UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

# COMBINATOIRE DE $\mathbb{N}$-MODULES CATALAN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

FONDAMENTALES

PAR

JOSÉ EDUARDO BLAŽEK

JANVIER 2015

*À ma famille.*

*« le livre de la nature est écrit en langage mathématique »*

***Galileo Galilei***

Il Saggiatore

Rome, octobre 1623

IL SAGGIATORE
Nel quale
Con bilancia esquisita e giusta
si ponderano le cose contenute
nella
LIBRA ASTRONOMICA E FILOSOFICA
DI LOTARIO SARSI SIGENSANO
Scritto in forma di lettera
VIRGINIO CESARINI
GALILEO GALILEI
Acc. Linceo Nobile Fiorentino
Filosofo e Matematico Primario
del
Gran Duca di Toscana
IN ROMA MDCXXIII
Appresso Giacomo Mascardi

# REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de maîtrise : François Bergeron. Vous avez cru en moi dès le début et je vous en serai toujours reconnaissant. J'ai eu la grande chance de vous connaître dans un cours du baccalauréat et vous m'avez ouvert la porte non seulement au LACIM mais aussi à mon avenir.

Je dois aussi remercier tout le groupe du LACIM, aux étudiants du cycle supérieur et les stagiaires qui sont là, spécialement à deux personnes qui m'avez soutenu.

Dans la partie académique au stagiaire postdotoral Alejandro Morales avec lequel j'ai passé plus heures travaillant sur différents aspects des problèmes.

Dans la partie technique à Jérôme Tremblay qui a soutenu, avec beaucoup de patience, toutes mes questions par rapport à LATEX et SAGE.

On ne dit jamais trop merci.

Merci beaucoup à tous !

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ix

LISTE DES TABLEAUX . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . xi

RÉSUMÉ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . xiii

INTRODUCTION . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

CHAPITRE I
NOTIONS DE BASE . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.1 Module sur $\mathbb{N}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 $\mathbb{N}$-module affine et son complément . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.3 Problème de Frobenius . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.4 Une généralisation du Problème de Frobenius . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.5 Représentation Cartésienne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

CHAPITRE II
CAS RELATIVAMENT PREMIER DES CHEMINS DE DYCK . . . . . . . . . 19

2.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.2 Ensemble des $\mathbb{N}$-modules affines et $\mathscr{D}_m$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.3 Construction d'une bijection entre $\mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{a,b}$ . . . . . . . . . . . . . . 25

2.4 Construction de la bijection en terme du mot associé . . . . . . . . . . . . 29

2.5 Partage associé et Diagramme de Ferrers . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

2.6 Treillis de Young et de Kréwéras . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.7 L'aire d'un chemin de $\mathscr{D}_m$ et le polynôme $q$-énumérateur. . . . . . . . . . . 33

2.8 $(a, b)$-Cœur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

CHAPITRE III
CAS NON-RELATIVAMENT PREMIER DES CHEMINS DE DYCK . . . . . 45

3.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

3.2 L'inclusion de treillis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

3.3 Polynôme $q$-énumérateur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3.4 Méthode de comparaison de diagrammes de Ferrer . . . . . . . . . . . . . 53

3.5 Les chemins de $\mathscr{D}_{4,k}$ . . . . . 57

3.6 Les chemins de $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ . . . . . 60

3.7 Les chemins de $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ . . . . . 63

3.8 Les chemins de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ . . . . . 65

3.9 Les chemins de $\mathscr{D}_{6,6n+2}$ . . . . . 66

3.10 Lemmes . . . . . 68

3.11 Conjectures . . . . . 71

CHAPITRE IV
CONCLUSION . . . . . 73

APPENDICE A
DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES . . . . . 77

A.1 Relations avec Partie entière . . . . . 78

A.2 Construction de l'inverse de $\eta$ . . . . . 78

A.3 Quelques propriétés des $\mathbb{N}$-modules affines . . . . . 79

A.3.1 Propriétés de l'opération addition des ensembles . . . . . 79

A.3.2 $\mathbb{N}$-module et $\mathbb{N}$-module affines . . . . . 82

A.3.3 Le complément de $\langle a, b \rangle$ . . . . . 83

A.3.4 Le semi-anneau $\langle a \rangle$ . . . . . 86

A.4 Calcul de Coeur Maximal . . . . . 87

APPENDICE B
CODE SAGE . . . . . 91

B.1 Le Chemin de Christoffel . . . . . 91

B.2 Les Treillis de Young et de Kréwéras . . . . . 95

B.3 Chemins de Dyck . . . . . 100

INDEX TERMINOLOGIQUE . . . . . 113

RÉFÉRENCES . . . . . 115

LISTE DES FIGURES

Figure Page

1.1 Pièce de monnaie de 2 et 5 centimes d'Euro. . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.2 Timbre pour la poste aérienne de 1946. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.3 Représentation de $\langle 3,5\rangle$ et de $\overline{\langle 3,5\rangle}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

1.4 Représentation de $(3,5)$-rectangle et $\overline{\langle 3,5\rangle}$. . . . . . . . . . . . . . . . . 16

1.5 $(3,6)$-rectangle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.1 Un chemin de Dyck dans le rectangle $3\times 5$. . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.2 $\mathscr{D}_{3,5}$ et leurs codages. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.3 Chemin 01011011 dans $(3,5)$-rectangle étiqueté. . . . . . . . . . . . . . . . 22

2.4 Tous les chemins de Dyck dans le $(3,5)$-rectangle étiqueté. . . . . . . . . 22

2.5 Chemin 00110111 et représentation de $\mathcal{A}^{3,5}_{\{4,7\}}$. . . . . . . . . . . . . . . 23

2.6 Bijection entre $\mathcal{Y}_{3,5}$ et $\mathscr{D}_{3,5}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.7 Diagramme de $\varphi$ et $\psi$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

2.8 L'ensemble $\mathcal{C}_\gamma$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2.9 schema de $\mathcal{R}(\alpha)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

2.10 Construction des sous-mots. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

2.11 Construction des paires ordonnées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

2.12 Chemin 01011011 et son partage [3,1]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

2.13 Les partages associés à $\mathscr{D}_{3,5}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

2.14 Partage $[3,1]\vdash 4$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.15 Treillis de Young jusqu'au niveau 5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.16 Treillis de Kréwéras du partage [3,1]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

2.17 Les opérations sur un diagramme. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

2.18 L'inclusion de $\mathscr{D}_{3,5}$ dans $\mathscr{D}_{4,5}$. . . . . . 34
2.19 Lien entre les polynômes et les aires dans $\mathscr{D}_{3,5}$. . . . . . 36
2.20 Représentation du partage $\lambda$. . . . . . 37
2.21 Partage $[5,4,3,3,2,1] \vdash 18$. . . . . . 37
2.22 Construction d'un cœur. . . . . . 38
2.23 Chemin de Dick et le cœur associé. . . . . . 38
2.24 Des cœurs conjugués. . . . . . 39
2.25 Le schéma d'inclusion de $\mathbb{N}$-module affine . . . . . . 42
2.26 La taille d'un cœur. . . . . . 43
3.1 L'inclusion de $\mathscr{D}_{3,5}$ dans $\mathscr{D}_{3,6}$. . . . . . 47
3.2 L'inclusion de $\mathscr{D}_{4,6}$ dans $\mathscr{D}_{4,7}$. . . . . . 49
3.3 Relation entre les treillis et $\mathbf{Cat}_m(q)$. . . . . . 51
3.4 Les coefficients des polynômes $q$-énumérateurs. . . . . . 52
3.5 Différences avec de diagrammes plus grands. . . . . . 53
3.6 Différences avec de diagrammes plus petits. . . . . . 54
3.7 Règle 1. . . . . . 54
3.8 Règle 2, plus d'une case. . . . . . 55
3.9 La relation entre diagrammes $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$. . . . . . 57
3.10 Chemins non contenus dans $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ . . . . . . 58
3.11 Le schéma $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+5}$. . . . . . 60
3.12 Le schéma $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ et $\mathscr{D}_{8,8n+7}$ . . . . . . 63
3.13 Le schéma $\mathscr{D}_{4,4n+1}$ et $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ . . . . . . 65
3.14 Le schéma $\mathscr{D}_{6,6n+1}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+2}$ . . . . . . 66

LISTE DES TABLEAUX


Tableau Page

1.1 Nombre de Frobenius pour trois valeurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.1 Rotations cycliques du mot **11110010** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

2.2 $\mathbf{Cat}_n(q)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

2.3 $(3,5)$-**cœur** vers $\mathcal{Y}_{3,5}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

2.4 $(3,5)$-**cœur**, $\mathcal{Y}_{3,5}$ et leurs conjugués. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

2.5 $(3,7)$-**cœur**, $\mathcal{Y}_{3,7}$ et leurs conjugués. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

3.1 Comparaison des diagrammes de $\mathscr{D}_{3,5}$ et $\mathscr{D}_{3,6}$ . . . . . . . . . . . . . . 48

3.2 Comparaison de diagrammes. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

3.3 Comparaison des diagrammes de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ et $\mathscr{D}_{4,4n+3}$. . . . . . . . . . . . 58

3.4 les Valeurs de $\left\lfloor \frac{ir}{4} \right\rfloor$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

3.5 Les Valeurs de $\left\lfloor \frac{ir}{5} \right\rfloor$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire de maîtrise, nous allons nous intéresser aux liens entre les ensembles de compléments de $\mathbb{N}$-modules et les chemins de Dyck. Nous commencerons par présenter des notions préliminaires sur les $\mathbb{N}$-modules, les $\mathbb{N}$-modules affines, leurs compléments, et les conditions pour que ces compléments soient finis. Puis, en considérant tous les outils développés, nous aborderons des questions liées au problème de Frobenius. Ensuite, nous explorerons les liens entre chemins de Dyck et compléments de $\mathbb{N}$-modules. Nous étudierons différentes approches pour obtenir des formules explicites.

**MOTS-CLÉS:** $\mathbb{N}$-module, $\mathbb{N}$-module affine, nombre de Frobenius, chemin de Dyck, treillis de Young, treillis de Kréwéras.

# INTRODUCTION

Le point de départ de notre étude est la notion de $\mathbb{N}$-module. Nous considérons le cas de $\mathbb{N}$-modules engendrés par un ensemble fini, et les conditions pour que leur complément soit fini. Plus particulièrement, on étudie en détail le cas d'un $\mathbb{N}$-module engendré par deux nombres relativement premiers. On développe les concepts de $\mathbb{N}$-module affine et de $(a, b)$-rectangle pour avoir de perspectives différentes sur le problème. Nous considérons des opérations sur les $\mathbb{N}$-modules affines, pour en décrire des expressions plus simples. Ensuite, nous étudions les chemins de $(a, b)$-Dyck et les partitions associées. On considère sur ceux-ci les structures de treillis de Young, et de treillis de Kréwéras, ainsi que différentes représentations en lien avec l'ensemble des compléments d'un $\mathbb{N}$-module. À la fin nous montrons des méthodes et d'expressions pour certains cas de $(a, b)$-Dyck non relativement premiers.

CHAPITRE I

# NOTIONS DE BASE

Le but de ce chapitre est de définir les notions de base, et les liens entre elles, ainsi que de donner plusieurs représentations des objects considérés. Celles-ci donnent chacune un point de vue nouveau permettant d'améliorer la compréhension. On développe les structures algébriques de $\mathbb{N}$-module, de $\mathbb{N}$-module affine, leur complément et leur représentation cartésienne. Ces dernières nous permettront plus tard d'introduire des objets combinatoires associés, et de dégager leurs propriétés de base. Le chapitre se termine avec un aperçu du contexte dans lequel on va travailler.

## 1.1 Module sur $\mathbb{N}$

On considère le **$\mathbb{N}$-module** engendré par un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, dénoté pour l'expression $\langle \boldsymbol{m} \rangle = \langle m_1, m_2, \ldots, m_k \rangle$, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que :

1. $0 \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$,
2. $m_i \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$, $1 \leq i \leq k$,
3. Si $a, b \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$ alors $a + b \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$,
4. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$, $n \cdot a \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$.

**Par exemple,** pour $\boldsymbol{m} = \{3, 5\}$ on obtient $\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$ et pour $\boldsymbol{m} = \{7, 10\}$ on a que $\langle 7, 10 \rangle = \{0, 7, 10, 14, 17, 20, 21, 24, 27, 28, 30, \ldots\}$.

Considérant la notion de norme sur $\mathbb{N}^k$, pour $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ définie par $|\mathbf{v}|_{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, on a donc,

$$\langle \boldsymbol{m} \rangle = \{z \in \mathbb{N} \mid z = |\mathbf{v}|_{\mathbf{m}},\ \mathbf{v} \in \mathbb{N}^k\}.$$

## 1.2 N-module affine et son complément

On s'inspire de la théorie des anneaux et idéaux pour développer la notion « d'idéal positif » que nous appelons **N-module affine**. Pour bien la définir, nous introduisons **l'opération de somme** dénotée $+$, sur les sous-ensembles de $\mathbb{N}$, que l'on va particulariser sur les $\mathbb{N}$-modules.

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$. On pose :

$$A + B := \{x + y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

En particulier, $A + \emptyset = \emptyset$. Dans le cas d'un ensemble a un seul élément, nous allégeons la notation de la manière suivante. Soit $x \in \mathbb{N}$ et $A \subseteq \mathbb{N}$, alors,

$$A + x = \{x + y \mid y \in A\}.$$

Évidemment $A + 0 = A$.

L'abréviation $\mathcal{A}_B^{\boldsymbol{m}}$ pour le $\mathbb{N}$-module affine $\langle \boldsymbol{m} \rangle + B$ (voir [17]) sera parfois utile. Bien entendu, on écrit $\mathcal{A}_x^{\boldsymbol{m}}$ pour $\langle \boldsymbol{m} \rangle + x$.

Grâce à la proposition A.2, nous avons une façon récursive de construire les $\mathbb{N}$-module (voir éq.A.2). Si $q \in \langle \boldsymbol{m} \rangle$ alors, $\langle \boldsymbol{m}, q \rangle = \langle \boldsymbol{m} \rangle$, par contre, si $q \notin \langle \boldsymbol{m} \rangle$ c'est-à-dire que $\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m}, q) = 1$, on calcule la plus grande valeur $l$ telle que $l = \mathbf{max}\{j \in \mathbb{N} \mid jq \notin \langle \boldsymbol{m} \rangle\}$. On a alors :

$$\langle \boldsymbol{m}, q \rangle = \bigcup_{j=0}^{l} \mathcal{A}_{jq}^{\boldsymbol{m}},$$

où $\mathcal{A}_{jq}^{\boldsymbol{m}} = \langle \boldsymbol{m} \rangle + jq$.

Nous nous restreignons maintenant au cas particulier, $k = 2$, c'est donc dire à l'idéal $m = \{a, b\}$ et au $\mathbb{N}$-module $\langle a, b\rangle$. Si $a < b$, $a$ et $b$ premiers entre eux, on peut écrire,

$$\langle a, b\rangle = \bigcup_{j=0}^{l} \mathcal{A}^a_{jb},$$

où $\mathcal{A}^a_{jq} = \langle a\rangle + jb$.

Dans ce cas, le calcul de $l = \mathbf{max}\{j \in \mathbb{N} \,|\, jb \notin \langle a\rangle\}$ donne $l = a - 1$. De plus les $\mathbb{N}$-modules affines sont disjoints deux à deux $\mathcal{A}^a_{jb} \cap \mathcal{A}^a_{ib} = \emptyset$ à condition que $j \neq i$. Nous avons donc,

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}^a_{jb},$$

où on dénote la réunion disjointe comme une somme d'ensembles.

Notre objectif est de trouver une expression pour le **complément de** $\langle a, b\rangle$, c'est à dire $\overline{\langle a, b\rangle} = \mathbb{N} \setminus \langle a, b\rangle$,

$$\overline{\langle a, b\rangle} := \{z \in \mathbb{N} \,|\, z \notin \langle a, b\rangle.\}$$

En utilisant la description affine d'un $\mathbb{N}$-module, et definissant $S^*_{a,b}(j) = \mathcal{A}^a_i \setminus \mathcal{A}^a_{jb}$ où $i = jb$ $\mathbf{mod}(a)$, le complément s'écrit comme :

$$\overline{\langle a, b\rangle} = \sum_{j=1}^{a-1} S^*_{a,b}(j), \qquad \text{voir éq.A.3}$$

L'avantage de cette description est que les **ensembles** $S^*_{a,b}(j)$ sont plus faciles à énumérer. Des proposition A.7 et A.8, nous obtenons que :

$$S^*_{a,b}(j) = \left\{ z = jb - ar \,\middle|\, 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor \right\},$$

et que :

$$|S^*_{a,b}(j)| = \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor.$$

Cela nous mène à la description suivante du complément, dans le cas $a$ et $b$ relativement premier :

$$\overline{\langle a, b\rangle} = \left\{ z = jb - ar \;\middle|\; 1 \leq j \leq a-1,\, 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor \right\},$$

et on a que :

$$\begin{aligned} |\overline{\langle a, b\rangle}| &= \left| \sum_{j=1}^{a-1} S^*_{a,b}(j) \right|, \\ &= \sum_{j=1}^{a-1} \left| S^*_{a,b}(j) \right|, && \text{car ils sont disjoints} \\ &= \sum_{j=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor, \\ &= \frac{(a-1)(b-1)}{2}. && \text{car } \mathbf{pgcd}(a,b) = 1, \text{ eq.1.1} \end{aligned}$$

Le problème de trouver le nombre d'éléments du complément dans un cas plus général, ainsi que le problème de trouver la valeur plus grande de cet ensemble (s'il existe), sont liés au problème de Frobenius que nous présentons dans la section **§1.3**.

D'autre part, on peut construire les éléments[1] de $\overline{\langle a, b\rangle}$ à partir des ensembles $S^*_{a,b}(j)$ dans le cas où $a$ et $b$ sont relativement premiers. Pour le considérer d'une façon plus claire et pour le généraliser, nous utiliserons une représentation cartésienne dans la section **§1.5**.

1. Cela représente les éléments de l'ensemble de Frobenius pour $a$ et $b$.

## 1.3 Problème de Frobenius

### Problème des pièces de monnaie

Le problème des pièces de monnaie, également appelé **problème de Frobenius** en l'honneur du mathématicien Ferdinand Frobenius, consiste à déterminer le montant le plus élevé l'on ne peut pas obtenir en utilisant uniquement des pièces de monnaie de valeurs fixées. La solution du problème pour un ensemble de pièces de monnaie donné est appelée le nombre de Frobenius de cet ensemble. Un bon exemple est le système européen qui utilise de pièces de 2 et 5 centimes (voir figure 1.1 [2]). Avec ces deux pièces, on peut exprimer tout montant, sauf 1 et 3 centimes.


Figure 1.1: Pièce de monnaie de 2 et 5 centimes d'Euro.

Plus formellement, le problème s'énonce comme suit. Étant donné un ensemble d'entiers positifs [3] $\boldsymbol{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, relativement premiers entre eux, déterminer le plus grand entier qui n'est pas une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls de ces entiers. Autrement dit, on cherche le plus grand entier qui n'est pas de la forme :

$$k_1m_1 + k_2m_2 + \cdots + k_nm_n.$$

La condition que les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient premiers entre eux est nécessaire pour assurer l'existence du nombre de Frobenius. En effet, toute combinaison linéaire de ces entiers est divisible par leur pgcd. Donc, un entier qui n'est pas multiple de ce pgcd ne peut pas être exprimé de cette manière, et il en existe d'arbitrairement grands. Par contre, si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont premiers entre eux, un théorème de Schur assure que tout nombre assez grand est combinaison linéaire à coefficients positifs ou

2. L'image a été faite de la composition de deux images séparées trouveés dans le site Wikipedia

3. Dans la définition $\boldsymbol{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ on suppose que $m_i < m_j$ si $i < j$.

nuls de ces entiers. Dans ce cas, le nombre de Frobenius existe donc bien.

En terme des notations de la section précédente le **nombre de Frobenius** est :

$$g(\boldsymbol{m}) := \max_{z \in \overline{\langle m \rangle}} \{z\}.$$

Le problème de Frobenius est difficile en général. Par contre, le cas de $n = 2$ est « bien connu », et c'est celui qui nous importe le plus pour la suite de notre travail. On a la valeur suivante :

$$g(a, b) = \max_{z \in \overline{\langle a, b \rangle}} \{z\} = b(a-1) - a,$$

pour $a < b$ relativement premiers. Cette formule a été donnée par **James Joseph Sylvester** (voir [18]). Sylvester montre aussi que le nombre d'entiers qui ne sont pas représentables comme combinaison linéaire de $a$ et $b$, c'est-à-dire le cardinal du complément, est :

$$|\overline{\langle a, b \rangle}| = \frac{(a-1)(b-1)}{2}. \tag{1.1}$$

Lorsque $n > 2$, on a la formule simple suivante dans le cas des ensembles d'entiers d'une **suite arithmétique** (voir [16]).

$$g(a, a+d, a+2d, \ldots, a+sd) = \left( \left\lfloor \frac{a-2}{s} \right\rfloor + 1 \right) a + (d-1)(a-1) - 1, \tag{1.2}$$

où $a, d, s \in \mathbb{N}$, avec $\mathbf{pgcd}(a, d) = 1$. De même, il y a une formule pour des ensembles d'entiers d'une **suite géométrique** (voir [15]).

$$g(m^k, m^{k-1}n, \ldots, n^k) = n^{k-1}(mn - m - n) + \frac{m^2(n-1)(m^{k-1} - n^{k-1})}{m-n}, \tag{1.3}$$

où $m, n, k \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{pgcd}(m, n) = 1$.

Concernant le nombre de Frobenius pour $n = 3$ en général, voici des résultats partiels. On trouve facilement que si $a$ et $b$ sont relativement premiers alors,

$$\begin{cases} g(a, b, c) = g(a, b) & \text{si } c \in \langle a, b \rangle \\ g(a, b, c) \le g(a, b) & \text{sinon} \end{cases}.$$

On continue avec l'équation 1.2. Prenons $s = 2$, comme $\mathbf{pgcd}(d, a) = 1$ implique que $\mathbf{pgcd}(a, a + d) = 1$, considérons $a = 2k + r$, où $k \geq 1$ et $r < 2$, donc,

$$\begin{aligned}
g(a, a+d, a+2d) &= \left(\left\lfloor \frac{2k+r-2}{2} \right\rfloor + 1\right) a + (d-1)(a-1) - 1, \\
&= \left(\left\lfloor \frac{2(k-1)+r}{2} \right\rfloor + 1\right) a + d(a-1) - (a-1) - 1, \\
&= \left(k + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right) a + d(a-1) - a, \\
&= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor a + d(a-1) - a + \\
&\quad + a(a-1) - a(a-1), \\
&= (a+d)(a-1) - a - a\,(2k + r - 1 - k)\,, \\
&= g(a, a+d) - a\,(k + r - 1)\,.
\end{aligned}$$

Séparant les cas pair et impair, on obtient :

$$g(a, a+d, a+2d) = \begin{cases} g(a, a+d) - a\left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1\right) & \text{si } a \text{ est pair} \\ g(a, a+d) - a\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor & \text{sinon} \end{cases}. \tag{1.4}$$

En travaillant de façon semblable l'équation 1.3, nous avons que $\mathbf{pgcd}(m, n) = 1$ alors $\mathbf{pgcd}(m^2, n^2) = 1$, donc,

$$\begin{aligned}
g(m^2, mn, n^2) &= n(mn - m - n) + m^2(n-1), \\
&= mn^2 - mn - n^2 + m^2 n - m^2, \\
&= mn^2 - mn - n^2 + m^2 n - m^2 + m^2 n^2 - m^2 n^2, \\
&= mn^2 - mn + m^2 n - m^2 + n^2(m^2 - 1) - m^2 n^2, \\
&= g(m^2, n^2) + mn^2 - mn + m^2 n - m^2 n^2, \\
&= g(m^2, n^2) + mn(n - 1 + m - mn), \\
&= g(m^2, n^2) + mn(-n(m-1) + m - 1), \\
&= g(m^2, n^2) - mn(g(m, n) + 1).
\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi donner la forme suivante à l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} g(m^2, mn, n^2) &= n^2m - mn - n^2 + m^2(n-1), \\ &= n^2(m-1) - nm + m^2(n-1), \\ &= g(m, n^2) + m - nm + m^2(n-1), \\ &= g(m, n^2) + m(m-1)(n-1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Cette expression nous a mené à une généralisation. Après avoir étudié de nombreux exemples, nous avons réussi à trouver une formule du nombre de Frobenius pour :

$$g(a, b, c) = g(d, c) + (k-1)a,$$

où $a = kd$, $b = (k+1)d$, $\mathbf{pgcd}(c, d) = 1$ et $k \geq 1$.

