UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA CONJECTURE DE POLARISATION GÉNÉRALISÉE

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR
HÉCTOR JOSÉ BLANDIN NOGUERA

AVRIL 2015

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

REMERCIEMENTS

Le Docteur José Gregorio Hernandez,

Mes directeurs de recherche : François Bergeron et Franco Saliola.

À Lise Tourigny, Johanne Patoine pour tout l'important soutien administratif pendant tout ce temps.

A mis padres María Emilia Noguera de Blandin y Elvis Yasmil Blandin Mosquera que siempre soñaron que sus hijos fueran profesionales. A mis abuelos Rosa Rodríguez de Noguera y José Hilario Noguera Mora quienes siempre quisieron verme como Doctor en Matemáticas, a mis hermanos Marcos Reinaldo y Patricia Carolina.

Ma fiancée Oana-Andreea Kosztan, pour tout l'amour qu'elle me donne et les beaux moments ensemble et son grand aide avec LaTeX, *Multumesc, Logodnica mea Te iubesc dragosta de inima mea.* Aux parents de Oana-Andreea, Ladislau Kosztan et Mihaela Ungureanu pour toute leur aide dans les plus difficiles moments.

A mis colegas y amigos Adolfo Rodríguez, Yannic Vargas, Marco Antonio Pérez, Mariolys Rivas, Guy Giffard, Farès Farès, José Eduardo Blazek, Rafael Díaz y Domingo Quiroz. Merci beaucoup à Franco Saliola et Guy Giffard pour d'importantes discussions sur les polynômes diagonalement quasi-invariants au début de ce travail. À Luis Serrano et Alejandro Morales pour m'avoir encouragé à travailler pour mon article de recherche.

Spécialement à José Eduardo Blazek et Franco Saliola pour m'avoir aidé à vérifier mes calculs avec le logiciel mathématique SAGE et pour le suivi des discussions sur le sujet.

DÉDICACE

À la mémoire de ma grand-mère adorée Rosa Rodríguez de Noguera (Mamá Rosa) et à mon grand-père José Hilarion Noguera Mora, à ma mère adorée, combattante et protectrice de ses enfants María Emilia Noguera Rodríguez et pour ma belle fiancée Oana-Andreea Kosztan (mi Piripipita).

En memoria de mi amada abuela Rosa Rodríguez de Noguera (Mamá Rosa) y mi abuelo José Hilarion Noguera Mora, A mi madre adorada, luchadora y protectora de sus hijos María Emilia Noguera de Blandin y para mi bellísima prometida Oana-Andreea Kosztan (mi Piripipita).

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

GLOSSAIRE

Notation	Description	Page List
$D(\lambda)$	Le diagramme de Ferrer du partage λ.	61
$E^{\mathbf{d}}$	L'opérateur de **d**-polarisation.	63
$E_{\mathbf{d}}$	L'opérateur de **d**-restitution.	63
$GL(V)$	le groupe général linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.	33
$GL_n(\mathbb{K})$	le groupe général linéaire de degré n sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.	32
X^A	le monôme $X_1^{A_1} X_2^{A_2} \cdots X_n^{A_n}$	16
$[n]$	L'ensemble des n premiers entiers naturels: $\{1, 2, \ldots, n\}$.	12
$\Lambda(d)$	L'espace vectoriel des polynômes symétriques homogènes de degré d.	20
$\Lambda_{n,d}$	Composante homogène de degré d de l'espace Λ_n.	22
Λ_n	L'espace vectoriel des fonctions symétriques à n variables.	19
Λ	L'espace vectoriel des fonctions symétriques	19
$\mathcal{D}(\mathcal{V})$	La fermeture par dérivations d'un sous-espace $\mathcal{V}$ de polynômes.	59
$\mathcal{E}_\ell(\mathcal{V})$	La fermeture par polarisations à ℓ lignes d'un sous-espace $\mathcal{V}$.	68
$\mathcal{E}(\mathcal{V})$	La fermeture par polarisations d'un sous-espace $\mathcal{V}$ de polynômes.	68
$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	Le nombre de sous-multiensembles de cardinalité k d'un multiensemble à n éléments.	13
$\mathfrak{S}_n$	le groupe symétrique de degré n	19
λ'	Le partage conjugé d'un partage λ.	21
$\mathbb{N}^+$	L'ensemble des entiers naturels strictement positifs	11
$\mathbb{N}^{\ell \times n}$	Les matrices de format $\ell \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.	12
$\mathbb{N}^n$	L'ensemble des suites d'entiers naturels ≥ 0 à n coordonnées	12
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels	11
$\mathbb{R}(\mathbf{z})$	Le corps de fractions rationnels à coefficients réels dans le variables $\mathbf{z} = z_1, z_2, z_2 \ldots$	22

Notation	Description	Page List
$\mathbb{S}_\lambda(V)$	Foncteur de Schur / Module de Weyl.	37
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers	11
$\mathcal{M}_F$	Le module de polarisation engendré par la famille F	70
$\mathcal{M}_f$	Le module de polarisation engendré par le polynôme f	70
$\mathcal{R}_n$	L'espace vectoriel des polynômes à n variables	13
$\mathcal{R}_n^{(\ell)}$	L'espace vectoriel des polynômes à ℓ ensembles de n variables	15
$\mathcal{V}(\mathbf{q})$	La série de Hilbert de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ gradué dans $\mathbb{N}^\ell$.	15
$e_1^{\mathbf{d}}(X)$	Les polynômes diagonalement symétriques $e_1^{\mathbf{d}}(X)$.	31
$e_A(W)$	fonction symétrique élémentaire associée à la matrice A	30
e_λ	fonction symétrique élémentaire associée au partage λ	21
$e_{\mathbf{a}}(W)$	fonction symétrique élémentaire associée au vecteur $\mathbf{a}$	29
f^λ	Longueur d'équerre d'un tableau de forme λ ou nombre de tableaux semi-standard de forme λ.	35
$h_A(W)$	fonction multi-symétrique complète homogène associée à la matrice A	30
h_λ	fonction symétrique complete homogène associée au partage λ	21
$h_{\mathbf{a}}(W)$	fonction multi-symétrique complète homogène associée au vecteur $\mathbf{a}$	29
$m_A(W)$	fonction multi-symétrique monomial associée à la matrice A	29
m_λ	fonction symétrique monomial associée au partage λ	20
$p(n)$	nombre de partages de l'entier n	11
$p_A(W)$	fonction somme de puissances diagonaux associée à la matrice A	30
p_λ	fonction symétrique somme de puissances associée au partage λ	21
$p_{\mathbf{a}}(W)$	fonction somme de puissances diagonaux associée au vecteur $\mathbf{a}$	29
$s_\lambda(\mathbf{q})$	Le $GL_\ell(\mathbb{K})$-caractère irrèductible.	41
$s_\lambda(\mathbf{w})$	Fonction de Schur associé au partage λ.	41
z_λ	cardinalité du centre d'une permutation de type λ	11
$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$	le monôme $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$	13

Notation	**Description**	**Page List**
χ^λ	Le caractère de la représentation irréductible $\mathcal{S}_\lambda$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.	41
χ_V	Le caractère d'une représentation de groupe V.	38
$\mathrm{Par}(n)$	L'ensemble de partages de poids n	10
$\mathrm{sign}(\sigma)$	Le signe d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$	19

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

RÉSUMÉ

Ce travail est inspiré en partie par un théorème de M. Haiman (M. Haiman 2002, voir [17]). Ce théorème affirme que le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, fermé par dérivations $\frac{\partial}{\partial x_i}$, et fermé par des opérateurs de « polarisation », $E_p = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial^p}{\partial x_i^p}$, et qui contient le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$, coïncide avec le $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{D}_n$ des polynômes harmoniques diagonaux du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Dans cette thèse, on étend cette construction de deux façons. D'abord en considérant des modules de « polarisation généralisés » en faisant intervenir des polynômes à ℓ ensembles de n variables, c'est-à-dire, des polynômes en les variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{\ell 1}, \ldots, x_{\ell n}$. Puis en considérant d'autres « genres » pour ces espaces que le déterminant de Vandermonde. Dans tous les cas, on s'intéresse à la décomposition en somme directe de modules irréductibles des modules considérés.

Plus précisément, nos modules de polarisation généralisés sont engendrés par des familles $\mathfrak{S}_n$-stables de polynômes homogènes. Il s'avère alors que ces modules sont en fait des représentations du produit direct $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$, avec l'action de $GL_\ell(\mathbb{C})$ apparaissant à cause de la polarisation. Leur décomposition en irréductibles se décrit via leur caractéristique de Frobenius graduée. Celle-ci s'exprime comme une somme de produits de polynômes/fonctions de Schur $s_\mu(\mathbf{q})s_\lambda(\mathbf{w})$, où $s_\mu(\mathbf{q})$ est un polynôme de Schur en les variables $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_\ell)$ et λ est un partage de n.

Pour les modules considérés, notre objectif est de calculer explicitement la caractéristique de Frobenius graduée de ces modules :

$$\sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}), \tag{1}$$

en donnant des formules précises pour les entiers $b_{\lambda,\mu}$. Ces coefficients $b_{\lambda,\mu}$ sont les multiplicités des sous-modules irréductibles sous l'action de $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$. On peut donc aussi, interpréter la formule (1) comme une description du caractère gradué comme $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-module. Un théorème de F. Bergeron (voir [4]) montre que les coefficients $b_{\lambda,\mu}$ sont indépendants de ℓ. Autrement dit, ℓ n'intervient dans l'expression (1) que dans le nombre de variables apparaissant dans $s_\mu(\mathbf{q})$. De plus, il est montré dans [4] que μ a au plus n parts. Ceci nous permettra d'obtenir une expression pour (1) qui est valable pour tout ℓ si on sait la calculer pour $\ell \leq n$.

On donne des résultats explicites dans le cas où la famille génératrice $\mathfrak{S}_n$-stable (à laquelle est appliqué le processus de polarisation) est constituée :

1. D'un seul polynôme $\mathfrak{S}_n$-invariant, en particulier les polynômes symétriques homogènes p_1^d, p_d et e_d, pour tout $d \geq 1$ (voir théorème 2.2.1).
2. du polynôme symétrique monomial $m_{(2,1^{d-2})}$ (voir la conjecture 2.4.5).
3. du polynôme symétrique h_d (voir la table 2.4).
4. d'un seul polynôme symétrique homogène de degré 2 ou 3 (voir théorème 2.2.2 et théorème 2.2.3),
5. d'un seul polynôme symétrique homogène de degré 4 ou 5 (voir les tables 2.2 et 2.3),
6. d'une seule des familles homogènes et $\mathfrak{S}_n$-stables suivantes : $\mathcal{A} := \{x_{1j}^d \mid 1 \leq j \leq n\}$, $\mathcal{B} := \{x_{1i}^d - x_{1j}^d \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ et $\mathcal{C} := \left\{ \prod_{j \in A} x_{1j} \mid A \subseteq [n],\ |A| = d \right\}$ (voir la section 2.4).
7. d'une seule des familles homogènes et $\mathfrak{S}_n$-stables suivantes : $\mathcal{T}_2 := \{x_{11}^{a_1} \cdots x_{1n}^{a_n} \mid a_1 + \cdots + a_n = 2\}$, $\mathcal{T}_3 := \{x_{11}^{a_1} \cdots x_{1n}^{a_n} \mid a_1 + \cdots + a_n = 3\}$. (voir les problèmes ouverts 2.4.9 et 2.4.10).

On s'intéresse aussi à une classification complète des modules de polarisation engendrés par une famille constituée d'un seul polynôme symétrique homogène à n variables, en termes de la caractéristique de Frobenius graduée de ces modules. Notre classification est complètement déterminée lorsque le degré est plus petit ou égal à 3 (théorèmes 2.2.2 et 2.2.3), et nécessite de considérer une notion de **n-exception** (voir la section 2.2). Pour les degrés 4 et 5, on propose des formules qui semblent indépendantes de ℓ, et qui semblent donner une classification complète (voir les tables 2.2 et 2.3).

Mots clés : Combinatoire algébrique, représentations des groupes, les polynômes symétriques, les polynômes diagonalement symétriques, caractéristique de Frobenius graduée, opérateurs de polarisation, série de Hilbert.

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans la lignée des travaux de M. Haiman (voir [14]) sur la conjecture de l'opérateur (devenue théorème depuis) (voir [17]). Celle-ci affirme que le plus petit espace vectoriel fermé par dérivations, et fermé par l'action des opérateurs de polarisation $E_p := \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial^p}{\partial x_j^p}$, et contenant le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$, coïncide avec l'espace $\mathcal{D}_n$ des polynômes harmoniques diagonaux. Autrement dit, l'espace $\mathcal{D}_n$ est engendré par le déterminant de Vandermonde comme module sur l'algèbre des opérateurs $\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, E_1, \ldots, E_{n-1}\right]$. L'espace $\mathcal{D}_n$ est formé par tous les polynômes f, en les variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, qui sont annulés par les opérateurs différentiels somme de puissances $p_{h,k} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^h}{\partial x_i^h} \frac{\partial^k}{\partial y_j^k}$. En 2002, M. Haiman a démontré ce théorème en utilisant des techniques de géométrie algébrique (voir [17]).

On généralise d'abord le contexte du théorème de l'opérateur au contexte des polynômes à ℓ ensembles de n variables, c'est-à-dire des polynômes en les variables $X = (x_{ij})$, avec $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq j \leq n$. L'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur les polynômes à ℓ ensembles de n variables est définie par permutation des colonnes (on remplace chaque variable x_{ij} par $x_{i\sigma(j)}$). On dit qu'une famille F de polynômes est $\mathfrak{S}_n$-stable si elle est fermée par cette action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$. Étant donnée une famille $\mathfrak{S}_n$-stable F de polynômes homogènes, on définit **le module de polarisation engendré par la famille** F comme le plus petit espace vectoriel fermé par dérivations $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$, fermé par des opérateurs de polarisation $E_{i,k}^{(p)} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial^p}{\partial x_{kj}^p}$, et qui contient la famille F. Cet espace est dénoté $\mathcal{M}_F$. L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur les polynômes fait de $\mathcal{M}_F$ un $\mathfrak{S}_n$-module.

En particulier, on considère le cas où F est réduit à l'orbite d'un seul polynôme f et on dénote par $\mathcal{M}_f$ le module obtenu en posant $F = \{\sigma \cdot f \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, où $\sigma \cdot f$ est le polynôme obtenu en appliquant l'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Des cas particuliers de cette construction correspondent à certains espaces importants en combinatoire (voir [8])et géométrie algébrique (voir [14, 13, 17]). Par exemple, lorsque $\ell = 1$ (1 ensemble de n variables $\mathbf{x} := x_1, \ldots, x_n$) et f est le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$, on obtient l'espace classique des polynômes harmoniques du groupe symétrique $\mathcal{H}_n$. En effet, on peut démontrer que l'ensemble des polynômes annulés par tous les opérateurs différentiels $\sum_{j=1}^{n} \partial x_j^k$, pour $1 \leq k \leq n$, (∂x_j^k dénote la k-ième dérivée partielle par rapport à x_j) coïncide avec l'espace engendré par le polynôme $\Delta_n(\mathbf{x})$ et toutes ses dérivées partielles, autrement dit, $\mathcal{M}_{\Delta_n} = \mathcal{H}_n$ pour $\ell = 1$ (voir [8, 3]). Il est remarquable que la dimension de cet espace est $n!$ (voir [18]). Lorsque $\ell = 2$, toujours avec $f = \Delta_n(\mathbf{x})$, on obtient l'espace $\mathcal{D}_n$ des polynômes harmoniques diagonaux. La dimension de cet espace est $(n+1)^{n-1}$. On peut montrer (mais cela est beaucoup plus délicat (voir [17])) que cet espace est formé de tous les polynômes en les variables $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ et $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$, qui sont annulés par tous les opérateurs différentiels $\sum_{j=1}^{n} \partial x_i^h \partial y_j^k$, avec $1 \leq h + k \leq n$. L'espace des polynômes harmoniques diagonaux trivariés $\mathcal{D}_n^{(3)}$ est l'espace vectoriel des polynômes en les variables : $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$ et $\mathbf{z} = z_1, \ldots, z_n$, qui sont annulés par les opérateurs $\sum_{j=1}^{n} \partial x_i^r \partial y_j^s \partial z_j^t$, avec $1 \leq r + s + t \leq n$ (voir [8]). M. Haiman a conjecturé que $\mathcal{D}_n^{(3)}$ coïncide avec $\mathcal{M}_{\Delta_n}$ pour $\ell = 3$ (voir [14]). Il a aussi conjecturée que la dimension de cet espace est $2^n(n+1)^{n-2}$, (voir [14] p.36.). Pour n'importe quel $\ell \geq 1$ F. Bergeron a étendu cette conjecture au cas des espaces des polynômes harmoniques diagonaux trivariés « supérieurs » $\mathcal{H}_n^{(r)}$, dont la dimension est $(r+1)^n(rn+1)^{n-2}$ (voir [8]). Il a aussi étendu la conjecture de Haiman concernant l'identification de l'espace $\mathcal{D}_n^{(\ell)}$ des polynômes harmoniques diagonaux multivariés avec le module de polarisation engendré par $\Delta_n(\mathbf{x})$ au cas $\ell > 3$.

La fermeture par des opérateurs de polarisation généralisés $E_{i,k}^{(p)}$ des modules $\mathcal{M}_F$ implique, en particulier, la fermeture par les opérateurs $E_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{kj}}$ (lorsque $p = 1$). Ceci est équivalent au fait que $\mathcal{M}_F$ est un $GL_\ell(\mathbb{C})$-module (voir [24] p.83). L'action du groupe linéaire $GL_\ell(\mathbb{C})$ commute avec l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (en tant que des actions sur $\mathcal{M}_F$) et ceci implique qu'on peut considérer les espaces

$\mathcal{M}_F$ comme étant des représentations du produit direct $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la décomposition en modules irréductibles sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$ des modules de polarisation $\mathcal{M}_F$. Pour ce faire, on décrit la caractéristique de Frobenius graduée des espaces $\mathcal{M}_F$ (voir 2.1). Celle-ci prend la forme :

$$\mathcal{M}_F(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}), \tag{2}$$

où $b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} = q_1, \ldots, q_\ell$, $\mathbf{w} = w_1, w_2 \ldots$, les partages μ sont tels que $\ell(\mu) \leq n$ (voir F. Bergeron [4]). Les fonctions de Schur $s_\mu(\mathbf{q})$ correspondent aux caractères des représentations irréductibles du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$, tandis que, les fonctions de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$ codent les caractères de représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Les nombres naturels $b_{\lambda,\mu}$ sont donc les multiplicités des modules irréductibles pour l'action de $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$ (voir les formules 1.42 et 1.43).

Un deuxième objectif de cette thèse est d'étudier les modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ qui sont engendrés par un polynôme symétrique homogène f donné. Pour ce faire, on utilise la caractéristique de Frobenius graduée pour classifier ces modules selon leur décompositions en irréductibles. On démontre des formules pour cette caractéristique d'une façon globale et uniforme, c'est-à-dire, ces formules sont toutes valides pour n'importe quel $\ell \geq 1$ et sont décrites en fonction de n (n est le nombre de variables du polynôme f).

Le chapitre 1 peut être sauté par le lecteur qui s'y connaît, sauf peut être pour ce qui est des notations, pour passer directement au chapitre 2 (voir la section 1.9). Ce chapitre est divisé en trois parties :

1. Notions d'algèbre et combinatoire, notre contexte $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$.
2. Rappel sur les polynômes symétriques, pléthysme et polynômes diagonalement symétriques.
3. Rappel sur les représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n$ et les représentations polynomiales irréductibles de $GL_\ell(\mathbb{C})$, caractères, la caractéristique de Frobenius

d'un $\mathfrak{S}_n$-module et la caractéristique de Frobenius graduée et son expression comme une somme des produits des fonctions de Schur.

Dans la première partie de ce chapitre, on présente des notions de base de combinatoire et d'algèbre concernant les parties 2 et 3. Parmi ces notions considérées on retrouve celles de : partages, partages restreints, partages vectoriels, l'espace $\mathcal{R}_n$ des polynômes à n variables (gradué dans $\mathbb{N}$ par le degré total), l'espace $\mathcal{R}_\ell$ des polynômes à ℓ variables (gradué dans $\mathbb{N}^\ell$), l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ des polynômes à ℓ ensembles de n variables : $x_{i1}, \dots, x_{i\ell}$, $1 \leq i \leq \ell$, gradué par le multidegré dans $\mathbb{N}^\ell$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. L'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est le contexte (ensemble référentiel) des modules de polarisation généralisés. On fini cette partie en calculant la série de Hilbert de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ en tant qu'espace vectoriel gradué avec le multidegré.

La deuxième partie du chapitre 1, contient un rappel bref de la théorie classique des fonctions symétriques (voir [26, 11, 24]) et diagonalement symétriques (voir [23, 25]). Le but de cette partie est de préparer les outils nécessaires pour décrire, à les caractères de représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et de représentations polynômiales irréductibles du groupe linéaire général $GL_\ell(\mathbb{C})$ (par exemple, les fonctions de Schur, les fonctions complètes homogènes, le pléthysme, etc.) et rappeler les polynômes diagonalement symétriques qui serviront pour expliquer la construction des bases homogènes des modules de polarisation engendrés par un polynôme symétrique homogène donné. On rappelle les bases classiques pour les fonctions symétriques et diagonalement symétriques. En particulier, on souligne que ces fonctions diagonalement symétriques sont obtenues par polarisations à partir des fonctions symétriques usuelles (voir 2.1). Le pléthysme de fonctions symmétriques est rappelé en détail (voir [28]). Cette notion du pléthysme est très efficace pour expliquer la forme de la caractéristique de Frobenius graduée des sous-modules (en tant que $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-module) de l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$.

La troisième partie du chapitre 1 présente une synthèse de résultats connus autour de la théorie de la représentation du groupe $\mathfrak{S}_n$ et des représentations polynomiales du groupe $GL(V)$, ainsi que des liens entre ces deux théories (voir [26, 11, 24]). Cette synthèse est nécessaire à la mise en place des nouveaux résultats, et conjectures sur la caractéristique de Frobenius graduée des modules de polarisation au deuxième chapitre. Notre premier exemple fondamental est l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Le second est l'action du groupe linéaire $GL_\ell(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Ces deux actions commutent et font de l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ un $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-module. On décrit les modules irréductibles pour $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$ et on rappelle que ses caractères irréductibles sont de la forme $s_\mu(\mathbf{q})s_\lambda(\mathbf{w})$. Le but de cette partie est de rappeler que la caractéristique graduée de Frobenius d'un sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ prend la forme de la formule (2).

On démontre le résultat classique (voir [28] p.442) qui affirme que la série de Hilbert de $\mathcal{V}$ est égal au $GL_\ell(\mathbb{K})$-caractère de $\mathcal{V}$. On rappelle qu'à partir de la caractéristique de Frobenius graduée de $\mathcal{V}$ on obtient la série de Hilbert de $\mathcal{V}$.

Le chapitre deux contient l'essentiel de nos contributions. On commence par rappeler le processus de polarisation introduit par H. Weyl et Von Herrn S. Aronhold (voir [29, 24]). On introduit ensuite, les notions de **fermeture par dérivation** $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et **fermeture par polarisation** $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ d'un sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. On démontre que les opérations de fermeture par polarisation et dérivation commutent, c.-à-d. $\mathcal{D}(\mathcal{E}(\mathcal{V})) = \mathcal{E}(\mathcal{D}(\mathcal{V}))$. Pour chaque ensemble F de polynômes homogènes $\mathfrak{S}_n$-stable on note par $\mathbb{K}[F]$ le sous-espace engendré par F. On introduit l'objet d'étude de ce travail : les modules de polarisation engendrés par un ensemble de polynômes homogènes F comme étant l'espace $\mathcal{M}_F := \mathcal{E}(\mathcal{D}(\mathbb{K}[F]))$. Le fait que F est $\mathfrak{S}_n$-stable implique que $\mathcal{M}_F$ est un $\mathfrak{S}_n$-module. La fermeture par des opérateurs de polarisation généralisés implique que $\mathcal{M}_F$ est $GL_\ell(\mathbb{C})$-stable. Le but de ce chapitre est d'amorcer l'étude de la classification complète des modules de polarisation engendrés par des polynômes symétriques homogènes, selon leur décomposition en somme directe de modules irréductibles pour l'action du produit direct $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$. Tel qu'on explique au chapitre 1, on peut calculer cette caractéristique sous la forme (2). Bien entendu, les coefficients $b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}$ expriment les multiplicités des modules irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$. On obtient des formules explicites pour (2) lorsque f est un des polynômes symétriques p_1^d, p_d

et e_d. Plus précisément, on a les théorèmes principaux suivants (voir théorème 2.2.1) :

$$\mathcal{M}_{e_1^d}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}).$$

$$\mathcal{M}_{p_d}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{d-1} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w})$$

$$\mathcal{M}_{e_d}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2\rfloor} \left(\sum_{j=i}^{d-i} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}).$$

On donne une classification complète des modules de polarisation engendrés par polynômes symétriques homogènes de degré deux et trois. En particulier, si $f = a{\cdot}m_2{+}b{\cdot}m_{1,1}$ à n variables, on montre que

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \begin{cases} \big(1+s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w}) & \text{si } b=2a, \\ \big(1+s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w}) + s_1(\mathbf{q})\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le degré est 3, on introduit la notion de **n-exception**. Plus explicitement, notons par $\mathbb{R}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n},\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right]$ le sous-espace réel engendré par les n premières dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, de f et le polynôme $\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. On dit qu'un polynôme symétrique homogène de degré 3 à $n\geq 2$ variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ est une n-exception si

$$\dim\left(\mathbb{R}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n},\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right]\right) = n.$$

Pour le cas, $\deg(f)=3$, on démontre que si f n'est pas un multiple scalaire de p_1^3 alors la dimension minimale de ce sous-espace est exactement n (voir théorème 2.2.4) :

$$\dim\left(\mathbb{R}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n},\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right]\right) \geq n.$$

Ainsi, donc, la dimension pertinente ne peut prendre que les valeurs n ou $n+1$.

Supposons que $f = a\cdot m_3 + b\cdot m_{2,1} + c\cdot m_{1,1,1}$, alors $f$est n-exception, si et seulement si on a soit :

1. $3a(2b+(n-2)c) = 2(n-1)b^2$, pour $n \geq 3$, ou,

2. $b = 0$ ou $b = 3a$, pour $n = 2$.

Les n-exceptions apparaissent aussi lorsque le degré est supérieur à trois. En fait, on croit que, en général le polynôme $p_2 p_1^{d-2}$ de degré $d \geq 3$ est une $(d+1)$-exception. Cette affirmation a été vérifiée jusqu'à $d = 10$.

Pour degré 3 la classification est donc divisée en trois cas possibles :

1. Si $f = k \cdot p_1^3$ (pour certain $k \in \mathbb{R}$) alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w})$$

2. Si f est une n-exception alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w})$$

3. Sinon

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2}\, s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE I

RAPPELS, NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On va d'abord rappeler rapidement les notations et certaines formules classiques sur les partages qui serviront pour rappeler la forme de la caractéristique de Frobenius graduée de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ (souvent ce sont celles de [4, 26]). On établit notre espace référentiel l'anneau $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ des polynômes à ℓ ensemble de n variables et on calcule sa série de Hilbert. On fait un bref rappel sur l'espace gradué Λ des polynômes symétriques en décrivant les bases classiques de Λ, de même pour le cas d'un nombre fini de variables, l'espace Λ_n. On calcule la série de Hilbert de ces espaces. La notion de pléthysme est expliquée en détail. Ensuite, on rappel brevièment, l'espace multi-gradué $\Lambda^{(\ell)}$ des polynômes diagonalement symétriques et on donne les bases classiques de $\Lambda^{(\ell)}$, le cas de l'espace $\Lambda_n^{(\ell)}$ des polynômes diagonalement symétriques à n colonnes. On rappelle la description des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, les représentations polynomiales irréductibles de $GL_\ell(\mathbb{C})$ ainsi que ses caractères (rappelez que celles-ci indexées par des partages). Ceci nous permet de rappeler la forme des caractères irréductibles d'un $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-module.

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions et résultats classiques nécessaires ainsi que des notations, pour décrire en détail la caractéristique de Frobenius d'un $\mathfrak{S}_n$-module gradué $\mathcal{V}$. Plus précisément, étant donné un sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ sur lequel on considère deux actions de groupe, la première, l'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$, et la deuxième l'action du groupe $GL_\ell(\mathbb{C})$. Ces deux actions commutent et font de $\mathcal{V}$ une représentation du groupe $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$. Ceci nous donne tous les éléments nécessaires pour comprendre que la caractéristique de Frobenius prend la forme de la formule (2).

Pour le lecteur on rappelle que cette forme est la suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{\lambda\vdash n}\sum_{\mu} b_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

dont les coefficients $b_{\lambda,\mu}$ donnent les multiplicités des $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-modules irréductibles de la décomposition de $\mathcal{V}$. En particulier, on rappelle comme obtenir la série de Hilbert de $\mathcal{V}$ (GL_ℓ-caractère) à partir de la caractéristique graduée de Frobenius.

1.1 Partages

On commence avec la notion de partage d'un entier positif pour passer en suite aux partages vectoriels. Un **partage** λ est une suite finie $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs ordonnés de façon décroissante, c'est-à-dire, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$. Chacun de termes λ_i d'un partage λ est une **part** du partage. La **longueur** $\ell(\lambda)$ d'un partage λ est le nombre de parts de λ. Le **poids** $|\lambda|$ d'un partage λ est la somme des parts de λ, c'est-à-dire, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$et on écrit $\lambda \vdash n$. Si le poids d'un partage λ est n, on dit que λ **est un partage de** n, en d'autres mots, un partage d'un entier positif $n \geq 1$ est une représentation de n comme une somme d'entiers strictement positifs où l'ordre des termes de la somme n'est pas pris en considération.

Par exemple, $\mu = (4, 2, 2, 2, 1)$ est un partage de longueur $\ell(\mu) = 5$, de poids $|\mu| = 11$, on écrit $\mu \vdash 11$.

Pour chaque entier positif n, $\mathrm{Par}(n)$ dénote l'ensemble de tous les **partages de poids** n, et donc :

$\mathrm{Par}(0) = \{\varnothing\}$,

$\mathrm{Par}(1) = \{1\}$,

$\mathrm{Par}(2) = \{2, 11\}$,

$\mathrm{Par}(3) = \{3, 21, 111\}$,

$\mathrm{Par}(4) = \{4, 31, 22, 211, 1111\}$,

$\mathrm{Par}(5) = \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}$,

$\mathrm{Par}(6) = \{6, 51, 42, 411, 33, 321, 3111, 222, 2211, 21111, 111111\}$,

$\mathrm{Par}(7) = \{7, 61, 52, 511, 43, 421, 4111, 331, 322, 3211, 31111, 2221, 22111, 211111, 1111111\}$.

Souvent, on écrit aussi un partage $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ sous la forme :

$$\lambda = 1^{c_1} 2^{c_2} 3^{c_3} \cdots n^{c_n}.$$

où $c_i := \big|\{j : \ \lambda_j = i\}\big|$. Pour chaque partage λ de n on utilise la notation suivante :

$$z_\lambda := \prod_{i=1}^{n} i^{c_i}\, c_i! = 1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdots n^{c_n} \cdot c_n!.$$

Par exemple, pour $\lambda = (5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1)$, on écrit aussi $\lambda = 1^2 2^1 3^3 4^2 5^1$, et :

$$z_\lambda = 1^2 \cdot 2! \cdot 2^1 \cdot 1! \cdot 3^3 \cdot 3! \cdot 4^2 \cdot 2! \cdot 5^1 \cdot 1! = 2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 5 = 103680.$$

Soit n un entier positif, on note par $p(n)$ le **nombre de partages de** n , c'est-à-dire, la cardinalité de l'ensemble $\mathrm{Par}(n)$. Donc, $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$. Pour plus de détails sur l'énumération de partages, voir ([1, 9]). Ici on se concentre en rappeler une certaine formule pour énumérer les partages restreints, car on aura besoin de sa généralisation au cas vectoriel.

Partages restreints

Tout au cours de cette thèse on utilise la notation : $\mathbb{Z}$ pour l'ensemble des entiers, $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$, $\mathbb{N}^+ := \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$, et . Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ une suite d'entiers strictement positifs. Le nombre de solutions $b_1, b_2, \ldots, b_k$ de l'équation $b_1\mu_1 + \cdots + b_k\mu_k = n$ dans $\mathbb{N}^+$ est donné par le coefficient de q^n dans la série génératrice suivante (voir [6]) :

$$\sum_{(b_1,\ldots,b_k)\in\mathbb{N}^k} q^{b_1\mu_1+\cdots+b_k\mu_k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q^{\mu_i}}. \tag{1.1}$$

En suivant l'approche de [9] p.127, on considère les formules suivantes : Soit R un anneau commutatif.

Lemme 1.1.1. Soient A et B deux ensembles finis. Si $f : A \times B \longrightarrow R$ une application et $\mathfrak{R} : A \longrightarrow B$ une relation binaire. Alors :

$$\prod_{x\in A} \sum_{\{y\in B\,:\,(x,y)\in\mathfrak{R}\}} f(x,y) = \sum_{\substack{F:A\longrightarrow B\\ (x,F(x))\in\mathfrak{R}}} \prod_{x\in A} f(x,F(x)). \tag{1.2}$$

où la somme porte sur toutes les applications F de l'ensemble A vers l'ensemble B telles que $(x, F(x)) \in \mathfrak{R}$ pour tout $x \in A$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{N}^n$ **l'ensemble des vecteurs à n coordonnées dans** $\mathbb{N}$. Les **matrices de format $\ell \times n$ à coefficients naturels** sont dénotées comme $\mathbb{N}^{\ell\times n}$. Aussi, est usuelle la notation $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. On utilise le lemme 1.1.1 pour démontrer la formule du lemme suivant qui sera utile au chapitre 3. (voir [9]) :

Lemme 1.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ une suite d'entiers strictement positifs. Le nombre de matrices $B = (b_{ij}) \in \mathbb{N}^{\ell\times k}$ qui satisfont l'équation $B\mu^t = \mathbf{d}$, c'est-à-dire, les équations suivantes :

$$b_{i1}\,\mu_1 + b_{i2}\,\mu_2 + \cdots + b_{ik}\,\mu_k = d_i, \text{ pour tout } i \text{ avec } 1 \leq i \leq \ell,$$

est donné par le coefficient de $\mathbf{q}^{\mathbf{d}} = q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_\ell^{d_\ell}$ dans la série génératrice suivante :

$$\sum_{B\in\mathbb{N}^{\ell\times k}} \prod_{i=1}^{\ell} q_i^{b_{i1}\mu_1+\cdots+b_{ik}\mu_k} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-q_i^{\mu_j}}. \tag{1.3}$$

Démonstration. En utilisant la formule (1.2) on obtient :

$$\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-q_i^{\mu_j}} = \prod_{(i,j)\in[\ell]\times[k]} \left(\sum_{s=0}^{\infty} q_i^{\mu_j s}\right) = \sum_{B:[\ell]\times[k]\longrightarrow\mathbb{N}} \prod_{(i,j)\in[\ell]\times[k]} q_i^{\mu_j B(i,j)}$$

$$= \sum_{B\in\mathbb{N}^{\ell\times k}} \prod_{i=1}^{\ell} q_i^{\sum_{j=1}^{k}\mu_j B(i,j)}.$$

□

Les coefficients des multiensembles

On rappelle ici que les **coefficients de multiensemble** $\left(\!\!\binom{m}{r}\!\!\right)$ sont définis comme suit :

$$\left(\!\!\binom{m}{r}\!\!\right) := \frac{m(m+1)\cdots(m+r-1)}{r!}.$$

Ils comptent le nombre de sous-multiensembles de cardinalité r d'un multiensemble à n éléments. Le nombre de monômes $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ dans $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ de degré d est donné par $\left(\!\!\binom{n}{d}\!\!\right)$.

1.2 Polynômes à n variables

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique zéro, et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une suite de variables commutatives et indépendantes. Il est usuel de dénoter par $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ l'anneau des polynômes à n variables $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, mais nous le dénotons aussi $\mathcal{R}_n$. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, on écrit $\mathbf{x}^\mathbf{a}$ pour le **monôme** $\mathbf{x}^\mathbf{a} := x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$. Le **degré** $\deg(\mathbf{x}^\mathbf{a})$ de $\mathbf{x}^\mathbf{a}$ est la somme, $|\mathbf{a}| := a_1+a_2+\cdots+a_n$, $\mathbf{x}^\mathbf{0} := 1$, et $\mathbf{x}^\mathbf{a}\mathbf{x}^\mathbf{b} := \mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. Un **polynôme** $f(\mathbf{x})$ dans $\mathcal{R}_n$ est une somme de support fini :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} f_\mathbf{a}\,\mathbf{x}^\mathbf{a},$$

avec les $f_\mathbf{a} \in \mathbb{K}$.

Par définition, l'ensemble des monômes $\mathbf{x}^\mathbf{b}$, où $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, est une base linéaire de $\mathcal{R}_n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour chaque entier positif d la **composante homogène de degré** d de $\mathcal{R}_n$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{n,d}$ de $\mathcal{R}_n$ engendré par les monômes de degré d :

$$\mathcal{R}_{n,d} := \mathbb{K}\big[\mathbf{x}^\mathbf{a} : |\mathbf{a}| = d\big].$$

L'ensemble $\mathcal{B}_{n,d} := \{\mathbf{x}^\mathbf{a} : |\mathbf{a}| = d\}$ forme donc une base linéaire de $\mathcal{R}_{n,d}$. Il s'ensuit facilement que la dimension de $\mathcal{R}_{n,d}$ est

$$\dim_K(\mathcal{R}_{n,d}) := |\mathcal{B}_{n,d}| = \left(\!\!\binom{n}{d}\!\!\right).$$

Un polynôme $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_n$ est dit **homogène de degré** k si $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$. Autrement dit, $f(\mathbf{x})$ est homogène de degré d si et seulement si (voir [18] p.54.) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f(\mathbf{x})) = d \cdot f(\mathbf{x}).$$

Clairement, on a

$$\mathcal{R}_n = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_{n,d}, \tag{1.4}$$

On résume ceci en disant que $\mathcal{R}_n$ est gradué par le degré total.

Remarque 1.2.1. On dénote par $\mathcal{R}_\ell$ l'anneau des polynômes en les variables $x_1, \ldots, x_\ell$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, mais on a la convention que $\mathcal{R}_\ell$ est **multi-gradué** (gradué dans $\mathbb{N}^\ell$), c'est-à-dire, le degré d'un monôme est donné par :

$$\deg\left(x_1^{d_1} \cdots x_\ell^{d_\ell}\right) := (d_1, \ldots, d_\ell).$$

Dans ce cas on a :

$$\mathcal{R}_\ell = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \mathcal{R}_{\ell,\mathbf{d}},$$

où la composante homogène de multi-degré $\mathbf{d}$ est définie comme

$$\mathcal{R}_{\ell,\mathbf{d}} := \left\{k \cdot x_1^{d_1} \cdots x_\ell^{d_\ell} \,|\, \mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell),\, k \in \mathbb{K}\right\}.$$

Évidemment $\dim\left(\mathcal{R}_{\ell,\mathbf{d}}\right) = 1$, pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$.

1.3 Polynômes à ℓ ensembles de n variables

Soit $\ell > 0$ un entier. On rappelle qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ est dit $\mathbb{N}^\ell$-gradué (multi-gradué) si on a une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_\mathbf{d}. \tag{1.5}$$

où $\dim(\mathcal{V}_\mathbf{d}) < \infty$ pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$. Les sous-espaces $\mathcal{V}_\mathbf{d}$ sont les composantes homogènes de degré $\mathbf{d}$ de $\mathcal{V}$. La **série de Hilbert** associée à $\mathcal{V}$ est :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \dim(\mathcal{V}_\mathbf{d})\, \mathbf{q}^\mathbf{d}.$$

où $\mathbf{q}^\mathbf{d} = q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_r^{d_r}$ pour chaque vecteur $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_r) \in \mathbb{N}^\ell$. Autrement dit, si $\mathcal{B}$ est une base homogène de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^r} \mathcal{B}_\mathbf{d},$$

avec $\mathcal{B}_\mathbf{d}$ une base de $\mathcal{V}_\mathbf{d}$, on a que la série de Hilbert s'exprime aussi comme :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{g\in\mathcal{B}} \mathbf{q}^{\deg(g)}.$$

où on écrit $\deg(g) = \mathbf{d}$ si $g \in \mathcal{V}_\mathbf{d}$.

