birkhoff et Maclane 1953, in Kieren, 1993). Selon Kieren (1993), ce champ de quotients garantit l'existence même de *l'inverse multiplicatif 1/b* pour tout entier non nul *b*. Prenons l'exemple suivant 1÷7 signifie qu'une unité est divisée en 7 parties égales, mais signifie également que l'unité est composée de 7 fois 1/7. D'autre part, cette relation d'inverse multiplicatif est définie dans l'ensemble des nombres rationnels ainsi : pour tout nombre rationnel non nul *p*, il existe un autre nombre rationnel *q* tel que p.q=1. La formation d'inverse multiplicatif affiche une identité multiplicative ou une identité d'opérateur et non pas une itération de l'unité (Kieren, 1993). Ainsi, 3/7 signifie 3 fois 1/7 mais signifie également que 7/3 de 3/7 est égal à 1.

Si l'unité ne peut être que comptée et regroupée dans les nombres naturels, elle est également divisible dans les nombres rationnels. De ce fait, 1/b signifie que l'unité est divisée en b parts égales. La division de l'unité en b parts égales et sa reconstitution en b fois parts 1/b égales est une caractéristique fondamentale de la fraction. En somme, lors de ses apprentissages du nombre rationnel, l'élève doit reconstruire une nouvelle conception du nombre « 1 » en le considérant comme unité divisible et comme élément neutre garantissant l'inverse multiplicatif (Kieren, 1993).

En ce qui a trait à la deuxième définition : « Un nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels » (NCTM, 1964), Desjardins et Hétu (1974) mettent en évidence la relation d'équivalence définie entre deux couples de nombres:

> Si la fraction existe finalement comme objet numérique (soit le couple de nombres), son existence même est solidaire de la relation d'équivalence car celle-ci définit du même coup au moins une autre fraction ainsi que la classe d'équivalence de ces deux fractions avec pour représentant le nombre fractionnaire a/b. (Desjardins et Hétu, 1974, p.20)

Les couples équivalents déterminés par cette relation constituent des classes d'équivalence, l'équivalence a/b=c/d est gouvernée par la relation (a×d=b×c). Par exemple, l'ensemble {(3,4), (6,8), (9,12)…} représentant des couples équivalents est appelé une classe d'équivalence. Les couples (3,4) et (6,8), désignant respectivement 3/4 et 6/8 sont équivalents puisque $3\times8=4\times6$. En effet, un nombre rationnel est un ensemble infini de couples de nombres entiers et est représenté par un de ces couples.

Une autre caractéristique importante à souligner est celle de la densité des nombres rationnels, en contraste à l'ordre établi dans les nombres naturels. Ainsi, il y a une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels. Cette propriété essentielle mène à souligner, dans le passage des nombres naturels aux rationnels, la « perte » de la notion de successeur reliée aux nombres naturels. Par exemple, si 1 est le successeur naturel de 0, aucun nombre rationnel ne succède immédiatement 0.

En conclusion de cette partie, nous pouvons dire que les caractéristiques des rationnels montrent la complexité de cet ensemble de nombres.

2.2 La construction de la notion de fraction

2.2.1 Des nombres naturels aux nombres rationnels

L'ensemble des naturels n'est fermé ni sur la division ni sur la soustraction. De même, l'ensemble des entiers n'est pas fermé sur la division. Ainsi, lors de la division d'un nombre naturel a (le dividende) par un nombre naturel $b \neq 0$ (le diviseur), il existe toujours deux nombres naturels q (quotient) et r (reste) tels que : $a = b . q + r$ avec $0 \leq r < b$. La division est exacte si le dividende a est un multiple du diviseur b ($r = 0$). Par exemple : $12\div3= 4$. Cependant pour 14 et 3, $14\div3= 4$ avec un reste de 2. Avec la création des nombres rationnels et de nouvelles définitions de la multiplication et de la division, la fermeture de la division dans l'ensemble des naturels est dépassée : $14\div3= 14/3$. Toutefois, basé sur les caractéristiques des nombres rationnels qui sont assez distinctes de celles des nombres naturels, Kieren

(1993) précise que même si les nombres rationnels sont étroitement liés aux nombres naturels, partageant le langage et certains concepts, les connaissances des rationnels ne peuvent être considérées comme une simple extension des connaissances sur les nombres naturels.

a) Le changement dans la nature de l'unité

Saisir les caractéristiques des nombres rationnels oblige à des ruptures avec plusieurs propriétés des nombres naturels. Ce qui marque un changement en profondeur, dans le passage des naturels aux rationnels est la nature de l'unité. Nous consacrons les paragraphes suivants à déterminer la nature de ce changement et son impact sur l'acquisition de la notion de fraction.

Durant les premières années scolaires (1^er cycle), l'enfant expérimente le nombre en tant que nombres entiers et l'opération sur ces nombres consiste à les additionner et à les soustraire (Hiebert et Behr, 1988). Bien que tout au long de cette période l'unité est considérée généralement comme étant une entité « seule », son acquisition demeure un processus long et cognitivement exigeant. Au deuxième cycle, l'élève est confronté à de nouvelles opérations, la multiplication et division, ainsi qu'à de nouveaux nombres, soit les rationnels. Compte tenu de la difficulté à maîtriser le concept de l'unité dans les situations impliquant les nombres entiers, il n'est pas surprenant que l'apprentissage des propriétés de l'unité, propres à l'ensemble des rationnels, soit un défi important pour les élèves. Pour saisir la complexité de cet apprentissage, il est utile de préciser les différentes conceptions de l'unité qui jalonnent le processus d'apprentissage de la notion d'unité (Hiebert et Behr, 1988).

L'unité est d'abord pour le jeune élève, un élément de comptage. Le passage vers une conception de l'unité comme un ensemble d'unités constitue pour les élèves un véritable obstacle. Cette nouvelle conception s'élabore dans le cadre des structures multiplicatives puisque l'unité est alors, une unité d'unités. En effet, pour 3 sous-collections de 4 jetons, la notion d'unité s'applique d'abord à un jeton, mais aussi à chacune des sous-collections composées de jetons. Chaque sous-collection est alors une unité d'unités. Cette conception est substituée, dans le cadre des rationnels, à la notion d' « unité d'unités d'unités » (Lamon, 1993).

L'exemple suivant, de Lamon (1993), illustre l'importance de la flexibilité qu'exige cette nouvelle conception. La solution de « Combien font les ¾ de 16 objets? » passe par la construction de trois types d'unités. Dans un premier temps, l'unité est assimilable à un objet. L'ensemble est donc composé en 16 unités. En deuxième lieu, la décomposition multiplicative « 4×4 » amène à construire des unités de deuxième ordre, c'est-à-dire des « unités d'unités », ici quatre unités composées chacune de 4 objets unités (4 unités d'unités). Finalement, la création d'unités de troisième ordre « unités d'unités d'unités » est nécessaire pour considérer les ¾ de 16 : ¾ est alors composé de 3 unités ¼. Chacune de ces unités appartient à une unité « sous-collection » composée elle-même de 4 unités. Lamon (1993) utilise le terme « *unitizing* » pour désigner le processus de regroupement donnant lieu à la création d'unités de type « sous-collection » et le terme « *norming* » pour désigner le processus de réinterprétation du problème par la coordination de différents types d'unités. Dans son étude sur le rapport et la proportionnalité, Lamon (2007) souligne l'importance de ce processus. Son développement favorise une meilleure compréhension des différentes interprétations de la fraction et constitue l'élément précurseur du raisonnement proportionnel.

Hiebert et Behr (1988) font remarquer que ce n'est pas suffisant pour les élèves de reconnaître les changements dans la nature de l'unité. Pour résoudre certains types de problèmes, ils doivent également *anticiper* la structure de l'unité dans la situation à traiter. Examinons, par exemple, l'énoncé suivant : De combien de pizzas ont besoin

20 personnes, si 7 personnes ont besoin de 3 pizzas? Considérer l'unité comme 1 pizza ou 1 personne n'aide pas à la solution du problème. En revanche, penser à 3 pizzas par 7 personnes comme unité ou considérer l'unité comme 3/7 pizza favorisent davantage la solution du problème. Le processus de résolution exige une *anticipation* du type d'unité appropriée aux données du problème.

Pour Mack (1993), le changement de conception sur l'unité débute quand les élèves sont initialement exposés à la fraction de type partie/tout. Le contexte discret fait appel au comptage d'unités, alors que le contexte continu (unité partitionnée) permettrait la quantification par un seul nombre, de la forme a/b ($b \neq 0$). Un autre moment identifié par Mack (1993) qui affecte la conception de l'unité est celui où l'élève est appelé à traiter les autres interprétations de type quotient, opérateur et rapport. Une nouvelle unité est créée, selon Mack (1993), par la comparaison entre les deux unités que représentent respectivement le numérateur et le dénominateur.

b) D'une quantité extensive vers une quantité intensive

Schwartz (1988) analyse le passage d'une quantité extensive à une quantité intensive du point de vue du traitement des quantités en jeu. Il précise que les situations additives ne font appel qu'au traitement de quantités extensives issues directement du comptage ou du mesurage (par exemple : le nombre de grains de café). Quant aux situations multiplicatives, elles requièrent presque toujours la manipulation de quantités intensives, c'est à dire de relations entre des quantités (par exemple : le prix par kilogramme). Les quantités intensives sont peu mesurées ou comptées, mais davantage générées par l'action de division. Par exemple, la division de 30 mètres par 6 heures conduit à «5 mètres par heure ». Les nombres rationnels permettent à cette nouvelle sorte d'unité de devenir des données, des arguments ainsi que des résultats d'opérations.

En somme, le statut des unités est souligné chez plusieurs chercheurs en tant qu'une rupture entre les structures additives et les structures multiplicatives. La mise en place et la coordination de plusieurs schèmes sont néanmoins essentielles à la conceptualisation des structures multiplicatives. Considérer les fractions en tant que structure multiplicative oblige à prendre en compte l'analyse établie ci-dessus. Cette caractéristique n'est pas simple à saisir par l'élève d'autant plus que, comme nous allons le préciser dans les paragraphes suivants, la fraction peut référer à plusieurs interprétations.

2.2.2 La construction de la notion de moitié

Parmi les recherches qui se sont intéressées au premier développement de la notion de fraction, celle de Parrat-Dayan et Vonèche (1991) a particulièrement retenu notre attention par l'étude d'un thème principal dans le développement de la fraction, celui de la relation entre la partie et le tout et sa conceptualisation chez l'enfant.

Faisant suite aux études de Piaget, les chercheurs rappellent les considérations piagétiennes concernant la relation entre la partie et le tout de type *infralogique,* c'est à dire par le fractionnement et la reconstitution d'un tout continu, mais aussi de type *logique,* par la combinaison et la partition de plusieurs objets discrets. Dans les deux cas, la théorie piagétienne considère que le problème du tout et la partie se rapporte à celui de la conservation de quantités traitée dans une relation d'inclusion logique. Cette conservation est assurée lorsque l'élève peut considérer à la fois le tout et une de ses parties. Cependant, l'étude de la notion de moitié de Parrat-Dayan (1980, cité dans Parat-Dayan et Vonèche 1991) démontre que la conservation du tout n'entraine pas nécessairement la conservation de la partie. En effet, en demandant aux enfants (de 4 à 12 ans) de produire la moitié d'un rectangle, les résultats à la figure 1 ont été obtenus.

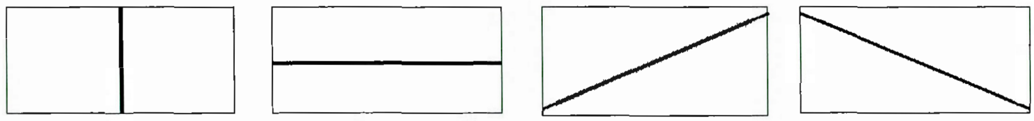


Figure 1 Exemples de dessins de moitié d'un rectangle

Bien que les enfants reconnaissent l'égalité du rectangle du départ, ils n'arrivent pas à reconnaitre l'équivalence des moitiés (disparates) entre elles. Ainsi, ils ne conservent pas le rapport de partie à tout lorsqu'ils produisent des moitiés de formes différentes, même si les totalités initiales sont équivalentes.

Lorsque les totalités de départ sont différentes, comme sur la figure 2, le rapport de la partie au tout est mieux conservé par les enfants, mais pas toujours.

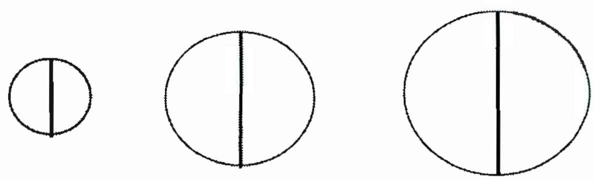


Figure 2 Exemples de dessins de moitié de totalités différentes

De cette étude, les chercheurs concluent que la relation entre le tout et ses parties se transforme selon les significations différentes attribuées par l'enfant à la notion de moitié. En effet, même si la notion de moitié parait simple, précisent-ils, sa construction est, en réalité, difficile :

> Il s'agit de considérer à la fois la nature du matériel, l'action de l'enfant sur le matériel et le produit de cette action sur les schèmes cognitifs de l'enfant ainsi que le niveau cognitif général du sujet y compris l'interaction entre les schèmes logiques et infralogiques propre à toute mesure (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991, p.19).

En ce qui a trait à la nature du matériel, prendre la moitié d'un objet qu'on peut rabattre en deux (ex: bande de papier) est plus facile à obtenir que sur un objet rigide (ex : spaghetti). De plus, trouver la moitié d'un ensemble d'éléments discrets (surtout un nombre impair) peut s'avérer plus complexe que prendre la moitié d'un tout continu. Si le matériel proposé est représenté par des éléments discrets, il se peut que l'élève le traite dans sa totalité comme étant un élément continu et vice versa. Dans ce cas, l'action de l'élève faite sur le matériel vient changer la nature du problème. Par son action sur le matériel, l'élève peut, selon son niveau de développement, être perturbé par des résultats inattendus. Ainsi, pour l'exemple de prendre la moitié de cinq pommes, l'enfant peut considérer une demi-pomme ou toutes les demi-pommes par confusion entre l'unité et le tout. Cette confusion provient du résultat sur le matériel du partage de chacune des pommes. Cette action produit deux référentiels, l'unité qu'est la pomme ou l'ensemble des demi-pommes, référentiels que l'enfant ne réussit pas toujours à différencier.

En somme, l'étude distingue deux types de fractions : la fraction sur l'objet qui correspond à la relation partie-tout nécessitant l'intégration des opérations de partage et de réunion et la fraction relationnelle qui dépasse la notion de totalité en supposant la conservation de la relation qu'entretient chaque partie avec son unité de tout. Ce résultat est en accord avec les travaux de Desjardins et Hétu (1974) au Québec.

Si cette étude a démontré la complexité de la notion de moitié, d'autres recherches s'intéressant à l'interprétation opérateur (Kieren et Nelson, 1978; Kieren et Southwell, 1979) ont plutôt conclu qu'il s'agit du premier niveau acquis par les enfants dans leur construction de la notion de fraction.

Plusieurs chercheurs se sont, en effet, intéressés à la construction de la notion de fraction chez l'enfant, aux schèmes sur lesquels se base cette construction et aux connaissances nouvelles qu'elle engendre. Selon Behr, Harel, Post et Lesh (1993), le modèle de Kieren a fait ses preuves. En effet, l'ensemble des études consultées sur la fraction réfère au modèle de Kieren, ce qui en fait un modèle incontournable dans l'étude sur l'acquisition de la notion de fraction.

2.2.3 Le modèle de construction des nombres rationnels de Kieren (1993)

Avant de présenter les différentes composantes du modèle de Kieren (1993), il convient de préciser les cinq interprétations de la fraction.

a) Les cinq interprétations classiques de la fraction

Les études récentes sur les fractions se réfèrent quasiment toutes aux cinq interprétations suivantes: partie/tout, quotient, opérateur, mesure et rapport. Dans les paragraphes qui suivent, nous décrivons les cinq interprétations telles qu'elles sont présentées dans ces études.

L'interprétation partie/tout est définie dans toute situation où une quantité continue ou un ensemble d'objets discrets est partitionné en parts égales. La fraction a/b représente la relation entre un tout partagé en un nombre « b » de parties égales et un nombre « a » de ces parties. Le tout peut être continu (aire, volume, longueur) ou discret (collection). La fraction 7/11, peut désigner sous cette interprétation, 7 billes prises d'une collection de 11 billes ou encore 7 parties d'une bandelette partagée en 11 parties égales. La relation entre un certain nombre de parts prises « a » et le nombre total des parts « b » implique que le numérateur est plus petit ou égal au dénominateur. Il s'agit d'une des limites de cette interprétation qui inhibe la conception des fractions impropres.

Toutefois, l'interprétation partie/tout considérée souvent comme une entrée aux autres interprétations favorise le développement des concepts de base tels que la partition. Cette interprétation est associée à la reconnaissance de l'égalité des parts, résultat de la partition exhaustive d'un tout collection ou continu. Ainsi, plus le nombre de parts augmente plus les parts sont petites et le tout est conservé peu importe la taille, la forme, l'arrangement ou l'orientation des parts égales. Certains chercheurs, comme Charalambous et Pitta-Pantazi (2006), mettent l'accent sur le principe d'inclusion des parts considérées comme des éléments du tout. D'autres, comme Baturo (2004), soutiennent l'importance du développement des habiletés de composition et de recomposition des unités lesquelles permettent soit de reconstruire le tout à partir d'une fraction (ex : reconstruire le tout à partir du 3/8) soit de repartitionner un tout subdivisé en parts égales (par exemple : construire 3/8 à partir d'un tout partagé en 4 parts égales).

L'interprétation rapport désigne comme son nom l'indique le rapport entre deux grandeurs discrètes ou continues. La fraction 7/11 peut désigner aussi bien le rapport entre une collection de 7 objets et une collection de 11 objets, comme elle peut correspondre au rapport entre 7 et 11 parties d'un même tout partitionné en 18 parties égales. Cette dernière illustre le rapport entre partie/partie d'un même tout.

La notion de rapport est généralement associée à la notion de taux. Lamon (2007) distingue la notion de taux et de rapport. Le taux réfère à la comparaison de deux grandeurs de natures différentes (par exemple, km/h), donnant lieu à une nouvelle dimension, alors que le rapport est la comparaison de deux quantités de même nature (par exemple, 5 garçons pour 4 filles). Ohlsson (1988) précise cette distinction en termes de *rapport externe* et *rapport interne.*

Ouvrant sur la comparaison entre deux quantités, l'interprétation rapport joue un rôle primordial dans le développement des fractions équivalentes. En effet, en contexte de rapport, la transformation des quantités doit être proportionnelle pour que soit maintenue l'égalité du rapport. Toutefois, les élèves qui sont capables de construire des fractions équivalentes ne sont pas nécessairement en mesure de reconnaître l'invariance du rapport.

Sous l'interprétation quotient, la fraction est considérée comme le résultat d'une division qui implique deux espaces de mesure (par exemple, des enfants et des gâteaux). Ainsi, 7/11 désigne la part du gâteau que chaque enfant obtient si 11 enfants se partagent également 7 gâteaux. La fraction 7/11 représente donc le résultat de la division de 7 par 11. La fraction a/b est d'ailleurs la solution de l'équation linéaire b.x=a. Les problèmes de partage égal sont souvent utilisés pour le développement de cette interprétation. Contrairement à l'interprétation partie/tout, la fraction résultant du partage égal peut être non seulement plus petite et égale à l'unité, mais également plus grande que l'unité.

En plus du développement de l'équi-division nécessaire au schème de la partition égale, l'interprétation quotient nécessite la mise en correspondance entre la fraction et l'opération de division. Cette dernière opération exige de considérer le rôle du dividende et celui du diviseur. Ohlsson (1988) distingue le quotient partition du quotient groupement. Le quotient partition est caractérisé par le fait que le dividende est partitionné en plusieurs parts que le diviseur spécifie. Dans le cas du quotient groupement, le diviseur mesure une grandeur qui est extraite répétitivement du dividende. La division partition porte sur la recherche de la quantité qui résulte d'une partition égale de l'ensemble des unités; par exemple, si 3 pizzas sont partagées également entre 4 personnes, chacune aura ¾ d'une pizza. Cependant, la division groupement porte sur la recherche de « sous-collections »; par exemple, si chaque personne reçoit ¾ de pizza et qu'il y a 3 pizzas, 4 personnes auront de la pizza.

En ce qui a trait à l'interprétation opérateur, la fraction réfère à une fonction représentée par f(x)= a/b x. La fraction ne désigne pas une quantité, mais une transformation. Cette transformation peut être un agrandissement (a/b, a>b) ou une réduction (a/b, a< b) que ce soit dans un contexte discret ou continu. L'opérateur fractionnaire est également défini comme une fonction composée puisqu' il implique la composition de deux opérateurs entiers, associés respectivement au numérateur et au dénominateur. Pour identifier les ¾ de 16 billes, trois procédures de calcul sont alors possibles.

- Application de l'opérateur fractionnaire direct ¾ : 16×3/4=12
- Application des deux opérateurs entiers (×3 et ÷4): 16×3÷4=12 ou16÷4×3=12
- Application de l'opérateur fractionnaire inverse 4/3 : 16÷4/3 =12.

Sous l'interprétation mesure, la fraction est souvent associée à la mesure assignée à un intervalle donné. Plus précisément, la fraction unitaire est (1/b) et utilisée d'une manière itérative pour déterminer la distance à partir d'un point donné. Par exemple, ¾ correspond à la distance de 3×1/4 d'un point donné. Selon Kieren (1980), l'interprétation mesure est fortement liée à l'interprétation partie/tout. Cependant, l'interprétation mesure, à la différence de l'interprétation partie/tout, implique un traitement dynamique de l'unité. Lamon (2007) conforte cette distinction en précisant que selon l'interprétation mesure, 1/4 n'est pas 1 partie sur 4 parties égales, mais plutôt une relation multiplicative entre deux mesures : le ¼ est ce qui entre 4 fois dans un entier. De plus, la chercheuse suggère que le développement de l'interprétation mesure implique l'habileté à utiliser une unité d'intervalle donnée pour mesurer n'importe quelle distance à partir du point d'origine. De ce fait, cette interprétation permet aussi de repérer un nombre sur une droite numérique.

En conclusion de cette section, nous citons Lamon (2007) rappelant que les différentes interprétations de la fraction ne sont pas étanches et qu'une attention particulière portée sur les structures multiplicatives ne peut que favoriser la compréhension des différentes interprétations de la fraction.

> Interpretations are tightly intertwined, and with the proper attention to the central multiplicative structures, students will naturally develop an understanding of multiple interpretations. (Lamon, 2007, p. 658)

b) Le modèle de construction de la fraction de Kieren (1993)

La description des différentes interprétations de la fraction ne peut être appréciée sans l'inscrire dans le modèle de construction de Kieren (1993) présenté à la figure 3. Ce qui caractérise le mieux le modèle de Kieren, c'est la description des différents processus de construction et de coordination des différents schèmes qui conduisent progressivement à la compréhension de la fraction en tant que nombre.

S'inscrivant dans la perspective constructiviste piagétienne sur l'apprentissage, le modèle de Kieren (1993) est organisé comme un réseau qui comprend quatre niveaux organisés hiérarchiquement; chaque niveau marque de nouvelles constructions. Ainsi, si le premier niveau est caractérisé par des constructions « locales » très proches des situations du réel, les niveaux suivants sont de plus en plus abstraits. À chacun des niveaux, les constructions intègrent celles du niveau précédent (Blouin, 2002). Ainsi, la progression d'un niveau à l'autre s'accompagne d'un élargissement du spectre des problèmes traités. Bien qu'il s'agisse d'un modèle qui illustre une certaine progression d'un niveau à un autre, Kieren (1993) insiste sur le fait que la compréhension se développe d'une façon non-linéaire, avec des aller- retour.

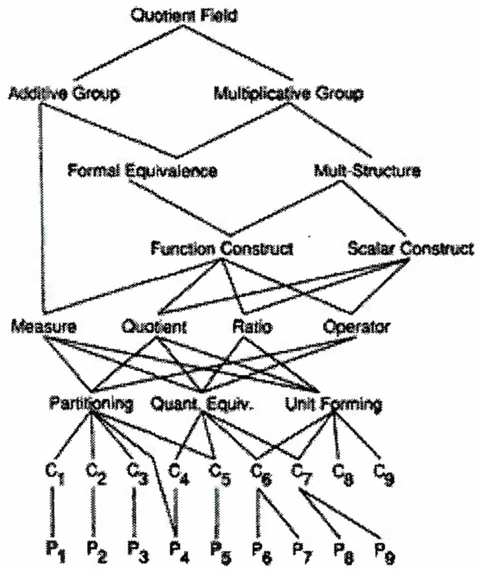


Figure 3 Les composantes du modèle[6] de Kieren (1993)

Le premier niveau comprend trois connaissances élémentaires: la partition, l'équivalence (quantitative), et la formation d'unité. Ces connaissances permettent une première représentation de la fraction unitaire (1/b) et une première représentation de la fraction quantité. La quantification de la relation partie/tout est représentée et verbalisée par un langage fractionnaire additif et ne faisant donc pas appel à un raisonnement multiplicatif. Ces connaissances sont considérées par plusieurs chercheurs comme étant des schèmes, des outils intuitifs ou des connaissances informelles des élèves de jeune âge sur lesquelles il faut miser pour soutenir le développement de la compréhension des sous-constructions du niveau plus haut. Plusieurs recherches ont souligné le rôle important de ces connaissances, notamment la partition, dans la compréhension du nombre rationnel (Mack, 2001; Pitkethly et Hunting, 1996).

---

[6] La figure est tirée de *Rational and Fractional Numbers : from Quotient Fields to Recursive Understanding* (Kieren, 1993).

Selon Pitkethly et Hunting (1996), les schèmes de partition peuvent être définis ainsi :

-Halving (l'action de partager en deux) : cette action peut être répétée de façon itérative, tant avec des quantités discrètes que continues.

-Dealing (la distribution): partager en parts égales le même objet (nombre) d'une façon cyclique (à chaque tour) jusqu'à épuisement du tout.

-Folding or splitting (le pliage) : est une façon de partager une grandeur continue en parties égales. Le nombre de pièces obtenues varie multiplicativement par rapport au nombre de pliages effectués, la taille des parts (1/b) diminue tandis que le nombre de pliages (b) augmente.

Les contextes physiques de partition sont discrets ou continus. Le tout continu permet une division répétée et infiniment variée alors que le tout discret permet la distribution et le comptage mais avec une relation au tout pouvant être plus faible que sur le tout continu (Pitkethly et Hunting, 1996).

Au premier niveau du modèle, se trouvent également l'équivalence « quantitative » et la formation d'unité. Selon Behr *et al.*(1984, in Kieren, 1992), l'équivalence des nombres rationnels évoque trois idées :

- Égalité absolue (1/2 = 2/4 car 1/4 +1/4 font 1/2);
- Égalité relative (2/3 = 6/9 parce que la relation entre 2 et 3 est la même qu'entre 6 et 9 ou parce que 6/9 = 2×3 / 3×3);
- Égalité déductive (2/3 = 6/9; [9×3] ×2/3 = [3×9] × 6/9; 9×2 = 3×6).

L'équivalence au premier niveau du modèle correspond à l'égalité absolue. Elle est illustrée à travers des pièces qui possèdent la même taille et la même forme. Dans un seul tout continu, la partition et l'équivalence permettent de développer la considération de nouvelles unités qui se forment. L'égalité relative et déductive se développe respectivement aux deuxième et troisième niveaux du modèle.

Quant à la formation d'unité, les fractions sont construites à partir de sommes de fractions non égales (Kieren, 1995). L'exemple suivant illustre bien les fractions comme quantités additives combinables : « Voici 4 pizzas rectangulaires coupées en demie, en quarts, en sixièmes et en douzièmes. Choisissez des parts, parmi au moins 3 de ces pizzas, de telle façon que leur somme fasse une pizza. » (Kieren, 1995). Par ailleurs, Blouin (2002) se réfère à l'étude de Parrat-dayan et Vonèche (1991) pour préciser qu'une construction de la notion d'unité signifie la conception qu'un objet est divisible et que cet objet puisse être considéré comme unité ou comme unité d'ensemble.

Le second niveau du modèle de Kieren (1993) est caractérisé par les quatre sous-constructions qui représentent les différentes interprétations de la fraction : mesure, quotient, rapport et opérateur. Blouin (2002) précise que ces différentes constructions de la notion de fraction ne sont pas, à ce niveau, encore reliées et qu'elles existent indépendamment les unes des autres. Par ailleurs, il importe de souligner que les interprétations mesure et quotient sont les deux seules sous-constructions que Kieren (1993) a relié aux trois connaissances du niveau précédent.

Le troisième niveau marque la construction de la structure multiplicative des fractions et intègre l'aspect de l'équivalence formelle. Ainsi, la construction de l'opérateur scalaire (reliée aux sous-constructions précédentes : quotient, rapport et opérateur) et la construction de l'opérateur fonction (reliée aux quatre sous-constructions du niveau précédent) organisent une connaissance des nombres rationnels en tant que structure multiplicative tel que décrit par Vergnaud (1988). Selon Blouin (2002), à ce niveau, les fractions sont conçues à la fois comme des mesures (des quantités) et des rapports (des relations). C'est à ce troisième niveau que les problèmes de quatrième proportionnelle peuvent être résolus.

Le dernier niveau représente le nombre rationnel comme un élément d'un ensemble quotient. Ce champ quotient, organisé par les groupes multiplicatifs et additifs, donne au nombre rationnel un statut numérique «pur».

L'étude des différentes étapes de la construction de la fraction témoigne une fois de plus de la complexité de cette notion. L'enjeu principal de ce modèle réside dans l'illustration de la complexité de l'acquisition de la fraction qui repose sur la coordination des différentes sous-constructions. Cette coordination permet ainsi une solide compréhension qui facilite l'accès aux différentes opérations sur les rationnels et aux différentes notions mathématiques associées (algèbre, probabilité, etc.).

2.3 Recension des recherches sur l'évaluation des connaissances sur les fractions

Dans cette section, nous présentons les instruments utilisés par un certain nombre d'études de manière à recenser le type de tâches utilisées dans l'évaluation des connaissances sur la fraction d'élèves de fin primaire. Dans la recension de la littérature scientifique, nous avons repéré des recherches qui s'inscrivent soit dans une perspective de comparaison d'impact de curriculums ou de situations soit dans une perspective de validation de modèles théoriques. Pour préserver la logique de chacun des instruments, chacun d'eux est décrit en référence à l'étude de laquelle il est issu.

2.3.1 L'étude de Clarke, Roche et Mitchell (2007)

En 2007, l'article *Year Six Fraction Understanding : A Part of the Whole Story* de Clarke, Roche et Mitchell vise l'investigation des stratégies des élèves déployées dans des tâches impliquant les différentes interprétations de la fraction. L'analyse des entretiens individuels pour chacun des items proposés a été effectuée dans le but de faire des recommandations pour l'enseignement des fractions. Trois cent vingt-trois élèves de 6ème année ont participé à cette étude. L'instrument d'évaluation comprend 6 catégories de tâches organisées autour de la comparaison des fractions, la somme des fractions et quatre des interprétations de la fraction : partie-tout, opérateur, quotient et mesure. Les items des tâches proposées sont tirés ou adaptés d'études scientifiques antérieures.

a) L'interprétation partie/tout

Trois items différents ont été regroupés sous l'interprétation partie/tout. Le premier vise à évaluer l'habileté de l'élève à identifier les fractions représentées par les parties désignées (en l'occurrence, B et D) dans un cercle partagé en parts non égales (1/4 et 1/6) dans une quantité continue, voir la figure 4.

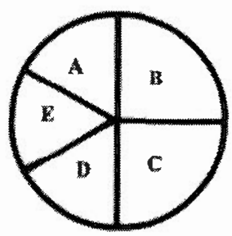


Figure 4 « Fraction de tarte »

Le deuxième item consiste à identifier la fraction qui correspond à 12 pastilles noires sur un tout composé de 18 pastilles, tel qu'illustré à la figure 5. Les élèves doivent ensuite donner une deuxième fraction pour représenter cette relation. Il est à préciser que le tout discret est bien organisé dans une constellation de pastilles de 6 par 3. Cette configuration présente plusieurs combinaisons, par exemple 4 colonnes noires sur 6 ou 2 groupes de 2 colonnes sur 3 qui peuvent favoriser l'identification d'une fraction équivalente.

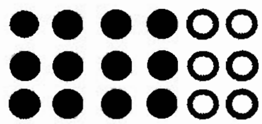


Figure 5 « Pastilles»

Au troisième item, les élèves doivent dessiner le tout étant donné une partie de ce tout. Deux dessins sont présentés (voir figure 6). Au premier, la partie donnée correspond aux 2/3 du tout et au second, la fraction donnée correspond aux 4/3. Ces parties n'étant aucunement partagées, il revient à l'élève de prendre en compte le nombre de tiers qu'elle représente pour construire un tout conforme.

2/3 4/3

Figure 6 «Dessiner le tout»

b) L'interprétation opérateur

Pour la tâche sur des opérateurs simples, quatre questions ont été posées aux élèves, sans support visuel. Les élèves doivent compléter des énoncés numériques de type : a/b de x est y. La place de l'inconnue pour chacun des énoncés est (y). Les élèves doivent trouver le « ½ de 6 », « 1/5 de 10 », « 2/3 de 9 » et le « 1/3 de ½ ».

c) L'interprétation mesure

L'interprétation mesure comporte trois items. Au premier item, les élèves doivent dessiner d'abord une droite numérique et y situer, ensuite, la fraction non unitaire (2/3).

Pour les deux autres items, la droite numérique est présentée telle que sur la figure 7. Les élèves sont invités à situer 6/3 (naturel) et ensuite 11/6 (une fraction impropre).

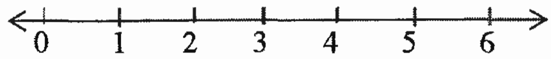


Figure 7 «Droite numérique»

d) La somme de fractions

L'activité utilisée a pour but d'évaluer la compréhension des élèves de la «taille» des fractions. L'élève doit placer des cartes numériques dans des cases de telle façon que la somme des fractions soit la plus proche de 1, mais sans être égale à 1. Les nombres qui figurent sur les cartes sont : 1, 3, 4, 5, 6, et 7. Chaque carte ne peut être utilisée qu'une seule fois, voir figure 8.

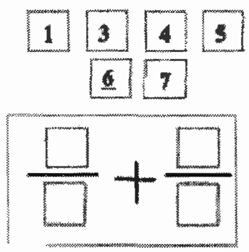


Figure 8 «Somme des fractions»

e) La comparaison des fractions

Huit paires de fractions sont présentées aux élèves, une paire à la fois. Chaque paire est présentée sur une carte et placée en face de l'élève. L'élève doit pointer la plus grande fraction de la paire et justifier son choix. L'élève n'a la possibilité ni d'écrire, ni de dessiner. Les paires répondent à certains critères et se présentent comme suit :

a) 3/8 et 7/8 (même dénominateur) e) 2/4 et 4/2 (une fraction et son inverse)

b) 1/2 et 5/8 (4/8 sert à la comparaison) f) 3/7 et 5/8 (4/8 sert à la comparaison)

c) 4/7 et 4/5 (même numérateur) g) 5/6 et 7/8 (même différence de 1 entre a et b)

d) 2/4 et 4/8 (fractions équivalentes) h) 3/4 et 7/9 (6/8 sert à la comparaison)

f) Interprétation quotient

Pour l'interprétation quotient, un problème de division partition impliquant deux nombres premiers entre eux a été proposé. Une image de 5 filles et de 3 pizzas est présentée à l'élève en lui posant la question suivante : « Trois pizzas ont été partagées à parts égales entre les cinq filles. Quelle est la part de chacune des filles ? » Les élèves ont été invités à utiliser un stylo et du papier au besoin pour résoudre le problème.

2.3.2 L'étude de Cramer, Post et delMas (2002)

Le titre de l'article de Cramer, Post et delMas (2002) est Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students : A comparison of the Effects of Using Commercial Curricula with the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. Tel que son titre l'indique, il s'agit d'une étude comparative de deux programmes d'enseignement des nombres rationnels, destinés aux élèves de 4ème et de 5ème année du primaire, avec un devis expérimental. Le programme élaboré par le projet «Rational Number Project (RNP)» a été évalué au regard des programmes réguliers en vigueur. Le projet RNP repose sur l'utilisation de divers modes de représentation de nombres rationnels et sur la transformation d'un mode à un autre. Les modes de représentation utilisés sont des modèles concrets de manipulation, des modèles imagés, un mode verbal et des notations numériques. Ainsi, pour cet instrument d'évaluation soumis aux pré-test et post-test, les élèves ont été encouragés à utiliser le matériel de manipulation de leur choix. Les 34 items utilisés pour évaluer les connaissances des élèves se déclinent en six volets : a) Concept de fraction; b)

Fractions équivalentes; c) Ordre des fractions (la comparaison des fractions); d) Estimation; e) Opérations d'addition et de soustraction; f) Transfert à d'autres problèmes. Présentés sous forme d'un questionnaire écrit, ces items ont fait l'objet de l'enseignement dans les deux groupes, expérimental et contrôle. L'article présente pour chaque volet, un exemple d'item que nous rapportons dans ce qui suit. Le nombre d'items utilisés pour chacun des six volets est indiqué avec le titre correspondant.

a) Concept de fraction (8 items)

Ce volet vise l'évaluation de la compréhension des élèves de l'interprétation partie/tout de la fraction et la taille relative de la fraction. L'item proposé consiste à dessiner le tout étant donné une partie de ce tout. La partie donnée représente le ¾ d'un rectangle, l'élève doit dessiner le rectangle (entier) qui représente le tout.

b) Fractions équivalentes (4 items)

Les items proposés dans ce volet sont en modes imagé et symbolique. L'exemple, présenté dans l'article, consiste à nommer deux fractions correspondant au dessin ci-dessous. Dans cet exemple, la fraction n'est pas donnée en symbole numérique.

c) Ordre des fractions (Comparaison des fractions) (7 items)

Les connaissances sur l'ordre des fractions sont évaluées par la comparaison de deux fractions, par exemple : encercle la fraction la plus grande : 6/14 ou 5/9.

d) Estimation (3 items)

L'item suivant représente un exemple d'estimation proposé en contexte numérique : Écris le nombre entier le plus proche de 3/8+5/12 (ton estimation).

e) Opérations d'addition et de soustraction (5 items)

Dans ce volet, les items sont proposés sous forme d'énoncés de problèmes ou en contexte numérique.