Prenons par exemple, $d = m$, $k = m$ $a = m^2$, $b = m(m+1)$ et $c = (m+1)^2$, donc,

$$g(kd, (k+1)d, c) = g(m^2, m(m+1), (m+1)^2).$$

Appliquant la conjecture, nous avons :

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= g(d, c) + (k-1)a, \\ &= g(m, (m+1)^2) + (m-1)m^2. \end{aligned}$$

Cela est égal à l'équation 1.5 :

$$\begin{aligned} g(m^2, m(m+1), (m+1)^2) &= g(m, (m+1)^2) + m(m-1)(m+1-1), \\ &= g(m, (m+1)^2) + (m-1)m^2. \end{aligned}$$

En résume, les résultats pour le nombre de Frobenius sont présentés dans le Tableau 1.1 :

Tableau 1.1: Nombre de Frobenius pour trois valeurs

| | | |
|---|---|---|
| $g(a, a+d, a+2d)$ | $g(a, a+d) - a\,(q+r-1)$ | $q = \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$<br>$\mathbf{pgcd}(a,d) = 1$<br>$r = a \ \mathbf{mod}(2)$ |
| $g(m^2, mn, n^2)$ | $g(m, n^2) + m(m-1)(n-1)$ | $m < n$<br>$\mathbf{pgcd}(m,n) = 1$ |
| $g(kd, (k+1)d, c)$ | $g(d,c) + (k-1)kd$ | $d < c$, $k \geq 1$[4]<br>$\mathbf{pgcd}(d,c) = 1$<br>conjecture |

Nous apportons une preuve pour le cas $k = 2$ dans l'appendice (voir proposition A.1). Il reste à donner une démonstration complète de la conjecture qu'on espère explorer dans de travaux à venir. Dans la section suivante, nous détaillons une autre généralisation du problème de Frobenius.

4. Dans le cas que $k = 1$, nous retrouvons le résultat qu'on a déjà vu $g(d, 2d, c) = g(d, c)$.

## 1.4 Une généralisation du Problème de Frobenius

Nous avons déjà vu le problème des pièces de monnaie. Dans cette section nous en considérons une généralisation. On motive notre démarche en considérant la valeur des timbres postaux. En 1946, le « Correo Central » de la ville de Buenos Aires, a émis une série de deux **timbres pour la poste aérienne** avec des valeurs 15 et 25 centavos (voir [12, pag. 521]). Nous avons déjà souligné que dans le cas où $a$ et $b$ ne sont pas relativement premiers, le cardinal du complément $\langle a, b\rangle$ dans $\mathbb{N}$ est infini. Alors, nous allons changer un peu l'énoncé. Nous allons plutôt chercher à déterminer le montant le plus élevé, parmi les multiples de **5**, que l'on ne peut pas obtenir en utilisant les timbres donnés.


Figure 1.2: Timbre pour la poste aérienne de 1946.

Comme $\mathbf{pgcd}(15, 25) = 5$, alors $\langle 15, 25\rangle \subseteq \langle 5\rangle$ par un argument classique (voir le proposition A.3). De plus, on montre facilement que $\langle 15, 25\rangle$ est un $\langle 5\rangle$-module (voir le proposition A.3). L'opération « $*$ » (voir définition A.3.1) fournit un isomorphisme de semi-anneau $\psi$ avec $\mathbb{N}$ (voir le proposition A.9). Nous avons que si $z \in \langle 15, 25\rangle$ comme $\langle 5\rangle$-module, il existe $x, y \in \langle 5\rangle$ tel que $z = 15 * x + 25 * y$,

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \psi(15 * x + 25 * y), \\
&= \psi(15)\psi(x) + \psi(25)\psi(y), && \text{car } \psi \text{ est un isomorphisme} \\
&= 3\psi(x) + 5\psi(y), && \text{car } \psi(k) = \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor \\
&= 3x' + 5y'. && \text{car } x, y \in \langle 5 \rangle
\end{aligned}$$

Donc, $\psi(\langle 15, 25\rangle) = \langle 3, 5\rangle$. Alors, nous avons que $\max\limits_{z \in \overline{\langle 3,5\rangle}} \{z\} = g(3,5) = 7$. Donc la plus grande valeur dans $\langle 5\rangle$, est calculée par l'isomorphisme inverse $\varphi$,

$$\varphi(7) = 35.$$

De plus, le complément du $\overline{\langle 15, 25\rangle}$ comme $\langle 5\rangle$-module nous l'obtenons à partir du $\overline{\langle 3, 5\rangle}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\langle 3,5\rangle} &= \{1, 2, 4, 7\}, \\
\varphi(\overline{\langle 3,5\rangle}) &= \varphi(\{1, 2, 4, 7\}), \\
&= \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(4), \varphi(7)\}, \\
&= \{5, 10, 20, 35\}.
\end{aligned}$$

De manière plus formelle, le problème s'énonce comme suit. Étant donné des entiers positifs[5] non relativement premiers entre eux, autrement dit $\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m}) = d$, on cherche à déterminer le plus grand entier multiple de $d > 1$ qui n'est pas une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls de ces entiers. C'est-à-dire, on cherche le plus grand entier qui n'est pas de la forme :

$$k_1 * m_1 + k_2 * m_2 + \cdots + k_n * m_n,$$

où « $*$ » satisfait la définition A.3.1.

Nous pouvons définir le nombre de Frobenius sur le $\langle d\rangle$-module $g_{\langle d\rangle}(\boldsymbol{m})$ comme :

$$g_{\langle d\rangle}(\boldsymbol{m}) := \varphi(g(\boldsymbol{m})),$$

5. Comme à la section précédente, les $m_i$ de $\boldsymbol{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ sont ordonnés de façon croissante.

et grâce à l'isomorphisme, nous avons que,

$$g_{\langle d \rangle}(\boldsymbol{m}) = d \cdot g(\boldsymbol{m}).$$

De façon analogue, le complément sur $\langle d \rangle$-module $\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}_{\langle d \rangle}$,

$$\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}_{\langle d \rangle} := \varphi\left(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}\right).$$

## 1.5 Représentation Cartésienne

Dans cette section nous introduisons une représentation parmi les plus utilisées dans les travaux sur les chemins de Dyck. Pour $a, b$ fixés, on obtient comme suit une **représentation cartésienne du $\mathbb{N}$-module** $\langle a, b\rangle$ (voir [13]). En utilisant la convention usuelle, (l'axe positif des $x$ vers la droite, et l'axe positif des $y$ vers la haut), on étiquette les cases de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ($\eta : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$) en additionnant $a$ lorsqu'on se déplace vers la gauche et $b$ lorsqu'on se déplace vers le bas en passant $\eta(0,0) = 0$. Ainsi le $\mathbb{N}$-module est représenté par la partie foncée comme illustré dans la figure 1.3. De plus le complément $\overline{\langle 3, 5\rangle} = \{1, 2, 4, 7\}$ est représenté en rouge.

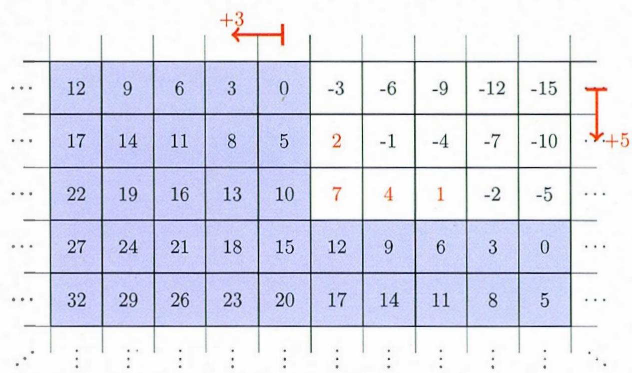



Figure 1.3: Représentation de $\langle 3, 5\rangle$ et de $\overline{\langle 3, 5\rangle}$.

Plus spécifiquement la valeur pour chaque case est donnée par la fonction suivante

$$\eta(x, y) = -by - ax \qquad\qquad \eta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Si nous restreignons l'image de la fonction $\eta$ [6] à $\mathbb{N}$, on remarque qu'il y a plusieurs couples $(x, y)$ pour lesquels $\eta(x, y) = 0$. Ils sont disposés de façon périodique et la distance entre deux valeurs consécutives est exactement la longueur de la diagonale du rectangle $(0, 0)$ et $(b, a)$. Par définition le $(a, b)$**-rectangle** est la partie de notre graphique contenue $[1, b] \times [0, a - 1]$ et pour raison de simplicité on le note $a \times b$.

6. La fonction $\eta$ est bijective si $\mathbf{img}(\eta) = \overline{\langle a, b\rangle}$ (voit A.2)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 | -9 | -12 | -15 |
| 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 | -1 | -4 | -7 | -10 |
| 22 | 19 | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | -2 | -5 |
| 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 |
| 32 | 29 | 26 | 23 | 20 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 |

Figure 1.4: Représentation de $(3,5)$-rectangle et $\overline{\langle 3,5\rangle}$.

Nous verrons les avantages de cette définition lors de notre étude de la relation entre les rectangles, l'ensemble des compléments, et les chemins de Dyck dans la section suivante. Observons que tous les nombres qui apparaissent dans l'étiquetage sont multiples de $d = \mathbf{pgcd}(a, b)$ comme illustré à la figure 1.5.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 | -9 | -12 | -15 | -18 |
| 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 | -9 | -12 |
| 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 |
| 33 | 30 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 |
| 39 | 36 | 33 | 30 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 |
| 45 | 42 | 39 | 36 | 33 | 30 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 |

Figure 1.5: $(3,6)$-rectangle

On remarque que le nombre d'éléments positifs dans chaque ligne est $\left\lfloor \frac{bj}{a} \right\rfloor$ où $1 \leq j \leq a-1$, qui correspond à la pente discrète de l'équation de la diagonale et nous pouvons construire ces éléments avec la formule de cette droite $bj - ak$ où $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{bj}{a} \right\rfloor$.

Nous construisons les **ensembles** $S^*_{a,b}(j)$ comme suit :

$$S^*_{a,b}(j) := \left\{ \eta(r, -j) \,\middle|\, 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor \right\}. \tag{1.7}$$

Pour calculer $Q_{a,b}$ le nombre de cases étiquetées avec une valeur positive ou zéro qui sont placées sous la diagonale de notre diagramme, on utilise $|S^*_{a,b}(j)|$ car cela nous donne ce nombre pour chaque ligne, donc on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{a,b} &= \sum_{j=1}^{a-1} |S^*_{a,b}(j)|, \\ &= \sum_{j=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bj}{a} \right\rfloor, \\ &= \frac{(a-1)(b-1) + \mathbf{pgcd}(a,b) - 1}{2}. \qquad \text{voir Appendice A.1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nous obtenons la **formule pour le nombre total de cases** dans le cas général qui se réduit à de la formule de Sylvester (voir l'équation 1.1) dans le cas de $a$ et $b$ premiers entre eux.

CHAPITRE II

# CAS RELATIVEMENT PREMIER DES CHEMINS DE DYCK

À cause des considérations soulevées dans le chapitre précédant, nous étudions d'abord les chemins de Dyck dans le rectangle $a \times b$, où $a$ et $b$ sont relativement premiers. En effet, ceux-ci apparaissent comme « séparateurs » entre $\mathbb{N}$-modules affines et leurs « compléments ». Dans le cadre des treillis de Young et de Kréwéras, nous utilisons les opérations bien connues sur ceux-ci pour comprendre les relations entre les chemins de Dyck, les partages, leur mot associé et les $\mathbb{N}$-modules affines. Apès un survol des notions d'aire et polynôme $q$-énumérateur, nous arrivons à la notion de « cœur ». Nous montrerons des liens directs déjà connus entre ceux-ci, les chemins de Dyck et $\mathbb{N}$-modules affines. Certaines de ces considérations peuvent s'étendre au cas non-relativement premier comme nous le verrons au chapitre qui suit.

## 2.1 Introduction

Rappelons qu'un **chemin de Dyck** est une suite de points dans le rectangle $a \times b$ qui reste sous la « diagonale », et constitués de pas verticaux descendants ou de pas horizontaux vers la droite. Techniquement, un pas est un couple $(x_i, y_i) \rightarrow (x_{i+1}, y_{i+1})$ où

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = \begin{cases} (x_i, y_i) + (1,0) \\ \\ (x_i, y_i) - (0,1) \end{cases} \quad \text{ou} \cdot$$

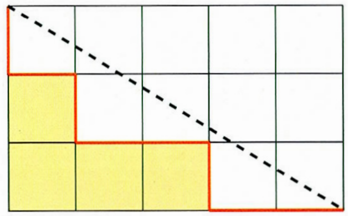
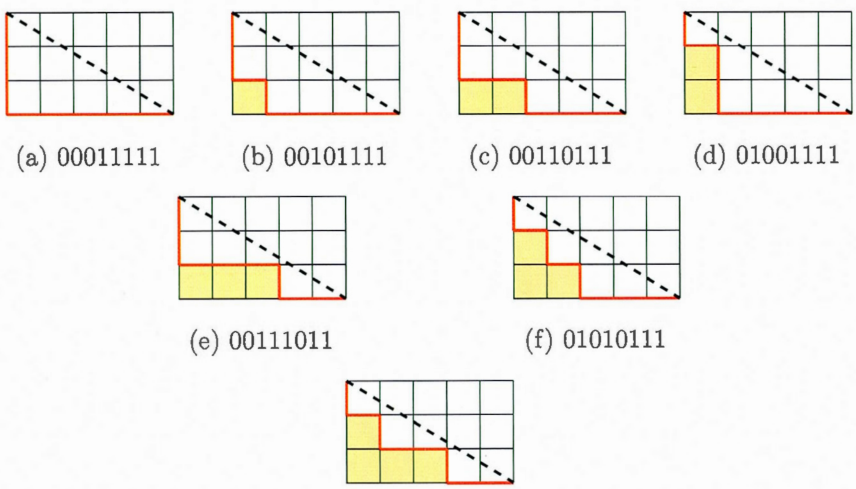


Figure 2.1: Un chemin de Dyck dans le rectangle $3 \times 5$.

Par exemple, on a le chemin de la figure 2.1 donné la suite :

$$(0,3) \to (0,2) \to (1,2) \to (1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to (3,0) \to (4,0) \to (5,0).$$

Pour simplifier, on code un chemin comme un mot constitué de « 0 » et « 1 », représentant respectivement le déplacement vertical et le déplacement horizontal (mot de Dyck). Pour l'exemple ci-dessus le codage est **01011011**. On dénote par $\mathscr{D}_{a,b}$ l'ensemble de tous les chemins de Dyck dans le rectangle $a \times b$. Par exemple, la figure 2.2 présente tous les chemins de $\mathscr{D}_{3,5}$ et le codage correspondant.



(a) 00011111 (b) 00101111 (c) 00110111 (d) 01001111

(e) 00111011 (f) 01010111

(g) 01011011

Figure 2.2: $\mathscr{D}_{3,5}$ et leurs codages.

Dans le cas où $a, b$ sont relativement premier le nombre de chemins de $\mathscr{D}_{a,b}$ est donné par la **formule de Catalan généralisé** :

$$\mathbf{Cat}_{a,b} = \frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

Pour obtenir cette formule, on utilise un argument « cyclique » sur l'ensemble $\mathcal{L}_{a,b}$ de mots contenant $a$ copies de **0** et $b$ copies de **1**. Rappelons que :

$$|\mathcal{L}_{a,b}| = \binom{a+b}{a}.$$

On agit par « rotation cyclique » sur ces mots et on montre que chaque orbite contient un seul mot de $(a, b)$-Dyck. Par exemple les rotations cycliques du mot **11110010** sont :

Tableau 2.1: Rotations cycliques du mot **11110010**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | **11110010** | 5 | **00101111** |
| 2 | **01111001** | 6 | **10010111** |
| 3 | **10111100** | 7 | **11001011** |
| 4 | **01011110** | 8 | **11100101** |

L'unique mot associé à un chemin de (3,5)-Dyck de la rotation cyclique du mot **11110010** est **00101111**.

Commençons par étiqueter les cases du rectangle $a \times b$ comme à la section **§1.5**. Nous observons que tous les chemins de Dyck ont sous le chemin des cases avec des étiquettes de valeur positive. Par exemple, pour le chemin 01011011 nous avons les étiquettes que montre la figure 2.3.

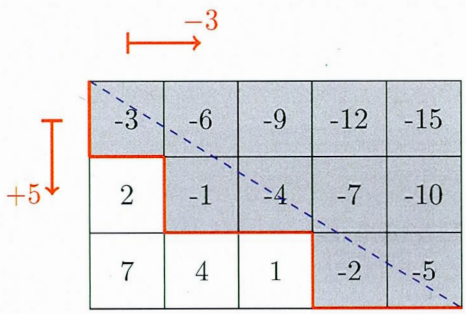
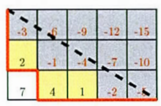
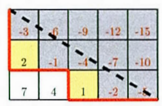



Figure 2.3: Chemin 01011011 dans $(3, 5)$-rectangle étiqueté.

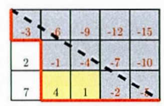
(a) 00011111



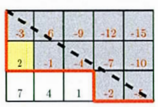
(b) 00101111



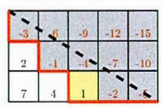
(c) 00110111



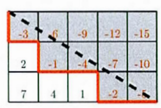
(d) 01001111



(e) 00111011



(f) 01010111



(g) 01011011

Figure 2.4: Tous les chemins de Dyck dans le $(3, 5)$-rectangle étiqueté.

La construction de la figure 2.4 et la représentation de la figure 2.5 suggèrent comment établir un lien entre l'ensemble $\mathscr{D}_{a,b}$ des chemins de Dyck et les compléments d'un $\mathbb{N}$-module. Nous reviendrons sur la façon d'établir cette relation dans la section **§2.2**, en utilisant $\mathcal{Y}_{a,b}$, l'ensemble de tous les $\mathbb{N}$-modules affines construit à partir du complément de $\langle a, b\rangle$.

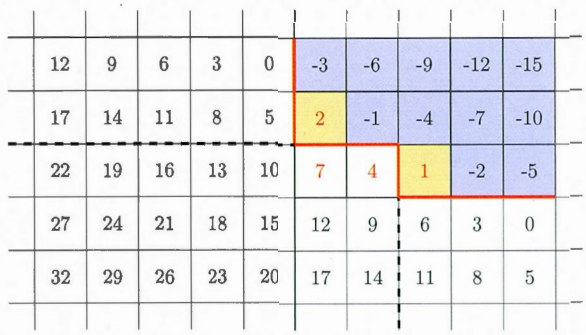



Figure 2.5: Chemin 00110111 et représentation de $\mathcal{A}^{3,5}_{\{4,7\}}$.

## 2.2 Ensemble des $\mathbb{N}$-modules affines et $\mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}$

Il y a plusieurs définitions de l'ensemble $\mathcal{Y}_{\boldsymbol{m}}$ (voir [11] et [5]). Nous utilisons la suivante :

$$\mathcal{Y}_{\boldsymbol{m}} = \{\mathcal{A}^{\boldsymbol{m}}_{\mathcal{B}} | \mathcal{B} \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle})\},$$ [1]

où $\mathcal{A}^{\boldsymbol{m}}_{\mathcal{B}} = \langle \boldsymbol{m} \rangle + \mathcal{B}$ est le $\mathbb{N}$-**module affine** engendré pour $\boldsymbol{m}$. Dans ce chapitre on utilise $\mathscr{P}^*(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}) = (\mathscr{P}(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}) \cup \{0\}) \setminus \emptyset$ pour incluire le cas $B = \{0\}$, et donc $\mathcal{A}^{\boldsymbol{m}}_{\{0\}} = \langle \boldsymbol{m} \rangle$. Nous pouvons réduire le nombre d'éléments, $|\mathcal{Y}_m| = 2^{|m|}$, car il y a plusieurs $B$ qui donnent le même $\mathcal{A}^{\boldsymbol{m}}_{\mathcal{B}}$, nous verrons dans la section **§2.3** un méthode pour choisir un ensemble minimal.

Par exemple, étant donné $\boldsymbol{m} = \{3,5\}$ et $\overline{\langle 3,5 \rangle} = \{1,2,4,7\}$, les $\mathbb{N}$-modules affines associés aux ensembles $\{1\}$, $\{1,4\}$, $\{1,7\}$ et $\{1,4,7\}$ sont égaux. Dans cet exemple, nous avons que l'ensemble $\mathcal{Y}_{3,5}$ contient sept éléments, comme il est indiqué ci-dessous, qui correspondent aux sept chemins de Dyck $\mathscr{D}_{3,5}$.

$$\mathcal{Y}_{3,5} = \{\mathcal{A}^{3,5}_{\{0\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{7\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{2\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{4\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{1\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{2,4\}}, \mathcal{A}^{3,5}_{\{1,2\}}\},$$

ou simplement :

$$\mathcal{Y}_{3,5} = \{\{0\}, \{7\}, \{2\}, \{4\}, \{1\}, \{2,4\}, \{1,2\}\}.$$

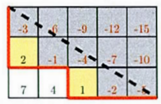
1. Attention !, le $\mathscr{P}^*(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}) = (\mathscr{P}(\overline{\langle \boldsymbol{m} \rangle}) \cup \{0\}) \setminus \emptyset$.

À partir d'une proposition bien connue (voir [11]), nous avons que ≪ *pour tout* $a$ *et* $b$ *relativement premiers il existe une bijection entre l'ensemble* $\mathcal{Y}_{a,b}$ *et l'ensemble* $\mathscr{D}_{a,b}$ ≫. Dans la figure 2.6 on donne un exemple qui met en évidence la bijection entre l'ensemble $\mathcal{Y}_{a,b}$ et l'ensemble $\mathscr{D}_{a,b}$.

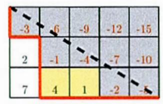
**Par exemple**

(a) $\{0\} \mapsto 00011111$

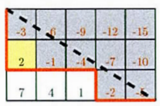
(b) $\{7\} \mapsto 00101111$



(c) $\{4\} \mapsto 00110111$

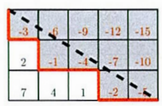


(d) $\{2\} \mapsto 01001111$



(e) $\{1\} \mapsto 00111011$

(f) $\{2,4\} \mapsto 01010111$



(g) $\{1,2\} \mapsto 01011011$

Figure 2.6: Bijection entre $\mathcal{Y}_{3,5}$ et $\mathscr{D}_{3,5}$

**Remarque :** Comme la représentation n'est pas unique nous pouvons prendre l'ensemble des tableaux Young qui est déterminé sous la courbe. Par exemple :

$$\mathcal{Y}_{3,5} = \{\{0\},\ \{7\},\ \{2,7\},\ \{4,7\},\ \{1,4,7\},\ \{2,4,7\},\ \{1,2,4,7\}\}$$

## 2.3 Construction d'une bijection entre $\mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{a,b}$

Voici une description explicite d'une bijection entre $\mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{a,b}$, pour $a < b$ relativement premiers. Pour les besoins de la construction, on considère le rectangle $a \times b$ de la forme $[1, b] \times [0, a-1]$. Les valeurs $z \in \overline{\langle a, b\rangle}$ satisfont la relation :

$$z = \eta(x, -y) = by - ax \geq 0 \qquad \text{où } (x, y) \in [1, b] \times [0, a-1].$$

On définit l'ensemble $\mathcal{Y}_{a,b}$ comme :

$$\mathcal{Y}_{a,b} = \{\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}} | \mathcal{B} \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})\}.$$

La construction consiste à trouver une injection $\varphi$ de $\mathscr{D}_{a,b}$ vers $\mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$ et une surjection $\psi$ de $\mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$ vers $\mathcal{Y}_{a,b}$ tels que $\psi|_{\mathbf{img}(\varphi)}$ soit injective et $\mathbf{img}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{Y}_{a,b}$. La première condition implique que la composition $\psi \circ \varphi$ est injective, et la deuxième qu'elle est surjective. Donc $\psi \circ \varphi$ est bijective.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}_{a,b} \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\psi\circ\varphi"'] & \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle}) \arrow[d, "\psi"] \\
 & \mathcal{Y}_{a,b}
\end{tikzcd}$$

Figure 2.7: Diagramme de $\varphi$ et $\psi$.