Description de l'anneau $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$

Considérons une matrice de variables indépendantes et commutatives $X := (x_{ij})$ de format $\ell \times n$. Pour chaque entier positif i tel que $1 \le i \le \ell$ (une ligne de la matrice X), on dit que les variables $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ forment **le i-ième ensemble de variables**. On écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\ell 1} & x_{\ell 2} & \dots & x_{\ell n} \end{pmatrix}.$$

On note par X_j la *j-ième* colonne de la matrice X, pour $1 \le j \le n$. On note par $\mathbb{N}^{\ell\times n}$ l'ensemble des matrices de de format $\ell \times n$. Nous utilisons la même convention pour toute matrice $A \in \mathbb{N}^{\ell\times n}$. On pose $\mathcal{R}_n^{(\ell)} = \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_{ij}]$, c'est-à-dire, $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ c'est l'anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ en la matrice des variables X. On peut, donc définir les monômes dans $\mathcal{R}_n^\ell$ comme suit :

$$X_j^{A_j} := \prod_{i=1}^{\ell} x_{ij}^{a_{ij}}, \quad \text{ainsi que} \quad X^A := \prod_{i,j} x_{ij}^{a_{ij}}.$$

Alors, on écrira les polynômes $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ comme une expression de la forme :

$$f(X) = \sum_{A \in \mathbb{N}^{\ell \times n}} f_A X^A$$

à support fini, c'est-à-dire, la cardinalité de l'ensemble de matrices $\{A \in \mathbb{N}^{\ell \times n} | f_A \neq 0\}$ est finie. Autrement dit, l'ensemble des monômes $\mathbf{x}^B$ où $B \in \mathbb{N}^{\ell \times n}$ est une base linéaire de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **gradué sur** $\mathbb{N}^\ell$ par le **vecteur multi-degré**. Pour un monôme de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, on a :

$$\deg\left(X^A\right) := \sum_{j=1}^{n} A_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}\right)$$

Pour un polynôme quelconque $f(X) = \sum_{A \in \mathbb{N}^{\ell \times n}} f_A X^A$ dans $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ son **multi-degré** est donné par la fonction $\deg : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathbb{N}^\ell$ définié comme suit :

$$\deg\left(f(X)\right) := \max_{\text{grlex}}\left\{\deg\left(X^A\right) : f_A \neq 0\right\}.$$

où $\max_{\text{grlex}}$ est l'ordre lexicographique gradué. Le multi-degré a aussi les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \deg\left(f(X) + g(X)\right) &\leq \max_{\text{grlex}}\left\{\deg\big(f(X)\big), \deg\big(g(X)\big)\right\}, \\ \deg\left(f(X)g(X)\right) &= \deg\big(f(X)\big) + \deg\big(g(X)\big). \end{aligned}$$

Soit Q la matrice diagonale suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q_\ell \end{pmatrix}$$

Un polynôme $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est dit **homogène de multi-degré d** s'il satisfait la condition suivante :

$$f(QX) = \mathbf{q}^{\mathbf{d}} f(X).$$

où $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_\ell)$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell)$, $\mathbf{q}^{\mathbf{d}} = q_1^{d_1} \ldots q_\ell^{d_\ell}$. On remarque qu'un polynôme $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est homogène de multi-degré $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ si et seulement si l'identité suivante est satisfaite :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(X) = d_i \cdot f(X), \text{ pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq \ell,$$

En d'autres mots, si $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est un polynôme homogène de multi-degré $\mathbf{d} = (d_1, d_2 \ldots, d_\ell)$. Pour chaque i, avec $1 \leq i \leq \ell$, on note par $E_{i,i}$ l'opérateur linéaire $E_{i,i} : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ satisfait l'identité suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \right) \Big(f(X) \Big) = d_i \cdot f(X).$$

c'est-à-dire, on a :

$$E_{i,i}\big(f(X)\big) = d_i \cdot f(X).$$

Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ on définit **composante homogène de multi-degré d** $\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$ comme le sous-espace de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ engendré par tous les monômes dans $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ de degré $\mathbf{d}$. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ on considère la projection $\pi_{\mathbf{d}} : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$ donnée par :

$$\pi_{\mathbf{d}}\left(X^A\right) := \begin{cases} X^A & \text{si } \deg\left(X^A\right) = \mathbf{d}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout polynôme $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ de multi-degré $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ s'écrit de manière unique comme une somme finie de polynômes homogènes comme suit :

$$f(X) = \sum_{\{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\ell :\ \mathbf{a} \preceq \mathbf{d}\}} g_{\mathbf{a}}(X),$$

où $g_{\mathbf{a}}(X) := \pi_{\mathbf{a}}\left(f(X)\right)$ c'est la partie homogène de multi-degré **a** du polynôme $f(X)$. On a donc, la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{R}_n^{(\ell)} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$$

Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$, la composante homogène $\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}$ de multi-degré $\mathbf{d}$ admet comme base linéaire le sous-ensemble :

$$\mathcal{B}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}} := \{X^A : \deg\left(X^A\right) = \mathbf{d}\}.$$

Supposons que $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$, on sait que la condition $\deg\left(X^A\right) = \mathbf{d}$ implique que pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$ on a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_i$. On sait que le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_i$ est $\left(\!\binom{n}{d_i}\!\right)$ et donc, le nombre de monômes dans $\mathcal{R}^{(\ell)}_n$ de multi-degré $\mathbf{d}$ est donné par :

$$\left|\{X^A : \deg\left(X^A\right) = \mathbf{d}\}\right| = \left(\!\binom{n}{d_1}\!\right)\left(\!\binom{n}{d_2}\!\right)\cdots\left(\!\binom{n}{d_\ell}\!\right),$$

Ainsi, la dimension de la composante homogène $\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}$ de multi-degré $\mathbf{d}$ est :

$$\dim\left(\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}\right) = \left(\!\binom{n}{d_1}\!\right)\left(\!\binom{n}{d_2}\!\right)\cdots\left(\!\binom{n}{d_\ell}\!\right),$$

La dimension du sous-espace de $\mathcal{R}^{(\ell)}_n$ de polynômes de **degré total** plus petit ou égal à k est :

$$\dim\left(\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,k}\right) = \sum_{|\mathbf{d}|=k} \dim\left(\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}\right) = \sum_{|\mathbf{d}|=k} \left(\!\binom{n}{d_1}\!\right)\left(\!\binom{n}{d_2}\!\right)\cdots\left(\!\binom{n}{d_\ell}\!\right) = \binom{n\ell+k-1}{k}.$$

Alors, la **série de Hilbert** de l'espace vectoriel $\mathbb{N}^\ell$-gradué $\mathcal{R}^{(\ell)}_n$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(\ell)}_n(\mathbf{q}, t) &:= \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \dim\left(\mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}\right) t^{|\mathbf{d}|}\mathbf{q}^{\mathbf{d}} \\
&= \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_\ell)\in\mathbb{N}^\ell} \left(\!\binom{n}{d_1}\!\right)\left(\!\binom{n}{d_2}\!\right)\cdots\left(\!\binom{n}{d_\ell}\!\right) t^{d_1+d_2+\cdots+d_\ell} q_1^{d_1} q_2^{d_2}\cdots q_\ell^{d_\ell} \\
&= \left(\sum_{d_1\geq 0}\left(\!\binom{n}{d_1}\!\right)(tq_1)^{d_1}\right)\left(\sum_{d_2\geq 0}\left(\!\binom{n}{d_2}\!\right)(tq_2)^{d_2}\right)\cdots\left(\sum_{d_\ell\geq 0}\left(\!\binom{n}{d_\ell}\!\right)(tq_\ell)^{d_\ell}\right) \\
&= \frac{1}{(1-q_1t)^n}\frac{1}{(1-q_2t)^n}\cdots\frac{1}{(1-q_\ell t)^n}.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient (voir [14] p.22.)

$$\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q},t) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{(1-q_i t)^n}. \tag{1.6}$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Comme c'est souvent le cas, on note par $\mathfrak{S}_n$ **le groupe symétrique de degré** n, c'est-à-dire, le groupe des bijections $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$, avec la composition de fonctions. Un élément de $\mathfrak{S}_n$ est appelé une **permutation** de n. Le **type cyclique** de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le partage de n

$$\lambda(\sigma) := 1^{c_1(\sigma)} 2^{c_2(\sigma)} \dots n^{c_n(\sigma)}, \tag{1.7}$$

où $c_i(\sigma) :=$ nombre de cycles de taille i dans la décomposition en cycles disjoints de σ. Rappelons que deux permutations sont conjugées, i.e. $\exists\, \theta \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\theta\sigma\theta^{-1} = \tau$, si et seulement si elles ont le même type cyclique, $\lambda(\sigma) = \lambda(\tau)$. Le **signe** d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est défini par $\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{|\{(i,j):\ i<j,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}|}$.

1.4 Rappel sur les polynômes symétriques et le pléthysme

Soit f un polynôme dans $\mathcal{R}_n$ et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On dit que f est **symétrique** si et seulement si :

$$(\sigma \cdot f)(\mathbf{x}) := f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = f(\mathbf{x}).$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Comme dans [22] on désigne par Λ_n l'anneau des **polynômes symétriques à** n **variables.** Un argument de limite inductive (voir [22]) montre qu'on peut travailler avec un nombre dénombrable de variables. En fait cela simplifie beaucoup les manipulations et calculs. On écrit plutôt Λ pour l'anneau des « polynômes » symétriques (fonctions symétriques) en cet infinité de variables $\mathbf{w} = w_1, w_2, w_2, \dots$. L'anneau Λ est gradué par le degré :

$$\Lambda := \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Lambda(d),$$

et une base de $\Lambda(d)$ la composante homogène de degré d est donnée par les **polynômes symétriques monomiaux** $m_\lambda(\mathbf{w})$ avec λ variant dans les partages de d. Pour récupérer le cas à n variables, il suffit de spécialiser en $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots$. Alors, on obtient la **fonction symétrique monomiale** $m_\lambda(\mathbf{w})$ correspondante au partage $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est définie comme suit :

$$m_\lambda(\mathbf{w}) := \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} w_{i_1}^{\lambda_1} w_{i_2}^{\lambda_2} \cdots w_{i_k}^{\lambda_k},$$

où la somme porte sur tous les choix possibles de k indices distincts $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. On écrira

$$m_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}(\mathbf{w}) := \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} w_{i_1}^{\lambda_1} w_{i_2}^{\lambda_2} \cdots w_{i_k}^{\lambda_k}.$$

Exemple 1.4.1.

$$m_{2,1}(\mathbf{w}) = \sum_{i \neq j} w_i^2 w_j,$$

$$m_{3,3}(\mathbf{w}) = \sum_{i<j} w_i^3 w_j^3,$$

$$m_{1,1,1}(\mathbf{w}) = \sum_{i<j<k} w_i w_j w_k,$$

$$m_{2,1,1}(\mathbf{w}) = \sum_{i \neq j,\, i \neq k,\, j<k} w_i^2 w_j w_k.$$

$$m_{9,7,4}(\mathbf{w}) = \sum_{\left|\{i,j,k\}\right|=3} w_i^9 w_j^7 w_k^4.$$

Remarque 1.4.1. Soit $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si μ est un partage, dont le nombre de termes $\ell(\mu) > n$ alors, $m_\mu(\mathrm{x}) = 0$.

À partir des fonctions symétriques monomiales, on peut définir les fonctions symétriques suivantes :

La fonction symétrique **somme de puissances** k-ièmes $p_k(\mathbf{w})$ est donnée par :

$$p_k(\mathbf{w}) := m_{(k)}(\mathbf{w}) = \sum_{i \geq 1} w_i^k.$$

La fonction symétrique **élémentaire** $e_k(\mathbf{w})$ est donnée par :

$$e_k(\mathbf{w}) := m_{(1^k)}(\mathbf{w}) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} w_{i_1}\cdots w_{i_k}.$$

La fonction symétrique **complète homogène** $h_k(\mathbf{w})$ est donnée par :

$$h_k(\mathbf{w}) := \sum_{\mu\vdash k} m_\mu(\mathbf{w}) = \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} w_{i_1}\cdots w_{i_k}.$$

Plus généralement, pour $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ un partage on a :

$$p_\lambda(\mathbf{w}) := p_{\lambda_1}(\mathbf{w})\ldots p_{\lambda_k}(\mathbf{w}), \qquad h_\lambda(\mathbf{w}) := h_{\lambda_1}(\mathbf{w})\ldots h_{\lambda_k}(\mathbf{w}) \qquad \text{et}$$

$$e_\lambda(\mathbf{w}) := e_{\lambda_1}(\mathbf{w})\ldots e_{\lambda_k}(\mathbf{w}).$$

Pour chaque $d \in \mathbb{N}$, les ensembles suivants sont des bases linéaires de l'espace vectoriel $\Lambda(d)$:

$$\{m_\lambda(\mathbf{w}) :\ \lambda\vdash d\},\quad \{p_\lambda(\mathbf{w}) :\ \lambda\vdash d\},\quad \{h_\lambda(\mathbf{w}) :\ \lambda\vdash d\} \quad \text{et} \quad \{e_\lambda(\mathbf{w}) :\ \lambda\vdash d\}.$$

Autrement dit, les polynômes symétriques élémentaires $e_i(\mathbf{w})$ génèrent comme $\mathbb{K}$-algèbre à l'espace Λ

$$\Lambda = \mathbb{K}[e_1, e_2, \ldots] = \mathbb{K}[h_1, h_2, \ldots] = \mathbb{K}[p_1, p_2, \ldots]. \tag{1.8}$$

Pour plus de détails, voir [28].

Rappelez que le **conjugé** λ' d'un partage λ est le partage $\lambda' := (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$ où λ'_i est le nombre de parts de λ dont la valeur est au moins i, c'est-à-dire, $\lambda'_i = |\{j\ :\ \lambda_j \geq i\}|$. Observons que si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ alors $\ell(\lambda') = \lambda_1$ et $r = \ell(\lambda) = \lambda'_1$.

Les bases dans le cas d'un nombre fini de variables

Si on spécialise à n variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; on obtient le sous-anneau Λ_n de $\mathcal{R}_n$ défini par la formule :

$$\Lambda_n := \bigoplus_{d\geq 0} \Lambda_{n,d}$$

où $\Lambda_{n,d} := \mathbb{K}\left[m_\lambda(\mathbf{x}) :\ \lambda \vdash d,\ \ell(\lambda) \leq n\right]$. Chacun des ensembles suivants est une base de l'espace vectoriel $\Lambda_{n,d}$,

$$\left\{p_\lambda(\mathbf{x}) :\ \lambda \vdash d,\ \ell(\lambda') \leq n\right\},\quad \left\{e_\lambda(\mathbf{x}) :\ \lambda \vdash d,\ \ell(\lambda') \leq n\right\},\quad \left\{h_\lambda(\mathbf{x}) :\ \lambda \vdash d,\ \ell(\lambda') \leq n\right\}.$$

Observons que par **Théorème de Newton** on sait que pour tout n :

$$\Lambda_n = \mathbb{K}\big[e_1, e_2, \ldots, e_n\big] = \mathbb{K}\big[p_1, p_2, \ldots, p_n\big] = \mathbb{K}\big[h_1, h_2, \ldots, h_n\big]. \tag{1.9}$$

pour plus de détails, voir [3, 28].

Notation pléthystique

Soit $\mathbf{z} = z_1, z_2, z_3, \ldots$ une suite infinie (dénombrable) de variables. Le **pléthysme** consiste à interpréter les fonctions symétriques comme opérateurs sur le corps $\mathbb{K}(\mathbf{z})$ (le corps de fonctions rationnelles dans les variables $\mathbf{z} = z_1, z_2, z_3, \ldots$) avec les règles de calcul suivantes (voir [28]) :

Pour f, g dans Λ, $a, b \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathbb{K}(\mathbf{z})$ on a :

1. $p_k\big[A(\mathbf{z})\big] := p_k\big[A(z_1, z_2, z_3, \ldots)\big] = A(z_1^k, z_2^k, z_3^k, \ldots)$.
2. $(a\,f + b\,g)[A(\mathbf{z})] = a\,f[A(\mathbf{z})] + b\,g[A(\mathbf{z})]$.
3. $(fg)[A(\mathbf{z})] = f[A(\mathbf{z})]g[A(\mathbf{z})]$.
4. $p_k[A(\mathbf{z}) + B(\mathbf{z})] = p_k[A(\mathbf{z})] + p_k[B(\mathbf{z})]$.
5. $p_k[A(\mathbf{z})B(\mathbf{z})] = p_k[A(\mathbf{z})]p_k[B(\mathbf{z})]$.
6. $p_k[z_i] = z_i^k$.

Si $R(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{K}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ alors, on utilise la règle suivante :

$$p_k\big[R(\mathbf{z}, \mathbf{w})\big] := p_k\big[R(z_1, z_2, z_3, \ldots, w_1, w_2, w_3, \ldots)\big] := R(z_1^k, z_2^k, z_3^k, \ldots, w_1^k, w_2^k, w_3^k, \ldots).$$

Observons que la composition de fonctions symétriques $f\big[g(\mathbf{w})\big]$ comme opérateurs correspond au pléthysme suivant :

$$p_k\big[p_n(\mathbf{w})\big] = p_{kn}(\mathbf{w}).$$

En effet, on peut vérifier l'identité ci-haut comme suit :

$$\begin{aligned} p_k\big[p_n(\mathbf{z})\big] &= p_k\big[z_1^n + z_2^n + z_3^n + \cdots\big] = (z_1^k)^n + (z_2^k)^n + (z_3^k)^n + \cdots \\ &= z_1^{kn} + z_2^{kn} + z_3^{kn} + \cdots = p_{kn}(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

De même, on a

$$p_n\big[p_k(\mathbf{z})\big] = p_{nk}(\mathbf{z}) = p_{kn}(\mathbf{z}) = p_k\big[p_n(\mathbf{z})\big],$$

ceci implique

$$p_n\big[p_k(\mathbf{z})\big] = p_k\big[p_n(\mathbf{z})\big]. \tag{1.10}$$

En général, pour n'importe quelle fonction symétrique $f(\mathbf{w})$ telle que $f(\mathbf{w}) = \sum_\lambda a_\lambda p_\lambda(\mathbf{w})$ on définit la substitution pléthystique comme suit :

$$f\big[R(\mathbf{z})\big] := \sum_\lambda a_\lambda p_\lambda\big[R(\mathbf{z})\big].$$

En utilisant la définition ci-haut on peut vérifier une importante propriété du pléthysme :

$$p_k\left[R(\mathbf{z})\right] = R\left[p_k(\mathbf{z})\right],$$

c'est-à-dire,

$$R\big[z_1^k + z_2^k + z_3^k \cdots\big] = R(z_1^k, z_2^k, z_3^k, \ldots). \tag{1.11}$$

Vérifions l'identité (1.11), pour ce faire, on remarque d'abord que pour tout partage λ on a que

$$p_\lambda\big[p_k(\mathbf{z})\big] = p_k\big[p_\lambda(\mathbf{z})\big]. \tag{1.12}$$

En effet, si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ alors l'identité (1.10) nous donne :

$$\begin{aligned} p_\lambda\big[p_k(\mathbf{z})\big] &= p_{\lambda_1}\big[p_k(\mathbf{z})\big] \cdots p_{\lambda_r}\big[p_k(\mathbf{z})\big] = p_k\big[p_{\lambda_1}(\mathbf{z})\big] \cdots p_k\big[p_{\lambda_r}(\mathbf{z})\big] = p_k\big[p_{\lambda_1}(\mathbf{z}) \cdots p_{\lambda_r}(\mathbf{z})\big] \\ &= p_k\left[p_\lambda(\mathbf{z})\right]. \end{aligned}$$

maintenant, supposons que $R(\mathbf{z}) = \sum_\lambda c_\lambda p_\lambda(\mathbf{z})$, alors l'identité 1.12 nous donne

$$R\big[p_k(\mathbf{z})\big] = \sum_\lambda c_\lambda p_\lambda\left[p_k(\mathbf{z})\right] = \sum_\lambda c_\lambda p_k\left[p_\lambda(\mathbf{z})\right] = p_k\left[\sum_\lambda c_\lambda p_\lambda(\mathbf{z})\right] = p_k\left[R(\mathbf{z})\right].$$

Remarque 1.4.2. On utilisera les pléthysmes suivants :

$$p_k[\mathbf{z}] := p_k[p_1(\mathbf{z})] = p_k(\mathbf{z}),$$

$$p_k[\mathbf{zw}] := p_k[p_1(\mathbf{z})p_1(\mathbf{w})] = p_k\left[\sum_{i,j\geq 1} z_i w_j\right] = \sum_{i,j\geq 1} z_i^k w_j^k = p_k(\mathbf{z})p_k(\mathbf{w}).$$

$$p_k\left[\frac{\mathbf{w}}{1-q}\right] := p_k\left[p_1(\mathbf{w})\frac{1}{1-q}\right] = p_k\left[\sum_{i\geq 1, j\geq 0} w_i q^j\right] = \sum_{i\geq 1, j\geq 0} w_i^k q^{kj} = \frac{p_k(\mathbf{w})}{1-q^k}.$$

Le pléthysme $h_n\left[\frac{1}{1-q}\right]$

Il est bien connu la formule suivante :

$$h_n(\mathbf{w}) = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{w}) \tag{1.13}$$

nous donne :

$$h_n\left[\frac{1}{1-q}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda\left[\frac{1}{1-q}\right],$$

Sachant que $p_\lambda(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(\mathbf{w})$, alors on a :

$$p_\lambda\left[\frac{1}{1-q}\right] = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}\left[\frac{1}{1-q_i}\right] = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\mu_i}},$$

$$h_n\left[\frac{1}{1-q}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}},$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a l'identité suivante :

$$\sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-q^j}, \tag{1.14}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ on a l'identité suivante :

$$h_n\left[\frac{1}{1-q}\right] = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-q^j}. \tag{1.15}$$

En effet,

$$h_n\left[\frac{1}{1-q}\right] = h_n\left[1+q+q^2+q^3+\cdots\right] = h_n(1,q,q^2,q^3,\ldots) = \sum_{\lambda\vdash n:\ \ell(\lambda)\leq n} q^{|\lambda|}$$

$$= \sum_{\lambda\vdash n:\ \lambda_1\leq n} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^n)}.$$

Donc, avec la notation pléthystique on peut écrire :

$$\Lambda_n(q) = h_n\left[\frac{1}{1-q}\right].$$

Le pléthysme $h_n\left[\dfrac{\mathbf{w}}{1-q}\right]$

Aussi, en utilisant la formule 1.13 on obtient :

$$h_n\left[\frac{\mathbf{w}}{1-q}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda\left[\frac{\mathbf{w}}{1-q}\right],$$

comme $p_\lambda(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(\mathbf{w})$, alors on peut écrire :

$$h_n\left[\frac{\mathbf{w}}{1-q}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{p_{\lambda_i}(\mathbf{w})}{1-q^{\lambda_i}} = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{w}) \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}.$$

Le pléthysme $h_n\left[\mathbf{w}\prod_{i=1}^{\ell}\dfrac{1}{1-q_i}\right]$

Similairement, on a les pléthysmes suivants :

$$h_n\left[\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{k=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i^{\lambda_k}} \tag{1.16}$$

$$h_n\left[\mathbf{w}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i}\right] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{w}) \prod_{k=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i^{\lambda_k}} \tag{1.17}$$

Fonctions de Schur

On utilise ici la formule de Jacobi-Trudi (voir [3] p.76.) pour définir les **fonctions de Schur** :

$$s_\lambda(\mathbf{w}) := \text{dét}\big(h_{\lambda_i+j-i}(\mathbf{w})\big)_{1\le i,j\le n}.$$

où $h_k = 0$ si $k < 0$. Les fonctions de Schur ont les propriétés suivantes :

1. Les fonctions de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$ sont symétriques.

2. Pour chaque $d \geq 0$, l'ensemble $\{s_\lambda(\mathbf{w}) : \lambda \vdash d\}$ est une base de la composante homogène $\Lambda(d)$.

3. Soit $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots$, en particulier, pour chaque $d \geq 0$ l'ensemble $\{s_\lambda(\mathbf{x}) : \lambda \vdash d,\ \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de la composante homogène $\Lambda_{n,d}$. Donc, l'ensemble $\{s_\lambda(\mathbf{x}) : \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de l'espace Λ_n de polynômes symétriques en au plus n variables.

Pour plus de détails, voir [3, 28, 26].

Exemple 1.4.2. Pour $n = 3$ et $\lambda = (2, 1)$ on a :

$$s_{2,1}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + 2x_1x_2x_3.$$

De même, on peut vérifier :

$$\begin{aligned}
s_{2,2,1}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2,\\
s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2,\\
s_{2,2}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2,\\
s_{2,2,1,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2.
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.3. Pour tout $k \geq 0$ on a que, $s_{(k)}(\mathbf{x}) = h_k(\mathbf{x})$, $s_{(1^k)}(\mathbf{x}) = e_k(\mathbf{x})$.

Formules de Cauchy

Comme conséquence de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (Voir [3]) on a les formules de Cauchy suivantes :

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{x})\, s_\lambda(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{x})\, p_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j\geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j}. \tag{1.18}$$

En d'autres mots, soient $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3, \ldots$ et $\mathbf{y} = y_1, y_2, y_3, \ldots$ deux suites infinies de variables. Alors,

$$h_n\,[\mathbf{x}\,\mathbf{y}] = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{x}) p_\lambda(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}). \tag{1.19}$$

Si λ et μ sont deux partages tels que $\mu \subseteq \lambda$ le **partage gauche** λ/μ est un diagramme obtenu comme différence d'ensembles des diagrammes de Ferrer $D(\lambda)\backslash D(\mu)$. Pour plus de détails, voir [3]. La **règle de Pieri** est la formule suivante :

$$h_k(\mathbf{x})\, s_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{x}), \tag{1.20}$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des partages λ qui contient μ, tels que λ/μ ne contient pas deux cases dans la même colonne, et λ/μ contient k cases. Si $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ on a comme corollaire de la règle de Pieri la formule suivante :

$$s_n(\mathbf{w}) + s_{n-1,1}(\mathbf{w}) + s_{n-2,2}(\mathbf{w}) + \cdots + s_{n-k,k}(\mathbf{w}) = h_{n-k,k}(\mathbf{w}). \tag{1.21}$$

Schur positivité et h-positivité

On dit qu'une fonction symétrique $f(\mathbf{w})$ est **Schur-positive** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de fonctions de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$. En symboles, $f(\mathbf{w})$ est dite Schur-positive si elle s'écrit sous la forme :

$$f(\mathbf{w}) = \sum_{\lambda} n_\lambda\, s_\lambda(\mathbf{w}), \quad \text{avec } n_\lambda \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \lambda.$$

Aussi, on dit qu'une fonction symétrique $f(\mathbf{w})$ est ***h*-positive**, si elle s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de fonctions symétriques homogènes $s_\lambda(\mathbf{w})$.

Le pléthysme des fonctions symétriques qui sont Schur-positives est aussi Schur positive (voir, [28] p.448]), c'est-à-dire, si f et g sont des combinaisons linéaires, avec de coefficients dans $\mathbb{N}$, de fonctions de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$, en symboles,

$$f(\mathbf{w}) = \sum_\lambda a_\lambda\, s_\lambda(\mathbf{w}), \text{ et } g(\mathbf{w}) = \sum_\mu b_\mu\, s_\lambda(\mathbf{w}), \text{ où } a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N},$$

alors, le pléthysme $f\left[g(\mathbf{w})\right]$ est aussi une combinaison linéaire avec de coefficients dans $\mathbb{N}$ de fonctions de Schur. En d'autres mots, il existe des entiers naturels n_λ tels que :

$$f\left[g(\mathbf{w})\right] = \sum_\lambda n_\lambda\, s_\lambda(\mathbf{w}), \text{ où } n_\lambda \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

1.5 Rappel sur les polynômes diagonalement symétriques

En suivant [25], on définit les **polynômes symétriques de MacMahon** ou **diagonalement symétriques** . Soient $f(X)$ un polynôme dans $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La matrice de variables $X = (x_{ij})$ est considérée comme la suite de ses colonnes X_j, c'est-à-dire :

$$X = (X_1, \ldots, X_n).$$

On écrira le polynôme $f(X)$ comme un polynôme dans les colonnes de X, $f(X) = f(X_1, \ldots, X_n)$. On considère le polynôme $\sigma \cdot f$ en posant :

$$(\sigma \cdot f)(X_1, \ldots, X_n) := f\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\right).$$

Le polynôme $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est dit **diagonalement symétrique** si $(\sigma \cdot f)(X) = f(X)$, c'est-à-dire, $f\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\right) = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Exemple 1.5.1. Pour $\ell = n = 3$ on a le polynôme diagonalement symétrique :

$$g(X) := x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{22}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}.$$

Exemple 1.5.2. Pour $\ell = 2$ et $n = 3$ le polynôme, $p(X) := x_{11}^4x_{21}^5 + x_{12}^4x_{22}^5 + x_{13}^4x_{23}^5$, est diagonalement symétrique.

Polynômes diagonalement symétriques de base

Soit W une matrice de variables à ℓ lignes.

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{\ell 1} & w_{\ell 2} & w_{\ell 3} & \cdots \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\ell)$ un vecteur de variables et W_j la colonne j de la matrice W. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ on écrira $\mathbf{t}^\mathbf{d} = t_1^{d_1} t_2^{d_2} \cdots t_\ell^{d_\ell}$. On définit les fonctions diagonalement symétriques suivantes (voir [25]) :

La **somme de puissances diagonalement symétrique** $p_\mathbf{a}(W)$ est donnée par :

$$p_\mathbf{d}(W) := \sum_{j\geq 1} W_j^\mathbf{d} = \sum_{j\geq 1} w_{1j}^{d_1} \ldots w_{\ell j}^{d_\ell}$$

La fonction **diagonalement symétrique élémentaire** $e_\mathbf{d}(W)$ par la série génératrice suivante :

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} e_\mathbf{d}(W)\,\mathbf{t}^\mathbf{d} = \prod_{j\geq 1} \left(1 + \sum_{i=1}^{\ell} t_j w_{ij}\right).$$

Nous utilisons la deuxième version des fonctions **diagonalement symétriques complètes homogènes** de MacMahon, à savoir, la fonction $h_\mathbf{d}(W)$ est donnée par la série génératrice suivante :

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} h_\mathbf{d}(W)\,\mathbf{t}^\mathbf{d} = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^{\ell} t_j w_{ij}\right)}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^+$. Pour une matrice A de taille $\ell \times k$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. La **fonction diagonalement symétrique monomial** est donnée par :

$$m_A(W) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} W_{i_1}^{A_1} \ldots W_{i_k}^{A_k},$$

où la somme porte sur tous les choix possibles de k indices différents. Soit $A \in \mathbb{N}^{\ell\times k}$ une matrice, dont les colonnes, sont $A_1, \ldots, A_k$. On définit les polynômes diagonalement symétriques suivants :

$$p_A := p_{A_1^t} \cdots p_{A_k^t}, \quad e_A := e_{A_1^t} \cdots e_{A_k^t}, \quad h_A := h_{A_1^t} \cdots h_{A_k^t}.$$

Cas d'un nombre fini de variables

On a les séries génératrices suivantes

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell-\{0\}} p_{\mathbf{d}}(X)\frac{|\mathbf{d}|!\,\mathbf{t}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!|\mathbf{d}|} = \log\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{\ell} t_j x_{ij}}\right), \tag{1.23}$$

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} e_{\mathbf{d}}(X)\,\mathbf{t}^{\mathbf{d}} = \prod_{j=1}^{n}\left(1+\sum_{i=1}^{\ell} t_j x_{ij}\right), \tag{1.24}$$

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} h_{\mathbf{d}}(X)\,\mathbf{t}^{\mathbf{d}} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1-\sum_{i=1}^{\ell} t_j x_{ij}\right)}. \tag{1.25}$$

On utilisera au chapitre 4, la notation des sommes de puissances diagonalement symétriques à n colonnes, pour chaque vecteur $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell$ on écrit :

$$X_j^{\mathbf{d}} := x_{1j}^{d_1}\dots x_{\ell j}^{d_\ell},$$

$$p_{\mathbf{d}}(X) := \sum_{j=1}^{n} X_j^{\mathbf{d}} = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{d_1}\dots x_{\ell j}^{d_\ell}.$$

Les polynômes **somme de puissances diagonales** (pour $\ell = 2$ lignes et n colonnes) sont définies pour chaque couple d'entiers (h,k) comme suit :

$$p_{h,k}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{n} x_i^h y_j^k,$$

De même, pour 3 ensembles de n variables $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n)$ et $\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)$ on a pour chaque triple $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$ les **sommes de puissances diagonales trivariées** :

$$p_{a,b,c}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{n} x_j^a y_j^b z_j^c.$$

Les polynômes $e_1^{\mathbf{d}}(X)$

Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq \ell$ on pose $e_1(\mathbf{x}_i) := e_1(x_{i1}, \ldots, x_{in}) = x_{i1} + \cdots + x_{in}$. Soit $\mathbf{d} = (d_!, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ on définit le polynôme $r_{\mathbf{d}}(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ par la formule :

$$e_1^{\mathbf{d}}(X) := e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}. \tag{1.26}$$

Le résultat suivant n'est pas difficile à vérifier :

Lemme 1.5.1. Pour chaque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ le polynôme $e_1^{\mathbf{d}}(X)$ est homogène de multi-degré $\mathbf{d}$ et diagonalement symétrique pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$.

Les polynômes $e_i(Y)$

Pour tout sous-ensemble $Y \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ on définit le polynôme $e_k(Y) \in \mathcal{R}_n$ par la formule suivante :

$$e_k(Y) := \sum_{\{B \subseteq Y,\ |B| = k\}} \left(\prod_{b \in B} x_b \right),$$

En particulier, si $|Y| = k$ on a que $e_k(Y) = \prod_{a \in Y} x_a$. Pour k un entier positif, on a $e_k(\{1, 2, \ldots, n\}) = e_k(\mathbf{x})$ la fonction symétrique élémentaire à n variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Les polynômes $e_{\mathbf{d}}(Y)$

Pour chaque sous-ensemble Y de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on définit le polynôme $e_{\mathbf{d}}(Y) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ par la formule suivante :

$$e_{\mathbf{d}}(Y) := \sum_{\left\{B \subseteq Y \middle| \ |B| = |\mathbf{d}|\right\}} \ \sum_{\left\{f : B \to [\ell] \middle| \ |f^{-1}(i)| = d_i, \forall i \in [\ell]\right\}} \ \prod_{b \in B} x_{f(b), b}. \tag{1.27}$$

En particulier, si $Y = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, on utilise l'abus de notation

$$e_{\mathbf{d}}(\{1, 2, \ldots, n\}) = e_{\mathbf{d}}(X),$$

où X est la matrice de variables x_{ij} avec $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq j \leq n$.

1.6 Rappel sur les représentations irréductibles du groupe symétrique

Rappelons la notion générale de représentation d'un groupe G. Étant donné un groupe G, dont la loi de composition est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté 1_G et un ensemble Y, on peut définir une **action de** G **sur** Y par une application $G \times Y \longrightarrow Y$, $(g, x) \longmapsto g \cdot x$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, pour tout $g, h \in G$, $x \in Y$,

(ii) Soit 1_G l'élément identité de G, $1_G \cdot x = x$, pour tout $x \in Y$.

Pour tout ensemble Y, on note par S_Y le groupe des fonctions bijectives de Y vers Y, avec la composition de fonctions comme loi de composition interne. On dit autrement que, le groupe G agit sur l'ensemble Y s'il existe un homomorphisme de groupes $\varphi : G \longrightarrow S_Y$.

L'exemple suivant est utile pour expliquer la définition de l'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur les polynômes. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit (à gauche) sur les suites finies à n-coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ par :

$$\sigma \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) := \left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right).$$

L'action du groupe symétrique sur $\mathcal{R}_n$ est définie sur les monômes en utilisant l'action ci-haut, c'est-à-dire,

$$\sigma \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} := x_1{}^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_n{}^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

voir l'exemple 1.6.1.

Représentation de groupes

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le **groupe général linéaire** de degré n sur le corps $\mathbb{K}$ est noté par $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $n \times n$ **inversibles** par rapport au produit matriciel. Une **représentation matricielle** d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $X : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$. Chaque groupe G a une **représentation triviale** qui envoie tout élément g dans G vers la matrice (1). Par exemple, pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ on a une représentation de degré 1 qui est appelée **représenta-**

tion signe sign : $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{K}$ donné par la formule :

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{|\{(i,j):\ i<j,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}|}.$$

Une représentation matricielle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est donnée par $A(\sigma) = (a_{i,j})_{n\times n}$, où :

$$[A(\sigma)]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. On note par $GL(V)$ le groupe des **transformations linéaires inversibles** de V vers V, qui est appelé le groupe linéaire de V . Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ alors, $GL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $GL(V)$ comme groupes.

On dit qu'un espace vectoriel V est un **G-module** s'il existe un homomorphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Le couple (V,ρ) est aussi appelé une **représentation linéaire du groupe G.**

Exemple 1.6.1. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit (à gauche) sur l'espace vectoriel $\mathcal{R}_n$ des polynômes à n variables ; par **permutation des variables** :

$$(\sigma \cdot f)(x_1,\ldots,x_n) := f\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right).$$

Si $g \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on définit **l'action diagonale du groupe symétrique** $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, comme suit :

$$(\sigma \cdot g)(X) := g\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)},\ldots,X_{\sigma(n)}\right).$$

En particulier, on a **l'action du groupe** $GL_\ell(\mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{R}_\ell$ des polynômes à ℓ variables :

$$(g\cdot M)(x_1,\ldots,x_\ell) := g\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_{i1}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{\ell} m_{i\ell}x_i\right), \quad \forall M \in GL_\ell(\mathbb{K})$$

Exemple 1.6.2. On considère souvent **l'action du groupe** $GL_\ell(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ donnée par :

$$(f\cdot M)(X) := f\big(MX\big),\ \forall M \in GL_\ell(\mathbb{K}), \forall f \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}, \tag{1.28}$$

c'est-à-dire, on applique la transformation $x_{ij} \longmapsto \sum_{k=1}^{\ell} m_{ik} x_{kj}$.

Une construction des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

En suivant [3], on présente ici une construction explicite des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Soit D un diagramme **à n cases** (voir [3] p.10.). On rappelle qu'un tableau injectif $\tau : D \longrightarrow [n]$ est appelé un **tableau bijectif** (voir [3] p.98.). On considère l'action linéaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble de tous les tableaux bijectifs $\tau : D \longrightarrow [n]$ par la composition à gauche, c'est-à-dire, $(\sigma \cdot \tau)(i,j) = \sigma(\tau(i,j))$, pour tout $(i,j) \in D$. On écrit $i <_\tau j$ si i apparait dans la même ligne que j dans le diagramme D du tableau τ mais plus bas. Pour un partage μ de n on considère les polynômes suivants :

$$\Delta_\tau(\mathbf{x}) := \prod_{i <_\tau j} (x_i - x_j),$$

indexées par de tableaux bijectifs τ de forme μ. On a aussi que :

$$\sigma \cdot \Delta_\tau(\mathbf{x}) = \Delta_{\sigma \cdot \tau}(\mathbf{x}),$$

alors, on introduit le $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{S}^\lambda$ suivant :

$$\mathcal{S}^\lambda := \mathbb{K}\big[\Delta_\tau(\mathbf{x}) \mid \tau \text{ de forme } \lambda\big],$$

c'est-à-dire, $\mathcal{S}^\lambda$ c'est le $\mathfrak{S}_n$-module engendré par les polynômes $\Delta_\tau(\mathbf{x})$ où τ parcourt l'ensemble des tableaux bijectifs de forme λ.