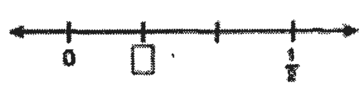
Voici un exemple d'énoncé de problème : « Annie et Josie reçoivent un même montant d'argent. Josie dépense 4/9 de son montant dans l'achat des cassettes. Annie dépense le 1/3 de son montant pour réparer son vélo. Combien Josie a-t-elle dépensé de plus (de son montant) qu'Annie?»

En ce qui a trait au contexte numérique, il est suggéré à l'élève d'utiliser le matériel de manipulation pour résoudre l'équation proposée, par exemple : 1/3+2/6.

f) Transfert à d'autres problèmes (7 items)

Le transfert est mesuré à travers des situations qui n'ont pas fait partie de l'enseignement. Des problèmes multiplicatifs, comme l'exemple qui suit, constituent des items de ce volet : « Mary a 1 ½ d'un bout de corde. Elle le découpe en 3 parties égales. Quelle fraction de la corde représente chaque morceau? »

L'usage de la droite numérique est un autre exemple faisant partie de ce volet. Sur une droite numérique où 0 et ½ sont identifiés, l'intervalle entre 0 et ½ est subdivisée en 3 parts égales. Il est demandé d'indiquer la fraction correspondante à un point, par exemple, à 1/6.



2.3.3 L'étude de Moseley et Okamoto (2008)

Cette étude examine les performances de trois groupes d'élèves, moyens, forts et excellents de niveau 4^{e} année primaire, à des résolutions de problèmes ainsi que leur compréhension de différentes représentations du nombre rationnel. En effet, l'étude met un accent particulier sur les différentes représentations (imagée, énoncé de problèmes et notation numérique) qui peuvent correspondre à chacune des interprétations de la fraction (partie/tout, mesure, quotient, rapport et opérateur). Ainsi, selon les chercheurs, la différenciation des cinq interprétations de la fraction est une compétence nécessaire pour raisonner avec les nombres rationnels. De plus, ils précisent qu'une représentation imagée peut davantage correspondre à une interprétation plutôt qu'aux autres. Par exemple, l'image du cercle partitionné en 4 morceaux avec une part hachurée peut mettre l'accent sur la relation partie/tout plutôt que sur les autres interprétations possibles de ¼. Aussi, l'image de la barre graphique avec 2 colonnes, dont l'une représente 4 fois l'autre, peut référer davantage à l'interprétation rapport que les autres représentations.

L'évaluation comporte deux phases, la première se déroule sous forme d'un questionnaire écrit, alors que la deuxième se passe sous forme d'entretien individuel. L'article rapporte une description des items de la première phase sans les présenter. Pour la deuxième phase, la principale, les items sont exposés à la figure 7.

a) Première phase

Concernant le test écrit, les élèves ont à répondre à quatre catégories d'items. Les deux premières catégories sont supportées par une représentation imagée et les deux autres sont présentées sous forme d'énoncé de problèmes.

Le premier problème de la catégorie des représentations imagées consiste à identifier la fraction correspondant à une partie ombragée d'une figure rectangulaire indiquée. L'autre problème invite les élèves à encercler le nombre de bonbons correspondant à la part résultant d'un problème de partage égal.

En ce qui a trait aux résolutions de problèmes, les élèves, dans un problème de rapport, doivent déterminer la quantité de nourriture que reçoivent ces poissons, considérant que cette quantité varie en fonction de leur taille. L'autre problème consiste à déterminer les quantités des ingrédients pour 4 et pour 6 personnes à partir d'une recette pour 8 personnes.

b) Deuxième phase

En entretien individuel, 15 cartes sont placées sur une table devant l'élève. Les 15 cartes sont construites selon les cinq interprétations de la fraction (partie/tout, quotient, rapport, mesure et opérateur). Pour chacune des interprétations, correspondent trois cartes sous les trois formes suivantes : énoncé de problème, représentation imagée et symbole numérique. L'élève doit regrouper les trois formes représentant chacune des interprétations en verbalisant, au fur et à mesure, sa façon de raisonner. La figure 9 montre les quinze cartes présentées à l'élève, elles sont placées selon les regroupements attendus.

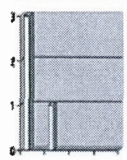
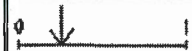
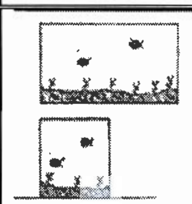
Partie/tout	Quotient	Rapport	Mesure	Opérateur
Ma famille a 10 poissons qui vivent dans un aquarium de 15 gallons. Le plus grand poisson est nommé Harvey. Harvey a 10 onces de nourriture pour lui seul et il en a mangé 6 onces. Quelle part de sa nourriture a-t-il mangée?	Mon frère a décidé de prendre notre aquarium de 6 gallons et de le répartir dans 8 plus petits aquariums de 1 gallon chacun. Quelle quantité du grand aquarium a-t-il mise dans chaque petit aquarium?	Papa a nettoyé notre gros aquarium. Il contient 9 poissons. Papa met 18 gallons d'eau et 6 lb de gravier dans l'aquarium. Quelle est la relation entre la quantité du gravier et celle de l'eau dans l'aquarium?	Notre famille possède 10 poissons tropicaux. Ma mère verse 5 gallons d'eau dans le récipient vide de 20 gallons. À quel niveau le récipient sera rempli après avoir mis l'eau dedans?	Ma tante construit un aquarium pour son poisson rouge et les instructions indiquent d'utiliser 18 livres de gravier mais elle n'en a que 9. De combien devrait-elle réduire la quantité des autres objets qu'elle a planifié d'insérer dans l'aquarium pour qu'elle puisse utiliser 9 livres au lieu de 18 livres de gravier ?
				
3/5	**0.75**	**1/3**	**1/4**	**1/2**

Figure 9 Les 15 cartes des cinq interprétations (Moseley et Okamoto, 2008, p.241, traduction libre)

2.3.4 L'étude de Charalambous et Pitta-Pantazi (2006)

L'objectif premier de cette recherche est de tester le modèle[7] de Behr, Lesh, post, et Silver (1983) par l'étude des relations entre chacune des cinq interprétations de la fraction ainsi qu'avec les opérations additives, opérations multiplicatives, l'équivalence des fractions et la résolution de problèmes. Trois cent quarante élèves de 5^e année et 306 élèves de 6^e année ont participé à l'évaluation. 50 tâches ont été présentées en deux moments différents. Huit volets composent le test proposé aux élèves : partie/tout (9 items), rapport (6 items), opérateur (4 items), quotient (5 items), mesure (9 items), équivalence (10 items), opérations multiplicatives (4 items) et opérations additives (3 items). Les exemples d'items rapportés dans l'article sont présentés dans ce qui suit.

a) Partie/tout (9 items)

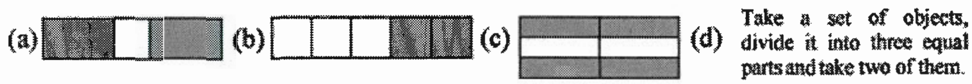
Ce volet porte sur plusieurs notions reliées à l'interprétation partie/tout, la reconstruction du tout étant donné une partie de ce tout, l'identification de fractions à partir de représentations imagées, la considération de l'égalité des parts et la notion d'inclusion. Deux items sont donnés à titre d'exemple.

Le premier consiste à construire un tout (collection) étant donné une fraction (2/3) de ce tout. La fraction 2/3 est représentée par 4 points, l'élève doit dessiner l'ensemble de points représentant le tout.

---

[7] Voir annexe A pour Le modèle de Behr *et al.* (1983) tiré de l'étude de Charalambous et Pitta-Pantazi (2006).

Le deuxième item demande d'identifier à partir de trois représentations imagées et un énoncé, ce qui représente 2/3.



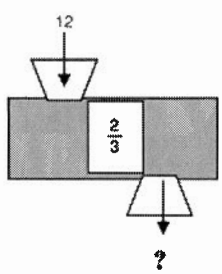
b) Rapport (6 items)

Six items couvrent l'interprétation rapport. Les 5 premiers consistent en une comparaison des deux rapports, dans le contexte d'un mélange d'eau et de concentré d'orange, tiré de Noelting (1978, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006). Le dernier est également une comparaison entre deux rapports, dans un contexte plus familier : *nombre de filles/nombre de pizzas* et *nombre de garçons/nombre de pizzas.*

c) Opérateur (4 items)

Deux items composent les exemples donnés pour le volet opérateur. Le premier, tiré de Marshall (1993, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006), est un énoncé relativement particulier se formule comme suit : Sans te soucier d'aucune opération, décide si l'affirmation suivante est correcte: « si l'on divise un nombre par quatre et ensuite on multiplie le résultat par 3, on aura le même résultat que si on multiplie ce nombre par ¾».

Le second item réfère à la machine de transformation, avec représentation dessinée à l'appui, qui transforme le nombre initial 12 par l'opérateur 2/3. L'élève doit identifier le nombre après la transformation.



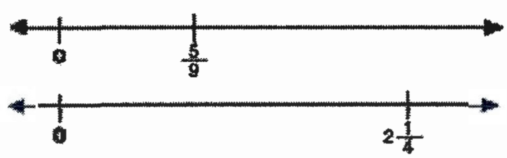
d) Quotient (5 items)

Deux exemples sont rapportés sous l'interprétation quotient. Dans le premier tiré de l'étude de Kieren (1993, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006), l'élève doit juger si l'affirmation suivante est vraie: « 2/3 est égal au résultat de l'opération de division de 2 par 3 ».

Le second item couvre deux énoncés de problèmes. Ils sont respectivement des énoncés de division partition (trois pizzas partagées également entre quatre enfants, quelle part chaque enfant reçoit?) et de division groupement (Trois pizzas partagées également entre des amis, chacun d'eux reçoit une part de 3/5 de pizza, Combien d'amis se partagent les pizzas?)

e) Mesure (9 items)

Pour évaluer les connaissances de l'interprétation mesure, les élèves doivent situer le nombre 1 sur une droite numérique étant situé, sur une première droite 5/9 et, sur une seconde, 2 ¼, tel qu'illustré ci-dessous Lamon (1999, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006).



L'exemple suivant, décliné sous l'interprétation mesure, permet de vérifier la propriété de la densité des nombres rationnels. Les élèves doivent trouver une fraction entre deux fractions unitaires dont les dénominateurs sont des successeurs : 1/8 et 1/9 Lamon (1999, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006)

Le dernier exemple, sous l'interprétation mesure, demande d'encercler les nombres présents parmi ce qui suit :

A 4 * 1,7 16 0.006 2/5 47,5 ½ $ 1 4/5

f) Opérations (7 items)

Deux exemples d'items sont proposés sous le volet des opérations. Le premier item demande d'identifier la meilleure estimation à l'opération suivante : 6 ¾ ×4 3/7 = Le produit est entre : a) 18 et 24; b) 25 et 28; c) 29 et 32 et d) 33 et 40 Philippou et Christou (1994, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006).

Le deuxième item demande de trouver les résultats aux calculs suivants :

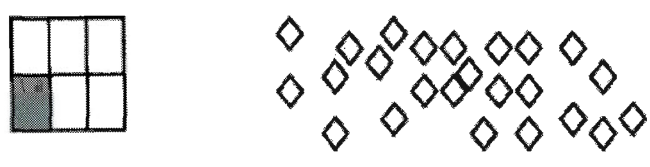
a) 5/8+4/5= b) 2÷1/2=

g) Fractions équivalentes (10 items)

Sous le volet « fractions équivalentes », les élèves sont invités à compléter, en identifiant le nombre manquant, l'écriture de fractions équivalentes, de type :

a) 2/3 = ? /12 b) 25/40 = 5/ ?

Un autre item exige de représenter une fraction équivalente, sur un tout collection (24 losanges), à la fraction représentée sur un tout continu (1 carreau d'un rectangle divisé également en 6 parties) (Kyriakides et Charalambous (2002, cité dans Charalambous et Pitta-Pantazi 2006) :



2.3.5 L'étude de Blouin (2002)

La majorité des études effectuées auprès des élèves en difficulté présente des tâches qui tentent d'éviter la complexité et la richesse de la fraction. L'étude de Butler, Miller, Crehan, Babbitt et Pierce (2003) en est un exemple. L'instrument d'évaluation comporte des items sur l'illustration de la fraction, sur la notion de fraction équivalente et sur des énoncés de problèmes. Aux items portant sur l'illustration de la fraction, par exemple : « Encercle le 3/4 de 8 petits carrés », les collections sont dessinées selon une disposition rectangulaire, ce qui facilite grandement la tâche. De plus, le nombre d'objets de la collection est toujours un multiple du dénominateur de la fraction impliquée. Pour ce qui est de l'équivalence, l'élève doit compléter le nombre manquant, par exemple, 1/3 = ?/12. Au troisième type de tâches, deux énoncés de problèmes, impliquant l'interprétation opérateur, invitent les élèves à trouver la mesure finale étant donné l'opérateur et la mesure initiale. Comme la première tâche, le nombre d'objets est un multiple du dénominateur de la fraction.

Une des rares études effectuées auprès des élèves en difficulté sur les fractions, dont les tâches présentent un certain niveau de complexité, est celle de Blouin (2002). La spécificité de cette recherche réside dans la complexité des situations d'enseignement et d'évaluation qui sont proposées et ce, mêmes si elles s'adressent à des élèves en grandes difficultés d'apprentissage de 13-14 ans. Les paragraphes suivants décrivent les différents items des instruments d'évaluation utilisés dans cette recherche. Ces tâches réfèrent aux différentes interprétations de la fraction en ne négligeant pas la structure multiplicative de la fraction.

La recherche (Blouin, 2002) a été réalisée auprès de cinq élèves provenant d'une classe spéciale de première année de l'enseignement secondaire. Les situations d'enseignement visant le nombre rationnel dans des situations d'application linéaire ont été conçues à partir de celles proposées par Brousseau (1987, cité dans Blouin 2002).

Notre intérêt porte sur l'instrument d'évaluation composé de deux parties. La première partie comporte des items évaluant la compréhension de différentes interprétations de la fraction, alors que la deuxième consiste à évaluer la maîtrise de savoir-faire institutionnalisés. L'instrument d'évaluation est le même, que ce soit au pré-test ou au post-test.

2.3.5.1 Les interprétations de la fraction

Cette première partie utilisée pour évaluer les interprétations de la fraction se décline en quatre volets : a) le sens partie/tout; b) le sens rapport; c) le sens opérateur; d) le raisonnement proportionnel.

a) Le sens partie/tout

Ce volet contient deux types d'items, les premiers consistent à identifier la fraction représentée, alors que les deuxièmes demandent d'illustrer la fraction désignée. La figure 10 présente les dessins proposés aux élèves pour les deux types d'items.

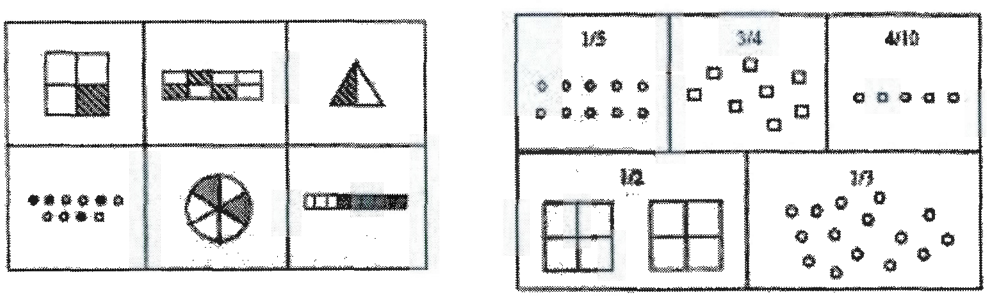


Figure 10 Dessins présentés aux élèves pour les items du sens partie/tout (Blouin, 2002)

b) Le sens rapport

Ce volet comporte deux catégories d'items.

La première catégorie vise la relation entre des éléments constitutifs du même objet. Dans un contexte continu et discret, les élèves doivent trouver les fractions illustrées par chacun des dessins. Ils sont encouragés à retrouver la relation partie/partie entre la partie hachurée et la partie blanche par la consigne suivante : « Que peux-tu dire des relations entre les parties hachurées et les autres? ». La figure 11 présente les dessins proposés aux élèves. Les fractions recherchées dans les figures géométriques sont : 1/3; 3/5; 1/2 et 1/2. Les dessins présentant des collections visent les fractions suivantes : 2/3; 4/1; 3/1 et 2/3.

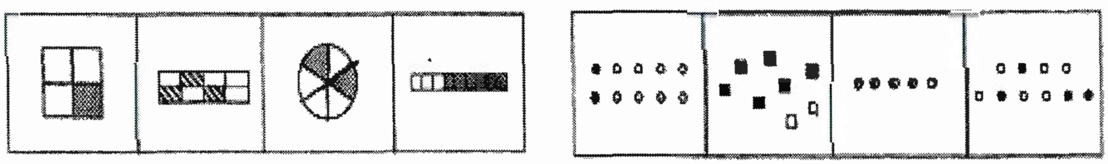


Figure 11 Dessins présentés aux élèves pour la 1^{e} catégorie du sens rapport (Blouin, 2002)

La deuxième catégorie du sens rapport vise la relation entre deux objets de même nature. Trois types d'items sont distingués.

Le premier type d'items consiste à trouver les rapports entre des figures géométriques (rectangles et segments de droite) dessinées sur des feuilles blanches. La figure 12 présente les dessins proposés aux élèves. Les rapports entre les objets A et B sont : ¼; 1/3; 1/4 et 1/9. La première consigne donnée à l'élève est : « Peux-tu dire quelles sont les relations entre les objets A et B? ». Si les élèves n'identifient que des relations additives (exemple : A est 3 de moins que B), la consigne suivante est donnée : «Pourrais-tu parler de ces relations en utilisant le mot «fois»? ». Cette consigne suggère l'utilisation de la relation multiplicative (par exemple, A est 4 fois plus petit que B).

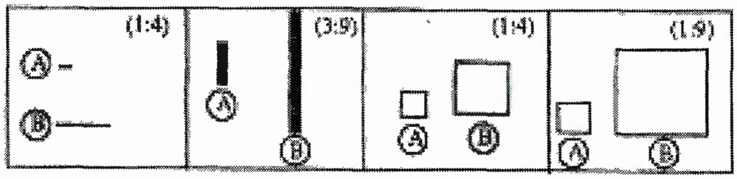


Figure 12 Dessins présentés aux élèves pour la 2^{e} catégorie (1^{e} type d'items) du sens rapport (Blouin, 2002)

Le deuxième type d'items consiste à trouver les rapports entre des figures géométriques (rectangles et segments de droite) dessinées sur des feuilles quadrillées. Le papier quadrillé suggère une unité de mesure. La figure 13 présente les dessins proposés aux élèves. Les rapports entre les objets A et B sont : 1/2; 1/10; 2/3; 4/1; 1/4; 1/6; 16/1.

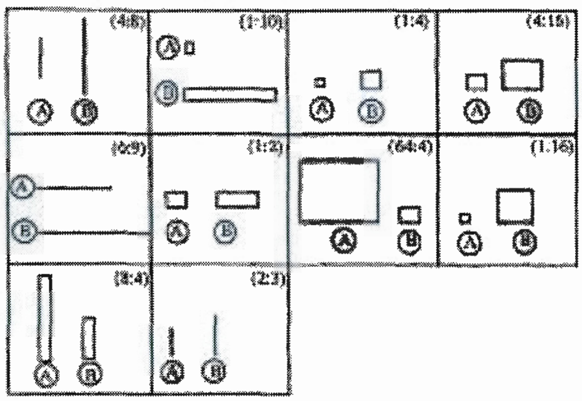


Figure 13 Dessins présentés aux élèves pour la 2^{e} catégorie (2^{e} type d'items) du sens rapport (Blouin, 2002)

Le troisième type d'items du sens rapport reprend, dans un contexte de collections, les mêmes rapports utilisés dans les items de la figure 13. La figure 14 présente les dessins proposés aux élèves. À cette étape, en plus des deux consignes précédentes, l'utilisation des fractions est demandée par la consigne suivante : « Pouvez-vous utiliser les fractions pour parler des relations entre les objets A et B? »

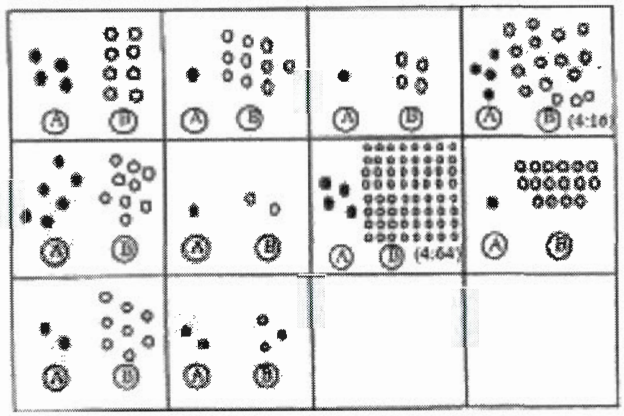


Figure 14 Dessins présentés aux élèves pour la 2e catégorie (3e type d'items) du sens rapport (Blouin, 2002)

c) Le sens opérateur

Ce volet sur l'application des opérateurs fractionnaires comporte deux catégories. La première consiste en une application directe de l'opérateur fractionnaire, alors que la deuxième consiste en une application inverse.

Première catégorie d'items : Application directe d'un opérateur fractionnaire

Dans la première catégorie, cinq problèmes sont proposés aux élèves. La mesure initiale est connue, l'élève doit trouver la mesure finale. Les fractions opérateurs considérés dans ces problèmes sont : 1/2; 2/3; 3/4; 3/2 et 8/10.

> Problème 1 : Dans une école secondaire de la rive sud, les 70 élèves de secondaire 1 vont à la piscine toutes les semaines. À la fin de l'année scolaire, ½ de ces élèves savent nager. Combien d'élèves savent nager?
>
> Problème 2 : Pour faire de la confiture de framboises, le poids de sucre doit être les 2/3 du poids des framboises. Pour faire ma confiture, j'ai en ma possession 6 kg de framboises. Combien de kg de sucre dois-je ajouter aux fruits?

Problème 3 : Une bande de papier (A) mesure 60 cm. Quelle est la longueur d'une seconde bande de papier (B) si la longueur de celle-ci est ¾ de la bande A?

Problème 4 : Je désire bâtir pour mon neveu un voilier en carton dont la taille est 3/2 de celle d'un premier voilier que j'ai déjà fait. Je sais que le mât de ce premier voilier mesure 66 cm. Quelle devrait être la longueur du mât du voilier que je veux fabriquer pour mon neveu?

Problème 5 : Un petit centre commercial dispose de 120 places de stationnement pour les clients. Dans ce stationnement, 8/10 des places habituellement disponibles sont actuellement occupées. Combien de véhicules sont alors stationnés et combien reste-t-il de places disponibles?

Deuxième catégorie : Application inverse d'un opérateur fractionnaire

Dans la seconde catégorie d'items sur le sens opérateur, la mesure finale est connue, l'élève doit trouver la mesure initiale, il doit donc appliquer un opérateur inverse. Trois problèmes sont exposés aux élèves. Les fractions sont de type 1/n ou de type m/n (m >1 et m/n< 1)

Problème 1: Dans une école secondaire de la rive sud, 12 élèves de secondaire 1 se sont inscrits à des cours de soccer. Ce nombre représente ¼ du nombre d'élèves de cette classe. Combien d'élèves y-t-il dans cette classe?

Problème 2: La bande B est formée de 7 carrés identiques, la longueur de cette bande est 2/5 de celle de la bande A. Combien de carrés possède la bande A?

Problème 3 : La bande B est formée de 8 carrés et demi de mêmes dimensions; la longueur de cette bande est de 1/8 de la bande A. Combien de carrés possède la bande A?

d) Le raisonnement proportionnel

Deux catégories d'items portent sur le raisonnement proportionnel

Dans la première catégorie, il y a deux énoncés de problèmes dont les rapports scalaires et fonction sont exprimés par des nombres entiers. Les mesures sont également des nombres entiers au premier problème et sont fractionnaires au deuxième problème.

> Problème 1 : Dans la cuisine d'une école, un cuisinier utilise 2kg de farine pour faire 4 douzaines de beignes. Combien de farine utilisera-t-il pour faire 28 douzaines de beignes?
>
> Problème 2 : La marchand Louis vend ses pommes quatre dollars et demi (4 ½) pour 9kg. Le marchand Pierre, lui, demande 2 dollars et quart (2 ¼) pour 4kg et demi (4 ½) de pommes. Chez quel marchand achèterais-tu des pommes? Justifie ta solution.

Dans la seconde catégorie, on retrouve cinq énoncés de problèmes dans lesquels les mesures sont de diverses natures : nombres entiers, fractions, nombres décimaux. Dans le premier énoncé, le rapport fonction est fractionnaire. Dans le second, les rapports scalaires et fonctions sont fractionnaires.

> Problème 1 : Un commis de magasin vend 2 mouchoirs pour 5$. Au cours d'une journée d'ouverture, ce commis a vendu pour 35$ de mouchoirs. Combien de mouchoirs a-t-il vendus?
>
> Problème 2 : Lors d'une partie de billes, Paul a perdu 10 des 25 billes qu'il avait et Jean a perdu 8 des billes qu'il possédait. Selon vous, qui est le plus perdant dans cette partie, en considérant le nombre de billes perdues par rapport au nombre de billes que chacun possédait? Justifiez votre solution.

Les troisième et quatrième énoncés de problèmes permettent une évaluation plus générale du raisonnement proportionnel par rapport aux deux précédents. Le troisième énoncé est une complétion de recettes, le quatrième est une reproduction d'une figure.

> Problème 3 : Pour faire du jus de fruits, on utilise des pamplemousses, des oranges, des kiwis et des ananas. À la première ligne du tableau suivant, les quantités de fruits données permettent de faire une recette de jus pour 4 personnes. Dans les lignes suivantes, vous devez trouver les quantités absentes, en n'oubliant pas que vous devez suivre la recette initiale.

pample-mousse	orange	kiwi	ananas	personne	recette
2	3	1	1/2	4	1
?	?	?	?	8	?
?	?	?	?	2	?
3	41/2	11/2	3/4	?	?
?	?	?	?	?	31/2

Problème 4 : Dans le tableau suivant, on indique les mesures de quelques parties du bateau qui est dessiné. À partir de ce modèle, divers bateaux ont été dessinés; de ces bateaux, vous ne connaissez que la mesure d'une partie. Vous devez trouver les mesures indiquées par un « ? »

	B-1	B-2	B-3	B-4	B-5	B-6
a)	29,2	—	—	?	43,8	—
b)	14	?	?	?	?	?
c)	17,6	—	4,4	—	—	—
d)	23,2	—	—	?	—	46,4
e)	7	1,4	—	—	—	?
f)	10	?	?	—	?	—

2.3.5.2 Les savoir-faire institutionnalisés

Cette deuxième partie de l'instrument utilisé vise à évaluer la maîtrise des savoir-faire institutionnalisés ou, autrement dit, des techniques usuelles dans le traitement des tâches classiques sur les fractions.

a) Opérer sur les fractions

Le premier item commande d'opérer sur des fractions. Onze calculs sont proposés aux élèves. 1) 1/2 + 1/4 ; 2) 5/8 + 2/8; 3) 2/3 + 1/4; 4) 5/6 – 2/6; 5) 1 – 7/8; 6) 3/4 – 2/8; 7) 25/100 – 1/100; 8) 3 x 1/2; 9) 1/2 x 50; 10) 2/6 x 5/10 et 11) 16 x 1/4.

b) Trouver des fractions équivalentes

Les élèves sont invités à trouver le plus de fractions équivalentes aux fractions suivantes : ½; 3/2 ; ¼ ; 2/3 ; 5/10 ; 15/20; 2/8; 6/4; 2/6.

c) Sérier des fractions

Les élèves sont invités à ordonner selon un ordre croissant, les fractions suivantes : 2/2; 2/4 ; 3/8; 3/4 ; 1/3.

2.3.6 Conclusion sur les instruments d'évaluation

Au terme de cette section sur les instruments d'évaluation des connaissances sur la fraction, nous pouvons conclure que les tâches sélectionnées, dans les différentes études recensées, répondent aux objectifs de recherche poursuivis. Cependant, trois critères dans la construction des instruments se dégagent. Le premier est à l'effet que les tâches proposées aux élèves couvrent, dans la plupart des cas, les cinq interprétations de la fraction et la notion de fractions équivalentes. Le deuxième critère est à l'effet que les tâches sont pensées dans la perspective d'évaluer la maitrise de la structure multiplicative de la fraction et ce, dans différents contextes.

Un troisième critère est relatif aux choix des nombres. Pour l'évaluation des stratégies, et des connaissances qu'elles sous-tendent, il faut varier non seulement les types de tâches mais également, les valeurs des nombres impliqués. Les stratégies varient selon, par exemple, que les fractions impliquées soient de type 1/n, m/n (m<n et m>n) ou encore lorsque n est pair ou impair ou lorsque n et m ont ou non un diviseur en commun.

Nous pouvons également conclure qu'il importe que les tâches soient d'une certaine complexité et ce, même si elles sont présentées à des élèves en difficulté. Les tâches trop simples, celles par exemple qui présentent des représentations imagées donnant accès à des stratégies qui ne font pas appel à la structure multiplicative de la fraction, ne permettent pas une investigation rigoureuse des connaissances des élèves sur la fraction. À ce propos, rappelons que Kieren (1992, 1993, 1995) ne fait pas nécessairement référence à l'interprétation partie/tout comme contexte propice à la fraction. La réussite à des tâches de type partie/tout n'est pas, dans son modèle, garante de l'usage de la fraction en tant que structure multiplicative. Un instrument d'évaluation des connaissances sur la fraction ne devrait donc pas faire une place importante à cette interprétation.

2.4 Objectifs de recherche

Au terme de la problématique, a été énoncé un objectif général énoncé comme suit :

> L'objectif principal de notre étude est d'évaluer les connaissances d'élèves de classes ordinaires de fin primaire, identifiés à risque ou non, sur la notion de fraction.

Au terme du cadre théorique, nous pouvons formuler deux objectifs spécifiques de la recherche. Le premier objectif permet de préciser ce sur quoi doit porter l'évaluation des connaissances sur la notion de fraction. En effet, le cadre théorique a permis de préciser les différentes connaissances qui participent à la construction de la notion de fraction; ces différentes connaissances faisant appel à des interprétations diverses de la fraction.

Le second objectif spécifique porte sur les catégories d'élèves qui composent le corps des élèves d'une classe. En effet, l'institution scolaire (les commissions scolaires, les écoles et les classes) reconnaît que les classes ordinaires regroupent des élèves identifiés «à risque» et des élèves dits «ordinaires». Elle crée ainsi deux catégories d'élèves au sein du secteur régulier. Étant donné que les élèves identifiés à risque ou non sont tous des élèves appartenant au secteur régulier, mais également aux mêmes classes, nous pouvons penser que les profils de connaissances de ces deux catégories d'élèves ne diffèrent pas. On peut cependant penser que ces catégories reposent sur une différence de profils de connaissances. Ainsi, dans la poursuite de l'objectif général, il paraît pertinent de comparer les performances des élèves identifiés à risque à celles des autres élèves.

En effet, les objectifs spécifiques poursuivis sont :

1) Spécifier les connaissances d'élèves du 3^{e} cycle du primaire sur les différentes interprétations de la fraction ainsi que sur l'ordre et l'équivalence des fractions.

2) Comparer les performances des élèves jugés non à risque à celles des élèves identifiés à risque, de 3^{e} cycle du primaire à des tâches portant sur les différentes interprétations de la fraction, l'ordre et l'équivalence des fractions.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Considérant le peu de données actuelles sur les connaissances des élèves du troisième cycle du primaire sur les fractions ainsi que les objectifs poursuivis, notre recherche s'insère dans la catégorie des recherches exploratoires.

Dans ce chapitre, sont déclinés les différents éléments constituant la méthodologie de la recherche. Nous décrivons d'abord les sujets visés par l'étude. Ensuite, l'instrument d'évaluation est présenté de manière détaillée par une analyse a priori de chacune des tâches. Le mode de passation de l'instrument est ensuite précisé. Le devis mixte, alliant donc des analyses quantitative et qualitative prévu, est exposé. Le chapitre se termine sur des considérations éthiques de la recherche.

3.1 Sujets

L'échantillon se compose de 123 élèves de 3^{e} cycle du primaire. Les élèves proviennent de 9 classes réparties dans 5 écoles. Ces classes sont sollicitées par le biais des conseillers pédagogiques en mathématiques, provenant des régions de Laval, de Lanaudière et des Laurentides.

Sont considérés à risque, les élèves qui sont identifiés comme tels par leur milieu scolaire. Les titulaires des classes marquent d'un astérisque les copies de ces élèves.

L'échantillon est ainsi formé de 27 élèves à risque et 96 élèves non identifiés à risque. La collecte des données s'est déroulée en février 2014.

3.2 Instrument d'évaluation

L'instrument d'évaluation, présenté à l'annexe B, est un questionnaire construit dans le cadre d'un projet de recherche sur les fractions et préparé par Giroux, Barrera, Purdy et Barallobres (2013). Les différents items de l'épreuve sont conçus dans la perspective de couvrir différentes interprétations de la fraction et ce, sans que l'interprétation partie/tout de la fraction soit surinvestie. Ainsi, l'épreuve vise à solliciter, dans le plus de tâches possible, un raisonnement multiplicatif. Les relations multiplicatives sont impliquées dans le traitement des situations qui introduisent les fractions selon diverses interprétations. Les onze questions de cet instrument sont regroupées en 7 catégories : 1) La fraction comme partie d'un tout : identification d'une fraction d'un tout donné; 2) La fraction comme partie d'un tout : construction d'un tout étant donné une fraction; 3) La fraction comme quotient de type partition ou groupement; 4) La fraction comme rapport; 5) La fraction comme mesure; 6) La fraction comme opérateur et 7) La comparaison et l'équivalence des fractions. Chacune des catégories est déclinée en spécifiant les tâches qui s'y rapportent. Ainsi, la description de chaque item précise le numéro de la question auquel il renvoie dans le questionnaire, la nature de la tâche, les stratégies utiles à sa résolution ainsi que les interprétations de la fraction que ces stratégies peuvent solliciter. L'ordre de la présentation de chacune des questions de l'épreuve dans ce qui suit ne respecte donc pas celui du questionnaire.

1. La fraction comme partie d'un tout: identification d'une fraction d'un tout donné.

L'interprétation partie/tout (relation directe) de la fraction est évaluée par les questions 2 et 11. Il s'agit, dans ces deux tâches, d'illustrer une fraction soit sur des touts continus (question 11) soit sur des touts collections (question 2). Ainsi, la question 11 sollicite des schèmes de partition de type infralogique alors que la question 2 sollicite des schèmes de partition de type logique. Les deux schèmes peuvent également s'articuler selon la stratégie de partition mise en œuvre.

1.1 Représenter a/b d'un tout collection

Cette question regroupe deux items (2a et 2b) de même facture dont la consigne est de type : «noircis a/b de n jetons». Dans les deux items, le nombre d'éléments *n* est différent du nombre à la position du dénominateur *(b),* les jetons représentant les éléments de la collection sont dessinés de manière aléatoire sur la feuille.

Item 2a : 2/5 de 15 (dans a/b de n, b est diviseur de n et a > 1)

Dans ce qui suit, chacune des stratégies menant à la solution est décrite ainsi que les connaissances qu'elles engagent.

a) Stratégie de type double comptage

La stratégie la plus élémentaire est celle du double comptage (Blouin, 2002) du fait qu'elle ne fait appel qu'à deux opérations de dénombrement. Elle consiste à noircir 2 jetons à chaque fois qu'il y a un groupe de 5 jetons. Cette stratégie ne nécessite pas une anticipation du nombre de sous-collections. En effet, l'élève peut simplement dénombrer 5 jetons, en colorier 2 et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de l'ensemble des 15 jetons.

b) Stratégie de type opérateur

Une autre stratégie consiste à former 5 sous-collections de 3 éléments et à retenir 2 sous-collections, c'est à dire, 6 jetons. Puisque les jetons sont dispersés, un travail plus important est dévolu à l'élève pour identifier la valeur d'une sous-collection. Ainsi, pour mettre en œuvre une telle stratégie, l'élève doit identifier par dénombrement le nombre de jetons (15) et faire autant de sous-collections que l'indique le dénominateur de la fraction (5) : 5 sous-collections de 3 et compléter en retenant 2 de ces deux sous-collections, soit 2 x 3 éléments : 6 éléments.

c) Stratégie de type numérique

Une dernière stratégie consiste à procéder strictement par calcul. Il s'agit en quelque sorte de passer de la fraction initiale (2/5) à une fraction équivalente dont le dénominateur correspond à la valeur de la collection totale (15) : 2/5 = ?/15. Le numérateur de la fraction équivalente correspond au nombre d'éléments recherchés. Différents procédés peuvent être utilisés. Un premier procédé, impliquant la fraction en tant que rapport, serait de multiplier le numérateur par 3 sous une forme fractionnaire permettant de relier multiplicativement les deux dénominateurs: $\frac{2\times3}{5\times3}=$ 6/15. Un deuxième procédé, impliquant la fraction en tant qu'opérateur, serait de chercher les 2/5 de 15 : 2/5 x 15 = 30/5 = 6.

Item 2b : 4/10 de 5 (dans a/b de n, b est multiple de n, a/b est une fraction réductible)

Dans cette tâche, les valeurs numériques en jeu ne permettent pas l'application de la stratégie de double comptage puisque le dénominateur de la fraction (10) est un nombre plus grand que la collection donnée (5). Une partition sur les éléments de la collection est nécessaire pour effectuer la tâche.

a) Stratégie de double comptage

Pour mettre en place une stratégie de double comptage, il faut d'abord que chacun des éléments soit partitionné en deux parties égales de manière à obtenir 10 parts égales.

Pour cela, il faut pouvoir être en mesure d'utiliser la relation multiplicative permettant de passer de 5 à 10 (ce qui dans l'action correspond à doubler chacun des éléments en les «divisant» en 2). Une fois cette partition réalisée (mentalement ou concrètement), on retient par dénombrement, 4 parts sur les 10. Cette stratégie peut s'accompagner d'une articulation entre les schèmes de partition logique et infralogique dans la mesure où les 4 nouvelles parts (4 x ½ éléments) sont associées à deux éléments de l'ensemble initial.

b) Stratégie de type numérique

Une dernière stratégie consiste à procéder strictement par calcul. Il faut alors identifier une fraction équivalente dont le dénominateur correspond au nombre d'éléments de la collection (5). La connaissance des relations multiplicatives qui relient 5 et 10 (2 x 5 = 10) peut déclencher ce type de stratégie. Si 10 (de 4/10) est le double de 5 (n), il suffit de diviser 4 par 2 pour conserver la même relation entre la fraction et le nombre d'éléments de la collection: 4/10 = 2/5. Pour compléter, il suffit de retenir 2 des 5 jetons de la collection.