**Définition 2.3.1.** *On définit les ensembles suivants pour faciliter l'écriture. Soit $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ relativement premiers, $\alpha \in \overline{\langle a, b\rangle}$ et $\mathcal{B} \in \mathscr{P}(\overline{\langle a, b\rangle})$ :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\alpha) &:= \{r \in \overline{\langle a, b\rangle} | \eta^{-1}(r) \in [1, x_\alpha] \times [y_\alpha, a-1]\},\\
L_y(\mathcal{B}) &:= \{x | (x, y) \in \eta^{-1}(\mathcal{B})\},\\
\mathcal{C}(\mathcal{B}) &:= \left\{\eta(x, y) | x = \boldsymbol{max}(L_y(\mathcal{B})), (x, y) \in \eta^{-1}(\mathcal{B})\right\}.
\end{aligned}$$

**Etape** 1 : **Construction de $\varphi$.**

On identifie l'injection $\varphi$ à la fonction qui assigne à chaque $\gamma \in \mathscr{D}_{a,b}$, l'ensemble $\mathcal{C}_\gamma \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b \rangle})$ correspondant aux valeurs placées le plus à droite de chaque ligne du profil de la courbe comme le montre la figure 2.8 :

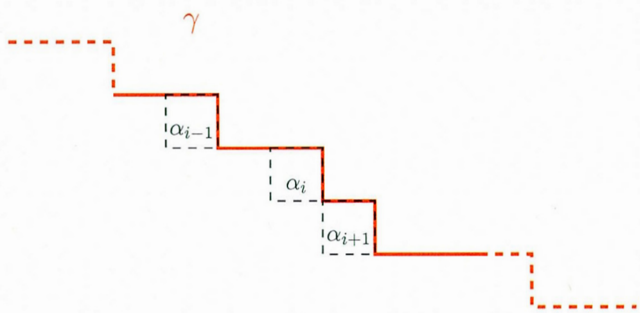



Figure 2.8: L'ensemble $\mathcal{C}_\gamma$ .

Il est clair qu'il y a un bijection entre une courbe et son profil, c'est-à-dire étant donné deux courbes $\gamma_1 \neq \gamma_2$ on a $\mathcal{C}_{\gamma_1} \neq \mathcal{C}_{\gamma_2}$, donc $\varphi$ est injective.

**Etape** 2 : **Construction de $\psi$.**

Il existe une surjection $\psi : \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b \rangle}) \to \mathcal{Y}_{a,b}$, par definition de $\mathcal{Y}_{a,b}$, en assignant un élément $\mathcal{B} \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b \rangle})$ au correspondant $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}}$, $\psi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}^{a,b}_{\{\mathcal{B}\}}$.

**Etape** 3 : **Injectivité de $\psi|_{\mathbf{img}(\varphi)}$.**

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{C}_{\gamma_1}, \mathcal{C}_{\gamma_2} \in \mathbf{img}(\varphi)$. Si $\psi(\mathcal{C}_{\gamma_1}) = \psi(\mathcal{C}_{\gamma_2})$ alors $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_{\gamma_1}} = \mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_{\gamma_2}}$. Par le lemme 2.3.1 nous avons que $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_{\gamma_1}} = \mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_{\gamma_2}}$ si et seulement si $\mathcal{C}_{\gamma_1} = \mathcal{C}_{\gamma_2}$, donc $\psi|_{\mathbf{img}(\varphi)}$ est injective.

**Etape** 4 : **Surjectivité, $\mathbf{img}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{Y}_{a,b}$.**

Il est clair que la définition de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ est égal à $\mathcal{C}_\gamma$. Donc, étant donné $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}}$, par le lemme 2.3.1 il existe $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ tel que $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$. Par définition, il existe $\gamma \in \mathscr{D}_{a,b}$ tel que $\mathcal{C}(\mathcal{B}) = \mathcal{C}_\gamma$, ce qui implique que quel que soit $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{Y}_{a,b}$ il existe $\gamma \in \mathscr{D}_{a,b}$ tel que $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_\gamma}$. Comme $\mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_\gamma} = \psi(\mathcal{C}_\gamma)$ et $\mathcal{C}_\gamma = \varphi(\gamma)$ nous avons que pour tout $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{a,b} \in \mathcal{Y}_{a,b}$ il existe $\gamma \in \mathscr{D}_{a,b}$ tel que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{a,b} = \psi \circ \varphi(\gamma)$ donc $\psi \circ \varphi$ est surjective.

Le lemme suivant a été utilisé ci-dessus. Il introduit une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$ tel que l'ensemble quotient pour cette relation est en bijection avec $\mathcal{Y}_{a,b}$.

**Lemme 2.3.1.** *Soient $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ relativement premiers, et $\alpha, \beta \in \overline{\langle a, b\rangle}$.*

*i) Alors, $\mathcal{A}_{\{\beta\}}^{a,b} \subseteq \mathcal{A}_{\{\alpha\}}^{a,b}$ si est seulement si $\beta \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

*ii) Soit $\mathcal{B} \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$. Alors, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{a,b} = \mathcal{A}_{\{\alpha\}}^{a,b}$ si est seulement si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}(\alpha)$ et $\alpha \in \mathcal{B}$.*

*iii) Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$. Alors, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{a,b} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_2}^{a,b}$ si est seulement si $\mathcal{C}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{C}(\mathcal{B}_2)$.*

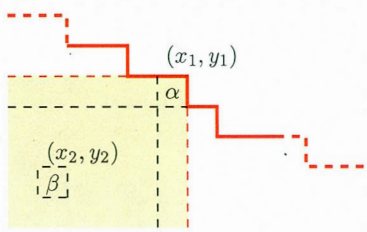



Figure 2.9: schema de $\mathcal{R}(\alpha)$ .

*Démonstration.* $i)$ Soit $z \in \mathcal{A}_{\{\beta\}}^{a,b}$ il existe $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tels que $z = bq_1 + aq_2 + \beta$, on a aussi que $\alpha = \eta(x_\alpha, y_\alpha)$, $\beta = \eta(x_\beta, y_\beta)$ et $\beta = \alpha + b(y_\beta - y_\alpha) - a(x_\beta - x_\alpha)$, donc on obtient :

$$\begin{aligned} z &= bq_1 + aq_2 + \beta \\ &= bq_1 + aq_2 + \alpha + b(y_\beta - y_\alpha) - a(x_\beta - x_\alpha) \\ &= b(q_1 + y_\beta - y_\alpha) + a(q_2 - x_\beta + x_\alpha) + \alpha. \end{aligned}$$

Alors, $z \in \mathcal{A}_{\{\alpha\}}^{a,b}$ si et seulement si $q_1 + y_\beta - y_\alpha \geq 0$ et $q_2 - x_\beta + x_\alpha \geq 0$, ce qui implique que $-x_\beta + x_\alpha \geq 0$ et $y_\beta - y_\alpha \geq 0$, et alors $1 \leq x_\beta \leq x_\alpha$ et $y_\alpha \leq x_\beta \leq a - 1$, donc $\beta \in \mathcal{R}(\alpha)$. $\square$

*Démonstration. ii)* Pour tout $r \in \mathcal{B}$, $r$ vérifie les condition de la partie $i)$ du lemme implique $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{a,b} \subseteq \mathcal{A}_{\{\alpha\}}^{a,b}$ donc $\mathcal{A}_{\{\alpha\}}^{a,b} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{a,b}$ si et seulement si $\alpha \in \mathcal{B}$. □

*Démonstration. iii)* Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathscr{P}^*(\overline{\langle a, b\rangle})$. Supposons que $\mathcal{C}(\mathcal{B}_1) \neq \mathcal{C}(\mathcal{B}_2)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathcal{B}_1) \neq \mathcal{C}(\mathcal{B}_2) &\Leftrightarrow \\
\exists \beta' \in \mathcal{C}(\mathcal{B}_1) \text{ et } \beta' \notin \mathcal{C}(\mathcal{B}_2) &\Leftrightarrow && \text{sans perte de généralité} \\
\exists \beta'' \in \mathcal{C}(\mathcal{B}_2) \text{ tel que } y_{\beta'} = y_{\beta''} \text{ et } x_{\beta'} > x_{\beta''} &\Leftrightarrow && \text{car } \mathcal{C}(\mathcal{B}_2) \text{ est} \\
& && \text{maximal pour chaque } y \\
\mathcal{R}(\beta'') \subsetneq \mathcal{R}(\beta') &\Leftrightarrow \\
\beta' \notin \mathcal{R}(\beta) \,\forall \beta \in \mathcal{B}_2 &\Leftrightarrow \\
\beta' \notin \mathcal{B}_2 \text{ et } \mathcal{B}_2 \subsetneq \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_1} \mathcal{R}(\beta) &\Leftrightarrow \\
\mathcal{A}_{\mathcal{B}_2}^{a,b} \neq \mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{a,b} & && \text{par } ii) \text{ et par définition } \mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{a,b}
\end{aligned}$$

□

## 2.4 Construction de la bijection en terme du mot associé

Nous pouvons aussi construire la bijection de la section **§2.3** à partir $w$ mot associé à un chemin de Dyck. Nous divisons $w$ en sous-mots $w_i$ qui commencent à l'origine et finissent dans chaque changement de **1** vers **0** comme dans la figure 2.10 :

$$\ldots 0 \ldots 0\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{00011}_{w_1}\,0111}_{w_2}\,01}_{w_3}\,0\ldots 0011}_{w_{n+1}}11\ldots 1\ldots$$

Figure 2.10: Construction des sous-mots.

On note $|w|_0$ et $|w|_1$ le nombre de **0** et **1** que contient $w$ respectivement. Soit $(x_i, y_i) = (|w_i|_1, |w_i|_0)$ le paire ordonnée associée à chaque sous-mot $w_i$ de $w$, comme l'illustre la figure 2.11 :

$$\begin{aligned}
w_1 &= 00011 \to (x_1, y_1),\\
w_2 &= 000110111 \to (x_2, y_2),\\
w_3 &= 00011011101 \to (x_3, y_3),\\
&\vdots \to \vdots,\\
w_{n+1} &= 00011011101\ldots 1 \to (x_{n+1}, y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Figure 2.11: Construction des paires ordonnées

Chaque paire ordonnée correspond à la coordonnée du profil de la courbe, alors nous avons construire l'ensemble $C_\gamma$ (voir définition 2.3.1), à partir de $w$, donc nous assignons $C_w := C_\gamma$. De la même façon on dit que $\varphi(w) := \mathcal{C}_w$ et finalement, la bijection est $\psi \circ \varphi(w) = \mathcal{A}^{a,b}_{\mathcal{C}_w}$.

## 2.5 Partage associé et Diagramme de Ferrers

Un **partage d'un entier** $n \geq 0$ est une décomposition de cet entier en une somme d'entiers strictement positifs, à l'ordre près des termes, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$, où nous appelons $n$ la **taille** et $k$ la **longueur**. Par convention, le seul partage de 0 est 0. Une telle partage est en général représenté par la suite rangée par ordre décroissant. On dit que $\lambda$ est un partage de $n$ en notant $\lambda \vdash n$. On note $\Lambda_n$ l'ensemble de tous les partages de $n$. Par exemple, $\Lambda_5$ est l'ensemble de suites suivantes :

$$\Lambda_5 = \{[5], [4,1], [3,2], [3,1,1], [2,2,1], [2,1,1,1], [1,1,1,1,1]\}.$$

On obtient ainsi une bijection entre les chemins de $(a,b)$-Dyck et les partages sous la diagonale. Par exemple

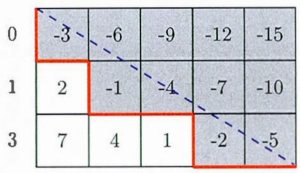
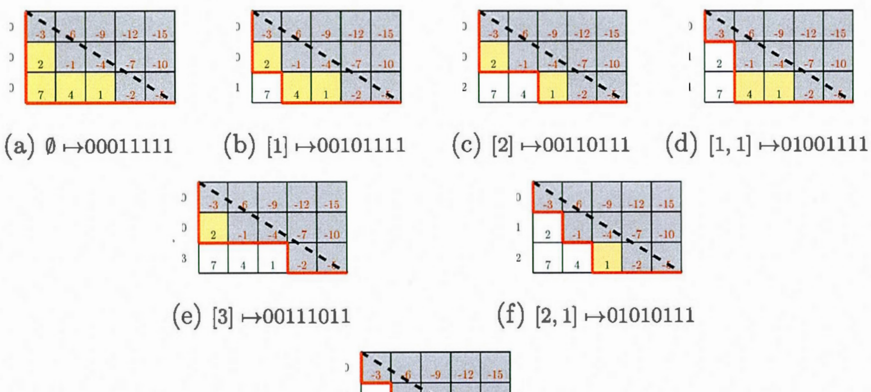



Figure 2.12: Chemin 01011011 et son partage [3,1].



(a) $\emptyset \mapsto 00011111$ (b) $[1] \mapsto 00101111$ (c) $[2] \mapsto 00110111$ (d) $[1,1] \mapsto 01001111$

(e) $[3] \mapsto 00111011$ (f) $[2,1] \mapsto 01010111$

(g) $[3,1] \mapsto 01011011$

Figure 2.13: Les partages associés à $\mathscr{D}_{3,5}$.

Un **diagramme de Ferrers** est une collection finie de cases organisée en lignes alignées à gauche, avec la propriété que les longueurs des lignes croissent au sens large (chaque ligne est aussi longue ou plus longue que la précédente). La suite des longueurs des lignes donne un partage $\lambda$ de l'entier $n$ qui est le nombre total de cases du diagramme. Plus techniquement, un diagramme de Ferrers est un ensemble de cases $c := (i, j)$ de coordonnées $i, j \geq 0$, tel que si $c' := (i', j')$ avec $i' \leq i$ et $j' \leq j$, alors, $c'$ appartient aussi à l'ensemble.

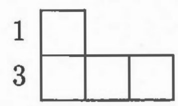



Figure 2.14: Partage $[3, 1] \vdash 4$.

La figure 2.14 montre le diagramme associé au partage [3,1]. Le partage $\lambda$ est appelé la forme du diagramme. Dans ce qui suit, nous ne ferons pas de distinction entre partage et diagramme de Ferrers.

## 2.6 Treillis de Young et de Kréwéras

Un **treillis** est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. On parle aussi d'espace réticulé. Un treillis est dit borné s'il possède un maximum et un minimum. Dans un treillis borné, toute partie finie possède une borne supérieure et une borne inférieure. En particulier, nous étudions le cas du $(a, b)$-Diagramme et définissons sur lui des chemins avec des propriétés particulières. L'inclusion d'un diagramme de Ferrers dans un autre définit une structure de treillis, c'est le **Treillis de Young** (voir figure 2.15).

Si nous colorions les partages qui correspondent aux chemins de Dyck, nous obtenons un sous-treillis à l'intérieur du treillis de Young qui s'appelle **Treillis de Kréwéras** (voir figure 2.16).

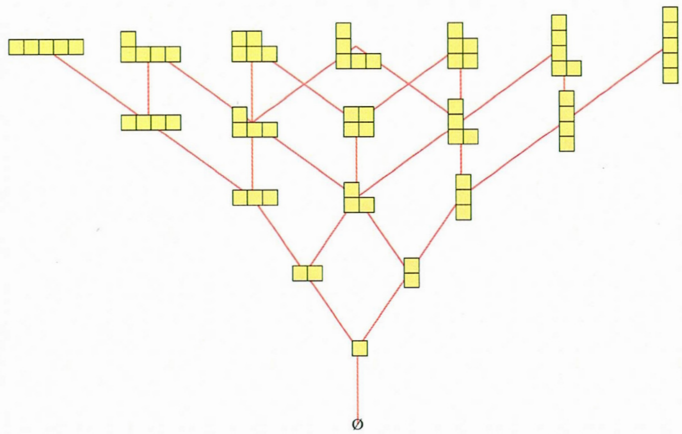


Figure 2.15: Treillis de Young jusqu'au niveau 5.

Si nous utilisons le codage qui représente un chemin de Dyck comme un mot de **0** et **1** il y a une paire **d'opérations** U et D qui nous permettent de parcourir le treillis vers le haut ou vers le bas. Pour monter, on utilise des transpositions sur les zéros du mot et pour descendre des transpositions sur les uns (voir figure 2.17).

Dans la figure on fait la transposition de $\ldots 11010111\ldots$ à $\ldots 11001111\ldots$, de cette façon si nous prenons le chemin plus proche sous la diagonale (chemin de Christoffel) et nous appliquons des transpositions sur les uns, nous obtenons tous les chemins de Dyck (voir figure 2.16 Treillis de Kréwéras). Dans la figure 2.18, nous observons l'inclusion de treillis de Kréwéras de $\mathscr{D}_{3,5}$ dans $\mathscr{D}_{4,5}$.

L'avantage de la représentation du Treillis de Kréwéras est de pouvoir trouver les chemins de Dyck pour tous les cas, même dans le cas où $a$ et $b$ ne sont pas relativement premiers, car il existe des injections sur les diagrammes qui le sont. Nous verrons plus de détails dans le chapitre **§3**

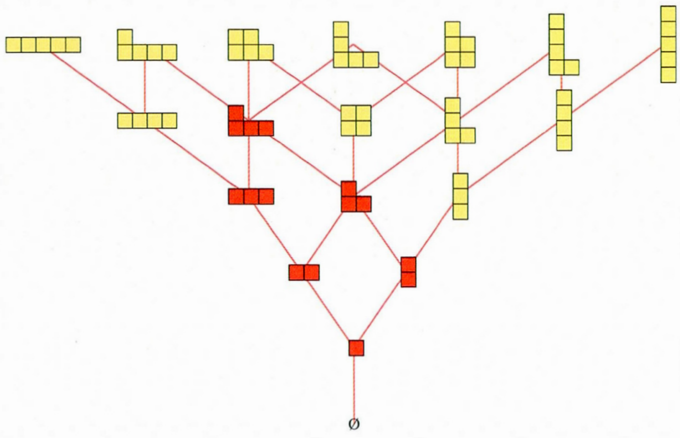



Figure 2.16: Treillis de Kréwéras du partage [3,1].

(a) L'opération **D** (b) L'opération **U**

Figure 2.17: Les opérations sur un diagramme.

## 2.7 L'aire d'un chemin de $\mathscr{D}_m$ et le polynôme $q$-énumérateur.

Nous faisons un survol sur des objets liés aux chemins de Dyck qui sont souvent utilisés. Ces objets peuvent nous donner des points de vue différents pour nos questions.

**L'aire d'un chemin de Dyck** $\alpha \in \mathscr{D}_{m,n}$ est définie comme le nombre de cases entières qu'il y a entre le chemin $\alpha$ et le chemin plus proche sous la diagonale (chemin de Christoffel). Soit $\alpha = (a_1, \ldots, a_2)$ un chemin de Dyck et $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$ le **chemin de Christoffel,** nous avons :

$$\mathbf{area}_m(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} d_i - a_i.$$

À partir de cela nous pouvons obtenir le **polynôme $q$-énumérateur** avec l'aire de la

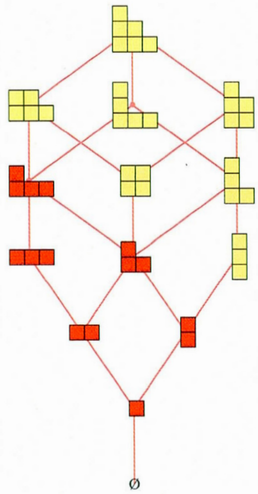



Figure 2.18: L'inclusion de $\mathscr{D}_{3,5}$ dans $\mathscr{D}_{4,5}$.

façon suivante :

$$\mathbf{Cat}_{\boldsymbol{m}}(q) = \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{m}}} q^{\mathbf{area}_{\boldsymbol{m}}(\alpha)}.$$

Par exemple pour $\boldsymbol{m} = (n+1, n)$, nous écrivons $\mathbf{Cat}_n(q)$ pour raison de simplification au lieu de $\mathbf{Cat}_{n+1,n}(q)$, nous obtenons :

Si nous calculons $\mathbf{Cat}_{(m,n)}(q)$ pour $q = 1$ on retrouve :

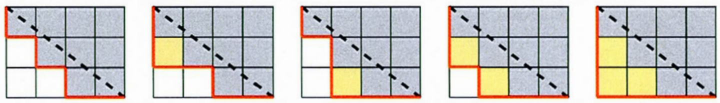
$$\mathbf{Cat}_{(m,n)}(1) = \mathbf{Cat}_{(m,n)}.$$

La figure 2.19 fait remarquer le lien entre les monômes du polynôme $\mathbf{Cat}_{(m,n)}(q)$ et les aires correspondantes, dans le treillis de Kréwéras pour le cas $\mathscr{D}_{3,5}$.

Nous verrons, dans la section **§3.3**, de possibles extensions dans les cas non relativement premiers de ces notions.

Tableau 2.2: $\mathbf{Cat}_n(q)$.

| | |
|---|---|
| $\mathbf{Cat}_0(q)$ | $1$ |
| $\mathbf{Cat}_1(q)$ | $1$ |
| $\mathbf{Cat}_2(q)$ | $1+q$ |
| $\mathbf{Cat}_3(q)$ | $1+2q+q^2+q^3$ |
| $\mathbf{Cat}_4(q)$ | $1+3q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5+q^6$ |



$q^0$ $q^1$ $q^1$ $q^2$ $q^3$

## 2.8 $(a, b)$-Cœur

Passons maintenant à un autre mode de représentation. Les **$a$-cœurs** apparaissent dans plusieurs travaux de combinatoire et de topologie algébrique entre autres. Par exemple, dans l'article [7] on présente l'ensemble des $a$-cœurs comme orbites de l'action du groupe symétrique affine sur le partage vide. En géométrie affine, dans l'étude des variétés grassmanniennes, les cœurs indexent les variétés de Schubert. Dans l'étude des groupes de Coxeter, les cœurs sont liés à la longueur minimale de certaines classes à gauche [4]. Dans les articles [2] et [3] on établit un lien entre bicœurs et chemins de Dyck. Un article récent (voir [1]) étudie les liens entre multi-cœurs, posets, et chemins dans un treillis. Dans cette section nous utilisons les résultats et notations de [3] qui relient les **cœurs** aux chemins appartenant à un treillis, et nous énonçons une partie de leurs propriétés.

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k) \vdash n$, un partage de l'entier $n \in \mathbb{N}$, de longueur est $k$, nous pouvons le représenter comme le diagramme de la figure 2.20.

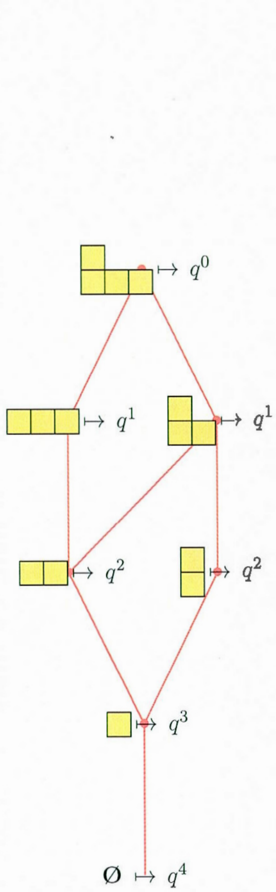



Figure 2.19: Lien entre les polynômes et les aires dans $\mathscr{D}_{3,5}$.

Par exemple, voici le partage $[5,4,3,3,2,1] \vdash 18$,

On appelle **cœur**, le **tableau** construit à partir du **diagramme de Ferrers**, remplissant les cases de $\lambda$ par la valeur de la longueur de l'équerre correspondante à chaque case. Ceci est illustré à la figure 2.22.

Pour chaque case $c \in \lambda$ dans le partage, nous associons sa **longueur de l'équerre** $h(c)$, qui est le nombre de cellules directement en dessous et directement à droite de $c$ (y compris $c$ elle-même ). Par exemple, ci-dessus nous avons marqué chaque case par sa longueur d'équerre. Nous pouvons écrire la longueur de l'équerre de $c = (i,j)$ comme suit :

$$h(c) := \#\{(i,j') \mid j' \geq j\} \cup \{(i',j) \mid i' \geq i\}.$$

Nous disons qu'un diagramme de Ferrers $\lambda$ est un $a$-cœur si aucune de ses cases n'a de longueur d'équerre égale à $a$.

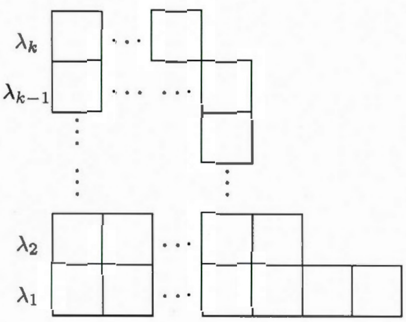



Figure 2.20: Représentation du partage $\lambda$.

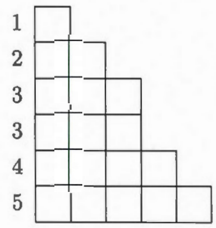



Figure 2.21: Partage $[5, 4, 3, 3, 2, 1] \vdash 18$.