Exemple 1.6.3. En suivant la définition, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(n)} &= \mathbb{C}, \\
\mathcal{S}^{(n-1,1)} &= \mathbb{C}\big[x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n\big], \\
\mathcal{S}^{(1^n)} &= \mathbb{C}\big[\sigma \cdot \Delta_n(\mathbf{x}) \ : \ \sigma \in \mathfrak{S}_n\big].
\end{aligned}$$

Propriétés des modules $\mathcal{S}^\lambda$

Soient λ et μ deux partages de n. Les $\mathfrak{S}_n$-modules $\mathcal{S}^\lambda$ ont les propriétés suivantes (voir [3] p.100 et p.101.) :

1. L'ensemble $\{\Delta_\tau(\mathbf{x}) \mid \tau \text{ tableau standard de forme } \lambda\}$ est une base de $\mathcal{S}^\lambda$.
2. Les $\mathfrak{S}_n$-modules $\mathcal{S}^\lambda$ sont tous irréductibles ;
3. $\mathcal{S}^\lambda$ est isomorphe à $\mathcal{S}^\mu$ si et seulement si $\lambda = \mu$;
4. $\{\mathcal{S}^\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ est un système complet de représentations irréductibles inéquivalentes du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Formule des équerres

Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ un partage de n, on utilise f^λ pour dénoter le **nombre de tableaux standard** de forme λ qui est donnée par la formule dite **des équerres** :

$$f^\lambda := n! \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j - i + j)}{\prod_i(\lambda_i - i + k)!}.$$

Soit λ un partage de n. Alors, $\dim\left(\mathcal{S}^\lambda\right) = f^\lambda$ (voir [26]).

1.7 Rappel sur les représentations polynomiales irréductibles de $GL(V)$

Une **représentation polynomiale** du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ est un homomorphisme de groupes $\rho : GL_\ell(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_N(\mathbb{K})$ tel que les entrées de la matrice $\rho(M)$ sont de polynômes dans les entrées de la matrice M. Aussi, comme la composition de polynômes est un polynôme (à une seule variable ou à plusieurs variables), alors il est clair que la composition de deux représentations polynomiales est une représentation polynomiale, c'est-à-dire, si $\varphi : GL(V) \longrightarrow GL(W)$ et $\psi : GL(W) \longrightarrow GL(Y)$ sont deux représentations polynomiales alors sa composition $\psi \circ \varphi : GL(V) \longrightarrow GL(Y)$ est une représentation polynomiale du groupe $GL(V)$.

Le lemme suivant nous servira pour décrire le lien entre la série de Hilbert d'un $GL_\ell(\mathbb{K})$-module gradué coïncide avec son caractère comme $GL_\ell(\mathbb{K})$-module.

Exemple 1.7.1. L'action linéaire (à droite) du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ donnée par $f(X) \longmapsto f(MX)$, pour toute matrice $M \in GL_\ell(\mathbb{K})$, est une représentation polynomiale du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$. En effet, soit ρ la représentation ρ : $GL_\ell(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathcal{R}_n^{(\ell)})$ associe à chaque matrice $M \in GL_\ell(\mathbb{C})$ la transformation linéaire $\rho(M) : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ définie par :

$$\rho(M)\big(f(X)\big) = f(MX).$$

Les monômes X^A forment une base de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Il suffit donc de considérer le monôme $X^A = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{a_{ij}}$. Ensuite, on calcule le polynôme suivant (voir [9] p.127.) :

$$\begin{aligned}(MX)^A &= \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\ell} m_{ik}x_{kj}\right)^{a_{ij}} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^\ell\,:\,|\mathbf{r}|=a_{ij}} \frac{a_{ij}!}{\mathbf{r}!} m_{i1}^{r_1}\cdots m_{i\ell}^{r_\ell} x_{1j}^{r_1}\cdots x_{\ell j}^{r_\ell}\right)\\ &= \sum_{\substack{F:[\ell]\times[n]\to\mathbb{N}^\ell\\ |F(s,t)|=a_{st}}}\left(\prod_{(i,j)\in[\ell]\times[n]} \frac{a_{ij}!\, m_{i,1}^{F_1(i,j)}\cdots m_{i,\ell}^{F_\ell(i,j)} x_{1j}^{F_1(i,j)}\cdots x_{\ell j}^{F_\ell(i,j)}}{F(i,j)!}\right).\end{aligned}$$

où $F(i,j) = (F_1(i,j),\ldots,F_\ell(i,j))$. Donc, on voit que les coefficients γ_B du polynôme

$$(MX)^A = \sum_{B\in\mathbb{N}^{\ell\times n}} \gamma_B X^B,$$

sont tous de polynômes dans les entrées m_{rs} de M. Donc, les entrées de la matrice associée à la transformation linéaire $\rho(M)$ sont des polynômes dans les entrées de M.

Description élémentaire des représentations irréductibles du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$

En général si $\mathcal{W}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module on considère le module $\mathcal{W}(V)$ suivant :

$$\mathcal{W}(V) := V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} \mathcal{W},$$

on peut bien considérer ce produit tensoriel sur l'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ car $\mathcal{W}$ et $V^{\otimes n}$ sont $\mathfrak{S}_n$-modules et donc $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-modules. Le module $\mathcal{W}(V)$ est une représentation du groupe général linéaire $GL(V)$ avec l'action à gauche sur le facteur $V^{\otimes n}$ du produit tensoriel $V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} W$. En particulier, si on prend $\mathcal{W} = \mathcal{S}^\lambda$ on obtient une représentation du groupe $GL(V)$ donné par l'isomorphisme de $GL(V)$-modules suivant :

$$\mathcal{S}^\lambda(V) := V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} \mathcal{S}^\lambda,$$

cette description est due à Schur et Weyl (voir [11]). On utilise la notation suivante pour le **module de Weyl** :

$$\mathbb{S}_\lambda(V) := V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} \mathcal{S}^\lambda.$$

Ces modules de Weyl sont tous des représentations polynomiales irréductibles du groupe $GL(V)$ (voir [24, 11]). Comme on trouve, par exemple dans [6], il existe une description en termes d'anneaux de polynômes des représentations $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{K}^\ell)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ un partage de n. Pour chaque tableau $\tau : D(\lambda) \longrightarrow [\ell]$ de forme λ on définit le polynôme $D_\tau(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ par la formule :

$$D_\tau(X) := \prod_{j=0}^{\lambda_1 - 1} \text{dét}\left(x_{\tau(i,j),k}\right).$$

où $0 \leq i \leq h_j - 1$, $0 \leq k \leq h_j$, et h_j est l'hauteur de la colonne j. En d'autres mots, pour chaque colonne du tableau τ on forme le déterminant suivant :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,s} \\ x_{i_2,1} & x_{i_2,2} & \cdots & x_{i_2,s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i_s,1} & x_{i_s,2} & \cdots & x_{i_s,s} \end{pmatrix}.$$

où $s = h_j$ et $i_k = \tau(k-1, j)$. On a donc, que le sous-espace $\mathcal{D}^\lambda$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ engendré par tous les polynômes $D_\tau(X)$, pour τ un tableau de forme λ, est isomorphe à $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{K}^\ell)$ en tant que $GL_\ell(\mathbb{K})$-module. L'ensemble des polynômes D_τ, pour τ un tableau semi-standard de forme λ est une base de $\mathcal{D}^\lambda$. Pour plus de détails, voir [6].

Les modules de Weyl ont les deux propriétés suivantes (voir [11, 24, 27]) :

1. Chaque $\mathbb{S}_\lambda(V)$ est une représentation polynomiale irréductible du groupe $GL(V)$.
2. Si λ et μ sont de partages de n dont le nombre de parts est au plus ℓ alors les représentations polynomiales irréductibles $\mathbb{S}_\lambda(V)$ et $\mathbb{S}_\mu(V)$ ne sont pas isomorphes.

En résumé, soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension ℓ, si λ est un partage de n en au plus ℓ parts, alors le module de Weyl $\mathbb{S}_\lambda(V)$ est une représentation polynomiale irréductible de $GL_\ell(\mathbb{C})$. Par ailleurs, toute représentation polynomiale irréductible de $GL_\ell(\mathbb{C})$ est isomorphe à un unique $\mathbb{S}_\lambda(V)$ (voir [11] p.232).

Caractères

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de vecteurs dans V. Supposons que $w \in V$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k, \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \text{ pour tout } i,$$

On utilisera la notation suivante :

$$w\Big|_{u_i} := \lambda_i.$$

c'est-à-dire, le symbole $w\Big|_{u_i}$ représente le coefficient λ_i du vecteur u_i lorsqu'on écrit w comme combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

On rappelle ici que si $T : V \longrightarrow V$ est un opérateur linéaire, c'est-à-dire, une transformation linéaire de V vers V alors, la trace de T est définie par la formule suivante :

$$\text{Trace}(T) := \sum_{v \in \mathcal{B}} T(v)\Big|_v .$$

Soit $\rho : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$ une représentation du groupe G. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{V}$. Alors on définit **le caractère $\chi_\mathcal{V}$ de ρ** par la fonction $\chi_\mathcal{V} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\chi_\mathcal{V}(g) := \text{Trace}\big(\rho(g)\big) = \sum_{v \in \mathcal{B}} \rho(g)(v)\Big|_v .$$

Pour plus de détails, sur les caractères des représentations voir [26, 24, 11].

Exemple 1.7.2. Soit G un groupe fini qui agit sur l'ensemble fini S. La valeur du caractère de la représentation par permutation $\mathbb{K}[S]$ de G, à l'élément $g \in G$, est le nombre de points fixes de l'action de g sur S, c'est-à-dire,

$$\chi_{\mathbb{K}[S]}(g) = \big|\{x \in S \,:\, g \cdot x = x\}\big|. \tag{1.29}$$

Pour plus de détails, voir [26] à la page 49.

Série de Hilbert comme $GL_\ell(\mathbb{K})$-caractère

Le lemme suivant nous permet de voir que la série de Hilbert d'un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ coïncide avec son caractère comme $GL_\ell(\mathbb{K})$-module (voir la proposition A2.3 et théorème A2.4, R. Stanley [28] à l'appendice 2 du chapitre 7, p.442). Voir aussi W. Fulton [10] pp.120 au chapitre 8.

Lemme 1.7.1. Soit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Le $GL_\ell(\mathbb{K})$-caractère gradué de $\mathcal{V}$ coïncide avec la série de Hilbert de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire :

$$\chi_{\mathcal{V}}(M) = \mathcal{V}(\mathbf{q}), \tag{1.30}$$

où $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$ sont les valeurs propres de la matrice M.

Démonstration. Comme $\mathcal{V}$ est un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, alors on a la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}}.$$

où $\mathcal{V}_{\mathbf{d}} := \mathcal{V} \cap \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$. Ceci implique qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ telle que :

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{B}_{\mathbf{d}}.$$

où est une base de la composante homogène $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$. Soit $\chi_{\mathcal{V}} : GL_\ell(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ le caractère de la représentation $\mathcal{V}$ alors pour toute matrice inversible M de format $\ell \times \ell$ on a :

$$\chi_{\mathcal{V}}(M) := \mathrm{Trace}(\rho(M)),$$

où $\rho : GL_\ell(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(\mathcal{V})$ est l'homomorphisme correspondant à $\mathcal{V}$ qui est définie par :

$$\rho(M)\big(f(X)\big) := f(MX), \quad \forall f \in \mathcal{V},\ \forall M \in GL_\ell(\mathbb{C}).$$

Cette dernière représentation de $GL_\ell(\mathbb{C})$ est polynomiale comme on a démontré à l'exemple 1.7.1. Les matrices diagonalisables sont denses dans $GL_\ell(\mathbb{K})$ (voir [2] aux pages 65 et 310). Alors, considérons d'abord une matrice diagonale Q de format $\ell \times \ell$ dont les éléments de la diagonale principale sont $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$, donc, pour tout polynôme homogène $f(X)$ de multi-degré $\mathbf{d}$ on a :

$$\rho(Q)\big(f(X)\big) := f(QX) = \mathbf{q}^{\mathbf{d}} f(X),$$

alors, tout polynôme homogène $f(X)$ de multi-degré $\mathbf{d}$ est un vecteur propre de la transformation linéaire $\rho(Q) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ associé à la valeur propre $\mathbf{q}^{\mathbf{d}}$. Alors, pour toute matrice diagonale Q on a :

$$\chi_{\mathcal{V}}(Q) := \mathrm{Trace}(\rho(Q)) = \sum_{g(X)\in\mathcal{B}} g(QX)\Big|_{g(X)} = \sum_{g(X)\in\mathcal{B}} \mathbf{q}^{\deg\left(g(X)\right)} = \mathcal{V}(\mathbf{q}),$$

car $\mathcal{B}$ est une base homogène de $\mathcal{V}$ alors pour tout polynôme $g(X) \in \mathcal{B}$ est homogène, c'est-à-dire, $g(QX) = \mathbf{q}^{\deg\left(g(X)\right)} g(X)$. On a donc, $\chi_{\mathcal{V}}(Q) = \mathcal{V}(\mathbf{q})$. Maintenant, soit M une matrice inversible. Il est bien connu qu'il existe une suite de matrices inversibles et diagonalisables A_n telles que $M = \lim_{n\to\infty} A_n$ (voir [2]). La représentation polynomiale $\rho : GL_\ell(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{V}$ est continue, car toutes les entrées de $\rho(M)$ sont des polynômes dans les entrées de M. Par certains résultats classiques discutés en [2], on sait que la trace est continue et donc, le caractère est continu aussi. Chaque matrice A_n est diagonalisable et donc pour chaque $n \geq 1$ il existe une suite de matrices diagonales D_n telle que $A_n = P_n^{-1} D_n P_n$. On peut définir D_n comme la matrice carrée d'ordre ℓ dont les éléments de la diagonale principale sont les suites $q_1(n), q_2(n), \ldots, q_\ell(n)$. Posons $\mathbf{q}(n) = \big(q_1(n), q_2(n), \ldots, q_\ell(n)\big)$, où $q_1(n), q_2(n), \ldots, q_\ell(n)$ sont les valeurs propres de A_n. Alors :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{V}}(M) &= \chi_{\mathcal{V}}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathcal{V}}(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}(\mathbf{q}(n)) \\
&= \mathcal{V}\left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n)\right) = \mathcal{V}(\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

On sait que, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}(n) = \mathbf{q}$, car la suite de matrices A_n est construite de sorte que si $q_1, q_2 \ldots, q_\ell$ sont les valeurs propres de M et si $q_1(n), q_2(n), \ldots, q_\ell(n)$ sont les valeurs propres de la matrice A_n alors $\lim_{n\to\infty} q_i(n) = q_i$ (voir [2]). $\square$

On a donc, que les caractères irréductibles de la représentation polynômiale de $GL_\ell(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\rho(M)\big(f(X)\big) := f(MX),$$

sont les fonctions de Schur $s_\lambda(\mathbf{q})$ indexées par des partages λ dont le nombre de parts, est au plus ℓ. Soit $\mathcal{V}$ une représentation du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ gradué dans $\mathbb{N}^\ell$. La série de Hilbert de $\mathcal{V}$ est une fonction symétrique des variables $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$. Soit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Alors la série de Hilbert de $\mathcal{V}$ est Schur-positive :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_\mu a_\mu\, s_\mu(\mathbf{q}), \quad a_\mu \in \mathbb{N},$$

Caractéristique de Frobenius

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{S}_n$-module. La caractéristique de Frobenius de $\mathcal{V}$ est définie comme suit :

$$\mathcal{V}(\mathbf{w}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{V}}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}), \tag{1.31}$$

ou $\lambda(\sigma)$ est le type cyclique de σ. Soit $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{S}_n$-module. Aussi, on peut écrire sa caractéristique de Frobenius $\mathcal{V}(\mathbf{w})$ sous la forme suivante (voir [26] p.167.) :

$$\mathcal{V}(\mathbf{w}) := \sum_{\mu\vdash n} \chi_{\mathcal{V}}(\mu)\, \frac{p_\mu(\mathbf{w})}{z_\mu},$$

où $\chi_{\mathcal{V}}(\mu) := \chi_{\mathcal{V}}(\sigma)$ si $\lambda(\sigma) = \mu$.

Remarque 1.7.1. Soit λ un partage de n, on utilise la même notation qu'on trouve dans [26], on dénote par $\chi^\lambda := \chi_{\mathcal{S}^\lambda}$ le caractère du $\mathfrak{S}_n$-module irréductible $\mathcal{S}^\lambda$.

Exemple 1.7.3 (voir [26] p.167). La caractéristique de Frobenius du $\mathfrak{S}_n$-module irréductible $\mathcal{S}^\lambda$ est la fonction de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$, c'est-à-dire, $\mathcal{S}^\lambda(\mathbf{w}) = s_\lambda(\mathbf{w})$. Autrement dit, pour tout partage λ de n on a :

$$\mathcal{S}^\lambda(\mathbf{w}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) = \sum_{\mu\vdash n} \chi^\lambda(\mu) \frac{p_\mu(\mathbf{w})}{z_\mu} = s_\lambda(\mathbf{w}). \tag{1.32}$$

On écrit $\chi^\lambda(\mu) = \chi^\lambda(\sigma)$ si $\lambda(\sigma) = \mu$.

Rappelons certaines formules classiques qui seront utiles dans notre chapitre 2. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a (voir [26] p.87.) :

$$\chi^{(n)}(\sigma) = 1, \tag{1.33}$$

$$\chi^{(n-1,1)}(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)| - 1, \tag{1.34}$$

Donc, on peut écrire

$$\chi^{(n)}(\sigma) + \chi^{(n-1,1)}(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)|. \tag{1.35}$$

Plus généralement, comme corollaire de la règle de Pieri (voir formule 1.20) on a que la valeur du caractère (nombre de points fixes) correspondant à l'action par permutations de $\mathfrak{S}_n$ sur **les sous-ensembles à s éléments d'un ensemble à n éléments**, c'est-à-dire, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $s \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq s \leq \frac{n}{2}$. On a l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^{s} \chi^{(n-j,j)}(\sigma) = \big|\{A \subseteq [n] \,:\, \sigma(A) = A,\ |A| = s\}\big|. \tag{1.36}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on a les identités (voir [26]) :

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) = s_n(\mathbf{w}), \tag{1.37}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \big|\mathrm{Fix}(\sigma)\big|\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) = h_{n-1,1}(\mathbf{w}) = s_{n-1,1}(\mathbf{w}) + s_n(\mathbf{w}). \tag{1.38}$$

$$\tag{1.39}$$

Multiplicités des irréductibles et caractéristique de Frobenius

La caractéristique de Frobenius d'un $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{V}$ est Schur-positive, c'est-à-dire, elle s'écrit comme une somme à coefficients dans $\mathbb{N}$ de fonctions de Schur :

$$\mathcal{V}(\mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} n_\lambda\, s_\lambda(\mathbf{w}), \tag{1.40}$$

où $n_\lambda \in \mathbb{N}$ pour tout partage λ de n. Par le théorème de Maschke (voir [26]) le $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{V}$ se décompose en somme directe de $\mathfrak{S}_n$-sous-modules irréductibles :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} n_\lambda \, \mathcal{S}^\lambda, \text{ avec } n_\lambda \in \mathbb{N}, \tag{1.41}$$

et donc, en prenant la caractéristique de Frobenius des deux côtés de 1.41 on obtient la formule 1.40. Donc, pour chaque partage λ de n les coefficients n_λ donnent la multiplicité de la représentation irréductible $\mathcal{S}^\lambda$ dans la décomposition comme somme directe de $\mathcal{V}$, en d'autres mots, si $\{\mathcal{S}^\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ un système complet de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ alors, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} n_\lambda \, \mathcal{S}^\lambda \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mathcal{V}(\mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} n_\lambda \, s_\lambda(\mathbf{w}),$$

où $n_\lambda \, \mathcal{S}^\lambda := \mathcal{S}^\lambda \oplus \mathcal{S}^\lambda \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}^\lambda$, ($n_\lambda$-fois).

1.8 Caractéristique de Frobenius multi-gradué

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{S}_n$-module multi-gradué dans $\mathbb{N}^\ell$. Supposons que :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}},$$

comme avant on définit **la caractéristique de Frobenius de** $\mathcal{V}$ par les formules suivantes :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) \, \mathbf{q}^{\mathbf{d}},$$

où

$$\mathcal{V}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma) \, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}),$$

En résumé, on peut écrire comme une seule formule :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma) \, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}}.$$

La structure de $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-module

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Sur $\mathcal{V}$ on a deux actions de groupe :

1. L'action diagonale (à gauche) de $\mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \cdot X^A := x_{1\sigma(1)}^{a_{11}} \cdots x_{i\sigma(j)}^{a_{ij}} \cdots x_{\ell\sigma(n)}^{a_{\ell n}}, \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

2. L'action (à droite) de $GL_\ell(\mathbb{C})$, $\quad X^A \cdot M := (MX)^A$, $\forall M \in GL_\ell(\mathbb{C})$, c'est-à-dire, $x_{ij} \longmapsto \sum_{k=1}^{\ell} m_{ik}x_{kj}$, pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in GL_\ell(\mathbb{C})$.

Ces deux actions sur $\mathcal{V}$ commutent, et on peut donc affirmer que le sous-espace homogène $\mathcal{V}$ est une représentation du produit direct $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$ avec l'action linéaire (à gauche) suivante :

$$(\sigma, M) \cdot X^A := \sigma \cdot (M^{-1}X)^A.$$

Forme de la caractéristique de Frobenius graduée

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-module. Il est bien connu qu'on peut écrire sa décomposition en somme directe de $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules irréductibles comme suit (voir [24] p.159, [26] p.43-44,[27]) :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigoplus_{\mu} c_{\lambda,\mu}\, \mathbb{S}_\mu(\mathbb{K}^\ell) \otimes \mathcal{S}^\lambda, \quad \text{avec } c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}, \tag{1.42}$$

on peut écrire donc,

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} c_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}). \tag{1.43}$$

où les fonctions de Schur $S_\lambda(\mathbf{w})$ correspondent à des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et les fonctions de Schur $s_\mu(\mathbf{q})$ correspondent aux caractères de représentations polynomiales irréductibles du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$.

Multiplicités des $\mathfrak{S}_n$-modules irréductibles dans les composantes homogènes

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ alors, on a la décomposition en somme directe de $\mathfrak{S}_n$-composantes isotypiques :

$$\mathcal{V} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda,$$

Chaque composante homogène $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ de $\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module et on peut la décomposer comme une somme directe de représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n$ comme suit :

$$\mathcal{V}_{\mathbf{d}} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d})\, \mathcal{S}^\lambda$$

on peut écrire sa caractéristique de Frobenius comme suit :

$$\mathcal{V}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d})\, s_\lambda(\mathbf{w}),$$

alors,

$$\dim(\mathcal{V}_{\mathbf{d}}) = \sum_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d}) f^\lambda,$$

comme $\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ on a donc,

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \left(\sum_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d})\, f^\lambda \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}}$$

et la caractéristique de Frobenius est comme suit :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \left(\sum_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d})\, s_\lambda(\mathbf{w}) \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} b_\lambda(\mathbf{d})\, \mathbf{q}^{\mathbf{d}} \right) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

Plus généralement, pour n'importe quel sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, on a la décomposition en somme directe de composantes isotypiques comme $\mathfrak{S}_n$-module :

$$\mathcal{V} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda$$

Dans ce cas, la caractéristique de Frobenius prend la forme suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} F_\lambda(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

où $F_\lambda(\mathbf{q})$ est une série à coefficients $b_\lambda(\mathbf{d})$ dans $\mathbb{N}$.

Chaque coefficient $b_\lambda(\mathbf{d})$ nous donne la multiplicité de la représentation irréductible $\mathcal{S}_\lambda$ du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans la composante homogène $\mathcal{V}_\mathbf{d}$ multi-degré $\mathbf{d}$. Plus précisément, la série $F_\lambda(\mathbf{q})$ est

$$F_\lambda(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} b_\lambda(\mathbf{d})\, \mathbf{q}^\mathbf{d},$$

En plus, si on considère la série suivante :

$$f^\lambda \cdot F_\lambda(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} f^\lambda b_\lambda(\mathbf{d})\, \mathbf{q}^\mathbf{d}$$

on obtient que la série de Hilbert de la composante isotypique $\mathcal{V}_\lambda$ est

$$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{q}) = f^\lambda \cdot F_\lambda(\mathbf{q}),$$

et on peut donc affirmer que, si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ un sous-espace homogène, dont la décomposition isotypique, comme $\mathfrak{S}_n$-module est

$$\mathcal{V} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda$$

alors, la caractéristique de Frobenius de $\mathcal{V}$ s'exprime comme suit :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{f^\lambda} \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{q})\, s_\lambda(\mathbf{w}).$$

où $\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{q})$ est la série de Hilbert de $\mathcal{V}_\lambda$. En plus, la caractéristique de Frobenius du $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{V}_\lambda$ est :

$$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{q},\mathbf{w}) = F_\lambda(\mathbf{q})\, s_\lambda(\mathbf{w}).$$

Décomposition en $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-modules irréductibles pour $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$

Soit $\mathcal{V}$ est un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, c'est-à-dire, on a la décomposition en somme directe de $\mathfrak{S}_n$-modules suivante :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}}$$

où $\mathcal{V}_{\mathbf{d}} := \mathcal{V} \cap \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$, pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, soit $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ une base de la composante homogène $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ de multi-degré $\mathbf{d}$. Le caractère multi-gradué de la représentation $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ évaluée à une permutation σ est donnée par :

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma) := \sum_{p(X)\in\mathcal{B}_{\mathbf{d}}} (\sigma\cdot p)(X)\Big|_{p(X)}$$

où $(\sigma\cdot p)(X)\Big|_{p(X)}$ c'est le coefficient du polynôme $p(X)$ dans la combinaison linéaire du polynôme $(\sigma\cdot p)(X)$ par rapport à la base homogène $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$. Rappelez que la caractéristique de Frobenius du module $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ est :

$$\mathcal{V}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}).$$

Par définition on a :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w})\, \mathbf{q}^{\mathbf{d}}.$$

En résumé, la caractéristique de Frobenius est :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}}.$$

En particulier, on veut calculer :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) &= \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\, \mathbf{q}^{\mathbf{d}}\right) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

alors, dans la discussion suivante on va en déduire le caractère multi-gradué :

$$\chi_{\mathcal{R}_n^{(\ell)}}(\sigma) := \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\,\mathbf{q}^{\mathbf{d}}$$

Chaque composante homogène $\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$ de l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est un $\mathfrak{S}_n$ sous-module de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, c'est-à-dire :

$$f(X) \in \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)} \text{ implique que } (\sigma \cdot f)(X) \in \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}, \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

en d'autres mots, l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne change pas le multi-degré. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ la caractéristique de Frobenius de la composante homogène $\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}$ (de multi-degré $\mathbf{d}$) est donnée par :

$$\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}(\mathbf{w}) := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}}(\sigma)\,p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}),$$

En suivant [5], on peut montrer que le caractère multi-gradué du $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ a la série génératrice suivante :

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\ \mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{k=1}^{\ell(\mu)} \frac{1}{1-q_i^{\mu_k}}, \tag{1.44}$$

pour toute permutation σ de type μ.

En effet, pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$, une base de la composante homogène $\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$ est donnée par l'ensemble de tous les monômes de multi-degré $\mathbf{d}$ et donc :

$$\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma) := \sum_{\deg\left(X^A\right)=\mathbf{d}} \sigma \cdot X^A\Big|_{X^A}$$

Pour chaque monôme on a :

$$\sigma \cdot X^A\Big|_{X^A} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma\cdot X^A = X^A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Disons que $X^A = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{a_{ij}}$ alors (comme σ est bijective et les variables x_{ij} sont commutatives) on a :

$$\sigma \cdot X^A := \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n} x_{i\sigma(j)}^{a_{ij}} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n} x_{ir}^{a_{i\sigma^{-1}(r)}} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{a_{i\sigma(j)}}$$

on trouve que $\sigma \cdot X^A = X^A$ si et seulement si $a_{i,j} = a_{i,\sigma(j)}$ pour tous les couples (i,j), c'est-à-dire, pour chaque i tel que $1 \le i \le \ell$ on a que :

$$a_{i,j} = a_{i,\sigma(j)} = a_{i,\sigma^2(j)} = a_{i,\sigma^3(j)} = \cdots,$$

alors les colonnes de la matrice A sont constantes dans les cycles de la permutation σ, supposons que σ est de type cyclique $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_k$ alors pour toute permutation σ_μ de type μ on a que $\sigma_\mu \cdot X^A = X^A$ si et seulement si pour tout i tel que $1 \le i \le \ell$ on a :

$$\begin{aligned}
&a_{i,1} = \cdots = a_{i,\mu_1} \ (= b_{i,1}),\\
&a_{i,\mu_1+1} = \cdots = a_{i,\mu_1+\mu_2} \ (= b_{i,2}),\\
&a_{i,\mu_1+\mu_2+1} = \cdots = a_{i,\mu_1+\mu_2+\mu_3} \ (= b_{i,3}),\\
&\qquad\vdots\\
&a_{i,\mu_1+\cdots+\mu_{k-1}+1} = \cdots = a_{i,\mu_1+\cdots+\mu_k} \ (= b_{i,k}).
\end{aligned}$$

ensuite, par les résultats discutés au chapitre 1 l'identité :

$$\sum_{B\in\mathbb{N}^{\ell\times k}} \prod_{i=1}^{\ell} q_i^{b_{i1}\mu_1+\cdots+b_{ik}\mu_k} = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-q_i^{\mu_j}}.$$

et finalement pour σ telle que $\lambda(\sigma) = \mu$ on a :

$$\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma) = \left|\{A \in \mathbb{N}^{\ell\times n} :\ \deg(X^A) = \mathbf{d},\ \sigma\cdot X^A = X^A\}\right| = \left|\{B \in \mathbb{N}^{\ell\times n} :\ B\mu^t = \mathbf{d}\}\right|,$$

il s'ensuit que :

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\,\mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} \left|\{B \in \mathbb{N}^{\ell\times n} :\ B\mu^t = \mathbf{d}\}\right| = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-q_i^{\mu_j}}.$$

Soit $\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\mu)$ la valeur du caractère du $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$ dans une permutation de type

μ. Calculons la caractéristique de Frobenius multigraduée de l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\,p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right)\mathbf{q}^{\mathbf{d}}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\sigma)\,\mathbf{q}^{\mathbf{d}}\right)\\
&= \sum_{\mu\vdash n}\frac{1}{z_\mu}p_\mu(\mathbf{w})\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\chi_{\mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}}(\mu)\,\mathbf{q}^{\mathbf{d}}\right)\\
&= \sum_{\mu\vdash n}\frac{1}{z_\mu}p_\mu(\mathbf{w})\left(\prod_{k=1}^{\ell(\mu)}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i^{\mu_k}}\right)\\
&= \sum_{\mu\vdash n}\frac{1}{z_\mu}p_\mu(\mathbf{w})\,p_\mu\left[\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i}\right],
\end{aligned}$$

Alors, on peut affirmer que la caractéristique de Frobenius multi-graduée de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= \sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{z_\lambda}p_\lambda\left[\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i}\right]p_\lambda(\mathbf{w}) = h_n\left[\mathbf{w}\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_k}\right]\\
&= \sum_{\lambda\vdash n}s_\lambda\left[\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_k}\right]s_\lambda(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

En d'autres mots,

$$\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{\lambda\vdash n}s_\lambda\Big[\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q})\Big]\,s_\lambda(\mathbf{w}). \tag{1.45}$$

où $\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{1-q_i}$.

Série de Hilbert

Il est bien connu que la caractéristique de Frobenius détermine la série de Hilbert. Pour décrire comme on obtient la série de Hilbert à partir de la série de Frobenius on a besoin de rappeler la définition de produit scalaire de fonctions symétriques, à savoir :

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle := \begin{cases} z_\lambda & \text{si } \lambda=\mu,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Alors, la série de Hilbert de $\mathcal{V}$ satisfait l'identité suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \langle \mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}), p_1^n \rangle.$$

De façon équivalente, si on écrit la série de Frobenius de $\mathcal{V}$ sous la forme :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} c_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

on obtient la série de Hilbert en appliquant la transformation : $s_\lambda(\mathbf{w}) \longmapsto f^\lambda$, c'est-à-dire, pour chaque partage $\lambda \vdash n$ on remplace la fonction de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$ (dont les coefficients compte la multiplicité de la représentation irréductible $\mathcal{S}^\lambda$ dans $\mathcal{V}$) par la longueur d'équerre f^λ. Alors, on obtient :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\mu:\ \ell(\mu) \leq \ell} \left(\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda c_{\lambda,\mu} \right) s_\mu(\mathbf{q}).$$

Exemple 1.8.1. Avec la méthode ci-haut, on peut vérifier les spécialisations suivantes (voir [14]). La formule 1.45 nous donne

$$\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q}) = \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda\Big[\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q})\Big] f^\lambda = h_1^n\Big[\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q})\Big] = \big(\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q})\big)^n = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{(1-q_i)^n}.$$

En résumé, si on écrit $\mathcal{R}_n^{(\ell)} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}$ où $\mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}$ est la **composante isotypique** de type λ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ **comme $\mathfrak{S}_n$-module** on trouve que :

$$\mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = s_\lambda\left[\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i}\right] s_\lambda(\mathbf{w}).$$

en particulier, ceci implique que la série de Hilbert est

$$\mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}(\mathbf{q}) = f^\lambda \cdot s_\lambda\left[\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i}\right].$$

Le $GL_\ell(\mathbb{K})$-caractère de la composition de deux représentations polynomiales

Le caractère de la composition de deux représentations polynomiales est donné par le pléthysme de ses caractères (voir [28], p.448), c'est-à-dire, étant données deux représentations polynomiales $\varphi : GL(V) \longrightarrow GL(W)$ et $\psi : GL(W) \longrightarrow GL(Y)$ alors, sa composition $\psi \circ \varphi : GL(V) \longrightarrow GL(Y)$ est une représentation polynomiale du groupe $GL(V)$ dont le caractère est le pléthysme suivant :

$$\mathcal{X}_{\psi\varphi} = \mathcal{X}_{\psi}\left[\mathcal{X}_{\varphi}\right].$$

ou d'une façon équivalente, la série de Hilbert de la représentation Y de $GL(V)$ est donnée par le pléthysme :

$$Y(\mathbf{q}) = Y\left[W(\mathbf{q})\right].$$

Rappelons que l'espace $\mathcal{R}_\ell$ de polynômes à ℓ variables est un $GL_\ell(\mathbb{K})$-module à droite avec l'action linéaire :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \longmapsto f\left(\sum_{k=1}^{\ell} m_{1,k}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{\ell} m_{1,k}x_k\right),\ \forall M \in GL_\ell(\mathbb{K}),$$

on note cette représentation polynomiale de $GL_\ell(\mathbb{K})$ par φ. On veut montrer ici que $\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell)$ est un $GL_\ell(\mathbb{K})$-module. En effet, on construit l'homomorphisme $\psi\varphi$ qui donne l'action de $GL_\ell(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell)$, dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} GL_\ell(\mathbb{K}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\varphi"'] & GL(\mathcal{R}_\ell) \arrow[d, "\psi"] \\ & GL\left(\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell)\right) \end{tikzcd}$$

Soit M une matrice carrée d'ordre ℓ avec valeurs propres $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$. On sait que le caractère de la représentation φ est :

$$\mathcal{X}_\varphi(M) = \mathcal{R}_\ell(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1 - q_i},$$

aussi, si $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sont les valeurs propres de $T \in GL(V)$, alors le caractère du

$GL(V)$-module $\mathbb{S}(V)$ est la fonction de Schur (voir [24] p.269., [11])

$$\chi_{\mathbb{S}(V)}(T) = s_\lambda(r_1, r_2, \dots, r_k),$$

alors on a que le caractère du $GL_\ell(\mathbb{K})$-module

$$\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell) = (\mathcal{R}_\ell)^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^\lambda$$

est le pléthysme suivant

$$\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell)(\mathbf{q}) = s_\lambda[\mathcal{R}_\ell(\mathbf{q})] = s_\lambda\left[\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i}\right].$$

Tout sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est un $GL_\ell(\mathbb{K})$-module et on a la décomposition en somme directe de $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules irréductibles suivants :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigoplus_{\ell(\mu) \leq \ell} c_{\lambda,\mu}\, \mathbb{S}_\mu(\mathbb{K}^\ell) \otimes \mathcal{S}^\lambda, \text{ où } c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N},$$

alors, on peut affirmer que :

Pour n'importe quel sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ la caractéristique de Frobenius s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} F_\lambda(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

où pour chaque partage λ de n on a que la fonction symétrique $F_\lambda(\mathbf{q}) = \sum_{\ell(\mu)\leq \ell} c_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q})$ est la série de Hilbert du $GL_\ell(\mathbb{K})$-module $\bigoplus_{\ell(\mu)\leq\ell} c_{\lambda,\mu}\, \mathbb{S}_\mu(\mathbb{K}^\ell)$. Pour plus de détails voir aussi [17] à la page 387 aux formules (63) et (64).

Observons que en particulier on a :

$$\mathcal{R}_n^{(\ell)}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

où $\mathcal{V}_\lambda^{(\ell)}(\mathbf{q}) = s_\lambda\left[\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-q_i}\right] \cdot f^\lambda = \sum_\mu d_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q})$, est la série de Hilbert de la représentation irréductible $\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{R}_\ell)$ du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ alors,

$$0 \le c_{\lambda,\mu} \le d_{\lambda,\mu}.$$

Plus généralement, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des sous-modules de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ (en tant que $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-modules) tels que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, $\mathcal{V} = \sum_{\lambda\vdash n}\sum_\mu b_{\lambda,\mu}s_\mu(\mathbf{q})s_\lambda(\mathbf{w})$, et $\mathcal{W} = \sum_{\lambda\vdash n}\sum_\mu c_{\lambda,\mu}s_\mu(\mathbf{q})s_\lambda(\mathbf{w})$ alors

$$0 \le b_{\lambda,\mu} \le c_{\lambda,\mu}.$$

1.9 L'essentiel : synthèse du chapitre

En conclusion, les points saillants de ce chapitre sont les suivants :

1. Notre contexte, l'espace $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ qui est gradué par le multi-degré sur $\mathbb{N}^\ell$.
2. Les polynômes diagonalement symétriques $e_1^{\mathbf{d}}$, $p_{\mathbf{d}}$, et $e_{\mathbf{d}}$ qui serviront pour construire des bases homogènes des modules de polarisation engendrés par un polynôme symétrique homogène au chapitre 2.
3. Les représentations irréductibles $\mathcal{S}^\lambda$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui sont naturellement indexés par des partages λ de n, dont la caractéristique de Frobenius est la fonction de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$.
4. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension ℓ. Les représentations polynomiales irréductibles de $GL_\ell(\mathbb{C})$ sont les modules de Weyl $\mathbb{S}_\mu(V)$ dont le caractère est le polynôme de Schur $s_\mu(\mathbf{q})$.
5. La série de Hilbert $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ d'un sous-espace homogène $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est le $GL_\ell(\mathbb{C})$-caractère, c'est-à-dire, $\mathcal{V}(\mathbf{q}) := \chi_{\mathcal{V}}(M)$, où $M \in GL_\ell(\mathbb{C})$ est une matrice dont les valeurs propres sont $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$.
6. La caractéristique de Frobenius graduée de $\mathcal{V}$ s'écrit comme une somme des produits de fonctions de Schur :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \sum_{\lambda\vdash n}\sum_{\mu} b_{\lambda,\mu}s_\mu(\mathbf{q})s_\lambda(\mathbf{w}).$$

dont les coefficients naturels $b_{\lambda,\mu}$ donnent les multiplicités des sous-modules irréductibles comme représentation du produit direct $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$.