D'autres procédés relevant de techniques peuvent aussi être utilisés. Par exemple, on peut trouver la fraction équivalente en divisant chacun des termes de la fraction 4/10 par 2 : $\frac{4 \div 2}{10 \div 2} = 2/5$.

Un autre procédé serait de chercher les 4/10 de 5 : 4/10 x 5 = 20/10 = 2.

1.2 Représenter a/b dans un tout continu

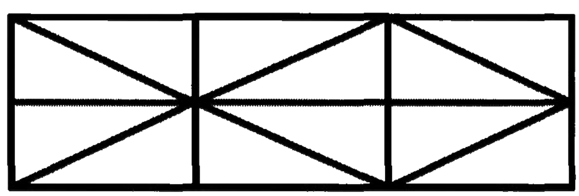
La représentation de a/b dans un tout continu est sollicitée par la question 11 de l'épreuve. Cette question regroupe 3 items (a, b et c) présentée par la consigne suivante : «noircis 2/3 de chaque figure». La figure en (a) est un cercle non partitionné, en (b) un rectangle partitionné également et, en (c), un rectangle partitionné en parties inégales. La fraction 2/3 étant une fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur est un nombre impair oblige à une partition autre que la bipartition, autrement dit, le partage par deux itératif.

Item 11a : Un tout de forme circulaire

La figure présentée est un cercle non-subdivisé. La partition d'un cercle en trois parties égales exige le renoncement à considérer le diamètre pour opter plutôt à un découpage utilisant le rayon et le centre du cercle. Une considération des lignes verticales ou horizontales renvoie à une acquisition partielle des caractéristiques de la partition, soit le partage égal (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991). Une partition, s'appuyant sur le rayon du cercle permet de représenter les tiers en traçant 3 «coupures». L'égalité des parts obtenues est une caractéristique essentielle de cet item.

Item 11b : Un tout de forme rectangulaire

Le tout proposé dans cet item est un rectangle subdivisé en 12 parties égales. Par les subdivisions effectuées, cet item peut donner lieu à plusieurs stratégies résultant d'une interaction entre les schèmes de partition logique (discret) et infralogique (continu).



a) Stratégie impliquant les schèmes de partition infralogique

La perception de trois parties égales du rectangle est possible si l'on considère uniquement les deux traits verticaux à l'intérieur du rectangle. Les autres traits ou «coupures» peuvent cependant jouer un rôle distracteur.

b) Stratégie impliquant les schèmes de partition logique et infralogique

La considération de tous les traits à l'intérieur du rectangle et du nombre total de parties (12) peut donner lieu à des stratégies du double comptage ou d'opérateur.

Double comptage : Pour chaque 3 parties, retenir 2 parties égales, jusqu'à épuisement du tout. L'anticipation ou le dénombrement de l'ensemble des parties n'est pas obligatoire.

Calcul numérique : Une stratégie numérique consiste à identifier une fraction équivalente à 2/3 dont le dénominateur correspond à 12 et, ensuite, à retenir 8 des 12 parts sur le rectangle. Différents procédés peuvent être mis en œuvre pour trouver une fraction équivalente. Un autre procédé, relevant du calcul numérique, consiste à identifier les 2/3 de 12 $(2/3 \times 12 = 24/3 = 8)$.

Item 11c : Un tout de forme rectangulaire pré-partitionné en des parties non égales

La figure présentée dans cet item est caractérisée par l'inégalité des parties. Cependant, on peut identifier 3 parties égales, en faisant abstraction de deux traits «distracteurs».

a) Stratégie impliquant les schèmes de partition infralogique

La première stratégie dépend de la perception des trois parts égales et de l'abstraction des traits distracteurs. Il faut ensuite retenir 2 de ces parts pour colorier les 2/3 de la figure.

b) Stratégie impliquant les schèmes de partition logique et infralogique

Une autre stratégie serait également possible si l'on considère la plus petite partie du rectangle. Ainsi, par souci d'égalité des parts, il est possible d'ajouter des traits verticaux partageant ainsi le rectangle en 12 parts égales. L'obtention de 12 parts égales serait à traiter pour retracer les deux tiers du rectangle en procédant par des stratégies de schèmes logiques (énumérées à l'item 11b). Ceci implique également un traitement efficace de la bonne unité de référence.

2. La fraction comme partie d'un tout : construction d'un tout étant donné une fraction

La deuxième catégorie est composée de 5 items dans lesquels il faut construire un tout étant donné une fraction de ce tout. Le contexte est continu à la question 6 alors qu'il est discret à la question 10. L'ensemble des items qui composent cette catégorie implique la propriété de l'inverse multiplicatif, où $a/b \times b/a = 1$.

2.1 Construire le tout étant donné a/b (contexte continu)

La construction du tout dans un contexte continu est évaluée à partir de la question 6. Cette question implique une fraction unitaire (trouver le tout à partir de 1/5). Le contexte présente un rectangle comme un morceau de gâteau représentant 1/5 du gâteau. On demande à l'élève de choisir, parmi 3 illustrations, celle qui correspond au tout de cette fraction, au tout du gâteau.

La stratégie attendue nécessite de répliquer le 1/5 donné, 5 fois pour reconstituer le tout : $5 \times 1/5 = 5/5 = 1$. L'itération de la fraction unitaire invite également l'interprétation mesure en pensant à la somme : $1/5+1/5+1/5+1/5+1/5$.

Les choix de réponse se déclinent ainsi. La figure « a » illustre le 1/5 de la partie donnée représentant elle-même 1/5 du gâteau. Cette réponse pourra être choisie si l'élève interprète de manière directe plutôt que de manière indirecte la relation (illustrer 1/5 plutôt que le tout). La figure « b » est une réplique de la partie 1/5 donnée, subdivisée en 5 parties égales dont l'une est noircie. Cette figure représente également la relation inverse (identifier 1/5) mais de manière encore plus explicite que la figure « a ». La figure « c » représentant 5 fois le (1/5) donné, soit le tout recherché.

2.2 Construire le tout étant donné a/b (contexte discret)

Cette catégorie regroupe des items de construction d'un tout en contexte discret. À la question 10, il y a 4 items. Il est, pour chaque item, demandé à l'élève de trouver le nombre d'objets qui correspond à la collection totale étant donné une fraction de cette collection. Ils sont tous de même facture : « Ceci représente le a/b d'un sac de pommes. Combien de pommes y a-t-il dans le sac? ». Les items font varier le type de fraction, unitaire ou non, et sa relation avec le nombre d'éléments (n) qu'elle représente (dans a/b, a est soit égal à n, soit multiple de n, soit diviseur de n, soit ni facteur, ni diviseur de n).

Un espace est donc réservé pour écrire le nombre représentant le cardinal de la collection qui représente le tout. Il n'est pas demandé à l'élève de dessiner le tout.

La résolution de ces items fait appel à l'interprétation opérateur de la fraction ou encore partie/tout. Il peut également faire appel au sens mesure de la fraction.

Item 10a : Trouver le tout étant donné 4 éléments correspondant à 4/6 du tout

Étant donné que le numérateur (4) de la fraction donnée (4/6) correspond au nombre d'éléments de la sous-collection donnée, le nombre d'éléments de la collection totale qui est recherchée, correspond au dénominateur.

On peut simplement procéder par double comptage et dénombrer le nombre d'éléments donné (4) et dénombrer à nouveau en ajoutant autant d'éléments que nécessaire pour obtenir le nombre d'éléments qui correspond au dénominateur. Cette stratégie peut impliquer, de la part de l'élève, la reconnaissance que chaque élément correspond à la fraction 1/6 et qu'il faut donc 6 fois 1/6, soit six éléments pour construire le tout.

Item 10b : Trouver le tout étant donné 2 éléments correspondant à 1/5 du tout

Pour cet item, il faut considérer la réplique de 1/5, 5 fois pour construire le tout et donc la réplique de 2 éléments, comme sous-collection du tout, 5 fois, pour obtenir 10 éléments.

Une stratégie faisant appel au calcul numérique est aussi possible. Il faut alors identifier une fraction équivalente à 1/5 dont le numérateur correspond au nombre d'éléments (2) de la sous-collection donnée. Si 1/5 = 2/10, le tout recherché est composé de 10 éléments.

Item 10c : Trouver le tout étant donné 3 éléments correspondant à 2/4 du tout

À cet item, le passage par la recherche de la fraction irréductible équivalente à 2/4 est préalable. Une fois que l'équivalence entre 2/4 et 1/2 est constatée, il faut 2 x 1/2 pour construire le tout. Il faut donc doubler les 3 éléments pour construire le tout et obtenir 6 éléments.

Par ailleurs, un calcul numérique ne peut être engagé pour identifier la fraction équivalente à 2/4 et dont le numérateur correspond à 3 sans constater que 2/4 = 1/2 et ensuite 1/2 = 3/6. Le nombre d'éléments de la collection totale correspond donc au dénominateur, soit 6.

Item 10d : Trouver le tout étant donné 6 éléments correspondant à 2/3 du tout

Deux opérations sont nécessaires pour construire le tout à partir de 2/3. Il faut d'abord revenir à la fraction unitaire en divisant 2/3 par 2 ($2/3 \div 2 = 1/3$) et répliquer la fraction unitaire 1/3, 3 fois. Considérant que les 2/3 sont associés à 6 éléments, il faut donc partager la sous-collection de 6 éléments en 2 sous-sous-collections pour identifier que le 1/3 de la collection totale correspond à 3 éléments. Ensuite, il faut répliquer 3 éléments, 3 fois, pour obtenir 9 éléments correspondant à la collection totale.

Des procédés numériques peuvent aussi être engagés par la production d'une fraction équivalente à 2/3 et dont le numérateur correspond à 6, soit 6/9. Le dénominateur de la fraction équivalente est le nombre d'éléments de la collection totale.

3. La fraction comme quotient (partage et groupement)

Les questions 3, 8 et 9 sont regroupées sous l'interprétation quotient. Les questions 3 et 8 impliquent le sens partage de la division tandis que les deux premiers items de la question 9 sollicitent le sens groupement de la division.

3.1 L'interprétation quotient de type partage

3.1.1 Sens partage sous une forme habituelle

La tâche de la question 3 consiste à résoudre l'énoncé suivant : « Il y a 5 barres de chocolat à partager également entre 3 amis. Quelle quantité de chocolat recevra chaque ami ?»

La solution à cet énoncé correspond à la division de 5 par 3 : 5/3. Avant de préciser les stratégies possibles pour résoudre ce problème, il importe de souligner que les nombres (5) et (3) n'ont pas de diviseur commun autre que 1, ce qui limite les schèmes de partitions possibles.

a) Stratégie de distribution progressive (Empson[8] *et al.*, 2005)

On peut d'abord distribuer 1 élément à chacun des individus. Il reste ainsi 2 éléments à partager également entre 3 personnes. Les élèves procèdent souvent par des partitions successives par 2 de manière à obtenir un nombre de parts à partager qui est multiple du nombre de personnes. Ce qui est ici, impossible[9]. Cette stratégie n'aboutissant pas, il faut partager également les 2 barres restantes en 3 parts égales chacune. Les 6 parts de 1/3 produites sont distribuées également entre les 3 personnes qui obtiennent ainsi : 1 + 2/3, soit 5/3 d'une tablette.

b) Stratégie de partition avec coordination sur plusieurs unités (Empson et *al.*, 2005)

Il s'agit ici de partager chacune des 5 barres selon le nombre de personnes impliquées, soit 3, ce qui produit 15 parts de 1/3 d'une tablette. Chaque personne reçoit ainsi 5 fois 1/3 de 1, soit 5/3. Ce partage peut donner lieu à une coordination additive du résultat 1/3+1/3+1/3+1/3+1/3 ou multiplicative de cette forme : 5 x 1/3 = 5/3. Soulignons qu'une erreur fréquente dans ce type de tâche est de conclure que chaque élève aura, 5 parts de 1/3 sur un tout qui comprend 15 parts de 1/3, et donc 5/15. L'erreur vient d'un glissement dans la référence au tout. Cette solution revient à dire que chaque personne aura 1/3 (puisque 5/15 = 1/3) et ce, peu importe la quantité de chocolat à laquelle réfère ce 1/3. On peut réfuter cette réponse en considérant que 1/3 est la fraction qui opère sur la quantité initiale 5 pour produire la quantité

---

[8] Nous référons aux stratégies décrites dans l'article de Empson, Junk, Dominguez et Turner (2005).

[9] Il faudrait trouver une puissance de 2 qui soit multiple de 3.

recherchée : 1/3 x 5 = 5/3. En effet, chaque personne recevra 1/3 de 5 barres de chocolat et donc 5/3 d'une tablette de chocolat.

Plusieurs connaissances sont donc en jeu selon la stratégie avancée par l'élève : la partition égale, l'utilisation de la bonne unité de référence (1/3 ou 1 tablette) et la composition additive des parts (1+1/3+1/3).

c) Stratégie numérique

La stratégie numérique consiste à appliquer directement la division de 5 par 3 et obtenir le quotient 5/3.

3.1.2 Sens partage sous une forme non habituelle

Les situations de division partage réfèrent habituellement à un contexte où un certain nombre d'objets est partagé entre un certain nombre d'individus. Dans la présente tâche, le contexte réfère à la distribution d'une quantité continue selon un nombre différent de contenants de même taille. L'énoncé se lit ainsi :

> « Il y a 3 pots remplis de jus dans le réfrigérateur. Je les transvide dans 4 pots vides, de même grandeur, pour que chaque pot ait la même quantité de jus. Quelle fraction de chaque pot est remplie de jus ? »

L'élève est invité à effectuer le dessin qui lui permet de solutionner le problème. Ensuite, à travers la consigne suivante: « Indique par une marque sur le pot ci-dessous la quantité de jus qu'il y aura. », la représentation de la fraction est demandée. Sachant qu'il est parfois difficile d'interpréter le résultat de la partition par une référence correcte au tout de référence (un pot), la représentation illustrée d'un seul pot incite à un meilleur contrôle de cette relation.

a) Bipartition successive

Selon une stratégie de partition successive en 2, chacun des 3 pots de départ est partagé également en 2 pour obtenir 6 parts de ½ pot. On distribue 4 de ces 6 demi-pots de jus entre les 4 pots. Il reste ainsi 2 parts de ½ que l'on peut partager encore en 2 pour obtenir 4 parts de 1/4 de pot. Chacun des 4 pots «d'arrivée» est donc rempli par ½ pot de jus + ¼ de pot de jus, soit aux ¾ de sa capacité.

b) Partition de chaque unité considérée comme un tout continu

Selon une stratégie de partition de touts continus, chacun des 3 pots est partagé en 4 parts égales pour obtenir 12 parts de ¼ de pot. Ces 12 parts sont partagées entre les 4 pots. Chaque pot est donc rempli de 3 x ¼ de pot, soit aux ¾ de sa capacité.

c) Coordination multiplicative sur une unité (Empson *et al.*, 2005)

Il serait également possible de procéder en s'appuyant sur une relation multiplicative liant 3 et 4. Considérant que 3 et 4 ont 12 comme multiple commun, chaque pot peut être partagé en 4 parts égales de manière à distribuer également les 12 parts entre les 3 pots vides. Ainsi, chacun des 4 pots «d'arrivée» sera rempli de 3 x ¼ de pot de jus, soit aux ¾ de sa capacité.

d) Stratégie numérique

La stratégie numérique consiste à appliquer directement la division 3 par 4 et obtenir ¾.

3.2 Interprétation quotient de type groupement

Dans cette deuxième sous-catégorie de l'interprétation quotient, on retrouve la question 9 qui s'inscrit dans un contexte d'énoncés de problèmes à résoudre. Les deux premiers items de la question 9 se présentent sous l'interprétation quotient de type groupement.

Item 9a

Le problème 9a implique une relation entre une fraction unitaire et le nombre entier, 1. Il est formulé ainsi : « Chaque jour, je marche 1/6 km. Combien de jours cela me prendra pour marcher 1 km ? » Cet énoncé invite à trouver le nombre de 1/6 km qu'il y a dans 1 km. Le contexte du problème sollicite une interprétation de la division groupement. Le contexte permet une représentation de l'itération de 1/6 km comme unité de mesure qui, répétée un certain nombre de fois, donne 1km. L'inscription dans un contexte temporel peut favoriser le dénombrement de cette itération.

Une première stratégie consiste à représenter, par dessin ou par une écriture additive, 1/6 de km autant de fois que nécessaire pour obtenir 1km.

L'élève peut aussi maitriser la relation de l'inverse multiplicatif lorsque la fraction unitaire et l'entier est 1, et déclarer qu'il y a 6 fois 1/6 km dans 1 km.

Item 9b

Le problème 9b implique une relation entre une fraction unitaire et le nombre entier, 2. L'énoncé se lit ainsi : « On a 2 longues réglisses. On donne ¼ de réglisse à chaque enfant. À combien d'enfants peut-on donner de la réglisse ? »

À travers cet énoncé, l'élève est invité à trouver le nombre de fois qu'il faut répliquer 1/4 pour obtenir 2. La solution à ce problème peut être élaborée par une représentation de ¼ (dessinée, par exemple) et répliquée autant de fois que nécessaire pour obtenir 2 entiers. Le sens mesure serait, dans ce type de stratégie, sollicité puisque ¼ est alors considéré comme l'unité de mesure de référence : ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 2.

Une stratégie numérique, utile mais peu probable chez des élèves du primaire, est de diviser 2 par ¼ pour obtenir 8.

4. La fraction comme rapport

La question 7 comporte 2 items dont la facture est semblable. Quatre quantités en jeu sont illustrées : un nombre de pizzas et un nombre de garçons ainsi qu'un nombre de pizzas et un nombre de filles. L'élève doit identifier : «Qui a la plus grande part de pizza ?». L'élève est ensuite invité à expliquer sa réponse. À l'item 7a, les rapports suivants sont illustrés : 1 pizza pour 3 garçons et 2 pizzas pour 4 filles. La différence entre les termes de chacun des rapports est de 2. À l'item 7b, les rapports suivants sont illustrés: 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles. La différence entre les termes de chacun des rapports est de 1. L'interprétation quotient peut être convoquée pour soutenir la mise en rapport des quantités (nombre de pizzas divisé par le nombre d'enfants).

5. La fraction comme unité de mesure

La question 4 porte sur l'interprétation de la fraction comme unité de mesure. L'élève doit situer la fraction 2/3 sur un segment de droite où sont repérés les entiers 0, 1, 2 et 3. Le choix de ces nombres vise à cerner si l'élève interprète la fraction 2/3 comme inférieure à 1.

6. La fraction comme opérateur

L'item 9c se présente sous forme d'un énoncé de problème qui sollicite l'interprétation opérateur.

L'énoncé se lit ainsi : « Émilie a gagné 12$ en pelletant chez le voisin. Marie a gagné les 2/3 du salaire d'Émilie en pelletant, elle aussi, chez un voisin. Combien Maire a-t-elle gagné ? »

Le rapport entre les deux mesures (l'argent d'Émilie et celui de Marie) représenté par la fraction 2/3 doit être interprété comme un opérateur pour trouver la mesure manquante. L'application directe de l'opérateur fractionnaire 2/3 sur la mesure (12$) permet de trouver la réponse : $2/3 \times 12 = 8$.

7. La comparaison et l'équivalence des fractions

Cette dernière catégorie se déroule dans un contexte strictement numérique. Elle comporte deux questions : la question 1 porte sur la comparaison de deux fractions et la question 5 porte sur l'équivalence des fractions. Les caractéristiques des nombres impliqués sont précisées pour chacune des questions.

7.1 Comparaison des fractions

À la question 1, il y a 9 paires de fractions à comparer. La consigne demande d'encercler la fraction la plus grande dans chacune des paires. Les paires suggérées peuvent être classées ainsi :

- Deux paires de fractions ont le même dénominateur : 1) la première paire de fractions est formée de fractions peu habituelles et qui comportent, aux numérateur et dénominateur, des nombres supérieurs à 100 : 112/105 et 115/105; 2) la deuxième paire est formée de fractions qui comportent, aux numérateur et dénominateur, des nombres inférieurs à 15 : 12/13 et 11/13. Pour chacune des deux paires de fractions, la plus grande des fractions est celle dont le numérateur est le plus grand.

- Deux paires de fractions ont le même numérateur : 1) la première comporte des fractions unitaires, mais relativement peu habituelles : 1/13 et 1/9; 2) la seconde paire comporte des fractions ordinaires et également, peu habituelles : 19/20 et 19/23. Dans ces cas-ci, la plus grande fraction est celle dont le dénominateur est le plus petit.

- Deux paires de fractions dont le dénominateur de l'une est le multiple de l'autre : 1) la première contient deux fractions pouvant se comparer à 4/8 : 1/2, 3/8; 2) la seconde paire comprend une fraction impropre et une fraction inférieure à 1 : 5/4 et 15/16.

- Trois paires de fractions non unitaires et sans relation multiplicative entière entre les dénominateurs : 1) la première est composée de deux fractions impropres dont la différence entre le numérateur et le dénominateur est 1 : 6/5 et 8/7; 2) la seconde paire de fractions est ¾ et 7/9. L'équivalence entre ¾ et 6/8 permet de comparer 7/9 à 6/8 puisque la différence entre les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions est de 2; 3) la troisième paire de fractions est 3/7 et 5/8, la comparaison à 1/2 permet de comparer ces fractions.

7.2 Fractions équivalentes

La question 5 porte sur les fractions équivalentes et comporte 3 items. Pour chacun des items, l'élève doit choisir parmi 4 fractions celle(s) qui est (sont) équivalentes à une fraction donnée.

Item 5.1 : L'équivalence de 2/4 avec 4/6 , 5/10, 1/3 et 4/8

À l'item 5.1, la fraction donnée est 2/4. Deux fractions, parmi les 4 proposées, sont équivalentes. La première est une fraction dont le dénominateur n'a pas de relation multiplicative entière avec 4 : 5/10. La seconde est une fraction dont le dénominateur est un multiple de 4 : 4/8. Pour les deux autres fractions proposées, la différence entre le numérateur et le dénominateur est la même que celle de la fraction donnée : 4/6 et 1/3.

Item 5.2 : L'équivalence de 2/6 avec 3/9, 6/10, 4/12 et 3/7

À l'item 5.2, la fraction donnée est 2/6. Deux fractions, parmi les 4 proposées, sont équivalentes. La première est une fraction dont le dénominateur n'a pas de relation multiplicative entière avec 6 : 3/9. La seconde est une fraction dont le dénominateur est un multiple de 6 : 4/12. Pour les deux autres fractions proposées, la différence entre le numérateur et le dénominateur est la même que celle de la fraction donnée : 3/7 et 6/10

Item 5.3 : L'équivalence de 4/10 avec 6/15, 2/5, 5/11 et 6/12

À l'item 5.2, la fraction donnée est 4/10. Deux fractions, parmi les 4 proposées, sont équivalentes. La première est une fraction dont le dénominateur n'a pas de relation multiplicative entière avec 10 : 6/15. La seconde est une fraction dont le dénominateur est un facteur de 10 : 2/5. Pour les deux autres fractions proposées, la différence entre le numérateur et le dénominateur est la même que celle de la fraction donnée : 5/11 et 6/12.

3.3 Mode de passation

Le questionnaire sur la fraction est distribué par l'enseignant. L'enseignant laisse les élèves lire les questions rédigées le plus simplement possible pour en faciliter la lecture. Cependant, il peut, au besoin, répondre aux questions des élèves qui portent sur la compréhension de la consigne. La durée de passation du questionnaire est évaluée entre 50 et 60 minutes.

3.4 Méthode d'analyse des résultats

L'analyse des données recueillies, dans la présente recherche, est mixte. Après une codification des réponses des élèves dans un fichier Excel, par l'auteure de ce mémoire sous la direction de la responsable scientifique de la recherche[10], des analyses de type quantitatif sont menées à l'aide du logiciel SPSS par un spécialiste dans ce domaine. Pour chaque item des onze questions constituant le test sur les fractions, des analyses descriptives sont conduites afin d'analyser la relation entre la spécificité de chacune des tâches et le rendement des élèves. Aussi, lorsqu'il est possible de dégager les stratégies mises en œuvre par les élèves pour un item, des catégories des stratégies sont constituées. Le rendement, pour la codification et le traitement, a été considéré de manière dichotomique ou, autrement, dit, en termes d'échec et de réussite. Ainsi, chacun des items du test fait l'objet d'un traitement statistique indépendant afin de préciser si les performances se distribuent ou non de façon différente entre les élèves à risque et les élèves non à risque. Selon les types des réponses collectés à chacun des items, un test khi2 ou un test-t est conduit. Les résultats de ces tests permettent de cibler les questions pour lesquelles se dégage une différence significative entre les rendements des élèves à risque et des élèves non à risque. Pour s'assurer de la robustesse des tests statistiques, les conditions d'application sont vérifiées. Le seuil de signification de 0,05, comme de manière courante en sciences humaines, est retenu. Nous ne formulons pas d'hypothèses pour chacune des questions puisque, malgré le recours aux analyses quantitatives, notre recherche est de nature exploratoire.

---

[10] Jacinthe Giroux, directrice du mémoire

Les réponses des élèves sont ensuite étudiées d'un point de vue qualitatif. Sur la base de l'analyse a priori que nous avons effectuée,, nous identifions les principales stratégies mises en œuvre, autant dans les cas de réussite que d'échec à la question. Ce travail de catégorisation des réponses par stratégie permet la formulation d'hypothèses sur les connaissances qui sous-tendent les différentes interprétations de la fraction, d'élèves à risque et d'élèves ordinaires de 3^{e} cycle du primaire. Cette analyse qualitative permet d'approfondir les résultats obtenus par le biais l'analyse quantitative.

3.5 Considérations éthiques

La présente recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche, intitulé *Évaluation et enseignement des fractions auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage* et dirigé par la directrice du mémoire. Il a ainsi reçu l'approbation au plan éthique (no 591032). En effet, le Comité institutionnel d'éthique de la recherche avec des êtres humains de l'UQAM a examiné le protocole de recherche et l'a jugé conforme aux pratiques habituelles et normes établies pour ce type de recherche.

La participation d'un élève tient au consentement libre et éclairé de ses parents (ou tuteurs) accordé dans la suite d'une lettre d'informations précisant les membres de l'équipe de recherche, les buts poursuivis, le type de tâches et les mesures prises pour conserver l'anonymat des participants dans le traitement et la diffusion des données.

CHAPITRE IV

ANALYSES ET RÉSULTATS

Les analyses descriptives présentent d'abord les taux de réussite globale des élèves à chacun des items du questionnaire et, ensuite, spécifient le taux de réussite des élèves jugés à risque et celui des élèves qui ne sont pas jugés à risque. S'appuyant sur l'analyse a priori, réalisée dans le cadre de la méthodologie, une analyse qualitative des résultats obtenus est également menée. Les analyses descriptives et qualitatives alimentent ainsi les résultats de la recherche sur la spécification des connaissances des élèves de 3e cycle primaire sur la fraction. Les analyses statistiques portent sur la comparaison des performances des élèves identifiés à risque ou non. Elles fournissent ainsi des données à traiter pour répondre à la deuxième question de recherche : « Les performances d'élèves de classes ordinaires de 3e cycle primaire, à une épreuve[11] sur les fractions, diffèrent-elles selon que les élèves sont jugés ou non à risque par leurs titulaires ? »

Les résultats issus de ces analyses sont regroupés en fonction des cinq interprétations de la fraction, la comparaison et l'équivalence des fractions. Ainsi, ce chapitre comprend sept grandes sections au sein desquelles sont présentées les performances de l'ensemble des élèves à chacun des items relevant d'une même interprétation et,

---

[11]L'épreuve utilisée est un questionnaire construit dans le cadre d'un projet de recherche sur les fractions et préparé par Giroux, Barrera, Purdy et Barallobres (2013). L'épreuve est présentée à l'annexe B.

dans une perspective de comparaison, les performances des élèves à risque et des élèves qui ne sont pas jugés à risque. Les stratégies des élèves sont également, lorsque les tâches s'y prêtent, dégagées et analysées.

4.1 La fraction comme partie d'un tout : représentation d'une fraction d'un tout donné

Dans cette section, les résultats obtenus aux items portant sur la représentation d'une fraction d'un tout donné sont présentés et analysés. Les résultats relatifs aux items portant sur les touts collections (question 2 de l'épreuve) sont d'abord traités, suivis de ceux relatifs aux items portant sur les touts continus (question 11 de l'épreuve). Le tableau 1 présente les taux de réussite, des élèves jugés à risque, non à risque et de l'ensemble de ces élèves aux items qui portent sur la fraction en tant que partie d'un tout.

Tableau 1 Taux de réussite aux items portant sur la représentation d'une fraction d'un tout donné

Items / Catégories d'élèves	L'item 2a 2/5 de 15 jetons	L'item 2b 4/10 de 5 jetons	L'item 11a 2/3 d'un cercle non partagé	L'item 11b 2/3 d'un rectangle partagé en 12 parties égales	L'item 11c 2/3 d'un rectangle partagé en 5 parties non égales
Élèves à risque	**74%**	**85%**	**44%**	**84%**	**44%**
Élèves non à risque	**86%**	**90%**	**64%**	**87%**	**82%**
L'ensemble des élèves	**84%**	**88%**	**60%**	**86%**	**73%**

L'examen du tableau 1 montre que peu importe la catégorie d'élèves à laquelle on réfère, l'item 2b (4/10 de 5 éléments) est le mieux réussi avec un taux de réussite global de 88%, alors que l'item 11a (partager un cercle pour identifier ses 2/3) est celui qui est le moins bien réussi avec un taux de réussite global de 60 %.

Les résultats portant d'une part, sur les items relatifs à l'interprétation partie d'un tout collection et, d'autre part, sur les items relatifs à l'interprétation partie d'un tout continu sont discutés plus finement dans les sections suivantes.

4.1.1 Représenter a/b d'un tout discret

Les items 2a et 2b portent respectivement sur la représentation des 2/5 de 15 éléments et des 4/10 de 5 éléments.

Le taux de réussite global de l'item 2a est de 84% et celui de l'item 2b est de 88%. Peu de différences de performances entre les deux items sont relevées. Ces taux sont cependant, pour l'item 2a de 74 % chez les élèves à risque et de 86 % chez les autres élèves. À l'item 2b, l'écart entre les deux catégories est moins important puisqu'il est de 85 % chez les élèves jugés à risque et de 90% chez les autres élèves. Toutefois, les analyses statistiques ne révèlent pas de différence significative entre la réussite des élèves jugés à risque et les autres, ni à l'item 2a ($x^2(1) = 2{,}37$; $p = 0{,}12$), ni à l'item 2b ($x^2(1) = 0{,}50$; $p = 0{,}48$).

Ces performances ne rendent cependant pas compte de la diversité des stratégies utilisées pour solutionner ces deux items. Le tableau 1.1 rapporte, pour les items 2a et 2b, les différentes stratégies conduisant à une réussite.

Tableau 1.1 Taux des stratégies de réussite aux items 2a et 2b selon les catégories d'élèves

Catégories d'élèves	Stratégies menant à la réussite à l'item 2a 2/5 de 15				Stratégies menant à la réussite à l'item 2b 4/10 de 5		
	Stratégie double Comptage	***Stratégie Opérateur***	***Stratégie Numérique***	***Totaux***	***Stratégie Partition et double comptage***	***Stratégie Numérique***	***Totaux***
Élèves à risque	**70 %**	**5 %**	**25 %**	**100 %**	**14 %**	**86 %**	**100 %**
Élèves non à risque	**42 %**	**2 %**	**56 %**	**100 %**	**2 %**	**98 %**	**100 %**
L'ensemble des élèves	**48 %**	**3 %**	**49 %**	**100 %**	**5 %**	**95 %**	**100 %**

Dans ce qui suit, les réussites sont distinguées selon les stratégies qui les sous-tendent. À l'item 2a, les réussites, pour l'ensemble des élèves, impliquent des stratégies de type numérique dans 49 % des cas. La stratégie de double comptage a un profil comparable avec une fréquence de 48 %. Par ailleurs, la stratégie opérateur n'est mise en œuvre que par 3% des élèves qui réussissent.

Cette répartition des stratégies n'est cependant pas la même selon les catégories d'élèves. Chez les élèves à risque, les réussites s'appuient sur la stratégie de double comptage dans 70 % des cas et sur la stratégie numérique que dans 25 % des cas. La stratégie opérateur est utilisée dans seulement 5 % des cas de réussite. Chez les élèves non à risque, les réussites relèvent principalement de la stratégie numérique avec un taux de 56 % suivie de la stratégie de double comptage, avec un taux de 42 %. La réussite à la stratégie opérateur n'atteint qu'un taux de 2 % chez les élèves non à risque. Ainsi, les stratégies sur lesquelles sont fondées les réussites distinguent les deux groupes d'élèves. Chez les élèves à risque, la réussite est assurée principalement par le recours à une stratégie de double comptage, la stratégie numérique étant faiblement sollicitée. Chez les élèves non à risque, la réussite est le plus souvent assurée par une stratégie numérique, bien que l'écart entre le recours à une stratégie numérique et à une stratégie de double comptage soit moins important que chez les élèves à risque. Il n'y a cependant pas de différence quant au recours à la stratégie de type opérateur, faiblement utilisée dans les deux groupes d'élèves.

Rappelons que la stratégie du double comptage, plus élémentaire que la stratégie numérique, est suffisante bien que plus longue à réaliser, pour réussir la tâche. Elle n'engage qu'une interprétation de type partie/tout de la fraction et ne fait donc pas appel aux connaissances sur la fraction équivalente. Sur les copies des élèves, l'identification d'une fraction équivalente, dont le dénominateur correspond au nombre d'éléments de la collection (2a : 2/5 = 6/15 ; 2b : 4/10 = 2/5), est la seule stratégie numérique retrouvée. Contrairement à ce que nous avons établi durant l'analyse a priori, la stratégie numérique faisant appel à la multiplication de la fraction (2/5) par l'entier (15) ne figure sur aucune copie d'élèves. L'absence de ce type de calcul, faisant appel à un traitement de la fraction en tant qu'opérateur, conforte le très faible recours à la stratégie opérateur pour la résolution de ces items.

À l'item 2b, pour l'ensemble des élèves, la réussite est assurée par une stratégie numérique dans 95 % des cas. La stratégie de partition et double comptage ne récolte que 5 %. La répartition des stratégies est légèrement différente si on les considère selon les catégories d'élèves. Ainsi, chez les élèves à risque, la réussite est assurée par une stratégie numérique dans 86 % des cas, alors que ce taux est de 98 % chez les élèves qui ne sont pas à risque. La stratégie de partition et double comptage est mise en œuvre dans 14 % des cas de réussite chez les élèves à risque et par seulement 2 % des élèves qui ne le sont pas. La stratégie numérique est, tout comme à l'item 2a, plus fréquente chez les élèves non à risque que chez les élèves à risque, bien que cette différence soit plus ténue à l'item 2b qu'à l'item 2a.

Les valeurs numériques de l'item 2b ne sollicitent pas, d'emblée, une stratégie de double comptage puisque le dénominateur de la fraction est un multiple du nombre d'éléments. Il est donc peu étonnant que le double comptage soit peu utilisé étant donné qu'il faut d'abord procéder à une partition de chacun des 5 éléments pour obtenir 10 parts égales et, ensuite, procéder à la réunion de 4 de ces parts. Ainsi, les résultats montrent que les élèves, dans l'ensemble, recourent deux fois plus souvent à la stratégie numérique à l'item 2b, alors que les valeurs numériques s'y prêtent, qu'à l'item 2a.

La comparaison entre les résultats de la tâche 2a et ceux de la tâche 2b suggère que l'adaptation des stratégies aux caractéristiques numériques des tâches est plus marquée chez les élèves jugés à risque que chez les élèves qui ne le sont pas. En effet, la tâche 2a étant moins contraignante sur le plan numérique, les élèves à risque recourent principalement, pour réussir la tâche, à une stratégie non-numérique, ce qui n'est pas le cas chez les élèves qui ne sont pas à risque. Cependant, à l'item 2b, la stratégie numérique est fortement utilisée chez les élèves à risque bien que dans une moindre mesure que chez les élèves qui ne le sont pas. Aussi, le taux de réussite chez les élèves à risque à l'item 2a est de 74 % alors qu'il est de 85 % à l'item 2b. Ainsi, même si la tâche 2b est plus contraignante numériquement, elle est mieux réussie pour l'ensemble des élèves que la tâche 2a. Cependant, cet écart est plus marqué chez les élèves à risque (2a : 74 % de réussite; 2b : 85 % de réussite) que chez les élèves non à risque (2a : 86% de réussite; 2b : 90 % de réussite).

Les copies d'élèves aux figures 15 et 16 montrent les productions de deux élèves, toutes les deux, utilisant une démarche non appropriée à la question 2a et une stratégie numérique menant à la réussite pour la question 2b.