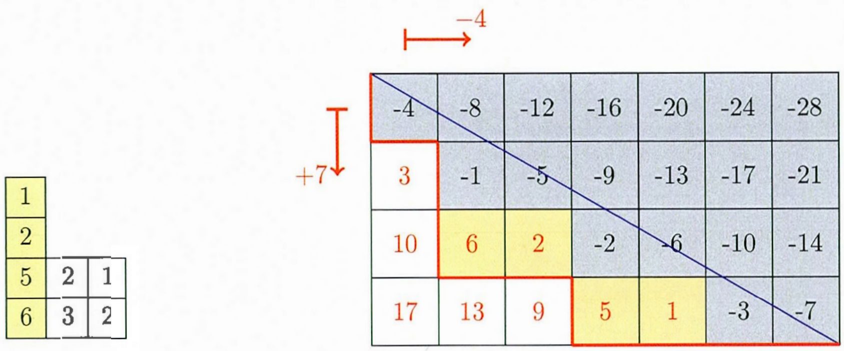
Maintenant, nous considérons les diagrammes de Ferrers $\lambda$ qui sont un $a$-cœur et un $b$-cœur simultanément. On dit alors que $\lambda$ est un $(a, b)$-cœur. Selon Anderson (voir [2]), le nombre total de $(a, b)$-cœurs d'un partage est fini si et seulement si $a$ et $b$ sont relativement premiers, et celui est le nombre de Catalan :

$$\mathbf{Cat}_{a,b} = \frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

Remarquons qu'un diagramme $\lambda$ est complètement déterminé par les longueurs des équerres des cases dans sa première colonne $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Ceci permet de déterminer une bijection entre $(a, b)$-cœurs et chemins de Dyck $\mathscr{D}_{a,b}$. Commençons pour étiqueter les cases du rectangle $a \times b$ comme dans la section **§1.5** (en additionnant $a$ vers la gauche et $b$ vers le bas). La bijection est déterminée en prenant comme première colonne $c$, les cases positives entre le chemin et la diagonale de façon décroissante (voir [3]). Par exemple, le diagramme $\lambda$ à $c = \{1, 2, 5, 6\}$ est un $(4, 7)$-cœur correspondant à $\mathscr{D}_{7,9}$ comme on puet l'observer dans la figure 2.23.


(a) L'équerre (b) Le cœur

Figure 2.22: Construction d'un cœur.




(a) Le Cœur associé (b) Chemin de Dyck 01001101111

Figure 2.23: Chemin de Dick et le cœur associé.

Nous avons déjà vu que si $a$ et $b$ sont relativement premiers, il existe une bijection entre les chemins de Dyck $\mathscr{D}_{a,b}$ et les $\mathbb{N}$-modules affines $\mathcal{Y}_{a,b}$ dans la section **§2.2**. Nous avons aussi une bijection entre les chemins de Dyck et les $(a, b)$-**cœurs**. Alors, nous pouvons établir une bijection directe entre les **$\mathbb{N}$-module affine** $\mathcal{Y}_{a,b}$ et les $(a, b)$-**cœurs**.

En utilisant la représentation des ensembles du complément et la première colonne, nous avons par exemple pour $a = 3$ et $b = 5$ :

Tableau 2.3: $(3,5)$-**cœur** vers $\mathcal{Y}_{3,5}$

| (3,5)-**cœur** | $\mathcal{Y}_{3,5}$ |
|---|---|
| $\emptyset$ | $\{1,2,4,7\}$ |
| 1 | $\{2,4,7\}$ |
| 2 1 | $\{1,4,7\}$ |
| 1<br>2 | $\{4,7\}$ |
| 1<br>4 2 1 | $\{2,7\}$ |
| 1<br>2<br>4 1 | $\{7\}$ |
| 1<br>2<br>4 1<br>7 4 2 1 | $\emptyset$ |

Le tableau 2.3 nous suggère comment construire la bijection ente les $(3,5)$-cœurs et les $\mathcal{A}_B^{3,5}$ en prenant $B = \overline{\langle 3,5 \rangle} \setminus \boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{c}$ est la première colonne et $B$ est un sous-ensemble non vide de $\overline{\langle 3,5 \rangle}$.

**Définition 2.8.1** (voir [3]). *Le* ***conjugué d'un diagramme*** *$\lambda$ est défini comme le diagramme $\lambda'$ qui correspond à sa réflexion qui est équivalente à la réflexion du cœur associé. Donc on dit aussi le* ***conjugué d'un cœur****.*

Par exemple, dans la figure 2.24, nous voyons $\lambda$ avec $\boldsymbol{c} = \{1,4\}$ et son conjugué $\lambda'$ avec $\boldsymbol{c} = \{1,2,4\}$ :

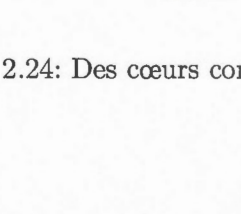



Figure 2.24: Des cœurs conjugués.

Nous observons que $\lambda$ est un $(a, b)$-**cœur** si et seulement si $\lambda'$ est un $(a, b)$-**cœur**. Comme les cœurs sont en bijection avec les éléments de $\mathcal{Y}_{a,b}$, nous pouvons trouver de façon semblable une relation entre les $\mathbb{N}$-modules affines dans $\mathcal{Y}_{a,b}$. Nous avons aussi des éléments qui sont auto conjugués, c'est-à-dire les cœurs qui sont symétriques par rapport à la réflexion.

**Proposition 2.1** (voir [9]). *Si $a$ et $b$ sont relativement premiers alors le nombre de $(a, b)$-**cœurs** auto conjugués est :*

$$\binom{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \lfloor \frac{b}{2} \rfloor} = \frac{(\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor)!}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor! \lfloor \frac{b}{2} \rfloor!}.$$

Par exemple si $a = 3$ et $b = 5$ nous avons $\binom{1+2}{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ auto conjugués,

Tableau 2.4: $(3, 5)$-**cœur**, $\mathcal{Y}_{3,5}$ et leurs conjugués.

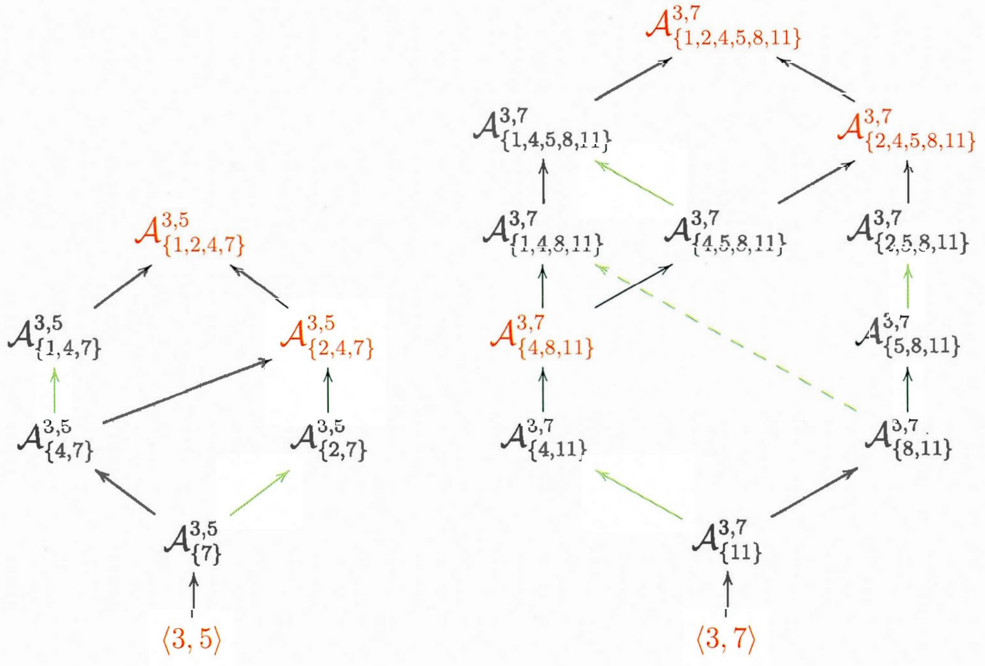
| $\mathcal{Y}_{3,5}$ | (3,5)-**cœur** | conjugué | $\mathcal{Y}_{3,5}$ |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2, 4, 7\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{1, 2, 4, 7\}$ |
| $\{2, 4, 7\}$ | $\begin{array}{l} 1 \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1 \end{array}$ | $\{2, 4, 7\}$ |
| $\{1, 4, 7\}$ | $\begin{array}{ll} 2 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$ | $\{4, 7\}$ |
| $\{4, 7\}$ | $\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} 2 & 1 \end{array}$ | $\{1, 4, 7\}$ |
| $\{2, 7\}$ | $\begin{array}{lll} 1 & & \\ 4 & 2 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} 1 & \\ 2 & \\ 4 & 1 \end{array}$ | $\{7\}$ |
| $\{7\}$ | $\begin{array}{ll} 1 & \\ 2 & \\ 4 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{lll} 1 & & \\ 4 & 2 & 1 \end{array}$ | $\{2, 7\}$ |
| $\emptyset$ | $\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 7 & 4 & 2 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 7 & 4 & 2 & 1 \end{array}$ | $\emptyset$ |

et si $a = 3$ et $b = 7$ nous avons $\binom{1+3}{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ auto conjugués.

Tableau 2.5: $(3,7)$-**cœur**, $\mathcal{Y}_{3,7}$ et leurs conjugués.

| $\mathcal{Y}_{3,7}$ | $(3,7)$-**cœur** | conjugué | $\mathcal{Y}_{3,7}$ |
|---|---|---|---|
| {1,2,4,5,8,11} | $\emptyset$ | $\emptyset$ | {1,2,4,5,8,11} |
| {2,4,5,8,11} | $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$ | {2,4,5,8,11} |
| {1,4,5,8,11} | $\begin{smallmatrix}2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ | {4,5,8,11} |
| {4,5,8,11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}2&1\end{smallmatrix}$ | {1,4,5,8,11} |
| {2,5,8,11} | $\begin{smallmatrix}1\\4&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\end{smallmatrix}$ | {5,8,11} |
| {5,8,11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\4&2&1\end{smallmatrix}$ | {2,5,8,11} |
| {1,4,8,11} | $\begin{smallmatrix}2&1\\5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\end{smallmatrix}$ | {8,11} |
| {8,11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}2&1\\5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | {1,4,8,11} |
| {4,8,11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\\5&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\5&2&1\end{smallmatrix}$ | {4,8,11} |
| {4,11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\\5&2&1\\8&5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\\8&5&2&1\end{smallmatrix}$ | {11} |
| {11} | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\\8&5&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\5&2&1\\8&5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | {4,11} |
| $\emptyset$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\\8&5&2&1\\11&8&5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix}1\\2\\4&1\\5&2\\8&5&2&1\\11&8&5&4&2&1\end{smallmatrix}$ | $\emptyset$ |

À partir des tableaux de cœurs conjugués et $\mathcal{Y}_{a,b}$, nous construisons le schéma d'inclusion illustré à la figure 2.25. Chaque flèche indique l'inclusion de $\mathbb{N}$-module. La ligne de couleur verte indique la conjugaison, les éléments en rouge sont auto conjugués et la ligne pointillée verte indique la situation où on a conjugaison, mais pas inclusion.




(a) $\mathcal{Y}_{3,5}$ (b) $\mathcal{Y}_{3,7}$

Figure 2.25: Le schéma d'inclusion de $\mathbb{N}$-module affine

Il serait très intéressant de mieux comprendre la relation entre les cœurs conjugués en termes de $\mathbb{N}$-modules affines.

Une autre propriété intéressante concerne **la taille d'un cœur**, c'est-à-dire le nombre de cases qu'il contient. À partir de cette propriété, nous vérifierons des résultats obtenus dans la section A.4 ainsi que nous donnons le résultat d'une somme quadratique de parties entières (voir lemme A.4.1).

Comme nous avons déjà vu, un cœur est bien défini à partir de sa colonne première. Soit $\mathcal{C} \in$(a,b)-**cœur** et soit $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ sa première colonne. La figure 2.26 nous aide à visualiser le cœur par rapport à sa taille.

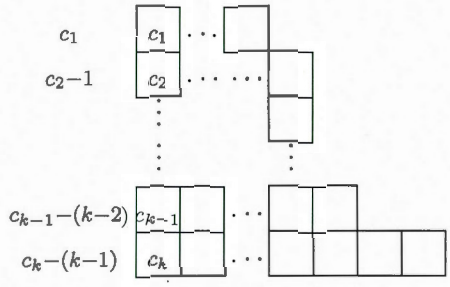



Figure 2.26: La taille d'un cœur.

Donc, on peut calculer la taille comme :

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}| &= \sum_{i=1}^{k}(c_i - i + 1),\\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i - \frac{k(k-1)}{2},\\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i - \binom{k}{2}.\end{aligned} \qquad \text{[14, pag. 92]}$$

On étudie la plus grande taille que peut avoir un $\mathcal{C}$ $\in$(a,b)-cœur (voir [3]). Ce cœur a comme première colonne tous les éléments de $\overline{\langle a, b\rangle}$.

Alors, soit $\boldsymbol{c} = \overline{\langle a, b\rangle}$ et $n = |\overline{\langle a, b\rangle}|$, la taille de $\mathcal{C}_{max}$ est :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \sum_{z\in\overline{\langle a, b\rangle}} z - \frac{n(n-1)}{2}.$$

En appliquant des résultats obtenus, nous trouvons l'expression suivante :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left(bt - \frac{a}{2}\left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor\right) - \frac{(a-1)^2(b^2-1)}{8}. \qquad \text{voir eq.A.5}$$

Pour le cas $\mathscr{D}_{a,a+1}$, elle se réduit à l'expression :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \binom{a+2}{4}. \qquad \text{voir eq.A.6}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat appliquant la formule obtenue dans l'article [14, pag. 98],

$$|\mathcal{C}_{max}| = \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{24}. \tag{2.1}$$

Si nous sommes dans le cas $b = a + 1$, l'expression se réduit à :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_{max}| &= \frac{(a^2-1)((a+1)^2-1)}{24}, \\
&= \frac{(a+1)(a-1)a(a+2)}{24}, \\
&= \binom{a+2}{4}.
\end{aligned}$$

De plus, de la formule générale éq.2.1, nous avons vérifié la conjecture sur la valeur de l'expression quadratique dans l'appendice (voir éq.A.7).

À partir des outils développés dans ce chapitre, nous aborderons, dans le suivant, le problème de faire l'extension au cas sans contrainte.

# CHAPITRE III

# CAS NON-RELATIVAMENT PREMIER DES CHEMINS DE DYCK

## 3.1 Introduction

Nous avons déjà vu la **formule de Catalan généralisée** pour calculer le nombre de chemins de $(a, b)$-Dyck dans un rectangle $a \times b$ où $a$ et $b$ sont relativement premiers. Nous savons aussi que dans le cas où $b = ak$ on peut obtenir le nombre de chemins à partir de la **formule de Fuss-Catalan** :

$$\mathbf{Cat}_{(a,k)} = \frac{1}{ak+1}\binom{(k+1)a}{a}.$$

Cette formule équivaut à l'expression suivante :

$$\mathbf{Cat}_{(a,b)} = \frac{1}{a+b+1}\binom{a+b+1}{a}.$$

En particulier, dans le cas où $a$ est un nombre premier $p$, il y a seulement deux possibilités : que $b$ soit relativement premier ou que $b$ soit multiple de $a$. De cette façon le nombre de chemins de Dyck s'exprime comme :

$$\mathbf{Cat}_{(p,b)} = \begin{cases} \frac{1}{p+b}\binom{p+b}{p} & \text{si } \mathbf{pgcd}(p,b) = 1, \\ \frac{1}{p+b+1}\binom{p+b+1}{p} & \text{si } b = kp. \end{cases}$$

La question d'étendre les résultats du chapitre précédent au cas non relativement premier est plus délicate. Dans celui-ci nous ne pouvons utiliser ni la formule de Catalan généralisée ni la formule de Fuss-Catalan. Pour cette raison, dans ce chapitre nous étudierons certains cas particuliers sans contrainte. Dans cette situation, la formule pour l'énumération de $\mathscr{D}_{m,n}$ prend la forme d'un somme de termes indexés par le partage du plus grand commun diviseur de $m$ et $n$.

Soient $m = da$, $n = db$ et $d = \mathbf{pgcd}(m, n)$, nous définissons :

$$\mathcal{B}_k^{(a,b)} = \frac{1}{a+b}\binom{ka+kb}{ka} \qquad \text{où } k \in \mathbb{N}$$
$$\mathcal{B}_\lambda^{a,b} = \mathcal{B}_{\lambda_1}^{(a,b)}\mathcal{B}_{\lambda_2}^{(a,b)}\cdots\mathcal{B}_{\lambda_l}^{(a,b)} \qquad \text{où } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$$

Alors, l'expression trouvée par **Bizley** nous donne l'énumération de $\mathscr{D}_{m,n}$ :

$$|\mathscr{D}_{m,n}| = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda}\mathcal{B}_\lambda^{(a,b)} \qquad \text{preuve voir [6]}$$

où $z_\lambda$ est liée au nombre de cycles de la permutation de type $\lambda$. Alors, si $\lambda$ a $d_k$ parties de taille $k$, nous avons :

$$z_\lambda = \prod_k k^{d_k} d_k!$$

Également, nous avons la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{d=1}^{\infty} |\mathscr{D}_{ad,bd}| x^d = e^{\left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\mathcal{B}_k^{(a,b)} x^k\right)}.$$

À partir de cette fonction nous obtenons des formules pour des cas particuliers (voir [5]), par exemple :

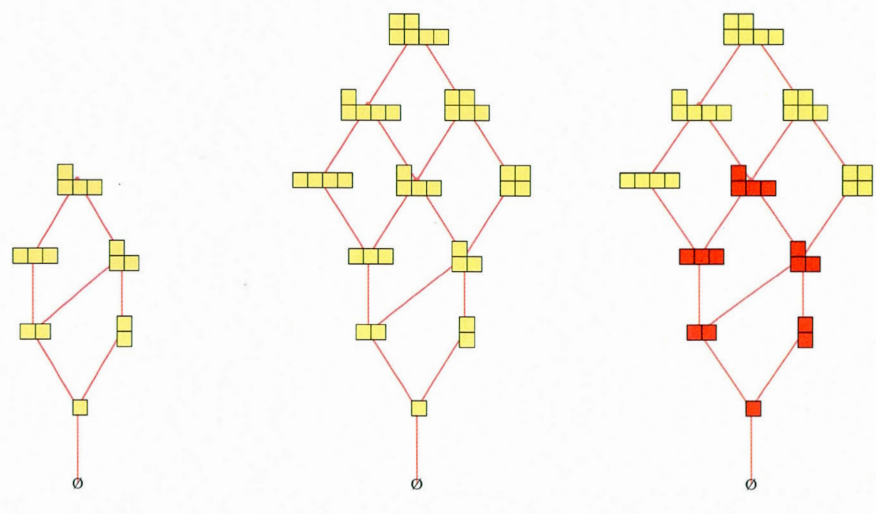
$$|\mathscr{D}_{2a,2b}| = \frac{1}{2}\left(\mathcal{B}_1^{(a,b)}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_2^{(a,b)} \qquad \text{si } d = 2, \tag{3.1}$$
$$|\mathscr{D}_{3a,3b}| = \frac{1}{6}\left(\mathcal{B}_1^{(a,b)}\right)^3 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_1^{(a,b)}\mathcal{B}_2^{(a,b)} + \frac{1}{3}\mathcal{B}_3^{(a,b)} \qquad \text{si } d = 3. \tag{3.2}$$

Bien entendu, dans le cas où $m$ et $n$ sont relativement premiers, nous retrouvons la formule de Catalan généralisée.

Un de nos buts est de trouver des récurrences simples pour le nombre de chemins de Dyck dans des cas plus généraux. Pour mieux dégager des méthodes générales, nous étudierons les notions d'inclusion de diagrammes et polynômes $q$-énumérateurs, pour les cas non relativement premiers. Nous considérerons aussi deux conjectures sur le nombre de chemins de $\mathscr{D}_{2k,2k(n+1)-2}$ et $\mathscr{D}_{2k,2kn+2}$ à partir de l'étude détaillée des cas spéciaux de $\mathscr{D}_{4,n}$, $\mathscr{D}_{6,6n+4}$, $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+2}$.

## 3.2 L'inclusion de treillis

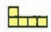
Dans la section **§2.6**, nous avons vu l'inclusion de treillis de Kréwéras dans le cas relativement premier, mais on peut aussi l'appliquer dans le cas non premier entre eux. Pour tout $k > j$ fixons $i$, on a que $\mathscr{D}_{i,j} \subseteq \mathscr{D}_{i,k}$. Comme exemple on prend $\mathscr{D}_{3,5} \subseteq \mathscr{D}_{3,6}$ (voir figure 3.1) et $\mathscr{D}_{4,6} \subseteq \mathscr{D}_{4,7}$ (voir figure 3.2). Dans le premier exemple, on étude l'inclusion d'un treillis relativement premier dans un autre non relativement premier. Nous fixons la hauteur et prenons le treillis, qui a une différence de largeur d'une case avec le premier. Nous comparons le nombre de diagrammes (voir tableau 3.1) pour trouver le nombre de chemins de Dyck.



(a) $\mathscr{D}_{3,5}$ et $|\mathscr{D}_{3,5}| = 7$ (b) $\mathscr{D}_{3,6}$ et $|\mathscr{D}_{3,6}| = 12$ (c) $\mathscr{D}_{3,5} \subseteq \mathscr{D}_{3,6}$

Figure 3.1: L'inclusion de $\mathscr{D}_{3,5}$ dans $\mathscr{D}_{3,6}$.

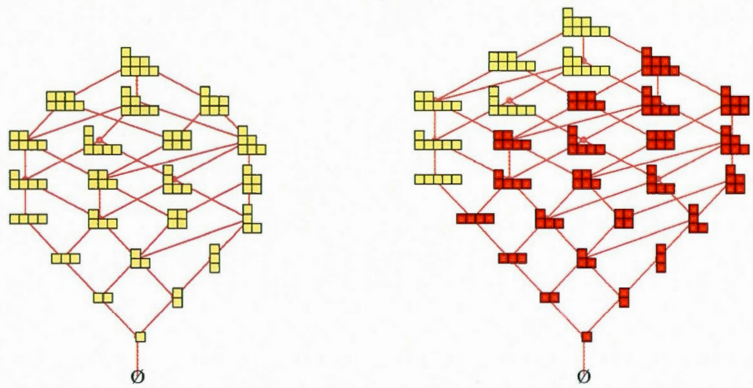
Tableau 3.1: Comparaison des diagrammes de $\mathscr{D}_{3,5}$ et $\mathscr{D}_{3,6}$

| | Diagramme $\mathscr{D}_{3,5}$ | Diagramme $\mathscr{D}_{3,6}$ |
|---|---|---|
| 1 | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 | |  |
| 8 |  |  |
| 9 | |  |
| 10 | |  |
| 11 | |  |
| 12 | |  |

Nous trouvons que $|\mathscr{D}_{3,6}| = 12 = 7 + 5$, nous pouvons associer ces nombres au nombre de chemins de certains treillis relativement premiers comme suit :

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}_{3,6}| &= 7 + 3 + 2, \\ &= \mathbf{Cat}_{(3,5)} + \mathbf{Cat}_{(2,5)} + \mathbf{Cat}_{(2,3)}. \end{aligned}$$

Nous étudions de façon analogue le deuxième exemple, à savoir l'inclusion d'un treillis non relativement premier dans un autre relativement premier (voir figure 3.2). Nous fixons la hauteur et prenons le treillis, qui a une différence de largeur d'une case avec le premier. Nous comparons le nombre de diagrammes (voir tableau 3.2) pour trouver le nombre de chemins de Dyck.



(a) $\mathscr{D}_{4,6}$ et $|\mathscr{D}_{4,6}| = 23$ (b) $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$ et $|\mathscr{D}_{4,7}| = 30$

Figure 3.2: L'inclusion de $\mathscr{D}_{4,6}$ dans $\mathscr{D}_{4,7}$.

Tableau 3.2: Comparaison de diagrammes.

| | $\mathscr{D}_{4,6}$ | $\mathscr{D}_{4,7}$ | | $\mathscr{D}_{4,6}$ | $\mathscr{D}_{4,7}$ | | $\mathscr{D}_{4,6}$ | $\mathscr{D}_{4,7}$ | | $\mathscr{D}_{4,6}$ | $\mathscr{D}_{4,7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 9 | | | 17 | | | 25 | | |
| 2 | | | 10 | | | 18 | | | 26 | | |
| 3 | | | 11 | | | 19 | | | 27 | | |
| 4 | | | 12 | | | 20 | | | 28 | | |
| 5 | | | 13 | | | 21 | | | 29 | | |
| 6 | | | 14 | | | 22 | | | 30 | | |
| 7 | | | 15 | | | 23 | | | | | |
| 8 | | | 16 | | | 24 | | | | | |

Nous trouvons que $|\mathscr{D}_{4,6}| = 23 = 30 - 7$. De façon semblable à l'exemple précédent, nous pouvons associer le résultat aux nombres de chemins de certains treillis relativement premiers comme suit :

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}_{4,6}| &= 30 - 7, \\ &= \mathbf{Cat}_{(4,7)} - \mathbf{Cat}_{(3,5)}. \end{aligned}$$

Ces résultats semblent arbitraires, mais nous en donnerons des raisons dans les sections où nous étudions en détail les cas spéciaux.