7. La série de Hilbert s'obtient à partir de la caractéristique de Frobenius en remplaçant chaque fonction de Schur $s_\lambda(\mathbf{w})$ par la longueur d'équerre f^λ, et on obtient

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\mu} \left(\sum_{\lambda \vdash n} b_{\lambda,\mu} f^\lambda \right) s_\mu(\mathbf{q}).$$

8. Chaque composante homogène de $\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module et donc on a une décomposition $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda S^\lambda$. La caractéristique de Frobenius graduée nous donne les multiplicités des modules irréductibles dans chaque composante homogène $\mathcal{V}_\mathbf{d}$ de $\mathcal{V}$. Plus précisément, si on a la décomposition

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathcal{V}_\mathbf{d}$$

et chaque composante homogène $\mathcal{V}_\mathbf{d}$ on décompose comme une somme directe de $\mathfrak{S}_n$-modules

$$\mathcal{V}_\mathbf{d} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} b_\lambda(\mathbf{d}) \mathcal{S}^\lambda,$$

et la caractéristique de Frobenius est exprimée sous la forme

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} F_\lambda(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}),$$

alors,

$$F_\lambda(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} b_\lambda(\mathbf{d}) \mathbf{q}^\mathbf{d} = \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q}).$$

De plus, si on considère la décomposition isotypique

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathcal{V}_\lambda$$

où $\mathcal{V}_\lambda := a_\lambda \mathcal{S}^\lambda$ alors, on a que

$$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{q}) = f^\lambda F^\lambda(\mathbf{q}).$$

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE II

LES MODULES DE POLARISATION GÉNÉRALISÉS

Dans ce chapitre, on étudie certains $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules $\mathcal{M}_F$ engendrés par une famille $\mathfrak{S}_n$-stable F de polynômes homogènes. Le module $\mathcal{M}_F$ est appelé le module de polarisation engendré par F. Par construction, ces modules de polarisation $\mathcal{M}_F$ sont fermés par dérivation et polarisation (voir 3 pour la définition précise). Pour ce faire, on commence par décrire la propriété de fermeture par dérivation, puis celles du processus de polarisation utilisé par H. Weyl (voir [29, 14, 19, 24, 20]). Notre objectif est de calculer la caractéristique graduée de Frobenius de ces représentations, en décrivant une base homogène de celles-ci (voir la section 2.2). Rappelons que, dans ce travail, tous les sous-espaces $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ sont supposés $\mathfrak{S}_n$-stables (fermé par l'action de $\mathfrak{S}_n$).

On réussit à calculer pour n'importe quel degré $d \geq 1$ une base homogène générale des modules de polarisation engendrés par les polynômes p_1^d, p_d et e_d. Ceci nous donne la caractéristique graduée de ces modules et puis la série de Hilbert de façon indépendante de ℓ. Pour le polynôme symétrique monomial $m_{(2,1^{d-2})}$ on propose un problème ouvert sur la forme générale de sa caractéristique graduée pour n'importe quel degré d. On commence une classification complète des modules de polarisation engendrés par n'importe quel polynôme symétrique homogène donnée. Ce problème est résolu complètement pour polynômes de degré 2 et 3. Pour ce faire, on démontre une règle générale pour construire une base homogène de ces modules. Dans le cas de degré 3 la notion de n-exception est introduite pour déterminer la classification. Cette notion apparaît aussi en degré supérieur. Pour degré 4 et 5, des tables nous donnent la classification qu'on conjecture complète.

2.1 Les modules de polarisation

Soit $F \subseteq \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ un ensemble des polynômes homogènes. Le module de polarisation engendré par F est le plus petit $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_F$ tel que :

1. $\sigma \cdot g \in \mathcal{M}_F$, pour tout $g \in F$, et pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
2. $\mathcal{M}_F$ contient l'ensemble F,
3. $\mathcal{M}_F$ est clos par dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$,
4. $\mathcal{M}_F$ est clos par l'action des opérateurs de polarisation $E_{i,k}^{(p)} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial^p}{\partial x_{kj}^p}$.

Dans le but d'expliquer la construction des modules de polarisation généralisés, on commence par décrire les espaces fermés par dérivation, en considérant, les exemples classiques de polynômes harmoniques du groupe symétrique et les modules de Garsia-Haiman (voir [12]). Ensuite on décrit les espaces fermés par polarisation. On rappelle des exemples bien connus des espaces fermés par dérivation et polarisation, comme les polynômes harmoniques diagonaux, harmoniques trivariés et harmoniques multivariés. En calculant de bases homogènes, on étudie la structure des espaces fermés par dérivation et polarisation, engendrés par des polynômes diagonalement symétriques homogènes. On considère aussi certains modules fermés par dérivation et polarisation engendres par des familles $\mathfrak{S}_n$-stables de polynômes homogènes.

L'objectif principal de ce travail

Le but principal de cette thèse est d'étudier la décomposition en $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules irréductibles des modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ lorsque f est un **polynôme symétrique homogène**. Pour ce faire, on calcule la caractéristique graduée de Frobenius des modules $\mathcal{M}_f$ sous la forme d'une somme de deux types de fonctions de Schur $s_\mu(\mathbf{q})$ et $s_\lambda(\mathbf{w})$, plus précisément :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}), \quad \text{avec } b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}$$

où la somme porte sur les partages μ tels que $|\mu| \leq d$ et dont la longueur satisfait $\ell(\mu) \leq n$. Ceci est un théorème de F. Bergeron voir [4]. Les fonctions de Schur $s_\mu(\mathbf{q})$ dans l'alphabet $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_\ell)$ codent les $GL_\ell(\mathbb{K})$-modules irréductibles (comptent les multiplicités graduées) et les fonctions de Schur (dénote par $s_\lambda(\mathbf{w})$) dans l'alphabet $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots)$ codent les $\mathfrak{S}_n$-modules irréductibles. Un objectif secondaire de ce travail est de trouver des contraintes pour les coefficients de la caractéristique de Frobenius graduée des modules de polarisation engendrés par une famille F de polynômes homogènes.

Fermeture par dérivation et polarisation

On dit que le sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est **fermé par dérivation** si pour tout $g \in \mathcal{V}$, on a que $\frac{\partial g}{\partial x_{ij}} \in \mathcal{V}$, pour tout couple (i,j). Comme l'intersection d'espaces fermés par dérivation est fermée par dérivation, on peut considérer **la fermeture par dérivations $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$,** comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ contenant $\mathcal{V}$, qui est fermé par dérivation. L'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_i est ici dénoté par $\partial_i = \partial_{x_i}$. Pour un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, on écrit

$$\partial\mathbf{x}^{\mathbf{a}} := \partial_{x_1}^{a_1} \cdots \partial_{x_n}^{a_n}.$$

Si $p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} p_{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}_n$, on écrit $p(\partial\mathbf{x})$ pour l'opérateur obtenu comme suit :

$$p(\partial\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} p_{\mathbf{a}} \cdot \partial\mathbf{x}^{\mathbf{a}}.$$

Les exemples suivants permettent de clarifier cette notion.

Polynômes harmoniques du groupe symétrique : $\mathcal{H}_n$

Un polynôme $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_n$ est dit **harmonique** si et seulement si

$$g(\partial\mathbf{x})\big(f(\mathbf{x})\big) = 0,$$

pour tout polynôme symétrique homogène $g(\mathbf{x})$ de degré ≥ 1. L'espace vectoriel $\mathcal{H}_n$ des **polynômes harmoniques pour le groupe symétrique** $\mathfrak{S}_n$ est donc

$$\mathcal{H}_n = \{p(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_n \,:\, q(\partial\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = 0,\ \forall q(\mathbf{x}) \in \Lambda_n\},$$

un théorème classique (voir [18] à la section 3.6, p.57) affirme que[1] $\dim(\mathcal{H}_n) = n!$. Soit $\mathbb{K} \cdot f = \{c \cdot f \mid c \in \mathbb{K}\}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par un polynôme f. Poursuivant avec les rappels de théorèmes classiques, on montre facilement que le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$ est harmonique, c.-à-d. $\Delta_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_n$, en observant que pour tout polynôme $q(\mathbf{x})$ symétrique et homogène de degré supérieur ou égal à 1, le polynôme $q(\partial\mathbf{x})\Delta_n(\mathbf{x})$ est clairement antisymétrique, de degré inférieur au degré de $\Delta_n(\mathbf{x})$. Le polynôme $\Delta_n(\mathbf{x})$ est le polynôme antisymétrique non nul de degré minimal (voir [6]), ce qui permet de conclure que $p(\partial\mathbf{x})\Delta_n(\mathbf{x}) = 0$. On observe aussi facilement (à partir de la définition) que $\mathcal{H}_n$ est fermé par dérivation donc $\mathcal{D}(\mathbb{K} \cdot \Delta_n(\mathbf{x})) \subseteq \mathcal{H}_n$. En fait (voir [18]), on peut montrer que l'espace de polynômes harmoniques $\mathcal{H}_n$ coïncide avec $\mathcal{D}(\mathbb{K} \cdot \Delta_n(\mathbf{x}))$. De plus, il est bien connu que la caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathcal{H}_n$ est

$$\mathcal{H}_n(q, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q^j)\, h_n\left[\frac{\mathbf{w}}{1-q}\right].$$

Modules de Garsia-Haiman : $\mathcal{H}_\mu$

Dans la veine de l'exemple précédent, A. Garsia et M. Haiman ont introduit les modules suivants pour expliquer la Schur-positivité des polynômes de Macdonald (voir [22]). On généralise la construction $\mathcal{H}_n$ comme suit : soit μ est un partage de n, on considère le polynôme $\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini comme suit :

$$\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dét}\left(x_k^p y_k^q\right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (p,q) \in D(\mu)}}$$

1. En fait, ce théorème classique s'applique à n'importe quel groupe engendré par des réflexions.

où $D(\mu)$ est le diagramme de Ferrer de μ. Rappelez que si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$, alors $D(\mu)$ est défini par :

$$D(\mu) := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ 0 \leq y \leq k-1, \ 0 \leq x \leq \mu_y - 1\}.$$

Autrement dit, on prend le déterminant de la matrice dont les lignes sont indexées par l'entier k allant de 1 à n et dont les colonnes sont indexées par les casses (p, q) du diagramme de Ferrer $D(\mu)$ du partage μ. Aux fins de calcul , on ordonne celles-ci lexicographiquement. L'espace vectoriel $\mathcal{H}_\mu$ des **polynômes μ-harmoniques** est défini comme

$$\mathcal{H}_\mu := \{p(\partial\mathbf{x}, \partial\mathbf{y})\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,|\, p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_n^{(2)}\} = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{K} \cdot \Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Le **théorème** $n!$ de M. Haiman (voir [15]) affirme que :

$$\dim\left(\mathcal{H}_\mu\right) = n!. \tag{2.1}$$

Haiman a ainsi démontré la conjecture $n!$ qui avait été proposée par A. Garsia et M. Haiman (voir [12]) au début des années 90. Déjà à l'époque, ils avaient démontré que la formule 2.1 implique que la caractéristique de Frobenius $\mathcal{H}_n(q, t, \mathbf{w})$ donne le polynôme de Macdonald (voir [6, 7]).

Espaces fermés par polarisation

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. La polarisation est un processus qui permet de fermer un sous-espace $\mathcal{V}$ par l'action du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ (voir Lemme 2.1.3). Tout au cours de ce chapitre, il est intéressant de considérer que $\mathcal{R}_n^{(\ell)} = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell]$ est l'anneau des polynômes en les variables $x_{i,j}$ où les variables sont regroupées selon les lignes $\mathbf{x}_i := (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ de la matrice de variables X. Avec ce point de vue, pour noter les lignes de la matrice d'exposants A, on écrira $\mathbf{a}_i := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. On peut alors utiliser,

$$\mathbf{x}_i^{\mathbf{a}_i} = x_{i1}^{a_{i1}} x_{i2}^{a_{i2}} \cdots x_{in}^{a_{in}},$$

et on a donc, $X^A = \mathbf{x}_1^{\mathbf{a}_1}\mathbf{x}_2^{\mathbf{a}_2}\cdots\mathbf{x}_\ell^{\mathbf{a}_\ell}$. Le multi-degré du monôme X^A est :

$$\deg\left(X^A\right) := (|\mathbf{a}_1|, |\mathbf{a}_2|, \ldots, |\mathbf{a}_\ell|).$$

Un polynôme $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ s'écrit donc aussi sous la forme $f(X) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell)$. On peut alors définir, pour chaque pair (i,k) tel que $1 \leq i,k \leq \ell$, **l'opérateur de polarisation** $E_{i,k} : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ par l'équation suivante :

$$E_{i,k}\big(f(X)\big) := \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k + t\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{kj}} f(X).$$

Autrement dit,

$$E_{i,k}\big(f(X)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j + t\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell) - f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\ell)}{t},$$

L'opérateur de polarisation $E_{i,k}(f)$ correspond donc à la dérivée selon la k-ième ligne, du polynôme f, dans la direction $\mathbf{x}_i$. En conséquence, les opérateurs $E_{i,k}$ sont des opérateurs de dérivation, c'est-à-dire, $E_{i,k}(f \cdot g) = E_{i,k}(f) \cdot g + f \cdot E_{ik}(g)$. On note par $E_{i,k}^r$ l'itérée r fois de l'opérateur $E_{i,k}$ pour la composition :

$$E_{i,k}^r := \underbrace{E_{ik}\, E_{ik}\, \cdots\, E_{ik}}_{r-\text{fois}} = \underbrace{E_{i,k} \circ \cdots \circ E_{i,k}}_{r-\text{fois}},$$

et alors

$$\frac{d^r}{dt^r} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k + t\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell)\Big|_{t=0} = E_{i,k}^r\big(f(X)\big).$$

d'où par la formule de Taylor :

$$f\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k + t\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell\right) = \sum_{r=0}^{d_k} E_{i,k}^r\big(f(X)\big)\frac{t^r}{r!}. \tag{2.2}$$

Aussi, on peut écrire l'équation (4.1) comme suit :

$$f\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k + t\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell\right) = \sum_{r=0}^{\infty} E_{i,k}^r\big(f(X)\big)\frac{t^r}{r!} = \mathrm{e}^{t\,E_{i,k}}\left(f(X)\right). \tag{2.3}$$

Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$, on définit **l'opérateur de d-polarisation** par (voir [19]) :

$$E^{\mathbf{d}} := \frac{d_1!}{(d_1 + \cdots + d_\ell)!} E_{\ell,1}^{d_\ell} \circ \cdots \circ E_{2,1}^{d_2},$$

On définit aussi **l'opérateur de d-restitution** qui est donné par :

$$E_{\mathbf{d}} := \frac{1}{d_2! \cdots d_\ell!} E_{1,2}^{d_2} \circ \cdots \circ E_{1,\ell}^{d_\ell}.$$

Propriétés fondamentales des opérateurs de polarisation

Étudier l'effet de plusieurs opérateurs de polarisation via l'approche des fonctions génératrices (voir [19, 24] et aussi, appendice A), est particulièrement efficace. Exploitant une notation vectorielle avec $\mathbf{t}^{\mathbf{k}} := t_1^{k_1} \cdots t_\ell^{k_\ell}$, $\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_\ell!$ et

$$\mathbf{t} \cdot X := \sum_{i=1}^{\ell} t_i \mathbf{x}_i = \left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{in} \right).$$

On peut considérer la formule 2.2 d'une façon plus générale. En effet, soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme homogène de degré total d, en les variables $\mathbf{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n})$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_2! \cdots k_\ell!} \cdot E_{\ell,1}^{k_\ell} \cdots E_{2,1}^{k_2}(f(\mathbf{x}_1)). \tag{2.4}$$

$$f(\mathbf{t} \cdot X) = \sum_{|\mathbf{k}|=d} E^{\mathbf{k}}(f(\mathbf{x}_1))\, d! \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}. \tag{2.5}$$

où la somme porte sur tous les vecteurs $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_\ell)$ tels que $k_1 + \cdots + k_\ell = d$.

Posons $e_1(\mathbf{x}_i) := x_{i1} + \cdots + x_{in}$, et rappelons la notation du chapitre 1 (formule 1.26) du polynôme $e_1^{\mathbf{d}}(X)$ défini comme

$$e_1^{\mathbf{d}}(X) := e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}.$$

Exemple 2.1.1. Pour $f(\mathbf{x}_1) = e_1(\mathbf{x}_1)^m = (x_{11} + \cdots + x_{1n})^m$. Si on prend les polarisations de $f(\mathbf{x}_1)$ on obtient :

$$E_{i,1}^s f(\mathbf{x}_1) = \frac{m!}{(m-s)!} e_1(\mathbf{x}_i)^s e_1(\mathbf{x}_1)^{m-s},$$

En particulier, si $s = \deg(f) = m$, on a :

$$E_{i,1}^{m} f(\mathbf{x}_1) = m! \cdot e_1(\mathbf{x}_i)^m = (x_{i1} + \cdots + x_{in})^m,$$

De même, on obtient :

$$E_{j,1}^{r} E_{i,1}^{s} f(\mathbf{x}_1) = \frac{m!}{(m-s-r)!} e_1(\mathbf{x}_j)^r e_1(\mathbf{x}_i)^s e_1(\mathbf{x}_1)^{m-s-r},$$

En général, si $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ est tel que $|\mathbf{k}| = m$, on peut démontrer par l'induction sur m que

$$E_{\ell,1}^{k_\ell} \cdots E_{2,1}^{k_2} f(\mathbf{x}_1) = \frac{m!}{k_1!} \cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{k_1} e_1(\mathbf{x}_2)^{k_2} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{k_\ell} = \frac{m!}{k_1!} e_1^{\mathbf{k}}(X), \tag{2.6}$$

puis, on utilise le théorème du multinôme comme suit :

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{t} \cdot X) &= f\left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{in}\right) = \big(t_1 e_1(\mathbf{x}_1) + \cdots + t_\ell e_1(\mathbf{x}_\ell)\big)^m \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=m} \binom{m}{k_1, \ldots, k_\ell} \big(t_1 e_1(\mathbf{x}_1)\big)^{k_1} \cdots \big(t_\ell e_1(\mathbf{x}_\ell)\big)^{k_\ell} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=m} \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1! k_2! \cdots k_\ell!} \cdot m!\, e_1(\mathbf{x}_1)^{k_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{k_\ell} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=m} \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_2! \cdots k_\ell!} \cdot E_{\ell,1}^{k_\ell} \cdots E_{2,1}^{k_2} \big(e_1(\mathbf{x}_1)^m\big) \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=m} m! \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1! k_2! \cdots k_\ell!} \cdot \frac{k_1!}{m!} E_{\ell,1}^{k_\ell} \cdots E_{2,1}^{k_2} \big(e_1(\mathbf{x}_1)^m\big) \\
&= \sum_{|\mathbf{d}|=m} E^{\mathbf{d}} \big(e_1(\mathbf{x}_1)^m\big)\, m! \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2. $g(\mathbf{x}_1) = p_d(\mathbf{x}_1) = x_{11}^d + \cdots + x_{1n}^d$,

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{t} \cdot X) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{ij}\right)^d \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_\ell=d} d!\, \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1! k_2! \cdots k_\ell!} \cdot x_{1j}^{k_1} \cdots x_{\ell j}^{k_\ell}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} d!\,\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1!k_2!\cdots k_\ell!}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{k_1}\cdots x_{\ell j}^{k_\ell}\right)$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_2!\cdots k_\ell!} E_{\ell,1}^{k_\ell}\cdots E_{2,1}^{k_2}(p_d(\mathbf{x}_1))$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} d!\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1!k_2!\cdots k_\ell!}\frac{k_1!}{d!}E_{\ell,1}^{k_\ell}\cdots E_{2,1}^{k_2}(p_d(\mathbf{x}_1))$$

$$= \sum_{|\mathbf{d}|=d} E^{\mathbf{d}}(p_d(\mathbf{x}_1))\, d!\frac{\mathbf{t}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}$$

Polynômes diagonalement symétriques engendrés par polarisation

Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = m$. Soit $g(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ homogène de multi-degré $\mathbf{d}$ et $f(\mathbf{x}_1) \in \mathcal{R}_n$ homogène de degré m, on dit que $g(X)$ est la polarisation complète de $f(\mathbf{x}_1)$ si $g(X) = E^{\mathbf{d}}\big(f(\mathbf{x}_1)\big)$. On dit que $f(\mathbf{x}_1)$ est engendré par restitution complète de $g(X)$ si $f(\mathbf{x}_1) = E_{\mathbf{d}}\big(g(X)\big)$. (voir [19] p.149). Le lemme suivant est un cas particulier du théorème de la section 2.2, à la page 42, C. Procesi [24].

Lemme 2.1.1. Soit ℓ n'importe quel entier $\ell \geq 2$. Pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = m$. Les polynômes diagonalement symétriques $e_1^{\mathbf{d}}(X)$,$p_{\mathbf{d}}(X)$, $e_{\mathbf{d}}(X)$ et $h_{\mathbf{d}}(X)$ sont engendrés respectivement comme polarisations des polynômes $e_1^m(\mathbf{x}), p_m(\mathbf{x}), e_m(\mathbf{x})$ et $h_m(\mathbf{x})$. Aussi, les polynômes $e_1^m(\mathbf{x}), p_m(\mathbf{x}), e_m(\mathbf{x})$ et $h_m(\mathbf{x})$ sont engendrés respectivement par restitution des polynômes $e_1^{\mathbf{d}}(X)$, $p_{\mathbf{d}}(X)$, $\frac{\mathbf{d}!}{m!}e_{\mathbf{d}}(X)$ et $\frac{\mathbf{d}!}{m!}h_{\mathbf{d}}(X)$.

Démonstration. Pour vérifier que $E^{\mathbf{d}}\big(e_1(\mathbf{x}_1)^m\big) = e_1^{\mathbf{d}}(X)$ on utilise la formule 2.6. Pour les autres affirmations, on applique la transformation $\mathbf{x}_1 \longmapsto \mathbf{t}\cdot X$, c'est-à-dire, $x_{1j} \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{ij}$ avec $1 \leq j \leq n$ aux séries génératrices suivantes

$$\sum_{k\geq 0} p_k(\mathbf{x}_1)\,\frac{t^k}{k} = \log\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-t\,x_{1j}}\right) \tag{2.7}$$

$$\sum_{k\geq 0} h_k(\mathbf{x}_1)\,t^k = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-t\,x_{1j}}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k\geq 0} e_k(\mathbf{x}_1)\, t^k = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + t\, x_{1j}\right). \tag{2.9}$$

on obtient les séries génératrices 1.23, 1.24, et 1.25

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell-\{\mathbf{0}\}} p_{\mathbf{d}}(X)\; |\mathbf{d}|! \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}\frac{t^{|\mathbf{d}|}}{|\mathbf{d}|} = \log\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 - t\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{ij}}\right) = \sum_{m\geq 1} p_m(\mathbf{t}\cdot X)\,\frac{t^m}{m} \tag{2.10}$$

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} e_{\mathbf{d}}(X)\, \mathbf{t}^{\mathbf{d}}\, t^{|\mathbf{d}|} = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + t\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{ij}\right) = \sum_{m\geq 0} e_m(\mathbf{t}\cdot X)\, t^m \tag{2.11}$$

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} h_{\mathbf{d}}(X)\, \mathbf{t}^{\mathbf{d}}\, t^{|\mathbf{d}|} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1 - t\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{ij}\right)} = \sum_{m\geq 0} h_m(\mathbf{t}\cdot X)\, t^m \tag{2.12}$$

puis on utilise la formule 2.5 et les dernières formules, par exemple utilisons 2.5 dans l'équation 2.12

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} h_{\mathbf{d}}(X)\, \mathbf{t}^{\mathbf{d}}\, t^{|\mathbf{d}|} = \sum_{k\geq 0} h_k(\mathbf{t}\cdot X)\, t^k = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{|\mathbf{d}|=k} E^{\mathbf{d}}\big(h_k(\mathbf{x}_1)\big)\, k!\frac{\mathbf{t}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}\right) t^k$$

on a, donc

$$E^{\mathbf{d}}\big(h_m(\mathbf{x}_1)\big) = \frac{\mathbf{d}!}{m!}\, h_{\mathbf{d}}(X), \text{ si } |\mathbf{d}| = m.$$

avec un raisonnement similaire, on obtient les formules suivantes

$$E^{\mathbf{d}}\big(e_m(\mathbf{x}_1)\big) = \frac{\mathbf{d}!}{m!}\, e_{\mathbf{d}}(X), \text{ si } |\mathbf{d}| = m,$$

$$E^{\mathbf{d}}\big(p_m(\mathbf{x}_1)\big) = p_{\mathbf{d}}(X), \text{ si } |\mathbf{d}| = m.$$

Pour vérifier les formules de restitution

$$E_{\mathbf{d}}\big(p_{\mathbf{d}}(X)\big) = p_m(\mathbf{x}_1),$$

$$E_{\mathbf{d}}\big(e_{\mathbf{d}}(X)\big) = \frac{m!}{\mathbf{d}!}\, e_m(\mathbf{x}_1),$$

$$E_{\mathbf{d}}\big(h_{\mathbf{d}}(X)\big) = \frac{m!}{\mathbf{d}!}\, h_m(\mathbf{x}_1),$$

sinon on utilise l'induction sur m. $\square$

Le lemme suivant nous permettra d'établir à la section 2.3 une règle pour trouver une base homogène des modules de polarisation engendrés par polynômes symétriques homogènes de degré 2 et 3.

Lemme 2.1.2 (voir C. Procesi [24], p.43). Soit $g(\mathbf{x}_1)$ un polynôme homogène de degré d dans les variables $\mathbf{x}_1 = x_{11}, \ldots, x_{1n}$. Les opérateurs de polarisation particuliers $E_{i,1}$ et $E_{1,i}$ satisfont l'identité $E_{1,i}E_{i,1}\big(g(\mathbf{x}_1)\big) = d \cdot g(\mathbf{x}_1)$ si $i > 1$. De plus, $E_{i,1}(g)$ est un polynôme multi-homogène.

Démonstration. On commence par appliquer l'opérateur $E_{i,1}$ au polynôme $g(\mathbf{x}_1)$. En effet,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\right) g(\mathbf{x}_1) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_{1j}}(\mathbf{x}_1),$$

on applique de deux côtés l'opérateur $E_{1,i}$ et comme $i > 1$ on a :

$$\left(\sum_{r=1}^{n} x_{1r}\frac{\partial}{\partial x_{ir}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_{1j}}(\mathbf{x}_1)\right) = \sum_{r=1}^{n} x_{1r}\left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{r,j}\frac{\partial g}{\partial x_{1j}}(\mathbf{x}_1)\right)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} x_{1r}\frac{\partial g}{\partial x_{1r}}(\mathbf{x}_1) = d \cdot g(\mathbf{x}_1).$$

L'identité $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} x_{1r}\frac{\partial g}{\partial x_{1r}}(\mathbf{x}_1) = d \cdot g(\mathbf{x}_1)$ est vraie, car g est homogène. □

Les opérateurs de polarisation généralisés

Pour tout triple (i, k, p) des entiers positifs tels que $1 \leq i, k \leq \ell$ et $p \geq 1$, les **opérateurs de polarisation généralisés** $E_{i,k}^{(p)} : \mathcal{R}_n^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ comme les opérateurs linéaires suivants :

$$E_{i,k}^{(p)} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial^p}{\partial x_{kj}^p}.$$

Chaque opérateur de polarisation est une dérivation sur l'algèbre des polynômes $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Pour plus de détails, voir [19].

La fermeture par polarisation

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. On dit que $\mathcal{V}$ est **fermé par polarisation** si pour tout $g \in \mathcal{V}$ on a que $E_{i,k}^{(p)}(g) \in \mathcal{V}$, pour tous les triplets (i,k,p). On observe que l'intersection d'ensembles fermés par polarisation est fermée par polarisation. On peut donc définir **la fermeture par polarisations $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$** comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ fermé par polarisation qui contient $\mathcal{V}$. On note parfois par $\mathcal{E}_{\ell}(\mathcal{V})$ la **ℓ-polarisation**, pour souligner ainsi qu'on polarise pour ℓ ensembles de n variables.

Dérivations et polarisations

Observons que les opérateurs de polarisation commutent avec l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire :

$$\sigma \cdot E_{i,k}^{(p)}(f(X)) = E_{i,k}^{(p)}(\sigma \cdot f(X)), \quad \forall f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}, \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \tag{2.13}$$

de même, la dérivation satisfait clairement l'identité :

$$\sigma \cdot \frac{\partial f(X)}{\partial x_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i,\sigma(j)}}(\sigma \cdot f(X)), \quad \forall f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)} \tag{2.14}$$

La polarisation et la dérivation sont donc compatibles avec la décomposition en $\mathfrak{S}_n$-module irréductibles. Ainsi donc, pour $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{S}_n$-sous-module de $\mathcal{R}_n$ qui se décompose comme

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda \mathcal{S}^\lambda, \quad a_\lambda \in \mathbb{N},$$

on a

$$E_{i,j}^{(p)}(\mathcal{V}) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda E_{i,j}^{(p)}(\mathcal{S}^\lambda).$$

On démontre dans le lemme suivant (voir [17], p. 396), si $\alpha \neq i$ les opérateurs $\partial_{\alpha,\beta}$ et $E_{i,k}^{(p)}$ commutent.

Lemme 2.1.3. Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$, on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}(\mathcal{V})) = \mathcal{E}(\mathcal{D}(\mathcal{V})).$$

Démonstration. Pour vérifier l'affirmation ci-haut, on exploite l'identité suivante (elle se découle de la règle du produit pour les dérivées) :

$$\partial_{\alpha,\beta} E_{i,k}^{(p)} = \delta_{\alpha,i} \partial_{k\beta}^{p} + E_{i,k}^{(p)} \partial_{\alpha,\beta}. \tag{2.15}$$

où $\delta_{\alpha,i}$ est le symbole de Kronecker. Comme $\mathcal{V}$ est un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ alors tout élément de $\mathcal{V}$ est une somme de polynômes homogènes qui appartiennent à $\mathcal{V}$. Donc, il suffit de considérer un polynôme homogène $g \in \mathcal{V}$ (avec $\deg(g) = (d_1, \dots, d_\ell)$). On a deux cas, si $\alpha \neq i$ alors $\delta_{\alpha,i} = 0$ et donc, $\partial_{\alpha,\beta} E_{i,k}^{(p)} = E_{i,k}^{(p)} \partial_{\alpha,\beta}$. Alors, pour tout $g \in \mathcal{V}$ on voit que

$$\partial_{\alpha,\beta} E_{i,k}^{(p)}(g) = E_{i,k}^{(p)} \partial_{\alpha,\beta}(g) \in \mathcal{E}\left(\mathcal{D}(\mathcal{V})\right), \quad \text{si } \alpha \neq i.$$

Dans le cas que $\alpha = i$, on obtient :

$$\partial_{i,\beta} E_{i,k}^{(p)}(g) = \partial_{k,\beta}^{p}(g) + E_{i,k}^{(p)} \partial_{i,\beta}(g) \in \mathcal{E}\left(\mathcal{D}(\mathcal{V})\right).$$

car $\partial_{k,\beta}^{p}(g) \in \mathcal{D}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{E}\left(\mathcal{D}(\mathcal{V})\right)$. Ceci implique que $\mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right) \subseteq \mathcal{E}\left(\mathcal{D}(\mathcal{V})\right)$.

Il nous reste voir que $\mathcal{E}\left(\mathcal{D}(\mathcal{V})\right) \subseteq \mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right)$. La formule 2.15 implique

$$E_{i,k}^{(p)} \partial_{\alpha,\beta} = \partial_{\alpha,\beta} E_{i,k}^{(p)} - \delta_{\alpha,i} \partial_{k,\beta}^{p} \tag{2.16}$$

Finalement, on doit vérifier que $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right)$. En effet, par définition on a que

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right),$$

alors, $\mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right)$ est un sous-espace fermé par dérivations qui contiennent $\mathcal{V}$ et comme $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est le plus petit avec cette propriété alors $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right)$. Donc, par la formule 2.16 on a que $E_{i,k}^{(p)} \partial_{\alpha,\beta} \in \mathcal{D}\left(\mathcal{E}(\mathcal{V})\right)$. □

Les modules de polarisation

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Notons par $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}) := \mathcal{D}(\mathcal{E}(\mathcal{V})).$$

Définition 1. Un sous-ensemble F de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est dit une **famille homogène**, si tous ses éléments sont des polynômes homogènes.

Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note par $\sigma(F)$ l'ensemble suivant :

$$\sigma(F) := \{\sigma \cdot g(X) \mid g(X) \in F\}, \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

autrement dit, $\sigma(F)$ est la réunion des orbites de tous les polynômes dans F (par rapport à l'action diagonale de $\mathfrak{S}_n$).

Définition 2. On dit qu'une famille homogène F de polynômes dans $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est $\mathfrak{S}_n$**-stable** si $\sigma(F) \subseteq F$, pour toute permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$.

Définition 3. Soit F de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ une famille homogène et $\mathfrak{S}_n$-stable. Le **module de polarisation engendré par** F est l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{M}_F := \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{K}[F]),$$

où $\mathbb{K}[F]$ est le sous-espace de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ engendré par la famille F.

En d'autres mots, *le module de polarisation $\mathcal{M}_F$ est le plus petit espace vectoriel fermé par polarisation et dérivation qui contient la famille F.*

Soit $f(X)$ un polynôme homogène donné, **le sous-ensemble stable** correspondant à $f(X)$ est la famille homogène et $\mathfrak{S}_n$-stable $\mathrm{F}(f) := \{\sigma \cdot f(X) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ (l'orbite de $f(X)$ sous l'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$).

En particulier, si $f(X)$ est **homogène et diagonalement symétrique** alors la famille $\mathrm{F}(f)$ a un seul élément $f(X)$ et dans ce cas, le module de polarisation $\mathcal{M}_{\mathrm{F}(f)}$ est tout simplement dénoté comme $\mathcal{M}_f$. On appelle aussi $\mathcal{M}_f$ le **module de polarisation engendré par** f.

Remarque 2.1.1. Lorsque f est homogène et **antisymétrique** on dénote aussi par $\mathcal{M}_f$ le module de polarisation engendré par la famille homogène et $\mathfrak{S}_n$-stable $\{f, -f\}$.

Remarque 2.1.2. Lorsqu'on veut spécifier la quantité d'ensembles de n variables utilisées, c'est-à-dire, on fixe la valeur du paramètre ℓ, on utilise la notation suivante :

$$\mathcal{M}_F^{(\ell)} := \mathcal{E}_\ell(\mathcal{D}(\mathcal{V})).$$

Parfois, pour simplifier l'écriture, on a effacé les variables $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_\ell)$ dans les fonctions de Schur, c.-à-d., $s_\lambda := s_\lambda(\mathbf{q})$.

Exemples simples

1. Pour $\ell \geq 3$ et $n = 3$. Soit $f = x_{11}x_{22}x_{33}$ alors la série de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_f$ est

   $$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = (1+s_1+s_2+s_3)s_3(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{1,1}+s_{2,1})s_{2,1}(\mathbf{w})+(s_{1,1}+s_{1,1,1})s_{1,1,1}(\mathbf{w}),$$

   et immédiatement, on obtient que la série de Hilbert est

   $$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = 1 + \mathbf{3}s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{3}s_2(\mathbf{q}) + \mathbf{3}s_{1,1}(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q}) + \mathbf{2}s_{2,1}(\mathbf{q}) + s_{1,1,1}(\mathbf{q}).$$

   les deux formules ci-haut sont valides pour tout ℓ.

2. Soit g la symétrisation du polynôme f,

   $$g := x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{22}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}$$

   dans ce cas la série de Frobenius prend la forme suivante :

   $$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = (1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})) \cdot s_3(\mathbf{w}) + (s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})) \cdot s_{2,1}(\mathbf{w}),$$

   tandis que la série de Hilbert nous donne simplement :

   $$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = 1 + \mathbf{3}s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{3}s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q}).$$

   ceci sera expliqué en détail au théorème 2.2.3.

3. Prenons l'ensemble $F = \{h_{1,1}(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x})\}$, alors on trouve que la caractéristique

de Frobenius graduée est :

$$\mathcal{M}_F(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2}s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w}) + s_1(\mathbf{q})\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

4. Pour l'ensemble de polynômes $F = \{e_3(\mathbf{x}), m_{21}(\mathbf{x}), s_{21}(\mathbf{x})\}$ on a que la caractéristique de Frobenius est :

$$\mathcal{M}_F(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \big(1+s_1(\mathbf{q})+\mathbf{2}s_2(\mathbf{q})+\mathbf{2}s_3(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w})+\big(s_1(\mathbf{q})+\mathbf{2}s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

5. Pour l'ensemble de polynômes $F = \{p_3(\mathbf{x}), p_{21}(\mathbf{x}), p_{111}(\mathbf{x})\}$ on a que la caractéristique de Frobenius est :

$$\mathcal{M}_F(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \big(1+s_1(\mathbf{q})+\mathbf{2}s_2(\mathbf{q})+\mathbf{3}s_3(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w})+\big(s_1(\mathbf{q})+\mathbf{2}s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

6. Considérons l'ensemble stable formé par deux polynômes symétriques homogènes du même degré total 4,

$$F := \{m_{22}(\mathbf{x}), p_{31}(\mathbf{x})\},$$

dans ce cas, la série de Frobenius graduée est la suivante ;

$$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{2,1}+\mathbf{2}s_4)\cdot s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{1,1}+\mathbf{2}s_3)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w})+s_2\cdot s_{n-2,2}(\mathbf{w}).$$

Exemple détaillé : $\mathcal{M}_{e_1^m}$

On considère le polynôme symétrique $f(\mathbf{x}_1) := e_1(\mathbf{x}_1)^m = (x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n})^m$. Comme on va le voir ci-dessous, on a une base de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{K}\cdot f)$ qui prend la forme

$$\mathcal{B}_f = \{1, e_1(\mathbf{x}_1), e_1(\mathbf{x}_1)^2, \ldots, e_1(\mathbf{x}_1)^m\}. \tag{2.17}$$

on en conclut, après calcul (voir le théorème 2.2.1 et corollaire 2.3), que :

$$\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{m} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}), \tag{2.18}$$

en particulier, on en déduit donc que $\quad \dim\big(\mathcal{M}_{e_1^m}\big) = \binom{\ell+m}{m}.$

Pour obtenir la formule 2.18 on calcule une base homogène explicite de $\mathcal{M}_{e_1^m}$. On commence en voyant qu'à partir de $\partial_i\left(e_1(\mathbf{x}_1)\right) = 1$, il se découle facilement que

$$\partial_i^k(f(\mathbf{x}_1)) = \frac{m!}{(m-k)!}\, e_1(\mathbf{x}_1)^{m-k},$$

la fermeture par dérivation est donc claire. Pour la polarisation on observe que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j1}\frac{\partial^p}{\partial x_{1j}^p}\right)\left(e_1(\mathbf{x}_1)^m\right) = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\,\frac{m!}{(m-p)!} e_1(\mathbf{x}_1)^{m-p} = \frac{m!}{(m-p)!}\cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{m-p+1}.$$

En particulier, on en conclut donc que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $f(\mathbf{x}_1) = e_1(\mathbf{x}_1)^m$ et ses dérivées partielles $\partial_i^k(f(\mathbf{x}_1))$ est isomorphe au sous-espace de $\mathbb{K}\left[e_1(\mathbf{x}_1)\right]$ des polynômes **à une seule variable** $e_1(\mathbf{x})$ de degré total plus petit ou égal à m. Puisqu'on considère $\ell \geq 1$, on écrira :

$$e_1(\mathbf{x}_i) := x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}, \text{ pour } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq \ell,$$

On sait déjà que

$$\partial_{1,i}^k(f(\mathbf{x}_i)) = \frac{m!}{(m-k)!}\cdot e_1(\mathbf{x}_i)^{m-k},\ \forall i \text{ tel que } 1 \leq i \leq \ell,$$

En général, si $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ est tel que $|\mathbf{k}| = m$ on a vu déjà (voir formule 2.6) que

$$E_{\ell,1}^{k_\ell}\cdots E_{2,1}^{k_2} f(\mathbf{x}_1) = \frac{m!}{k_1!}\cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{k_1} e_1(\mathbf{x}_2)^{k_2}\cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{k_\ell},$$

Aussi, avec les opérateurs de polarisation $E_{i,k}^{(p)}$ on obtient :

$$E_{i,1}^{(p)}\left(f(\mathbf{x}_1)\right) = e_1(\mathbf{x}_i)\cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{k-p}.$$

Par exemple, si $k > p + q$ on a :

$$E_{i,1}^{(q)}E_{i,1}^{(p)}\left(f(\mathbf{x}_1)\right) = e_1(\mathbf{x}_i)^2\cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{k-p-q}.$$

$$E_{r,1}^{(q)}E_{s,1}^{(p)}\left(f(\mathbf{x}_1)\right) = e_1(\mathbf{x}_r)\cdot e_1(\mathbf{x}_s)\cdot e_1(\mathbf{x}_1)^{k-p-q}.$$

En résumé, on a démontré que

$$\left\{e_1^{\mathbf{a}}(X)\ :\ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^\ell,\ 0 \leq |\mathbf{a}| \leq d\right\} \subseteq \mathcal{M}_{e_1^d}$$

En fait, au lemme (2.3.1) on va demontrer que l'ensemble ci-haut est une base homogène de $\mathcal{M}_{e_1^d}$.