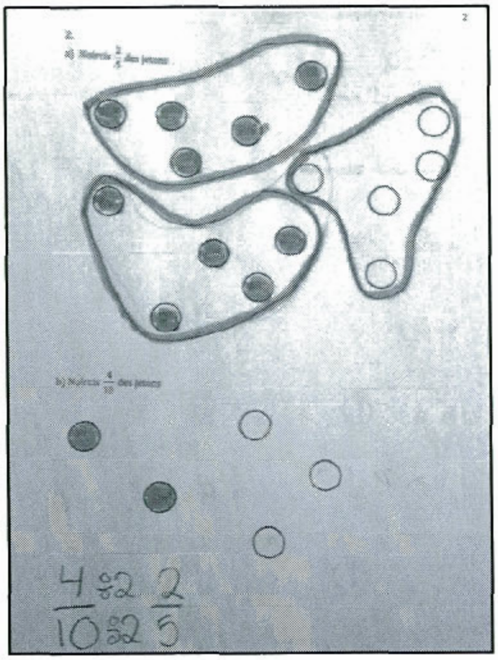


Figure15 Exemple 1 de réponses aux items 2a et 2 b

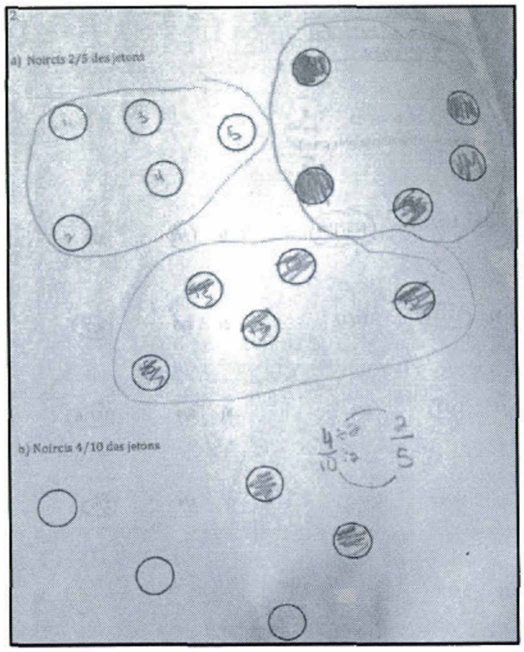


Figure16 Exemple 2 de réponses aux items 2a et 2b

L'erreur, dans les deux exemples de la question 2a, provient d'un glissement entre deux stratégies. Les élèves engagent une partition relevant d'une stratégie de double comptage, mais poursuivent en faisant appel à une interprétation opérateur. En effet, il y a d'abord formation de 3 sous-collections de 5 éléments chacune. Pour compléter une stratégie de double comptage, il faudrait prendre 2 éléments de chacune des sous-collections pour obtenir 6 éléments. Cependant, les élèves retiennent plutôt 2 sous-collections et non 2 éléments par sous-collection. Prendre 2 sous-collections serait pertinent dans le cadre d'une stratégie opérateur par laquelle on retient 2 sous-collections sur 5 sous-collections de 3 éléments, soit 6 éléments.

4.1.2 Représenter a/b d'un tout continu

La représentation de la fraction 2/3 dans un contexte continu est sollicitée par la question 11 qui comprend trois items. Au tableau 1, on observe que l'item 11a, qui sollicite une représentation de la fraction 2/3 sur un cercle non partagé, est l'item le moins réussi avec un taux de réussite de 60%. L'item 11b, qui réfère à une forme rectangulaire partagée en 12 parties égales, est celui qui est le mieux réussi avec un taux de 86%. Enfin, l'item 11c présente un rectangle partagé en 5 parties non égales et présente un taux de réussite global de 73%.

Au tableau 1.2, la moyenne de réussite, selon les deux catégories d'élèves, à chacun des trois items de la question 11, ainsi que les résultats aux tests-t effectués sont rapportés.

Tableau 1.2 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque aux items de la question 11

Question 11	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.[12]
Item 11a	Non à risque	92	.6422	.47889	1.956	.053*
	À risque	27	.4444	.50637		
Item 11b	Non à risque	92	.8696	.33863	.378	.706
	À risque	25	.8400	.37417		
Item 11c	Non à risque	92	.8152	.39025	3.436	.002*
	À risque	25	.4400	.50662		

[12] L'astérisque * indique que le seuil de signification est plus petit ou égale à 0.05.

L'item 11a est réussi par 44% des élèves jugés à risque et par 64% chez les élèves non à risque. L'analyse statistique confirme une différence significative entre la réussite des deux groupes [$t(117)$=1,96; p=0,053]. Il est presqu'impossible, dans ce type de tâche, d'identifier les stratégies à la base des réussites,[13] une analyse qualitative des erreurs produites à cet item est engagée. Une telle analyse permet de saisir les principaux enjeux de savoir liés à cette tâche. Ainsi, une première erreur relevée, chez 30 % des élèves à risque et 20 % des élèves qui ne sont pas à risque, est de désigner deux parties sur trois du cercle sans assurer l'équipartition. Le faible taux de réussite à l'item 11a est donc grandement lié à l'articulation des deux contraintes de la tâche, soit la variable numérique (2/3) et la forme circulaire. Ces deux contraintes exigent, en effet, de coordonner le nombre de coupures à faire tout (3)[14] tout en visant l'égalité des parties obtenues.

La difficulté des élèves, notamment à risque, à respecter une équipartition est aussi relevée à l'item 11c, moins bien réussi que l'item 11b qui présente un rectangle déjà partitionné également. En effet, les résultats des analyses statistiques révèlent qu'à l'item 11c, la réussite des élèves qui ne sont pas à risque (82%) est significativement plus élevée que celle des élèves jugés à risque (44%) [$t(115)$=3,44; p=0,002]. L'analyse des copies des élèves fait ressortir que 32% des élèves jugés à risque, comparativement à 2% des autres élèves, désignent deux parties quelconques sur les cinq parties inégales du rectangle donné. Les résultats des items 11a et 11c suggèrent que l'équipartition est moins maitrisée pour les élèves à risque que pour les élèves non à risque dans le traitement de la fraction, en tant que partie d'un tout continu soit

[13] En effet, lorsque la forme est partitionnée correctement, aucune trace ne permet d'identifier la stratégie.

[14] On notera que diviser un cercle en 3 ne requiert pas les mêmes connaissances géométriques que diviser un rectangle en 3. Sur un rectangle, le nombre de coupures peut correspondre à b – 1 (b de a/b) alors que sur un cercle, le nombre de coupures correspond à b (b de a/b).

d'un cercle non partitionné, soit d'un rectangle partagé en parties non égales.

À l'item 11b, les taux de réussite pour les élèves jugés à risque et ceux qui ne le sont pas sont respectivement de 84% et de 87%. La tâche est donc relativement bien réussie dans les deux groupes. Le test-t ne permet pas d'établir une différence significative entre la réussite des deux groupes [$t(115)=0,38$; $p=0,71$].

Pour les items 11b et 11c, les traces des élèves permettent de repérer certaines stratégies sur lesquelles sont fondées les réussites. Ces stratégies sont rapportées au tableau 1.3.

Tableau 1.3 Taux des stratégies de réussite aux items 11b et 11c selon les catégories d'élèves

Stratégies / Catégories d'élèves	Stratégies à l'item 11b — Identifier 2/3 d'un rectangle partagé en 12 parties égales				Stratégies à l'item 11c — Identifier 2/3 d'un rectangle partagé en 5 parties non égales			
	Double comptage	***Numérique***	***Infra-logique***	***Total***	***Double comptage***	***Numérique***	***Infra-logique***	***Total***
Élèves à risque	**43%**	**5 %**	**52 %**	**100%**	**27 %**	**0%**	**73 %**	**100%**
Élèves non à risque	**18%**	**5 %**	**78 %**	**100%**	**27 %**	**3%**	**71%**	**100%**
L'ensemble des élèves	**23%**	**4 %**	**72 %**	**100%**	**27 %**	**2%**	**71%**	**100%**

L'item 11b présente une partition d'un rectangle en 12 parties égales et les élèves doivent identifier 2/3 de ce rectangle. La pré-partition du rectangle semble faciliter l'articulation entre les schèmes logique et infralogique de partition et ainsi, favoriser le recours à une stratégie de double comptage, telle que décrite dans le chapitre précédent. Cette dernière stratégie est mise en œuvre efficacement par 43 % des cas menant à une réussite chez les élèves à risque. En revanche, elle n'est utilisée que dans 18 % des cas de réussite chez les élèves non à risque. Par ailleurs, la stratégie relevant d'un schème infralogique, qui repose sur le repérage de trois parties égales en ne considérant que les deux traits verticaux du rectangle, est mise en œuvre par 52 % des élèves à risque ayant réussi la tâche et dans par 78 % des autres élèves qui ont réussi. Une stratégie purement numérique ne serait mise en œuvre que par 5 % des élèves ayant réussi dans chaque catégorie d'élèves.

La stratégie du double comptage, bien qu'élémentaire, peut être mise en œuvre à l'item 11c mais sous des contraintes fortes. Cet item présente un rectangle partitionné en 5 parties inégales pour lequel les élèves doivent identifier les 2/3. La réussite à cette tâche suppose que l'élève repère d'abord, sur le rectangle, 6 ou 12 parties égales pour procéder ensuite à la réunion des parties nécessaires pour couvrir soit 4/6 soit 8/12 du rectangle. Cette stratégie a été mise en œuvre dans les mêmes proportions, soit 27 %, par les élèves de chacune des catégories ayant réussi. C'est la stratégie relevant d'un schème infralogique qui obtient la plus grande fréquence dans le cas de réussite, soit 73 % pour les élèves à risque et 71 % chez ceux qui ne sont pas à risque. Ainsi, à la réussite à l'item 11c, il n'y a pas de différence entre les stratégies de réussite entre les élèves à risque et les autres élèves. Rappelons, cependant, que cet item n'est réussi que par 44 % des élèves risque et par 82 % des élèves qui ne sont pas à risque. Il est possible que, pour une tâche qui présente un niveau de difficulté relativement élevé, comme à l'item 11c : 1) les caractéristiques de la tâche font ressortir une stratégie dominante (comme ici, la stratégie infralogique) ; 2) les distinctions entre les deux catégories d'élèves au regard des stratégies de réussite tendent à s'effacer.

Deux exemples de productions d'élèves sont rapportés aux figures 17 et 18.

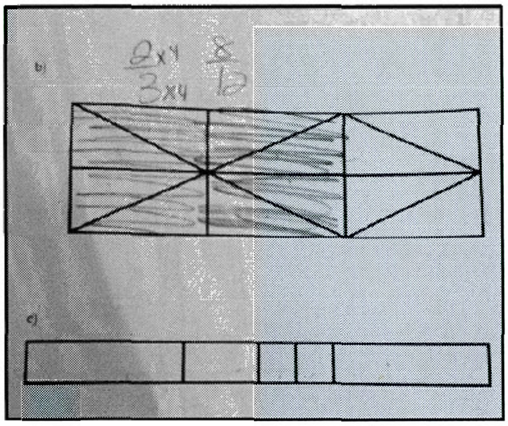


Figure 17 Exemple 1 de réponses aux items 11b et 11c

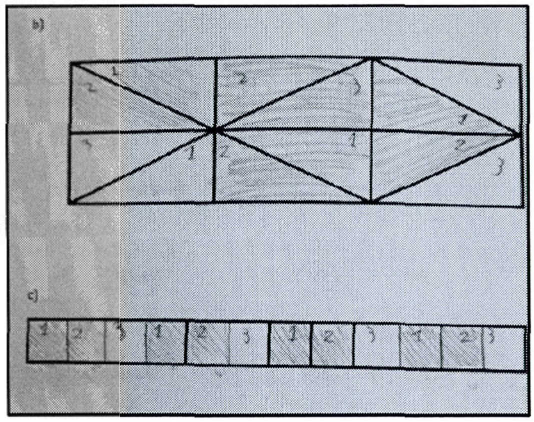


Figure 18 Exemple 2 de réponses aux items 11b et 11c

La figure 17 illustre le recours à un calcul pour produire une fraction équivalente à 2/3 à l'item 11b. À l'item 11c, les traces de comptage sur chacune des parties suggèrent que, après avoir dénombré les 5 parties, l'élève est dans l'impasse, peut-être du fait qu'il ne peut produire une fraction équivalente à 2/3 dont le dénominateur est 5. On ne peut cependant savoir si l'élève a été gêné par l'inégalité des parties. La figure 18 montre une réussite aux deux items, 11b et 11c, basée sur une démarche de double comptage et de partition.

En somme, un certain nombre de résultats se dégage de l'ensemble des items portant sur la représentation de la fraction en tant que partie d'un tout. Les taux de réussite de l'ensemble des élèves, à risque ou non, varient selon les exigences de traitement des tâches. Plus une tâche est exigeante, plus elle force le recours à une stratégie évoluée (numérique pour les touts discrets, schème infralogique pour les touts continus). Ainsi, la tâche portant sur la représentation des 2/5 de 15 est légèrement moins réussie que celle portant sur la représentation des 4/10 de 5; cette dernière faisant davantage appel que la première à une stratégie numérique. La meilleure connaissance des fractions équivalentes ou encore des opérations est possiblement un atout, pour les élèves qui ne sont pas à risque, dans la mise en œuvre de stratégies numériques lesquelles, rappelons-le, nécessite une distanciation du contexte matériel au profit d'un raisonnement de nature numérique. Sur la fraction en tant que partie d'un tout continu, la forme circulaire non partagée est plus difficile à traiter qu'un rectangle, ce dernier étant plus facile à traiter lorsqu'il est pré-partitionné également. Ainsi, lorsque le schème infralogique est fortement sollicité, le taux de réussite décroit légèrement chez les élèves non à risque mais de manière importante chez les élèves à risque.

Un autre résultat est à l'effet que les élèves jugés à risque semblent plus enclins à utiliser une stratégie minimale de résolution que les autres élèves, particulièrement dans le cas où les tâches sont peu contraignantes. Ce résultat suggère que les élèves jugés à risque réagissent plus fortement aux caractéristiques des tâches que les autres élèves. Ils seraient, en effet, plus enclins à recourir à des stratégies évoluées (numérique sur des touts collections et infralogique sur des touts continus) lorsque les contraintes de la tâche bloquent des stratégies plus élémentaires. Cependant, cette adaptation des stratégies aux caractéristiques de la tâche est aussi limitée par le niveau d'exigence mathématique de la tâche. En somme, plus une tâche est difficile, plus l'écart de performances entre les élèves à risque et les autres élèves se creuse, mais dans le cas des réussites, les différences entre les stratégies mises en œuvre par les deux catégories d'élèves s'estompent.

4.2 La fraction comme partie d'un tout : identification d'un tout à partir d'une fraction donnée

Dans cette section, sont présentés les résultats portant sur l'interprétation partie/tout ciblée dans une relation indirecte aux questions 6 et 10 de l'épreuve. Ainsi, il s'agit d'identifier ou de construire un tout à partir d'une fraction donnée. À la question 6, le contexte est de type continu, alors que les quatre items de la question 10 font appel à un contexte de type collection. Les taux de réussite à ces deux questions chez les élèves identifiés à risque, les élèves non à risque ainsi que pour l'ensemble des élèves sont rapportés au tableau 2.

Tableau 2 Taux de réussite aux items portant sur l'identification d'un tout à partir d'une fraction donnée

Items / Catégories d'élèves	L'item 6 1/5 d'un rectangle	L'item 10a 4/6 représenté par 4 pommes	L'item 10b 1/5 représenté par 2 pommes	L'item 10c 2/4 représenté par 3 pommes	L'item 10d 2/3 représenté par 6 pommes
Élèves à risque	**73%**	**52%**	**52%**	**24%**	**43%**
Élèves non à risque	**84%**	**79%**	**74%**	**61%**	**65%**
L'ensemble des élèves	**82%**	**73%**	**70%**	**53%**	**61%**

Contrairement à la première catégorie (représentation d'une fraction d'un tout donné), l'identification d'un tout à partir d'une fraction donnée est mieux réussie dans un contexte de type continu que dans un contexte de type discret. Ainsi, la question 6 est réussie pour l'ensemble des élèves avec un taux de 82 %, alors que les 4 items de la question 10 sont réussis avec des taux variant entre 53 % et 73%. Soulignons cependant qu'il n'y a qu'un item portant sur le tout continu et qu'il implique une fraction unitaire. Il est donc difficile de se prononcer sur la comparaison entre les performances portant sur un tout continu (question 6) et celles portant sur un tout discret (question 10).

Dans les sections suivantes, les résultats relatifs à l'identification d'un tout continu suivis de ceux portant sur l'identification des touts collections sont présentés et analysés.

4.2.1 Identifier un tout continu à partir de *1/b*

La question 6 porte sur l'identification d'un tout à partir d'une forme rectangulaire représentant le 1/5 de ce tout. Trois choix de réponses sont donnés : les deux premiers (a et b) illustrent, de manière différente, le résultat de l'application d'une relation fractionnaire directe, soit 1/5 du rectangle donné et, le troisième (c), la réponse attendue, représente le résultat de l'application de la relation fractionnaire indirecte de 1/5, soit un rectangle 5 fois plus grand.

Le taux de réussite global à la question 6 est de 82%. Seulement 2% des élèves ont choisi la réponse « a », et 16% des élèves ont choisi la réponse «b», toutes deux illustrant une relation fractionnaire directe. Autrement dit, ces élèves ont opté pour l'application de la relation 1/5 à l'illustration donnée plutôt que de considérer cette dernière comme une fraction du tout.

Tel que rapporté au tableau 2, le taux de réussite à l'item 6 est de 73% chez les élèves jugés à risque et de 84% chez les autres élèves. Les analyses statistiques ne révèlent pas de différence significative entre les taux de réussite des deux groupes d'élèves [$t(120)=1{,}17$; $p=0{,}25$]. Les résultats de ces analyses sont présentés au tableau 2.1.

Tableau 2.1 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque à la question 6

	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.
Question 6	Non à risque	96	.8438	.36500	1.174	.248
	À risque	26	.7308	.45234		

Par ailleurs, il est à souligner qu'aucun élève à risque n'a choisi comme réponse l'illustration « a ». Cette illustration est cependant sélectionnée par (deux) 2% des élèves jugés non à risque. Quant à l'illustration « b », représentant la relation directe d'une façon plus explicite, elle est choisie par 27% des élèves à risque et par 14% des autres élèves.

4.2.2 identifier un tout de type collection à partir de *a/b*

Les 4 items de la question 10 portent sur l'identification d'un tout discret : a) 4 éléments correspondent à 4/6 du tout; b) 2 éléments correspondent à 1/5 du tout; c) 3 éléments correspondent à 2/4 du tout ; d) 6 éléments correspondent à 2/3 du tout. Tels que rapportés dans le tableau 2, les taux de réussite à la question 10, pour l'ensemble des élèves sont : a) 10a : 73 %; b) 10b : 70 %; c) 10c : 53 % et d) 10d : 61%. La réussite des élèves jugés à risque est moins élevée que celle des élèves non à risque pour tous les items. Les analyses statistiques confirment que cette tendance est statistiquement significative pour l'item le plus réussi par l'ensemble des élèves, soit 10a, ainsi que pour l'item le moins réussi, soit 10c. Les résultats des tests-t sont présentés au tableau 2.2.

Tableau 2.2 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque aux items de la question 10

Question 10	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.
Item 10a	Non à risque	94	.7872	.41146	2.419	.021*
	À risque	25	.5200	.50990		
Item 10b	Non à risque	93	.7419	.43994	1.987	.055
	À risque	25	.5200	.50990		
Item 10c	Non à risque	93	.6129	.48973	3.696	.001*
	À risque	25	.2400	.43589		
Item 10d	Non à risque	91	.6484	.48013	1.885	.062
	À risque	23	.4348	.50687		

L'item 10a (4/6 représentés par 4 pommes) est le mieux réussi, autant chez les élèves à risque (52 %) que ceux qui ne sont pas à risque (79 %). Les résultats des analyses statistiques révèlent que la réussite des élèves non à risque est significativement plus élevée que celle des élèves jugés à risque (t (117) = 2,42 ; p = 0,02). À cet item, le nombre d'éléments correspondant au tout est relativement aisé à déterminer puisqu'un même nombre, soit 4, représente à la fois le numérateur et la valeur de la sous-collection. Le nombre d'éléments de la collection correspond donc au dénominateur. Il est possible, cependant, que certains élèves aient choisi le nombre 6 par défaut, considérant que les données du problème sont : 4 pommes et 4/6. Au tableau 2.3, les pourcentages des principales réponses numériques erronées sont rapportés selon les deux catégories d'élèves.

Tableau 2.3 La distribution des réponses les plus fréquentes de l'item 10a selon les catégories d'élèves

Types de réponses* / *Catégories d'élèves		***Bonne réponse***	***Réponses erronées de l'item 10a***					
		6 pommes	***4 pommes***	***2 pommes***	***24 pommes***	***12 pommes***	***10 pommes***	***autres***
Élèves à risque	Effectif	13	4	1	2	1	1	3
	%	**52%**	**16%**	**4%**	**8%**	**4%**	**4%**	**12%**
Élèves non à risque	Effectif	74	4	5	4	2	2	3
	%	**79%**	**4%**	**5%**	**4%**	**2%**	**2%**	**3%**
Ensemble des élèves	Effectif	87	8	6	6	3	3	6
	%	**73%**	**7%**	**5%**	**5%**	**3%**	**3%**	**5%**

Plusieurs réponses erronées sont fournies sans qu'il y ait concentration d'élèves autour d'une réponse numérique particulière. La réponse *4 pommes* s'interprète comme la réplique du numérateur et comme le traitement d'une relation directe (identifier les 4/6). Elle est fournie par 4 élèves à risque (16 %) et 4 élèves non à risque (4 %). La réponse *2 pommes* est fournie par seulement 1 élève à risque (4%) et par 5 élèves non à risque (5%). Cette réponse s'interprète ainsi : il manque 2 pommes à 4 pommes (qui représentent 4/6) pour obtenir la collection totale, soit 6/6. La réponse *24 pommes* semble relever de la multiplication du numérateur et du dénominateur de 4/6. Elle ne serait donc pas issue d'un raisonnement de type fractionnaire. Elle est donnée par 2 élèves à risque (8 %) et 4 élèves non à risque (4 %). La réponse *10 pommes,* relève de l'addition du numérateur et du dénominateur 4/6 et s'inscrit à l'extérieur des structures multiplicatives. Elle est fournie par 1 élève à risque (4%) et par 2 élèves non à risque (2 %). Ce pourcentage est le même pour la réponse *12 pommes*. Cette réponse semble être produite d'abord en trouvant la fraction équivalente à 4/6, soit 2/3. Ensuite, un glissement menant à l'application d'une seule opération 3 x 4 mènerait à la réponse de 12. Enfin, soulignons la réponse *2/6*, intégrée à la catégorie «autres» du tableau 2.3, fournie par un seul élève non à risque. Cette fraction est celle qui, ajoutée à 4/6, donne 1. L'élève a répondu sur le registre des fractions – ce qu'il manque à 4/6 pour obtenir 1 – plutôt que sur le registre des quantités – ce qu'il manque à 4 pommes, si elles représentent 4/6, pour obtenir 1.

Plusieurs réponses variées sont ainsi fournies qui s'interprètent, pour la plupart, dans la recherche du tout de référence. Les fréquences de chacune d'elles sont trop petites pour établir des comparaisons entre les stratégies utilisées par les élèves à risque et les autres élèves. Nous pouvons cependant relever que : 1) les réponses de type «autres» sont plus fréquentes chez les élèves à risque (12 %) que chez les autres élèves (3 %) (À titre d'exemples: 36 ou 16 pommes) ; 2) la réponse erronée basée sur la relation directe plutôt qu'indirecte (4 pommes pour 4/6) est plus fréquente chez les élèves à risque.

À l'item 10b, la réussite des élèves non à risque (74%) est aussi plus élevée que celle des élèves jugés à risque (52%). Cependant, cette différence n'est pas statistiquement significative selon le test t : (t (116) = 1,99 ; p = 0,06).

Cet item propose une fraction unitaire (1/5) associée à une sous collection de 2 éléments. Une seule opération arithmétique est alors nécessaire pour construire le tout, soit la multiplication de 2 par 5. Cette conduite s'appuie, cependant, sur la relation 1/5 x 5 = 1. On peut souligner que le taux de réussite utilisant la fraction 1/5 dans un contexte discret (70%), est moins élevé que celui obtenu en contexte continu (82%). Nous formulons deux hypothèses pour expliquer cette différence. D'abord, en contexte continu, les élèves disposent d'un choix de réponses et peuvent procéder par élimination pour identifier l'illustration qui représente un tout plus grand que la partie. Une autre hypothèse est qu'en contexte discret, il faut procéder à la coordination de deux relations, soit implicitement 1/5 x 5 = 1 et, sur la base de cette dernière, la multiplication du nombre d'éléments associé à 1/5, soit 2, par 5.

Au tableau 2.4, les pourcentages des principales réponses numériques erronées sont rapportés selon les deux catégories d'élèves. Les réponses erronées les plus fréquentes sont *5 pommes* et *2 pommes*. La réponse *2 pommes* s'interprète comme une réplique de la donnée initiale. Elle est fournie par 5 élèves à risque (20%) et 5 élèves non à risque (5%). La réponse *5 pommes* est fournie par 2 élèves à risque (8%) et 7 élèves non à risque (8%). Cette réponse reflète la difficulté du contexte discret qui exige la prise en compte du nombre d'éléments de la collection. Ainsi, le 5 x est appliqué sur 1 (sous-collection) sans considérer que cette dernière comprend 2 éléments.

Tableau 2.4 La distribution des réponses les plus fréquentes de l'item 10b selon les catégories d'élèves

Types de réponses / *Catégories d'élèves*		*Bonne réponse*	*Réponses erronées de l'item 10b*						
		10 pommes	*5 pommes*	*2 pommes*	*4 pommes*	*6 pommes*	*12 pommes*	*1 pomme*	*autres*
Élèves à risque	Effectif	13	2	5	2	0	0	1	2
	%	**52%**	**8%**	**20%**	**8%**	**0%**	**0%**	**4%**	**8%**
Élèves non à risque	Effectif	69	7	5	2	4	2	1	3
	%	**74%**	**8%**	**5%**	**2%**	**4%**	**2%**	**1%**	**3%**
Ensemble des élèves	Effectif	82	9	10	4	4	2	2	5
	%	**70%**	**8%**	**8%**	**3%**	**3%**	**2%**	**2%**	**4%**

L'item le moins réussi est 10c avec un taux de réussite de 24 % pour les élèves à risque et de 61 % pour les élèves non à risque. Tel que rapportée au tableau 2.2, la différence entre les performances des deux catégories d'élèves est statistiquement significative ($t(116) = 3{,}70$; $p = 0{,}00$). Cet item porte sur l'identification du tout étant donné que 2/4 représentent 3 pommes. La solution consiste à identifier la fraction équivalente irréductible à 2/4, soit 1/2, et, sur la base de la relation 1/2 x 2 = 1, de multiplier 3 par 2. Ainsi, on ne peut solutionner cet item en opérant directement sur la collection d'objets puisque la solution nécessite d'identifier numériquement la relation d'équivalence entre 2/4 et 1/2. Cette exigence mathématique explique possiblement la différence significative entre les performances des deux catégories d'élèves.

Le tableau 2.5 rapporte les réponses numériques erronées les plus fréquentes à l'item 10c selon les catégories d'élèves. L'examen des résultats permet de constater que la réponse la plus fréquente chez les élèves à risque est *3 pommes*. Cette réponse s'interprète par une réplique de la donnée initiale, elle est fournie par 5 élèves à risque (20 %) et par 5 élèves non à risque (5 %).

Une autre réponse relativement fréquente est *12 pommes* fournie par 16 % des élèves à risque (4 élèves) et 10 % des autres élèves (9 élèves). Cette réponse témoigne d'un glissement de la fraction 2/4 à la fraction 1/4 et de l'application d'une seule opération, soit 6 pommes x 4. Finalement, 16% des élèves à risque (4 élèves) et 6 % des élèves non à risque (6 élèves) ont fourni comme réponse, le dénominateur de la fraction donnée, soit 4. À défaut sans doute de moyens pour traiter une fraction qui n'est pas unitaire, le dénominateur est donné comme représentant la quantité associée à la collection de référence.

Tableau 2.5 La distribution des réponses les plus fréquentes de l'item 10c selon les catégories d'élèves

Types de réponses / *Catégories d'élèves*		***Bonne réponse***	***Réponses erronées de l'item 10c***							
		6 pommes	***12 pommes***	***4 pommes***	***3 pommes***	***9 pommes***	***8 pommes***	***5 pommes***	***2 pommes***	***autres***
Élèves à risque	Effectif	6	4	4	5	1	1	1	1	2
	%	**24%**	**16%**	**16%**	**20%**	**4%**	**4%**	**4%**	**4%**	**8%**
Élèves non à risque	Effectif	57	9	6	5	4	2	2	2	6
	%	**61%**	**10%**	**6%**	**5%**	**4%**	**2%**	**2%**	**2%**	**6%**
Ensemble des élèves	Effectif	63	13	10	10	5	3	3	3	8
	%	**53%**	**11%**	**8%**	**8%**	**4%**	**3%**	**3%**	**3%**	**7%**

À l'item 10d, le taux de réussite est de 43 % chez les élèves à risque et de 65 % chez les élèves non à risque. Selon les résultats du test-t ($t(112) = 1,89$; $p = 0,06$), la différence de réussite entre les deux catégories d'élèves n'est pas statistiquement significative.

À cet item, les élèves doivent trouver la quantité d'une collection de référence si 6 pommes représentent les 2/3 de cette collection. La solution fait appel à deux opérations. Ainsi, le numérateur doit agir comme diviseur (6 pommes ÷ 2 = 3 pommes) pour trouver la valeur de 1/3 et le dénominateur comme un opérateur multiplicatif pour trouver la collection totale (3 pommes x 3 = 9 pommes).

Le tableau 2.6 rapporte les réponses numériques erronées les plus fréquentes à l'item 10d selon les catégories d'élèves. Parmi les réponses erronées, *6 pommes* est la réponse la plus répandue à un taux de 9%. Elle est fournie par 4 élèves à risque (17%) et 6 élèves non à risque (7 %). Cette réponse témoigne d'une réplique de la quantité représentant la sous-collection illustrée, soit la donnée initiale. Quant à la réponse *12 pommes*, elle tient sans doute à la multiplication de 6 pommes par le numérateur 2. Le numérateur agit alors comme un opérateur multiplicatif à l'image du problème suivant : « Si 6 pommes représentent 1/3, combien de pommes représentent 2/3 ? ». Cette réponse est fournie par 2 élèves à risque (9 %) et par 6 élèves non à risque (7%). Ces taux sont les mêmes pour la réponse *18 pommes*. Cependant, *18 pommes* s'interprète par la considération de 1/3 à la place de 2/3 et donc de l'application d'une seule opération, soit 6 pommes x 3.

Tableau 2.6 La distribution des réponses les plus fréquentes de l'item 10d selon les catégories d'élèves

Types de réponses / *Catégories d'élèves*		*Bonne réponse*	*Réponses erronées de l'item 10d*								
		***9* pommes**	***6* pommes**	***12* pommes**	***18* pommes**	***2* pommes**	***7* pommes**	***4* pommes**	***3* pommes**	***8* pommes**	*autres*
Élèves à risque	Effectif	10	4	2	2	0	0	2	1	1	1
	%	**43%**	**17%**	**9%**	**9%**	**0%**	**0%**	**9%**	**4%**	**4%**	**4%**
Élèves non à risque	Effectif	59	6	6	6	3	3	1	1	1	5
	%	**65%**	**7%**	**7%**	**7%**	**3%**	**3%**	**1%**	**1%**	**1%**	**5%**
Ensemble des élèves	Effectif	69	10	8	8	3	3	3	2	2	6
	%	**61%**	**9%**	**7%**	**7%**	**3%**	**3%**	**3%**	**2%**	**2%**	**5%**

En somme, les résultats aux items impliquant la construction du tout à partir d'une fraction donnée permettent d'abord de faire le point sur les performances des élèves selon les différentes caractéristiques de la tâche. Ainsi, l'identification du tout à partir de 1/b est mieux réussie dans un contexte continu que dans un contexte discret. Cependant, il est possible que le choix de réponse ait favorisé la réussite en contexte continu. En contexte discret, mis à part l'item 10d, les valeurs numériques ne se prêtent pas, comme en contexte continu, à l'application d'une stratégie consistant à appliquer une relation directe plutôt qu'indirecte, qui consisterait alors, par exemple, à chercher les 4/6 de 4 ou encore le 1/5 de 2. Ainsi, la fraction unitaire semble faciliter l'identification du tout puisqu'il suffit de réitérer b fois, 1/b. Cette variable numérique fait en sorte que la réussite engendre moins d'opérations qu'une fraction de type a/b pour laquelle la solution exige d'abord d'identifier la valeur de 1/b, en divisant par a, pour ensuite répliquer cette valeur (b) fois, par la multiplication.

En contexte discret, les performances varient en fonction du niveau de complexité de la relation entre la fraction donnée et la valeur de la sous-collection qui lui est associée. Ainsi, l'identification d'un tout à partir d'une sous-collection dont la valeur (n éléments) correspond au numérateur de la fraction qui lui est associée (a/b) est mieux réussie que l'identification d'un tout à partir d'une sous-collection dont la valeur (n) ne correspond pas au numérateur de la fraction qui lui est associée. Aussi, les taux de performance sont plus élevés si le numérateur de la fraction entretient avec la valeur de la sous-collection, une relation multiplicative entière (ex. : 6 représente 2/3, 6 est multiple de 2) que si cette relation n'est pas entière (ex. : 3 représente 2/4 et 3 n'est ni multiple, ni diviseur de 2). De plus, l'analyse des erreurs a permis de constater que l'erreur la plus fréquente, surtout chez les élèves à risque, consiste à fournir le nombre de la sous-collection qui représente la donnée du problème. Par exemple, pour 1/5 de la collection représentée par 2 pommes, l'erreur la plus fréquente est : 2 pommes. Il est donc probable que devant la difficulté à traiter avec la relation indirecte, l'élève fournit la donnée en tant que solution.

Ces résultats offrent aussi l'occasion de mettre en évidence que le traitement de la relation indirecte pour construire le tout (questions 6 et 10) est plus complexe que le traitement de la relation directe permettant de représenter la fraction d'un tout (questions 2 et 11). Cette complexité revient essentiellement à préciser l'importance de la propriété de l'inverse multiplicatif $a/b \times b/a = 1$, qui est non seulement plus complexe en contexte discret, mais également plus implicite. Il semble aussi que le traitement de la relation indirecte fasse appel à l'interprétation de la fraction en tant qu'unité de mesure puisqu'elle exige le contrôle de la relation $1/b \times b = 1$.

4.3 La fraction comme quotient (partage et groupement)

Cette section comprend les résultats obtenus aux questions 3 et 8 et aux items 9a et 9b de l'épreuve regroupés sous l'interprétation quotient de la fraction. Les questions 3 et 8, impliquant le sens partage de la division, sont d'abord traitées suivies des deux premiers items de la question 9, sollicitant le sens groupement de la division.

Les résultats présentés au tableau 3 montrent que les tâches portant sur le sens partage de la division sont moins réussies que celles portant sur le sens groupement. Ainsi le taux de réussite à la question 3, pour l'ensemble des élèves, est de 26 %; il est de 14 % chez les élèves à risque et de 29 % chez les autres élèves. Le taux de réussite à la question 8 est de 49%, pour l'ensemble des élèves et, plus précisément, de 41 % chez les élèves à risque et de 51 % chez les élèves non à risque. Enfin, les items 9a et 9b sont réussis respectivement par 84% et 79% de l'ensemble des élèves. À l'item 9a, le taux de réussite est de 70 % chez les élèves à risque et de 87 % chez les autres élèves alors qu'à l'item 9b, il est de 65 % chez les élèves à risque et de 84 % chez les autres élèves. Dans les sous-sections suivantes, l'ensemble de ces résultats est analysé.

Tableau 3 Taux de réussite aux items portant sur l'interprétation quotient

	Item3 Division partage *(5÷3=?)*	**Item 8 Division partage** *(3÷4=?)*	**Items 9a et 9b Division groupement**	
			Item 9a *(1/6×?=1)*	**Item 9b** *(1/4×?=2)*
Élèves à risque	**14%**	**41%**	**70%**	**65%**
Élèves non à risque	**29%**	**51%**	**87%**	**84%**
L'ensemble d'élèves	**26%**	**49%**	**84%**	**79%**

4.3.1 Interprétation quotient de type partage

Les questions 3 et 8 portent sur la division partage et sont présentées sous forme d'énoncés de problèmes[15]. Le tableau 3.1 présente les différences de performances entre les deux catégories d'élèves pour les deux questions. À la question 3, l'énoncé porte sur le partage égal de 5 barres de chocolats entre 3 personnes. Bien que la représentation dessinée de la solution ne soit pas exigée, 71% des élèves (87) ont fourni un dessin. Les analyses statistiques ne révèlent pas de différence significative entre la réussite des deux groupes d'élèves pour la réponse numérique [$t(110)=1,60$; $p=0.12$] et pour le dessin [$t(85)= - 0,35$; $p=0.73$]. La valeur négative du t est expliquée par la réussite plus élevée des élèves à risque par rapport aux autres élèves. Ainsi, si les élèves à risque ne démontrent pas une grande performance pour la réponse numérique (14%), leur réussite au dessin (62%) est meilleure que celle des autres élèves (58%). Cependant, cette différence n'est pas confirmée statistiquement.

À la question 8, l'énoncé porte sur le partage égal du contenu de 3 pots entre 4 pots; la représentation dessinée ainsi que la réponse numérique sont exigées. Le taux de réussite des élèves jugés à risque à la réponse numérique est de 41% alors que celui associé à la réussite de la représentation dessinée est de 32%. Les élèves non à risque ont réussi à 51% sur le plan numérique et sur celui de la représentation dessinée. La réussite sur ces deux plans à la fois est obtenue par 43% des élèves réguliers et 32% des élèves à risque. Les analyses statistiques ne relèvent pas de différence significative entre la réussite des deux groupes [$t(110)=0,85$; $p=0.40$] pour la réponse numérique et [$t(107)= 1,63$; $p=0.11$] sur le dessin.

---

[15] Le lecteur peut se référer à l'annexe B pour les énoncés de problèmes.

Tableau 3.1 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque aux items portant sur la fraction en tant que quotient de type partage

	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.
Question 3	Non à risque	90	.2878	.45041	1.595	.119
(rép. Num)	À risque	22	.1364	.35125		
Question 3	Non à risque	66	.5758	.49801	-.347	.729
(Dessin)	À risque	21	.6190	.49761		
Question 8	Non à risque	90	.5111	.50268	.853	.395
(rép. Num)	À risque	22	.4091	.50324		
Question 8	Non à risque	87	.5057	.50287	1.630	.112
(Dessin)	À risque	22	.3182	.47673		

Les analyses qualitatives des réponses des élèves sont présentées dans ce qui suit.

4.3.1.1 Analyse qualitative des résultats obtenus à la question 3

Le tableau 3.2 présente les fréquences et les taux de réussite aux représentations dessinées et aux réponses numériques des élèves à la question 3. À cette question, une réponse numérique est fournie par 112 élèves, soit 22/27 élèves à risque et 90/96 élèves non à risque. Seulement 26 % de l'ensemble de ces réponses sont justes. Ce taux est de 14 % (3/22) chez les élèves à risque et de 29 % (26/90) chez les autres élèves. Ainsi, le taux de réussite des élèves à risque, sur le plan numérique, est sensiblement plus bas que chez les élèves qui ne sont pas à risque. Une réponse sous forme de représentation dessinée est fournie par 87 élèves, soit 21/27 élèves à risque et 66/96 élèves non à risque. Les représentations dessinées sont justes dans 59% des cas. Plus précisément, 62 % (13/21) de celles produites par les élèves à risque et 58 % (38/66) des élèves non à risque ont fourni une représentation appropriée.