## 3.3 Polynôme $q$-énumérateur

Nous reprenons l'idée de la section §**2.7** pour le cas général. Pour tout $\mathscr{D}_m$ nous pouvons trouver le polynôme $q$-enumerateur à partir de l'aire comme suit :

$$\mathscr{D}_m(q) = \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_m} q^{\mathbf{area}_m(\alpha)}.$$

Par exemple, pour $\mathscr{D}_{(4,6)}$ on obtient :

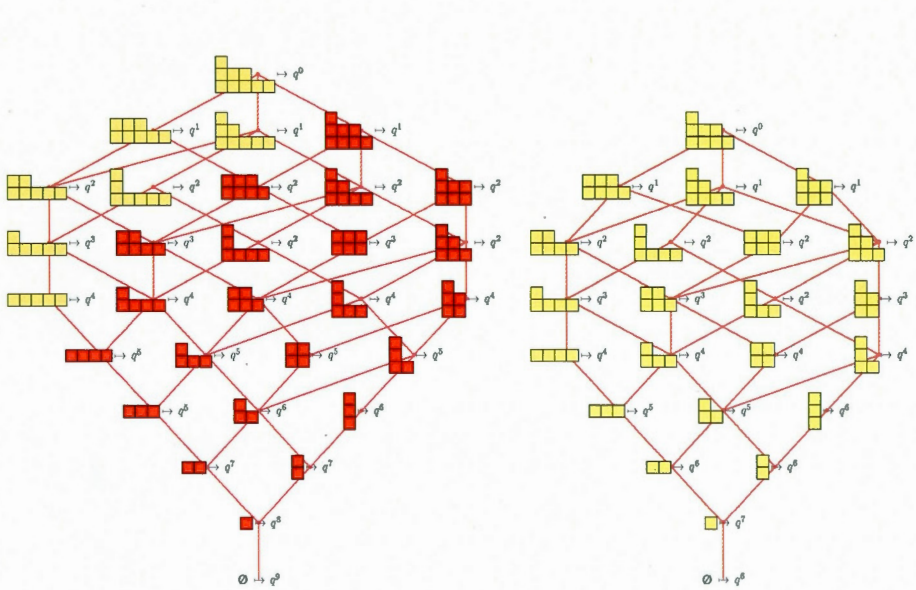
$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{(4,6)}(q) &= q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 4q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 3q + 1,\\ \mathscr{D}_{(4,6)}(1) &= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 3 + 1,\\ &= 23.\end{aligned}$$

Si nous utilisons le résultat obtenu dans la section §**3.2** et considérons la différence entre les aires de $\mathscr{D}_{(4,7)}$ et $\mathscr{D}_{(4,6)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cat}_{4,7}(q) - \mathbf{Cat}_{3,5}(q) &= q^9 + q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 4q^3 + 3q^2 + q,\\ &= q(q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 4q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 3q + 1),\\ &= q\mathscr{D}_{(4,6)}(q).\end{aligned}$$

Cette relation se remarque dans la figure 3.3. On peut généraliser l'expression comme suit (voir section §**3.5**) :

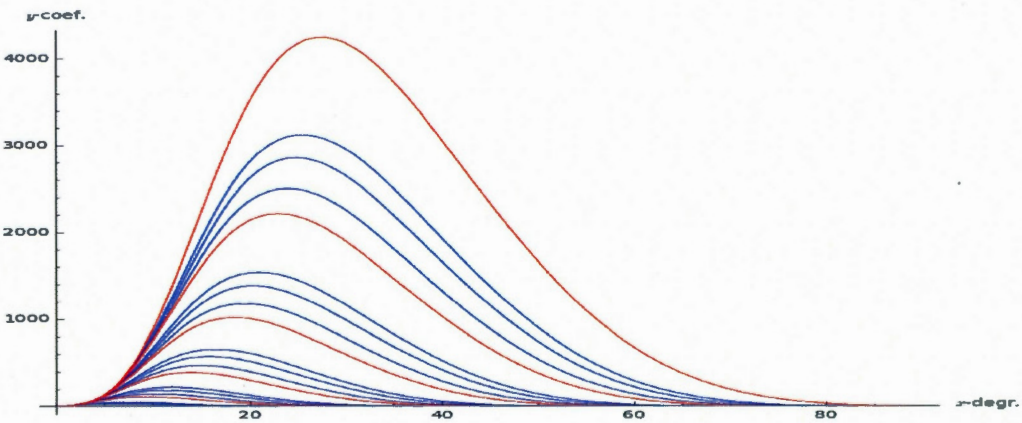
$$q\mathscr{D}_{(4,4k+2)}(q) = \mathbf{Cat}_{(4,4k+3)}(q) - \mathbf{Cat}_{(3,3k+2)}(q).$$



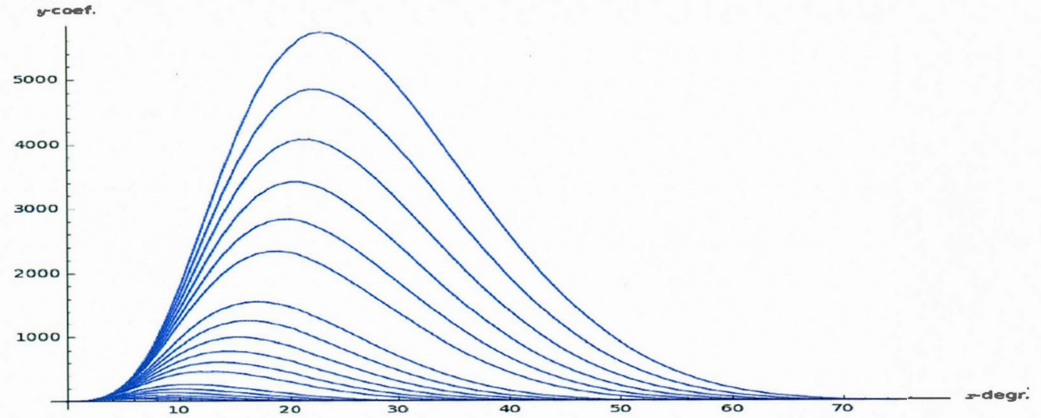
(a) $\mathscr{D}_{(4,7)}(q) = \mathbf{Cat}_{(4,7)}(q)$ (b) $q\mathscr{D}_{(4,6)}(q) = \mathbf{Cat}_{(4,7)}(q) - \mathbf{Cat}_{(3,5)}(q)$

Figure 3.3: Relation entre les treillis et $\mathbf{Cat}_m(q)$.

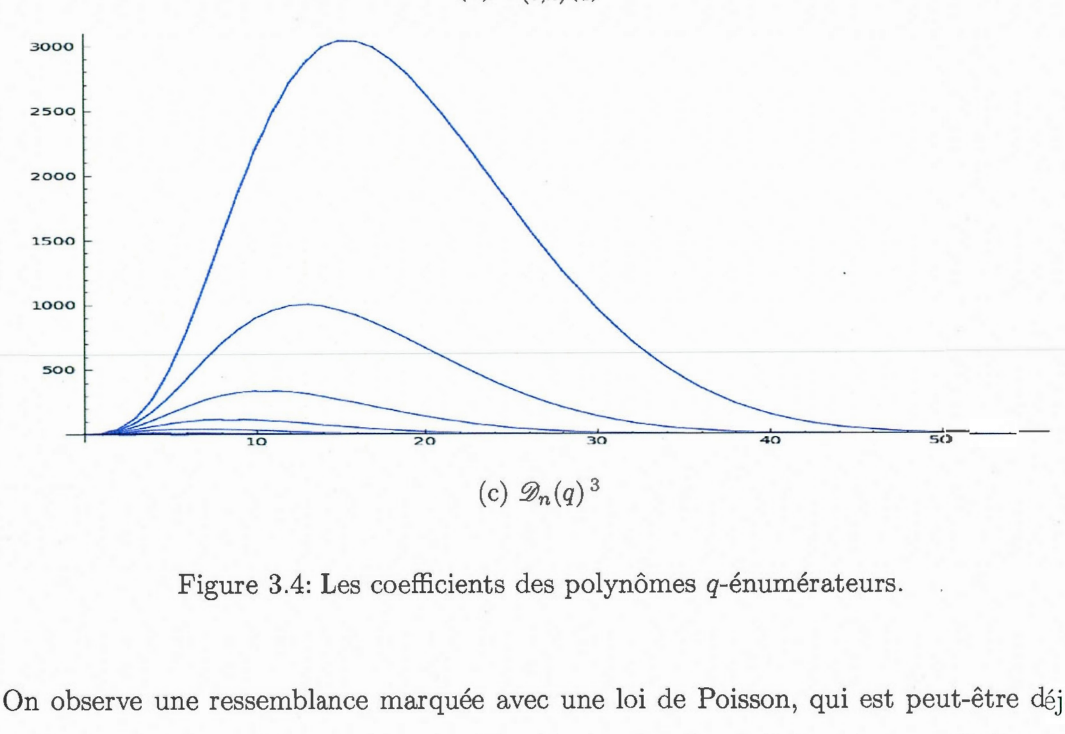
Il est intéressant de trouver la distribution des coefficients du polynôme $\mathscr{D}_m(q)$ pour chaque $q^j$, car cela représente le nombre des chemins d'aire égale à $j$. Les courbes combinatoires sont construit en représentant la puissance $j$ dans l'axe $x$ et la valeur du coefficient correspondant dans l'axe $y$. Chaque graphique comporte plusieurs courbes chacune correspondant au $q$-polynôme d'un treilles de hauteur fixée et de longueur $n$ comme illustré à la figure 3.4.




(a) $\mathscr{D}_{(6,n)}(q)$ [1]




(b) $\mathscr{D}_{(7,n)}(q)$ [2]




(c) $\mathscr{D}_n(q)$ [3]

Figure 3.4: Les coefficients des polynômes $q$-énumérateurs.

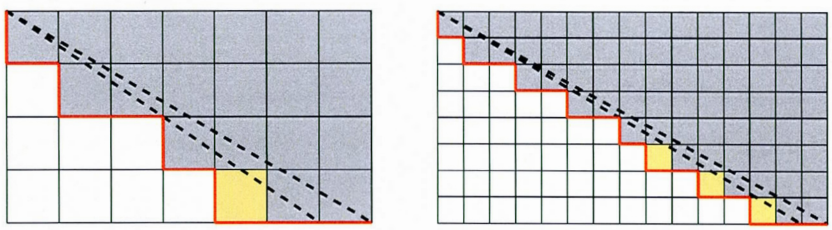
On observe une ressemblance marquée avec une loi de Poisson, qui est peut-être déjà explorée, mais nous n'avons pas trouvé de référence explicite. Déterminer explicitement celle-ci est typique des problèmes considérés dans le domaine de l'analyse en moyenne d'algorithmes. Ce sujet a été abordé par P. Flajolet [8] et D. Knuth entre autres.

1. Où – est $\mathbf{pgcd}(6, n) = 1$ et – est $\mathbf{pgcd}(6, n) \neq 1$.
2. On considère seul le cas $\mathbf{pgcd}(7, n) = 1$.
3. On prend $1 \leq n \leq 11$.

## 3.4 Méthode de comparaison de diagrammes de Ferrer

Nous continuons avec l'étude de la section **§3.2** en utilisant l'idée du rectangle $a \times b$. Soient les rectangles $a \times b$ et $a \times c$ tels que, $a \in \langle 2 \rangle$ et $b > a$ premier entre eux, et $c$ peut prendre la valeur $c = b - 1$ ou $c = b + 1$.

Par exemple, prenons $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$ et $\mathscr{D}_{8,14} \subset \mathscr{D}_{8,15}$ pour le cas de $c = b-1$, et $\mathscr{D}_{6,7} \subset \mathscr{D}_{6,8}$ et $\mathscr{D}_{8,9} \subset \mathscr{D}_{8,10}$ pour le cas de $c = b + 1$. Comparons les différences de cases du diagramme sous-diagonal maximal[4]de chaque rectangle avec le rectangle correspondant relativement premier[5]. Nous obtenons que pour $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$ et $\mathscr{D}_{8,14} \subset \mathscr{D}_{8,15}$ la différence est d'une et de trois cases de moins respectivement. Et pour $\mathscr{D}_{6,7} \subset \mathscr{D}_{6,8}$ et $\mathscr{D}_{8,9} \subset \mathscr{D}_{8,10}$ de trois et de quatre cases de plus. Ces différences de cases nous donnent une façon de compter les chemins que nous devrons soustraire ou additionner au rectangle relativement premier. Pour raison de simplicité, nous étudierons les cas où ces différences sont placées sur la borne du diagramme sous-diagonal maximal (voir figures 3.5 et 3.6).

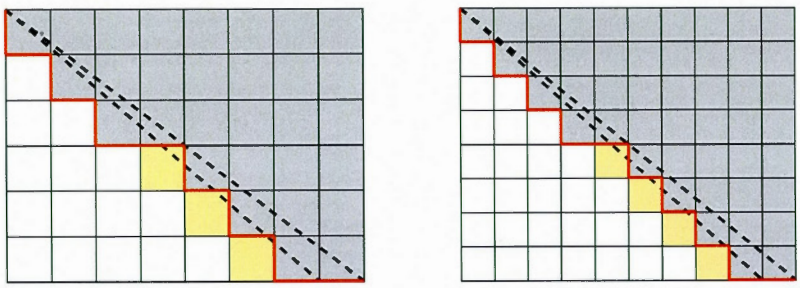


(a) $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$ (b) $\mathscr{D}_{8,14} \subset \mathscr{D}_{8,15}$

Figure 3.5: Différences avec de diagrammes plus grands.

4. Le diagramme sous-diagonale maximale corresponde au diagramme de Ferrer associé au chemin de Christoffel dans le rectangle $a \times b$.

5. On dit qu'un rectangle $a \times b$ est relativement premier lorsque $a$ et $b$ le sont.

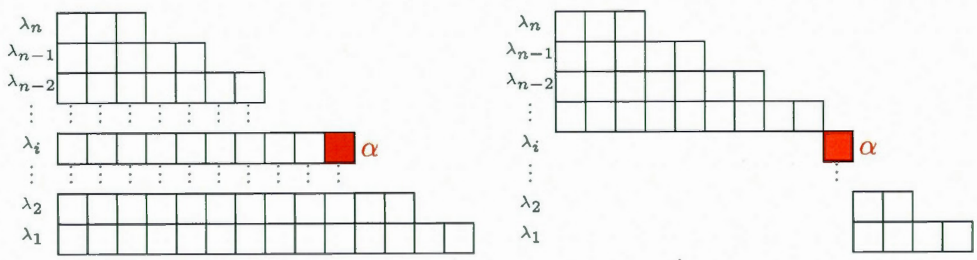


(a) $\mathscr{D}_{6,7} \subset \mathscr{D}_{6,8}$ (b) $\mathscr{D}_{8,9} \subset \mathscr{D}_{8,10}$

Figure 3.6: Différences avec de diagrammes plus petits.

Soit $\mathcal{T}_{a,b}$ le diagramme de Ferrer associé au chemin de Christoffel dans $a \times b$. Afin d'établir les principaux résultats dont nous avons besoin de compter les cases en excès entre les chemins de Christoffel en rectangles $a \times b$ et $a \times c$, pour toute $c > b$. Nous développons une méthode pour ce faire en éliminant les cases dépassant entre $T_{a,b}$ et $T_{a,c}$. En utilisant les fonctions $Q_{a,b}$ et $\Delta_{a,b}(l)$, notre méthode de comparaison donnent les règles suivantes :

**Règle** 1 : Si $\Delta_{a,b,c}(i) = 1$, il y a une seule case dans $\mathcal{T}_{a,c}$ qui n'appartient pas au $\mathcal{T}_{a,b}$. Soit $\mathcal{T}_{a_1,b_1}$ et $\mathcal{T}_{a_1',b_1'}$ les diagrammes de Ferrer obtenus en supprimant le plus grand rectangle qui contient $\alpha$, comme illustré à la figure 3.7(b).




(a) Comparaison $\mathcal{T}_{a,b}$ et $\mathcal{T}_{a,c}$ (b) $\mathcal{T}_{a_1,b_1}$ et $\mathcal{T}_{a_1',b_1'}$

Figure 3.7: Règle 1.

Ces diagrammes de Ferrer ne sont pas associés à un chemin Christoffel en général. Soit

$$\mathcal{J}_{a_1,b_1} \subseteq \mathscr{D}_{a_1,b_1}, \text{ et } \mathcal{J}_{a_1',b_1'} \subseteq \mathscr{D}_{a_1',b_1'}$$

les ensembles de chemins de Dyck contenues dans le Ferrer diagrammes $\mathcal{T}_{a_1,b_1}$ et $\mathcal{T}_{a'_1,b'_1}$, respectivement. Nous avons :

$$|\mathscr{D}_{a,c}| - |\mathscr{D}_{a,b}| = |\mathcal{J}_{a_1,b_1}| \cdot |\mathcal{J}_{a'_1,b'_1}|,$$

Il est clair que si la case est placée sur la ligne de bas ($l = a - 1$), l'équation se réduite à :

$$|\mathscr{D}_{a,c}| - |\mathscr{D}_{a,b}| = |\mathcal{J}_{a_1,b_1}|.$$

**Règle** 2 : Quand $\Delta_{a,b,c} = k$, nous avons $k$ cases qu'il faut faire intervenir (voir la figure 3.8), nous construisons une suite d'ensembles disjoints à partir de la suite suivante. Nous considérons soit $A_j$ l'ensemble de tous les chemins qui font intervenir la case $\alpha_j$ et ne font pas intervenir les cases $\alpha_i$, pour chaque $i > j$ où $1 \leq j \leq k$, soit $B_j$ l'ensemble de tous les chemins qui font intervenir la case $\alpha_j$ et ne font pas intervenir les cases $\alpha_i$, pour chaque $i < j$ où $1 \leq j \leq k$.

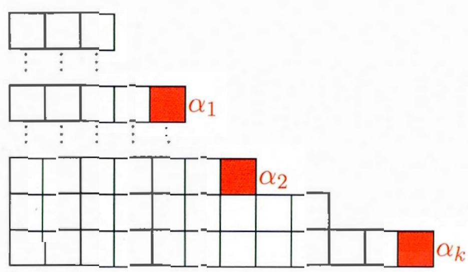



Figure 3.8: Règle 2, plus d'une case.

Cette stratégie nous donne des ensembles disjoints qui préservent l'union totale (voir lemme 3.10.1), donc en utilisant la **règle 1** pour chaque $A_j$ ou $B_j$, nous obtenons :

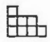
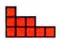
$$|\mathscr{D}_{a,c}| - |\mathscr{D}_{a,b}| = \sum_{j=1}^{k} (|\mathcal{J}_{a_j,b_j}| \cdot |\mathcal{J}_{a'_j,b'_j}|),$$

où $\mathcal{J}_{a_j,b_j} \subseteq \mathscr{D}_{a_j,b_j}$ et $\mathcal{J}_{a'_j,b'_j} \subseteq \mathscr{D}_{a'_j,b'_j}$.

Clairement, la difficulté de la méthode est de trouver les rectangles qui rendent le calcul plus facile. C'est la raison pour laquelle nous étudierons $\mathscr{D}_{4,k}$, $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ et $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ pour généraliser les cas de différences avec diagrammes plus grands. Ensuite, nous étudierons $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+2}$ pour généraliser les cas de différences avec ceux plus petits. Nous avons choisi les cas afin que tous les rectangles soient relativement premiers et que les diagrammes soient sous-diagonaux maximaux, c'est-à-dire $\mathcal{J}_{a_j,b_j} = \mathscr{D}_{a_j,b_j}$ et $\mathcal{J}_{a'_j,b'_j} = \mathscr{D}_{a'_j,b'_j}$.

## 3.5 Les chemins de $\mathscr{D}_{4,k}$

On commence pour les chemins de Dyck sur le rectangle $4 \times k$, lorsque $k = 4n + 1$ ou $k = 4n + 3$ on est en présence d'entrant relativement premier, et pour $k = 4n$ on a la formule de Fuss-Catalan. La seule situation nouvelle est donc lorsque $k = 4n + 2$ pour laquelle nous n'avons que la formule de Bizley. Dans cette section nous considérons ce cas plus en détail. Nous commençons par évaluer le nombre de chemins dans un petit cas pour pouvoir mieux généraliser.

Considérons l'exemple de $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$. Les plus grands chemins au sens de Kréwéras sont  et  respectivement. La différence se réduit à une seule case apparaissant sur la ligne du bas (voir figure 3.9).

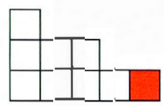


Figure 3.9: La relation entre diagrammes $\mathscr{D}_{4,6} \subset \mathscr{D}_{4,7}$.

Nous pouvons appliquer la méthode de comparaison de diagramme (**règle 1**). De plus, la case de différence apparait à la dernière ligne. Ceci correspond donc à tous les chemins qui sont contenus au diagramme , à savoir les chemins de $\mathscr{D}_{3,5}$. Cette expression donne une récurrence pour $|\mathscr{D}_{4,6}|$.

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}_{4,6}| &= |\mathscr{D}_{4,7}| - |\mathscr{D}_{3,5}|, \\ &= \mathbf{Cat}_{(4,7)} - \mathbf{Cat}_{(3,5)}, \\ &= 30 - 7 = 23. \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser ce processus au cas de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$, par les observations suivantes. Rappelons de la section **§1.2** la construction des **ensembles** $S_m^*(t)$ (voir formule 1.7). Comme nous l'avons déjà observé, ceux-ci nous donnent un moyen de trouver le diagramme dans le cas général. Soit $\lambda = (\lambda_{a-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1)$ le diagramme sous-diagonal maximal dans le rectangle $a \times b$, le nombre de cases pour chaque ligne $\lambda_j$ dans notre diagramme correspond au cardinal des ensembles $S_m^*(t)$.

$$\lambda_j = |S^*_{a,b}(j)| = \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor, \qquad\qquad \text{pour } 1 \leq j \leq a-1.$$

Le tableau 3.3 permet de comparer les différences pour le diagramme sous-diagonal maximal de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ et de $\mathscr{D}_{4,4n+3}$ qui est clairement relativement premier.

Tableau 3.3: Comparaison des diagrammes de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ et $\mathscr{D}_{4,4n+3}$.

| $j$ | $\lambda_j$ si $b = 4n+2$ | $\lambda_j$ si $b = 4n+3$ |
|---|---|---|
| 1 | $n + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = n$ | $n + \lfloor \frac{3}{4} \rfloor = n$ |
| 2 | $2n + \lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 2n+1$ | $2n + \lfloor \frac{6}{4} \rfloor = 2n+1$ |
| 3 | $3n + \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 3n+1$ | $3n + \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 3n+2$ |

On observe qu'il y a une case de plus dans la dernière ligne pour le cas $b = 4n+3$ par rapport au cas $b = 4n+2$. Cette situation est générale. Le nombre de chemins de $\mathscr{D}_{4,4n+3}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathscr{D}_{4,4n+2}$, s'obtient de la façon suivante :

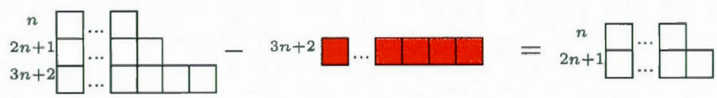



Figure 3.10: Chemins non contenus dans $\mathscr{D}_{4,4n+2}$

Pour appliquer la **règle 1**, nous devons trouver le rectangle $3 \times b$ tel que son diagramme sous-diagonal maximal correspond à $\lambda = (2n+1, n)$. Soit $b = 3n + r$ où $r < 3$, on doit satisfaire les équations $\lfloor \frac{3n+r}{3} \rfloor = n$ et $\left\lfloor \frac{2(3n+r)}{3} \right\rfloor = 2n+1$. La première équation est toujours vraie, car $r < 3$, et de la deuxième nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2n+1 &= \left\lfloor \frac{2(3n+r)}{3} \right\rfloor, \\ &= \left\lfloor 2n + \frac{2r}{3} \right\rfloor, \\ &= 2n + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

On conclut donc que $\lfloor \frac{2r}{3} \rfloor = 1$ donc $r = 2$.