On peut démontrer en général que si $a_k \geq p$ alors,

$$E_{i,k}^{(p)}\big(e_1^{\mathbf{a}}(X)\big) = \frac{a_k!}{(a_k - p)!} e_1^{\mathbf{b}}(X),$$

où $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_\ell)$ tel que

$$b_j = \begin{cases} a_j & \text{si } j \neq k \text{ et } j \neq i, \\ a_i + 1 & j = i, \\ a_k - p & j = k. \end{cases},$$

si $a_k < p$ alors $E_{i,k}^{(p)}\big(e_1^{\mathbf{a}}(X)\big) = 0$. Alors, on en conclut après calcul que

$$\mathcal{M}_{e_1^m} := \mathcal{P}_\ell\big(\mathbb{K} \cdot e_1^m(\mathbf{x}_1)\big) \cong \mathbb{K}_{\leq m}\big[e_1(\mathbf{x}_1), e_1(\mathbf{x}_2), \ldots, e_1(\mathbf{x}_\ell)\big], \quad \forall \ell \geq \mathbf{1}$$

Car, on va montrer au chapitre 4 que pour chaquè vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \leq |\mathbf{d}| \leq m$ l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ suivant :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{d}} = \big\{e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}\big\} \subseteq \mathcal{M}_{e_1^m}.$$

est une base linéaire de la composante homogène $V_{\mathbf{d}} := \mathcal{M}_{e_1^m} \cap \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$, on voit, donc, directement, comme annoncé que :

$$\dim\big(\mathcal{M}_{e_1^m}\big) = \sum_{i=1}^{m} \left(\!\!\binom{\ell}{i}\!\!\right) = \binom{\ell + m}{m}, \text{ pour tout } \ell \geq \mathbf{1}.$$

Finalement, pour vérifier la formule 2.18 on doit seulement observer que pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$, le $\mathfrak{S}_n$-caractère de la composante homogène $\mathcal{V}_{\mathbf{d}}$ est égal à 1, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Toutes les affirmations faites ci-haut seront démontrées plus tard dans ce chapitre (voir la section 2.3). ■

Polynômes harmoniques diagonaux : $\mathcal{M}^{(2)}_{\Delta_n(\mathbf{x})}$

Les opérateurs différentiels associés aux polynômes somme de puissances diagonales sont

$$p_{h,k}(\partial\mathbf{x}, \partial\mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{n} \partial x_i^h \partial y_j^k,$$

L'espace vectoriel $\mathcal{D}_n$ des **polynômes harmoniques diagonaux** est défini comme suit :

$$\mathcal{D}_n := \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_n^{(2)} \mid p_{h,k}(\partial\mathbf{x}, \partial\mathbf{y})f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,\ \forall(h,k)\ :\ h+k>0\},$$

À l'année 1994, M. Haiman a démontré (voir [14]), que l'espace $\mathcal{D}_n$ est fermé par l'action des opérateurs de polarisation $E_k := \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}$. Aussi, en [14] il a conjecturé que l'espace $\mathcal{M}_f$, pour $f(\mathbf{x}) = \Delta_n(\mathbf{x})$ et $\ell = 2$, coïncide avec $\mathcal{D}_n$. Plus tard, en 2002, il a démontré cette conjecture (voir [17], théorème 4.1, p.396). Ce théorème affirme que le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$ engendre l'espace $\mathcal{D}_n$ comme module sur l'algèbre des opérateurs $\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, E_1, \ldots, E_{n-1}\right]$. De plus, M. Haiman a montré que la caractéristique de Frobenius de $\mathcal{D}_n$ est donnée par (voir [17] p.392.).

$$\mathcal{D}_n(q, t, \mathbf{w}) = \nabla(e_n(\mathbf{w})).$$

où ∇ est **l'opérateur nabla** de la théorie de **polynômes de Macdonald** (pour plus de détails sur les polynômes de Macdonald, voir [3]). En particulier, il est remarquable que

$$\dim(\mathcal{D}_n) = (n+1)^{n-1}.$$

Polynômes harmoniques trivariés : $\mathcal{M}^{(3)}_{\Delta_n(\mathbf{x})}$

M. Haiman a conjecturé (voir [16]) que l'espace $\mathcal{M}^{(3)}_{\Delta_n(\mathbf{x})}$ coïncide avec l'espace de polynômes harmoniques diagonaux trivariés (voir [14]) :

$$\mathcal{D}_n^{(3)} := \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{R}_n^{(3)} \mid p_{a,b,c}(\partial\mathbf{x}, \partial\mathbf{y}, \partial\mathbf{z})f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0,\ \forall(a,b,c)\ :\ a+b+c>0\},$$

et que sa dimension est

$$\dim\left(\mathcal{D}_n^{(3)}\right) = 2^n(n+1)^{n-2}.$$

Polynômes harmoniques multivariés : $\mathcal{M}^{(\ell)}_{\Delta_n(\mathbf{x})}$

Plus généralement, F. Bergeron (voir [4]) considère l'espace $\mathcal{D}_n^{(\ell)}$ de polynômes harmoniques multivariés avec ℓ quelconque, pour lequel il conjecture que :

$$\mathcal{D}_n^{(\ell)} = \mathcal{M}^{(\ell)}_{\Delta_n(\mathbf{x})}.$$

il conjecture de plus une **forme universelle** pour la caractéristique de Frobenius graduée $\mathcal{D}_n^{(\ell)}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$, à savoir :

$$\mathcal{D}_n^{(\ell)}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}), \quad \text{avec } b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}.$$

où par théorème de F. Bergeron les multiplicités $b_{\lambda,\mu}$ ne dépendent pas de ℓ, *et le nombre de parts dans* μ *est au plus* n (pour plus de détails voir [4]).

La structure algébrique des modules de polarisation

Les résultats exposés dans cette partie sont classiques, et on peut consulter[24, 20]) pour plus de détails. Le but est de décrire la structure des espaces vectoriels $\mathcal{M}_f$ pour n'importe quel polynôme homogène $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ en expliquant le lien entre le processus de polarisation et l'action droite du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ (voir 1.28). Une propriété caractéristique des opérateurs de polarisation (lorsque $p = 1$) est la suivante :

Remarque 2.1.3 (voir [24], p. 83). Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace homogène de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{V}$ est fermé par des opérateurs de polarisation $E_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\partial_{kj}$,
2. $\mathcal{V}$ est fermé par l'action (à droite) du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$, c'est-à-dire, l'action $f(X) \longmapsto f(MX)$, pour toute $M \in GL_\ell(\mathbb{K})$.

Pour plus de détails sur la propriété 2.1.3 voir le livre de Claudio Procesi [24], à la page 83. Aussi, on peut démontrer cette équivalence 2.1.3 (voir la proposition 7.4 dans [20] à la page 78.) en utilisant les matrices $u_{ij}(t) \in GL_\ell(\mathbb{K})$ (qui sont des générateurs du groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$) définies comme suit :

$$u_{ij}(t) = I_{\ell\times\ell} + t\cdot e_{ij}, \quad (\text{avec } t \neq -1 \text{ si } i = j),$$

où e_{ij} est la matrice ayant 1 dans la position (i, j) et zéro ailleurs. Finalement il nous reste à considérer l'équation suivante (voir la formule 2.2) :

$$f\big(u_{ij}(t)X\big) = f\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_j + t\,\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_\ell\right) = \sum_{r=0}^{d_j} E_{i,j}^{(r)}\big(f(X)\big)\frac{t^r}{r!} \in \mathcal{M}_f,$$

et donc comme les matrices $u_{ij}(t)$ engendrent le groupe $GL_\ell(\mathbb{K})$ alors $f(MX) \in \mathcal{M}_f$, pour toute matrice $M \in GL_\ell(\mathbb{K})$. Donc, pour n'importe quelle famille homogène F l'espace vectoriel $\mathcal{M}_F$ est un $GL_\ell(\mathbb{C})$-module. Aussi, les identités 2.14 et 2.13 impliquent que : Por tout ensemble F des polynômes homogènes $\mathfrak{S}_n$-stable le module de polarisation $\mathcal{M}_F$ est un $\mathfrak{S}_n$-module avec l'action diagonale du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$. ■

Les modules de polarisation $\mathcal{M}_F$ sont $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules

On sait que l'action de $\mathfrak{S}_n$ commute avec l'action de $GL_\ell(\mathbb{K})$ et on a donc,

Proposition 2.1.1. Les modules de polarisation $\mathcal{M}_F$ sont des $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules avec l'action linéaire à gauche :

$$(\sigma, M)\cdot f(X) := (\sigma\cdot f)\big(M^{-1}X\big),\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, M \in GL_\ell(\mathbb{K}).$$

La proposition 2.1.1 implique (voir la formule 1.42) qu'il existe des nombres $b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\mathcal{M}_F(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{\lambda\vdash n}\ \sum_{|\mu|\leq \deg(F)} b_{\lambda,\mu}\, s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w}), \quad \text{avec } b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

où $\deg(F) := \max\{\deg(f) \mid f \in F\}$. De plus, $\ell(\mu) \leq n$ (voir [4]).

Exemples

Ici on donne des exemples spécifiques d'espaces engendrés par polynômes symétriques homogènes. En calculant explicitement une base linéaire, on trouve que [2], la forme universelle (c.-à-d., indépendante de ℓ) de la caractéristique de Frobenius des espaces suivants :

Exemple 2.1.3. Prenons $f(\mathbf{x}) = m_{21}(\mathbf{x})$ avec $\ell \geq 1$ quelconque. Alors, pour chaque $n \geq 2$ on a la formule :

$$\mathcal{M}_{m_{21}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2}\, s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

Exemple 2.1.4. Pour $\ell = 2$ et $n = 2$ on considère le polynôme symétrique homogène

$$f(x_{11}, x_{12}) = p_{21}(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^3 + x_{11}^2 x_{12} + x_{12}^2 x_{11} + x_{12}^3,$$

et il s'avère qu'une base homogène de l'espace $\mathcal{M}_f$ est l'ensemble formé par les polynômes suivants :

$$\mathcal{B}_0 := \{1\},$$

$$\mathcal{B}_{(1,0)} := \{\partial_{11}^2 f,\ \partial_{12}\partial_{11} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(0,1)} := \{E_{21}\partial_{11}^2 f,\ E_{21}\partial_{12}\partial_{11} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(2,0)} := \{\partial_{11} f, \partial_{12} f, E_{11}^{(2)} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(1,1)} := \{E_{21}\partial_{11} f, E_{21}\partial_{12} f, E_{21}E_{11}^{(2)} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(0,2)} := \{E_{21}^2\partial_{11} f, E_{21}^2\partial_{12} f, E_{21}^2 E_{11}^{(2)} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(3,0)} := \{f\},$$

$$\mathcal{B}_{(2,1)} := \{E_{21} f\},$$

$$\mathcal{B}_{(1,2)} := \{E_{21}^2 f\},$$

$$\mathcal{B}_{(0,3)} := \{E_{21}^3 f\},$$

2. On a construit pour ceci un ensemble d'outils en Maple pour effectuer ces calculs automatiquement.

Observons que $E_{11}^{(2)}(f) \in \mathcal{M}_{p_{21}}$ *n'est pas combinaison linéaire des dérivées* $\partial_{11}(f)$, $\partial_{12}(f)$. On a donc, pour $\ell = 2$ et $n = 2$ que

$$\mathcal{M}_{p_{21}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2} \cdot s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_2(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{1,1}(\mathbf{w}).$$

Exemple 2.1.5. On considère $\ell = 1$ et $n = 4$ pour $f = p_{21}(\mathbf{x}_1)$. Une base de l'espace $\mathcal{M}_{p_{21}}$ est l'ensemble suivant

$$\mathcal{B}_0 := \{1\},$$

$$\mathcal{B}_1 := \{\partial_{11}\partial_{12}(f), \partial_{11}\partial_{13}(f), \partial_{11}\partial_{14}(f), \partial_{12}\partial_{13}(f)\},$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\partial_{11}(f), \partial_{12}(f), \partial_{13}(f), \partial_{14}(f)\},$$

$$\mathcal{B}_3 := \{f\},$$

dans ce cas, on trouve que *le polynôme* $E_{11}^{(2)}(f)$ *est combinaison linéaire de la base* $\mathcal{B}_2$ *(en général, ce phénomène arrive pour tout* $\ell \geq 1$.*)* car

$$E_{11}^{(2)}(f) = \partial_{11}f + \partial_{12}f + \partial_{13}f + \partial_{14}f,$$

on remarque que, $\dim\Big(\mathbb{R}\{\partial_{11}f, \partial_{12}f, \partial_{13}f, \partial_{14}f, E_{11}^{(2)}(f)\}\Big) = 4$, et on a donc, pour $\ell = 1$ et $n = 4$ que

$$\mathcal{M}_{p_{21}}(q, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(q) + \mathbf{1}\, s_2(q) + s_3(q)\big) \cdot s_4(\mathbf{w}) + \big(s_1(q) + s_2(q)\big) \cdot s_{3,1}(\mathbf{w}).$$

Plus tard, on démontrera (voir théorème 2.2.3) que la dernière formule est valide pour tout $\ell \geq 1$ avec $n = 4$. Plus précisément, on verra que le polynôme $f(\mathbf{x}_1) = p_{21}(\mathbf{x}_1)$ avec $n \geq 1$ quelconque et $\ell \geq 1$ quelconque

1. Si $n \neq 1, 4$ la caractéristique de Frobenius gradué de $\mathcal{M}_{p_{21}}$ est :

$$\mathcal{M}_{p_{21}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2} \cdot s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}),$$

2. Lorsque $n = 4$ et $\ell \geq 1$ quelconque, le résultat est différent, on obtient en effet

$$\mathcal{M}_{p_{21}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, 4) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{1} \cdot s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\big) \cdot s_4(\mathbf{w}) + \big(s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_{3,1}(\mathbf{w}),$$

la différence est donc de "1" dans la composante $s_2(\mathbf{q})s_4(\mathbf{w})$.

3. Ce phénomène se produit aussi dans le cas $f = p_{2,1,1,\dots,1}$. Par exemple, prenons l'espace $\mathcal{M}_{p_{211}}$. Dans ce cas, si $n \neq 1, 5$ alors, la série de Frobenius est

$$\mathcal{M}_{p_{211}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n) = (1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)\cdot s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{11}+s_3)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}),$$

par contre lorsque $n = 5$, on a la formule :

$$\mathcal{M}_{p_{211}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, 5) = (1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{1}s_3+s_{21}+s_4)\cdot s_5(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{11}+s_3)\cdot s_{4,1}(\mathbf{w}).$$

ce phénomène est appelé une 5-exception.

2.2 Théorèmes principaux

Dans cette section, on décrit certains résultats de ce travail (les preuves viendront à la section suivante). On rappel que $e_1^{\mathbf{d}}(X) := e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}$, $p_{\mathbf{d}}(X) := \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{d_1} \cdots x_{\ell,j}^{d_\ell}$, $e_{\mathbf{d}}(X) := \sum_{\left\{B\subseteq[n] \mid |B|=|\mathbf{d}|\right\}} \sum_{\left\{f:B\to[\ell] \mid |f^{-1}(i)|=d_i,\, \forall i\in[\ell]\right\}} \prod_{b\in B} x_{f(b),b}$. Un premier résultat important est :

Théorème 2.2.1. Soit $d \geq 1$ un entier. La caractéristique de Frobenius graduée des modules de polarisation engendrés par chacun de polynômes e_1^d, p_d et e_d sont les formules (indépendantes de ℓ) suivantes :

$$\mathcal{M}_{e_1^d}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}).$$

$$\mathcal{M}_{p_d}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{d-1} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}) \tag{2.20}$$

$$\mathcal{M}_{e_d}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2\rfloor} \left(\sum_{j=i}^{d-i} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}).$$

on peut aussi étendre ce résultat aux polynômes diagonalement symétriques $e_1^{\mathbf{d}}(X)$, $p_{\mathbf{d}}(X)$, et $e_{\mathbf{d}}(X)$ obtenus par polarisation des polynômes symétriques e_1^d, p_d et e_d. Aussi, en utilisant la règle de Pieri on peut vérifier que les formules du théorème 2.2.1 s'écrivent comme une somme à coefficients naturels des produits des fonctions complètes homogènes $h_\mu(\mathbf{q})h_\lambda(\mathbf{w})$.

Corollaire 2.2.1. Soient $m \in \mathbb{N}^+$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = d$. Alors, pour les polynômes diagonalement symétriques $e_1^{\mathbf{d}}(X)$, $p_{\mathbf{d}}(X)$, et $e_{\mathbf{d}}(X)$ on a

$$\mathcal{M}_{e_1^{\mathbf{d}}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} h_j(\mathbf{q})\right) h_n(\mathbf{w}). \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p_{\mathbf{d}}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= \left(\sum_{j=0}^{m} h_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{m-1} h_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}) && (2.22)\\ &= \big(1 + h_d(\mathbf{q})\big)\, h_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{d-1} h_j(\mathbf{q})\right) h_{n-1,1}(\mathbf{w}). && (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e_{\mathbf{d}}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\sum_{j=i}^{m-i} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}) && (2.24)\\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} h_{n-i,i}(\mathbf{w})\, h_i(\mathbf{q}) + \sum_{i=\lfloor \frac{d}{2} \rfloor+1}^{d} h_{n-d+i,d-i}(\mathbf{w})\, h_i(\mathbf{q}). && (2.25)\\ & && (2.26) \end{aligned}$$

Pour n'importe quel polynôme symétrique homogène de degré 2 on a le théorème général suivant :

Théorème 2.2.2. Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 2 à n variables $\mathbf{x}_1 = x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$. Supposons que $f(\mathbf{x}_1)$ est de la forme suivante :

$$f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_2(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{1,1}(\mathbf{x}_1),$$

la caractéristique de Frobenius de $\mathcal{M}_f$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \begin{cases} \big(1 + h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})\big) \cdot h_n(\mathbf{w}) & \text{si } [a:b] = [1:2], \\ \big(1 + h_2(\mathbf{q})\big)\, h_n(\mathbf{w}) + h_1(\mathbf{q})\, h_{n-1,1}(\mathbf{w}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 2.2.2. Si f est un polynôme diagonalement symétrique homogène de degré total 2, on a que le module associé $\mathcal{M}_f$, est isomorphe au module associé à un de deux polynômes suivants p_1^2, p_2.

Pour les modules de polarisation engendrés par des polynômes homogènes de degré 3 on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.3. Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 3 à $n \geq 3$ variables. Supposons que f s'écrit dans la base monomial comme

$$f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_3(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{21}(\mathbf{x}_1) + c \cdot m_{111}(\mathbf{x}_1),$$

alors, caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_f$ est donnée par la règle suivante :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \big(1 + h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})\big) \cdot h_n(\mathbf{w}), \text{ si } \big[a : b : c\big] = \big[1 : 3 : 6\big], \\ \\ \big(1 + h_3(\mathbf{q})\big) \cdot h_n(\mathbf{w}) + \big(h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})\big) h_{n-1,1}(\mathbf{w}), \text{ si } [a : b : c] \text{ satisfait} \\ \text{l'équation } \; 6a(2b + (n-2)c) = 4(n-1)b^2, \\ \\ \big(1 + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})\big) h_n(\mathbf{w}) + \big(h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})\big) h_{n-1,1}(\mathbf{w}), \text{ si } \big[a : b : c\big] \text{ sinon,} \end{cases}$$

Corollaire 2.2.3. Si f est un polynôme diagonalement symétrique homogène de degré total 3, on a que le module associé $\mathcal{M}_f$, est isomorphe au module associé à un de trois polynômes suivants p_1^3, p_3 ou h_3.

Les résultats ci-haut nous donnent le début pour trouver une classification complète des modules $\mathcal{M}_f$ associés à n'importe quel polynôme symétrique et homogène f selon son degré.

Exceptions

Dans cette partie on introduit la notion de n-exception (voir la définition 4) qui nous permet de préciser complètement la classification des modules de polarisation engendrés par un polynôme symétrique homogène de degré 3. Le théorème 2.2.4 nous aidera à comprendre que la multiplicité du module irréductible correspondant à $s_2(\mathbf{q})s_n(\mathbf{q})$ dans la décomposition de $\mathcal{M}_f$ ne peut prendre que les valeurs $0, 1$ ou 2, pour n'importe quel polynôme symétrique homogène f de degré 3.

On note par $\left[a : b\right]$ un point dans la droite réelle projective $\mathbb{RP}^1$ et pour un point dans le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ on écrit $\left[a : b : c\right]$. Les polynômes symétriques homogènes de degré d, sont identifiés avec des points de l'espace réel projectif $\mathbb{RP}^{p(d)-1}$, dont les coordonnées homogènes sont les coefficients du polynôme dans la base monomial $\{m_\lambda(\mathbf{x}_1) : \lambda \vdash n\}$.

Par exemple, lorsque $d = 2$, le polynôme symétrique homogène f de degré 2 s'écrit sous la forme $f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_2(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{11}(\mathbf{x}_1)$ il est donc identifié avec le point $\left[a : b\right] \in \mathbb{RP}^1$. Lorsque $d = 3$, le polynôme $f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_3(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{21}(\mathbf{x}_1) + c \cdot m_{111}(\mathbf{x}_1)$ est identifié avec le point $\left[a : b : c\right] \in \mathbb{RP}^2$. Si $f(\mathbf{x}_1)$ est symétrique et homogène de degré 4 on peut l'écrire sous la forme :

$$f(\mathbf{x}_1) = a_1 \cdot m_4(\mathbf{x}_1) + a_2 \cdot m_{3,1}(\mathbf{x}_1) + a_3 \cdot m_{2,2}(\mathbf{x}_1) + a_4 \cdot m_{2,1,1}(\mathbf{x}_1) + a_5 \cdot m_{1,1,1,1}(\mathbf{x}_1),$$

et on l'identifie avec le point $[f] \in \mathbb{RP}^4$ défini comme :

$$[f] := [a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5].$$

Notez qu'on a ordonné les fonctions monomials selon la longueur du partage associé.

En général, si le polynôme symétrique homogène f de degré d s'écrit dans la base monomiale comme

$$f = \sum_{\lambda \vdash d} a_\lambda m_\lambda$$

l'on l'associe le point $[f] \in \mathbb{RP}^{p(d)-1}$ donné par :

$$[f] := \left[a_d : a_{d-1,1} : a_{d-2,2} : a_{d-2,1,1} : \dots : a_{1,1,1,\cdots,1}\right].$$

Avant donner la définition de n-exception pour degré 3 on doit regarder les deux exemples suivants pour motiver la définition.

Les n-exceptions pour degré 3

On rappelle que $\mathbb{R}\big[\partial_{11}f,\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)\big]$ dénote l'espace vectoriel réel engendré par les polynômes $\partial_{11}f,\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)$. Pour comprendre la définition de **n-exception de degré 3** on doit tenir en compte le théorème 2.2.4 suivant qu'on démontrera à la section 2.3.

Théorème 2.2.4. Soit f un polynôme symétrique homogène de **degré 3** à $n \geq 3$ variables $x_{11},\ldots,x_{1n}$. Supposons que f n'est pas un multiple scalaire du polynôme $p_1^3(\mathbf{x}_1)$. Alors,

$$\dim\Big(\mathbb{R}\big[\partial_{11}f,\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)\big]\Big) \geq n.$$

autrement dit, la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}[x_{11},\ldots,x_{1n}]$ engendré par les polynômes $\partial_{11}(f),\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)$ est au moins n.

Définition 4. On dit qu'un polynôme symétrique homogène f est une **n-exception** si la dimension du sous-espace engendré par $\partial_{11}(f),\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)$ est n, c'est-à-dire,

$$\dim\Big(\mathbb{R}\big[\partial_{11}(f),\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)\big]\Big) = n.$$

Définition 5. On dit le point $[a:b:c] \in \mathbb{RP}^2$ est une **n-exception** (de degré 3) si le polynôme symétrique homogène correspondant est une n-exception.

Observons que :

1. $\big[a:b:c\big] = \big[1:3:6\big]$ si et seulement si f est un multiple scalaire du polynôme symétrique p_1^d et dans ce cas on sait que $\partial_{11}(f) = \ldots = \partial_{1n}(f) = E^{(2)}_{1,1}(f) = d \cdot p_1^{d-1}$, on a donc, $\dim\Big(\mathbb{R}\big[\partial_{11}(f),\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)\big]\Big) = 1$.
2. Si $\big[a:b:c\big] \neq \big[1:3:6\big]$ **n'est pas une n-exception** alors le théorème 2.2.4 implique :

$$\dim\Big(\mathbb{R}\big[\partial_{11}(f),\ldots,\partial_{1n}(f),E^{(2)}_{1,1}(f)\big]\Big) = n+1.$$

Exemples de n-exceptions de degré 3

1. $[\alpha:0:1]$ est une 2-exception si $\alpha \neq 0$.

2. $[1:3:s]$ est une 2-exception pour tout $s \in \mathbb{R}$.
3. $[a:b:c] = [0:0:1]$ $(f = k\,e_3)$, est une n-exception pour tout $n \geq 2$.
4. $[a:b:c] = [1:0:0]$ $(f = k\,p_3)$, est une n-exception pour tout $n \geq 3$.
5. $[a:b:c] = [2:-3:12]$ est une 3-exception.
6. $[a:b:c] = [3:3:-2]$ est une 3-exception.
7. $[a:b:c] = [1:1:0]$ $(f = p_{21})$, est une 4-exception.
8. $[1:-1:2]$ est une 4-exception.
9. $[16:-12:21]$ est une 4-exception.
10. $[9:21:28]$ est une 4-exception.
11. $[a:b:c] = [4:-3:4]$, est une 5-exception.
12. $[a:b:c] = [5:-3:3]$, est une 6-exception.
13. $[a:b:c] = [10:-5:4]$, est un 7-exception.
14. $[a:b:c] = [0:1:0]$, $(f = m_{21})$ **n'est pas** une n-exception pour aucun $n \geq 3$.
15. $[a:b:c] = [1:1:1]$, $(f = h_3)$ **n'est pas** une n-exception pour aucun $n \geq 3$.

Remarque 2.2.1. On va démontrer à la section 2.3 que

1. Les 2-exceptions de degré 3 sont tous les points $[a:b:c] \in \mathbb{RP}^2$ tels que $b = 0$ et $ac \neq 0$.
2. Pour $n \geq 3$ le point $[a:b:c] \in \mathbb{RP}^2$ est une n-exception si et seulement si

$$[a:b:c] \neq [1:3:6] \quad \text{et} \quad 6a \cdot \big(2b + (n-2)c\big) = 4(n-1) \cdot b^2.$$

Tableau 2.1: n-exceptions lorsque $3 \leq n \leq 7$

$n = 3$	$3a(2b + c) = 4b^2$
$n = 4$	$a(b + c) = b^2$
$n = 5$	$3a(2b + 3c) = 8b^2$
$n = 6$	$3a(b + 2c) = 5b^2$
$n = 7$	$a(2b + 5c) = 4b^2$

Dans l'appendice B on trouve la table B.7 avec les équations des n-exceptions où n est compris entre 3 et 42. Avec J. E. Blazek on a trouvé une formule générale pour les coefficients (après simplification) des équations dans cette table, pour n'importe quelle valeur de n :

Proposition 2.2.1. Soient a, b et c trois nombres réels. Alors, le point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ est une n-exception si et seulement si $n_1 a(n_2 b + n_3 c) = n_4 b^2$ où les entiers n_i (dépendant de n) sont donnés par les formules suivantes :

$$n_1(n) = \frac{3}{\text{g.c.d.}(n+2,3)}, \qquad n_2(n) = \text{g.c.d.}(n+1, n-1),$$

$$n_3(n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \qquad n_4(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{\text{g.c.d.}(n-1,6)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{2n-2}{\text{g.c.d.}(n-1,3)} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}.$$

Exemples de n-exceptions en degré ≥ 4

1. Le polynôme p_{211} est une 5-exception.
2. Le polynôme $5\,m_4 + 14\,m_{31} + 21\,m_{22} + 28\,m_{211} + 35\,m_{1111}$ est une 11-exception.
3. Plus généralement, on croit que, pour tout $d \geq 3$ le polynôme $p_2 p_1^{d-2}$ est une $(d+1)$-exception. Cette affirmation a été vérifiée jusqu'à $d = 6$.

La condition précise pour qu'un point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ soit une n-exception est donnée dans le théorème ci-bas :

Théorème 2.2.5. Soient a, b et c trois nombres réels et $n \geq 2$ un entier. Alors, si $n \geq 3$ le point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ est une n-exception si et seulement si

$$[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6] \quad \text{et} \quad 6a\big(2b + (n-2)c\big) = 4(n-1)b^2.$$

Si $n = 2$, le point $[a : b : c]$ est une 2-exception si et seulement si $b = 0$ ou $b = 3a$.

2.3 Démonstrations des théorèmes principaux

On présente ici toutes les preuves des résultats (théorèmes obtenus) dans ce travail.

Preuve du théorème 2.2.1

Posons $f(\mathbf{x}_1) = e_1(\mathbf{x}_1)^m$. On écrit le module $\mathcal{M}_{e_1^m}$ comme suit :

$$\mathcal{M}_{e_1^m} = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell} V_\mathbf{d}$$

où $V_\mathbf{d} := \mathcal{M}_{e_1^m} \cap \mathcal{R}^{(\ell)}_{n,\mathbf{d}}$. Pour chaque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ on note par $\mathcal{B}_\mathbf{d}$ une base de la composante homogène $V_\mathbf{d}$. Les lemmes suivants nous serviront pour démontrer que $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est isomorphes à l'espace des polynômes à ℓ variables de degré plus petit ou égal à m, en symbole :

$$\mathcal{M}_{e_1^m} \cong \mathbb{K}_{\leq m}[e_1(\mathbf{x}_1), e_1(\mathbf{x}_2), \ldots, e_1(\mathbf{x}_\ell)], \quad \forall \ell \geq 1.$$

Lemme 2.3.1. Soient $\ell, n, m \in \mathbb{N}$. Une base homogène de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est l'ensemble $\mathcal{B}$ donné par :

$$\mathcal{B} := \{e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell} \mid 0 \leq d_1 + \cdots + d_\ell \leq m\}.$$

Démonstration. Par le lemme 2.1.1 on montre que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_f$ car

$$e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell} = e_1^\mathbf{d}(X) = E^\mathbf{d}(e_1(\mathbf{x}_1)^m),$$

pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = m$.

$$\mathcal{B} := \left\{e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell} \,\middle|\, 0 \leq d_1 + \cdots + d_\ell \leq m\right\} = \{e_1^\mathbf{a}(X) \; : \; \mathbf{a} \in \mathbb{N}^\ell, \, 0 \leq |\mathbf{a}| \leq m\}.$$

Donc, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_f$ et aussi $\mathbb{K}[\mathcal{B}] \subseteq \mathcal{M}_f$. Car $\mathcal{M}_f$ est fermé par dérivations on a que :

$$\{1, e_1(\mathbf{x}_1), \ldots, e_1(\mathbf{x}_1)^{m-1}, e_1(\mathbf{x}_1)^m\} \subseteq \mathcal{M}_f.$$

Ensuite on prend les $\mathbf{d}$-polarisations $E^\mathbf{d}$ de l'ensemble $\{1, e_1(\mathbf{x}_1), \ldots, e_1(\mathbf{x}_1)^{m-1}, e_1(\mathbf{x}_1)^m\}$ et on obtient

$$\mathcal{B} := \{e_1^\mathbf{a}(X) \; : \; \mathbf{a} \in \mathbb{N}^\ell, \, 0 \leq |\mathbf{a}| \leq m\} \subseteq \mathcal{M}_f.$$

On peut montrer que $\mathbb{K}[\mathcal{B}]$ satisfait les axiomes de la définition des modules de polarisation :

1. $f(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{K}[\mathcal{B}]$,
2. $\mathbb{K}[\mathcal{B}]$ est fermé par symétrisation, car tous ses éléments sont de polynômes diagonalement symétriques.
3. L'espace $\mathbb{K}[\mathcal{B}]$ est fermé par dérivations et polarisation (voir l'exemple 2.1). Alors, $\mathcal{M}_f$ est contenue dans $\mathbb{K}[\mathcal{B}]$ car $\mathcal{M}_f$ est le plus petit espace qui satisfait les axiomes (1)-(4) de la définition de $\mathcal{M}_f$. Donc, $\mathcal{B}$ est un ensemble de générateurs de $\mathcal{M}_f$.

Dans $\mathcal{B}$, il n'existe pas un couple de polynômes ayant le même multidegrée et ceci implique qui $\mathcal{B}$ est linéairement indépendant, parce qu'on considère les projections sur chaque composante homogène (par rapport au multidegré dans $\mathbb{N}^\ell$). □

En utilisant le lemme 2.3.1 on peut immédiatement démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.1. Pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \leq |\mathbf{d}| \leq m$, une base de la composante homogène $V_\mathbf{d}$ de multidegré $\mathbf{d} := (d_1, \ldots, d_\ell)$ de l'espace $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est donnée par l'ensemble suivant :

$$\mathcal{B}_\mathbf{d} = \{e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}\}.$$

si $|\mathbf{d}| > m$ alors $\mathcal{B}_\mathbf{d} = \varnothing$.

On a donc, que pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ on écrit la composante homogène de multidegré $\mathbf{d}$ de l'espace $\mathcal{M}_{e_1^m}$ comme suit :

$$V_\mathbf{d} = \begin{cases} \mathcal{M}_{e_1^m} \cap \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)} & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| \leq m, \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

par le lemme 2.3.1 pour chaque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \leq |\mathbf{d}| \leq m$ l'ensemble

$$\mathcal{B}_\mathbf{d} := \{e_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots e_1(\mathbf{x}_\ell)^{d_\ell}\}$$

est une base de $V_\mathbf{d}$ formée seulement par polynômes diagonalement symétriques et ceci implique :

Lemme 2.3.2. La valeur du caractère gradué de la composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ de l'espace $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est donné par :

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq |\mathbf{d}| \leq m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

alors, le caractère gradué du $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est :

$$\chi_{\mathcal{M}_{e_1^m}}(\sigma, M) = \sum_{j=0}^{m} h_j(\mathbf{q}), \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

où M est une matrice $\ell \times \ell$ avec valeurs propres $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_\ell)$.

Démonstration. Comme chaque élément dans la base homogène est diagonalement symétrique, on a que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le caractère vaut :

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) := \sum_{g(X) \in \mathcal{B}_{\mathbf{d}}} (\sigma \cdot g)(X)\Big|_{g(X)} = \sum_{g(X) \in \mathcal{B}_{\mathbf{d}}} g(X)\Big|_{g(X)} = \sum_{g(X) \in \mathcal{B}_{\mathbf{d}}} 1 = |\mathcal{B}_{\mathbf{d}}| = 1.$$

Aussi,

$$\chi_{\mathcal{M}_{e_1^m}}(\sigma) := \sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq m} \chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma)\ \mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq m} \mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \sum_{j=0}^{m} h_j(\mathbf{q}), \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

□

Calcul de $\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$

Soit $f(\mathbf{x}_1) = e_1(\mathbf{x}_1)^m$. On veut montrer que la caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_f$ (à n variables) est donnée par :

$$\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + \cdots + s_m(\mathbf{q})\big) s_n(\mathbf{w}).$$

En effet, par définition la caractéristique de Frobenius graduée est :

$$\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma)\ p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}}$$

par Lemme 2.3.2 on a que :

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| \leq m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

on peut écrire alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) &= \sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq m} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}} = \sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq m} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) \right) \mathbf{q}^{\mathbf{d}} \\ &= \left(\sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq m} \mathbf{q}^{\mathbf{d}} \right) \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w}) \right) = \left(\sum_{j=0}^{n} s_j(\mathbf{q}) \right) s_n(\mathbf{w}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

En particulier, ceci implique que la série de Hilbert de $\mathcal{M}_{e_1^m}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{e_1^m}(\mathbf{q}, n) = 1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q}) + \cdots + s_m(\mathbf{q}).$$

Comme conséquence du lemme 2.1.1 on obtient que pour tout $\ell \geq 2$ et tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = m$ on a l'égalité :

$$\mathcal{M}_{e_1^m} = \mathcal{M}_{e_1^{\mathbf{d}}}.$$

Le module engendré par le polynôme $p_m(\mathbf{x})$

Soit $f(\mathbf{x}_1) = p_m(\mathbf{x}_1) := x_{11}^m + \cdots + x_{1n}^m$. On écrit l'espace $\mathcal{M}_f$ comme somme directe de ses composantes homogènes $V_{\mathbf{d}}$

$$\mathcal{M}_{p^m} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} V_{\mathbf{d}},$$

où $V_{\mathbf{d}} := \mathcal{M}_{p_m} \cap \mathcal{R}_{n,\mathbf{d}}^{(\ell)}$. On veut montrer que la caractéristique de Frobenius graduée de l'espace $\mathcal{M}_f$ est :

$$\mathcal{M}_{p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{m} s_j(\mathbf{q}) \right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{m-1} s_j(\mathbf{q}) \right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

Lemme 2.3.3. Soit $p_m(\mathbf{x}_1) := x_{11}^m + \cdots + x_{1n}^m$. Une base homogène pour $\mathcal{M}_{p_m}$ est donnée par l'ensemble :

$$\mathcal{B} = \{\, p_{\mathbf{b}}(X) \;:\; \mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\ell},\ |\mathbf{b}| = m\} \bigcup \{X_j^{\mathbf{a}} \;:\; 1 \leq j \leq n,\ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\ell},\ 0 \leq |\mathbf{a}| < m\},$$

Démonstration. On utilise le lemme 2.1.1. Voyons que si $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\ell}$ est tel que $|\mathbf{b}| = m$ alors, $p_{\mathbf{b}}(X) = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{b_1} \dots x_{\ell j}^{b_\ell} \in \mathcal{M}_f$, car $p_{\mathbf{b}}(X) = E^{\mathbf{b}}(p_m(\mathbf{x}_1)) = E^{\mathbf{b}}(f)$, c'est-à-dire,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{b_1} \dots x_{\ell j}^{b_\ell} = \frac{b_1!}{m!} \left(E_{\ell,1}^{b_\ell} \circ \dots \circ E_{2,1}^{b_2}\right)(f).$$

Pour les monômes de la deuxième partie de la base, on sait que $f = x_{11}^m + \dots + x_{1n}^m$ appartient à $\mathcal{M}_f$ et donc, n'importe quel monôme $x_{1,j}^k \in \mathcal{M}_f$ pour tout $0 \leq k < m$ (on utilise l'axiome (iii)), et donc tout monôme de la forme $x_{1j}^{a_1} \dots x_{\ell j}^{a_\ell}$ tel que $a_1 + \dots + a_\ell < m$ sera dans $\mathcal{M}_f$, parce que si on appelle $k = a_1 + \dots + a_\ell$, alors (voir, [19] p.149) :

$$X_j^{\mathbf{a}} = x_{1j}^{a_1} \dots x_{\ell j}^{a_\ell} = \frac{a_1!}{k!} \left(E_{\ell,1}^{a_\ell} \circ \dots \circ E_{2,1}^{a_2}\right)\left(x_{1j}^k\right) \in \mathcal{M}_f.$$

ceci implique

$$\mathcal{B} = \{p_{\mathbf{b}}(X) \;:\; \mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\ell},\ |\mathbf{b}| = m\} \bigcup \{X_j^{\mathbf{a}} \;:\; 1 \leq j \leq n,\ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\ell},\ 0 \leq |\mathbf{a}| \leq m-1\} \subseteq \mathcal{M}_f.$$

On voit que $\mathcal{M}_f \subseteq \mathbb{K}[\mathcal{B}]$, car $\mathbb{K}[\mathcal{B}]$ est fermé par dérivation et polarisation et contient le polynôme $f = p_m(\mathbf{x}_1)$. Tous les polynômes dans $\mathcal{B}$ ont multi-degré différent, donc $\mathcal{B}$ est linéairement independant. □

Corollaire 2.3.2. Une base pour chaque composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_f$ est donnée par la règle suivante :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{d}} := \begin{cases} \{\, p_{\mathbf{d}}(X)\} & \text{si } |\mathbf{d}| = m, \\ \{X_j^{\mathbf{d}} \;:\; 1 \leq j \leq n\} & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| < m. \end{cases}$$

Lemme 2.3.4. Pour $f(\mathbf{x}_1) = p_m(\mathbf{x}_1)$. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{M}_f$ alors, pour chaque entier positif

m, on a que le caractère multigradué de $\mathcal{V}$ est donné par :

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ ou } |\mathbf{d}| = m, \\ |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } 0 < |\mathbf{d}| < m. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$. On a trois cas :

1. Si $|\mathbf{d}| = m$ alors la base $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ est formée par un seul polynôme diagonalement symétrique et comme dans la preuve du lemme 2.3.1 on obtient $\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = 1$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
2. Si $0 \leq |\mathbf{d}| < m$ alors $X^{\mathbf{d}}_{\sigma(j)}\Big|_{X^{\mathbf{d}}_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} X^{\mathbf{d}}_{\sigma(j)}\Big|_{X^{\mathbf{d}}_j} = |\mathrm{Fix}(\sigma)| = \chi^{(n)}(\sigma) + \chi^{(n-1,1)}(\sigma).$$

□

Calcul de $\mathcal{M}_{p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$

Soit $f(\mathbf{x}_1) = p_m(\mathbf{x}_1) := x_{11}^m + \cdots + x_{1n}^m$ et $n \geq 2$. Alors, la série de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_{p_m}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{m} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{m-1} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}), \quad n \geq 2.$$

En effet, par le Lemme 2.3.3 une base de l'espace $\mathcal{M}_f$ est donnée par la règle suivante :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{d}} := \begin{cases} \{p_{\mathbf{d}}(X)\} & \text{si } |\mathbf{d}| = m, \\ \{X^{\mathbf{d}}_j \,:\, 1 \leq j \leq n\} & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| < m. \end{cases}$$

on a, donc que la série de Hilbert est :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = \sum_{|\mathbf{d}|=m} \mathbf{q}^{\mathbf{d}} + \sum_{0<|\mathbf{d}|<m} n \cdot \mathbf{q}^{\mathbf{d}} + 1 = h_m(\mathbf{q}) + n \cdot \sum_{j=1}^{m-1} h_j(\mathbf{q}) + 1.$$

et pour la série de Frobenius, on utilise Lemme 2.3.3 et le Lemme 2.3.4 comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) &:= \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi_{\nu_{\mathbf{d}}}(\sigma)p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right)\mathbf{q}^{\mathbf{d}}\\
&= \left(1+\sum_{|\mathbf{d}|=m}\mathbf{q}^{\mathbf{d}}\right)\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right)+\sum_{0<|\mathbf{d}|<m}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|\mathrm{Fix}(\sigma)|\,p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})\right)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{m}h_j(\mathbf{q})\right)\cdot s_n(\mathbf{w})+\left(\sum_{j=1}^{m-1}h_j(\mathbf{q})\right)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Comme conséquence du lemme 2.1.1 on obtient que pour tout vecteur $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}|=m$ on a l'égalité :

$$\mathcal{M}_{p_m}=\mathcal{M}_{p_{\mathbf{d}}}.$$

Ceci implique le résultat suivant :

Corollaire 2.3.3. Soit $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}|=m$. On a que

$$\mathcal{M}_{p_{\mathbf{d}}}(\mathbf{q}) = 1+n\cdot h_1(\mathbf{q})+n\cdot h_2(\mathbf{q})+\cdots+n\cdot h_{m-1}(\mathbf{q})+h_m(\mathbf{q}),$$

pour n'importe quel $\ell\geq 1$.