Tableau 3.2 Fréquences et taux de réussite aux représentations dessinées et aux réponses numériques à la question 3

Types de Réussites / Catégories d'élèves	**Question 3** *(5 barres partagées entre 3 amis)*					
	Réussite à la représentation dessinée		**Réussite à la réponse numérique**		**Aucune réponse**	
	Fréquence	Taux	Fréquence	Taux	Fréquence	Taux
Élèves à risque	13/21	62%	3/22	14%	5/27	19 %
Élèves non à risque	38/66	58%	26/90	29%	6/96	6%
L'ensemble des élèves	51/87	59%	29/112	26%	11/123	9%

Plus que la moitié des élèves ont élaboré une solution à l'aide d'une représentation dessinée bien que la consigne ne l'exige pas. Est-ce que cette réalisation est un effet de contrat, sous l'effet d'habitudes scolaires, ou encore un réel support à la résolution de l'énoncé de problème ? Pour tenter de répondre à cette question, nous avons catégorisé les élèves en trois catégories : 1) ceux qui ne réalisent qu'une représentation dessinée ; 2) ceux qui ne fournissent qu'une réponse numérique, accompagnée ou non d'un calcul; 3) ceux qui fournissent à la fois une représentation dessinée et une réponse numérique. Le tableau 3.3 présente les fréquences des solutions et de leurs réussites à la question 3.

Tableau 3.3 Fréquences des solutions et de leurs réussites à la question 3

	Question 3 (*5 barres partagées entre 3 amis*) [16]							
	Solution représentée par un dessin (d)		**Solution numérique** (n)		**Solution représentée par un dessin** (d) **et par une réponse numérique** (n)			Aucune réponse
	Fréq.	R	Fréq.	R	Fréq.	R (n) et (d)	R (n) ou (d)	
Élèves à risque	2/27	1/2	3/27	1/3	19/27	2/19	0/19(n) 10/19 (d)	3/27
Élèves non à risque	2/96	1/2	26/96	9/26	64/96	12/64	5/64 (n) 25/64 (d)	4/96
Ensemble des élèves	4/123	2/4	29/123	10/29	83/123	14/83	5/83 (n) 35/83 (d)	7/123

Le tableau 3.3 montre que seulement 4 élèves sur 123, répartis également entre les deux catégories d'élèves, ne produisent aucune réponse numérique et ne procèdent que par représentation dessinée. Seulement 2 de ces 4 élèves, 1 élève de chaque catégorie, représente correctement la valeur recherchée. Les élèves qui n'ont fourni

[16] Légende du tableau :R : Fréquence de réussite;(n) : solution numérique; (d) : solution représentée par un dessin.

qu'une réponse numérique sont plus nombreux et se répartissent inégalement entre les deux catégories d'élèves. Le taux de réussite est cependant relativement bas. Ainsi 26/96 élèves non à risque (27 %) ne produisent qu'une réponse numérique et parmi eux, seulement 9/26 quantifient correctement une part (35 %). Seulement 3/27 élèves à risque (11 %) ne donnent qu'une réponse numérique et un seul fournit une réponse juste. Au total, c'est le 1/3 des élèves à risque, de profil strictement numérique, qui solutionne correctement l'énoncé. Les élèves qui recourent à la fois à la représentation dessinée et au dessin sont les plus nombreux, soit 83/123, dont 19/27 élèves à risque et 64/96 élèves non à risque. Le rapport entre réussite numérique et réussite à la représentation dessinée est toutefois éclairant sur la difficulté que pose le traitement de l'énoncé. Chez les élèves à risque, ce rapport est de 0 pour 10. Autrement dit, si 10 élèves ont produit un dessin qui identifie correctement la part recherchée, aucun d'entre eux quantifie correctement cette part. Chez les élèves non à risque, ce rapport est de 5 pour 25.

Si environ 60 % des élèves représentent le résultat du partage de 5 en 3 parties égales, très peu d'entre eux (5/83) arrivent à identifier la valeur numérique de cette part. La difficulté à quantifier le résultat du partage est aussi relevée chez les élèves qui ne procèdent que numériquement puisque seulement 10/29 d'entre eux obtiennent le résultat numérique juste. L'ensemble de ces résultats suggère que, d'une part, ce n'est pas tant par effet de contrat que les élèves produisent un dessin, mais par nécessité de traiter les relations entre les données du problème. D'autre part, il suggère que la fraction n'est pas aisément associée au résultat d'une division et conforte ainsi les résultats d'études en ce domaine (Clarke et al., 2007; Toluk et Middleton, 2001; Weinberg, 2001).

La difficulté à fournir la bonne réponse numérique à ce problème de partage incite à examiner les stratégies erronées mises en place. En effet, les traces laissées par les élèves témoignent de l'existence de quelques erreurs typiques. Le tableau 3.4 décline les différentes réponses erronées ainsi que leur fréquence dans chacune des catégories d'élèves.

Tableau 3.4 Fréquences de réponses erronées à la question 3

Catégories d'élèves		*Réponses numériques erronées à la question 3*					
		1 1/3 ou 1 2/6	*1/3 ou 5/15*	*Bi-partition*	*b=5 de a/b*	*5 parts*	*autres*
Élèves à risque	Effectif	4	3	4	3	4	1
	%	18%	14%	18%	14%	18%	5%
Élèves non à risque	Effectif	8	12	12	13	9	10
	%	9%	13%	13%	14%	10%	11%
Ensemble des élèves	Effectif	12	15	16	16	13	11
	%	11%	13%	14%	14%	12%	10%

Pour l'ensemble des élèves, 11% (12/112) ont fourni la réponse numérique « 1 et 2/6 » ou « 1 et 1/3 ». La stratégie qui fonde cette réponse procède en deux temps. Au premier temps, il y a un partage égal des 5 unités en 3, ce qui génère un résultat partiel entier, soit 1. Ensuite, chacune des 2 unités restantes est partagée en 3, ce qui devrait générer un résultat partiel fractionnaire : 1/3 + 1/3 ou 2/3. Selon cette stratégie, chaque part correspond au nombre fractionnaire 1 + 2/3. Cependant, l'erreur est d'interpréter le résultat du partage comme 1 + 2/6. La fraction 2/6 est obtenue en considérant que chaque personne reçoit 2 morceaux sur 6 des deux unités fractionnées. Il est aussi possible que 2/6 soit obtenue comme somme de 1/3 + 1/3. Si la fraction 2/6 est simplifiée, la réponse numérique est alors 1 + 1/3. L'erreur relèverait donc d'une mauvaise référence au tout pour la partie fractionnaire. Ce type d'erreur est illustré à la figure 19.

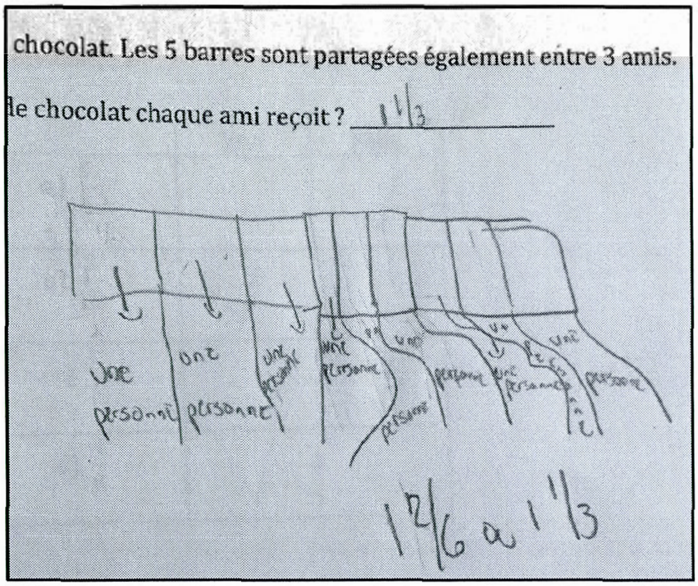


Figure 19 Exemple 1 de réponses à la question 3

La difficulté de référer correctement au tout est aussi observée à la réponse numérique 5/15, tel qu'illustré à la figure 20 ou encore 1/3, tel qu'illustré à la figure 21. Fournies par 13% des élèves (15/112), ces deux réponses numériques sont issues d'une même partition. Chaque unité est partagée également en 3. La part recherchée correspond ainsi à 5 x 1/3 d'une unité. La réponse 5/15 relève d'une interprétation partie/tout selon laquelle une part correspond à 5 morceaux sur 15. Ces derniers sont issus du partage des 5 unités en 3 parts égales. La réponse 1/3 est soit une simplification de 5/15, soit la quantification d'une part comme 1/3 de chacune des unités. Il s'agit d'une erreur produite essentiellement après une partition avec coordination sur plusieurs unités, en même temps.

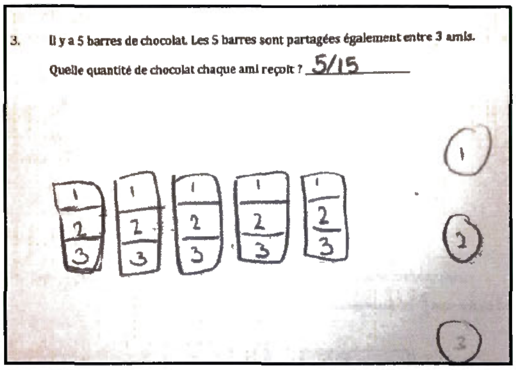


Figure 20 Exemple 2 réponses à la question 3

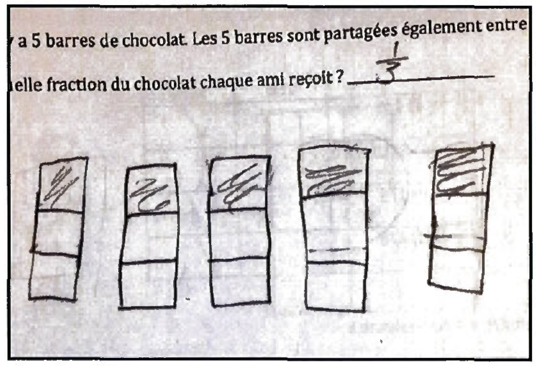


Figure 21 Exemple 3 de réponses à la question 3

Les erreurs relatées ci-dessus, soit de type 1 2/6 ou 5/15, surviennent après une partition adéquate de la quantité à partager sans qu'une quantification exacte de la part de chacun ne soit réalisée. Par contre, celle qui suit se distingue des précédentes par une démarche de partition inadéquate. Tel que rapporté au tableau 3.4, 14% des élèves (16/112) procèdent par bipartition successive. Les 5 unités sont partagées également en 2 et chaque demi-unité est distribuée aux 3 personnes. Les deux unités restantes sont partagées encore en 2, et les quarts sont ensuite distribués. Une bipartition sur les données du problème conduit à un reste, d'une valeur de 1/4, que les élèves éliminent et, ce faisant, ne respectent pas la nécessité d'épuiser le tout de référence. Le dessin présenté à la figure 22 montre comment l'élève traite le reste obtenu par bipartition.

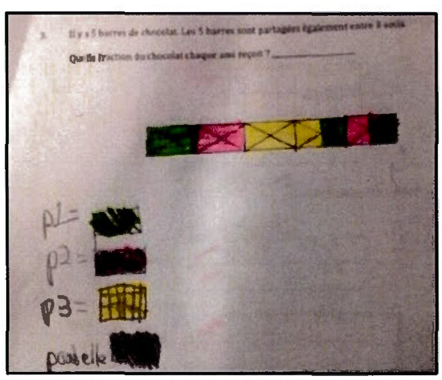


Figure 22 Exemple 4 de réponses à la question 3

Par ailleurs, des réponses telles que « 5 morceaux » sont données par 12% (13/112) des élèves. Ce type de réponse témoigne d'une stratégie de partition sur une quantité discrète ainsi que de la prégnance des nombres naturels. Elle n'est pas relevée dans les conduites des élèves à l'item 8 puisque le contexte est de type continu.

Finalement, 14% (16/112) des réponses sont de type 3/5[17] plutôt que 5/3. Il importe de souligner que cette réponse numérique pourrait suggérer que les élèves inversent le rôle du diviseur et de dividende, et par conséquent du numérateur et du dénominateur. Or, aucune production d'élèves ne montre une partition des barres en 5. Les traces laissées par quelques élèves ayant produit cette réponse numérique montrent que des stratégies différentes conduisent à 3/5. Ainsi, à la figure 23, 5 barres sont dessinées et 3 sont entourées; sans doute pour marquer que chaque ami aura 1 barre. Il n'y a pas de partition d'unité dans ce dessin. L'élève ayant encerclé 3 barres sur 5, conclut que le résultat numérique est 3/5.

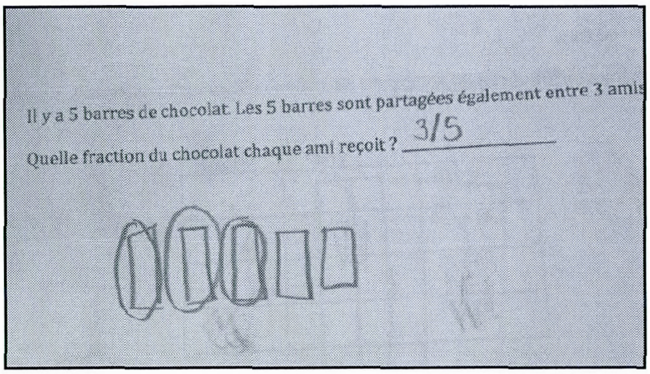


Figure 23 Exemple 5 de réponses à la question 3

[17] On retrouve 3/5 mais aussi, par exemple, 1 et 3/5.

Cependant, à la figure 24, l'élève procède par distribution de 3 barres entières et ensuite à la distribution des tiers de chacune des deux barres. Il est relativement clair, sur le dessin, que chaque élève reçoit 1 barre et 2/3. Cependant, la réponse numérique de l'élève est 3/5. Il ne semble pas s'être appuyé sur son dessin pour produire le résultat numérique. Est-ce que l'élève sait, par ailleurs, que la réponse numérique à ce type de problème est composée d'une fraction dont les termes sont ceux du problème et aurait produit 3/5 plutôt que 5/3 ? Nos données ne nous permettent pas de préciser davantage la production de l'élève. Cependant, il nous paraît utile de noter que, pour une même réponse numérique, différentes conduites mathématiques sont possibles.

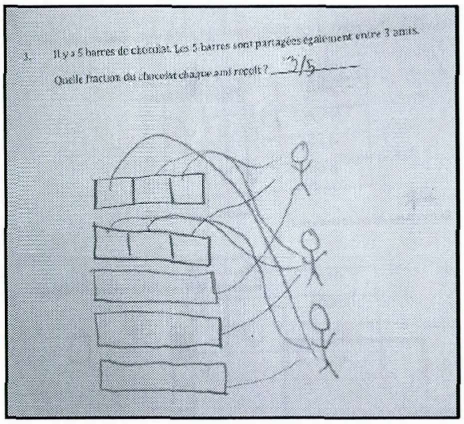


Figure 24 Exemple 6 de réponses à la question 3

Pour conclure sur la question 3, soulignons que l'identification des stratégies n'ayant pas conduit à une réponse numérique juste permet de dresser un portrait des glissements opérés, soit sur la partition, soit sur l'interprétation du résultat du partage. Dans le premier cas, la difficulté relève d'une stratégie de partition qui ne tient pas compte des valeurs numériques en jeu, soit la bipartition alors que le diviseur est un nombre impair. Dans le deuxième cas, la partition est réalisée correctement mais la quantification de la part n'est pas réussie. La difficulté semble alors relever de la référence au tout et/ou de la composition additive de fractions unitaires (1/3 et 1/3). Finalement, une réponse de type « 5 parts » témoigne d'une centration sur le nombre de parts qui peut se traduire par un évitement de la fraction.

4.3.1.2 Analyse qualitative des résultats obtenus à la question 8

Faisant appel à un contexte continu ainsi qu'à un quotient fractionnaire inférieur à 1, la question 8 est mieux réussie sur le plan numérique que la question 3. Le contexte est cependant peu familier aux élèves puisqu'il s'agit de trouver la quantité de jus dans un pot à la suite d'un partage égal de la quantité contenue dans 3 pots entre 4 pots de même taille. Pour l'ensemble des élèves, le taux de réussite associé à la réponse numérique est de 49 %, alors que celui associé à la représentation dessinée est de 47 %. Le taux de réussite sur les plans, à la fois numérique et de représentation dessinée atteint 41%. Rappelons que la représentation dessinée de la réponse est exigée dans cette question. Les traces laissées par les élèves montrent l'existence de quelques erreurs typiques que nous présentons en ce qui suit. Le tableau 3.5 précise la fréquence des réponses numériques erronées.

Tableau 3.5 Fréquences de réponses erronées à la question 8

Question 8 *« 3 pots remplis de jus transvidés dans 4 pots vides »*		***Réponses numériques erronées***					
		1/4	***b=3***	***1/2***	***b=5***	***b=12***	***autres***
Élèves à risque	Effectif	6	4	1	1	0	1
	%	27%	18%	5%	5%	0%	5%
Élèves non à risque	Effectif	10	16	6	4	3	5
	%	11%	18%	7%	4%	3%	6%
Ensemble des élèves	Effectif	16	20	7	5	3	6
	%	14%	18%	6%	4%	3%	5%

Tel que le rapporte le tableau 3.5, la réponse de type 1/3, 2/3 ou 3/3 est la plus fréquente autant chez les élèves à risque que chez les élèves non à risque (18 %). Cette réponse numérique est difficile à analyser. Il est possible que cette réponse résulte de la combinaison de deux considérations : 1) 3 est traité non pas comme le dividende mais comme le diviseur; 2) appréhension d'une quantité inférieure à 1 pour un pot[18]. La fraction 2/3 parait alors une réponse numérique de « compromis » entre la fraction inférieure à 1 et un dénominateur qui correspond au dividende plutôt qu'au diviseur.

Les figures 25 et 26 représentent, respectivement, les productions d'un élève non jugé à risque et celle d'un élève jugé à risque. La figure 25 montre une partition, en trois, dessinée sur chacun des 4 pots.

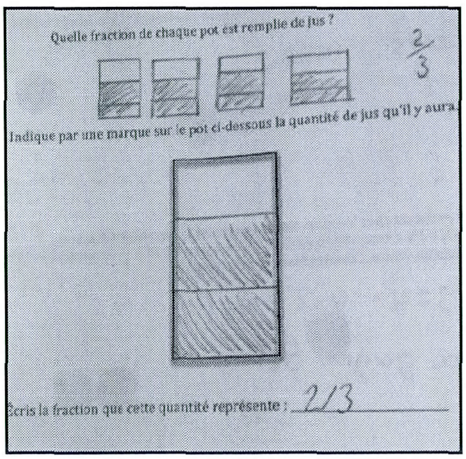


Figure 25 Exemple 1 de réponses à la question 8

[18] Sinon d'ailleurs, il y aurait débordement car un pot ne peut contenir une quantité de liquide supérieure à sa capacité et donc, dans ce cas-ci, à 1.

Toutefois, la figure 26 illustre une démarche basée sur un calcul numérique. Considérant que 3 et 4 ont 12 comme multiple commun, l'élève fait référence à la portion de chaque pot comme étant 1/3 en calculant la fraction équivalente à 4/12.

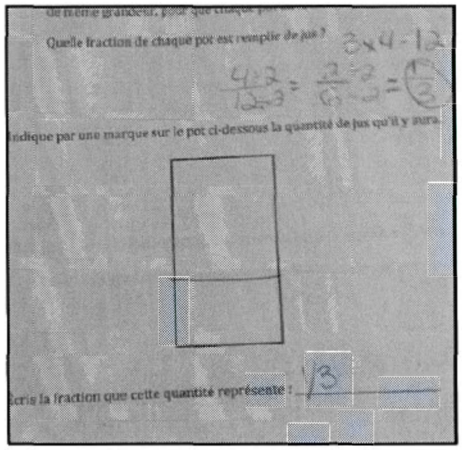


Figure 26 Exemple 2 de réponses à la question 8

Le nombre 1/4 est la deuxième réponse numérique la plus fréquente et produite par 14% des élèves, 27% des élèves à risque et 11% des élèves non à risque. Cette réponse provient sans doute du fait que chaque part (chaque pot) reçoit le 1/4 de la quantité à partager, sans que soit considérée la totalité de la quantité à partager. Notons que cette réponse est deux fois plus fréquente chez les élèves à risque.

Nous tentons d'interpréter les autres réponses erronées rapportées au tableau 3.4, même si elles ne sont pas aussi fréquentes comparativement aux deux premières. Le peu de traces laissées sur les copies n'aide pas à éclairer ces réponses.

La réponse de type 1/2 est fournie par 6% des élèves, 5% d'élèves à risque et 7% des élèves non à risque. Cette réponse signifie que les élèves procèdent par une seule bipartition dans une tentative de résolution qui n'est pas achevée. La difficulté peut être due à l'exigence du calcul relationnel ainsi que la nature peu familière du problème.

La réponse de type 1/5, 3/5 ou 4/5 est fournie par 4% de l'ensemble des élèves. Afin de tenter d'interpréter cette réponse, rapportons qu'une des réponses classifiée dans *autres* réponses indique « 1,32/4 ». Les traces accompagnant cette réponse montre une opération de division de 5,3 par 4 donnant un quotient de 1,32. Ensuite, la réponse est donnée sous forme de fraction « 1,32/4 ». Le nombre 5,3 représente la longueur du dessin du pot fourni pour que l'élève y indique la marque représentant la quantité du jus qu'il y aura. Les traces de cette production d'élève montrent qu'il est possible que les réponses de type 1/5, 3/5 ou 4/5 aient suivi cette procédure. Si l'on arrondit la mesure 5,3cm à un entier, le nombre 5 est considéré ainsi comme la mesure du tout et les réponses 1/5, 3/5 ou 4/5 seraient des parties du tout.

Finalement, 3% des élèves, tous des élèves non à risque, répondent 1/12 ou 3/12. Cette réponse rappelle la difficulté à la référence au tout. Cependant, les traces des élèves ne montrent pas de partitions qui conduisent à 12, ni des 3 pots en 4, ni des 4 pots en 3 parties. Il se peut alors que la réponse avec un dénominateur 12 provient des connaissances de l'élève sur la relation 3x4=12.

4.3.2 Interprétation quotient de type groupement

Les items 9a et 9b portent sur la division groupement et sont présentés sous forme de résolution de problème. L'énoncé 9a se lit : « Chaque jour, je marche 1/6 km. Combien de jours cela me prendra pour marcher 1 km ? ». L'énoncé 9b se lit : « On a 2 longues réglisses. On donne ¼ de réglisse à chaque enfant. À combien d'enfants peut-on donner de la réglisse ? »

Le taux de réussite aux items 9a et 9b, pour l'ensemble des élèves, est respectivement de 84% et de 79%. Les résultats du tableau 3.6 rapportent, une réussite de 70% chez les élèves à risque, à l'item 9a et de 65% à l'item 9b. Ces taux sont inférieurs à ceux des élèves jugés non à risque, soit 87% et 84%. Toutefois, ces différences ne sont confirmées statistiquement ni à l'item 9a : [$t(108)=1{,}50$; $p=0.15$] ni à l'item 9b [$t(112)= 1{,}68$; $p=0.10$]. Dans la partie qui suit, l'analyse qualitative des réponses est réalisée.

Tableau 3.6 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque aux items portant sur la fraction en tant que quotient de type groupement

	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.
Item 9a	Non à risque	90	.8667	.34184	1.500	.147
	À risque	20	.7000	.47016		
Item 9b	Non à risque	91	.8352	.37309	1.682	.103
	À risque	23	.6522	.48698		

À l'item 9a, deux types de traces sont relevées. Des représentations dessinées suggèrent la recherche du nombre de 1/6 dans 1. Cependant, les écritures additives de type 1/6 +1/6+ 1/6+ 1/6+ 1/6+1/6=1 suggèrent plutôt que les élèves visent à justifier une réponse juste. Plusieurs copies, par ailleurs, ne contiennent que la réponse numérique (6). Les erreurs relevées à l'item 9a se distinguent surtout par la tentative des élèves à convertir l'unité de mesure, le kilomètre en mètres. Ainsi, des réponses telles que : «166 jours » ou « 17 jours » sont produites à la suite de calculs de type : $1000\div6= 166$ ou $100/6 \approx 17$.

À l'item 9b, l'erreur la plus fréquente (8% de l'ensemble des élèves; 5% non à risque et 17% des élèves à risque) est la réponse, *4 enfants* plutôt que 8 *enfants*. Cette réponse est obtenue en considérant le nombre d'enfants pour 1 réglisse plutôt que pour 2. Il est plus aisé numériquement d'identifier le nombre de ¼ dans 1 que dans 2. La réponse « 2 enfants », produite par 6 élèves (5%), soit 5 élèves non à risque (5%)

et un élève à risque (4%), semble relever d'une confusion entre les deux grandeurs en jeu, soit les réglisses (2) et le nombre d'enfants qui y correspond (ce qui est recherché).

Ces deux items sont mieux réussis que ceux sollicitant l'interprétation partage. Ce résultat peut paraître étonnant étant donné que la division, dans l'ensemble des naturels, est surtout traitée selon le sens partage. Cependant, les énoncés «groupement» de notre épreuve demandent à identifier le nombre de répliques de 1/b dans 1 ou 2. Il est relativement aisé de mettre en place une stratégie pour solutionner cet énoncé : répliquer autant de fois que nécessaire 1/b pour faire 1 ou 2. Cependant, dans les énoncés «partage», la fraction n'est pas une donnée numérique du problème mais la solution et, de plus, cette fraction n'est pas une fraction unitaire. En effet, l'analyse des erreurs au problème «partage» suggère que la difficulté provient de la combinaison de la partition par un nombre impair et de la partition d'un nombre (a) par un nombre (b) avec a>b. Cette dernière caractéristique entraine différents schèmes de partition dont le contrôle exige une référence au tout adéquate, ce qui n'est pas le cas dans l'énoncé de type « groupement ». Ainsi, le sens même de la division comme «groupement», qui peut se modéliser, en acte, par une addition répétée, ainsi que la fraction choisie (1/n) expliquent sans doute les meilleurs résultats obtenus au sens «groupement» de la division qu'au sens «partage».

Enfin, les analyses statistiques ne montrent pas de différence significative entre les performances des deux catégories d'élèves. À cet égard, il est à remarquer que les erreurs ou les stratégies inappropriées qu'elles sous-tendent ne diffèrent pas selon les catégories d'élèves.

4.4 La fraction comme rapport

L'interprétation rapport est sollicitée dans cette épreuve via les deux items de la question 7. Pour chacun de ces items, l'élève doit déterminer lequel des deux rapports, pizzas/garçons ou pizzas/filles est le plus grand. Le dessin fourni à l'item 7a montre 1 pizza pour 3 garçons et 2 pizzas pour 4 filles. Le dessin de l'item 7b montre 4 pizzas pour 5garçons et 2 pizzas pour 3 filles. Le tableau 4 rapporte les taux de réussite des élèves à risque, des élèves non à risque, et de l'ensemble des élèves pour chacun des deux items.

Tableau 4 Taux de réussite aux items portant sur la fraction en tant que rapport

	L'item 7a 1 pizza pour 3 garçons et 2 pizzas pour 4 filles	L'item 7b 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles
Élèves à risque	**89%**	**92%**
Élèves non à risque	**96%**	**76%**
Ensemble des élèves	**94%**	**79%**

Tel que rapporte le tableau 4, l'item 7a est fortement réussi avec un taux de 94%, alors que le taux de réussite de l'item 7b est de 79%. Cette différence de performance, chez l'ensemble des élèves, est essentiellement attribuée à l'écart de réussite entre les élèves à risque et les élèves non à risque. Ainsi, à l'item 7a, les élèves à risque réussissent à 89% et les autres élèves à 96%. Toutefois, pour l'item 7b, le taux de réussite chez les élèves jugés non à risque est de 76%. Il est non seulement plus bas que celui de l'item 7a, mais également plus bas que le taux de réussite enregistré chez les élèves jugés à risque, soit 92%.

Le tableau 4.1 présente, selon les deux catégories d'élèves, la moyenne de réussite ainsi que les résultats aux tests-t effectués à chacun des deux items de la question 7.

Tableau 4.1 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque aux items portant sur la fraction en tant que rapport

	Sujets	**N**	**Moyenne**	**Écart-type**	**t**	**Sig.**
Item 7a	Non à risque	96	.9583	.20088	1.069	.293
	À risque	27	.8889	.32026		
Item 7b	Non à risque	91	.7582	.43052	-2.264	.027*
	À risque	25	.9200	.27689		

À l'item 7a, les analyses statistiques ne soulignent aucune différence significative entre la réussite des deux groupes [$t(121)=1{,}07$; $p=0{,}29$]. Par contre, à l'item 7b, la différence de réussite entre les deux catégories d'élèves s'avère significative [$t(114)=-2{,}26$; $p=0{,}03$], les élèves à risque réussissant significativement mieux cet item que les élèves non à risque. Pour interpréter ce résultat, relativement surprenant, il est possible qu'il y ait parmi les réussites et ce, dans les deux catégories d'élèves, des «fausses[19]» réussites, dans la mesure où, autant à l'item 7a qu'à l'item 7b, le

[19] Les données des élèves portant sur la justification de leurs réponses à la question 7 ne sont pas traitées dans la présente étude. La variété des réponses exige des analyses fines qui nécessitent un temps considérable. Nous avons jugé bon de reporter ce travail à une étude ultérieure.

rapport le plus grand est celui où les nombres comparés sont les plus grands. Ainsi à 7a, le rapport 2 pour 4 est plus grand que le rapport 1 pour 3 et, à l'item 7b, le rapport 4 pour 5 est plus grand que le rapport 2 pour 3. Il est possible que les élèves à risque soient plus nombreux à choisir l'illustration qui comporte la plus grande quantité à la fois de pizzas et de personnes, sans qu'une comparaison des rapports soit véritablement établie. Ce comportement pourrait être plus fréquent à l'item 7b pour lequel la comparaison est plus difficile à établir.

Pour l'item 7b, Il est à noter que l'écart entre le numérateur et le dénominateur de chacun des rapports est le même, soit 1. Cette caractéristique semble suggérer davantage un jugement d'égalité entre les rapports 4/5 et 2/3 qu'entre les rapports 1/3 et 2/4 (1/2). En fait, la réponse de type «la part des filles est égale à la part des garçons», qui repose sur l'écart entre le nombre de pizzas et le nombre de personnes, n'apparaît qu'une seule fois à l'item 7a chez un élève non à risque, mais elle est produite par 1/27 (4%) des élèves à risque et par 7/96 (8%) des élèves non à risque à l'item 7b. La comparaison des rapports 4/5 et 2/3 suggère davantage un raisonnement additif que celle des rapports 1/3 et 2/4 (1/2) sans doute du fait que ces deux dernières fractions sont plus familières aux élèves.

La question 7 sollicite l'interprétation rapport, mais convoque fortement l'interprétation quotient, laquelle fait appel à la partition. Le recours aux partitions sur les dessins des pizzas pour déterminer la part de chacun est plus facile à assurer à l'item 7a qu'à l'item 7b, sans doute à cause des plus petits nombres impliqués à l'item 7a. Cette stratégie n'est pas aussi évidente à l'item 7b puisque des coupures en 5 de chacune des 4 pizzas mènent à 20 parts qui deviennent difficiles autant à distribuer qu'à démêler. La quantification, et la comparaison, des rapports de chacun (garçons ou filles) s'avèrent plus complexes à établir à partir des partitions produites sur les dessins. Les figures 27 et 28 témoignent de cette difficulté.

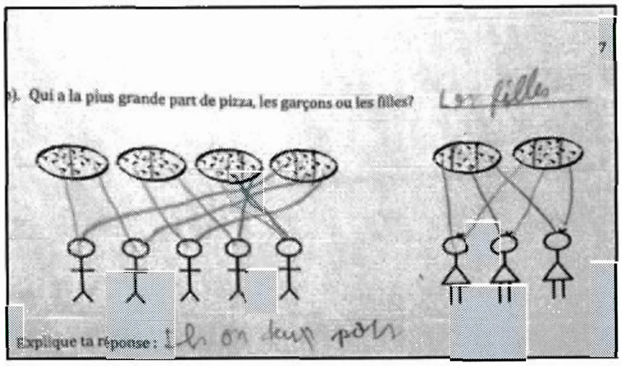


Figure 27 Exemple 1 de réponses à l'item 7b

La figure 27 montre la difficulté à assurer l'équipartition lors du partage des pizzas des garçons. Après une bipartition des trois premières pizzas, l'élève tente de produire 5 parts avec le restant (1 pizza et 1/2). Cependant, la partition sur la moitié de la troisième pizza conduit à des parts (1/4) inégales à celles obtenues du partage de la dernière pizza (1/3). De plus, la réponse de l'élève «des filles ont la plus grande part de pizza» peut être affectée par une centration sur les parts les plus petites, représentant les 1/4, attribuées aux garçons.

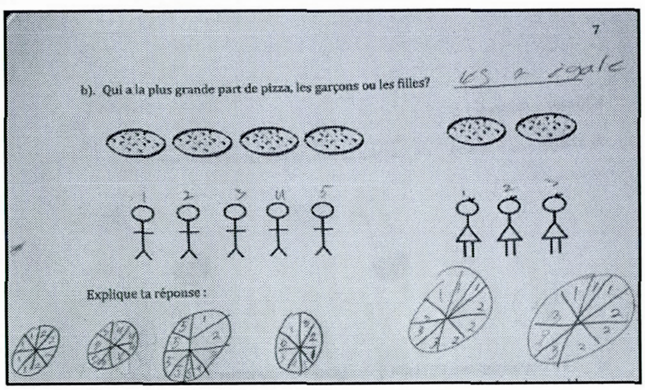


Figure 28 Exemple 2 de réponses à l'item 7b

À la figure 28, les représentations dessinées montrent des partitions qui n'assurent pas toujours l'équipartition.

Aux deux figures, la démarche s'appuie essentiellement sur le partage (qui peut être une étape pour quantifier le quotient). Cependant, les partitions dans les deux cas n'aident pas à quantifier la part de chacun.

La démarche de la figure 29 se distingue des deux précédentes par une sollicitation (ou un rapprochement) plus marquée de l'interprétation rapport. La figure montre que l'élève trouve d'abord le quotient le plus facile à déterminer, soit celui des filles (2/3). Ensuite, ce quotient est utilisé comme rapport de comparaison avec la part des garçons. La vérification de ce rapport (2/3), en l'appliquant sur les pizzas des garçons, lui permet non seulement de constater que le rapport chez les garçons est plus grand, mais aussi de déterminer de combien il est plus grand (reste 2/3). L'équation mathématique qui sous-tend ce raisonnement s'écrit: (5x2/3)+2/3=12/3=4. Cet exemple montre la complémentarité entre les deux interprétations, quotient et rapport, impliquées dans cette question.

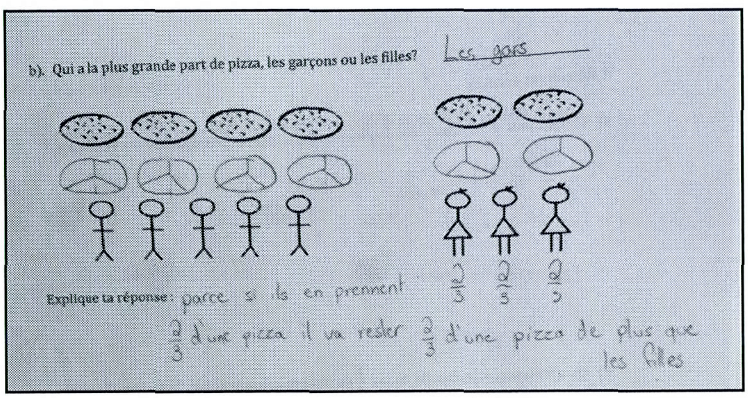


Figure 29 Exemple 3 de réponses à l'item 7b

Les exemples de réponses rapportées ci-dessus montrent que les élèves s'appuient essentiellement sur la partition pour déterminer le rapport le plus grand. Cela mène à noter une fois de plus l'importance de la connaissance reliée à l'équipartition. Par ailleurs, les réponses des élèves montrent une autre démarche qui s'appuie sur la comparaison des quantités de pizzas en relation avec la comparaison du nombre de personnes associées. Voici un exemple de réponse à l'item 7a qui témoigne de ce raisonnement: «la quantité des pizzas des filles (2) est le double de la quantité des pizzas des garçons (1), mais le nombre de filles (4) est moins que le double du nombre des garçons (3). Il faut 2 filles de plus pour que ce (rapport) soit égal, alors les filles auront plus de pizzas que les garçons».

4.5 La fraction comme mesure

L'interprétation mesure est sollicitée à la question 4 pour laquelle l'élève doit situer la fraction 2/3 sur une demie droite numérique où sont repérés les entiers 0, 1, 2 et 3. Au tableau 5, sont rapportés le taux de réussite ainsi que le pourcentage des différentes réponses erronées obtenues selon les catégories d'élèves.

Tableau 5. Taux de réponses fournies à la question 4 portant sur l'interprétation mesure

		Bonne réponse À 2/3	***Réponses erronées***					Total
			Entre 0 et 1	Entre 1et 2	À2	Entre 2 et 3	Après 3	
Élèves à risque	Effectif	5	2	0	5	8	7	27
	%	19%	7%	0%	19%	30%	26%	100%
Élèves non à risque	Effectif	13	7	1	42	25	8	96
	%	14%	7%	1%	44%	26%	8%	100%
Ensemble des élèves	Effectif	18	9	1	47	33	15	123
	%	15%	7%	1%	38%	27%	12%	100%

Tel que présenté au tableau 5, le taux de réussite est de 19% chez les élèves à risque et de 14% chez les élèves non à risque. Selon l'analyse statistique khi2 ($x^2(5) = 9{,}60$; $p = 0{,}09$), il n'y pas de différence significative entre les taux de réussites des deux catégories d'élèves.

Par ailleurs, c'est à la question 4 qu'est relevé le plus bas taux de réussite de l'épreuve et ce, chez l'ensemble des élèves. Un examen des différentes réponses erronées s'avère nécessaire afin de comprendre l'interprétation engagée par les élèves pour situer 2/3 sur une droite numérique. Les pourcentages rapportés au tableau 5 montrent que la majorité des élèves, soit 38% (19% des élèves à risque et 44% des élèves non à risque) placent 2/3 au point où se situe 2. Cette réponse témoigne d'un traitement de la droite numérique en tant que tout continu. Quelques élèves tiennent même à le préciser en marquant l'espace entre 0 et 2 de la droite numérique. D'autres délimitent «le tout de référence» entre 0 et 3, comme le montre la production de l'élève rapportée à la figure 30. Ces élèves montrent ainsi les 2/3 de 3.