De cette façon, nous avons réussi à écrire $|\mathscr{D}_{4,4n+2}|$ en terme de $|\mathscr{D}_{4,4n+3}|$ et $|\mathscr{D}_{3,3n+2}|$. Donc, le **nombre de chemins** de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ est :

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}_{4,4n+2}| &= |\mathscr{D}_{4,4n+3}| - |\mathscr{D}_{3,3n+2}|, \\ &= \mathbf{Cat}_{(4,4n+3)} - \mathbf{Cat}_{(3,3n+2)}. \end{aligned}$$

En résumé, le **nombre de chemins** de $\mathscr{D}_{4,k}$ où $k = 4n + r$ est tel que :

$$|\mathscr{D}_{4,4n+r}| = \begin{cases} \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)} & \text{si } r = 0 \\ \mathbf{Cat}_{(4,4n+r)} & \text{si } r = 1 \text{ ou } r = 3 \\ \mathbf{Cat}_{(4,4n+3)} - \mathbf{Cat}_{(3,3n+2)} & \text{si } r = 2 \end{cases} .$$

## 3.6 Les chemins de $\mathscr{D}_{6,6n+4}$

Dans cette section, on fait une analyse semblable à ce qu'elle précède. Nous étudions $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ par rapport à $\mathscr{D}_{6,6n+5}$, on verra qu'il satisfait les conditions pour appliquer la méthode de comparaison décrite dans la section **§3.4**. Utilisant l'équation 1.8, nous obtenons que la différence du nombre total de cases sous-diagonales est $Q_{6,6n+5}-Q_{6,6n+4} = 2$. Pour trouver les lignes où elles sont placées $\Delta(l)$, nous écrivons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta(l) &= |S^*_{6,6n+5}(l)| - |S^*_{6,6n+4}(l)|, \\
&= \left\lfloor \frac{(6n+5)l}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(6n+4)l}{6} \right\rfloor, \\
&= \left\lfloor ln + \frac{5t}{6} \right\rfloor - \left\lfloor ln + \frac{4l}{6} \right\rfloor, \\
&= \left\lfloor \frac{5l}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{4l}{6} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

On remarque que $\Delta(l)$ est zéro sauf dans les lignes $l = 4$ ou $l = 5$ dans ces cas $\Delta(4) = \Delta(5) = 1$ (voir figure 3.11).

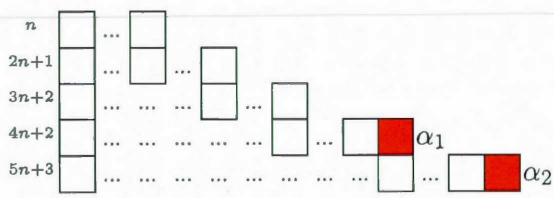



Figure 3.11: Le schéma $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+5}$.

En appliquant la règle 2, nous avons que $A_1$ = {chemins qui font intervenir la case $\alpha_1$ et non $\alpha_2$} et $A_2$ = {chemins qui font intervenir la case $\alpha_2$}. En appliquant la règle 1 aux ensembles $A_1$ et $A_2$, nous avons les calculs suivants.

**Cas** 1 : Pour $A_1$, nous devons trouver les rectangles $4 \times b_1$ et $2 \times b'_1$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (3n+2, 2n+1, n)$ et $\lambda' = (n)$. Soit $b_1 = 4n + r$ où $r < 4$, on doit satisfaire les équations :

$$\left\lfloor \frac{4n+r}{4} \right\rfloor = n,$$
$$\left\lfloor \frac{2(4n+r)}{4} \right\rfloor = 2n+1,$$
$$\left\lfloor \frac{3(4n+r)}{4} \right\rfloor = 3n+2.$$

Cela est équivalent à trouver la valeur de $r$ qui satisfait $\lfloor \frac{r}{4} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{2r}{4} \rfloor = 1$ et $\lfloor \frac{3r}{4} \rfloor = 2$. Le résultat est trouvé de façon claire, voir le tableau 3.4

Tableau 3.4: les Valeurs de $\lfloor \frac{ir}{4} \rfloor$

| $r$ | $\lfloor \frac{r}{4} \rfloor$ | $\lfloor \frac{2r}{4} \rfloor$ | $\lfloor \frac{3r}{4} \rfloor$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | 0 | 1 | 2 | *solution* |

Donc $b_1 = 4n + 3$. Pour $b'_1$ la valeur est clairement $b'_1 = 2n + 1$. Nous obtenons que :

$$|A_1| = |\mathscr{D}_{4,4n+3}||\mathscr{D}_{2,2n+1}|.$$

**Cas** 2 : Pour $A_2$, nous devons trouver seulement le rectangle $5 \times b_2$ qui correspond à $\lambda = (4n+3, 3n+2, 2n+1, n)$. Soit $b_2 = 5n + r$ nous avons que :

$$\left\lfloor \frac{5n+r}{5} \right\rfloor = n,$$
$$\left\lfloor \frac{2(5n+r)}{5} \right\rfloor = 2n+1,$$
$$\left\lfloor \frac{3(5n+r)}{5} \right\rfloor = 3n+2,$$
$$\left\lfloor \frac{4(5n+r)}{5} \right\rfloor = 4n+3.$$

De façon équivalente au précédent, ces conditions se réduisent à trouver $r$ tel que $\lfloor \frac{r}{5} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{2r}{5} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{3r}{5} \rfloor = 2$ et $\lfloor \frac{4r}{5} \rfloor = 3$. Le résultat est dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5: Les Valeurs de $\lfloor \frac{ir}{5} \rfloor$

| $r$ | $\lfloor \frac{r}{5} \rfloor$ | $\lfloor \frac{2r}{5} \rfloor$ | $\lfloor \frac{3r}{5} \rfloor$ | $\lfloor \frac{4r}{5} \rfloor$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | *solution* |

Donc, $b_2 = 5n + 4$, et on obtient que :

$$|A_2| = |\mathscr{D}_{5,5n+4}|.$$

Finalement, comme toutes les valeurs des rectangles sont relativement premières, nous obtenons que :

$$|\mathscr{D}_{6,6n+4}| - |\mathscr{D}_{6,6n+5}| = -\mathbf{Cat}_{(5,5n+4)} - \mathbf{Cat}_{(4,4n+3)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}.$$

Donc, le **nombre de chemins de** $\mathscr{D}_{6,6n+4}$ est :

$$|\mathscr{D}_{6,6n+4}| = \mathbf{Cat}_{(6,6n+5)} - \mathbf{Cat}_{(5,5n+4)} - \mathbf{Cat}_{(4,4n+3)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}.$$

## 3.7 Les chemins de $\mathscr{D}_{8,8n+6}$

Comme dans les sections précédentes, nous étudions $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ par rapport à $\mathscr{D}_{8,8n+7}$ et l'application de la méthode de comparaison. Nous obtenons que la différence du nombre total de cases sous-diagonalesd est $Q_{8,8n+6} - Q_{8,8n+7} = 3$. Nous trouvons de l'équation $\Delta(l) = \lfloor \frac{7l}{8} \rfloor - \lfloor \frac{6l}{8} \rfloor$ qu'elle est zéro sauf pour les valeurs $l = 5, 6, 7$. Dans ces cas $\Delta(5) = \Delta(6) = \Delta(7) = 1$ comme illustré à la figure 3.12.

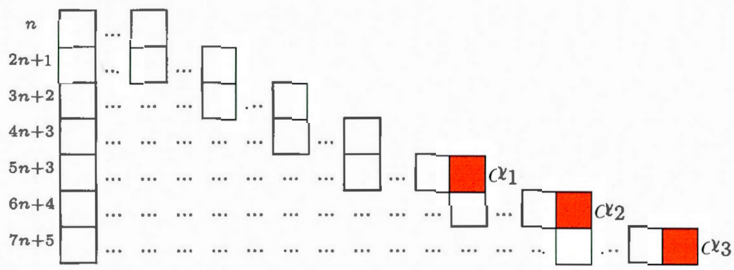



Figure 3.12: Le schéma $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ et $\mathscr{D}_{8,8n+7}$

Nous considérons les ensembles suivants :

$$A_1 = \{\text{tous les chemins qui font intervenir } \alpha_1 \text{ et non } \alpha_2 \text{ au } \alpha_3\}\}$$

$$A_2 = \{\text{tous les chemins qui font intervenir } \alpha_2 \text{ et non } \alpha_3\}$$

$$A_3 = \{\text{tous les chemins qui font intervenir } \alpha_3\}$$

En faisant des calcules semblables aux précédents, nous avons :

**Cas** 1 : Pour $A_1$, nous trouvons les rectangles $5 \times b_1$ et $3 \times b'_1$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (4n+3, 3n+2, 2n+1, n)$ et $\lambda' = (2n+1, n)$. Donc,

$$|A_1| = |\mathscr{D}_{5,5n+4}||\mathscr{D}_{3,3n+2}|.$$

**Cas** 2 : Pour $A_2$, nous trouvons les rectangles $6 \times b_2$ et $2 \times b'_2$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (5n+4, 4n+3, 3n+2, 2n+1, n)$ et $\lambda' = (n)$. Donc,

$$|A_2| = |\mathscr{D}_{6,6n+5}||\mathscr{D}_{2,2n+1}|.$$

**Cas** 3 : Et pour $A_3$, nous devons trouver seulement le rectangle $7 \times b_3$ qui correspond à $\lambda = (6n+5, 5n+4, 4n+3, 3n+2, 2n+1, n)$. Donc,

$$|A_3| = |\mathscr{D}_{7,7n+6}|.$$

Comme toutes les valeurs des rectangles sont relativement premières, nous obtenons que :

$$|\mathscr{D}_{8,8n+6}| = \mathbf{Cat}_{(8,8n+7)} - (\mathbf{Cat}_{(7,7n+6)} + \mathbf{Cat}_{(6,6n+5)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)} + \mathbf{Cat}_{(5,5n+4)}\mathbf{Cat}_{(3,3n+2)}).$$

Nous remarquons que toutes les valeurs suivent la récurrence $a(n+1)-1$. Cela nous induit à considérer la notation suivante :

$$\mathbf{Cat}^{(-)}_{a,n} := \mathbf{Cat}_{(a,a(n+1)-1)},$$

bien entendu $\mathbf{Cat}^{(-)}_{(1,n)} = 1$. Nous pouvons donc réduire l'expression du **nombre de chemins** de $\mathscr{D}_{8,8n+6}$ à :

$$|\mathscr{D}_{8,8n+6}| = \mathbf{Cat}^{(-)}_{(8,n)} - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{Cat}^{(-)}_{(8-j,n)}\mathbf{Cat}^{(-)}_{j,n}.$$

Cette expression nous conduit à la conjecture 1.

## 3.8 Les chemins de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$

Dans cette section et dans la prochaine, nous étudierons des exemples où le rectangle relativement premier est plus petit. Comparons $\mathscr{D}_{4,4n+2}$ avec $\mathscr{D}_{4,4n+1}$, nous obtenons que la différence du nombre total de cases sous-diagonales est $Q_{4,4n+2} - Q_{4,4n+1} = 2$. Nous trouvons de l'équation $\Delta(l) = \lfloor \frac{2l}{4} \rfloor - \lfloor \frac{l}{4} \rfloor$ qu'elle est zéro sauf pour les valeurs $l = 2, 3$. Dans ces cas, $\Delta(2) = \Delta(3) = 1$ comme illustré à la figure 3.13.

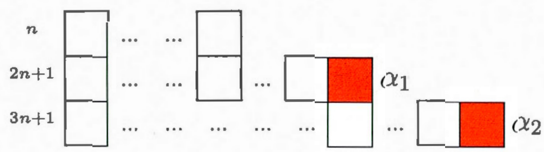



Figure 3.13: Le schéma $\mathscr{D}_{4,4n+1}$ et $\mathscr{D}_{4,4n+2}$

Nous considérons les ensembles suivants :

$$B_1 = \{\text{tous les chemins qui font intervenir } \alpha_1\},$$

$$B_2 = \{\text{tous les chemins qui font intervenir } \alpha_2 \text{ et non } \alpha_1\}.$$

Nous avons que :

**Cas 1 :** Pour $B_1$, nous trouvons les rectangles $2 \times b_1$ et $2 \times b_1'$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (n)$ et $\lambda' = (n)$. Donc,

$$|B_1| = |\mathscr{D}_{2,2n+1}||\mathscr{D}_{2,2n+1}|.$$

**Cas 2 :** Et pour $B_2$, nous devons trouver seulement le rectangle $3 \times b_2$ qui correspond à $\lambda = (2n+1, n)$. Donc,

$$|B_2| = |\mathscr{D}_{3,3n+1}|.$$

Donc, nous obtenons une autre expression pour le **nombre de chemins** de $\mathscr{D}_{4,4n+2}$.

$$|\mathscr{D}_{4,4n+2}| = \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)} + \mathbf{Cat}_{(3,3n+1)} + \mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}.$$

## 3.9 Les chemins de $\mathscr{D}_{6,6n+2}$

Maintenant, nous étudions le cas de $\mathscr{D}_{6,6n+2}$ par rapport à $\mathscr{D}_{6,6n+1}$. De l'équation1.8, nous obtenons que la différence totale est :

$$Q_{6,6n+2} - Q_{6,6n+1} = 3,$$

et de l'équation :

$$\Delta(l) = \left\lfloor \frac{2l}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{l}{6} \right\rfloor,$$

nous trouvons qu'elles sont placées dans les lignes $l = 3, 4, 5$ (voir la figure 3.14).

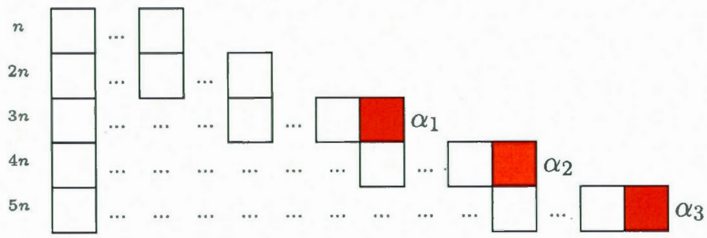



Figure 3.14: Le schéma $\mathscr{D}_{6,6n+1}$ et $\mathscr{D}_{6,6n+2}$

Nous considérons les ensembles suivants :

$B_1 = \{$tous les chemins qui font intervenir $\alpha_1\}$,

$B_2 = \{$tous les chemins qui font intervenir $\alpha_2$ et non $\alpha_1\}$,

$B_3 = \{$tous les chemins qui font intervenir $\alpha_3$ et non $\alpha_1$ au $\alpha_2\}$.

Nous avons :

**Cas** 1 : Pour $B_1$, nous trouvons les rectangles $3 \times b_1$ et $3 \times b_1'$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (2n, n)$ et $\lambda' = (2n, n)$. Donc,

$$|B_1| = |\mathscr{D}_{3,3n+1}||\mathscr{D}_{3,3n+1}|.$$

**Cas** 2 : Pour $B_2$, nous trouvons les rectangles $4 \times b_2$ et $2 \times b_2'$ tels que leur diagramme sous-diagonal maximal est respectivement $\lambda = (3n, 2n, n)$ et $\lambda' = (n)$. Donc,

$$|B_2| = |\mathscr{D}_{4,4n+1}||\mathscr{D}_{2,2n+1}|.$$

**Cas 3 :** Et pour $B_3$, nous devons trouver seulement le rectangle $5 \times b_3$ qui correspond à $\lambda = (4n, 3n, 2n, n)$. Donc,

$$|B_3| = |\mathscr{D}_{5,5n+1}|.$$

Alors, nous devons additionner les chemins. Nous avons :

$$|\mathscr{D}_{6,6n+2}| = \mathbf{Cat}_{(6,6n+1)} + \mathbf{Cat}_{(5,5n+1)} + \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)} + \mathbf{Cat}_{(3,3n+1)}\mathbf{Cat}_{(3,3n+1)}.$$

Nous remarquons que toutes les valeurs suivent la récurrence $an + 1$. Cela nous induit à considérer la notation suivante :

$$\mathbf{Cat}_{a,n}^{(+)} := \mathbf{Cat}_{(a,an+1)},$$

bien entendu $\mathbf{Cat}_{(1,n)}^{(+)} = 1$, nous pouvons réduire l'expression du **nombre de chemins** de $\mathscr{D}_{6,6n+2}$ à :

$$|\mathscr{D}_{6,6n+2}| = \mathbf{Cat}_{(6,n)}^{(+)} + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{Cat}_{(6-j,n)}^{(+)}\mathbf{Cat}_{j,n}^{(+)}.$$

Cette expression nous conduit à la conjecture 2.

## 3.10 Lemmes

Les trois lemmes suivants sont la base qui nous conduit aux conjectures 1 et 2.

**Lemme 3.10.1.** *Soit $\alpha_i$ une case dans le borne d'un diagramme de Ferrer, où $1 \leq i \leq k$.Nous considérons :*

1. *soit $A_j$ l'ensemble de tous les chemins qui font intervenir la case $\alpha_j$ et ne font pas intervenir les cases $\alpha_i$, pour chaque $i > j$ où $1 \leq j \leq k$,*
2. *soit $B_j$ l'ensemble de tous les chemins qui font intervenir la case $\alpha_j$ et ne font pas intervenir les cases $\alpha_i$, pour chaque $i < j$ où $1 \leq j \leq k$.*

*Donc, chaque famille des ensembles considéré est disjoint.*

*Démonstration.* On preuve la propriété pour la famille de $A_j$ car pour la famille de $B_j$ on utilise des arguments semblables. Soit $j_1 < j_2$ par construction tout chemin $c \in A_{j_1}$ ne fait pas intervenir la case $\alpha_{j_2}$ alors, $c \notin A_{j_2}$. Donc $A_{j_1}$ et $A_{j_2}$ sont disjoints. □

**Définition 3.10.1.** *Soit $a < b < c \in \mathbb{N}$ et $1 \leq l \leq a-1$. On définit la fonction suivante :*

$$\Delta_{a,c,b}(l) := \left\lfloor \frac{cl}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{bl}{a} \right\rfloor.$$

Si $c = b - 1$, on note simplement :

$$\Delta_{a,c}(l) := \left\lfloor \frac{cl}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(c-1)l}{a} \right\rfloor.$$

La fonction $\Delta_{a,b}(l)$ représente la différence de cases pour chaque ligne entre les diagrammes de Ferrer des rectangles $a \times b$ et $a \times (b-1)$ respectivement. Nous sommes intéressés par le cas $a = 2k$ et $b = 2k(n+1) - 1$.

**Lemme 3.10.2.** *Soit $a = 2k$, $b = 2k(n+1) - 1$ et $1 \leq l \leq 2k - 1$. Nous avons :*

$$\Delta_{2k,2k(n+1)-1}(l) = \begin{cases} 0 & si\ 1 \leq l \leq k, \\ 1 & si\ k+1 \leq l \leq 2k-1. \end{cases}$$

Du lemme 3.10.2, nous avons qu'il y a $k-1$ cases de différence totale entre ces deux diagrammes de Ferrers et qu'ils sont placés un dans chaque ligne, à partir de la plus basse consécutivement.

*Démonstration.* Comme $a = 2k$ et $b = 2k(n+1)-1$ nous avons que $\Delta_{a,b}(l)$ est :

$$\begin{aligned}
\Delta_{a,b}(l) &= \left\lfloor \frac{(2k(n+1)-1)l}{2k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(2k(n+1)-2)l}{2k} \right\rfloor, \\
&= (n+1)l + \left\lfloor \frac{-l}{2k} \right\rfloor - (n+1)l - \left\lfloor \frac{-2l}{2k} \right\rfloor, \\
&= \left\lfloor \frac{-l}{2k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-l}{k} \right\rfloor, \\
&= -\left\lceil \frac{l}{2k} \right\rceil + \left\lceil \frac{l}{k} \right\rceil, \\
&= \left\lceil \frac{l}{k} \right\rceil - 1, && \text{car } l < 2k
\end{aligned}$$

Nous avons que :

**Cas** 1 : $l < k$ implique que $\lceil \frac{l}{k} \rceil = 1$, alors,

$$\Delta_{a,b}(l) = 0.$$

**Cas** 2 : $l = k$ implique que $\lceil \frac{l}{k} \rceil = 1$, alors,

$$\Delta_{a,b}(l) = 0.$$

**Cas** 3 : $k+1 \leq l \leq 2k-1$ implique que $\lceil \frac{l}{k} \rceil = 2$, alors,

$$\Delta_{a,b}(l) = 1.$$

Donc,

$$\Delta_{2k,2k(n+1)-1}(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq l \leq k, \\ 1 & \text{si } k+1 \leq l \leq 2k-1. \end{cases}$$

□

**Lemme 3.10.3.** *Soit $a = 2k$, $b = 2kn + 2$ et $1 \leq l \leq 2k - 1$. Nous avons :*

$$\Delta_{2k,2kn+2}(l) = \begin{cases} 0 & \textit{si } 1 \leq l \leq k-1, \\ 1 & \textit{si } k \leq l \leq 2k-1. \end{cases}$$

Du lemme 3.10.3, nous avons qu'il y a $k$ cases de différence totale entre ces deux diagrammes de Ferrers et qu'ils sont placés un dans chaque ligne, à partir de la plus basse consécutivement.

*Démonstration.* Comme $a = 2k$ et $b = 2kn + 2$ nous avons que $\Delta_{a,b}(l)$ est :

$$\begin{aligned} \Delta_{a,b}(l) &= \left\lfloor \frac{(2kn+2)l}{2k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(2kn+1)l}{2k} \right\rfloor, \\ &= nl + \left\lfloor \frac{2l}{2k} \right\rfloor - \left( nl + \left\lfloor \frac{l}{2k} \right\rfloor \right), \\ &= \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{l}{2k} \right\rfloor, \\ &= \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor, & \text{car } l < 2k \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta_{2k,2kn+2}(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq l \leq k-1, \\ 1 & \text{si } k \leq l \leq 2k-1. \end{cases}$$

□

## 3.11 Conjectures

Nous pouvons généraliser les récurrences pour les cas de Dyck que nous avons étudiées ci-dessus de la façon suivante.

**Conjecture 1.** *Si $m_1 = 2k$ et $m_2 = 2k(n+1) - 2$ alors :*

$$|\mathscr{D}_{2k,2k(n+1)-2}| = \boldsymbol{Cat}^{(-)}_{(2k,n)} - \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{Cat}^{(-)}_{(2k-j,n)} \boldsymbol{Cat}^{(-)}_{j,n},$$

*où $\boldsymbol{Cat}^{(-)}_{a,n} := \boldsymbol{Cat}_{a,a(n+1)-1}$.*

**Conjecture 2.** *Si $m_1 = 2k$ et $m_2 = 2kn + 2$ alors :*

$$|\mathscr{D}_{(2k,2kn+2)}| = \boldsymbol{Cat}^{(+)}_{(2k,n)} + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{Cat}^{(+)}_{(2k-j,n)} \boldsymbol{Cat}^{(+)}_{j,n},$$

*où $\boldsymbol{Cat}^{(+)}_{a,n} := \boldsymbol{Cat}_{a,an+1}$.*

Nous pouvons faire certaines vérifications avec la formule de Bizley (voir [5]). Dans le cas pair, nous avons l'équation 3.1 :

$$|\mathscr{D}_{2a,2b}| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}\binom{2a+2b}{2a}\right).$$

Prenons $a = 2$ et $b = kn + 1$, nous sommes sur la conjecture 2.

Ainsi par $k = 2$ nous avons :

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}_{(4,4n+2)}| &= \mathbf{Cat}^{(+)}_{(4,n)} + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{Cat}^{(+)}_{(4-j,n)} \mathbf{Cat}^{(+)}_{j,n}, \\
&= \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)} + \mathbf{Cat}_{(3,3n+1)} + \mathbf{Cat}^2_{(2,2n+1)}.
\end{aligned}$$

Utilisant la formule de Bizley, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}_{4,4n+2}| &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}\binom{2n+3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}\binom{4n+6}{4}\right), \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{Cat}^2_{(2,2n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}\binom{4n+6}{4}\right), \qquad \text{car } \mathbf{pgcd}(2, 2n+1) = 1.
\end{aligned}$$

Nous montrerons que les expressions sont égales. Pour cela, on écrit :

$$\gamma := \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)} + \mathbf{Cat}_{(3,3n+1)} + \frac{1}{2}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}.$$

Appliquant la définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \mathbf{Cat}_{(4,4n+1)} + \mathbf{Cat}_{(3,3n+1)} + \frac{1}{2}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}\mathbf{Cat}_{(2,2n+1)}, \\
&= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)}{4!} + \frac{(3n+3)(3n+2)}{3!} + \frac{(n+1)^2}{2}, \\
&= \frac{(n+1)(4n+3)(2n+1)}{3} + \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + \frac{(n+1)^2}{2}, \\
&= (n+1)\left(\frac{2(4n+3)(2n+1)+3(3n+2)+3(n+1)}{6}\right), \\
&= (n+1)\left(\frac{2(4n+3)(2n+1)+3(4n+3)}{6}\right), \\
&= \frac{(n+1)(4n+3)(4n+5)}{6}, \\
&= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+5)}{4!}, \\
&= \frac{1}{4n+6}\binom{4n+6}{4}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}\binom{4n+6}{4}\right).
\end{aligned}$$

Donc les deux expressions sont égales.

Les conjectures ont été aussi vérifiées par le calcul en SAGE, dans un grand nombre de cas. Les procédures utilisées, ainsi que d'autres outils, se trouvent dans l'appendice B.

# CHAPITRE IV

# CONCLUSION

Nous avons développé les notions de $\mathbb{N}$-modules dans les cas de $\mathbb{N}$-module engendré pour un ensemble fini. Avec l'aide de l'opération $+$ nous avons facilité l'écriture et la manipulation des $\mathbb{N}$-module affines et ses compléments. Nous avons montré les liens entre ces notions et plusieurs représentations : cartésienne, $(a, b)$-rectangles, configurations de Frobenius, et chemins de Dyck. Ceci nous a donné un point de vue nouveau permettant d'améliorer notre compréhession dans le cas relativement premier, et même dans le cas non-relativement premier.