Le module engendré par polynôme $e_m(\mathbf{x})$

Le but de cette partie est de démontrer que la série de Frobenius de l'espace associé au polynôme symétrique élémentaire $e_m(\mathbf{x}_1)$ et ses ℓ-polarisations (ℓ quelconque) nous donne

$$\mathcal{M}_{e_m}(\mathbf{q},\mathbf{w})=\sum_{i=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left(\sum_{j=i}^{m-i}s_j(\mathbf{q})\right)s_{n-i,i}(\mathbf{w}),\ \text{pour tout } m\geq 1.$$

Par lemme 2.1.1 on a, pour tout $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}|=m$, l'égalité :

$$\mathcal{M}_{e_{\mathbf{d}}}=\mathcal{M}_{e_m}.$$

Lemme 2.3.5. Pour toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ les polynômes $e_i(Y)$ satisfont l'identité :

$$\sigma\cdot e_i(Y)=e_i(\sigma(Y)).$$

Le lemme 2.3.5 est un cas particulier du prochain lemme 2.3.6, on donne donc seulement la preuve de celui.

Lemme 2.3.6. Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ les polynômes $e_{\mathbf{d}}(Y)$ satisfont l'identité suivante :

$$\sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(Y) = e_{\mathbf{d}}\big(\sigma(Y)\big). \tag{2.27}$$

Démonstration. Comme σ est injective on a que $\sigma : B \longrightarrow \sigma(B)$ est bijective et donc, $|B| = |\sigma(B)|$

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(Y) &= \sum_{\{B\subseteq Y \mid |B|=|\mathbf{d}|\}} \; \sum_{\{f:B\to[\ell] \mid |f^{-1}(i)|=d_i,\, \forall i\in[\ell]\}} \; \prod_{b\in B} x_{f(b),\sigma(b)} \\
&= \sum_{\{\sigma(B)\subseteq\sigma(Y) \mid |\sigma(B)|=|B|=|\mathbf{d}|\}} \; \sum_{\{f:B\to[\ell] \mid |f^{-1}(i)|=d_i,\, \forall i\in[\ell]\}} \; \prod_{c\in\sigma(B)} x_{f(\sigma^{-1}(c)),c} \\
&= \sum_{\{\sigma(B)\subseteq\sigma(Y) \mid |\sigma(B)|=|B|=|\mathbf{d}|\}} \; \sum_{\{g:\sigma(B)\to[\ell] \mid |g^{-1}(i)|=d_i,\, \forall i\in[\ell]\}} \; \prod_{c\in\sigma(B)} x_{g(c),c} = e_{\mathbf{d}}(\sigma(Y)).
\end{aligned}$$

la dernière égalité est vraie, car on fait le changement de variables $g = f \circ \sigma^{-1}$ et on a que $d_i = |f^{-1}(i)| = |\sigma(f^{-1}(i))| = |g^{-1}(i)|$. □

Lemme 2.3.7. Soient m et n deux entiers positifs tels que $n \geq m$. Soit $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour chaque entier i tel que $0 \leq i \leq m$, on définit, le sous-espace vectoriel V_i de $\mathcal{R}_n$ par :

$$V_i := \mathbb{K}\big[e_i\,(X\backslash T) \mid T \subseteq X,\ |T| + i = m\big],$$

c'est-à-dire, V_i c'est $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les polynômes $e_i\,(X\backslash T)$ tels que $T \subseteq X$ et $|T| + i = m$. Alors, pour chaque entier i une base linéaire $\mathcal{B}_i$ pour l'espace vectoriel V_i est donnée par la règle suivante :

1. Si $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, alors :

$$\mathcal{B}_i = \big\{e_i(X\backslash S) \mid S \subseteq X,\ |S| + i = n\big\},$$

2. Si $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < i \leq m$, alors :

$$\mathcal{B}_i = \big\{e_i(X\backslash T) \mid T \subseteq X,\ |T| + i = m\big\},$$

en particulier,

$$\dim(V_i) = \begin{cases} \binom{n}{i} & \text{si } 0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \\ \binom{n}{m-i} & \text{si } \lfloor \frac{m}{2} \rfloor < i \leq m. \end{cases}$$

on a aussi, $\dim(V_i) = \dim(V_{m-i})$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq m$

Démonstration. **Premier cas :** On remarque d'abord que l'ensemble suivant

$$\{e_i(X \backslash S) \mid S \subseteq X, \ |S| + i = n\},$$

est linéairement indépendant, car il est formé par des monômes distincts. Il reste à montrer deux propriétés :

(P1) Si $0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ alors $\{e_i(X \backslash S) \mid S \subseteq X, \ |S| + i = n\} \subseteq V_i$,

(P2) $\{e_i(X \backslash S) \mid S \subseteq X, \ |S| + i = n\}$ est un ensemble de générateurs pour V_i.

Alors, pour chaque entier positif i tel que $0 \leq 2i \leq m$ et tout sous-ensemble T tel que $|T| = m - i$ on a :

$$e_i(X \backslash T) := \sum_{\{B:\ B \subseteq X \backslash T,\ |B| = i\}} e_i(B) = \sum_{\{S:\ T \subseteq S,\ |S| = n-i\}} e_i(X \backslash S),$$

on a montré donc la condition (P2) puisque :

$$e_i(X \backslash T) = \sum_{\{S:\ T \subseteq S,\ |S| = n-i\}} e_i(X \backslash S).$$

Pour montrer la condition (P1) on écrit : Soit T tel que $|T| = m - i$

$$e_i(X \backslash T) = \sum_{\{S \subseteq X\,:\, |S| = n-i\}} \beta_{X \backslash T, X \backslash S} \cdot e_i(X \backslash S)$$

où β est la matrice de format $\binom{n}{m-i} \times \binom{n}{i}$ définie par :

$$\beta_{X \backslash T, X \backslash S} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } X \backslash S \subseteq X \backslash T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \alpha_{X \backslash S, X \backslash T}$$

et indexée par sous-ensembles de X de cardinalité $n - m + i$ pour les lignes et par sous-ensembles de X de cardinalité $n-i$ pour les colonnes. Ici $|T| = m-i$, $|S| = n-i$, $|T| \leq |S|$. Comme on a les conditions suivantes :

$$|X\backslash T|+|X\backslash S| = n-(m-i)+(n-(n-i)) = n-m+i+i = n-m+2i \leq n, \text{ car } 0 \leq 2i \leq m,$$

$$|X\backslash S| \leq |X\backslash T| \text{ car } i \leq n-m+i \text{ car } m \leq n,$$

on a donc (voir [26] p.222.) :

(i) La matrice $\alpha_{P,Q}$

$$\alpha_{P,Q} = \begin{cases} 1 & P \subseteq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

indexée par des sous-ensembles P de X de cardinalité i pour les lignes et par des sous-ensembles Q de X de cardinalité $n-m+i$ pour les colonnes est de plein rang.

(ii) La matrice $\beta_{Q,P} = \alpha^t_{P,Q}$, c'est-à-dire :

$$\beta_{P,Q} = \begin{cases} 1 & P \supseteq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est de rang plein (voir [26] p.222.).

Alors, comme $\beta_{Q,P}$ est de rang plein et par l'unimodalité des coefficients binomiaux on a

$$\text{rang}(\beta) = \binom{n}{i} \leq \binom{n}{m-i}$$

alors, on sait qu'il existe une matrice de format $\binom{n}{i} \times \binom{n}{m-i}$ telle que :

$$\gamma\beta = I_{\binom{n}{i},\binom{n}{i}}$$

c'est-à-dire, pour chaque sous-ensemble S de cardinalité $n-i$ on a que :

$$e_i(X\backslash S) = \sum_{\{T:\ |T|=m-i\}} \gamma_{X\backslash S, X\backslash T} \cdot e_i(X\backslash T).$$

alors, on a montré la condition (P1).

Deuxième cas : Supposons que $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq i \leq m$. Il faut montrer seulement que l'ensemble suivant :

$$\left\{e_i(X\backslash T) \mid T \subseteq X,\ |T| + i = m\right\}$$

est linéairement indépendant si $m \leq 2i$ car par définition celui-ci est un ensemble de générateurs de V_i. En effet, supposons que $m \leq 2i$ alors, on va montrer la condition suivante :

$$\sum_{\left\{T:\ |T|=m-i\right\}} \lambda_T \cdot e_i(X\backslash T) = \mathbf{0}(\mathbf{x}),\quad \text{implique } \lambda_T = 0, \text{ pour tout } T \text{ tel que } |T| + i = m,$$

En effet, par définition, $e_i(X\backslash T) = \displaystyle\sum_{\left\{B:\ B\subseteq X\backslash T,\ |B|=i\right\}} \prod_{b\in B} b$, alors,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{\left\{T:\ |T|=m-i\right\}} \lambda_T \cdot \left(\sum_{\left\{B:\ B\subseteq X\backslash T,\ |B|=i\right\}} \prod_{b\in B} b \right) \\
&= \sum_{\left\{T:\ |T|=m-i\right\}} \sum_{\left\{B:\ B\subseteq X\backslash T,\ |B|=i\right\}} \lambda_T \prod_{b\in B} b \\
&= \sum_{\left\{B:\ |B|=i\right\}} \sum_{\left\{T:T\subseteq X\backslash B,\ |T|=m-i\right\}} \lambda_T \prod_{b\in B} b \\
&= \sum_{\left\{B:\ |B|=i\right\}} \left(\sum_{\left\{T:T\subseteq X\backslash B,\ |T|=m-i\right\}} \lambda_T \right) \prod_{b\in B} b
\end{aligned}$$

on voit que pour tout $B \subseteq X$ le produit $\displaystyle\prod_{b\in B} b$ est un monôme dans $\mathcal{R}_n$ alors, comme tout ensemble de monômes distincts est linéairement indépendant on a que pour tout sous-ensemble B de X :

$$\sum_{\left\{T:T\subseteq X\backslash B,\ |T|=m-i\right\}} \lambda_T = 0,\quad \forall B \subseteq X,$$

Soit $\varepsilon_{P,Q}$ la matrice de format $\binom{n}{i} \times \binom{n}{m-i}$ telle que :

$$\varepsilon_{P,Q} = \begin{cases} 1 & P \supseteq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

indexée par des sous-ensembles P de X de cardinalité $n-i$ pour les lignes et par des sous-ensembles Q de X de cardinalité $m-i$ pour les colonnes. Alors, on a que :

$$\sum_{\{T:\ |T|=m-i\}} \varepsilon_{X\backslash B,T} \cdot \lambda_T = 0, \quad \forall B \subseteq X,$$

La matrice $\varepsilon_{P,Q}$ est de rang plein, car elle est la transposée de la matrice de rang plein $\delta_{Q,P}$ indexée par des sous-ensembles P de X de cardinalité $n-i$ pour les lignes et par des sous-ensembles Q de X de cardinalité $m-i$ pour les colonnes et telle que :

$$\delta_{Q,P} = \begin{cases} 1 & \text{si } Q \subseteq P, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice $\delta_{Q,P}$ est de rang plein puisque (voir [26] p.222.) :

(i) $|Q| \leq |P|$ car $m-i \leq n-i$ car $m \leq n$,

(ii) $|Q| + |P| \leq n$ car $(n-i)+(m-i) \leq n$ car $m \leq 2i$.

Alors, comme la matrice $\varepsilon_{P,Q}$ de format $\binom{n}{i} \times \binom{n}{m-i}$ est de rang plein et $m \leq 2i$ on a que :

$$\text{rang}(\varepsilon) = \binom{n}{m-i} \leq \binom{n}{i},$$

car on a utilisé l'unimodalité des coefficients binomiaux. On voit donc que $\lambda_T = 0$, pour tout sous-ensemble T de X tel que $|T| = m-i$. Alors, l'ensemble des polynômes $e_i(X\backslash T)$ avec T un sous-ensemble de X dont $|T| = m-i$ est linéairement indépendant. On peut montrer que si $i+j=m$ alors $\dim(V_i) = \dim(V_j)$ soit directement ou soit avec l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & V_i & \longrightarrow & V_j \\ & e_i(S) & \longmapsto & e_j(X\backslash S) \end{array}$$

il faut noter que $\varphi(V_i) = V_{m-i}$ pour tout i. □

comme conséquence du lemme 2.1.1 on a les deux lemmes suivants

Lemme 2.3.8. Soit $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| = m$ on a :

$$e_{\mathbf{d}}(Y) = \frac{m!}{\mathbf{d}!} E^{\mathbf{d}}\big(e_m(Y)\big).$$

Soit $\mathrm{Col}(X) := \{X_1, \ldots, X_n\}$ l'ensemble de toutes les colonnes de la matrice des indéterminés $X = (x_{ij})$ de taille $\ell \times n$. Pour $T \subseteq \mathrm{Col}(X)$ on note par $X \backslash T$ la matrice obtenue en supprimant les colonnes de X qui appartient à T.

Lemme 2.3.9. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ et $S \subseteq \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}\}$ tel que $|S| + |\mathbf{d}| = m$. Alors,

$$e_{\mathbf{d}}\,(X \backslash T) = \frac{m!}{\mathbf{d}!} E^{\mathbf{d}} \partial_S\big(e_m(\mathbf{x}_1)\big),$$

où $T = \{X_j \,:\, x_{1j} \in S\} \subseteq \mathrm{Col}(X)$, et ∂_S est l'opérateur différentiel obtenu en prenant itérativement les dérivées partielles (une fois) du polynôme $e_m(\mathbf{x}_1)$ par rapport à chaque variable dans l'ensemble S (voir la formule 1.27).

Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \leq |d| \leq m$, on définit le sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$ donné par :

$$V_{\mathbf{d}} := \mathbb{K}\big[\, e_{\mathbf{d}}\,(X \backslash T) \;\big|\; T \subseteq \mathrm{Col}(X),\ |T| + |\mathbf{d}| = m \,\big], \tag{2.28}$$

ce sous-espace est la composante homogene du module de polarisaiton $\mathcal{M}_{e_m}$. À partir de la définition donnée par la formule (2.28) on peut démontrer (comme conséquence des lemmes 2.1.1 et 2.1.2) le propriétés suivantes :

Lemme 2.3.10. Soient $m \in \mathbb{N}^+$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^\ell$, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^\ell$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ avec $|\mathbf{d}| = m$. On a les propriétés suivantes :

1. $V_{\mathbf{d}} = E^{\mathbf{d}}\left(V_{(m,0,\ldots,0)}\right)$,
2. $V_{(m,0,\ldots,0)} = E_{\mathbf{d}}\,(V_{\mathbf{d}})$.
3. $\dim\,(V_{\mathbf{d}}) = \dim\left(V_{(m,0,\ldots,0)}\right)$.
4. Si $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ alors, $\dim\,(V_{\mathbf{a}}) = \dim\,(V_{\mathbf{b}})$.
5. Si $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = m$ alors, $\dim\,(V_{\mathbf{a}}) = \dim\,(V_{\mathbf{b}})$.

où $V_{(i,0,0,\ldots)} = V_i := \mathbb{K}\big[e_i\,(X \backslash T) \mid T \subseteq X,\ |T| + i = m\big]$.

Remarque 2.3.1. La démonstration du lemme 2.3.11 suivant est très similaire à celle du Lemme 2.3.7 car la base de chaque composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ dépend seulement sur la valeur de $|\mathbf{d}| = d_1 + \cdots + d_\ell$. Aussi, si on tient en compte le lemme 2.3.10 on peut vérifier que la demonstration du lemme 2.3.7 implique le lemme 2.3.11.

Ceci implique les résultat suivant :

Lemme 2.3.11. Soit $m > 0$ un entier. Soit $f(\mathbf{x}) = e_m(\mathbf{x})$. Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_f$ se décompose en somme directe de sous-espaces homogènes comme suit :

$$\mathcal{M}_{e_m} = \bigoplus_{0 \le |\mathbf{d}| \le m} V_{\mathbf{d}}$$

où la composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ est definie dans la formule (2.28). De plus, pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \le |\mathbf{d}| \le m$ une base homogène $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ de la composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ est donnée par la règle suivante :

1. Si $0 \le |\mathbf{d}| \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, alors :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{d}} = \{e_{\mathbf{d}}(X \backslash T) \mid T \subseteq \mathrm{Col}(X),\ |T| + |\mathbf{d}| = n\},$$

2. Si $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < |\mathbf{d}| \le m$, alors :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{d}} = \{e_{\mathbf{d}}(X \backslash T) \mid T \subseteq \mathrm{Col}(X),\ |T| + |\mathbf{d}| = m\},$$

Alors, on a que :

$$\dim(V_{\mathbf{d}}) = \begin{cases} \dbinom{n}{|\mathbf{d}|} & \text{si } 0 \le |\mathbf{d}| \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \dbinom{n}{m - |\mathbf{d}|} & \text{si } \lfloor \frac{m}{2} \rfloor < |\mathbf{d}| \le m. \end{cases}$$

en particulier, on voit que $\dim(V_{\mathbf{a}}) = \dim(V_{\mathbf{b}})$ si $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = m$.

Calcul de $\mathcal{M}_{e_m}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$

Lemme 2.3.12. Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $0 \le |\mathbf{d}| \le m$ la valeur, du caractère $\chi_{V_{\mathbf{d}}}$ de la composante homogène $V_{\mathbf{d}}$ est donné par la règle suivante :

1. Si $0 \leq |\mathbf{d}| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, alors :

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \sum_{j=0}^{|\mathbf{d}|} \chi^{(n-j,j)}(\sigma),$$

2. Si $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < |\mathbf{d}| \leq m$, alors

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \sum_{j=0}^{m-|\mathbf{d}|} \chi^{(n-j,j)}(\sigma).$$

Démonstration. Par le Lemme 2.3.6 on sait que :

$$\sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(X \backslash T) = e_{\mathbf{d}}(\sigma(X \backslash T)) = e_{\mathbf{d}}\big(X \backslash \sigma(T)\big).$$

car σ est bijective on a $|\sigma(T)| = |T|$ et $\sigma(A) = A \iff \sigma(A^c) = A^c$. Il s'ensuit que pour tout vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ la base du lemme 2.3.11 satisfait la condition suivante :

$$e_{\mathbf{d}}(X \backslash T) \in \mathcal{B}_{\mathbf{d}} \implies \sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(X \backslash T) \in \mathcal{B}_{\mathbf{d}}$$

Ceci implique :

$$\sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)\Big|_{e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)} = e_{\mathbf{d}}\big(\sigma(X \backslash T)\big)\Big|_{e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(T^c) = T^c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

En prenant la somme sur tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ (vrai dans les deux cas) on obtient par la formule 1.36 :

1. Si $0 \leq |\mathbf{d}| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, alors :

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \sum_{|T|+|\mathbf{d}|=n} \sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)\Big|_{e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)} = \sum_{|T^c|=|\mathbf{d}|} \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(T^c) = T^c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$= \big|\{T \subseteq [n] \,:\, |T^c| = |\mathbf{d}|,\ \sigma(T^c) = T^c\}\big| = \sum_{j=0}^{|\mathbf{d}|} \chi^{(n-j,j)}(\sigma),$$

2. Si $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < |\mathbf{d}| \leq m$, alors

$$\chi_{V_{\mathbf{d}}}(\sigma) = \sum_{|T|+|\mathbf{d}|=m} \sigma \cdot e_{\mathbf{d}}(X \backslash T)\Big|_{e_{\mathbf{d}}(X\backslash T)} = \sum_{|T|+|\mathbf{d}|=m} \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(T^c) = T^c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$= \sum_{|T|=m-|\mathbf{d}|} \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(T) = T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \big|\{T \subseteq [n] \,:\, |T| = m - |\mathbf{d}|,\ \sigma(T) = T\}\big|$$

$$= \sum_{j=0}^{m-|\mathbf{d}|} \chi^{(n-j,j)}(\sigma).$$

$\square$

Donc, la caractéristique de Frobenius est donnée par la règle suivante :

$$V_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{|\mathbf{d}|} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m-|\mathbf{d}|} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) & \text{si } \lfloor \frac{m}{2} \rfloor < |\mathbf{d}| \leq m. \end{cases}.$$

En utilisant le Lemme 2.3.12 on montre la troisième partie de la proposition 2.2.1, c'est-à-dire, si $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\ell}$ est tel que $|\mathbf{d}| = m$ alors, la série caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_{e_{\mathbf{d}}}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{e_{\mathbf{d}}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\sum_{j=0}^{i} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) \right) s_i(\mathbf{q}) + \sum_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m-i} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) \right) s_i(\mathbf{q})$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m} s_j(\mathbf{q}) \right) s_n(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\sum_{j=i}^{m-i} s_j(\mathbf{q}) \right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}),\ \forall m > 1$$

La formule ci-haut est universelle, c'est-à-dire, valide pour tout $\ell \geq 1$.

Remarque 2.3.2. Pour $|\mathbf{a}| = 1$, on a $\mathcal{M}_{e_{\mathbf{a}}} = (1 + h_1(\mathbf{q})) \cdot s_n(\mathbf{w})$. Si on fait l'abus de notation $S_{n,0} = S_n$ alors, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\sum_{j=i}^{m-i} s_j(\mathbf{q}) \right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}),\ \text{pour tout } m \geq 1.$$

En utilisant la règle de Pieri (voir la formule 1.4), on montre la propriété suivante :

Remarque 2.3.3. La série de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_{e_m}$ est h-positive pour $\mathbf{q}$ et $\mathbf{w}$ car :

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\sum_{j=0}^{i} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) \right) s_i(\mathbf{q}) + \sum_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m-i} s_{n-j,j}(\mathbf{w}) \right) s_i(\mathbf{q})$$
$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} h_{n-i,i}(\mathbf{w})\, h_i(\mathbf{q}) + \sum_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}^{m} h_{n-m+i,m-i}(\mathbf{w})\, h_i(\mathbf{q}).$$

Corollaire 2.3.4. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\ell}$ tel que $|\mathbf{d}| = m$ et $f = e_{\mathbf{d}}(X)$. Alors, la série de Hilbert de l'espace $\mathcal{M}_{e_{\mathbf{d}}}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{n}{j} h_j(\mathbf{q}) + \sum_{j=0}^{m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1} \binom{n}{j} h_{m-j}(\mathbf{q}),$$
$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{n}{j} h_j(\mathbf{q}) + \sum_{j=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}^{m} \binom{n}{m-j} h_j(\mathbf{q}).$$

Aussi on peut écrire,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\sum_{j=i}^{m-i} h_j(\mathbf{q}) \right) \binom{n+1}{i} \frac{n-2i+1}{n+1}.$$

Les matrices $T_n(x, y, z, w, t)$

Soient x, y, z, w, t trois variables commutatives. Pour chaque entier $n \geq 2$ on définit les matrices $T_n(x, y, z, w, t)$ d'ordre $n \times n$ comme la matrice, dont l'entrée (i, j) est donnée par :

$$T_n(i,j) := \begin{cases} x & \text{si } i = j \text{ et } i < n \text{ et} j < n, \\ y & \text{si } i \neq j \text{ et } i < n \text{ et} j < n, \\ z & \text{si } i = n \text{ et } j < n, \\ w & \text{si } i < n \text{ et } j = n, \\ t & \text{si } i = n \text{ et } j = n \end{cases}$$

Exemple 2.3.1. Lorsque $n = 4$ on a la matrice

$$T_4(x, y, z, w, t) = \begin{bmatrix} x & y & y & w \\ y & x & y & w \\ y & y & x & w \\ z & z & z & t \end{bmatrix}.$$

Lemme 2.3.13. Le déterminant de la matrice $T_n(x, y, z, w, t)$ est donné par la formule suivante :

$$\text{dét}\big(T_n(x, y, z, w, t)\big) = (x - y)^{n-2}\big(t \cdot (x + (n-2)y) - (n-1)wz\big).$$

Aussi, on considère les matrices $H_n(x, y, z)$ d'ordre $n \times (n-1)$ dont l'entrée (i, j) est donnée par :

$$H_n(i, j) := \begin{cases} x & i = j \text{ et } i < n \text{ et } j < n, \\ y & i \neq j \text{ et } i < n \text{ et } j < n, \\ z & i = n \text{ et } j < n. \end{cases}$$

Observons que

$$H_n^t(x, y, z)H_n(x, y, z) = T_{n-1}\big(\alpha_n, \beta_n, \beta_n, \beta_n, \alpha_n\big).$$

où $\alpha_n(x, y, z) := x^2 + (n-2)y^2 + z^2$, $\beta_n(x, y, z) := 2xy + (n-3)y^2 + z^2$. et alors on a le lemme suivant :

Lemme 2.3.14. Le déterminant de la matrice $H_n^t H_n$ est donné par :

$$\text{dét}\big(H_n^t H_n\big) = \text{dét}\big(T_{n-1}\big(\alpha_n, \beta_n, \beta_n, \beta_n, \alpha_n\big)\big) = (x-y)^{2(n-2)}\big((x+(n-2)y)^2 + (n-1)z^2\big).$$

Preuve du théorème 2.2.2

Cette preuve se fait en calculant une base homogène explicite du module de polarisation $\mathcal{M}_f$. Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 2 alors, on écrit f dans la base monomiale

$$f(\mathbf{x}_1) := a \cdot m_2(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{1,1}(\mathbf{x}_1), \text{ avec } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire :

$$f(x_{11},\dots,x_{1n}) = a\cdot\sum_{j=1}^{n} x_{1j}^2 + b\cdot\sum_{1\le p<q\le n} x_{1p}x_{1q},$$

Donc, les vecteurs dans $\mathcal{M}_f$ sont de la forme :

$$\partial_{1j}(f) := \frac{\partial f}{\partial x_{1j}} = 2a\,x_{1j} + b\sum_{r\neq j} x_{1r} = (2a-b)\,x_{1j} + b\sum_{r=1}^{n} x_{1r}$$

$$\begin{aligned} E_{i,1}(f) &= 2a\sum_{s=1}^{n} x_{1s}x_{is} + b\sum_{p\neq q} x_{1p}x_{iq} \\ &= (2a-b)\sum_{s=1}^{n} x_{1s}x_{is} + b\sum_{p,q} x_{1p}x_{iq}, \end{aligned}$$

$$E_{i,1}\partial_{1,j}(f) = (2a-b)\,x_{ij} + b\sum_{r=1}^{n} x_{ir}$$

$$E_{s,1}E_{t,1}(f) = 2a\sum_{j=1}^{n} x_{sj}x_{tj} + b\cdot\sum_{p\neq q} x_{sp}x_{tq} = (2a-b)\sum_{j=1}^{n} x_{sj}x_{tj} + b\sum_{p,q} x_{sp}x_{tq},$$

En particulier, nous avons :

$$E_{1,1}(f) = 2\,f,\quad E_{\alpha,1}E_{\alpha,1}(f) = 2\,f(x_{\alpha 1},\dots,x_{\alpha n}),\quad E_{\alpha,1}^{(2)}(f) = 2\,a\sum_{j=1}^{n} x_{\alpha j} = E_{\alpha,1}E_{1,1}^{(2)}.$$

Remarque 2.3.4. On note par $\mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^\ell$ le vecteur qui a 1 à la position i et 0 dans toutes les autres. Pour chaque couple d'entiers positifs (s,t) tels que $1\le s\le t\le \ell$ on écrit $\mathbf{e}_{s,t}$ pour noter le vecteur $\mathbf{e}_{s,t} = \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_t$. Aussi, on écrit $\mathbf{e}_{p,q,r} := \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_r$.

Les composantes homogènes de l'espace $\mathcal{M}_f$ sont $\mathcal{V}_{\mathbf{0}} = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i} = \mathbb{R}\left[\{E_{i,1}\partial_{1,j}f \,:\, 1\le j\le n\}\bigcup\left\{E_{i,1}^{(2)}(f)\right\}\right]$$

et $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}} := \mathbb{R}\big[E_{s,1}E_{t,1}f\big]$. Plus explicitement, on a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i} = \mathbb{R}\left[\left\{(2a-b)x_{ij} + b.\sum_{r=1}^{n} x_{ir}\,\middle|\, 1\le j\le n\right\}\bigcup\left\{2a\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right\}\right],\ \text{pour tout } i \text{ tel que } 1\le i\le \ell$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}} = \mathbb{R}\left[2a.\sum_{j=1}^{n} x_{sj}x_{tj} + b.\sum_{p\neq q} x_{sp}x_{tq}\right], \quad \text{pour tout } (s,t) \text{ tel que } 1 \leq s \leq t \leq \ell$$

Lemme 2.3.15. Soit $n \geq 2$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 2a$ alors, pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq \ell$ l'ensemble

$$\left\{E_{i,1}\partial_{1j}(f) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1\right\} \bigcup \left\{E_{i,1}^{(2)}(f)\right\}$$

est linéairement indépendant.

Démonstration. Pour la première affirmation, soit $M(a,b,n)$ la matrice de format $n \times n$ du système linéaire suivant (on note par λ_j les inconnues) :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot E_{i,1}\partial_{1j}(f) + \lambda_n \cdot E_{i,1}^{(2)}(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot \left((2a-b)\, x_{ij} + b\sum_{r=1}^{n} x_{ir}\right) + \lambda_n \cdot 2a\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

à savoir :

$$M(a,b,n) := T_n(2a,b,b,2a,2a),$$

on peut démontrer que

$$\text{dét}\left(M(a,b,n)\right) = \text{dét}\left(T_n(2a,b,b,2a,2a)\right) = 2a\,(2a-b)^{n-1},$$

Pour la deuxième affirmation, on calcule le déterminant de la matrice $N(a,b,n)^t N(a,b,n)$ où $N(a,b,n)$ est la matrice d'ordre $n \times (n-1)$ suivante

$$N(a,b,n) := H_n(2a,b,b),$$

est de rang plein lorsque $b \neq 2a$. En effet, si l'on considère la matrice N^tN on trouve que

$$\begin{aligned}&\text{dét}\big(N(a,b,n)^t N(a,b,n)\big) = \text{dét}\big(H_n(2a,b,b)^t H_n(2a,b,b)\big)\\ &= (2a-b)^{2(n-2)}\big((2a+(n-2)b)^2 + (n-1)b^2\big).\end{aligned}$$

Finalement, on remarque que $(2a-b)^{2(n-2)}\big((2a+(n-2)b)^2+(n-1)b^2\big) = 0$ si et seulement si $b = 2a$. $\square$

Dans le lemme ci-bas on décrit la construction d'una base du module de polarisation associe à n'importe quel polynôme symétrique homogène de degré 2.

Lemme 2.3.16. Si $f(\mathbf{x}_1)$ est un polynôme symétrique homogène de degré 2 à n variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}$. Alors, une base homogène du module $\mathcal{M}_f$ est décrite ci-bas :

(i) Supposons que $a \neq 0$

1. **Cas 1 :** Si $b = 2a$, alors $\partial_{1i}(f) = E_{i,1}^{(2)}(f) = 2a \cdot \sum_{r=1}^{n} x_{ir}$ et donc on a les bases de chacune composantes homogènes :

$$\mathcal{B}_0 := \{1\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} := \left\{ \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \right\}, \quad \forall i \text{ tel que } 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s+t}} := \left\{ E_{s,1} E_{t,1}(f) \right\} = \left\{ \sum_{p,q} x_{sp} x_{tq} \right\}, \quad \forall (s,t) \text{ tels que } 1 \leq s \leq \ell,\ 1 \leq t \leq \ell.$$

2. **Cas 2 :** Si $a \neq 0$ et $b \neq 2a$, alors l'ensemble suivant

$$\left\{ E_{i,1} \partial_{1j}(f) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1 \right\} \bigcup \left\{ E_{i1}^{(2)}(f) \right\}$$

est linéairement indépendant, donc la base homogène est décrite comme suit

$$\mathcal{B}_0 := \{1\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} &:= \left\{ E_{i,1} \partial_{1j}(f) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1 \right\} \bigcup \left\{ E_{i1}^{(2)}(f) \right\} \\ &= \left\{ (2a-b) \cdot x_{ij} + b . \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1 \right\} \bigcup \left\{ 2a \cdot \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \right\}, \quad \forall i \ :, \ 1 \leq i \leq \ell, \end{aligned}$$

aussi, on a peut choisir une autre base de la composante $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}$, à savoir :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} := \{ x_{ij} \ : \ 1 \leq j \leq n \},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s+t}} := \left\{ E_{s,1} E_{t,1}(f) \right\}, \quad \forall (s,t) \text{ tels que } 1 \leq s \leq \ell,\ 1 \leq t \leq \ell,$$

$$= \left\{ (2a-b)\sum_{j=1}^{n} x_{sj}x_{tj} + b\sum_{p,q} x_{sp}x_{tq} \right\}.$$

(ii) Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ (donc $b \neq 0$) et $f = b \cdot m_{1,1}(\mathbf{x}_1) = b \cdot e_2(\mathbf{x}_1)$. Dans ce cas la base homogène est

$$\mathcal{B}_0 := \{1\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} := \left\{ E_{i,1}\partial_{1j}(f) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n \right\} = \left\{ \sum_{r \neq j}^{n} x_{ir} \,\middle|\, 1 \leq j \leq n \right\}, \quad \forall i :, \ 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}} := \{E_{s,1}E_{t,1}(f)\}, \ = \left\{ \sum_{p \neq q} x_{sp}x_{tq} \right\}, \forall\, (s,t) \text{ tels que } 1 \leq s \leq \ell, \ 1 \leq t \leq \ell,$$

Démonstration. Immédiate en utilisant le lemme 2.3.15. □

Lemme 2.3.17. Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 2 à n variables $\mathbf{x} = x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$. Le caractère gradué du module $\mathcal{M}_f$ est donné par :

(1) $\chi_{\mathcal{V}_0}(\sigma) = 1$,

(2) $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \begin{cases} |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } b \neq 2a, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$,

(3) $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}}}(\sigma) = 1$.