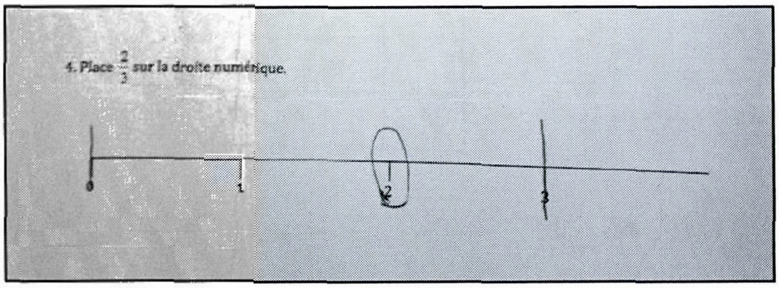


Figure 30 Exemple de réponses à la question 4

Situer 2/3 entre 2 et 3 est la deuxième réponse la plus fréquente et produite par 27% des élèves (30% des élèves à risque et 26% des élèves non à risque). Les termes de la fraction 2/3 sont ici utilisés comme repères sur la droite entre lesquels est situé 2/3. La troisième réponse erronée la plus fréquente «Après 3» est produite par 12% des élèves (26% des élèves à risque et 8% des élèves non à risque). Situer 2/3 « Après 3 » semble répondre à l'exigence de situer cette fraction dans le voisinage du nombre qui est le dénominateur de la fraction. Finalement, il importe de mentionner que 7% des élèves ont placé 2/3 entre 0 et 1, mais sur un point éloigné de celui de 2/3. Il est possible que cette réponse indique une représentation de la fraction 2/3 comme étant inférieure à 1.

En somme, la réussite très faible à la question 4 montre la difficulté des élèves, peu importe la catégorie à laquelle ils appartiennent, à considérer la fraction 2/3 comme un nombre pouvant être placée sur une droite numérique. Si ce résultat concorde avec celui d'autres études, l'analyse des réponses erronées des élèves qui ont participé à notre étude met en évidence que la prégnance de l'interprétation partie/tout de la fraction fait obstacle à la conception numérique d'une fraction et participe, sans doute, à la difficulté de situer une fraction sur une droite numérique.

Non seulement la réussite à ce problème demande de considérer la fraction comme nombre, mais elle fait également appel à la compréhension de la droite numérique. Utilisée en contexte scolaire comme représentation physique de la droite des réels, elle vise essentiellement à travailler les relations d'ordre dans N, dans Z et dans Q. Toutefois, certaines études interrogent la signification que peuvent s'en donner les élèves (Janvier, 1994).

4.6 La fraction comme opérateur

L'item 9c, présenté sous forme d'un énoncé de problème, sollicite l'interprétation opérateur. Il se lit ainsi : « Émilie a gagné 12$ en pelletant chez le voisin. Marie a gagné les 2/3 du salaire d'Émilie en pelletant, elle aussi chez un voisin. Combien Marie a-t-elle gagné? ». La mesure (12$) et l'opérateur (2/3) sont donnés, une application directe de l'opérateur sur la mesure permet de trouver la mesure recherchée: 2/3x12$=8$.

Le taux de réussite à l'item 9c est de 74% pour l'ensemble des élèves. La réussite à cet item, de 56 %, chez les élèves à risque est moins élevée que celle des élèves non à risque qui est de 79%. Les analyses statistiques fournissent des résultats significatifs (t (116)= 2.10; p=0,04) qui permettent de conclure que les élèves à risque réussissent moins bien que les élèves non jugés à risque à cet item. Le tableau 6 présente, selon les deux catégories d'élèves, la moyenne de réussite ainsi que les résultats du test-t.

Tableau 6 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque à l'item 9c portant sur la fraction en tant qu'opérateur

	Sujets	**N**	**Moyenne**	**Écart-type**	**t**	**Sig.**
Item 9c	Non à risque	91	.7912	.40870	2.102	.043
	À risque	25	.5600	.50662		

L'examen des différentes réponses des élèves est mis en œuvre afin d'interpréter cette différence.

Tout d'abord, il importe de souligner que pour les élèves ayant réussi ce problème, 36% d'entre eux ont laissé des traces témoignant d'un traitement de la fraction 2/3 en tant que composition de deux opérateurs entiers (division par 3 et multiplication par 2). La stratégie faisant appel à des dessins représentant les 2/3 de 12 est convoquée par 22% des réussites. Si 29% des réussites ne sont pas accompagnées de traces de démarches, 13% ont laissé des traces de calculs pour produire une fraction équivalente à 2/3 dont le dénominateur est la mesure donnée, soit 12 : « $\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ »

Les fréquences et les différentes réponses des élèves sont présentées au tableau 6.1. Selon ce tableau, la réponse erronée la plus fréquente est «6 \$» ; elle est fournie par 3/25 (12%) élèves à risque et 6/91 (7%) élèves non à risque. Cette réponse suggère que les élèves appliquent l'opérateur 1/2 à la mesure (12\$) ou encore divise cette mesure par le numérateur de l'opérateur (2/3) comme indiqué sur une copie d'un élève à risque : 12 ÷2= 6. Sur une autre copie, l'opération est traduite dans une écriture multiplicative : 2 x 3 = 6. Sur une des copies des élèves non à risque, ce n'est pas un calcul qui accompagne la réponse 6\$, mais le dessin d'un rectangle partagé en 12 parties égales dont 3 parties sont hachurées. Le résultat donné par l'élève s'explique, soit par une opération qui n'a pas été produite telle que 3x2=6, soit que l'élève ne s'est pas référé au dessin pour donner sa réponse.

La mesure «4 \$» est la réponse fournie par 4 % des élèves (1/25 élève à risque et 4/91 élèves non à risque). Cette réponse relève d'une application de l'opérateur unitaire 1/3 sur la mesure 12. Ainsi, une seule des deux opérations est effectuée, soit celle de la division de la mesure par le nombre associé au dénominateur. La réponse « 24\$ », donnée par 3 élèves (3%), démontre aussi la réalisation d'une seule opération, mais cette fois-ci, de la multiplication par le nombre associé au numérateur, soit 12x 2= 24.

Tableau 6.1 Fréquences et taux des réponses à l'item 9c portant sur l'interprétation opérateur

		Bonne réponse	*Réponses erronées*				
		8$	Réponse 6$	Réponse 4$	Réponse 24$	Réponse 9$	autres
Élèves à risque	Effectif	14	3	1	1	1	5
	%	56%	12%	4%	4%	4%	20%
Élèves non à risque	Effectif	72	6	4	2	1	6
	%	79%	7%	4%	2%	1%	7%
L'ensemble des élèves	Effectif	86	9	5	3	2	11
	%	74%	8%	4%	3%	2%	10%

Les réponses suivantes ne sont produites que par les élèves jugés à risque : «2 », « 3 », « 2/3 » et « 12 ». Ces nombres sont tous tirés des données du problème, soit directement (2/3 et 12) soit indirectement (2 et 3 pour 2/3). Ce type de réponses témoigne sans doute davantage d'une clause implicite du contrat, celle de fournir systématiquement une réponse aux questions, que d'un calcul relationnel engagé pour résoudre l'énoncé.

Deux élèves non à risque produisent la réponse « 72$ » qui résulte de la multiplication par 2 de la mesure donnée et ensuite du produit obtenu par 3 : 12x2=24 et 24x3=72. Cependant, les réponses « 14$ » et « 15$ » semblent relever de calcul additif : 12+2 et 12+3.

En somme, les résultats au problème sollicitant l'interprétation opérateur montrent une « bonne » réussite pour l'ensemble des élèves. Cette réussite est cependant plus forte chez les élèves jugés non à risque que chez les élèves jugés à risque.

4.7 Comparaison et Équivalence

Cette section présente et analyse les résultats de la question 1 et ceux de la question 5 de l'épreuve, impliquant respectivement la comparaison et l'équivalence des fractions. Les taux de réussite à chacune de ces questions varient de façon considérable. Ainsi, à la comparaison de neuf paires de fractions, les taux de réussite varient entre 47% et 87%. Aux items de la question 5 traitant de l'équivalence, les taux de réussite oscillent entre 30% et 89%.

4.7.1 Comparaison de deux fractions

La première question de l'épreuve utilisée dans cette étude consiste à encercler la fraction la plus grande pour chacune des 9 paires de fractions désignées par des lettres allant de *a* jusqu'à *i*.

Le tableau 7.1 présente les taux de réussite à la comparaison de chacune des 9 paires de fractions, regroupées selon leurs caractéristiques telles que présentées à l'analyse a priori. Ce tableau montre que pour l'ensemble des élèves la paire *f*, 1/2 et 3/8, est la mieux réussie avec un taux de 88%. C'est également cet item qui est le mieux réussi chez les élèves non à risque, avec un taux de succès de 93% alors que chez les élèves à risque, c'est l'item *e*, 3/7 et 5/8, qui est le mieux réussi avec un taux de succès de 88%. L'item le moins réussi, chez l'ensemble des élèves, est la paire *g* , 6/5 et 8/7, avec un taux de succès de 47 %. Cet item est aussi celui qui est le moins réussi chez les élèves à risque, avec un taux de succès de 41 %. C'est cependant la paire *i*, ¾ et 7/9, qui est la moins réussie chez les élèves non à risque.

Tableau 7.1 Taux de réussite aux items portant sur la comparaison de deux fractions

Caractéristiques des a/b et c/d	**Même dénominateur b=d**		**Même numérateur a=c**		**Le dénominateur de l'une est multiple de l'autre d=nxb**		**Sans relation multiplicative entière entre b et d**		
Items de la question1 / Catégories des élèves	**a)** **115/105** **112/105**	**b)** **12/13** **11/13**	**c)** **1/13** **1/9**	**d)** **19/20** **19/23**	**f)** **1/2** **3/8**	**h)** **5/4** **15/16**	**e)** **3/7** **5/8**	**g)** **6/5** **8/7**	**i)** **3/4** **7/9**
Élèves à risque	78%	78%	65%	50%	70%	52%	88%	41%	56%
Élèves non à risque	84%	89%	79%	73%	93%	68%	84%	49%	47%
Ensemble des élèves	83%	87%	76%	68%	88%	64%	85%	47%	50%

Deux stratégies de comparaison sont répertoriées sur les copies des élèves. La première est la mise sous un dénominateur commun, visible sur 13 copies dont l'une est celle d'un élève jugé à risque. La deuxième est une représentation dessinée de chacune des fractions. Elle n'est relevée cependant, que chez un seul élève, de la catégorie d'élèves non à risque. Par ailleurs, il n'est pas impossible que les élèves qui n'ont pas laissé de traces aient mis en œuvre l'une de ces stratégies sur au moins une des paires, soit sur des feuilles non récupérées ou encore mentalement.

Dans les paragraphes suivants, les résultats de comparaison de chacune des neuf paires de fractions sont présentés selon les quatre catégories établies : 1) les paires de fractions ayant le même dénominateur, 2) les paires de fractions ayant le même numérateur, 3) les paires de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre et 4) les paires de fractions n'ayant pas de relation multiplicative « entière » entre les dénominateurs. À chaque catégorie, le résultat de chacune des paires de fractions est analysé d'une part, à l'égard des paires de la même catégorie et, d'autre part, en fonction des élèves jugés à risque, non à risque et de l'ensemble de ces élèves. Sont rapportés également les résultats des analyses statistiques concernant la comparaison des deux groupes, élèves à risque et non à risque.

4.7.1.1 Comparaison de fractions avec un dénominateur commun

Pour l'ensemble des élèves, les taux de réussite à la comparaison des deux paires de fractions ayant le même dénominateur, soit *a*) 115/105 et 112/105 et *b*) 12/13 et 11/13, sont respectivement de 83% et 87%. Il s'agit de la catégorie dont les taux de réussite présentent le plus petit écart. Ainsi, chez les élèves à risque, le taux de réussite est le même pour les deux paires, soit de 78%. Pour les élèves non à risque, les taux de réussite diffèrent légèrement, 84% pour la paire *a* et 89% pour la paire *b*. Bien qu'il y ait peu de différence entre ces taux, il est possible que la comparaison de

115/105 et 112/105 soit moins réussie du fait que les deux fractions sont impropres et peu familières, même si la stratégie de comparaison est la même que pour des fractions, avec même dénominateur, inférieures à 1.

Les analyses statistiques ne révèlent pas de différence significative, à la paire *a* ($x^2(1) = 0{,}57$; $p = 0{,}45$), et à la paire *b* : ($x^2(1) = 2{,}52$; $p = 0{,}11$).

4.7.1.2 Comparaison de fractions avec un numérateur commun

La comparaison des paires de fractions ayant le même numérateur, soit *c*) 1/13 et 1/9 et *d*) 19/20 et 19/23, est réussie respectivement par 76% et 68% de l'ensemble des élèves. La paire *c* est réussie par 65% des élèves jugés à risque et par 79 % des autres élèves. La différence de réussite entre les deux groupes n'est cependant pas confirmée par l'analyse statistique effectuée : ($x^2(1) = 1{,}98$; $p = 0{,}16$). Pour la paire *d*, le taux de réussite est de 50 % chez les élèves à risque et de 73 % chez les élèves non à risque. Cette différence se révèle significative : ($x^2(1) = 5{,}16$; $p = 0{,}02$).

On peut s'étonner que *c* soit mieux réussi que *d* puisqu'une stratégie de comparaison à l'entier permet de constater assez facilement que la fraction 19/20, étant plus près de l'entier que 19/23, est la plus grande. Pourtant cette comparaison est moins réussie que la comparaison de 1/13 et 1/9. La stratégie de réussite pour cette dernière paire réfère vraisemblablement à une interprétation en terme de partie/tout : 1 morceau sur 13 morceaux représente une plus petite part que 1 morceau sur 9 morceaux. Ce raisonnement est sans doute moins adapté pour se représenter les quantités associées aux fractions 19/20 et 19/23. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles les élèves jugés à risque ont un score sur la comparaison de ces fractions significativement inférieur aux élèves non à risque.

La comparaison de fractions de même numérateur est moins réussie que celle de fractions de même dénominateur. À dénominateur commun, la fraction la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand, ce qui ne met pas en défaut la conception développée sur les nombres naturels. Cependant, à numérateur commun, la fraction la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus petit. Ainsi, pour comparer des fractions de même numérateur, il faut nécessairement comparer la relation numérateur/dénominateur puisqu'une règle de comparaison qui s'appuie sur l'ordre des entiers n'est pas suffisante.

De plus, si des stratégies telles que la représentation dessinée des fractions et la mise sous un dénominateur commun peuvent aider à comparer certaines paires, il est évident qu'elles sont moins efficaces pour des paires ayant le même numérateur. Les productions d'élèves aux figures 31 et 32 montrent que ces stratégies rencontrent des réelles limites lorsqu'elles sont appliquées sur la paire *d*.

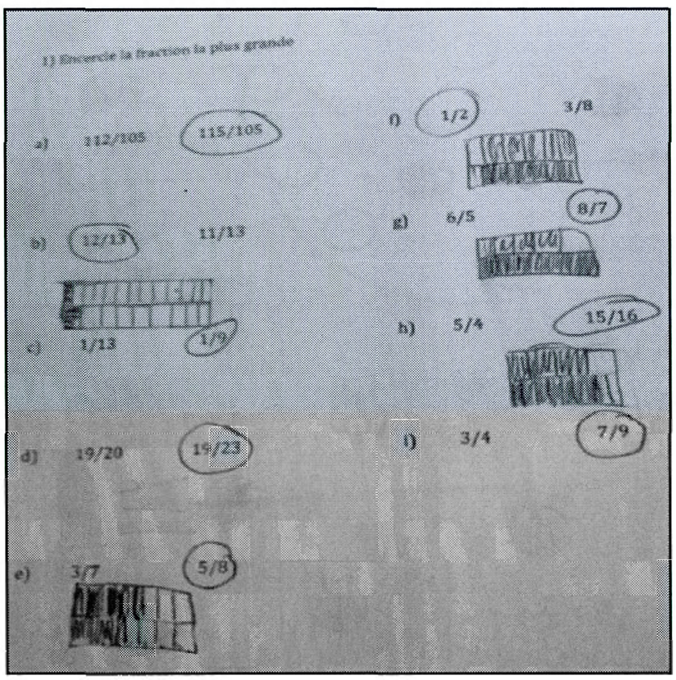


Figure 31 Exemple 1 de réponses à la question1

À la figure 31, la comparaison passe par la représentation des fractions sauf pour les paires *a, b* et *f.* Cette représentation, sollicitée pour quantifier les fractions, s'avère réussie pour la paire *c*, ce qui n'est pas le cas pour la paire *d.* À cette dernière, les traces effacées du dessin suggèrent que, après avoir essayé de représenter les fractions, l'élève est dans l'impasse, sans doute à cause de la taille des nombres constituant ces fractions. On ne peut, par ailleurs, déterminer le moyen utilisé pour la réponse donnée par l'élève. Les limites de la représentation dessinée des fractions se remarquent également aux paires *g* et *h.* À défaut de représenter des fractions impropres (6/5, 8/7 et 5/4), ce sont leurs inverses (5/6, 7/8 et 4/5) qui sont représentées et comparées.

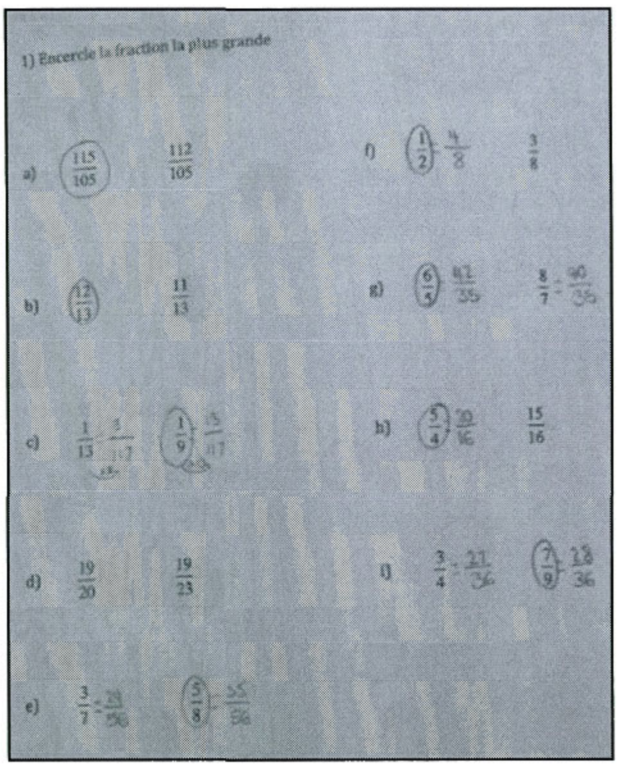


Figure 32 Exemple 2 de réponses à la question 1

À la figure 31, la comparaison s'appuie sur la mise sous un dénominateur commun pour toutes les paires sauf pour la *d* qui n'est accompagnée ni de démarche, ni de réponse. Il est possible que résoudre les opérations de multiplication qu'exigent la mise sous un dénominateur commun soit un obstacle à cause des grands nombres constituant ces fractions.

4.7.1.3 Comparaison de fractions dont un dénominateur est multiple de l'autre

La troisième catégorie comporte des fractions à comparer dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre : *f*) 1/2 et 3/8 et *h*) 5/4 et 15/16. Pour l'ensemble des élèves, la comparaison de la paire *f* est la mieux réussie, de toutes les paires à comparer, avec un taux de succès de 88%. C'est également celle qui est la mieux réussie dans la catégorie des élèves non à risque avec un taux de réussite de 93%. Cependant, chez les élèves à risque, le taux de réussite n'est que de 70%. Cette différence est statistiquement significative : ($x^2(1) = 9{,}66$; $p = 0{,}00$). L'équivalence entre 1/2 et 4/8 favorise la comparaison entre 1/2 et 3/8. Sans doute que les élèves n'ayant pas réussi la comparaison n'ont pas référé à 1/2 mais plutôt considéré que les termes de la fraction 3/8 sont plus grands que ceux de 1/2.

Le taux de réussite à la paire *h* est de 64% pour l'ensemble des élèves. Pour la paire *h,* les analyses statistiques ne révèlent pas de différence significative entre le taux de réussite des élèves jugés à risque qui est de 52% et celui des élèves non à risque qui est de 68% : ($x^2(1) = 2{,}30$; $p = 0{,}13$). On peut s'étonner qu'une fraction impropre soit jugée plus petite qu'une fraction inférieure à 1 par un pourcentage relativement important d'élèves et ce, plus particulièrement chez les élèves à risque. Il semble que la fraction 15/16, étant donné les termes qui la composent, soit jugée plus grande que 5/4.

4.7.1.4 Comparaison de fractions sans relation multiplicative entière entre les dénominateurs.

Les trois dernières paires de fractions à comparer impliquent des fractions dont les dénominateurs n'entretiennent aucune relation multiplicative entière : *e)* 3/7 et 5/8; *g)* 6/5 et 8/7; *i)* 3/4 et 7/9. La paire *e* est réussie par 85 % des élèves. Les paires *g* et *i* sont respectivement réussies par 47% et 50% des élèves. Les élèves jugés à risque réussissent la paire *e à* 88%, la paire *g à* 41% et la paire *i à* 56%. Ces taux de réussites sont comparables à ceux obtenus par les élèves non à risque : *e* : 84% ; *g* : 49% et *i* : 47%. Aucune différence significative entre les réussites des deux catégories d'élèves n'est constatée : ($x^2(1) = 0{,}29$; $p = 0{,}59$) pour la paire *e*, ($x^2(1) = 0{,}56$; $p = 0{,}45$) pour la paire *g* et ($x^2(1) = 0{,}56$; $p = 0{,}45$) pour la paire *i*.

De toutes les paires de la question, la paire *g* (6/5 et 8/7) est la moins réussie pour l'ensemble des élèves ainsi que pour les élèves à risque. De plus, la paire *i* (3/4 et 7/9) est la moins réussie des neuf paires pour les élèves non à risque. Par contre, la réussite de la paire *e* (3/7 et 5/8) est remarquablement plus élevée, que les paires *g* et *i*, peu importe la catégorie d'élèves. La paire *e* est d'ailleurs la mieux réussie chez les élèves à risque.

La faible réussite à la paire *g* relève sans doute de la difficulté à comparer deux fractions impropres, dont l'écart entre le numérateur et le dénominateur est de 1, puisque la fraction qui comporte les plus petits termes (6/5) est plus grande que celle qui comporte les plus grands termes (8/7).

Quant à la paire *i*, 7/9 > 3/4 alors que l'écart entre 3 et 4 est plus petit que celui entre 7 et 9. Cependant, les termes de 7/9 sont plus grands que ceux de 3/4. Une stratégie efficace est de considérer la fraction équivalente à 3/4, soit 6/8, pour la comparer à

7/9. L'écart entre le numérateur et le dénominateur de ces deux fractions est 2, mais celle dont les termes sont les plus grands (7/9) est plus près de l'entier que celle dont les termes sont plus petits (6/8). La comparaison entre 7/9 et 3/4 n'est pas facile bien que la stratégie erronée de choisir la fraction qui comporte les plus grands termes conduit ici à la bonne réponse. C'est peut-être pourquoi, un taux de réussite légèrement plus élevé est observé chez les élèves à risque (56 %) comparativement aux élèves non à risque (47 %).

Enfin, la réussite à la paire *e* (3/7 et 5/8) peut s'expliquer par le fait que la fraction qui comporte les plus grands termes est la fraction la plus grande. Il n'est donc pas certain que toute réponse juste soit associée à un raisonnement adéquat. L'écart de réussite entre *e, g et i,* qui présentent des paires de fractions répondant aux mêmes caractéristiques, tend à montrer que la comparaison ne s'établit pas nécessairement, pour toutes les réussites, sur des arguments mathématiquement valides.

En somme, un certain nombre de résultats se dégage de l'ensemble des paires à comparer. Le premier est à l'effet que les plus hauts taux de réussite ne sont pas associés aux paires ayant le même dénominateur, qui sont pourtant les fractions les plus « faciles » à comparer. Chez les élèves non à risque, la paire 1/2 et 3/8 est sans doute réussie par la familiarité de l'équivalence entre 1/2 et 4/8. Chez les élèves à risque, il est difficile de prétendre que la paire la mieux réussie, soit 3/7 et 5/8, repose sur un raisonnement adéquat. Dans cette perspective, il y a lieu de formuler, sur la base de l'ensemble de l'analyse, l'hypothèse que plus d'élèves à risque, comparativement aux élèves non à risque, établissent une comparaison en jugeant de la taille des termes impliqués dans chacune des fractions à comparer.

4.7.2 Équivalence

L'équivalence des fractions est visée par la question 5 de l'épreuve. À chacun des 3 items, une fraction est donnée et l'élève doit indiquer parmi 4 fractions celles qui lui sont équivalentes. Nous rappelons les fractions choisies : 1) 2/4 est comparée à : a) 4/6, b) 5/10, c) 1/3, et d) 4/8; 2) 2/6 est comparée à : a) 3/9, b) 6/10, c) 4/12 et d) 3/7; et 3) 4/10 est comparée à : a) 6/15, b) 2/5, c) 5/11 et d) 6/12.

Précisons d'emblée que 22 des 123 élèves (20 élèves non à risque et 2 élèves à risque) ont réussi tous les items de cette question. Parmi les 20 des élèves non à risque, 13 n'ont laissé aucune trace alors que 7 autres ont laissé des calculs numériques témoignant de la simplification des trois fractions de départ, soit 2/4, 2/6 et 4/10. Quant aux 2 élèves à risque, l'un n'a laissé aucune trace et l'autre, a laissé des traces de calculs numériques. La figure 33 montre un exemple de réussite complète à la question 5 de l'élève à risque.

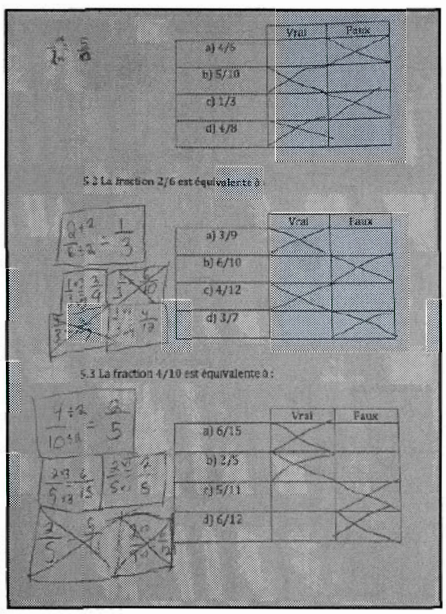


Figure 33 Exemple 1 de réponses à la question 5

Le tableau 7.2 présente les taux de réussite des élèves jugés à risque, non à risque et de l'ensemble de ces élèves, à chacun des items portant sur l'équivalence. Ce tableau montre que chez les élèves jugés à risque, la comparaison - du point de vue de l'équivalence - la mieux réussie, est celle entre 2/6 et 3/7 avec un taux de 88 %. Chez les élèves non à risque, c'est la comparaison de 2/4 avec 4/8 qui est la mieux réussie avec un taux de 91 %. La comparaison de 2/4 à 1/3 et à 4/8 obtient un taux de réussite de 89 % pour l'ensemble des élèves. La comparaison de fractions la moins réussie est, chez les élèves à risque, celle entre 2/6 et 3/9 avec un taux de réussite de 31 % et, chez les élèves non à risque, entre 4/10 et 6/15 avec un taux de réussite de 30 %. C'est cette même comparaison qui obtient, pour l'ensemble des élèves, le plus faible taux de réussite avec 31 %.

La réussite des élèves jugés à risque est moins élevée que celle des élèves non jugés à risque sauf, pour la comparaison des paires de fractions suivantes : 2/6 et 3/7, 4/10 et 6/15 et 4/10 et 5/11. Toutefois, les analyses statistiques montrent une différence significative seulement à une paire de fractions, 2/6 et 3/9. Dans ce qui suit, les résultats de chacun des trois items sont présentés et discutés plus finement.

Tableau 7.2 Taux de réussite aux items portant sur l'équivalence de fractions

	Les items de la question 5 portant sur l'équivalence											
	5.1 équivalence à 2/4				***5.2 équivalence à 2/6***				***5.3 équivalence à 4/10***			
	a) 4/6	**b) 5/10**	**c) 1/3**	**d) 4/8**	**a) 3/9**	**b) 6/10**	**c) 4/12**	**d) 3/7**	**a) 6/15**	**b) 2/5**	**c) 5/11**	**d) 6/12**
Élèves à risque	77%	42%	85%	81%	31%	72%	77%	88%	35%	75%	83%	74%
Élèves non à risque	81%	63%	90%	91%	55%	89%	85%	84%	30%	78%	76%	79%
L'ensemble des élèves	80%	58%	89%	89%	50%	85%	84%	85%	31%	78%	77%	78%

À l'item 5.1, la fraction donnée est 2/4. Les taux de réussite à chacune des 4 fractions proposées sont pour l'ensemble des élèves : a) 4/6 : 80%, b) 5/10 : 58%, c) 1/3 : 89% et d) 4/8 : 89%. La réussite des élèves jugés à risque est moins élevée que celle des élèves non à risque pour les 4 fractions proposées. Les taux de réussites des élèves à risque et des élèves non à risque sont respectivement de : a) 77% et 81%, b) 42% et 63%, c) 85% et 90%, d) 81% et 91%. Les résultats des tests-t, rapportés au tableau 7.3, ne montrent aucune différence significative entre la réussite des élèves à risque et celle des élèves non à risque.

Tableau 7.3 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque à l'item 5.1 portant sur l'équivalence

Item 5.1 (2/4)	**Sujets**	**N**	**Moyenne**	**Écart-type**	**t**	**Sig.**
a) 4/6	Non à risque	96	.8125	.39236	.489	.626
	À risque	26	.7692	.42967		
b) 5/10	Non à risque	96	.6250	.48666	1.863	.065
	À risque	26	.4231	.50383		
c) 1/3	Non à risque	96	.8958	.30708	.632	.529
	À risque	27	.8519	.36201		
d) 4/8	Non à risque	96	.9063	.29301	1.117	.272
	À risque	27	.8148	.39585		

Les deux fractions équivalentes à 2/4 sont 5/10 et 4/8. Si la fraction 4/8 est jugée équivalente à 2/4 par une grande proportion d'élèves (89 %), la fraction 5/10 n'est considérée équivalente à 2/4 que par 58 % des élèves. Cette différence est de même nature pour les deux catégories d'élèves. Peu d'écart est observé entre les taux de réussite des deux groupes d'élèves, soit 81 % chez les élèves à risque et 90 % chez les élèves non à risque pour la fraction 4/8. Pour la fraction 5/10, Plus de 20 points séparent le taux de réussite des élèves à risque (42 %) de celui des élèves non à risque (63 %).

Nous formulons une hypothèse pour rendre compte de l'écart de performances entre les paires de fractions (2/4 et 4/8) et (2/4 et 5/10). Les fractions 2/4 et 4/8 entretiennent une relation multiplicative entière entre leurs numérateurs et leurs dénominateurs. L'application de l'opérateur x 2 est une stratégie efficace et relativement simple pour juger de l'équivalence entre les fractions. Elle correspond aussi à la technique enseignée pour produire des fractions équivalentes. Cependant, cette stratégie ne peut être mise en œuvre pour juger de l'équivalence entre 2/4 et 5/10. Il faut soit ramener les deux fractions à la fraction irréductible 1/2, soit juger que 5 est la demie de 10 comme 2 l'est de 4. Cette dernière stratégie fait appel à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur de la fraction et ne semble pas être convoquée chez la plupart des élèves bien que 5/10 étant une fraction décimale, équivalente à 1/2 est sans doute relativement familière aux élèves.

Un autre résultat est que 4/6 est jugée plus fréquemment équivalente à 2/4 (23 % des élèves à risque et 19 % des élèves non à risque) que ne l'est 1/3 (15 % des élèves à risque et 10 % des élèves non à risque) et ce, bien que pour ces trois fractions, la différence entre les termes de la fraction est de 2. Il est possible que le fait que les termes de la fraction 4/6 soient des nombres pairs, tout comme ceux de la fraction 2/4, et forment une suite de multiples de 2 (2, 4, 6) soit un élément trompeur pour les élèves. Par contre, les termes impairs qui composent la fraction 1/3 semblent jouer en faveur d'une reconnaissance de la relation non équivalente qu'entretiennent 1/3 et 2/4.

À l'item 5.2, la fraction donnée est 2/6. Les taux de réussite à chacune des 4 fractions proposées sont, pour l'ensemble des élèves : a) 3/9 : 50%, b) 6/10 : 85%, c) 4/12 :

84% et d) 3/7 : 85%. La réussite des élèves jugés à risque est moins élevée que celle des élèves non à risque pour trois des quatre fractions proposées. En effet, les taux de réussite des élèves à risque et des élèves non à risque sont respectivement de : a) 31% et 55%, b) 72% et 89%, c) 77% et 85%, et d) 88% et 84%. Les résultats des tests-t sont rapportés au tableau 7.4.

Tableau 7.4 Différences de performances entre les élèves à risque et les élèves non à risque à l'item 5.2 portant sur l'équivalence

Item 5.2 (2/6)	**Sujets**	**N**	**Moyenne**	**Écart-type**	**t**	**Sig.**
a) 3/9	Non à risque	95	.5474	.50039	2.269	.028*
	À risque	26	.3077	.47068		
b) 6/10	Non à risque	96	.8854	.32019	1.700	.099
	À risque	25	.7200	.45826		
c) 4/12	Non à risque	96	.8542	.35479	1.034	.303
	À risque	26	.7692	.42967		
d) 3/7	Non à risque	96	.8438	.36500	-.450	.653
	À risque	25	.8800	.33166		

Ce tableau montre que la différence de réussite entre les élèves à risque et les élèves non à risque se révèle significative uniquement pour la paire de fractions 2/6 et 3/9. Il s'agit, d'ailleurs, de la fraction équivalente proposée dont le dénominateur n'est pas un multiple du dénominateur de 2/6 alors que la fraction 4/12, dont le dénominateur est multiple du dénominateur de 2/6, est réussie par 77 % des élèves à risque et 85 % des élèves non à risque. Ainsi, nous retrouvons la même tendance que celle observée dans la comparaison de 2/4 à 4/8 et 5/10. Les autres fractions comparées à 2/6, soit 6/10 et 3/7, sont identifiées non équivalentes dans une proportion de 72 % et 88 % par les élèves à risque et par 89 % et 84 % chez les élèves non à risque. Ces résultats sont intéressants du fait que la variation n'est pas la même selon les catégories d'élèves. La fraction 6/10 comporte des termes qui sont des nombres pairs tout comme 2/6. Il est possible que les élèves à risque aient été plus sensibles à cette caractéristique et donc, plus enclins que les autres à l'identifier comme une fraction équivalente à 2/6. Cependant, les élèves à risque sont plus nombreux que les élèves non à risque à reconnaitre que la fraction 3/7 n'est pas équivalente à 2/6, peut-être du fait que les termes sont impairs.

À l'item 5.3, la fraction donnée est 4/10. Les taux de réussite à chacune des 4 fractions proposées sont, pour l'ensemble des élèves : a) 6/15 : 31%, b) 2/5 : 78%, c) 5/11 : 77% et d) 6/12 : 78 %. C'est seulement à cet item, qu'une fraction équivalente irréductible est proposée dans les choix. Ainsi, alors que 78 % des élèves identifient la relation équivalente entre 2/5 et 4/10, ils ne sont que 31 % à reconnaitre 6/15 comme fraction équivalente à 4/10. Ainsi, la plupart des élèves n'ont pas établi de relation équivalente entre 2/5 et 6/15, bien que les numérateurs et dénominateurs de ces fractions soient reliés par un opérateur multiplicatif entier (x 3). Une telle relation aurait permis d'établir que si 2/5 = 4/10 et que 2/5 = 6/15 alors 4/10 = 6/15. Il faut cependant noter que les élèves se sont prononcés d'abord sur la relation entre 6/15 et 4/10 et ensuite sur celle entre 2/5 et 4/10.

La réussite des élèves jugés à risque est moins élevée que celle des élèves non à risque pour 2 des 4 fractions proposées. Les taux de réussites des élèves à risque et des élèves non à risque ne présentent pas de grands écarts et sont respectivement de : a) 35% et 30%, b) 75% et 78%, c) 83% et 76% et d) 74% et 79%. Il est cependant intéressant de constater que la fraction 5/11 est jugée équivalente à 4/10 par 17 % des élèves à risque et par 24 % des élèves non à risque. La différence entre les termes de 5/11 est la même que celle entre les termes de 4/10. Le meilleur rendement des élèves à risque à cet item semble être attribué, tout comme à l'item précédent, au fait que

5/11 est composé de termes impairs. En effet, dans la comparaison de 4/10 et 6/12, alors que les termes des deux fractions sont pairs, 26 % des élèves à risque et 21 % des élèves non à risque jugent que cette paire de fractions est équivalente.

Les résultats des tests-t sont rapportés au tableau 7.5, lequel montre qu'aucune différence significative n'est décelée entre la réussite des élèves à risque et celle des élèves non à risque.

Tableau 7.5 Différences de performance entre les élèves à risque et les élèves non à risque à l'item 5.3 portant sur l'équivalence

Item 5.3 (4/10)	Sujets	N	Moyenne	Écart-type	t	Sig.
a) 6/15	Non à risque	96	.3021	.46157	-.422	.673
	À risque	23	.3478	.48698		
b) 2/5	Non à risque	96	.7813	.41557	.325	.746
	À risque	24	.7500	.44233		
c) 5/11	Non à risque	96	.7604	.42907	-.671	.504
	À risque	23	.8261	.38755		
d) 6/12	Non à risque	96	.7917	.40825	.544	.588
	À risque	23	.7391	.44898		

En ce qui a trait aux stratégies mises en œuvre par les élèves, les traces, bien que peu nombreuses, témoignent de démarches par représentation dessinée ou calcul numérique. Onze élèves, dont un élève à risque, ont laissé des traces de calcul numérique. Seulement quatre copies d'élèves non à risque contiennent des représentations dessinées; deux sont de type représentation de touts discrets et deux, de type touts continus. Les copies contenant des représentations dessinées mettent en évidence les limites de cette stratégie, ainsi que certaines difficultés de comparaison discutées à la partie précédente. Tel que le montre les figures 34 et 35, bien que les démarches de partition soient adéquates pour représenter la quantité associée à chacune des fractions, la comparaison des quantités obtenues par la partition rend particulièrement difficile la comparaison de fractions dont la différence entre les termes est la même (voir, par exemple, les dessins pour comparer 4/10 à la figure 34 et les «tartes» dessinées pour 3/7 et 2/6 à la figure 35).