L'approche algébrique nous a permis d'étudier les chemins de Dyck dans des cas plus généraux, ainsi que de munir d'une structure de semi-anneau aux $\mathbb{N}$-modules, à partir de laquelle on a fait une généralisation du nombre de Frobenius.

Utilisant la méthode de comparaison de diagrammes, nous avons réussi à écrire le nombre de chemins de Dyck dans certains cas non-relativement premiers comme combinaison des nombres de Catalan relativement premiers. Ces résultats nous ont menés à des conjectures encore plus générales.

Via l'analyse de propriétés des cœurs et leurs liens avec de chemins de Dyck, nous avons trouvé des structures intéressantes sur l'ensemble des $\mathbb{N}$-modules affines, qu'on espère explorer dans des travaux à venir.

Pour mieux explorer ces objets mathématiques, nous avons développé des outils en SAGE, qui sont disponibles sur le site web http://thales.math.uqam.ca/~jeblazek/

Sage_Combinatory.html.

Il y a nombreuses questions à étudier en liaison aux structures algébriques, et leurs relations avec les objets combinatoires. Il sera intéressant de trouver une méthode plus générale pour compter les chemins, ainsi que de compter les intervalles du treillis. À la suite de nombreux articles sur les cœurs, il semble intéressant d'étudier les liens entre les chemins de $(a, b, c)$-Dyck (dans un treillis tridimensional) et tri-cœurs généralisant les liens entre chemins de $(a, b)$-Dyck et bi-cœurs.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

# APPENDICE A

# DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Dans cet appendice, nous avons ajouté les développements, les formules et les propriétés que nous avons cru intéressantes pour compléter les idées exprimées dans les mémoire. Quelques démonstrations ont été données même si les résultats sont bien connus.

## A.1 Relations avec Partie entière

On peut montrer la formule A.1 pour $a < b \in \mathbb{N}$. Cette formule est une généralisation de la formule de Sylvester pour compter le nombre de cas sous la diagonale d'un chemin de (a,b)-Dyck.

$$\sum_{j=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1) + \mathbf{pgcd}(a,b) - 1}{2} \tag{A.1}$$

Dans le cas particulier où $a$ et $b$ sont relativement premiers, $\mathbf{pgcd}(a,b) = 1$, on retrouve la formule déjà connue

$$\sum_{k=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

## A.2 Construction de l'inverse de $\eta$

On a la fonction $\eta(x,-y) = by - ax$ sur $[1,b] \times [0,a-1]$. Pour trouver l'inverse on résout le problème de trouver $x, y \in \mathbb{N}$ étant donné $\alpha \in \overline{\langle a,b\rangle}$ :

$$\alpha = \eta(x,-y).$$

Pour trouver $y$ on utilise la division euclidienne donc $b = aq + r$ et en substituant dans $\eta$. On obtient facilement que $ry = \alpha \ \mathbf{mod}(a)$. Comme $r$ et $a$ sont relativement premiers, car $a$ et $b$ sont aussi premiers entre eux, il existe $r^{-1} \in \mathbb{Z}_a$, donc $y = \alpha r^{-1} \ \mathbf{mod}(a)$. Finalement, $y$ est unique car $y < a$.

Alors, de l'expression $\alpha = by - ax$ nous obtenons la valeur de :

$$x = \frac{by - \alpha}{a}.$$

Donc nous pouvons définir à partir des équations ci-desus l'application inverse de $\eta$ comme $\eta^{-1} : \overline{\langle a,b\rangle} \to \mathbb{N}^2$,

$$\eta^{-1}(\alpha) = (x,y),$$

où $y = \alpha r^{-1} \ \mathbf{mod}(a)$, $x = \frac{by-\alpha}{a}$, $y < a$ et $r = b - a\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$.

## A.3 Quelques propriétés des $\mathbb{N}$-modules affines

Maintenant, nous donnons des notations utiles pour améliorer la compréhession et réduire l'écriture : soit $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, on note des intervalles de la façon suivante,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\},$$

et pour l'intervalle fini des multiples de $m > 0$,

$$m[a, b] := \{mx \mid x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\},$$

bien entendu $[a, a] = \{a\}$.

### A.3.1 Propriétés de l'opération addition des ensembles

Nous avons défini avec « + » l'addition d'ensembles dans la sectio **§1.2** nous pouvons montrer facilement les propriétés utiles suivantes :

**Propriété A.1.**

1. L'ensemble $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), +)$ est un **semi-groupe commutatif.**
2. La distribution par rapport à l'union,
$$(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C).$$
3. La distribution par rapport à l'intersection,
$$(A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C).$$
4. L'ensemble $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \cup, +)$ est un **semi-anneau.**
5. $\mathbb{N}$ comme reunion de $\mathbb{N}$-modules affines. Soit $d \in \mathbb{N}$, $\langle d \rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré, alors,
$$\mathbb{N} = \bigcup_{y \in I_{d-1}} \langle a \rangle + y,$$
$$\mathbb{N} = \langle a \rangle + [0, d-1].$$

L'expression peut s'écrire en termes de $\mathbb{N}$-modules affines comme :

$$\mathbb{N} = \bigcup_{y\in[0,d-1]} \mathcal{A}_y^d,$$

où $\mathcal{A}_0^d = \langle d \rangle$.

6. Le complément du $\mathbb{N}$-module $\langle d \rangle$ comme réunion de $\mathbb{N}$-modules affines. Soit $a \in \mathbb{N}$, $\langle d \rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré, alors,

$$\overline{\langle d \rangle} = \bigcup_{y\in[1,d-1]} \mathcal{A}_y^d,$$

$$\overline{\langle d \rangle} = \langle d \rangle + [1, d-1].$$

7. Soit $d \in \mathbb{N}$, $\langle d \rangle$ le $\mathbb{N}$-module et $a \in \langle d \rangle$, alors,

$$\mathcal{A}_a^d \subseteq \langle d \rangle,$$

8. Soit $a, d \in \mathbb{N}$, $\langle d \rangle$ le $\mathbb{N}$-module, alors,

$$\overline{\mathcal{A}_a^d} = (\overline{\langle d \rangle} + a) \cup [0, a-1].$$

9. Le $\mathbb{N}$-module de l'intersection.

   (a) Soit $a, b \in \mathbb{N}$ relativement premiers, $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ les $\mathbb{N}$-modules engendrés alors,

   $$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle ab \rangle.$$

   (b) Soit $\langle m_i \rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré par $m_i \in \mathbb{N}$ où $1 \leq i \leq k$ et $\mathbf{pgcd}(m_i, m_j) = 1$ si $i \neq j$, alors,

   $$\bigcap_{i=1}^{k} \langle m_i \rangle = \langle \prod_{i=1}^{k} m_i \rangle.$$

**Proposition A.1.** *Soient $d, c \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Le* ***nombre de Frobenius*** *de $2d, 3d$ et $c$ est :*

$$g(2d, 3d, c) = g(d, c) + 2d.$$

*Démonstration.* Nous avons que $\langle 2d, 3d\rangle = \mathcal{A}_{2d}^{d} \cup \{0\}$ donc,

$$\begin{aligned}\langle 2d, 3d, c\rangle &= \langle 2d, 3d\rangle + \langle c\rangle,\\ &= \left(\mathcal{A}_{2d}^{d} \cup \{0\}\right) + \langle c\rangle,\\ &= \left(\mathcal{A}_{2d}^{d} + \langle c\rangle\right) \cup (\{0\} + \langle c\rangle),\\ &= \mathcal{A}_{2d}^{d,c} \cup \langle c\rangle,\end{aligned}$$

cela implique que $\overline{\langle 2d, 3d, c\rangle} = \overline{\mathcal{A}_{2d}^{d,c}} \cap \overline{\langle c\rangle}$.

Soit $\gamma = g(d,c) + 2d$, il faut montrer que $\gamma \notin \mathcal{A}_{2d}^{d,c}$, $\gamma \notin \langle c\rangle$ et pour tout $r \geq 1$, $\gamma + r \in \mathcal{A}_{2d}^{d,c}$.

Comme $g(d,c) \notin \langle d, c\rangle$ implique qu'il n'existe pas $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $g(d,c) = \alpha d + \beta c$, alors il n'existe pas $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $g(d,c) + 2d = \alpha d + \beta c + 2d$. Donc $\gamma \notin \mathcal{A}_{2d}^{d}$.

Supposons que $\gamma \in \langle c\rangle$. Par définition nous avons :

$$\begin{aligned}\gamma &= g(d,c) + 2d,\\ &= c(d-1) - d + 2d,\\ &= c(d-1) + d.\end{aligned}$$

De plus, comme $\gamma = ck$, nous avons de l'équation ci-dessus que $ck = c(d-1) + d$, donc $c(k-d+1) = d$. Comme $\mathbf{pgcd}(d,c) = 1$ nous avons que $c|1$ et alors $c = 1$, contradiction. Donc $\gamma \notin \langle c\rangle$.

Nous avons montré que $\gamma \in \overline{\langle 2d, 3d, c\rangle}$, il reste à montrer que $\gamma$ est le maximum. Comme nous avons pour tout $r \geq 1$, $g(d,c) + r \in \langle d, c\rangle$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $g(d,c) + r = \alpha d + \beta c$. Il s'ensuit que $g(d,c) + r + 2d = \alpha d + \beta c + 2d$ et alors $\gamma + r \in \mathcal{A}_{2d}^{d,c}$. Donc, pour tout $r \geq 1$, $\gamma + r \notin \overline{\langle 2d, 3d, c\rangle}$, c'est-à-dire $\gamma$ est la valeur maximale. Nous avons montré que :

$$g(2d, 3d, c) = g(d,c) + 2d.$$

$\square$

**Proposition A.2.** *Soient $\langle \boldsymbol{m}\rangle, \langle \boldsymbol{p}\rangle$ deux $\mathbb{N}$-modules engendrés par $\boldsymbol{m} = \{m_1, \ldots, m_k\}$ et $\boldsymbol{p} = \{p_1, \ldots, p_l\}$ respectivement. Alors,*

$$\langle \boldsymbol{m}\rangle + \langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}\rangle,$$

*où $\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{p}\rangle$ est le $\mathbb{N}$-module engendré par $\{m_1,\dots,m_k,p_1,\dots,p_l\}$.*

**Propriété A.2.** *De la proposition A.2 nous avons que :*

1. si $\langle \boldsymbol{m}\rangle$ et $\langle \boldsymbol{n}\rangle$ sont deux $\mathbb{N}$-modules engendrés par $\boldsymbol{m} = \{p_1,\dots,p_k\}$ et $\boldsymbol{n} = \{p_1,\dots,p_k,q\}$ respectivement, alors,

$$\langle \boldsymbol{n}\rangle = \langle \boldsymbol{m}\rangle + \langle q\rangle$$

2. tout $\mathbb{N}$-module engendré pour un ensemble fini peut s'écrire comme :

$$\langle \boldsymbol{m}\rangle = \langle m_1\rangle + \cdots + \langle m_k\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle m_i\rangle \tag{A.2}$$

### A.3.2 $\mathbb{N}$-module et $\mathbb{N}$-module affines

Les énoncés suivants ne sont pas difficiles à monter.

**Proposition A.3.** *Soit $\boldsymbol{m} = \{m_1,\dots,m_k\}$ et $\langle \boldsymbol{m}\rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré par $\boldsymbol{m}$. Si le $\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m}) = d$ nous avons que :*

1. $\langle \boldsymbol{m}\rangle \subseteq \langle d\rangle$.
2. $\langle \boldsymbol{m}\rangle$ est un $\langle d\rangle$-module.

**Proposition A.4.** *Soit $k \geq 2$, $\boldsymbol{m} = \{m_1,\dots,m_k\}$ premiers entre eux, $\langle \boldsymbol{m}\rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré par $\boldsymbol{m}$, $g(\boldsymbol{m})$ le nombre de Frobenius de $\boldsymbol{m}$, $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m},q) = 1$ et $n = \left\lfloor \frac{g(\boldsymbol{m})}{q} \right\rfloor$.*

*Alors nous avons que :*

$$\langle \boldsymbol{m},q\rangle = \langle \boldsymbol{m}\rangle + q[0,n],$$

*où en termes de $\mathbb{N}$- modules affines,*

$$\langle \boldsymbol{m},q\rangle = \bigcup_{x\in q[0,n]} \mathcal{A}_x^{\boldsymbol{m}},$$

où $q[0,n] = \{z = jq \mid 0 \leq j \leq n\}$.

**Proposition A.5.** *Dans le cas des $\mathbb{N}$-modules engendrés par un seul élément $a$, nous avons que*

1. $\mathcal{A}_j^a \subseteq \mathcal{A}_i^a$ *si* $i \leq j$ *et* $i = j$ $\boldsymbol{mod}(a)$.
2. $\mathcal{A}_j^a \cap \mathcal{A}_i^a = \phi$ *si et seulement si* $i \neq j$ $\boldsymbol{mod}(a)$.
3. $\mathcal{A}_d^a \cap \mathcal{A}_c^b = \mathcal{A}_k^{ab}$

   *où* $k = bq + c$ *et* $q = \underset{q' \in \mathbb{N}}{\boldsymbol{min}}\{bq' + c = d \ \boldsymbol{mod}(a)\}$

### A.3.3 Le complément de $\langle a, b\rangle$

À partir de l'expression suivante d'un $\mathbb{N}$-module engendré par $\{a, b\}$ relativement premiers.

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a,$$

nous voulons calculer son complément

$$\begin{aligned}
\overline{\langle a, b\rangle} &= \mathbb{N} \setminus \left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right) \\
&= \bigcap_{j=0}^{a-1} (\mathbb{N} \setminus \mathcal{A}_{jb}^a) \\
&= \bigcap_{j=0}^{a-1} \overline{\mathcal{A}_{jb}^a}
\end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{A}_0^a = \langle a\rangle$ et $\mathbb{N} = \sum_{i=0}^{a-1} \mathcal{A}_i^a$, donc le complément total devient :

$$\begin{aligned}
\overline{\langle a, b\rangle} &= \mathbb{N} \setminus \left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{a-1} \mathcal{A}_i^a\right) \setminus \left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right) \\
&= \sum_{i=0}^{a-1} \left(\mathcal{A}_i^a \setminus \left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right)\right)
\end{aligned}$$

Alors, nous avons que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i^a \setminus \left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right) &= \mathcal{A}_i^a \cap \overline{\left(\sum_{j=0}^{a-1} \mathcal{A}_{jb}^a\right)} \\ &= \mathcal{A}_i^a \cap \left(\bigcap_{j=0}^{a-1} \overline{\mathcal{A}_{jb}^a}\right)\end{aligned}$$

On remarque que si $\mathcal{A}_i^a \cap \mathcal{A}_{jb}^a = \phi$ alors $\mathcal{A}_i^a \cap \overline{\mathcal{A}_{jb}^a} = \mathcal{A}_i^a$. Donc, nous avons par le proposition A.5 que si $\mathcal{A}_i^a \cap \mathcal{A}_{jb}^a \neq \phi$ alors $i = jb \ \mathbf{mod}(a)$.

Donc, si $i = 0$ l'intersection est vide, par contre si $i \neq 0$ et $i = jb \ \mathbf{mod}(a)$, on a que :

$$\mathcal{A}_i^a \cap \left(\bigcap_{j=0}^{a-1} \overline{\mathcal{A}_{jb}^a}\right) = \mathcal{A}_i^a \cap \overline{\mathcal{A}_{jb}^a},$$

et l'expression du complément se réduit à :

$$\overline{\langle a, b\rangle} = \sum_{i=1}^{a-1} S_{a,b}^*(i) \tag{A.3}$$

où $S_{a,b}^*(i) = \mathcal{A}_i^a \setminus \mathcal{A}_{jb}^a$ et $i = jb \ \mathbf{mod}(a)$.

**Proposition A.6.** *Soit $a \in \mathbb{N}$, $\langle a\rangle$ un $\mathbb{N}$-module engendré par un seul élément, $a \leq b$ relativement premiers et $1 \leq i, j \leq a-1$ tels que $i = jb$ **mod**$(a)$.*
*Si $z \in S_{a,b}^*(i)$ alors $z < jb$.*

*Démonstration.* Étant donné que $S_{a,b}^*(i) = \mathcal{A}_i^a \setminus \mathcal{A}_{jb}^a$ et par le proposition A.5 nous avons que $\mathcal{A}_{jb}^a \subseteq \mathcal{A}_i^a$ et si $z \in \mathcal{A}_{jb}^a$alors, $z = aq + jb$ quel que soit $q \in \mathbb{N}$. De plus nous savons que $\mathcal{A}_{jb}^a$ a un élément minimal car il est sous-ensemble de $\mathbb{N}$, et aussi qu'il est bien ordonné. Donc $z_0 = jb$ est le minimum de $\mathcal{A}_{jb}^a$. Si $z \in \mathcal{A}_i^a$ et $z \geq jb$ on a que :

$$\begin{aligned} z &\geq jb && \\ aq + i &\geq jb && \text{car } z \in \mathcal{A}_i^a \\ aq + i &\geq aq' + i, && \text{car } i = jb \ \mathbf{mod}(a) \end{aligned}$$

alors, $q \geq q'$, autrement dit qu'il existe $r > 0$ tel que $q = r + q'$ donc,

$$\begin{aligned} z &= aq + i \\ &= a(r + q') + i \\ &= ar + aq' + i \\ &= ar + jb. \end{aligned}$$

Alors $z \in \mathcal{A}^a_{jb}$, donc si $z \in \mathcal{A}^a_i \setminus \mathcal{A}^a_{jb}$ implique que $z < jb$ $\square$

**Proposition A.7.** *Avec les hypothèses de la proposition A.6 nous avons que $S^*_{a,b}(i)$ est fini et que $|S^*_{a,b}(i)| = \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor$.*

*Démonstration.* Comme $S^*_{a,b}(i)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ avec un élément maximal, il est fini. Si $z \in S^*_{a,b}(i)$, $z \in \mathcal{A}^a_i$ et $z < jb$, en fixant $j$ on a que $jb = aq' + i$ et $z = aq + i$ donc,

$$\begin{aligned} z &< jb & & \\ aq + i &< jb & & \text{car } z \in \mathcal{A}^a_i \\ aq + i &< aq' + i, & & \text{car } i = jb \ \mathbf{mod}(a) \end{aligned}$$

alors, il existe $r > 0$ tel que $q = q' - r > 0$ donc,

$$\begin{aligned} q &= q' - r \\ aq &= aq' - ar \\ aq + i &= aq' + i - ar \\ z &= jb - ar \end{aligned}$$

On a que $z$ devient de la forme $z = jb - ar$, alors on va calculer toutes les valeurs possibles pour $r$ car $0 \leq z < jb$.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq jb - ar < jb \\
-jb &\leq -ar < 0 \\
jb &\geq ar > 0 \\
\left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor &\geq r \geq 1 && \text{car } r \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Donc $|S^*_{a,b}(i)| = \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor$. □

**Proposition A.8.** *Comme conséquence directe de la proposition A.7 nous avons une caractérisation de l'ensemble $S^*_{a,b}(j)$.*

$$S^*_{a,b}(j) = \left\{ z = jb - ar \;\middle|\; 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{jb}{a} \right\rfloor \right\} \tag{A.4}$$

### A.3.4 Le semi-anneau $\langle a \rangle$

On peut vérifier facilement les propriétés de **semi-anneau** sur l'ensemble de $\mathbb{N}$-modules engendrés par un seul élément. Ensuite on définit une opération multiplicative.

**Définition A.3.1.** *Soit $\langle a \rangle$ le $\mathbb{N}$-module engendré par l'élément $a \in \mathbb{N}$.*
*On définit $* : \langle a \rangle \to \langle a \rangle$ comme :*

$$x * y := \left\lfloor \frac{xy}{a} \right\rfloor$$

**Proposition A.9.**

1. *L'ensemble $(\langle a \rangle, +, 0)$ est un semi-groupe commutatif.*
2. *L'ensemble $(\langle a \rangle, *, a)$ est un semi-groupe.*
3. *L'ensemble $(\langle a \rangle, +, *, 0, a)$ est un semi-anneau.*
4. *il existe un isomorphisme de semi-anneau entre $(\langle a \rangle, +, *, 0, a)$ et $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$.*

## A.4 Calcul de Coeur Maximal

La formule de la taille du **cœur maximal** pour $a$ et $b$ en un cas général est :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{|S^*_{a,b}(t)|} (bt - aj) - \frac{|\overline{\langle a, b\rangle}|(|\overline{\langle a, b\rangle}| - 1)}{2}.$$

On sait que $|\overline{\langle a, b\rangle}| = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$ et $|S^*_{a,b}(t)| = \lfloor \frac{bt}{a} \rfloor$ donc,

$$\frac{|\overline{\langle a, b\rangle}|(|\overline{\langle a, b\rangle}| - 1)}{2} = \frac{(a-1)(b-1)(ab-b-a-1)}{8},$$

et,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{bt}{a} \rfloor} (bt - aj) &= \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{bt}{a} \rfloor} bt - \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{bt}{a} \rfloor} aj \\
&= \sum_{t=1}^{a-1} bt \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor - \sum_{t=1}^{a-1} \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor + 1 \right) \\
&= \sum_{t=1}^{a-1} bt \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor - \sum_{t=1}^{a-1} \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor^2 - \frac{a}{2} \sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \\
&= \sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( bt - \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \right) - \frac{a(a-1)(b-1)}{4}
\end{aligned}$$

De calcule partiel nous avons,

$$\begin{aligned}
\frac{(a-1)(b-1)(ab-b-a-1)}{8} + \frac{a(a-1)(b-1)}{4} &= \frac{(a-1)(b-1)(ab-b-a-1+2a)}{8}, \\
&= \frac{(a-1)(b-1)(ab-b+a-1)}{8}, \\
&= \frac{(a-1)(b-1)(a(b+1)-(b+1))}{8}, \\
&= \frac{(a-1)(b-1)(a-1)(b+1)}{8}, \\
&= \frac{(a-1)^2(b^2-1)}{8}.
\end{aligned}$$

Nous arrivons à l'expression suivante :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( bt - \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \right) - \frac{(a-1)^2(b^2-1)}{8}. \tag{A.5}$$

Alors, dans le cas que $b = a + 1$ nous obtenons que :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \binom{a+2}{4}. \tag{A.6}$$

*Démonstration.* Comme $b = a + 1$ nous avons que $|\overline{\langle (a, a+1) \rangle}| = \frac{1}{2}a(a-1)$ et $\left\lfloor \frac{(a+1)t}{a} \right\rfloor = t + \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor$ comme $t < a$, $\left\lfloor \frac{(a+1)t}{a} \right\rfloor = t$, donc :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{t} ((a+1)t - aj) - \frac{a(a-1)(a(a-1)-2)}{8}.$$

On prend la somme double :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{t} ((a+1)t - aj) &= (a+1) \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{t} t - a \sum_{t=1}^{a-1} \sum_{j=1}^{t} j, \\
&= (a+1) \sum_{t=1}^{a-1} t^2 - \frac{a}{2} \sum_{t=1}^{a-1} t(t+1), \\
&= \frac{(a+2)}{2} \sum_{t=1}^{a-1} t^2 - \frac{a}{2} \sum_{t=1}^{a-1} t, \\
&= \frac{(a+2)}{2} \frac{a(a-1)(2a-1)}{6} - \frac{a}{2} \frac{a(a-1)}{2}, \\
&= \frac{a(a-1)}{12} \left( (a+2)(2a-1) - 3a \right), \\
&= \frac{a(a-1)(2a^2-2)}{12}, \\
&= \frac{a(a-1)(a^2-1)}{6}, \\
&= (a-1) \binom{a+1}{3}.
\end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans la formule complete, nous avons :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \frac{a(a-1)(a^2-1)}{6} - \frac{a(a-1)(a(a-1)-2)}{8}.$$

Alors, en utilisant des opérations algébriques et des relations binomiales nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_{max}| &= \frac{a(a-1)(a^2-1)}{6} - \frac{a(a-1)(a^2-a-2)}{8}, \\
&= \frac{a(a-1)(a^2-1)}{6} - \frac{a(a-1)(a-2)(a+1)}{8}, \\
&= \frac{a(a-1)(a+1)}{24}(4(a-1)-3(a-2)), \\
&= \frac{a(a-1)(a+1)}{24}(4a-4-3a+6), \\
&= \frac{a(a-1)(a+1)(a+2)}{4!}, \\
&= \binom{a+2}{4}.
\end{aligned}$$

□

**Lemme A.4.1.** *Soit $a$ et $b$ relativement premiers alors,*

$$\sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( bt - \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \right) = \frac{(b^2-1)(a-1)(2a-1)}{12}. \tag{A.7}$$

*Démonstration.* À partir de l'équation A.5 et en utilisant l'expression :

$$|\mathcal{C}_{max}| = \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{24}, \qquad \text{(voir [14, page 98])}$$

nous avons que :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( bt - \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \right) - \frac{(a-1)^2(b^2-1)}{8} &= \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{24}, \\
\sum_{t=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \left( bt - \frac{a}{2} \left\lfloor \frac{bt}{a} \right\rfloor \right) &= \frac{(a-1)^2(b^2-1)}{8} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{24}, \\
&= \frac{(b^2-1)(3(a-1)^2+(a^2-1))}{24},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b^2-1)(3a^2-6a+3+a^2-1)}{24}, \\
&= \frac{(b^2-1)(4a^2-6a+2)}{24}, \\
&= \frac{(b^2-1)(2a^2-3a+1)}{12}, \\
&= \frac{(b^2-1)(a-1)(2a-1)}{12},
\end{aligned}
$$

□

# APPENDICE B

# CODE SAGE

Tous les outils développés sont librement disponibles sur le site web :

http://thales.math.uqam.ca/~jeblazek/Sage_Combinatory.html

## B.1 Le Chemin de Christoffel

Le mot de Christoffel a été introduit par Christoffel en 1875, il est étroitement lié à la combinatoire des mots. On peut définir le **chemin de Christoffel** comme la courbe discrète associée au mot tel qu'elle est la plus proche à la diagonale.