Démonstration. L'affirmation (1) est évidente. L'affirmation (3) est directe puisque la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}}$ a un seul polynôme diagonalement symétrique, alors

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}}}(\sigma) = 1.$$

Pour l'affirmation (2) on a deux cas :

(i) Si $b = 2a$ la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ a seulement un polynôme diagonalement symétrique et donc,

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = 1, \text{ si } b = 2a,$$

(ii) Si $b \neq 2a$ alors la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ est

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} = \left\{ E_{i,1}\partial_{1j}(f) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1 \right\} \bigcup \left\{ E_{i1}^{(2)}(f) \right\}$$

cette base a n polynômes et dans ce cas on obtient :

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \sum_{g \in \mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}} (\sigma \cdot g)(X)\Big|_g = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \begin{cases} 1 & \sigma(j) = j \text{ et } \sigma(j) < n, \\ 0 & \sigma(j) \neq j \text{ et } \sigma(j) < n, \\ -1 & \sigma(j) = n. \end{cases} = \left|\mathrm{Fix}(\sigma)\right|.$$

$\square$

Calcul de $\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w})$ pour f de degré 2

Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 2 à n variables $\mathbf{x} = x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$. Supposons que $f(\mathbf{x}_1)$ est de la forme $f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_2(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{1,1}(\mathbf{x}_1)$ alors, la caractéristique de Frobenius de $\mathcal{M}_f$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) & \text{si } b = 2a, \\ \big(1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q})\big) \cdot s_n(\mathbf{w}) + s_1(\mathbf{q}) \cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, le cas $b = 2a$ est un cas particulier du Corollaire 2.3. Alors, on peut supposer que $b \neq 2a$. Par le Lemme 2.3.16 on sait que la base homogène est

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} = \left\{ 2a \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \right\} \bigcup \left\{ (2a - b)x_{ij} + b. \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \,\middle|\, 1 \leq j \leq n-1 \right\},$$

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \left|\mathrm{Fix}(\sigma)\right| = \chi^{(n)}(\sigma) + \chi^{(n-1,1)}(\sigma).$$

Aussi, pour chaque couple d'entiers (r, s) avec $1 \leq r, s \leq \ell$ une base pour la composante homogène de degré $\mathbf{e}_{r,s}$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{r,s}} = \left\{ 2a \sum_{j=1}^{n} x_{rj} x_{sj} + b \sum_{1 \leq p < q \leq n} x_{rp} x_{sq}. \right\}$$

pour la composante homogène de degré $\mathbf{e}_{r,s}$ on a :

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{r,s}}}(\sigma) = 1 = \chi^{(n)}(\sigma).$$

Alors, on trouve la série de Frobenius comme suit :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\chi_{\mathcal{V}_\mathbf{d}}(\sigma)\,\mathbf{q}^\mathbf{d}\right)p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{w})$$

Le caractère gradué est

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\ell}\chi_{\mathcal{V}_\mathbf{d}}(\sigma)\,\mathbf{q}^\mathbf{d} &= 1+\sum_{|\mathbf{d}|=1}\chi_{\mathcal{V}_\mathbf{d}}(\sigma)\,\mathbf{q}^\mathbf{d}+\sum_{|\mathbf{d}|=2}\chi_{\mathcal{V}_\mathbf{d}}(\sigma)\,\mathbf{q}^\mathbf{d}\\ &= 1+\sum_{|\mathbf{d}|=1}\left(\chi^{(n)}(\sigma)+\chi^{(n-1,1)}(\sigma)\right)\mathbf{q}^\mathbf{d}+\sum_{|\mathbf{d}|=2}\chi^{(n)}(\sigma)\,\mathbf{q}^\mathbf{d}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= s_n(\mathbf{w})+s_1(\mathbf{q})\cdot\big(s_n(\mathbf{w})+s_{n-1,1}(\mathbf{w})\big)+s_2(\mathbf{q})\cdot s_n(\mathbf{w})\\ &= \big(1+s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w})+s_1(\mathbf{q})\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.5. Si f est un polynôme symétrique homogène. La série de Hilbert du module de polarization $\mathcal{M}_f$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1+s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q}), & \text{si } b=2a,\\ 1+n\cdot s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q}), & \text{sinon.}\end{cases}$$

on a donc, que la dimension de $\mathcal{M}_f$ est donnée par la formule :

$$\dim(\mathcal{M}_f) = \begin{cases} 1+\ell+\binom{\ell+1}{2} = \binom{\ell+2}{2} & \text{si } b=2a,\\ 1+n\ell+\binom{\ell+1}{2} & \text{si } b\neq 2a.\end{cases}$$

Les polynômes P_n, Q_n et R_n

On introduit les polynômes auxiliaires suivants qui dépendent du nombre de variables n dans le vecteur $\mathbf{x}_1 := (x_{11},\ldots,x_{1n})$. Les polynômes P_n, Q_n et R_n à trois variables

a, b, c sont définies par :

$$P_n(a,b,c) := 12 \cdot ab + 6(n-2) \cdot ac - 4(n-1) \cdot b^2,$$

$$Q_n(a,b,c) := 9 \cdot a^2 - 6 \cdot ab + (4n-7) \cdot b^2 - 4(n-2) \cdot bc + (n-2) \cdot c^2,$$

$$R_n(a,b,c) := 9 \cdot a^2 + 6(n-1) \cdot ab + (n-1)(n+7) \cdot b^2 + 4(n-1)(n-2) \cdot bc + (n-2)\binom{n-1}{2} \cdot c^2.$$

$$\begin{aligned} A_n(a,b,c) &:= 81 \cdot a^4 - 54 \cdot a^3 b + \left(18\,n^2 + 18\,n - 63\right) \cdot a^2 b^2 + 18\,(n-2)\left(n^2 - 2\,n - 1\right) \cdot a^2 bc \\ &+ \frac{9}{2} \cdot n\,(n-2)\left(n^2 - 4\,n + 5\right) \cdot a^2 c^2 - 12\,(n-1)\left(n^2 - 2\,n + 2\right) \cdot ab^3 - 12\,(n-1)^2 \binom{n-1}{2} \cdot ab^2 c \\ &+ 2\,(n-1)\left(n^3 - 3\,n^2 + 7\,n - 8\right) \cdot b^4 - 8\,(n-2)\,(n-1) \cdot b^3 c + 2\,(n-2)\,(n-1) \cdot b^2 c^2. \end{aligned}$$

on explique des propriétés importantes de ces polynômes dans le but de démontrer le théorème 2.2.4

Lemme 2.3.18. Soit $n \geq 3$. Le seul point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ qui satisfait $Q_n(a,b,c) = 0$ est $[a : b : c] = [1 : 3 : 6]$.

Démonstration. On utilise la complétion des carrés pour vérifier que :

$$9\,a^2 - 6\,ab + (4\,n-7)\,b^2 + (-4\,n+8)\,bc + (n-2)\,c^2 = (n-2)\,(-2\,b+c)^2 + 9\,\left(a - \frac{b}{3}\right)^2,$$

Donc, $Q_n(a,b,c) = (n-2)\,(-2\,b+c)^2 + 9\,\left(a - \frac{b}{3}\right)^2 = 0$ si et seulement si $c = 2b$ et $b = 3a$ (car $n \geq 3$ et on travaille dans $\mathbb{R}$). Alors, $b = 3a$ et $c = 6a$, c'est-à-dire, $[a : b : c] = [a : 3a : 6a] = [1 : 3 : 6]$. $\square$

Remarque 2.3.5. On remarque que pour tout $n \geq 3$ le point $[a : b : c] = [1 : 3 : 6]$ est aussi une racine de $P_n(a,b,c)$.

Lemme 2.3.19. Les racines du polynôme $R_n(a,b,c)$ sont données par le point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ tel que :

$$a = k \cdot (n-1)\binom{n-1}{2}, \quad b = k \cdot (-3)\binom{n-1}{2}, \quad c = k \cdot 6(n-1),$$

pour tout $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Démonstration. On procède par complétion de carrés :

$$\begin{aligned}
&R_n(a,b,c)\\
&= 9\cdot a^2 + 6(n-1)\cdot ab + (n-1)(n+7)\cdot b^2 + 4(n-1)(n-2)\cdot bc + (n-2)\binom{n-1}{2}\cdot c^2\\
&= (n-2)\binom{n-1}{2}\left(c + 2\,\frac{(n-1)\,b}{\binom{n-1}{2}}\right)^2 + 9\left(a + \frac{(n-1)b}{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

alors, $a = \dfrac{-(n-1)b}{3}$, $c = -\dfrac{2(n-1)b}{\binom{n-1}{2}}$, pour tout $b \neq 0$. On peut écrire b sous la forme $b = -3\binom{n-1}{2}\cdot k$ et on obtient immédiatement le résultat. □

Lemme 2.3.20. Soit $n \geq 3$. Les racines du polynôme $R_n(a,b,c)$ ne sont pas de racines du polynôme $A_n(a,b,c)$.

Démonstration. Par le lemme 2.3.19 on sait qu'il faut juste calculer la valeur du polynôme A_n au point. En effet, l'expression suivante est positive pour $k \neq 0$ et $n \geq 2$:

$$A\left(k(n-1)\binom{n-1}{2}, -3k\binom{n-1}{2}, 6k(n-1)\right) = \frac{81\,n^2k^4\,(n+2)\,(n+1)\,(n-2)^3\,(n-1)^5}{16}.$$

□

Les matrices F_n

Pour $n \geq 3$, soit F_n la matrice de format $\binom{n}{2} \times n$ dont les lignes sont les permutations distinctes du vecteur $(2b, 2b, c, \ldots, c) \in \mathbb{R}^n$. Par exemple,

$$F_3 := \begin{bmatrix} 2b & 2b & c \\ 2b & c & 2b \\ c & 2b & 2b \end{bmatrix}, \quad F_4 := \begin{bmatrix} 2b & 2b & c & c \\ 2b & c & 2b & c \\ 2b & c & c & 2b \\ c & 2b & 2b & c \\ c & 2b & c & 2b \\ c & c & 2b & 2b \end{bmatrix}.$$

Les matrices E_n

Pour $n \geq 2$, soit E_n la matrice de format $\binom{n+1}{2} \times (n+1)$ dont les entrées sont définies par la fonction suivante :

$$E_n(i,j) = \begin{cases} 3a & i = j \text{ et } 1 \leq i \leq n, \\ b & i \neq j \text{ et } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j < n+1, \\ 6a & 1 \leq i \leq n \text{ et } j = n+1, \\ 4b & n < i \text{ et } j = n+1, \\ F_n(i-n, j) & n < i \text{ et } 1 \leq j < n. \end{cases}.$$

$$E_3 := \begin{bmatrix} 3a & b & b & 6a \\ b & 3a & b & 6a \\ b & b & 3a & 6a \\ 2b & 2b & c & 4b \\ 2b & c & 2b & 4b \\ c & 2b & 2b & 4b \end{bmatrix}.$$

Dans les prochaines lignes on va démontrer que si $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ est tel que

$$[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6]$$

alors, la matrice E_n le **rang minimal** de la matrice E_n est n. Ceci est équivalent au théorème 2.2.4.

Les matrices D_n

On définit les matrices D_n comme la matrice obtenue en effaçant la dernière colonne de la matrice E_n. Donc, pour chaque n le format de la matrice D_n est $\binom{n+1}{2} \times n$. Par exemple,

$$D_3 := \begin{bmatrix} 3a & b & b \\ b & 3a & b \\ b & b & 3a \\ 2b & 2b & c \\ 2b & c & 2b \\ c & 2b & 2b \end{bmatrix}, \quad D_4 := \begin{bmatrix} 3a & b & b & b \\ b & 3a & b & b \\ b & b & 3a & b \\ b & b & b & 3a \\ 2b & 2b & c & c \\ 2b & c & 2b & c \\ 2b & c & c & 2b \\ c & 2b & 2b & c \\ c & 2b & c & 2b \\ c & c & 2b & 2b \end{bmatrix}.$$

Les deux lemmes suivants sont conséquence de la formule du Lemme 2.3.13 puisque les matrices $E_n^t E_n$ et $D_n^t D_n$ sont de la forme T_n.

Lemme 2.3.21. Soient a, b, c trois nombres réels pas tous nuls. Pour chaque entier $n \geq 3$, le déterminant de la matrice $E_n^t E_n$ est donné par :

$$\text{dét}(E_n^t E_n) = \binom{n}{2} P_n(a,b,c)^2 Q_n(a,b,c)^{n-1}.$$

Lemme 2.3.22. Soient a, b, c trois nombres réels pas tous nuls. Pour chaque entier $n \geq 3$, le déterminant de la matrice $D_n^t D_n$ est donné par :

$$\text{dét}(D_n^t D_n) = R_n(a,b,c) Q_n(a,b,c)^{n-1}.$$

Les matrices G_n

Les matrices G_n sont definiés comme la matrice de format $\binom{n+1}{2} \times n$ obtenue en remplaçant la dernière colonne de la matrice D_n par la dernière colonne de la matrice E_n.

Le lemme suivant nous permettra de donner une base du sous-espace engendré par les premières dérivées partielles de f et le polynôme $E_{1,1}^{(2)}(f)$ lorsque f est une n-exception (pour f homogène de degré 3). Pour le démontrer on voit que la matrice $G_n^t G_n$ est de la forme T_n et on a donc,

Lemme 2.3.23. Le déterminant de la matrice $G_n^t G_n$ est

$$\text{dét}\left(G_n^t G_n\right) = A_n(a,b,c) Q_n(a,b,c)^{n-1}.$$

Démonstration du théorème 2.2.4

Soit f un polynôme symétrique, homogène de degré 3, à n variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}$ et tel que $[f] \neq [1 : 3 : 6]$. Alors, on doit vérifier que la dimension du sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble $\left\{\partial_{11} f, \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\right\}$ est au moins n. Supposons que $[f] = [a : b : c]$.

On a deux cas :

1. Si $D_n(a,b,c)$ est de rang plein alors l'ensemble $\left\{\partial_{11} f, \ldots, \partial_{1n}(f)\right\}$ est un sous-ensemble linéairement indépendant de $\{\partial_{11} f, \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\}$ donc la dimension de $\mathbb{R}\left[\partial_{11} f, \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\right]$ est au moins n.

2. Sinon, on utilise le lemme 2.3.22. La matrice $D_n(a,b,c)$ **n'est pas de rang plein** si et seulement si
$$R_n(a,b,c)\, Q_n(a,b,c)^{n-1} = 0.$$
Le lemme 2.3.18 implique que $Q_n(a,b,c) \neq 0$ car $[f] \neq [1 : 3 : 6]$. Alors, $R_n(a,b,c) = 0$. Dans ce cas, on va démontrer qu'une base de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\left\{\partial_{11}(f), \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\right\}$ est l'ensemble (à n éléments) suivant :
$$\left\{\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n-1}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\right\}.$$
En effet, la matrice du système $\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, \partial_{1,j}(f) + \beta\, E_{1,1}^{(2)}(f) = \mathbf{0}$ est équivalente par lignes à la matrice $G_n(a,b,c)$. Finalement, le lemme 2.3.20 nous dit que :
$$R_n(a,b,c) = 0 \implies A_n(a,b,c) \neq 0.$$
Alors, le déterminant de $G_n^t G_n$ est non nul car le lemme 2.3.23 nous dit que
$$\text{dét}(G_n^t G_n) = A_n(a,b,c)\, Q_n(a,b,c)^{n-1} \neq 0.$$

Donc, la dimension de l'espace engendré par l'ensemble suivant

$$\{\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n-1}(f), E^{(2)}_{1,1}(f)\}$$

est exactement n. Ceci implique

$$\dim\left(\mathbb{R}\left[\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n-1}(f), \partial_{1,n}(f), E^{(2)}_{1,1}(f)\right]\right) \geq n$$

Comme $P_n(a,b,c) = 0$ on sait que $a = 0$ implique $b = 0$, pour tout $n \geq 3$ alors, le cas d'un point $[a : b : c]$ tel que $a = 0$ est donc réduit au cas $[a : b : c] = [0 : 0 : 1]$. Dans ce cas, on utilise la base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. □

Démonstration du théorème 2.2.5

Soit $n \geq 3$. Tout d'abord, observons que la matrice du système linéaire suivant

$$\lambda_1\,\partial_{11}(f) + \cdots + \lambda_n\,\partial_{1n}(f) + \mu\,E^{(2)}_{1,1}(f) = \mathbf{0},$$

dont les inconnus sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$ est équivalente par lignes à la matrice $E_n(a,b,c)$. Supposons que le point $[a : b : c]$ est une n-exception alors la dimension du sous-espace réel engendré par les polynômes $\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n}(f), E^{(2)}_{1,1}(f)$ est n (ceci implique que $[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6]$). Alors, la matrice $E_n(a,b,c)$ n'est pas de rang plein (elle a $n+1$ colonnes) et donc $\text{dét}\big(E^t_n(a,b,c)E_n(a,b,c)\big) = P_n(a,b,c)Q_n(a,b,c)^{n-1} = 0$. On rappel que $[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6]$ entraîne $Q_n(a,b,c) \neq 0$. Alors, $P_n(a,b,c) = 0$.

Réciproquement, si $P_n(a,b,c) = 0$ alors $\text{dét}\big(E^t_n(a,b,c)E_n(a,b,c)\big) = 0$. Ceci implique que E_n n'est pas de rang plein et alors le théorème 2.2.4 nous dit que la dimension (sur $\mathbb{R}$) du sous-espace engendré par $\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n}(f), E^{(2)}_{1,1}(f)$ est au moins n. Donc, la dimension maximale est $n+1$ mais la matrice E_n n'est pas de rang plein et alors $\dim\left(\mathbb{R}\left[\partial_{1,1}(f), \ldots, \partial_{1,n}(f), E^{(2)}_{1,1}(f)\right]\right) = n$. □

Preuve du théorème 2.2.3

Comme avant la preuve se fait en calculant une base homogène du module de polarisation $\mathcal{M}_f$. On commence avec un polynôme $f(\mathbf{x}_1)$ symétrique homogène de degré 3 alors on peut l'écrire dans la base (sur le corps $\mathbb{R}$) des fonctions monomiales

$$f(\mathbf{x}_1) = a\, m_3(\mathbf{x}_1) + b\, m_{2,1}(\mathbf{x}_1) + c\, m_{1,1,1}(\mathbf{x}_1),$$

on commence pour écrire explicitement les éléments de l'espace $\mathcal{M}_f$, en effet

$$f(x_{11}, \ldots, x_{1n}) = a \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^3 + b \sum_{p \neq q} x_{1p}^2 x_{1q} + c \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_{1i} x_{1j} x_{1k},$$

$$\begin{aligned}
\partial_{1j}(f) &= 3a\, x_{1j}^2 + b \sum_{p \neq j} x_{1p}^2 + 2b\, x_{1j} \sum_{q \neq j} x_{1q} + c \sum_{\alpha < \beta,\ \alpha \neq j,\ \beta \neq j} x_{1\alpha} x_{1\beta} \\
&= (3a - b)\, x_{1j}^2 + b \sum_{s=1}^{n} x_{1s}^2 + 2b\, x_{1j} \sum_{r=1}^{n} x_{1r} + c \sum_{\alpha < \beta,\ \alpha \neq j,\ \beta \neq j} x_{1\alpha} x_{1\beta} \\
&= (3a - b)\, x_{1j}^2 + b \sum_{s=1}^{n} x_{1s}^2 + (2b - c)\, x_{1j} \sum_{r=1}^{n} x_{1r} + c \sum_{\alpha < \beta,\ \alpha \neq j,\ \beta \neq j} x_{1\alpha} x_{1\beta},
\end{aligned}$$

$$\partial_{1j}^2(f) = 2(3a - b) x_{1j} + 2b \cdot \sum_{s=1}^{n} x_{1s},$$

$$\begin{aligned}
\partial_{1,r} \partial_{1,s}(f) &= 2b\, (x_{1r} + x_{1s}) + c \sum_{j:\ j \neq r,\ j \neq s} x_{1j} \\
&= (2b - c)\, (x_{1r} + x_{1s}) + c \sum_{j=1}^{n} x_{1j}, \text{ avec } r \neq s,
\end{aligned}$$

$$E_{1,1}^{(2)}(f) = 6a \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 + 4\, b \sum_{\alpha < \beta} x_{1\alpha} x_{1\beta},$$

Pour tout $i > 1$ on a

$$E_{i,1}(f) = 3a \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^2 x_{ij} + 2b \sum_{p \neq q} x_{1p} x_{1q} x_{ip} + b \sum_{p \neq q} x_{1p}^2 x_{iq} + c \sum_{\alpha < \beta,\ \gamma \neq \alpha,\ \gamma \neq \beta} x_{1\alpha} x_{1\beta} x_{i\gamma},$$

$$E_{i,1}^{(2)}(f) = 6a \sum_{j=1}^{n} x_{1j}x_{ij} + 2b \sum_{\alpha\neq\beta} x_{1\alpha}x_{i\beta},$$

$$E_{i,1}^{(3)}(f) = 6a \sum_{s=1}^{n} x_{is},$$

$$E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1j}(f) = 2(3a-b)\sum_{j=1}^{n} x_{\alpha j}x_{\beta j}+2b\left(x_{\beta j}\sum_{\alpha\neq j} x_{r\alpha} + x_{\alpha j}\sum_{t\neq j} x_{\beta t}\right)+c \sum_{p\neq q,\ p\neq j,\ q\neq j} x_{\alpha p}x_{\beta q},$$

$$E_{i,1}\partial_{1,j}^{2}(f) = 2(3a-b)\,x_{ij} + 2b\sum_{t=1}^{n} x_{it},$$

$$E_{i,1}\partial_{1,r}\partial_{1s}(f) = 2b\,(x_{ir}+x_{is}) + c \sum_{p:\ p\neq r,\ p\neq s} x_{ip},$$

$$E_{s,1}E_{t,1}E_{1,1}^{(2)}(f) = 6a\sum_{j=1}^{n} x_{sj}x_{tj} + 2b\sum_{\alpha\neq\beta} x_{s\alpha}x_{t\beta}, \text{ avec } r\neq s,$$

$$E_{p,1}E_{q,1}E_{r,1}(f) = 6a\sum_{j=1}^{n} x_{pj}x_{qj}x_{rj} + 2b\sum_{s\neq t} x_{ps}x_{qs}x_{rt} + c\sum_{i<j<k} x_{pi}x_{qj}x_{rk},$$

Dans ce qui suit, on explique les cas qui donnent les bases de chaque composante homogène de $\mathcal{M}_f$. Les lemmes suivants nos font comprendre comme trouver une base de chaque composante homogène. On commence pour décrire les composantes homogènes de l'espace $\mathcal{M}_f$, à savoir

$$\mathcal{V}_0 := \mathbb{R},$$

pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$ on a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i} := \mathbb{R}\left[\{E_{i,1}\partial_{1,j}^2(f) :\ 1\leq j\leq n\} \bigcup \{E_{i,1}\partial_{1,r}\partial_{1,s}(f) :\ 1\leq r<s\leq n\} \bigcup \left\{E_{i,1}^{(3)}f\right\}\right],$$

pour chaque couple (s,t) tel que $1\leq s\leq t\leq \ell$ on a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}} := \mathbb{R}\left[\{E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f) :\ 1\leq j\leq n\}\bigcup\{E_{s,1}E_{t,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\}\right],$$

pour chaque triplet (p,q,r) tel que $1\leq p\leq q\leq r\leq \ell$ on a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{p,q,r}} := \mathbb{R}\big[\{E_{p,1}E_{q,1}E_{r,1}(f)\}\big].$$

Construction d'une base homogène de $\mathcal{M}_f$ lorsque le degré de f est 3

Le lemme suivant nous servira pour donner une règle pour trouver une base homogène du module de polarisation $\mathcal{M}_f$ lorsque f est n'importe quel polynôme symétrique homogène de degré 3.

Lemme 2.3.24. Soit $n \geq 3$ et $f = a \cdot m_3(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{21}(\mathbf{x}_1) + c \cdot m_{111}(\mathbf{x}_1)$. On a les propriétés suivantes :

1. Si $b \neq 3a$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$ l'ensemble de dérivées suivant
$$\{E_{i,1}\partial_{1,j}^2 f \,:\, 1 \leq j \leq n-1\}$$
est linéairement indépendant.

2. Si $a \neq 0$ et $b \neq 3a$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$, l'ensemble suivant
$$\{E_{i,1}\partial_{1,j}^2 f \,:\, 1 \leq j \leq n-1\} \bigcup \{E_{i,1}^{(3)}(f)\}.$$
est linéairement indépendant.

3. Si $a \neq 0$, $b = 3a$ et $c \neq 6a$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$, l'ensemble
$$\{E_{i,1}\partial_{1j}\partial_{11} f \,:\, 1 \leq j \leq n\}$$
est linéairement indépendant.

4. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$, l'ensemble suivant
$$\{E_{i,1}\partial_{1j}^2 f \,:\, 1 \leq j \leq n\}$$
est linéairement indépendant.

5. Si $c \neq 2b$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$, l'ensemble
$$\{E_{i,1}\partial_{1,j}\partial_{1,1} f \,:\, 2 \leq j \leq n\},$$
est linéairement indépendant si $b^2 + c^2 > 0$.

6. Si $b \neq 0$ et $c \neq 2b$ alors, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq \ell$, l'ensemble

$$\{E_{i,1}\partial_{1,j}\partial_{1,1}f \ : \ 1 \leq j \leq n\},$$

est linéairement indépendant.

7. Si $[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6]$ **n'est pas une n-exception** alors, l'ensemble suivant

$$\{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}f \ : \ 1 \leq j \leq n\} \cup \{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\}$$

est linéairement indépendant pour tout couple (α, β) tel que $1 \leq \alpha, \beta \leq \ell$.

8. Si $[a : b : c]$ est une **n-exception** alors on a deux cas :

(a) Si $R_n(a, b, c) \neq 0$ alors l'ensemble suivant :

$$\{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}f \ : \ 1 \leq j \leq n\}$$

est linéairement indépendant.

(b) Si $R_n(a, b, c) = 0$ alors l'ensemble suivant :

$$\{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}f \ : \ 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\}$$

est linéairement indépendant.

Démonstration. On considère seulement les deux dernières affirmations 7 et 8, car la preuve des autres est similaire à la démonstration du théorème 2.2.4 et lemme 2.3.15 en prenant la matrice associée au système linéaire donné par chaque combinaison linéaire. Chacune de ces matrices est la forme T_n. Pour démontrer l'affirmation 7, on remarque que les dérivées partielles d'un polynôme homogène de degré d sont des polynômes homogènes de degré $d-1$. Aussi, l'image par l'opérateur $E_{1,1}^{(2)}$ d'un polynôme homogène est homogène. Alors, on peut utiliser le lemme 2.1.2 pour voir que la combinaison linéaire suivante a seulement la solution triviale. En effet,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}(f) + \mu \, E_{\alpha,1}E_{\beta,1}E_{1,1}^{(2)}(f) = \mathbf{0}$$

on applique de deux côtés l'opérateur de polarisation $E_{1,\beta}E_{1,\alpha}$ et on obtient :

$$4 \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \partial_{1,j}(f) + 4 \cdot \mu E_{1,1}^{(2)}(f) = \mathbf{0},$$

car on a que

$$E_{1,\beta}E_{1,\alpha}\left(E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}(f)\right) = 4 \cdot f,$$
$$E_{1,\beta}E_{1,\alpha}\left(E_{\alpha,1}E_{\beta,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\right) = 4 \cdot E_{1,1}^{(2)}(f).$$

comme $[a : b : c]$ n'est pas une n-exception alors, le théorème 2.2.4 implique que l'ensemble suivant :

$$\{\partial_{11}(f), \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)\}$$

est linéairement indépendant. Alors, $\mu = 0$ et $\lambda_j = 0$ pour tout j. Donc, aussi l'ensemble $\{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}\partial_{1,j}f \,:\, 1 \leq j \leq n\} \cup \{E_{\alpha,1}E_{\beta,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\}$ est linéairement indépendant. Pour démontrer 8 on utilise encore le lemme 2.1.2 et la dernière partie de la preuve du théorème 2.2.4. □

Lemme 2.3.25. Soit $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 3 à n variables. Une base homogène du module $\mathcal{M}_f$ est décrite par la règle suivante :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{0}} := \{1\},$$

<u>**Cas 1 :**</u> Si $[a : b : c] = [1 : 3 : 6]$ on utilise le lemme 2.3.1.

<u>**Cas 2 :**</u> Si $[a : b : c] \neq [1 : 3 : 6]$ on a les deux possibilités suivantes pour avoir une base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ de la composante homogène de degré $\mathbf{e}_i$

1. Si $a = b = 0$ alors, $c \neq 0$ et on utilise le lemme 2.3.7 pour trouver la base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on utilise la base suivante :

$$\{\partial_{1j}^2 f \mid 1 \leq j \leq n\},$$

3. Si $a \neq 0$ et $b \neq 3a$, on utilise la base suivante :

$$\left\{E_{i,1}\partial_{1,j}^2(f)\ :\ 1 \leq j \leq n-1\right\}\bigcup\left\{E_{i,1}^{(3)}(f)\right\},$$

4. Si $a \neq 0$, $b = 3a$ et $c \neq 6a$, on utilise la base

$$\{E_{i,1}\partial_{1j}\partial_{11}f\ :\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Pour avoir une base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}}$ de la composante homogène de degré $\mathbf{e}_{s,t}$ on a les deux cas suivants :

1. Si $[a:b:c]$ est une n-exception on deux cas :

   (a) Si $R_n(a,b,c) \neq 0$ alors on a la base :

   $$\{E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f)\ :\ 1 \leq j \leq n\},$$

   (b) Si $R_n(a,b,c) = 0$ alors on a la base :

   $$\{E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f)\ :\ 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{E_{1,1}^{(2)}(f)\},$$

2. Si $[a:b:c]$ n'est pas une n-exception on a la base :

$$\left\{E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f)\ :\ 1 \leq j \leq n\right\}\bigcup\left\{E_{s,1}E_{t,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\right\},$$

Les deux dernières affirmations ci-haut sont justifiées par la partie (5) du lemme 2.3.24.

Finalement, une base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{p,q,r}}$ de la composante homogène de degré $\mathbf{e}_{p,q,r}$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{p,q,r}} := \{E_{p,1}E_{q,1}E_{r,1}(f)\}.$$

Calcul de $\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w})$ pour f de degré 3

Lemme 2.3.26. Soit f un polynôme symétrique homogène de degré 3 à n variables. Le caractère gradué du module $\mathcal{M}_f$ est donné par :

1. $\chi_{\mathcal{V}_0}(\sigma) = 1,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,$
2. $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \begin{cases} |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } [a:b:c] \neq [1:3:6], \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases},\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

3. $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}}}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } [a:b:c] = [1:3:6], \\ |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } [a:b:c] \text{ est une } n\text{-exception,} \\ 1 + |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } [a:b:c] \text{ n'est pas une } n\text{-exception.} \end{cases} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

4. $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{p,q,r}}}(\sigma) = 1, \ \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$

Démonstration. On fait seulement les affirmations (2) et (3), car les autres sont directes à partir de la définition. Pour vérifier (2) on remarque que le cas $[a:b:c] = [1:3:6]$ est clair par la proposition 2.2.1. On commence donc, par le cas $[a:b:c] \neq [1:3:6]$. On a trois possibilités :

(i) Si $a \neq 0$ et $b \neq 3a$ et puis, on utilise la base de $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}$ du Lemme 2.3.25, à savoir

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} = \left\{ 2(3a-b)\, x_{ij} + 2b \sum_{t=1}^{n} x_{it} \ : \ 1 \leq j \leq n-1 \right\} \bigcup \left\{ 6a \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \right\}$$

alors, comme dans la preuve du lemme 2.3.17, on a que

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \sum_{g \in \mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}} (\sigma \cdot g)(X)\Big|_g = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \begin{cases} 1 & \sigma(j) = j, \ \text{et } \sigma(j) < n, \\ 0 & \sigma(j) \neq j, \ \text{et } \sigma(j) < n, \\ -1 & \sigma(j) = n \end{cases} = |\mathrm{Fix}(\sigma)|.$$

(ii) Si $a = b = 0$ alors $c \neq 0$ et on utilise donc la base du lemme 2.3.1, c'est-à-dire, la base de $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}$ est $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on a donc

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}\Big|_{x_j} = |\mathrm{Fix}(\sigma)|.$$

(iii) Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors, la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ du lemme 2.3.25 est formée par les polynômes

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} := \{ E_{i,1} \partial^2_{1j} f \mid 1 \leq j \leq n \}$$

on montre d'abord que $\sigma \cdot \partial^2_{1j} f = \partial^2_{1,\sigma(j)}(\sigma \cdot f) = \partial^2_{1,\sigma(j)} f$ car f est symétrique. Ensuite, comme les opérateurs de polarisation sont symétriques (commutent avec l'action diagoanle de $\mathfrak{S}_n$) alors on a que les polynômes dans $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ satisfont

$$\sigma \cdot E_{i,1}(\partial^2_{1j} f) = E_{i,2}(\sigma \cdot \partial^2_{1j} f) = E_{i,1}(\partial^2_{1,\sigma(j)} f) \in \mathcal{B}_{\mathbf{e}_i},$$

donc, la valeur du caractère est $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)|$, (aussi, on peut utiliser la formule 1.29)

(iv) Si $a \neq 0$ et $c \neq 6a$ alors, la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i}$ du lemme 2.3.25 est formée par les polynômes

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_i} := \{E_{i,1}\partial_{11}\partial_{1j}f \ : \ 1 \leq j \leq n\},$$

par le lemme 1.29, on sait que la valeur du caractère est $\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_i}}(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)|$.

Pour vérifier (3) on utilise la base $\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}}$ de la composante $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}}$ (voir Lemme 2.3.25), à savoir :

$$\mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}} := \left\{E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f) \ : \ 1 \leq j \leq n\right\} \bigcup \left\{E_{s,1}E_{t,1}E_{1,1}^{(2)}(f)\right\},$$

on doit seulement remarquer deux affirmations qui se découlent des formules 2.14 et 2.13 et le fait que f est symétrique :

(A1) Le polynôme $E_{s,1}E_{t,1}E_{1,1}^{(2)}(f)$ est diagonalement symétrique,

(A2) Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a que

$$\sigma \cdot E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,j}(f) = E_{s,1}E_{t,1}\partial_{1,\sigma(j)}(f) \in \mathcal{B}_{\mathbf{e}_{s,t}}, \quad \text{car } \sigma \cdot f = f,$$

alors, les deux affirmations ci-haut impliquent

$$\chi_{\mathcal{V}_{\mathbf{e}_{s,t}}}(\sigma) = \begin{cases} |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } [a:b:c] \text{ est une } n\text{-exception}, \\ 1 + |\mathrm{Fix}(\sigma)| & \text{si } [a:b:c] \text{ n'est pas une } n\text{-exception}. \end{cases} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

aussi, la dernière identité est conséquence du lemme 1.29. □

Résumé des résultats généraux pour degré 3

En résumé, on a montré que si $f(\mathbf{x}_1)$ un polynôme symétrique homogène de degré 3 à n variables. Supposons que $f(\mathbf{x}_1) = a \cdot m_3(\mathbf{x}_1) + b \cdot m_{21}(\mathbf{x}_1) + c \cdot m_{111}(\mathbf{x}_1)$, alors, la caractéristique de Frobenius de l'espace $\mathcal{M}_f$ nous donnée un de trois cas suivants :

(1) Si $[a:b:c] = [1:3:6]$ alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n) &= \left(1 + s_1(\mathbf{q}) + s_2(\mathbf{q}) + s_3(\mathbf{q})\right) \cdot s_n(\mathbf{w}) \\ &= \mathcal{M}_{p_1^3}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n). \end{aligned}$$

(2) Si $[a:b:c]$ est une n-exception alors

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w},n) &= \big(1+s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})+s_3(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w})+\big(s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w})\\ &= \mathcal{M}_{p_3}(\mathbf{q},\mathbf{w},n).\end{aligned}$$

(3) Si $[a:b:c]$ n'est pas une n-exception, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w}) &= \big(1+s_1(\mathbf{q})+\mathbf{2}\,s_2(\mathbf{q})+s_3(\mathbf{q})\big)\cdot s_n(\mathbf{w})+\big(s_1(\mathbf{q})+s_2(\mathbf{q})\big)\cdot s_{n-1,1}(\mathbf{w})\\ &=\mathcal{M}_{h_3}(\mathbf{q},\mathbf{w},n).\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.6. La série de Hilbert de l'espace $\mathcal{M}_f$ est donnée par un de trois cas suivants

(1) Si $[a:b:c]=[1:3:6]$ alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},n)=1+h_1(\mathbf{q})+h_2(\mathbf{q})+h_3(\mathbf{q})=\mathcal{M}_{p_1^3}(\mathbf{q},n).$$

(2) Si $[a:b:c]$ est une n-exception alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},n)=1+n\cdot h_1(\mathbf{q})+n\cdot h_2(\mathbf{q})+h_3(\mathbf{q})=\mathcal{M}_{p_3}(\mathbf{q},n).$$

(3) Si $[a:b:c]$ n'est pas une n-exception alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q})=1+n\cdot h_1(\mathbf{q})+(n+1)\cdot h_2(\mathbf{q})+h_3(\mathbf{q})=\mathcal{M}_{h_3}(\mathbf{q},n).$$

Finalement, si on écrit chacune des dernières séries en termes de fonctions $h_\lambda(\mathbf{w})$ on trouve que ses coefficients sont tous $h(\mathbf{q})$-positives, on a montré donc, les formules du théorème 2.2.3 :

(1) Si $[a:b:c]=[1:3:6]$ alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w},n)=\big(1+h_1(\mathbf{q})+h_2(\mathbf{q})+h_3(\mathbf{q})\big)\cdot h_n(\mathbf{w}).$$

(2) Si $[a:b:c]$ est une n-exception alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w},n)=\big(1+h_3(\mathbf{q})\big)\cdot h_n(\mathbf{w})+\big(h_1(\mathbf{q})+h_2(\mathbf{q})\big)\cdot h_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

(3) Si $[a:b:c]$ n'est pas une n-exception alors,

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{q},\mathbf{w},n) = \big(1 + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})\big) \cdot h_n(\mathbf{w}) + \big(h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})\big) \cdot h_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

Ceci implique que les dimensions en degré 3 sont données par :

$$\dim(\mathcal{M}_f) = \begin{cases} 1+\ell+\binom{\ell+1}{2}+\binom{\ell+2}{3} = \binom{\ell+3}{3} & \text{if } [a:b:c]=[1:3:6], \\ 1+n\,\ell+n\binom{\ell+1}{2}+\binom{\ell+2}{3} & \text{if } [a:b:c] \text{ is a } n\text{-exception.} \\ 1+n\,\ell+(n+1)\binom{\ell+1}{2}+\binom{\ell+2}{3} & \text{if } [a:b:c] \text{ is not } n\text{-exception} \end{cases}$$

2.4 Autres résultats et problèmes ouverts

Dans cette section, on décrit un possible chemin vers une classification complète des modules de polarisation engendrés par des polynômes symétriques et homogènes de degré 4 et 5. Basés sur des données expérimentales obtenues avec le logiciel de calcul formel Maple, on énonce plusieurs problèmes ouverts sur la description de la caractéristique de Frobenius gradué de ces modules. Les trois premières lignes de chacune des tables de la section 2.4 ont été démontrées dans les sections précédentes. Les autres formules semblent être universelles avec $\ell \leq 3$ et $n \leq 6$. Les corollaires 2.2.2 et 2.2.3 nous amènent à établir les problèmes ouverts suivants :

Problème 2.4.1. La classification donnée par les tables 2.2 et 2.3 est complète, c'est-à-dire, si f est n'importe quel polynôme symétrique et homogène de degré 4 alors, sa caractéristique de Frobenius est une des formules de la table 2.2, et si f est n'importe quel polynôme symétrique et homogène de degré 5 alors, sa caractéristique de Frobenius est une des formules de la table 2.3.

En examinant les tables 2.2 et 2.3 et les résultats obtenus en dree 2 et 3, on est amené à proposer les problèmes suivants :

Problème 2.4.2. Si f est un polynôme diagonalement symétrique et homogène de degré $\mathbf{d}$, tel que ,$|\mathbf{d}| = m$ alors, l'espace $\mathcal{M}_f$ est un $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$ est isomorphe à un sous-module de l'espace associé à la fonction symétrique homogène h_m, c'est-à-dire, il existe un monomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_f \longrightarrow \mathcal{M}_{h_m}$.

Le fait que h_m contient tous les monômes de degré m (par définition), suggère qu'il est raisonnable de croire que la fermeture par dérivation (aussi, par les opérateurs $E_{1,1}^{(p)}$) et polarisation associée au polynôme h_m est la plus riche, parmi ceux obtenus à partir d'une fonction symétrique homogène. Ceci donne indirectement un appui á la conjecture 2.4.2. Les résultats obtenus des tables B.1, B.4 et B.6 de l'appendice B nous permettent de donner les problèmes ouverts suivants :

Problème 2.4.3. Soit f un polynôme symétrique et homogène. La série de Hilbert de l'espace $\mathcal{M}_f$ est h-positive.

Problème 2.4.4. Soit f un polynôme symétrique homogène de degré $d \geq 4$ à n variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}$. Supposons que f n'est pas un multiple scalaire du polynôme $e_1^d(\mathbf{x}_1)$. Alors,

$$\dim\left(\mathbb{R}[\partial_{11} f, \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)} f]\right) \geq n.$$

autrement dit, la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}[x_{11}, \ldots, x_{1n}]$ engendre par les polynômes $\partial_{11}(f), \ldots, \partial_{1n}(f), E_{1,1}^{(2)}(f)$ est au moins n.