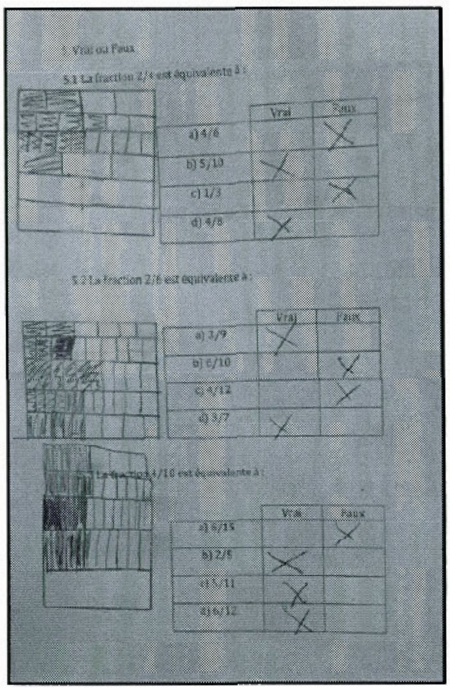


Figure 34 Exemple 2 de réponses à la question 5

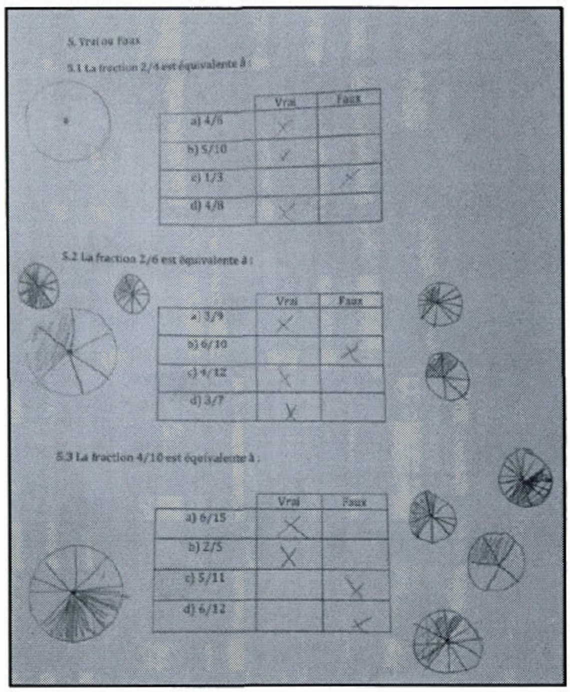


Figure 35 Exemple 3 de réponses à la la question 5

De l'ensemble des sous-items de la question 5 portant sur l'équivalence de fractions, certains résultats se dégagent. Les taux de réussite des élèves, à risque ou non, varient selon les exigences de la relation équivalente demandée. Ainsi, la mise en relation d'équivalence entre les fractions a/b et c/d est facilitée quand « b » entretient une relation multiplicative entière avec « d », autrement dit, lorsqu'un opérateur entier peut être appliqué aux termes de la fraction donnée pour obtenir la fraction avec laquelle elle est comparée. Les sous-items les moins réussis sont ceux pour lesquels un tel opérateur ne peut être appliqué. La réussite de ces sous-items nécessite des stratégies faisant appel, soit à la fraction irréductible de la fraction donnée, soit à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions à comparer. De telles stratégies ne semblent pas mobilisées par une grande majorité d'élèves. De plus, les stratégies de représentation dessinée, se rapportant à l'interprétation partie/tout, présentent des limites, même si les stratégies de partition sont convenablement appliquées. Finalement, la réussite des élèves jugés à risque ne diffère pas de manière significative de celle des élèves non jugés à risque sauf pour un des douze sous-items.

CHAPITRE V

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, en référant aux objectifs de la recherche, les résultats obtenus de nos analyses sont interprétés. Des liens sont également effectués avec les différentes recherches présentées dans notre cadre théorique afin d'éclairer nos résultats et de situer leur contribution dans le champ d'étude.

Au chapitre précédent, nous avons procédé à l'analyse des résultats par deux approches complémentaires. La première, grâce aux données descriptives, brosse un portrait de réussite à chacune des 11 questions de l'épreuve, et ce, pour l'ensemble de l'échantillon. Elle est complétée par une analyse comparative, sur la base d'analyses statistiques, des résultats des élèves identifiés à risque et non identifiés à risque. La seconde approche, strictement qualitative, dégage et analyse, lorsque les tâches s'y prêtent, les principales stratégies utilisées par les élèves.

La discussion menée dans ce chapitre est présentée en deux parties, chacune d'elles correspondant aux objectifs spécifiques de l'étude qui sont, rappelons-le de: a) spécifier les connaissances d'élèves de fin primaire sur les différentes interprétations ainsi que sur la comparaison et l'équivalence des fractions, b) comparer les performances des élèves jugés à risque à celles des élèves jugés non à risque à des tâches portant sur les différentes interprétations de la fraction, la comparaison et l'équivalence des fractions. Ainsi, la première partie procède à une synthèse et à une discussion des résultats en fonction de chacune des interprétations de la fraction, de la comparaison et de l'équivalence des fractions. La seconde partie présente une discussion sur les performances des élèves, selon qu'ils sont identifiés ou non à risque.

5.1 Les connaissances sur les fractions d'élèves de fin primaire selon les interprétations, la comparaison et l'équivalence de la fraction

La réalisation d'un portrait global des connaissances d'élèves de fin primaire sur les fractions incite le regroupement des items de l'épreuve selon les interprétations de la fraction. Bien que cette pratique soit répandue dans la majorité des études consultées sur les fractions, il importe de rappeler que le fait de regrouper des items sous une interprétation spécifique ne signifie ni que cette interprétation est totalement cernée, ni que ces items ne sollicitent que l'interprétation sous laquelle ils sont regroupés. Selon Blouin (2002), les différentes interprétations de la fraction peuvent être considérées en tant qu'outils conceptuels dans la création des épreuves sur la fraction qui permettent de réaliser un premier bilan des connaissances des élèves. Notre discussion sur les résultats de la présente étude suivra l'organisation établie dans l'analyse a priori. Cette organisation regroupe les items de l'épreuve selon les cinq interprétations de la fraction, la comparaison et l'équivalence des fractions.

À la lumière des analyses, les taux de réussite aux items oscillent globalement autour de 75%. Cependant, à certains items de l'épreuve, des écarts importants entre les taux de réussite sont relevés. Ces écarts seront étudiés d'une part, selon l'interprétation de la fraction principalement sollicitée par les tâches et, d'autre part, en fonction des variables didactiques et les relations impliquées sous une même interprétation. Selon les interprétations de la fraction, les réussites des élèves se classent de la façon suivante : rapport (87%), quotient groupement (82%), partie/tout (relation directe) (78%), opérateur (74%), partie/tout (relation indirecte) (68%), quotient partage (37%)

et mesure (15%)[20]. On note donc la forte réussite aux items regroupés sous les interprétations rapport et quotient groupement et la faible réussite aux items regroupés sous les interprétations mesure et quotient partage. La faible réussite aux interprétations mesure et quotient de type partage conforte les résultats des études antérieures présentées dans le cadre théorique. La réussite aux autres interprétations (partie/tout, rapport, opérateur et quotient groupement) note certaines particularités qui semblent résulter de l'effet de certaines variables qu'il importe d'identifier et de mettre en relation avec les connaissances engagées par les élèves.

5.1.1 Discussion des résultats aux items regroupés sous l'interprétation rapport

L'étude de Charalambous et Pitta-Pantazi (2006) rapporte une moyenne de réussite de 64% aux questions portant sur l'interprétation rapport. Ce taux se situe au 2^{e} rang des taux de réussite par interprétation, précédé de l'interprétation partie/tout, réussie à 75%. Dans notre étude, le taux de réussite obtenu à l'ensemble des items regroupés sous l'interprétation rapport est le plus élevé, soit de 87%. Les analyses qualitatives menées sur les stratégies engagées par les élèves montrent l'importance de considérer les variables numériques impliquées et les différentes relations à traiter aux différents items, pour interpréter ce taux de réussite.

Les valeurs numériques des items font en sorte que la réponse juste peut être donnée sans que les rapports soient établis et comparés. Prenons l'exemple suivant : 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles. Qui, des garçons ou des filles a la plus grande part de pizzas ? Une réponse basée sur la comparaison des quantités de pizzas (4>2),

---

[20] Pour les fins de la discussion, nous présentons la moyenne des taux de réussite des items regroupés sous la même interprétation.

sans considération des rapports pizzas/personnes, mènerait à déterminer que la part la plus grande est celle des garçons.

L'analyse des justifications formulées par les élèves de leur réponse s'avère donc incontournable pour interpréter les taux de réussite[21]. Si nous n'avons pas procédé à une analyse exhaustive de l'ensemble des réponses des élèves, nous rapportons quelques exemples qui illustrent la nature des connaissances activées par les élèves. Pour saisir la nature des connaissances mises en œuvre, il convient d'abord de rappeler que l'interprétation rapport est fortement liée à la relation d'équivalence (a/b=c/d ssi ad=bc). Cette relation permet également d'établir les équivalences suivantes : a/b=c/d, a/c=b/d et (les inverses) b/a=d/c et c/a=d/b. Les réponses des élèves aux items portant sur le rapport font appel à ces deux types de rapports qu'on peut considérer comme deux approches de résolution de ce type de problème. Reprenons l'exemple : 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles, qui, des garçons ou des filles, a la plus grande part de pizzas ? Pour résoudre ce problème, les élèves s'appuient sur la comparaison de deux types de rapports. La première sollicite la comparaison des rapports pizzas des garçons /pizzas des filles, soit 4/2, au rapport garçons/ filles (5/3) alors que la seconde se base sur la comparaison des pizzas/garçons (4/5) et pizzas/filles (2/3).

La première relation est rapportée par les élèves sous forme de comparaison relative des quantités en jeu : le nombre de pizzas des garçons (4) est le double du nombre de pizzas des filles (2), alors que le nombre des garçons (5) est moins que le double de celui des filles (3). Même si les fractions n'interviennent pas, le sens rapport est

[21] Nous n'avons pas pu établir une analyse fine et détaillée de toutes les justifications d'élèves. Afin d'y consacrer tout le temps et la rigueur nécessaires, nous avons jugé bon de reporter ce travail à une étude ultérieure.

fortement exprimé par deux types de rapports : 4 pour 2 (4/2) et 5 pour 3 (5/3). On comprend évidement que les rapports inverses sont aussi utilisés : les filles ont la moitié (2) des pizzas des garçons (4), et le nombre de filles (3), est plus que la moitié du nombre de garçons (5).

Le deuxième type de comparaison s'appuie sur le rapport que représente la part de chacun soit pizzas/ personnes, 4/5 et 2/3. Par la recherche de la part des garçons et celle des filles, c'est la fraction en tant que quotient qui est engagée. Prenons l'exemple de réponse suivant « la part des garçons est plus grande parce que s'ils prennent les 2/3 des pizzas (rapport des filles), il reste 2/3 de plus que les filles ». Ce type de réponse illustre la complémentarité entre les interprétations rapport, quotient et mesure. Un seul quotient 2/3, représentant la part des filles, est trouvé et utilisé à la fois comme mesure et comme rapport de comparaison.

La diversité des réponses montre la richesse du problème qui réside dans les différentes relations et connaissances sollicitées pour le traiter. Selon Kieren (1993), ce type de problème « comparaison des rapports pizzas/personnes » constitue un terrain riche d'articulation entre les interprétations quotient, mesure et rapport. Ces réponses, par ailleurs, s'accompagnent aussi de difficultés diversifiées selon l'interprétation convoquée. À la première comparaison, basée sur les rapports pizzas des garçons/pizzas des filles (4/2) et garçons/filles (5/3), une centration sur une mesure sans articulation avec l'autre mesure est une des erreurs les plus fréquentes. À la deuxième comparaison, la recherche de la part de chacun faisant appel à la fraction quotient, rencontre des obstacles, d'une part, de quantification du quotient et, d'autre part, de comparaison des fractions. Chacune de ces deux difficultés est discutée plus finement dans les sections correspondantes.

5.1.2 Discussion des résultats aux items regroupés sous l'interprétation quotient

5.1.2.1 Discussion sur l'interprétation quotient de type groupement

En se référant aux études antérieures sur les fractions, celle de Charalambous et Pitta-Pantazi (2006) est une des rares études qui utilise des problèmes sollicitant l'interprétation quotient de type groupement[22]. Cependant, l'étude conclut à une faible performance concernant les tâches portant sur l'interprétation quotient d'une façon générale, sans fournir de précisions relatives à la réussite aux problèmes de type groupement. L'étude spécifie, par ailleurs, que la présence de problèmes de type quotient regroupement dans la scolarité au primaire est plus pauvre que celle des problèmes de type quotient partage.

Dans notre étude, la différence entre les taux de réussite aux problèmes portant respectivement sur le sens « partage » et le sens « groupement » mérite un examen plus approfondi des relations entre les connaissances mises en œuvre et les caractéristiques des problèmes. Cette différence s'explique, certes, par la structure mathématique de chaque sens de la division, mais aussi, par les variables numériques à traiter dans les problèmes proposés. Dans les problèmes de type «partage», on recherche la valeur d'une part, alors qu'aux problèmes de type «groupement», on recherche le nombre de répliques d'une part incluses dans le tout. Ainsi, ce dernier type de problème s'apparente aux problèmes d'identification d'un tout sous l'interprétation partie/tout. En effet, les énoncés de problèmes portant sur l'interprétation quotient de type groupement de notre épreuve, exigent l'identification

---

[22] « Trois pizzas partagés également entre des amis, chacun d'eux reçoit une part de 3/5 de pizza, combien d'amis se partagent les pizzas? » Charalambous et Pitta-Pantazi (2006)

du nombre de 1/b dans 1 ou 2. Les stratégies des élèves révèlent effectivement le traitement de la donnée numérique 1/b comme une mesure dont la réplique, sous forme additive ou multiplicative, permet d'identifier le nombre de répliques nécessaires pour atteindre le «tout». Puisque ce tout est un nombre naturel (1 ou 2), il est relativement facile pour les élèves d'établir la relation entre les données du problème pour identifier, soit le nombre de 1/6 nécessaire pour obtenir 1 (problème 9a) soit le nombre de 1/4 nécessaire pour obtenir 2 (problème 9b). De plus, le taux de réussite (84%) plus élevé au problème 9a qu'au problème 9b (79%) met en évidence, dans la suite d'autres travaux (Vergnaud, 1988), que pour une même structure, le taux de réussite des élèves est affecté par les valeurs numériques à traiter.

Dans notre épreuve, le traitement des relations numériques est cependant plus complexe dans le cas des problèmes de type partage où l'on doit, trouver la valeur d'une part suite à un partage égal de 5 barres entre 3 personnes (5/3) ou encore la quantité de jus d'un pot suite à un partage égal du jus de 3 pots pleins entre 4 pots vides de même taille ($3 \div 4 = 3/4$).

Considérant les calculs relationnels et numériques exigés par chacun des items de type «partage» et «groupement» que nous venons de préciser, il n'est pas surprenant que les problèmes quotient de type groupement soient mieux réussis que les problèmes portant sur l'interprétation quotient de type partage.

5.1.2.2 Discussion sur l'interprétation quotient de type partage

Le taux de réussite moyen aux deux items regroupés sous l'interprétation quotient de type partage est de 37 %. Selon Clarke et al. (2007); Toluk et Middleton (2001) et Weinberg (2001), très peu d'élèves réussissent à juger un problème impliquant la fraction en tant que quotient comme un problème de division. Dans un problème de partage (par exemple, 3 barres partagées également entre 5 amies), la fraction 3/5 est rarement considérée comme le résultat de la division de 3 par 5. Selon ces auteurs, grand nombre d'élèves passent par une représentation dessinée ou une « division mentale » pour calculer la valeur de la part de chacun. À cet égard, notre étude conforte les résultats de Clarke et al. (2007) et montre, de plus, que le recours au dessin pour déterminer la part de chacun dans un problème de partage n'est pas souvent suffisant pour relever le défi de la quantification de la valeur associée à une part. Il faut nuancer, cependant, en ajoutant que les caractéristiques du problème et, plus particulièrement, la nature du quotient, comme c'est le cas pour une fraction impropre, est un élément déterminant dans l'établissement de la relation entre la division et la fraction quotient.

Les analyses effectuées au chapitre précédent permettent de dégager quelques éléments relatifs aux connaissances des élèves sur l'interprétation quotient de type partage. D'abord, on peut souligner la coordination de ces connaissances avec celles de l'interprétation partie/tout dans la résolution d'énoncés de type partage, comme les analyses le montrent à l'item portant sur le partage égal de 5 barres entre 3 amis. Plusieurs élèves ont engagé une représentation dessinée pour solutionner ce problème. Cependant, le dessin ne donne pas facilement accès à la quantification d'une part. De plus, les solutions des élèves mettent en évidence certaines contraintes que représente le dessin pour solutionner un problème de type partage. Tel qu'indiqué par Charalambous et Pitta-Pantazi (2006), le quotient réfère à une valeur numérique et non seulement au résultat issu d'une activité de partage. Autrement dit, si une représentation dessinée permet de contrôler une activité combinant à la fois une partition d'unités et une distribution de deux types d'unités (une unité qu'est une barre de chocolat et une unité d'unité qu'est 1/3 d'une barre) pour identifier ce qui, sur le dessin, correspond à une part, encore faut-il pouvoir être en mesure de dégager la valeur numérique de cette part. Nos analyses ont mis en évidence certaines difficultés d'élèves à identifier la valeur numérique associée à une part à partir d'une représentation dessinée adéquate.

Si peu d'élèves semblent avoir traité cet énoncé sur le plan numérique en tant que division (5 ÷ 3), la plupart des copies présentent des solutions qui reposent sur l'interprétation partie/tout. La partition des objets représentant la quantité à partager mène à la création de plusieurs types d'unités (par exemple, 1/15, 1/6, 1/5, 1/3) qui sont souvent mal contrôlés. Ce résultat conforte les études dans ce domaine de Parrat-Dayan et Vonèche, (1991, 1994) ainsi que celles de Kieren (1995, 1993, 1988).

5.1.3 Discussion des résultats aux items regroupés sous l'interprétation opérateur

Le taux de réussite des élèves à l'item sollicitant l'interprétation opérateur est de 74%, ce qui situe cette performance entre celle liée à l'interprétation partie/tout « représentation de a/b du tout » (78%) et celle lié à l'interprétation partie/tout « identification du tout » (68%). Considérant qu'un seul item de l'épreuve soit directement lié à l'interprétation opérateur, la plus grande prudence s'impose dans la discussion du résultat obtenu. Il convient cependant de prendre en compte la diversité des stratégies mises en œuvre pour solutionner le problème de type opérateur. Rappelons que l'énoncé se lit comme suit : *Émilie a gagné 12 $ en pelletant chez le voisin. Marie a gagné les 2/3 du salaire d'Émilie en pelletant, elle aussi, chez un voisin. Combien Marie a-t-elle gagné ?* La réussite à cet énoncé relève majoritairement de l'interprétation opérateur, à 36% des réussites. Elle consiste à l'application de deux opérateurs entiers (x2) et (÷3). Par ailleurs, la deuxième stratégie convoque une coordination avec l'interprétation partie/tout : l'identification du nombre d'éléments correspondant aux 2/3 de 12 éléments dessinés permet d'identifier le nombre recherché, elle est utilisée dans 22% des réussites. La troisième stratégie, utilisée par 14% des réussites, consiste à la recherche d'une fraction équivalente à la fraction opérateur. Cette recherche témoigne d'une articulation avec le sens rapport de la fraction. L'opérateur scalaire donné, soit 2/3, est alors interprété comme un rapport dont les termes sont le salaire de Marie et celui d'Émilie. Il faut alors identifier la valeur de x de l'égalité suivante $2/3 = x/12$.

Le taux de réussite élevé à ce problème tient sans doute au fait que trois stratégies, engageant des connaissances différentes, permettent de solutionner l'énoncé. De plus, les valeurs numériques de la fraction opérateur ainsi que de la mesure, entretiennent des relations multiplicatives entières qui facilitent le calcul numérique. D'autres items comportant soit des variables numériques plus complexes (par exemples, fractions impropres, relations multiplicatives non entières entre le dénominateur de la fraction et la mesure), soit une relation indirecte, seraient, dans une future recherche, intéressants à investiguer.

5.1.4 Discussion des résultats aux items regroupés sous l'interprétation partie/tout

5.1.4.1 Représentation d'une fraction d'un tout

Les travaux de Charalambous et Pitta-Pantazi (2006) et de Clarke et al. (2007) concluent que les problèmes sollicitant l'interprétation partie/tout sont les mieux réussis de leur épreuve à un taux de 75%, alors que ceux sollicitant les interprétations mesure et quotient obtiennent des rendements les moins élevés, soient 55% pour quotient et 25% pour mesure. Charalambous et Pitta-Pantazi (2006) déplorent, en conclusion, qu'en milieu scolaire, une place trop importante est accordée aux activités portant sur l'interprétation partie/tout au détriment des autres interprétations de la fraction. Les résultats de notre étude montrent également de bonnes performances à l'interprétation partie/tout, soit 78 %, mais, tout comme le soulignent Clarke et al. (2007) à propos de leurs propres résultats, il convient pour mieux saisir la portée de ce taux de réussite, d'examiner attentivement la variation des taux de réussite aux tâches regroupées sous l'interprétation partie/tout.

Dans notre épreuve, les items sur la représentation de a/b d'un tout sont aussi bien réussis dans un contexte de type collection que dans un contexte de type continu lorsque ce dernier n'exige pas un défi particulier tel que l'équipartition des parties. En effet, la représentation des 2/3 d'une forme rectangulaire pré-partitionnée en 12 parties égales est aussi bien réussie (86%) que les tâches impliquant un contexte discret (84% et 88%). En revanche, la représentation des 2/3 d'une forme circulaire ainsi que d'une forme rectangulaire pré-partitionnée en des parties inégales s'avère plus difficile à réussir (60% et 73%). Bien que ces deux dernières tâches exigent des traitements différents[23], elles posent toutes les deux, la difficulté à assurer l'égalité des parties. En résumé, un tout continu déjà partitionné en parties égales et un tout discret présentent un niveau d'exigences comparable. Ce qui hausse considérablement le niveau de difficulté, c'est lorsque la tâche sollicite des stratégies d'équipartition d'une part, pour assurer la partition égale en un nombre impair d'une forme circulaire et, d'autre part, pour traiter un tout rectangulaire pré-partagé en des parts non égales. Ce résultat conforte celui de l'étude de Clarke et al. (2007) qui concluent, à cet égard, à la nécessité de présenter davantage d'activités mathématiques aux élèves, dans lesquelles les parties d'un tout continu ne sont pas toujours isométriques ou égales.

---

[23] À la forme circulaire, il faut tracer les traits pour faire 3 parties égales et ensuite en colorier deux. À la forme rectangulaire, il faut faire abstraction des traits distracteurs pour percevoir les trois parties égales ou encore rajouter des traits pour égaliser les parties, en 6 ou en 12 parties égales.

Des études comme (Baturo, 2004; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2006; Clarke et al., 2007) mettent en évidence que la maitrise de l'interprétation partie/tout engage nécessairement l'habileté à représenter une fraction a/b d'un tout continu partagé en un nombre de parties qui soit un multiple de b (autrement dit, en $n \times b$ parties, où n est un naturel $\neq 0$). Un des items, l'item 11b, a permis d'évaluer la maitrise de ce type de tâche. En effet, les élèves doivent y représenter les 2/3 sur un tout partagé en 12 parties égales. Cet item est réussi à 86 % chez l'ensemble des élèves. Cependant, pour apprécier la portée de ce taux de réussite, il faut prendre en compte le type de stratégies mises en œuvre. Même si les deux principales stratégies, que sont le double comptage et la stratégie de type infralogique, mènent toutes les deux à une réussite, la première ne témoigne que d'un simple dénombrement (prendre 2 parties sur 3 jusqu'à épuisement des parties du tout), alors que la deuxième engage le contrôle de la relation entre a/b et le nombre de parties égales qui compose le tout (n) soit : $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$. Le contrôle de cette relation est également sollicité dans des tâches en contexte discret, contrôle sur lequel nous reviendrons dans la seconde partie de ce chapitre.

5.1.4.2 Identification d'un tout à partir d'une fraction de ce tout

Les cinq items sollicitant la construction d'un tout à partir d'une fraction de ce tout sont réussis à 68% chez l'ensemble des élèves. Ce taux est inférieur à celui obtenu à l'interprétation partie/tout de type « représentation de a/b d'un tout ». Ce résultat est proche de ceux obtenus par Clarke et al. (2007) à des items portant sur la construction d'un tout, soit entre 40,5% et 64,1%. Précisons cependant que, dans notre étude, les items en contexte discret (4 items) sont plus nombreux qu'en contexte continu (1 item) alors que dans l'étude de Clarke et al. (2007), il n'y a que 2 items, tous deux en contexte de tout continu.

Pour discuter nos résultats, nous nous appuyons sur la propriété de l'inverse multiplicatif. Nous référons ainsi au double rôle du nombre 1, élément neutre de la multiplication et unité de mesure divisible (Kieren, 1993).

La construction du tout à partir d'une de ses fractions exige, peu importe que le contexte soit discret ou continu, de considérer la fraction a/b à la fois comme mesure et rapport. Quand le tout est continu et que la fraction initiale est unitaire (1/b)[24], il suffit de répliquer «b fois», la mesure unitaire 1/b pour reconstituer le tout. Cette réplique peut se faire dans le cadre des structures additives en additionnant 1/b autant de fois que nécessaire pour obtenir b/b ou encore dans le cadre des structures multiplicatives, en s'appuyant sur la relation 1/b x b = 1. La propriété de l'inverse multiplicatif est alors utilisée en acte.

En contexte discret, la prise en compte de la fraction 1/b en tant que mesure et en tant que rapport doit s'articuler à la valeur de la sous-collection qu'elle représente. Par exemple, considérer que si 1/5, en tant qu'unité de mesure représente 2 pommes, le rapport entre 2 pommes et le nombre total recherché est équivalent à 1/5. Pour rechercher le tout, il faut s'appuyer sur l'inverse multiplicatif : si 1/5 x 5 = 1, alors il faut multiplier par 5, la valeur associée à 1/5, soit 2 : 2 pommes x 5 = 10 pommes. Certaines erreurs témoignent de la difficulté à gérer l'articulation entre les deux niveaux de relations multiplicatives. L'erreur la plus fréquente est de considérer que l'unité de mesure 1/5 correspond à la valeur 1 et ainsi d'obtenir 5 pommes.

---

[24] Comme c'est le cas à la question 6.

Quand la fraction initiale est non unitaire (a/b où a $\neq$ 1), les relations multiplicatives sont plus complexes. En effet, la propriété de l'inverse multiplicatif ne peut être utilisée en acte par un raisonnement additif : on ne peut additionner autant de fois que nécessaire a/b pour obtenir 1. Cependant, l'inverse multiplicatif de a/b, soit b/a, peut être considéré, en acte, comme la composition de deux opérateurs entiers (÷ a et x b). Prenons l'exemple suivant : *si 2/3 représentent 6 pommes d'un sac, combien de pommes y a-t-il dans le sac ?* La division par le numérateur permet de trouver la valeur associée à 1/3 et la multiplication par le dénominateur permet de retrouver la valeur associée à 3/3 : si 2/3 ÷ 2 = 1/3 et que 1/3 x 3 = 3/3, alors 6 ÷ 2 = 3 (qui correspond à 1/3) et 3 x 3 = 9 (9 correspond à 3/3). Ainsi, le passage par la fraction unitaire marque le recours à la fraction en tant qu'unité de mesure.

L'item 10c, le moins réussi à un taux de (53%), est celui où il faut retrouver la valeur d'un sac de pommes, sachant que 3 pommes représentent les 2/4 du sac. Dans ce cas, la recherche de la valeur de 1/4 se heurte au fait que la valeur associée à 2/4, soit 3, n'est pas un diviseur du numérateur. L'application de l'opérateur ÷ 2 à 3 pommes, pour trouver la valeur associée à 1/4, n'a pas de solution dans N. Pour faciliter ce calcul, il faudrait identifier la fraction irréductible équivalente à 2/4, soit 1/2. Bien que la relation d'équivalence entre 1/2 et 2/4 soit sans doute l'une des premières à être traitées en classe, peu d'élèves semblent y référer pour solutionner cet énoncé. Il est relativement intéressant de noter que la fraction équivalente est peu sollicitée comme connaissance utile par les élèves dans un contexte d'énoncé de problème où elle est pourtant nécessaire. Il est possible que les connaissances sur la fraction équivalente ne soient mobilisées que dans le cadre de tâches qui demandent explicitement de les produire.

5.1.5 Discussion des résultats aux items regroupés sous l'interprétation mesure

Les résultats montrent que seulement 15% des élèves réussissent à situer une fraction a/b inférieure à 1 sur une droite numérique. Les analyses des réponses des élèves montrent qu'ils interprètent la droite numérique comme un tout continu et non en tant que droite des réels, laquelle est un objet mathématique. La fraction mesure 2/3 n'est donc pas considérée en tant que nombre inférieur à 1, les élèves situant ainsi la fraction 2/3 aux 2/3 de la droite. Les points 0, 1, 2, 3 situés sur la droite sont donc interprétés en tant que repères du morcèlement du segment et non en tant que naturels sur l'axe des réels.

Ces résultats sont conformes à la plupart des recherches recensées. Charalambous et Pitta-Pantazi (2006) confirment que les performances des élèves aux tâches relatives à l'interprétation mesure sont remarquablement inférieures que celles portant sur les autres interprétations. Les auteurs attribuent ce résultat à la prégnance des activités liées à l'interprétation partie/tout, au détriment de celles portant sur la fraction en tant qu'unité de mesure. Ils concluent, ainsi, que l'écart de performances des élèves aux différentes interprétations reflète le déséquilibre de la place accordée à chacune des interprétations dans le curriculum scolaire.

Selon Kieren (1993), la difficulté à situer des fractions sur une droite numérique provient essentiellement des premières expériences de l'élève sur la fraction en tant que partie d'un tout « statique » dans le cadre d'activités qui surexploitent ce contexte. Le chercheur suggère plutôt une approche de comparaison de la fraction à l'unité de référence; ce qui permettrait d'engager une conception réfléchie sur le nouveau rôle du nombre « 1 » en tant qu'unité divisible (champ quotient). D'autres études (Janvier, 1994) interrogent la signification qu'attribuent les élèves à la droite numérique et des relations d'ordre qui y sont exprimées à travers les usages qui en sont faits dans l'enseignement.

5.1.6 Discussion des résultats aux items regroupés sous la thématique comparaison et équivalence des fractions

La moyenne des performances des élèves aux tâches sur la comparaison et l'équivalence des fractions est respectivement de 72% et de 74%. La réussite à la comparaison varie entre 47% et 88%. Ces données permettent de constater que la performance des élèves de notre étude dépasse celle rapportée par l'étude de Clarke et Roche (2009) sur la comparaison. Cette dernière rapporte des taux de réussite variant entre 11% et 77%. Il se peut, toutefois, que le mode de passation sous forme d'entretien, qui interdit l'accès à l'écriture, justifie en partie cet écart de performances avec notre étude.

Par ailleurs, la variété des paires de fractions à comparer de l'épreuve utilisée dans notre étude permet de constater des performances contrastées selon les caractéristiques spécifiques des fractions impliquées. Ainsi, la comparaison de la paire (1/2, 5/8) est la paire la mieux réussie, vraisemblablement à cause de la familiarité des fractions équivalentes 1/2 et 4/8. Par contre, la comparaison de fractions, qui implique également un dénominateur qui est multiple de l'autre (5/4 et 15/16), mais dont l'une des fractions est impropre n'est que faiblement réussie.

La comparaison de deux fractions impropres, n'ayant pas de relations multiplicatives entières entre les dénominateurs, est d'ailleurs l'item le plus faiblement réussi de cette tâche. En ce qui a trait aux fractions de mêmes dénominateurs, la comparaison est mieux réussie que celle des fractions de mêmes numérateurs. Dans cette dernière catégorie, la paire des fractions unitaires est plus facile à comparer que la paire des fractions ordinaires.

Concernant les items portant sur l'équivalence, la possibilité de référer à des règles habituelles de production de fractions équivalentes s'avère un critère discriminant les items réussis et non réussis. L'équivalence entre la fraction a/b et c/d est reconnue si, l'application d'un opérateur entier aux termes de la fraction a/b permet d'obtenir la fraction c/d. Lorsque les dénominateurs des fractions a/b et c/d n'entretiennent pas de relation multiplicative entière entre eux, par exemple, 4/10 et 6/15, cette stratégie ne permet pas de juger de leur équivalence.

Autant à la question portant sur l'équivalence que celle portant sur la comparaison, les items qui font nécessairement appel à l'identification de la relation multiplicative ou du rapport entre le numérateur et le dénominateur, sont les moins réussis. À titre d'exemple, pour juger de l'équivalence entre les fractions 4/10 et 6/15, il faut considérer que 4 entretient la même relation avec 10 que 6 avec 15 ou, autrement dit, que le rapport entre 4 et 10, tout comme celui entre 6 et 15, est 2/5. Ce qui conduit à se questionner sur les règles mobilisées par les élèves pour comparer ou juger de l'équivalence entre des fractions. En conclusion, nous citons Post et al. (1985) rappelant l'importance de la notion de comparaison, et donc d'ordre, ainsi que d'équivalence dans la compréhension même de la fraction en tant que nombre.

> Crucial point in acquisition of order and equivalence concepts is reached when children's understanding of fractions become detached from concrete embodiments and children are able to deal with fractions numbers. (Post et al. 1985, p.47)

5.1.7 Conclusion de la première partie

Au terme de ces analyses, la richesse et la complexité de la notion de fraction sont appréciées à partir des nombreuses connaissances mobilisées par les élèves. L'importance de la coordination des connaissances démontrée dans les réponses des élèves témoigne non seulement de l'importance du développement de chacune des interprétations, mais également de l'intégration de ces différentes interprétations. Il s'agit d'un des principes fondamentaux, décrit par Kieren (1993)[25], dans son modèle de construction de la notion fraction. Ce modèle met en évidence les différentes connaissances et relations nécessaires à une construction de la notion de fraction ainsi qu'à l'articulation entre elles, coordinations incontournables pour développer une conception de la fraction en tant que structure multiplicative et en tant que nombre. Suite aux analyses des différentes difficultés relevées dans les relations effectuées par les élèves, il nous parait essentiel de rappeler l'importance de l'articulation des connaissances de base (la partition, l'équivalence (quantitative) et la formation d'unité) avec les différentes interprétations de la fraction.

5.2 La comparaison des performances entre les élèves à risque et non à risque

Notre deuxième objectif de recherche vise à saisir les différences de performances d'élèves de fin primaire, sur la notion de fraction, selon que ces élèves sont jugés ou non à risque par leurs titulaires. Pour ce faire, des analyses statistiques ont été menées sur les taux de réussites de chacun des deux groupes d'élèves aux items de l'épreuve. De plus, l'analyse des stratégies des élèves relevées dans les deux catégories permet

---

[25]Le modèle est rapporté au chapitre II, à la section 2.2.3

de préciser, lorsque c'est le cas, des différences sur le plan des stratégies engagées par les élèves. S'appuyant sur l'analyse a priori des items, cette analyse a été guidée par une perspective didactique d'analyse.

À la lumière des résultats du chapitre précédent, nos analyses ne révèlent aucune différence significative entre les réussites des élèves selon les interprétations de la fraction, la comparaison ou l'équivalence de la fraction. Autrement dit, si des différences significatives ont été constatées à certains items de l'épreuve, nous n'avons relevé, en aucun cas, une différence significative dans l'ensemble des items regroupés sous une même interprétation[26] ou catégorie de tâches.

Notre discussion sur les différences entre les deux groupes se fera, en ce qui suit, en répondant à deux questions.

Quels sont les items pour lesquels les analyses statistiques ont révélé des différences significatives entre les deux groupes d'élèves ?

Les items auxquels les analyses statistiques ont révélé une différence significative sont :1) deux des trois items portant sur la représentation d'une fraction d'un tout continu, 2) deux des quatre items portant sur la construction d'un tout discret, 3) l'item portant sur l'opérateur, 4) deux des neuf items portant sur la comparaison de fractions, et ; 5) un des douze items portant sur l'équivalence de fractions.

En ce qui concerne la représentation d'une fraction d'un tout continu, la différence entre la performance des deux groupes d'élèves réside dans la coordination de l'équipartition considérant le type de fraction donnée, la forme du tout et, si c'est le

---

[26] Mis à part l'interprétation opérateur qui ne comprend qu'un seul item.

cas, avec la pré-partition réalisée. Ainsi, lorsque le tout est de forme circulaire et que la partition à réaliser est impaire (2/3), les élèves identifiés à risque obtiennent des performances significativement inférieures aux autres élèves. Aussi, lorsque la forme est rectangulaire, mais que le tout est déjà partagé de manière inégale, les élèves jugés à risque sont significativement moins nombreux à identifier la fraction 2/3 du tout. L'équipartition est, certes, un des principes de base de la notion de fraction, mais il est à préciser que c'est son articulation aux autres contraintes de problèmes qui représente un réel défi, comme le montrent les conduites des élèves à risque. Par ailleurs, il faut souligner que chez les élèves non à risque, la représentation d'une fraction nécessitant une partition impaire sur une forme circulaire note la plus faible réussite des items portant sur la représentation d'une fraction d'un tout continu. Cela revient à constater qu'une tâche contraignante pour l'ensemble des élèves fait en sorte que la différence de réussite se marque davantage entre les deux catégories.

En ce qui a trait à la construction d'un tout, des différences significatives entre les performances des deux groupes sont relevées en contexte discret à l'item le plus faiblement réussi, mais également à l'item le mieux réussi de cette catégorie. Rappelons que ces items faisant appel à la propriété de l'inverse multiplicatif sont difficiles à contrôler pour l'ensemble des élèves. Pour les élèves à risque, l'erreur la plus fréquente est d'attribuer, par défaut sans doute, la valeur représentant la sous-collection à la collection entière. Ce type de réponses témoigne sans doute davantage d'une clause implicite du contrat, celle de fournir systématiquement une réponse aux questions, que d'un calcul relationnel engagé pour résoudre l'énoncé.

La troisième différence est relevée à l'item portant sur l'interprétation opérateur. L'analyse des erreurs permet de préciser que la réponse la plus fréquente chez les élèves à risque renvoie à un traitement de la fraction a/b en tant que fraction unitaire

1/b. Cette erreur est présente deux fois plus chez les élèves à risque que chez les élèves non à risque.

Finalement, pour la comparaison de deux fractions, les analyses statistiques montrent une différence significative à deux paires, soit celle qui est la mieux réussie par l'ensemble des élèves et la paire de fractions non-unitaires ayant un numérateur commun. Concernant l'équivalence de fractions, la réussite des élèves à risque à juger 3/9 comme fraction équivalente à 2/6 est significativement inférieure à celle des autres élèves. Précisons que cette paire est caractérisée par l'absence d'une relation multiplicative entière entre les dénominateurs des fractions et que ce type de comparaison est moins bien réussi par l'ensemble des élèves. Dans le cas de 2/6 et 3/9, il est possible que les termes impairs composant la fraction (3/9) comparativement aux termes pairs de la fraction donnée (2/6) aient été une contrainte plus importante chez les élèves à risque dans la comparaison que chez les autres élèves.

En conclusion, la différence statistiquement significative entre les réussites des élèves à risque et non à risque s'avère davantage liée aux caractéristiques mathématiques de la tâche qu'à la catégorie de l'élève. Lorsqu'une différence significative est constatée entre les réussites des deux catégories d'élèves à un item, c'est que ce dernier est généralement, soit le moins réussi soit le mieux réussi au sein d'une même catégorie d'items, chez l'ensemble des élèves. Les items les plus exigeants discriminent davantage les élèves jugés à risque ou non, ainsi que les items les moins exigeants. Cependant, ce constat ne peut être fait pour l'ensemble des questions de l'épreuve puisque, par exemple, aux items portant sur les interprétations mesure et quotient de type partage, la réussite est remarquablement faible autant chez les élèves à risque que chez les élèves non à risque.

Existe-t-il des différences sur le plan des stratégies qui échappent aux analyses statistiques?

Les résultats de l'analyse qualitative des stratégies des élèves des deux groupes permettent de relever une différence entre les deux groupes qui échappe à une analyse en terme dichotomique, réussite/échec.

Aux items portant sur la représentation d'une fraction a/b d'un tout, aussi bien réussis chez les élèves à risque que chez les élèves non à risque, l'étude permet de déceler une différence sur le plan des stratégies qui fondent ces réussites. Quand l'item proposé peut être résolu avec des stratégies différentes, les élèves à risque sont plus enclins à faire appel à la stratégie la plus élémentaire. Toutefois, lorsque les caractéristiques de la tâche permettent difficilement l'application d'une stratégie élémentaire, des connaissances latentes, mais plus optimales peuvent être mobilisées. Les élèves à risque semblent, en effet, plus sensibles aux caractéristiques des tâches puisqu'ils recourent à des stratégies évoluées (numérique sur des touts collections et infralogique sur des touts continus) lorsque les contraintes de la tâche bloquent les stratégies plus élémentaires.

Par ailleurs, à la question portant sur la comparaison des fractions, les résultats de l'ensemble des analyses font ressortir que plus d'élèves à risque, comparativement aux élèves non à risque, s'appuient sur une stratégie non appropriée qui consiste en la comparaison de la taille des termes impliqués dans chacune des fractions : a/b est jugé plus grand que c/d si a>c et b>d. Cette erreur, largement documentée par les études dans le domaine, est liée à la prégnance des nombres naturels et à l'obstacle que constituent ces nombres dans la construction des rationnels. La comparaison des différentes paires proposées nécessite des stratégies différentes selon les caractéristiques des fractions impliquées. Il est aussi possible de penser qu'en l'absence de connaissances jugées utiles, les élèves se replient sur une stratégie qui leur permet de répondre à la question sans que nécessairement ils soient convaincus de la justesse de leur réponse. Nous disposons de peu de moyens pour évaluer la confiance que les élèves attribuent à leur réponse et qui témoigne également des connaissances qu'ils possèdent.

En somme, les différences constatées lors des analyses des stratégies des élèves dépendent des caractéristiques mathématiques de la tâche proposée ainsi que des connaissances mathématiques à mobiliser lors d'une confrontation à des tâches mathématiquement complexes (Perrin-Glorian, 1997). Ces tâches demandent la maitrise d'outils mathématiques moins accessibles, comme la comparaison des fractions en considérant la relation entre le numérateur et le dénominateur.

Pour conclure, nous rappelons un des résultats de l'étude de Moseley et Okamoto (2008)[27]. Cette étude, cependant, examine les performances de trois groupes d'élèves, moyens, forts et excellents de niveau 4^e^ année du primaire, à des résolutions de problèmes ainsi que leur compréhension de différentes représentations du nombre rationnel. L'étude comparative de Moseley et Okamoto (2008) conclut que les élèves qui réussissent le mieux sont ceux qui ont bénéficié d'un enseignement qui vise les différents sens de la fraction conjointement, comparativement à ceux qui ont reçu un enseignement centré que sur l'interprétation partie/tout. Ces derniers avaient de la difficulté à résoudre même les tâches qui portent sur cette interprétation. Les auteurs précisent que les conduites de ces élèves s'appuient davantage sur des traits de surfaces des représentations des problèmes et des propriétés des objets. En revanche, les conduites des autres élèves montrent qu'ils s'appuient sur les relations

[27] L'étude est présentée au chapitre II, à la section 2.2.3

mathématiques impliquées dans les problèmes et qu'ils font appel aux différentes interprétations de la fraction.

CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous présentons d'abord le bilan visant à préciser les apports de la recherche, puis les limites et les perspectives de l'étude. Rappelons que l'objectif général de la recherche est de situer les connaissances d'élèves de fin primaire sur la fraction.

Au premier chapitre de notre recherche, nous avons montré comment la mise en œuvre de la politique ministérielle visant à maintenir les élèves en difficulté dans la classe ordinaire se traduit dans les pratiques enseignantes par une recherche de différenciation et d'adaptation de l'enseignement aux élèves jugés à risque. L'enseignant d'une classe ordinaire doit donc préparer ses leçons en tenant compte des adaptations nécessaires afin de répondre aux besoins particuliers des élèves à risque. Cette exigence est un défi de taille pour l'enseignant titulaire, notamment, en ce qui concerne un contenu mathématique complexe comme l'est la fraction. Interpelé par la dimension didactique de l'enseignement et de l'apprentissage, nous nous sommes interrogée sur les connaissances d'élèves de classe ordinaire, jugés à risque ou non, sur les fractions.

Les études présentées dans notre cadre théorique permettent de saisir comment la construction de la notion de fraction s'accompagne de nombreux obstacles et d'adaptations de connaissances. À travers la recension des recherches sur l'évaluation de la fraction, ont été dégagés les critères fondant les épreuves d'évaluation. Ce travail a contribué autant à l'analyse a priori des items de l'épreuve utilisée dans la présente recherche qu'à l'interprétation des résultats obtenus.

L'échantillon de notre étude comporte 123 élèves de classes ordinaires du troisième cycle du primaire, dont 27 sont jugés à risque par les titulaires de classe. Les réponses de ces élèves à l'épreuve[28] sur la fraction ont été traitées d'une part, par des analyses statistiques pour comparer les performances des élèves à risques ou non et, d'autre part, par des analyses qualitatives pour dégager les stratégies mises en œuvre par les élèves. L'analyse et la discussion des résultats conduisent à répondre aux deux objectifs spécifiques de notre recherche.

Le premier objectif spécifique de la recherche est de spécifier les connaissances d'élèves de fin primaire sur les différentes interprétations ainsi que sur la comparaison et l'équivalence des fractions. En concordance avec les résultats des recherches recensées dans le cadre théorique, nos analyses descriptives ont permis de constater de faibles performances aux tâches portant sur les interprétations mesure et quotient de type partage. Par ailleurs, les analyses qualitatives des productions d'élèves ont précisé les stratégies engagées par les élèves et les connaissances qu'elles sous-tendent. Un des apports particuliers de notre recherche réside donc dans l'identification de ces connaissances ainsi que les liens qu'elles entretiennent avec les différentes caractéristiques des items de l'épreuve. Selon le modèle de Kieren (1993)[29], les différentes interprétations de la fraction (quotient, rapport, opérateur et mesure) se construisent sur la base des trois principes fondamentaux : la partition, l'équivalence (quantitative) et la formation d'unité (Clarke et al., 2007; Blouin, 2002; Kieren, 1993). Dans ce qui suit, nous rappelons les connaissances qui se révèlent plus difficiles à contrôler par les élèves, tout en précisant les liens qu'entretiennent les interprétations de la fraction avec ces trois principes.

---

[28] L'épreuve utilisée est un questionnaire construit dans le cadre d'un projet de recherche sur les fractions et préparé par Giroux, Barrera, Purdy et Barallobres (2013)
[29] Le modèle est présenté au chapitre II, à la section 2.2.3.

Aux items portant sur la représentation d'une fraction d'un tout continu, l'inégalité des parts s'avère une contrainte difficile à contrôler dans deux situations différentes, soit la figure circulaire non partagée et la figure rectangulaire partagée en parts inégales. Cela mène à questionner les connaissances des élèves sur le principe de partition et l'équivalence de type quantitative. Aussi, les performances des élèves à l'item portant sur le traitement d'un tout pré-partitionné inégalement mettent en évidence que le principe lié à la formation de l'unité présente encore des défis chez les élèves de troisième cycle. Ce résultat est conforté par les performances des élèves à l'item portant sur la fraction en tant que quotient de type partage. Nous avons effectivement relevé la difficulté rencontrée par plusieurs élèves à quantifier le résultat fractionnaire issu d'un partage. Cette difficulté tient, essentiellement, à la coordination de différents touts que sont l'unité et un ensemble d'unités. La difficulté à assurer la coordination de la partie fractionnée par rapport au tout et la partie fractionnée par rapport à chaque unité constitue la preuve d'une construction non achevée de la notion d'unité (Blouin, 2002; Kieren, 1993; Parrat-Dayan et Vonèche, 1994).

Les items portant sur la construction d'un tout à partir d'une fraction exigent, quant à eux, une coordination de différentes interprétations de la fraction dans la mise en relation du rapport entre la quantité associée à une ou des parties du tout et celle associée au tout. Les résultats montrent que la construction d'un tout discret présente quelques difficultés, cette construction faisant appel, en-acte, à la propriété de l'inverse multiplicatif. Quant aux tâches sur la comparaison et l'équivalence des fractions, les résultats permettent de constater les limites des stratégies élémentaires pour traiter la fraction en tant que relation. Le traitement de la fraction impropre est également affecté par des stratégies qui reposent sur l'interprétation partie/tout.

Notre deuxième objectif spécifique porte sur la comparaison des performances des élèves jugés à risque à celles des élèves non à risque à des tâches portant sur les différentes interprétations de la fraction, la comparaison et l'équivalence des fractions. L'analyse comparative des résultats permet de conclure que les élèves à risque réussissent de la même façon que les autres élèves à la majorité des tâches de l'épreuve proposée. Les quelques différences significatives entre les performances des deux groupes sont relevées à des items portant sur l'interprétation partie/tout. Ces différences ne portent pas sur la nature même des erreurs mais sur leur fréquence.

Deux résultats, concernant la comparaison des performances des élèves à risque et des élèves non à risque méritent d'être rappelés. Le premier porte sur les connaissances engagées dans la comparaison de fractions. Les élèves à risque sont plus enclins que les élèves non à risque à recourir à des stratégies non appropriées pour comparer des fractions. Ces stratégies suggèrent que les connaissances sur les nombres naturels sont plus prégnantes et présentent ainsi un obstacle plus important, dans l'élaboration des connaissances sur les rationnels, chez les élèves à risque que chez les autres élèves. C'est notamment la conception de la fraction en tant que « deux nombres naturels juxtaposés » qui semble faire obstacle. Un second résultat qu'il convient de rappeler est relatif aux stratégies mises en œuvre par les élèves à risque aux items portant sur la représentation d'une fraction a/b d'un tout. Les analyses qualitatives mettent en évidence que les stratégies des élèves à risque varient davantage que celles des élèves non à risque, en fonction des exigences de la tâche. Si les élèves à risque engagent plus fréquemment des stratégies élémentaires pour des tâches peu exigeantes, ils mettent cependant en œuvre des stratégies plus évoluées aux items qui présentent des contraintes plus importantes.

En somme, les résultats tendent à montrer que les connaissances sur la fraction des élèves, qu'ils soient jugés à risque ou non, sont spécifiques aux caractéristiques du savoir mathématique. Ainsi, les connaissances mises en œuvre par les élèves, à risque ou non, varient essentiellement en fonction des exigences mathématiques particulières de chacun des items. Ainsi, l'enseignant a tout intérêt à considérer la richesse et la complexité des relations exigées par la fraction pour organiser son enseignement auprès de l'ensemble de ses élèves.

Limites de l'étude

Dans cette étude exploratoire, afin de répondre aux objectifs de notre recherche, nous avons dû effectuer certains choix méthodologiques. Malgré la vigilance que nous avons exercée pour assurer une rigueur méthodologique, quelques limites à notre étude peuvent être énoncées. Le nombre d'élèves ayant participé à l'expérimentation, soit 123, ne permet pas de réaliser des analyses statistiques qui prennent en compte plusieurs variables. Nous n'avons retenu dans notre étude que la variable *à risque* ou *non à risque*. En ce qui a trait à l'épreuve utilisée, les items qui la composent permettent de couvrir les diverses interprétations de la fraction. En revanche, l'épreuve ne permet pas de procéder à des analyses qualitatives très fines des stratégies engagées à chacun des items ou encore à chacune des interprétations de la fraction, par l'ensemble des élèves.

Perspectives de l'étude

Les résultats de notre étude ouvrent sur plusieurs types de suites possibles. D'abord, il serait possible de reconfigurer une épreuve d'évaluation de la notion de fraction auprès des élèves de 3e cycle sur la base des analyses que nous avons réalisées. En effet, sur la base de nos analyses, quelques items de l'épreuve pourraient être bonifiés. C'est le cas notamment de l'item portant sur la fraction rapport ou encore sur la fraction de type quotient. Il serait également intéressant de confronter certaines hypothèses formulées dans l'analyse des données dans le cadre d'une étude portant sur les connaissances engagées par un même élève à différentes tâches. Une telle étude permettrait de préciser les processus de coordination de connaissances impliquées dans la construction de la notion de fraction.

ANNEXE A

LE MODÈLE DE BEHR *et al.* (1983) TIRÉ DE L'ÉTUDE DE CHARALAMBOUS ET PITTA-PANTAZI (2006)

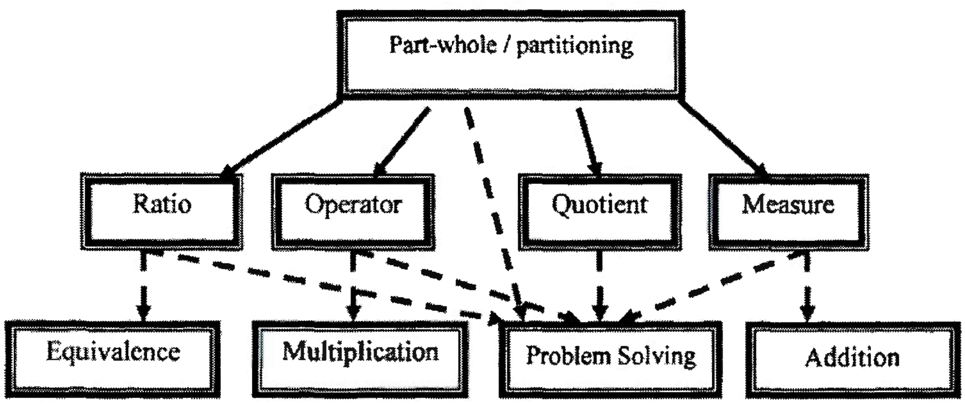


Figure 1. The theoretical model linking the five subconstructs of fractions to the different operations of fractions and to problem solving (Behr et al., 1983).

ANNEXE B

TEST SUR LES FRACTIONS
de
GIROUX, BARRERA, PURDY ET BARALLOBRES (2013)

No : ______________

Classe : ______________________________

Année Scolaire : ____________________

École : _____________________________________

1) Encercle la fraction la plus grande

a) $\frac{115}{105}$ $\frac{112}{105}$

b) $\frac{12}{13}$ $\frac{11}{13}$

c) $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{9}$

d) $\frac{19}{20}$ $\frac{19}{23}$

e) $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$

f) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

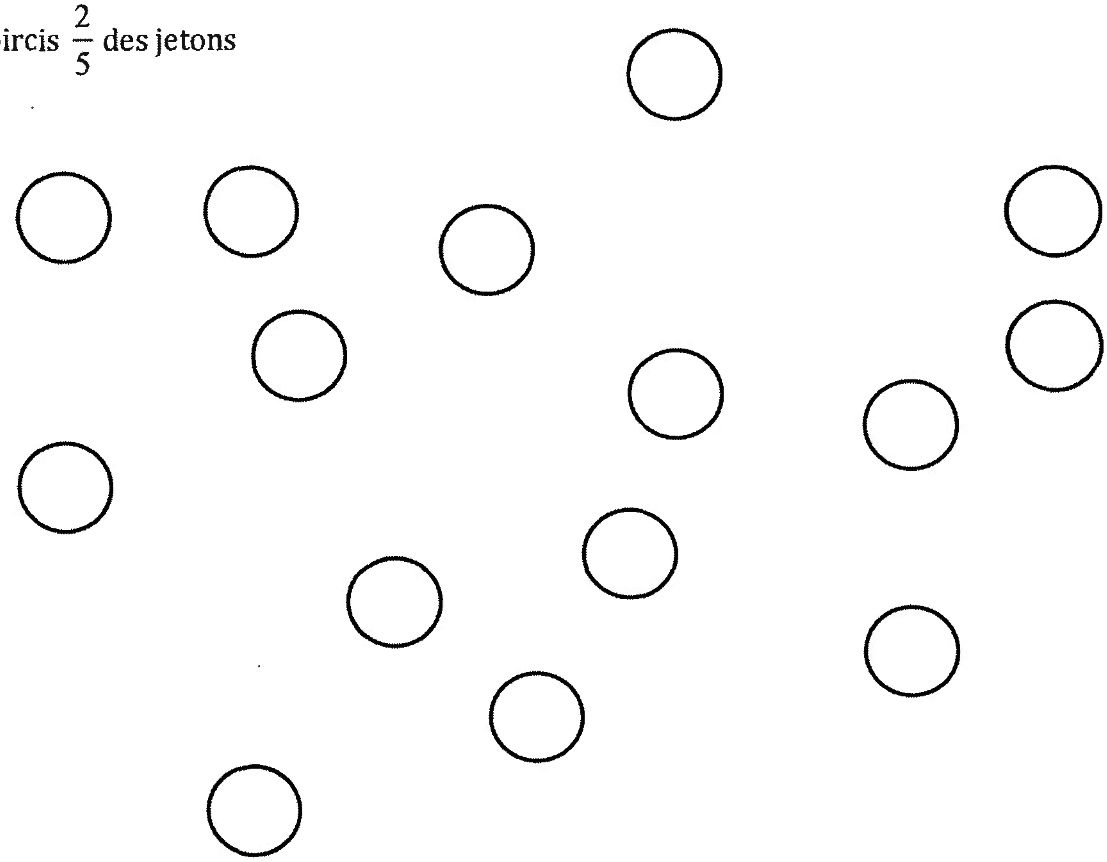
g) $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{7}$

h) $\frac{5}{4}$ $\frac{15}{16}$

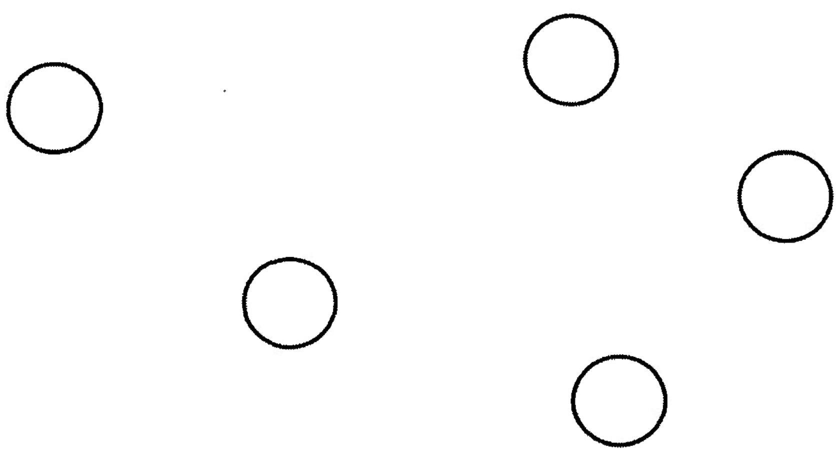
i) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{9}$

2.

a) Noircis $\frac{2}{5}$ des jetons



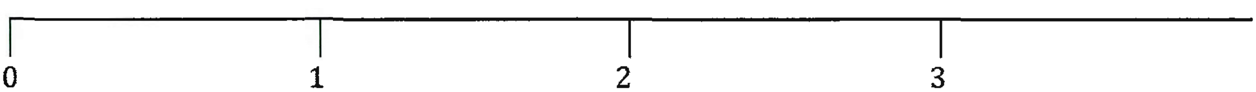
b) Noircis $\frac{4}{10}$ des jetons



3. Il y a 5 barres de chocolat. Les 5 barres sont partagées également entre 3 amis.

Quelle quantité de chocolat chaque ami reçoit ? __________________

4. Place $\frac{2}{3}$ sur la droite numérique.



5. Vrai ou Faux

5.1 La fraction $\frac{2}{4}$ est équivalente à :

	Vrai	Faux
a) $\frac{4}{6}$		
b) $\frac{5}{10}$		
c) $\frac{1}{3}$		
d) $\frac{4}{8}$		

5.2 La fraction $\frac{2}{6}$ est équivalente à :

	Vrai	Faux
a) $\frac{3}{9}$		
b) $\frac{6}{10}$		
c) $\frac{4}{12}$		
d) $\frac{3}{7}$		

5.3 La fraction $\frac{4}{10}$ est équivalente à :

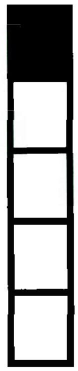
	Vrai	Faux
a) $\frac{6}{15}$		
b) $\frac{2}{5}$		
c) $\frac{5}{11}$		
d) $\frac{6}{12}$		

6. Voici $\frac{1}{5}$ d'un gâteau. Trouve l'illustration qui représente un gâteau complet, entier.

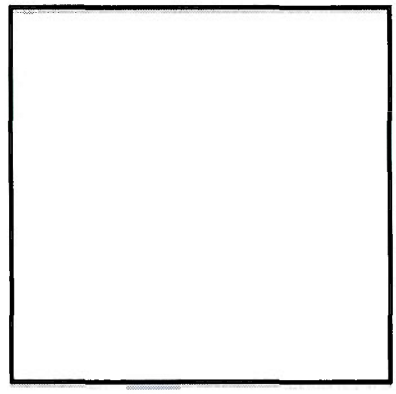
Encercle l'illustration qui illustre le gâteau complet.

a)

b)

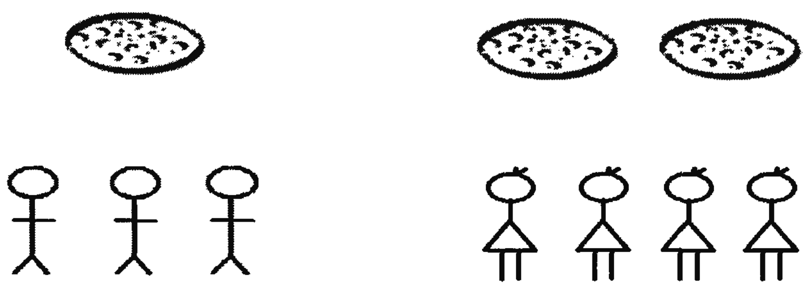


c)



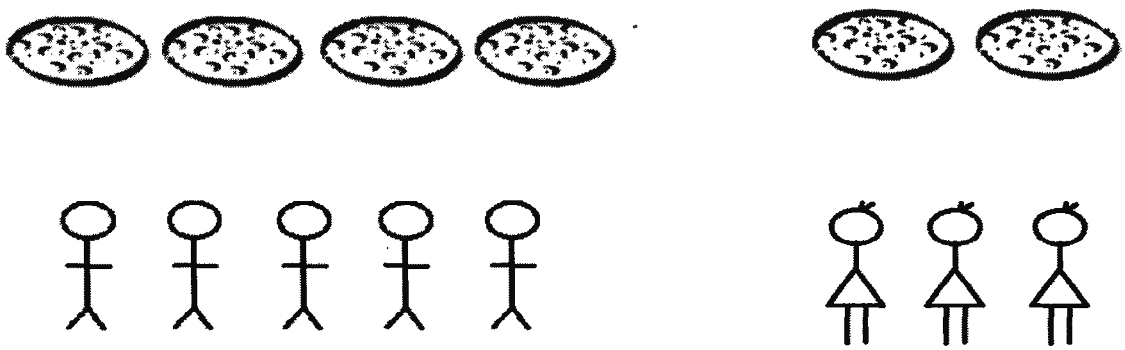
7.

a) Qui a la plus grande part de pizza, les garçons ou les filles? ________________



Explique ta réponse :

b). Qui a la plus grande part de pizza, les garçons ou les filles? ______________

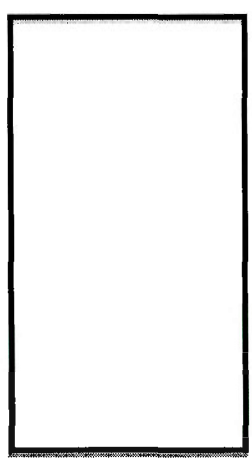


Explique ta réponse :

8. Il y a 3 pots remplis de jus dans le réfrigérateur. Je les transvide dans 4 pots vides, de même grandeur, pour que chaque pot ait la même quantité de jus.

   Quelle fraction de chaque pot est remplie de jus ?

Indique par une marque sur le pot ci-dessous la quantité de jus qu'il y aura.



Écris la fraction que cette quantité représente : ____________________

9. Résous ces énoncés.

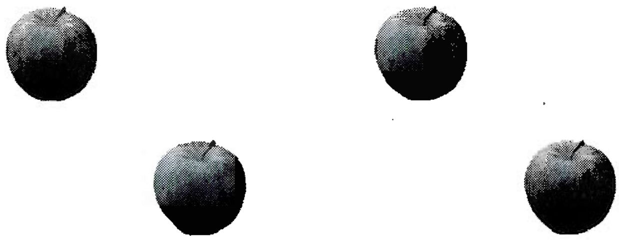
a) Chaque jour, je marche $\frac{1}{6}$ km. Combien de jours cela me prendra pour marcher 1 km?

b) On a 2 longues réglisses. On donne $\frac{1}{4}$ de réglisse à chaque enfant. À combien d'enfants peut-on donner de la réglisse ?

c) Émilie a gagné 12$ en pelletant chez le voisin. Marie a gagné les $\frac{2}{3}$ du salaire d'Émilie en pelletant, elle aussi, chez un voisin. Combien Marie a-t-elle gagné?

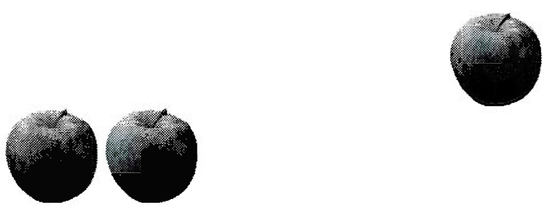
10. Résous ces énoncés.

a) Ceci représente les $\frac{4}{6}$ d'un sac de pommes. Combien de pommes y a-t-il dans le sac ?



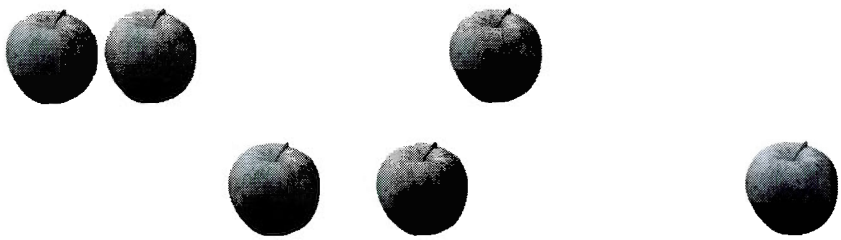
b) Ceci représente $\frac{1}{5}$ d'un sac de pommes. Combien de pommes y a-t-il dans le sac ?

c) Ceci représente $\frac{2}{4}$ d'un sac de pommes. Combien de pommes y a-t-il dans le sac ?



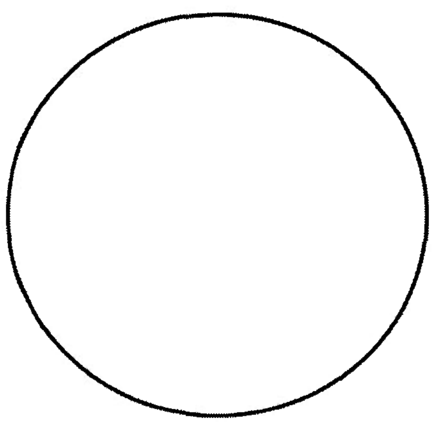
d) Ceci représente $\frac{2}{3}$ d'un sac de pommes. Combien de pommes y a-t-il dans le sac ?

____

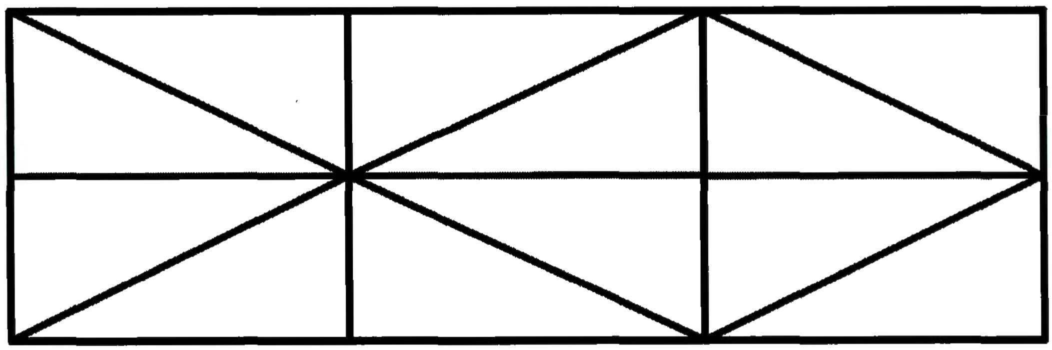


11. Noircis $\frac{2}{3}$ de chaque figure.

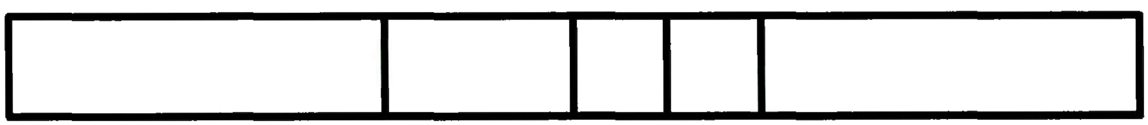
a)



b)



c)



BIBLIOGRAPHIE

Baturo, A. R., (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding, *Proceedings of the 28th PME*, Bergen, 95-102.

Behr, M., Harel, G., Post. et Lesh, R. (1993). Rational Numbers : Toward a semantic Analysis- Emphasis on the Operator Construct in T. Carpenter, E. Fennema et T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers : An Integration of Research.* Editions Lawrence Erlbaum Associates, NJ, pp. 13-47.

Behr, M., Lesh., G., Post.et Silver, E. (1983). Rational number concepts in R. Lesh and M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Éditions AcademicPress, NW, pp. 91-126.

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bateau : La multiplication par un et demi.* Montréal : Éditions Bande Didactique. 291p.

Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20* (4), 19-34.

Butler, M. F., Miller,P.S.,Crehan,K.,Babbitt,B.et Pierce,T. (2003). Fractions Instructions for students with Mathematics Disabilities: Comparing Two Teaching Sequences. *Learning Disabilities Research& Practice, 18* (2), 99-111.

Charalambous, Y., Pitta-Pantazi, D. (2006). Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 18-35.

Clarke, M.D., Roche, A. (2009). Student's fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational studies in Mathematics, 72*, 127-138.

Clarke, M.D., Roche, A. et Mitchell, A., (2007). Year Six Fraction Understanding : A Part of the Whole Story in J. Waston, K. Beswick (Eds), *Mathematics: essential Research, Essential Practice* (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Reasearch Group of Austauralia). Editions MERGA. pp.207-216.

Cramer, K.A, Post, T.R. et delMas, R.C. (2002) Initial Fraction Learning by Fourth-and Fifth-Grade Students : Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula with the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (2), 111-144.

Desjardins, M. et Hétu, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Québec : Presses de l'Université de Montréal.

Empson, S.B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding : An international analysis, *Journal for Research in Mathematics Education, 34*, 305-343.

Empson, S.B, Junk, D., Dominguez, H. Turner, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities : a cross-sectional study of chifldren's thinking. *Educational Studies in Mathematics, 63,* 1-28.

Fédération des syndicats de l'enseignement (CSQ), (2013). *Référentiel Les élèves à risque et HDAA.* CSQ

Fortin, L., Royer, É., Potvin, P., Marcotte, D. et Yergeau, É. (2004). La prédiction du risque de décrochage scolaire au secondaire : facteurs personnels, familiaux et scolaire. *Revue canadienne des sciences du comportement, 36* (3), 219-231.

Giroux, J. (à paraître). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques in C. Mary et L. Theis (éds), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques.* Éditions PUQ (37 pages)

Hardy, J.Y (1994). Le décrochage scolaire au secondaire: phénomène complexe. *Québec français*, (95),71-74. Récupéré de http://id.erudit.org/iderudit/44404ac

Hiebert, J. et Behr, D. (1988). Introduction : Capturing the Major Themes. In J. Hierbert and M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, pp. 1-19.

Janvier, C. (1994). Contextualisation et représentation dans l'utilisation des mathématiques. In C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotski et Piaget : perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale* . Bruxelles : De Boeck, pp 129-147.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's Strategies and Errors, London: NFER-Nelson.

Keijzer, R. et Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight : a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction, 13,* 285-304.

Kieren, T. E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*. Albany: State University of New York Press, pp. 31-65.

Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to Recursive understanding in T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* . Editions Lawrence Erlbaum Associates, NJ, pp.49-84.

Kieren, T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal Knowledge in G. Leinhardt, R. Putnam et R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Editions Lawrence Erlbaum Associates, NJ, pp. 323-371.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. In J. Hierbert and M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, pp. 41-52.

Kieren, T. E. (1980). The Rational Number Construct - Its elements and Mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on number learning*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, pp. 125-150.

Kieren, T. et Nelson, D. (1978). The operator construct of rational numbers in childhood and adolescence - An exploratory study. *The Alberta Journal of Educational Research*, 24 (1), pp. 22-30.

Kieren, T. et Southwell, B. (1979). The development in children and adolescents of the construct of rational numbers as operators. *The Alberta Journal of Educational Research, 25* (6), 234-247.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning in F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Edition NCTM,VA.pp. 629-667.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993) Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive process in T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Editions Lawrence Erlbaum Associates. pp-131-156.

Mack, N. K. (1990). Learning Fractions with understanding : Building on informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 16-32.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Editions Lawrence Erlbaum Associates. pp. 85-106

Mack, N.K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (3), 267-295.

Ministère de L'Éducation du Québec (1976). *Rapport du Comité provincial sur l'enfance exceptionnelle (COPEX)*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves: Politique de l'adaptation scolaire*. Québec: Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006) Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement primaire, Troisième cycle.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2007). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)*. Québec: Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du loisir et du Sport. (2009 a). *L'école J'y tiens! Tous ensembles pour la réussite scolaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2009 b) Programme de formation de l'école québécoise. *Progression des apprentissages au primaire, Mathématique.*

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2010) Programme de formation de l'école québécoise. *Progression des apprentissages au secondaire, Mathématique.*

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2012). *Guide pour soutenir une transition de qualité vers le secondaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

Moseley, B. & Okamoto, Y. (2008) Identifying Fourth Graders' Understanding of Rational Number Representations: A Mixed Methods Approach. *School Science and Mathematics*, 108(6), pp. 238-250.

Moss, J. et Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (2), 122-147.

National Council of Teachers of Mathematics (1964). *Rational Number*. Document. Traduction effectuée par l'AMQ.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaninig and Applicational Meaning in The Semantics of fractions and Related Concepts. In J. Hierbert and M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, pp. 53-92.

Parrat-Dayan, S., Vonèche, J. (1991). Conservations, notions et pratiques cognitives : étude de leurs interrelations. In Bideau, J., Meljac, C., Fisher, J.-P. (Eds.). *Les chemins du nombre.* Presses Universitaires de Lille. pp. 91-112.

Parrat-Dayan, S., Vonèche, J. (1994). La partie, le tout et l'équilibration. *Philosophia, 54* (2), 9-42.

Perrin-Glorian, M. J., (1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques? *Repères-IREM, 29,* 43- 66

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1948*). La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris :PUF, 514 p.

Pitkethly, A. et Hunting, R. (1996). A Review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics,* 30 (1), pp. 5-38.

Post, R.T., Wachsmuth, I. Lesh, R. J.Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational numbers : a clinical teaching experiment. *Journal for research in Mathematics Education, 5,* 323-341.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research.* Editions Lawrence Erlbaum Associates. pp. 327-361.

Pothier, Y., Sawada, D. (1983). Partitioning : The Emergence of rational Number Ideas in Young Children. *Journal for research in Mathematics Education, 14* (4), 307-317.

Potvin, P., Lapointe, J., R. (2010). *Guide de prévention pour les élèves à risque au primaire :Y'a une place pour toi*! Centre de transfert pour la réussite éducative du Québec.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Opertations. In J. Hierbert and M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, pp. 41-52.

Toluk, Z., Middleton, J. A. (2001). The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment in M. van den Heuvel-Panhuizen (Eds), *Proceedings* *of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,(4),*265-272.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures in J. Hierbert et M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Editions Lawrence Erlbaum, pp. 141-161.

Weinberg, L. (2001). Is there a Connection between Fractions and Division? Students, Inconsistent Responses, *Paper presented at the annual Meeting of the American Educational Research association,* Seattle. 42p.