Problème 2.4.5. Soit $m_{(2,1^{d-2})}$ la fonction symétrique monomiale indexée par le partage $\mu = (2, 1^{d-2})$. Si $n \geq d$ on a

$$\mathcal{M}_{m_{(2,1^{d-2})}}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \left(1 + s_1(\mathbf{q}) + \mathbf{2} \cdot \sum_{j=2}^{d-1} s_j(\mathbf{q}) + s_d(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w})$$
$$+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1} \left(s_i(\mathbf{q}) + \mathbf{2} \cdot \sum_{j=i+1}^{d-i-1} s_j(\mathbf{q}) + s_{d-i}(\mathbf{q})\right) s_{n-i,i}(\mathbf{w})$$
$$+ \left(\sum_{j=\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}^{d-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(\mathbf{w}).$$

En particulier, la dernière affirmation implique que la série de Hilbert du module de polarisation engendré par le polynôme symétrique monomial $m_{(2,1^{d-2})}$ est :

$$\mathcal{M}_{m_{(2,1^{d-2})}}(\mathbf{q}) = 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \binom{n+1}{j} s_{d-j}(\mathbf{q}) + \sum_{j=1}^{d-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor -1} \binom{n+j-1}{j} s_j(\mathbf{q}).$$

Problème 2.4.6. Le module de polarisation engendré par la fonction symétrique moniale $m_{(2,1^{d-2})}$ est isomorphe (en tant que $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{C})$-module) au module de polarisation engendré par la fonction symétrique $e_{(d-1,1)}$, pour tout degré $d \geq 5$.

Autres résultats et problèmes ouverts pour des familles particulières

On considère d'abord les familles $\mathfrak{S}_n$-stables de polynômes $\mathcal{A} := \{x_{1j}^d \mid 1 \leq j \leq n\}$, $\mathcal{B} := \{x_{1,i}^d - x_{1,j}^d \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ et $\mathcal{C} := \{\prod_{a \in A} x_{1,a} \mid A \subseteq [n],\ |A| = d\}$. Les démonstrations des propositions ci-bas sont très semblables à celle de la formule 2.20 du théorème 2.2.1. On établit les résultats et problèmes ouverts suivants :

Proposition 2.4.1. Une base homogène pour le module de polarisation $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ est l'ensemble suivant :

$$B_\mathcal{A} := \{X_j^\mathbf{d} \ : \ 0 \leq |\mathbf{d}| \leq d,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Pour chaque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| \leq d$, une base pour la composante homogène de multidrgré $\mathbf{d}$ est donné par $B_{\mathcal{A},\mathbf{d}} := \{X_j^\mathbf{d} \ : \ 1 \leq j \leq n\}$.

Proposition 2.4.2. Une base homogène du module de polarisation $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ est l'ensemble suivant :

$$B_\mathcal{B} := \{X_1^\mathbf{d} - X_j^\mathbf{d} \ : \ |\mathbf{d}| = d,\ 2 \leq j \leq n\} \bigcup \{X_j^\mathbf{b} \ : \ 0 \leq |\mathbf{b}| < d,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Dans ce cas, pour chaque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\mathbf{d}| \leq d$, une base pour la composante homogène de multidegré $\mathbf{d}$ est donnée par la règle suivante :

$$B_{\mathcal{B},\mathbf{d}} := \begin{cases} X_1^\mathbf{d} - X_j^\mathbf{d} & \text{si } |\mathbf{d}| = d, \\ X_j^\mathbf{d} & \text{si } 0 \leq |\mathbf{d}| < d. \end{cases}$$

Proposition 2.4.3. La caractéristique de Frobenius graduée des modules de polarisation engendrés par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d-1} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \left(\sum_{j=1}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-1,1}(\mathbf{w}).$$

Corollaire 2.4.1. Les séries de Hilbert des modules de polarisation engendrés par les familles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{q}) = 1 + n \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k(\mathbf{q}),$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{q}) = 1 + n \cdot \sum_{k=1}^{d-1} s_k(\mathbf{q}) + (n-1) \cdot s_d(\mathbf{q}).$$

Problème 2.4.7. La caractéristique de Frobenius graduée du module $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathbf{q},\mathbf{w}) = \left(\sum_{j=0}^{d} s_j(\mathbf{q})\right) s_n(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{j=i}^{\min(d,n-i)} s_j(\mathbf{q})\right) s_{n-i,i}(\mathbf{w}).$$

En particulier, la série de Hilbert du module $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{d} \binom{n}{j} s_j(\mathbf{q}).$$

Problème 2.4.8. Une base homogène pour le module $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est l'ensemble suivant :

$$B_{\mathcal{C}} := \left\{ \sum_{f:A\to[r]} \prod_{j\in A} x_{f(j),j} \;:\; 1 \le r \le \ell, A \subseteq [n],\ |A| \le d \right\}.$$

Pour chaque vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\ell}$, une base pour la composante homogène de multidegré $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell)$ est :

$$B_{\mathcal{C},\mathbf{d}} := \left\{ \sum_{\{f:A\to[r]\,:\,|f^{-1}(i)|=d_i.\}} \prod_{j\in A} x_{f(j),j} \;:\; 1 \le r \le \ell,\ A \subseteq [n],\ |A| \le d \right\}.$$

Problèmes ouverts sur les bornes supérieures pour les multiplicités en degré 2 et 3

Soit $\mathcal{T}_d$ la famille des tous les monômes en degré d (fixe) en les variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}$. Alors, pour n'importe quelle famille F des polynômes homogènes, de degré au plus d, (en les variables $x_{11}, \ldots, x_{1n}$) on a que :

$$\mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{T}_d}. \tag{2.29}$$

En effet, $F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{T}_d}$ et par définition de module de polarisation, on a que $\mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{T}_d}$. Supposons que, $\mathcal{M}_F = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} a_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w})$, et $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_d} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu} b_{\lambda,\mu} s_\mu(\mathbf{q}) s_\lambda(\mathbf{w})$, alors l'inclusion 2.29 implique $0 \leq a_{\lambda,\mu} \leq b_{\lambda,\mu}$, $\forall\, \lambda, \mu$. Lorsque $d = 2$ ou 3, des explorations avec Maple n'ont permis de vérifié les conjectures suivantes jsuqu'à $n = 6$ et $\ell = 3$:

Problème 2.4.9. La caractéristique de Frobenius graduée du module de polarisation $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_2}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}_2}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, n) = \begin{cases} (1 + s_1 + s_2) s_1(\mathbf{w}) & \text{si } n = 1, \\ (1 + s_1 + \mathbf{2}\, s_2) s_2(\mathbf{w}) + (s_1 + s_2) s_{1,1}(\mathbf{w}) & \text{si } n = 2, \\ (1 + s_1 + \mathbf{2}\, s_2) s_3(\mathbf{w}) + (s_1 + \mathbf{2}\, s_2) s_{2,1}(\mathbf{w}) & \text{si } n = 3, \\ (1 + s_1 + \mathbf{2}\, s_2)\, s_n(\mathbf{w}) + (s_1 + \mathbf{2}\, s_2)\, s_{n-1,1}(\mathbf{w}) + s_2 s_{n-2,2}(\mathbf{w}) & \forall n \geq 4. \end{cases}$$

De plus, en degré 3 on a la conjecture suivante qui a été vérifiée jusqu'à $n = 6$ et $\ell = 3$:

Problème 2.4.10. Soit $\mathcal{T}_3$ la famille de tous les monômes de degré 3 en les variables $\mathbf{x}_1$. La caractéristique de Frobenius graduée du module de polarisation $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_3}$ est donée par la table suivante :

$(1+s_1+s_2+s_3)s_1(\mathbf{w})$	$n=1$
$(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+\mathbf{2}\,s_3)s_2(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{1,1}+\mathbf{2}\,s_3)s_{1,1}(\mathbf{w})$	$n=2$
$(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+\mathbf{3}\,s_3)s_3(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}\,s_2+s_{1,1}+\mathbf{3}\,s_3)s_{2,1}(\mathbf{w})$ $+(s_{1,1}+s_3)s_{1,1,1}(\mathbf{w})$	$n=3$
$(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+\mathbf{3}\,s_3)\,s_4(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}\,s_2+s_{1,1}+\mathbf{4}s_3)\,s_{3,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3)s_{2,2}(\mathbf{w})+(s_{1,1}+s_3)s_{2,1,1}(\mathbf{w})$	$n=4$
$(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+\mathbf{3}\,s_3)\,s_5(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}\,s_2+s_{1,1}+\mathbf{4}s_3)\,s_{4,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+\mathbf{2}\,s_3)s_{3,2}(\mathbf{w})+(s_{1,1}+s_3)s_{3,1,1}(\mathbf{w})$	$n=5$
$(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+\mathbf{3}\,s_3)\,s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}\,s_2+s_{1,1}+\mathbf{4}s_3)\,s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+\mathbf{2}\,s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})+(s_{1,1}+s_3)s_{n-2,1,1}(\mathbf{w})+s_3\,s_{n-3,3}(\mathbf{w})$	$\forall\, n\geq 6.$

Tables pour degré 4 et 5

Tableau 2.2: Caractéristiques de Frobenius pour degré 4

$(1+s_1+s_2+s_3+s_4)s_n(\mathbf{w})$	p_1^4
$(1+s_1+s_2+s_3+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	p_4
$(1+s_1+s_2+s_3+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+s_2s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	e_4
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	e_{31}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+s_2s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	s_{211} h_{22} m_{211}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{11}+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	p_{211} e_{211} h_{211}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	h_{31} m_{31} p_{31}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+s_3+s_{21}+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+s_2s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	m_{22}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+s_2s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	s_4 s_{31} s_{22} e_{22} p_{22}

Tableau 2.3: Caractéristiques de Frobenius pour degré 5

$(1+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)s_n(\mathbf{w})$	p_1^5
$(1+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_3+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	p_5
$(1+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_3+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	e_5
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+\mathbf{2}s_4+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	m_{2111} s_{2111} e_{41}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	s_{221}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	m_{41} p_{41}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{3}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	h_5 h_{41} h_{32} h_{221} p_{221} s_{41} s_{32} s_{311} e_{221} m_{311}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{3}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$	p_{32} e_{32} m_{32} m_{221}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2+s_{11}+s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	p_{2111} h_{2111} e_{2111}
$(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$	e_{311} h_{311} p_{311}

Tableau 2.4: Caractéristiques de Frobenius pour l'espace $\mathcal{M}_{h_m}$

h_1	$(1+s_1)s_n(\mathbf{w}),\ \forall n \geq 1$
h_2	$(1+s_1+s_2)s_1(\mathbf{w}),\quad n=1,$ $(1+s_1+s_2)s_n(\mathbf{w})+s_1s_{n-1,1}(\mathbf{w}),\ \forall n\geq 2$
h_3	$(1+s_1+s_2+s_3)s_1(\mathbf{w}),\quad n=1,$ $(1+s_1+\mathbf{2}\,s_2+s_3)s_n(\mathbf{w})+(s_1+s_2)s_{n-1,1}(\mathbf{w}),\quad \forall n\geq 2$
h_4	$(1+s_1+s_2+s_3+s_4)s_1(\mathbf{w}),\quad n=1,$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)\,s_2(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+s_3)s_{1,1}(\mathbf{w}),\quad n=2,$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)\,s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+s_3)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+s_2s_{n-2,2}(\mathbf{w}),\quad \forall n\geq 2$
h_5	$(1+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)s_1(\mathbf{w}),\quad n=1,$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_2+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_2(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4)s_{1,1}(\mathbf{w}),\ n=2$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_3(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{3}s_3+s_{21}+s_4)s_{2,1}(\mathbf{w}),\ n=3$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{2}s_4+s_{31}+s_5)s_n(\mathbf{w})+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{3}s_3+s_{21}+s_4)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3)s_{n-2,2}(\mathbf{w}),\quad \forall n\geq 4$
h_6	$(1+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)s_1(\mathbf{w}),\quad \text{if } n=1,$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{2}s_3+s_{21}+\mathbf{3}s_4+s_{31}+s_{22}+\mathbf{2}s_5+s_{41}+s_6)s_2(\mathbf{w})$ $+(s_1+s_2+s_{11}+\mathbf{2}s_3+s_{21}+s_4+s_{31}+s_5)s_{11}(\mathbf{w})\ ,\ n=2$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{4}s_4+\mathbf{2}s_{31}+s_{22}+\mathbf{2}s_5+s_{41}+s_6)s_3(\mathbf{w})$ $+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{3}s_3+\mathbf{3}s_{21}+\mathbf{3}s_4+s_{31}+s_5)s_{2,1}(\mathbf{w})+(s_{11}+s_3)s_{1,1,1}(\mathbf{w})\ ,\ n=3$ $(1+s_1+\mathbf{2}s_2+\mathbf{3}s_3+s_{21}+\mathbf{4}s_4+\mathbf{2}s_{31}+s_{22}+\mathbf{2}s_5+s_{41}+s_6)s_n(\mathbf{w})$ $+(s_1+\mathbf{2}s_2+s_{11}+\mathbf{4}s_3+\mathbf{3}s_{21}+\mathbf{3}s_4+s_{31}+s_5)s_{n-1,1}(\mathbf{w})$ $+(s_2+s_3+s_{21}+s_4)s_{n-2,2}(\mathbf{w})$ $+(s_{11}+s_3)s_{n-2,1,1}(\mathbf{w}).\quad \forall n\geq 4.$

CONCLUSION

Pour n'importe quel degré $d \geq 1$ on établit une règle pour trouver une base homogène des modules de polarisation engendrés par les polynômes p_1^d, p_d et e_d. On calcule la caractéristique de Frobenius graduée de ces modules de façon globale, et ce indépendamment de ℓ. Cette thèse amorce aussi l'étude d'une classification complète des modules de polarisation engendrés par des polynômes symétriques homogènes selon la décomposition en $\mathfrak{S}_n \times GL_\ell(\mathbb{K})$-modules irréductibles. Encore là, cette classification est faite selon la caractéristique de Frobenius graduée de façon globale, et ce indépendamment de ℓ. Le problème est complètement résolu pour les cas de degré 2 et 3. Les résultats obtenus suggèrent la forme d'une classification générale. De plus, ces formules s'avèrent être des sommes de produits des fonctions complètes homogènes $h_\mu(\mathbf{q})h_\lambda(\mathbf{w})$ à coefficients naturels. Reste le problème de prouver une formule que nous proposons pour la caractéristique de Frobenius graduée du module de polarisation engendré par le polynôme symétrique monomial $m_{(2,1^{d-2})}$, pour $d \geq 4$. Via l'expérimentation par calcul formel nous suggèrons une classification pour les degrés est 4 et 5. Des formules pour la caractéristique de Frobenius graduée on déduit directement celle pour les séries de Hilbert comme polynômes symétriques en les variables q_i. Nos résultats et résultats partiels suggèrent que les expressions résultantes sont $h(\mathbf{q})$-positives.

Tous nos observations, nos résultats, et expérimentation, suggèrent que le module de polarisation associée au polynôme h_m contient une copie des modules de polarisation engendrée par n'importe quelle fonction symétrique homogène de degré m. Il semble donc y avoir une hiérarchie naturelle entre les modules de polarisation associé à diverses fonctions symétriques où on poserait $\mathcal{M}_f < \mathcal{M}_g$ si et seulement si la série de Frobenius $\mathcal{M}_f(\mathbf{q}, \mathbf{w}) - \mathcal{M}_g(\mathbf{q}, \mathbf{w})$ est Schur positive. Pour cette hiérarchie $\mathcal{M}_{h_m}$ jouerait le rôle d'élément maximal et $\mathcal{M}_{p_1^m}$ celui d'élément minimal. On aimerait donc une description claire de celle-ci.

Une question intrigante serait de développer une étude analogue pour les fonctions quasi-symétriques. Une autre serait de développer tout ceci dans le contexte ou $\mathfrak{S}_n$ est remplacé par une autre groupe de Coxeter fini. Les opérateurs de polarisation sont plus subtils.

APPENDICE I

UNE APPROCHE ÉQUIVALENTE DE LA POLARISATION

Le but de cet appendice est de clarifier la différence entre les opérateurs de polarisation particuliers, $E_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\partial_{kj}$, et les opérateurs de polarisation, $P_{i,x} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, (on trouve les deux approches dans la littérature, par exemple [24, 19]). Il y a certains avantages lorsqu'on utilise les opérateurs de polarisation $P_{i,k}$ au lieu, des opérateurs de polarisation $E_{i,k}$ par exemple la formule du théorème A.0.2.

Les opérateurs de polarisation $P_{i,x}$

On sait déjà (voir la formule 2.5) que les opérateurs $E_{i,j}$ satisfont la formule :

$$f\left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_2!\cdots k_\ell!} \cdot E_{\ell,1}^{k_\ell}\cdots E_{2,1}^{k_2}(f(\mathbf{x}_1)),$$

où $f(\mathbf{x}_1)$ est un polynôme homogène de degré d, en les variables $\mathbf{x}_1 := x_{11}, \ldots, x_{1n}$. Rappelez que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si on prend f en les variables $\mathbf{x}$, souvent ses polarisations sont décrites d'une façon équivalente avec les opérateurs $P_{i,x}$ définis comme suit :

$$P_{i,x} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ces opérateurs $P_{i,x}$ satisfont une formule similaire qui est donnée ci-bas :

Théorème A.0.1 (voir [24], p. 42.). Si $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_n$ est un polynôme homogène de degré total d alors, on peut obtenir toutes ses polarisations (du type $P_{i,x}$) en considérant la somme(voir [29, 24]) :

$$f\big(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_\ell\mathbf{x}_\ell\big) = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_\ell=d} \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_\ell^{k_\ell}}{k_1!k_2!\cdots k_\ell!} \cdot P_{\ell,x}^{k_\ell}\cdots P_{2,x}^{k_2}P_{1,x}^{k_1}(f(\mathbf{x})). \tag{A.1}$$

Avec la notation du chapitre, 2 on écrit simplement :

$$f(\mathbf{t}\cdot X) = \sum_{|\mathbf{k}|=d} P_x^{\mathbf{k}}(f(\mathbf{x}))\frac{\mathbf{t}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!},$$

où $P_x^{\mathbf{k}} := P_{\ell,x}^{k_\ell}\cdots P_{2,x}^{k_2}P_{1,x}^{k_1}$.

Remarque A.0.1. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$. On rappel que le nombre de matrices A de format $\ell \times n$, à coefficients naturels, et telles que $\deg(X^A) = \mathbf{d}$, est donné par :

$$\big|\{A \in \mathbb{N}^{\ell\times n} : |A| = \mathbf{d}\}\big| := \left(\!\!\binom{n}{d_1}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n}{d_2}\!\!\right)\cdots\left(\!\!\binom{n}{d_\ell}\!\!\right). \tag{A.2}$$

Plus général qu'une seule ligne $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on considère la matrice de variables $X = (x_{i,j})$ de format $\ell \times n$ (voir [20, 21, 24]) et on a donc

Théorème A.0.2 (Classique). Soit $f(X) \in \mathcal{R}_n^{(\ell)}$ est un polynôme **homogène de multi-degré** $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell)$ alors, pour toute matrice carrée $M = (m_{ij})$ de taille $\ell \times \ell$ on a :

$$f(MX) = \sum_{\{K\in\mathbb{N}^{\ell\times\ell}:\ |K|=\mathbf{d}\}} \frac{M^K}{K!}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{\ell} P_{j,i}^{k_{ij}}(f(Y)),$$

où $Y = (y_{ij})$ est une matrice de variables de format $\ell\times n$, $K! := \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{\ell} k_{ij}!$, $M^K = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{\ell} m_{i,j}^{k_{ij}}$ et $P_{i,k} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{\partial}{\partial y_{kj}}$, La notation $|K| = \mathbf{d}$ représente l'ensemble de toutes les matrices carrés K d'ordre ℓ telles que $\sum_{j=1}^{n} k_{ij} = d_i$, pour tout i tel que $1 \le i \le \ell$. Autrement dit :

$$f\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_{1,i}\mathbf{x}_i, \cdots, \sum_{i=1}^{\ell} m_{\ell,i}\mathbf{x}_i\right) = \sum_{\{K\in\mathbb{N}^{\ell\times\ell}:\ |K|=\mathbf{d}\}} \frac{M^K}{K!}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{\ell} P_{j,i}^{k_{ij}}(f(Y)).$$

Exemple A.0.1. Soit $f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = y_{11}y_{21} + y_{12}y_{22}$. Le polynôme $f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in R_2^{(2)}(Y)$ est homogène de multi-degré $(1,1)$ dans la matrice de variables Y suivante :

$$Y := \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

on écrit les lignes de X comme $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$ et $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$. Prenons la matrice de paramètres M suivante :

$$M := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

notons que $f(X) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = f(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}) = x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22}$; et on a donc :

$$\begin{aligned}
&f(MX) = f\left(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(m_{11}\mathbf{x}_1 + m_{12}\mathbf{x}_2 \,;\, m_{21}\mathbf{x}_1 + m_{22}\mathbf{x}_2\right) \\
&= f\left(m_{11}x_{11} + m_{12}x_{21}, m_{11}x_{12} + m_{12}x_{22} \,;\, m_{21}x_{11} + m_{22}x_{21}, m_{21}x_{12} + m_{22}x_{22}\right) \\
&= \left(m_{11}x_{11} + m_{12}x_{21}\right)\left(m_{21}x_{11} + m_{22}x_{21}\right) + \left(m_{11}x_{12} + m_{12}x_{22}\right)\left(m_{21}x_{12} + m_{22}x_{22}\right) \\
&= m_{11}m_{21}x_{11}^2 + m_{11}m_{21}x_{12}^2 + m_{11}m_{22}x_{11}x_{21} + m_{11}m_{22}x_{12}x_{22} + m_{12}m_{21}x_{11}x_{21} \\
&+ m_{12}m_{21}x_{12}x_{22} + m_{12}m_{22}x_{21}^2 + m_{12}m_{22}x_{22}^2. \\
&= m_{21}m_{12}\left(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22}\right) + m_{11}m_{22}\left(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22}\right) + m_{11}m_{21}\left(x_{11}^2 + x_{12}^2\right) + m_{12}m_{22}\left(x_{21}^2 + x_{22}^2\right) \\
&= m_{21}m_{12}P_{1,2}P_{2,1}(f(Y)) + m_{11}m_{22}P_{11}P_{22}(f(Y)) - m_{11}m_{21}P_{12}P_{11}(f(Y)) + m_{12}m_{22}P_{21}P_{22}(f(Y)).
\end{aligned}$$

Exemple A.0.2. Soit $p(X) \in \mathcal{R}_3^{(2)}$ le polynôme homogène de multi-degré $(2,1)$ suivant :

$$p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = x_{11}^2x_{23} + x_{12}^2x_{21},$$

En termes des opérateurs E_{ij} on obtient :

$$\begin{aligned}
p(MX) &= E_{12}(p) \cdot m_{11}^2m_{21} + p \cdot m_{11}^2m_{22} + \left(E_{12}E_{21}(p) - 2p\right) \cdot m_{11}m_{12}m_{21} \\
&+ E_{21}(p) \cdot m_{11}m_{22}m_{12} + \frac{1}{2}\left(E_{12}E_{21}(p) - 2E_{2,1}(p)\right) \cdot m_{12}^2m_{21} + \frac{1}{2}E_{21}^2(p) \cdot m_{21}^2m_{22}.
\end{aligned}$$

Les opérateurs $E_{i,k}$ et $E_{r,s}$ **ne commutent pas toujours** comme on peut voir dans l'exemple suivant :

$$E_{21}E_{12}(p) = x_{11}^2x_{23} + 2x_{11}x_{12}x_{22} + 2x_{11}x_{13}x_{21} + x_{12}^2x_{21},$$

$$E_{12}E_{21}(p) = 2x_{11}^2x_{23} + 2x_{11}x_{12}x_{22} + 2x_{11}x_{13}x_{21} + 2x_{12}^2x_{21},$$

Par contre, les opérateurs $P_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial y_{kj}}$ sont toujours commutatifs, comme on peut vérifier dans l'exemple ci-bas :

$$P_{21}P_{12}\left(p(Y)\right) = 2x_{11}x_{22}y_{12} + 2x_{13}x_{21}y_{11} = P_{12}P_{21}\left(p(Y)\right).$$

où $p(Y) := p(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = y_{11}^2 y_{23} + y_{12}^2 y_{21}$.

Remarque A.0.2. Les opérateurs de polarisation $E_{i,j}$ et $E_{h,k}$ satisfont la relation de commutation suivante (voir [24], p.53) :

$$\left[E_{i,j}, E_{h,k}\right] = \delta_{j,h}\, E_{i,k} - \delta_{i,k}\, E_{h,j}.$$

où la fonction δ est le symbole de Kronecker $\delta_{r,s} := \begin{cases} 1 & r = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

APPENDICE II

SÉRIES DE HILBERT

Ici on donne les séries de Hilbert des modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ lorsque le degré de f est 4 et 5. On rappelle que pour degré 3 on a démontré (sauf n-exceptions) que :

Tableau B.1: Séries de Hilbert pour degré 3

$1 + h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})$	$e_1^3 = p_1^3 = h_1^3.$
$1 + n \cdot h_1(\mathbf{q}) + n \cdot h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})$	$p_3 = m_3,\ e_3 = s_{111} = m_{111}.$
$1 + n \cdot h_1(\mathbf{q}) + (n+1) \cdot h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})$	$s_3 = h_3, h_{21},$ $s_{21}, p_{21}, e_{21},$ $m_{21}.$

Tableau B.2: Caractéristique de Frobenius pour degré 3

$(1 + h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})) \cdot h_n(\mathbf{w})$	$e_1^3 = p_1^3 = h_1^3.$
$(1 + h_3(\mathbf{q})) \cdot h_n(\mathbf{w}) + (h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})) \cdot h_{n-1,1}(\mathbf{w})$	$p_3 = m_3,\ e_3 = s_{111} = m_{111}.$
$(1 + h_2(\mathbf{q}) + h_3(\mathbf{q})) \cdot h_n(\mathbf{w}) + (h_1(\mathbf{q}) + h_2(\mathbf{q})) \cdot h_{n-1,1}(\mathbf{w})$	$s_3 = h_3, h_{21},$ $s_{21}, p_{21}, e_{21},$ $m_{21}.$

Séries de Hilbert pour degré 4

En degré 4, les séries de Hilbert des modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ sont (sauf n-exceptions) les suivantes :

Tableau B.3: Séries de Hilbert pour degré 4

$1 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	$e_1^4 = p_1^4 = h_1^4$
$1 + n \cdot s_1 + n \cdot s_2 + n \cdot s_3 + s_4$	$p_4 = m_4$
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n}{2} \cdot s_2 + n \cdot s_3 + s_4$	$e_4 = m_{1111} = s_{1111}$
$1 + n \cdot s_1 + 2n \cdot s_2 + (n+1) \cdot s_3 + s_4$	e_{31}
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n+1}{2} \cdot s_2 + (n+1) \cdot s_3 + s_4$	s_{211}, h_{22}, m_{211}
$1 + n \cdot s_1 + (n+1) \cdot s_2 + (n-1) \cdot s_{11} + (n+1) \cdot s_3 + s_{21} + s_4$	$p_{211}, e_{211}, h_{211}$
$1 + n \cdot s_1 + 2n \cdot s_2 + (n-1) \cdot s_{11} + (n+1) \cdot s_3 + s_{21} + s_4$	h_{31}, m_{31}, p_{31}
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n+1}{2} \cdot s_2 + (n-1) \cdot s_{11} + n \cdot s_3 + s_{21} + s_4$	m_{22}
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n+1}{2} \cdot s_2 + (n-1) \cdot s_{11} + (n+1) \cdot s_3 + s_{21} + s_4$	$s_4, s_{31}, s_{2,2}, e_{22}, p_{22}$

Séries de Hilbert pour degré 4 (en termes de fonctions h)

Les séries de Hilbert des modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ sont $h(\mathbf{q})$-positives. En fait, on a les formules suivantes (sauf n-exceptions) :

Tableau B.4: Séries de Hilbert pour degré 4 en termes de h

$1+h_1+h_2+h_3+h_4$	$e_1^4 = p_1^4 = h_1^4$
$1+n\cdot h_1+n\cdot h_2+n\cdot h_3+h_4$	$p_4 = m_4$
$1+n\cdot h_1+\binom{n}{2}\cdot h_2+n\cdot h_3+h_4$	$e_4 = m_{1111} = s_{1111}$
$1+n\cdot h_1+2n\cdot h_2+(n+1)\cdot h_3+h_4$	e_{31}
$1+n\cdot h_1+\binom{n+1}{2}\cdot h_2+(n+1)\cdot h_3+h_4$	s_{211}, h_{22}, m_{211}
$1+n\cdot h_1+(n-1)\cdot h_1^2+2\cdot h_2+h_{21}+n\cdot h_3+h_4$	$p_{211}, e_{211}, h_{211}$
$1+n\cdot h_1+(n+1)\cdot h_2+(n-1)h_1^2+h_{21}+n\cdot h_3+h_4$	h_{31}, m_{31}, p_{31}
$1+n\cdot h_1+(n-1)\cdot h_1^2+\left(\binom{n}{2}+1\right)\cdot h_2+(n-1)\cdot h_3+h_4$	m_{22}
$1+n\cdot h_1+(n-1)\cdot h_1^2+\left(\binom{n}{2}+1\right)h_2+n\cdot h_3+h_4$	$s_4, s_{31}, s_{22}, e_{22}, p_{22}$

Séries de Hilbert pour degré 5

En degré 5, les séries de Hilbert des modules de polarisation $\mathcal{M}_f$ sont les suivantes (sauf n-exceptions) :

Tableau B.5: Séries de Hilbert pour degré 5

$1 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$	$e_{1^5} = p_{1^5}$ $= h_{1^5}$
$1 + n \cdot s_1 + n \cdot s_2 + n \cdot s_3 + n \cdot s_4 + s_5$	p_5 $= m_5$
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n}{2} \cdot s_2 + \binom{n}{2} \cdot s_3 + n \cdot s_4 + s_5$	e_5 $= m_{1^5}$ $= s_{1^5}$
$1 + n \cdot s_1 + \binom{n+1}{2} \cdot s_2 + \binom{n+1}{2} \cdot s_3 + (n+1) \cdot s_4 + s_5$	m_{2111}, s_{2111}, e_{41}
$1 + ns_1 + \binom{n+1}{2} s_2 + (n-1)s_{11} + \binom{n+1}{2} s_3 + ns_{21} + (n+1)s_4 + s_5$	s_{221},
$1 + n \cdot s_1 + 2n \cdot s_2 + (n-1) \cdot s_{11} + 2n \cdot s_3 + n \cdot s_{21} + (n+1) \cdot s_4 + s_{31} + s_5$	m_{41}, p_{41}
$1 + n\, s_1 + \binom{n+1}{2}\, s_2 + (n-1)\, s_{11} + \frac{n(n+3)}{2}\, s_3 + n\, s_{21} + (n+1) s_4 + s_{31} + s_5$	h_5, h_{41}, h_{32}, h_{221}, p_{221}, s_{41}, s_{32}, s_{311}, e_{221}, m_{311}
$1 + n\, s_1 + \binom{n+1}{2}\, s_2 + (n-1)\, s_{11} + \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) s_3 + n\, s_{21} + (n+1)\, s_4 + s_{31} + s_5$	p_{32}, e_{32}, m_{32}, m_{221}
$1 + n\, s_1 + (n+1)s_2 + (n-1)s_{11} + (n+1)s_3 + n\, s_{21} + (n+1)s_4 + s_{31} + s_5$	p_{2111}, h_{2111}, e_{2111}
$1 + n\, s_1 + 2n\, s_2 + (n-1)\, s_{11} + (2n+1)\, s_3 + n\, s_{21} + (n+1)\, s_4 + s_{31} + s_5$	e_{311}, h_{311}, p_{311}

Séries de Hilbert pour degré 5 (en termes des fonctions h)

En degré 5, les séries de Hilbert des modules $\mathcal{M}_f$ sont $h(\mathbf{q})$-positives :

Tableau B.6: Séries de Hilbert pour degré 5 en termes de h

$1 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$	e_{1^5} $= p_{1^5}$ $= h_{1^5}$
$1 + n \cdot h_1 + n \cdot h_2 + n \cdot h_3 + n \cdot h_4 + h_5$	p_5 $= m_5$
$1 + n \cdot h_1 + \binom{n}{2} \cdot h_2 + \binom{n}{2} \cdot h_3 + n \cdot h_4 + h_5$	e_5 $= m_{1^5}$ $= s_{1^5}$
$1 + n \cdot h_1 + \binom{n+1}{2} \cdot h_2 + \binom{n+1}{2} \cdot h_3 + (n+1) \cdot h_4 + h_5$	m_{2111}, s_{2111}, e_{41}
$1 + nh_1 + \left(1 + \binom{n}{2}\right) h_2 + (n-1)h_1^2 + \binom{n}{2}h_3 + n\,h_{21} + n\,h_4 + h_1h_3 + h_5$	s_{221}
$1 + n\,h_1 + (n+1)\,h_2 + (n-1)h_1^2 + n\,h_2h_1 + n\,h_3 + h_1h_3 + n\,h_4 + h_5$	s_{221}, m_{41}, p_{41}
$1 + n\,h_1 + (n-1)\,h_1^2 + \left(1 + \binom{n}{2}\right) h_2 + n\,h_2h_1 + \binom{n+1}{2}h_3 + n\,h_4 + h_1h_3 + h_5$	h_5, h_{41}, h_{32}, h_{221}, p_{221}, s_{41}, s_{32}, s_{311}, e_{221}, m_{311}
$1 + n\,h_1 + (n-1)\,h_1^2 + \left(1 + \binom{n}{2}\right) h_2 + n\,h_2h_1 + \left(\binom{n+1}{2} + 1\right) h_3 + n\,h_4 + h_1h_3 + h_5$	p_{32}, e_{32}, m_{32}, m_{221}
$1 + n\,h_1 + (n-1)\,h_1^2 + 2\,h_2 + n\,h_2h_1 + h_3 + n\,h_4 + h_1h_3 + h_5$	p_{2111}, h_{2111}, e_{2111}
$1 + n\,h_1 + (n-1)\,h_1^2 + 2\,h_2 + n\,h_2h_1 + (n+1)h_3 + n\,h_4 + h_1h_3 + h_5$	e_{311}, h_{311}, p_{311}

Tableau B.7: n-exceptions lorsque $3 \leq n \leq 42$

$n = 3$	$3a(2b + c) = 4b^2$
$n = 4$	$a(b + c) = b^2$
$n = 5$	$3a(2b + 3c) = 8b^2$
$n = 6$	$3a(b + 2c) = 5b^2$
$n = 7$	$a(2b + 5c) = 4b^2$
$n = 8$	$3a(b + 3c) = 7b^2$
$n = 9$	$3a(2b + 7c) = 16b^2$
$n = 10$	$a(b + 4c) = 3b^2$
$n = 11$	$3a(2b + 9c) = 20b^2$
$n = 12$	$3a(b + 5c) = 11b^2$
$n = 13$	$a(2b + 11c) = 8b^2$
$n = 14$	$3a(b + 6c) = 13b^2$
$n = 15$	$3a(2b + 13c) = 28b^2$
$n = 16$	$a(b + 7c) = 5b^2$
$n = 17$	$3a(2b + 15c) = 32b^2$
$n = 18$	$3a(b + 8c) = 17b^2$
$n = 19$	$a(2b + 17c) = 12b^2$
$n = 20$	$3a(b + 9c) = 19b^2$
$n = 21$	$3a(2b + 19c) = 40b^2$
$n = 22$	$a(b + 10c) = 7b^2$
$n = 23$	$3a(2b + 21c) = 44b^2$
$n = 24$	$3a(b + 11c) = 23b^2$
$n = 25$	$a(2b + 23c) = 16b^2$
$n = 26$	$3a(b + 12c) = 25b^2$
$n = 27$	$3a(2b + 25c) = 52b^2$
$n = 28$	$a(2b + 13c) = 9b^2$
$n = 29$	$3a(2b + 27c) = 56b^2$
$n = 30$	$3a(b + 14c) = 29b^2$
$n = 31$	$a(2b + 29c) = 20b^2$
$n = 32$	$3a(b + 15c) = 31b^2$
$n = 33$	$3a(2b + 31c) = 64b^2$
$n = 34$	$a(b + 16c) = 11b^2$
$n = 35$	$3a(2b + 33c) = 68b^2$
$n = 36$	$3a(b + 17c) = 35b^2$
$n = 37$	$a(2b + 35c) = 24b^2$
$n = 38$	$3a(b + 18c) = 37b^2$
$n = 39$	$3a(2b + 37c) = 76b^2$
$n = 40$	$a(b + 19c) = 13b^2$
$n = 41$	$3a(2b + 39c) = 80b^2$
$n = 42$	$3a(b + 20c) = 41b^2$

RÉFÉRENCES

[1] Andrews, G. (1998). *The Theory of Partitions.* Cambridge University Press.

[2] Baker, A. (2006). *Matrix Groups An Introduction to Lie Group Theory.* Springer.

[3] Bergeron, F. (2009). *Algebraic combinatorics and coinvariants spaces.* CMS Treatise in Mathematics, A.K. Peters Publishers.

[4] Bergeron, F. (2013). Multivariate diagonal coinvariant spaces for complex reflection groups. *Adv. in Math.*, *239*, 97–108.

[5] Bergeron, F. (preprint). Combinatorics of r-Dyck paths, r-Parking functions, and the r-Tamari lattices. *arXiv :1202.6269v4.* Submitted 2013.

[6] Bergeron, F. (Version Préliminaire). *Combinatoire Algébrique.* 2001.

[7] Bergeron, F. et Haiman, M. (2013). Tableaux formulas for Macdonald polynomials. *Internat. J. Algebra Comput.*, *23*(4), 833–852.

[8] Bergeron, F. et Préville-Ratelle, L.-F. (2012). Higher trivariate diagonal harmonicis via Tamari posets. *Journal of Combinatorics*, *3*(3), 317–341.

[9] Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics.* Dordretch-Holland/ Boston-U.S.A. : D. Reidel Publishing Company. Revised and enlarged edition.

[10] Fulton, W. (1997). *Young Tableaux With Applications to Representation Theory and Geometry.* Cambridge University Press. London Mathematical Society Texts 35.

[11] Fulton, W. et Harris, J. (2004). *Representation Theory A First Course.* Graduate Texts in Mathematics 129, Springer Velarg.

[12] Garsia, A. et Haiman, M. (1993). A graded representation model for the Macdonald polynomials. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *90*(8), 3607–3610.

[13] Geramita, A., Hoefel, A. et Wehlau, D. (preprint). Hilbert functions of $\mathfrak{S}_n$-Stable Artinian Gorenstein Ideals. *arXiv :1407.7228 [math.AC]*. Submitted 2014.

[14] Haiman, M. (1994). Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants. *J. Algebraic Combin.*, *3*(1), 17–76.

[15] Haiman, M. (2001). Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, *14*, 941–1006.

[16] Haiman, M. (2002a). Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes. *Current Developments in Mathematics 2002*, (1), 39–111.

[17] Haiman, M. (2002b). Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points of the plane. *Invent. Math*, (149), 371–407.

[18] Humphreys, J. (1997). *Reflections groups and Coxeter groups.* Cambridge Uiversity Press. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29.

[19] Hunziker, M. (1997). Classical invariant theory for finite reflection groups. *Transformations Groups*, *2*(2), 147–163.

[20] Kfrat, H. et Procesi, C. (1996). *Classical Invariant Theory A primer.* preliminary version July 1996.

[21] Kraft, H. et Wallach, N. (2010). Polarizations and Nullcone of Representaions of Redutive Groups. *Symmetry and Spaces*, 153–167. Progress in Mathematics Volume 278.

[22] Macdonald, I. G. (1995). *Symmetric functions and Hall polynomials Second edition.* New York : Oxford University Press Inc.

[23] Mahom, P. M. (1960). *Combinatory Analysis Volumes I, II.* New York : Chelsea publishing company.

[24] Procesi, C. (2007). *Lie Groups An Approach through Invariants and Representations / Claudio Procesi.* (Universitex UTX), Springer.

[25] Rosas, M. H. (2001). Macmahon Symmetric Functions, the Partition Lattice, and Young Subgroups. *J. Combin. Theory Ser. A*, *96*, 326–340.

[26] Sagan, B. (2001). *The Symmetric Group Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions (Second Edition).* Springer. Graduate Texts in Mathematics 203.

[27] Silberstein, T., Scarabotti, F. et Tolli, F. (2010). *Representation Theory of the Symmetric Groups.* Cambridge University Press. 412 pages.

[28] Stanley, R. (2001). *Enumerative combinatorics, Volume 2.* New York : Cambridge University Press. Cambridge studies in Advances Mathematcs 49.

[29] Weyl, H. (1939). *The Classical Groups : Their Invariants and Representations.* Princeton-New York : Princeton University Press.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

INDEX