On construit l'algorithme sage selon l'article [10].

Exemples :

```
sage: c=Christoffel([3,5])
sage: c.word()
        'ababbabb'

sage: c.op='Num'
sage: c.word()
        '01011011'

sage: c.vec=true
        [0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]

sage: c=Christoffel([3,5,7])
sage: c.word()
        'accbbacccaccbbb'
```

```
##################################################################
#                Chemin de Christoffel
#      Algorithme de l'article de C.Reutenauer et autres. 2013
# J.E.Blazek 2014
##################################################################
# Definition du Class
##################################################################
class Christoffel:
    def __init__ ( self, vlist):
        self.a = vlist ;
        self.let=[]
        self.op='Alp'
        self.vec=false
    def word(self):
        a=self.a
        b=[];ax=a
        n=len(a)-1
        if (self.let==[] and self.op=='Alp'):
            self.let=['a','b','c','d','e','f','g']
        if (self.let==[] and self.op=='Num'):
            self.let=[str(j) for j in range(n+1) ]
        cwg=self.let
        cw=cwg[:n+1]
        nul=[0 for i in range(n-1)]
        b=[a[0]]+nul+[a[0]]
        while (a!=b):
            ax=[]
            cwx=[]
            if a[0]>a[n]:
                ax=ax+[a[0]-a[n]]
                ax=ax+[a[n]]
                ax=ax+a[1:n]
                cwx=cwx+[cw[0]]
                cwx=cwx+[cw[0]+cw[n]]
                cwx=cwx+cw[1:n]
            else:
                ax=a[:n]
                ax=ax+[a[n]-a[0]]
                cwx=cwx+[cw[0]+cw[n]]
                cwx=cwx+cw[1:n+1]
            a=ax
            b=[a[0]]+nul+[a[0]]
```

```
            cw=cwx
        CW=cw[0]+cw[n]
        if self.vec:
            CWx=[eval(e) for e in CW]
        else:
            CWx=CW
        return CWx

#---------------------------------------------------------------
# Definitions Auxiliaires
#---------------------------------------------------------------

def Christoffel_gen(a):
    cwg=['a','b','c','d','e']
    b=[];ax=a
    n=len(a)-1
    cw=cwg[:n+1]
    nul=[0 for i in range(n-1)]
    b=[a[0]]+nul+[a[0]]
    while (a!=b):
        ax=[]
        cwx=[]
        if a[0]>a[n]:
            ax=ax+[a[0]-a[n]]
            ax=ax+[a[n]]
            ax=ax+a[1:n]
            cwx=cwx+[cw[0]]
            cwx=cwx+[cw[0]+cw[n]]
            cwx=cwx+cw[1:n]
        else:
            ax=a[:n]
            ax=ax+[a[n]-a[0]]
            cwx=cwx+[cw[0]+cw[n]]
            cwx=cwx+cw[1:n+1]
        a=ax
        b=[a[0]]+nul+[a[0]]
        cw=cwx
    CW=cw[0]+cw[n]
    return CW

def Christoffel_gen2(a):
    CW=Christoffel_gen(a)
```

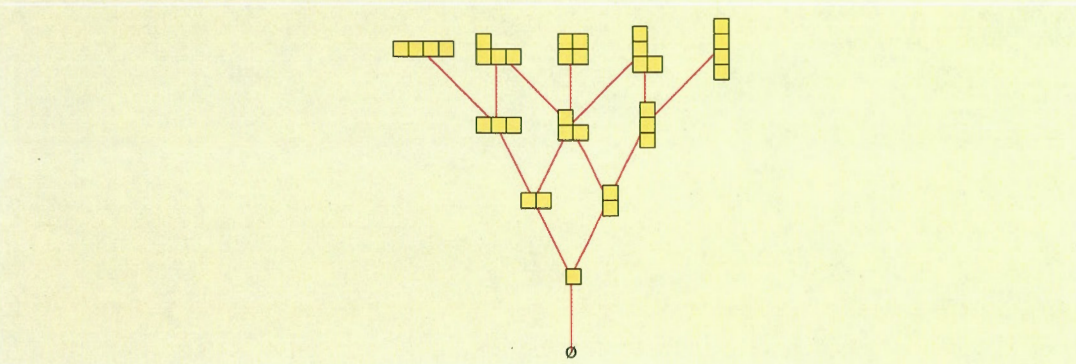
```
    n=a[0]+a[1]
    l=len(CW)
    if l!=n:
        MC=''
        r=int(n/l)
        for k in [1..r]:
            MC=MC+CW
        CW=MC
    return CW

def Christoffel_Lst(a):
    CW=Christoffel_gen2(a)
    Lst=[]
    for e in CW:
        c=0
        if e=='b':
            c=1
        Lst.append(c)
    return Lst
```

## B.2 Les Treillis de Young et de Kréwéras

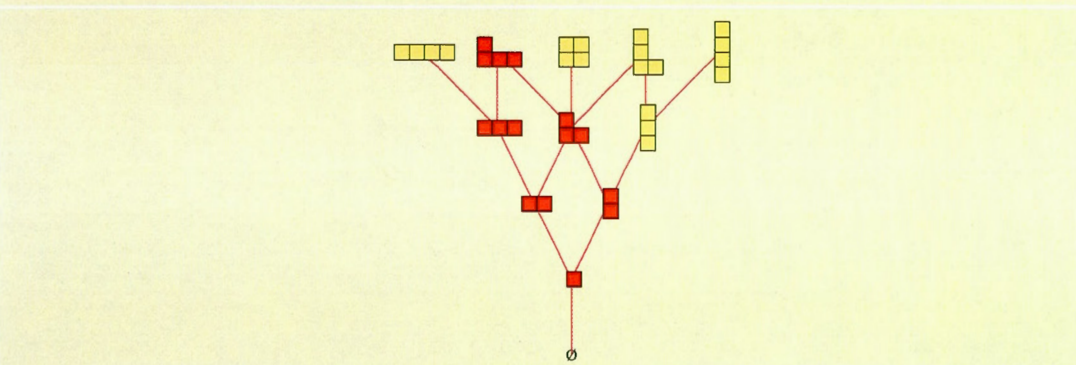
Nous avons développé des routines sur SAGE qui font des **opérations sur les partages** directement comme **U** et **D**, aussi des routines liées aux librairies de LaTeX comme usepackage{tikz} et usepackage{ytableau} pour améliorer la visualisation des objets comme les **treillis de Kréwéras** et de **Young**.

Exemples :

```
Y=Treillis(4)
TYs=Y.Plot()
```




```
Y=Treillis(4)
Y.vPKrew=[3,1]
TYs=Y.Plot()
```



```
from sage.misc.latex import latex_extra_preamble
latex.extra_macros('')
latex.extra_preamble('')
latex.add_to_preamble('\\usepackage{tikz}')
latex.add_to_jsmath_avoid_list("tikz")
latex.add_to_preamble('\usepackage{ytableau}')

#################################################################
#   Treillis de young et latex
#################################################################

class Part_Latex:
    def __init__ ( self, vArg):
        self.Part=vArg
        self.Color='*(yellow!70)'
        self.Scale='1'
        self.mode='fr'

    def Tableau(self):
        vArg=self.Part
        H=LatexExpr(r'\ytableausetup')+'{mathmode, boxsize='+self.Scale+'em,centertableaux}'
        S=LatexExpr(r'\ydiagram')+'['+self.Color+']{'
        if self.mode=='fr':
            vArg=Sequence(vArg)
            vArg.reverse()
        for i in range(len(vArg)):
            c=','
            if i==len(vArg)-1: c='}'
            S=S+str(vArg[i])+c
        Y=H+S
        return Y

class Treillis:
    def __init__ ( self, vlevel):
        self.n=vlevel
        self.form='Di'
        self.TrYP=[]
        self.vPKrew=[]
        self.Ycolor='*(yellow!70)'
        self.Kcolor='*(red)'
        self.Lcolor='red!50'
        self.Lwidth=0.5
```

```
        self.Lstyle='-'
        n=self.n
        for i in [0..n]:
            self.TrYP.append(Partitions(i).list())
        self.TrC=Linked(self.TrYP)

    def Plot(self):
        vPKrew=self.vPKrew
        if vPKrew!=[]:
            KS=Kreweras(vPKrew)
        vArg=self.TrYP;   vTree=self.TrC
        n=self.n ; op=self.form; sc=2
        vStyle=''
        s=''
        for i,l in enumerate(vArg):
            n=len(l)
            y=sc*i
            y0=y
            for j,p in enumerate(l):
                x=sc*j-n
                TY='*'
                if op=='Di':
                    if p!=[]:
                        PLx=Part_Latex(p)
                        PLx.Color=self.Ycolor
                        if vPKrew!=[]:
                            if (p in KS):
                                PLx.Color=self.Kcolor
                        TY=PLx.Tableau()
                    else:
                        TY=LatexExpr(r'\tb{\0}')
                if op=='Pt':
                    TY=LatexExpr(r'\tb{')+str(p)+'}'
                s=s+LatexExpr(r'\draw (')+str(x)+','+str(y)+') node{'+TY+'};'
        m=len(vArg)
        vStyle='[color='+self.Lcolor+',line width='+str(self.Lwidth)+'pt,'+self.Lstyle+']'
        s1=LatexExpr(r'\draw')+vStyle+'(-1,0) -- (-1,'+str(sc)+');'
        for i in [1..m-2]:
            n0=len(vArg[i])
            n1=len(vArg[i+1])
            y0=sc*i
            y1=sc*i+sc
```

```
            T=vTree[i]
            for j,t in enumerate(T):
                x0=sc*j-n0
                for k in t:
                    x1=sc*k-n1
                    r=LatexExpr(r'\draw')+vStyle+'('+str(x0)+','+str(y0)+') -- ('+str(x1)+','+str(y1)+');'
                    s1=s1+r
        s=s1+s
        S=''
        S=LatexExpr(r'\begin{tikzpicture}[scale=.7, every node/.style={scale=0.5}]')
        S=S+s
        S=S+LatexExpr(r'\end{tikzpicture}')
        show(S)
        return S

#------------------------------------------------------------
# Definitions Auxiliaires
#------------------------------------------------------------

def Linked(vList):
    vLinked=[]
    for i,vL in enumerate(vList):
        if i< len(vList)-1:
            vLx=Partitions(i+1).list()
            vLk=[]
            for e in vL:
                vLkx=[]
                vLPart=Up(e)
                for p in vLPart:
                    vLkx.append(vLx.index(p))
                vLk=vLk+[vLkx]
            vLinked=vLinked+[vLk]
        else:
            vLinked=vLinked+[[[]]]
    return vLinked

def Up(vPart):
    S_P=[]
    n=len(vPart)
    for i in range(len(vPart)):
        nul=[0 for k in range(n-1)]
        uni=vector(nul[:i]+[1]+nul[i:])
```

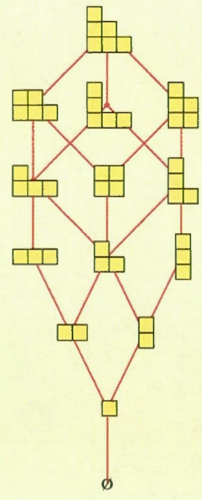
```
        vNP=Sequence(vPart[:i]+[vPart[i]+1]+vPart[i+1:])
        vNP.sort(reverse=True)
        if not(vNP in S_P):
            S_P.append(vNP)
    vNP=vPart+[1]
    S_P.append(vNP)
    return S_P

def Kreweras(vPart):
    KS=[vPart]
    n=1
    j=0
    while j<n:
        S=Down(KS[j])
        for s in S:
            if not(s in KS):
                KS.append(s)
        n=len(KS)
        j=j+1
    return KS

def Down(vPart):
    S_P=[]
    n=len(vPart)
    for i in range(len(vPart)):
        nul=[0 for k in range(n-1)]
        uni=vector(nul[:i]+[1]+nul[i:])
        if vPart[i]-1>=0:
            if vPart[i]-1==0:
                vNP=Sequence(vPart[:i]+vPart[i+1:])
            else:
                vNP=Sequence(vPart[:i]+[vPart[i]-1]+vPart[i+1:])
            vNP.sort(reverse=True)
            if not(vNP in S_P):
                S_P.append(vNP)
    return S_P
```

## B.3 Chemins de Dyck

Pour les **chemins de Dyck**, nous avons développé des routines semblables aux sections précédentes et d'autres routines comme pour le calcul de **polynôme $q$-énumérateur** ou de sous-treillis. Ci-dessous nous avons écrit seulement les routines qui ne sont pas en commun avec les autres sections.

Exemples :

```
sage: D=Dyck([4,5])
sage: D.Treillis()
        [[[]], [[1]], [[2], [1, 1]], [[3], [2, 1], [1, 1, 1]], [[3, 1], [2, 2],
        [2, 1, 1]], [[3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1]], [[3, 2, 1]]]
sage: D.qEnumerateur()
        q^6 + q^5 + 2*q^4 + 3*q^3 + 3*q^2 + 3*q + 1
sage: D.Ym()
sage: D.Frobenius
        [[1], [6, 2], [11, 7, 3]]
sage: D.ModuleAffine()
sage: D.Affine
        [[[]], [[11]], [[7, 11], [6, 11]], [[3, 7, 11], [6, 7, 11], [1, 6, 11]],
        [[3, 6, 7, 11], [2, 6, 7, 11], [1, 6, 7, 11]], [[2, 3, 6, 7, 11], [1, 3,
        6, 7, 11], [1, 2, 6, 7, 11]], [[1, 2, 3, 6, 7, 11]]]
sage: P=D.Plot()
```



```
sage: D.List_Ch
        [(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1,
        0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,
        1), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1,
        0, 1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1,
        1), (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0,
        1, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)]
sage: D.chp=tuple([0,0,0,1,0,1,1,1,1])
sage: D.is_Dyck()
        True
sage: R=D.Rectangle()
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -4 | -8 | -12 | -16 | -20 |
| 1 | -3 | -7 | -11 | -15 |
| 6 | 2 | -2 | -6 | -10 |
| 11 | 7 | 3 | -1 | -5 |

```
sage: D.Core()
        [[7, 3, 2], [6, 2, 1], [3], [2], [1]]
sage: C=D.Core_latex()
```

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 6 | 2 | 1 |
| 7 | 3 | 2 |

```
sage: D.Core_Conjugate()
        [[7, 6, 3, 2, 1], [3, 2], [2, 1]]
sage: CC=D.Core_Conjugate_latex()
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | |
| 3 | 2 | | | |
| 7 | 6 | 3 | 2 | 1 |

```
##################################################################
# Class de Chemin de Dycks
# JEB
##################################################################
class Dyck:
    def __init__ ( self, vlist):
        self.m=vlist
        self.Dyk=Dyck_X(vlist)
        self.cardinality=Bizley(self.m[0],self.m[1])#len(self.Dyk.Set())
        self.chp=[]
        self.vPKrew=[]
        self.TrDyk=[]
        self.TrC=[]
        self.n=((self.m[0]-1)*(self.m[1]-1)-gcd(self.m[0],self.m[1])-1)/2
        self.Frobenius=[]
        self.Affine=[]
        self.form='Di'
        self.Ycolor='*(yellow!70)'
        self.Kcolor='*(red)'
        self.Lcolor='red!50'
        self.Lwidth=0.5
        self.Lstyle='-'
        self.PartMax=Ch_Part(self.Dyk.chChr)
        self.List_Ch=self.Dyk.Set()
        self.DiagrammeMax=Part_Latex(self.PartMax).Diagramme()
        self.Rect_Latex=''
        self.Coeur=[]
        self.Coeur_Conjugate=[]

    def qEnumerateur(self):
        mx=add(e for e in self.PartMax)
        vArg=self.TrDyk
        q=var('q')
        qC=0
        for l in vArg:
            for p in l:
                np=add(e for e in p)
                n=mx-np
                qC=qC+q^n
        return qC
    def Core(self):
        a=self.m[0];b=self.m[1]
```

```
        ch=self.chp
        if ch==[]:
            ch=tuple([0 for i in range(a)]+[1 for i in range(b)])
        self.Coeur=Dyck_Core(ch)
        return self.Coeur
    def Core_Conjugate(self):
        Cx=self.Coeur
        Cx_Cj=[]
        n=len(Cx)
        L=[len(j) for j in Cx]
        m=max(L)
        M=Matrix(n,m)
        for j,l in enumerate(Cx):
            for k,e in enumerate(l):
                M[j,k]=e
        for k in range(m):
            Cx_e=[]
            for j in range(n):
                e=M[j,k]
                if e!=0:
                    Cx_e.append(e)
            Cx_Cj.append(Cx_e)
        self.Coeur_Conjugate=Cx_Cj
        return Cx_Cj
    def Core_latex(self):
        S=''
        Co=self.Core()
        Co.reverse()
        for j,L in enumerate(Co):
            sL=''
            for i,e in enumerate(L):
                c='&'
                if j!=len(Co)-1:
                    if i==len(L)-1:
                        c=LatexExpr(r'\\')
                else:
                    if i==len(L)-1:
                        c=''
                if i==0:
                    sL=sL+'*(yellow!50)'
                if i!=0:
                    sL=sL+'*(white)'
```

```
                sL=sL+str(e)+c
            S=S+sL
        S=LatexExpr(r' \ytableausetup{centertableaux}\begin{ytableau}')+S+LatexExpr(r'\end{ytableau}')
        show(S)
        return S
    def Core_Conjugate_latex(self):
        S=''
        Co=Sequence(self.Coeur_Conjugate)
        Co.reverse()
        for j,L in enumerate(Co):
            sL=''
            for i,e in enumerate(L):
                c='&'
                if j!=len(Co)-1:
                    if i==len(L)-1:
                        c=LatexExpr(r'\\')
                else:
                    if i==len(L)-1:
                        c=''
                #print i
                if i==0:
                    sL=sL+'*(yellow!50)'
                if i!=0:
                    sL=sL+'*(white)'
                sL=sL+str(e)+c
            S=S+sL
        S=LatexExpr(r' \ytableausetup{centertableaux}\begin{ytableau}')+S+LatexExpr(r'\end{ytableau}')
        show(S)
        return S
    def PartCh(self):
        a=self.m[0];b=self.m[1]
        ch=self.chp
        if ch==[]:
            ch=tuple([0 for i in range(a)]+[1 for i in range(b)])
        self.chp=ch
        P=Ch_Part(ch)
        return P
    def Rectangle(self):
        a=self.m[0];b=self.m[1]
        ch=self.chp
        vPart=self.PartCh()
        S=LatexExpr(r'\begin{tikzpicture}')
```

```
        S=S+Dyck_Rect(a,b)
        S=S+DyckNum(a,b,vPart,'yellow!50')
        S=S+Diag(b,a)
        if self.is_Dyck():
            S=S+Ch_Latex(a,b,ch,'red')
        S=S+LatexExpr(r'\end{tikzpicture}')
        self.Rect_Latex=S
        show(S)
        return S
    def is_Dyck(self):
        Dy=self.Dyk
        ch=self.chp
        isD=(ch in Dy.Set())
        return isD
    def Treillis(self):
        a=self.m[0];b=self.m[1]
        n=a+b-1
        ch=self.Dyk.chChr
        vPrt=Ch_Part(ch)
        self.TrDyk=Dyck_levels(vPrt,a,b)
        self.TrC=Linked_Gral(self.TrDyk)
        return self.TrDyk
    def ModuleAffine(self):
        Y=Sequence(self.Frobenius)
        Y.reverse()
        T=self.TrDyk
        MAf=[]
        for j,L in enumerate(T):
            MAfx=[]
            for i,p in enumerate(L):
                MAfx.append(Ab(p,Y))
            MAf.append(MAfx)
        self.Affine=MAf
        return
    def Ym(self):
        MX=[]
        a=self.m[0];b=self.m[1]
        if  gcd(a,b)==1:
            MLx=[]
            for i in [1..a-1]:
                MLx=[]
                k=int(b*i/a)
```

```
                for j in [1..k]:
                    MLx.append(b*i-a*j)
                MX.append(MLx)
        self.Frobenius=MX
        return
    def Plot(self):
        mx=add(e for e in self.PartMax)
        vPKrew=self.vPKrew
        if vPKrew!=[]:
            KS=Kreweras(vPKrew)
        vArg=self.TrDyk;   vTree=self.TrC
        n=self.n ; op=self.form; sc=2
        vStyle=''
        s=''
        for i,l in enumerate(vArg):
            n=len(l)
            y=sc*i
            y0=y
            for j,p in enumerate(l):
                x=sc*j-n
                TY='*'
                if op=='DiPo':
                    np=add(e for e in p)
                    n1=mx-np
                    TY1='=$ q^{'+str(n1)+'}$'
                    if p!=[]:
                        PLx=Part_Latex(p)
                        PLx.Color=self.Ycolor
                        if vPKrew!=[]:
                            if (p in KS):
                                PLx.Color=self.Kcolor
                        TY=PLx.Diagramme()+TY1
                    else:
                        TY=LatexExpr(r'\tb{\O}')+TY1
                if op=='Di':
                    if p!=[]:
                        PLx=Part_Latex(p)
                        PLx.Color=self.Ycolor
                        if vPKrew!=[]:
                            if (p in KS):
                                PLx.Color=self.Kcolor
                        TY=PLx.Diagramme()
```

```
                    else:
                        TY=LatexExpr(r'\tb{\O}')
                if op=='Pt':
                    TY=LatexExpr(r'\tb{')+str(p)+'}'
                if op=='Po':
                    np=add(e for e in p)
                    n1=mx-np
                    TY='$q^{'+str(n1)+'}$'
                if p!=[]:
                    s=s+LatexExpr(r'\draw')+'[color='+self.Lcolor+']('+str(x)+','+str(y)+')'
                    s=s+LatexExpr(r'\node{$'+LatexExpr(r'\bullet$};')
                s=s+LatexExpr(r'\draw (')+str(x)+','+str(y)+') node{'+TY+'};'
        m=len(vArg)
        vStyle='[color='+self.Lcolor+',line width='+str(self.Lwidth)+'pt,'+self.Lstyle+']'
        s1=LatexExpr(r'\draw')+vStyle+'(-1,0) -- (-1,'+str(sc)+');'
        for i in [1..m-2]:
            n0=len(vArg[i])
            n1=len(vArg[i+1])
            y0=sc*i
            y1=sc*i+sc
            T=vTree[i]
            for j,t in enumerate(T):
                x0=sc*j-n0
                for k in t:
                    x1=sc*k-n1
                    r=LatexExpr(r'\draw')+vStyle+'('+str(x0)+','+str(y0)+') -- ('+str(x1)+','+str(y1)+');'
                    s1=s1+r
        s=s1+s
        S=''
        S=LatexExpr(r'\begin{tikzpicture}[scale=.7, every node/.style={scale=0.5}]')
        S=S+s
        S=S+LatexExpr(r'\end{tikzpicture}')
        show(S)
        return S

class Dyck_X:
    def __init__ ( self, vlist):
        self.vlist = vlist ;
        self.chChr=Christoffel_Lst(self.vlist)

    def Set(self):
        a=self.vlist[0];b=self.vlist[1]
```

```
        n=a+b-1
        ch=self.chChr
        chv=tuple(ch)
        DyL=[chv]
        l=len(DyL)
        j=0
        while (l>j):
            chi=DyL[j]
            DyLX=[]
            for i in [1..n-1]:
                if chi[i]==1:
                    t=Permutation(Trp(i+1,n+1))
                    chn=t.action(chi)
                    DyLX.append(tuple(chn))
            SX=Set(DyLX)
            S=Set(DyL)
            DS=SX.difference(S)
            DyL=DyL+DS.list()
            l=len(DyL)
            j=j+1
        return DyL
    def Matrix(self):
        a=self.vlist[0];b=self.vlist[1]
        M=[]
        n=a+b-1
        ch=self.chChr
        chv=tuple(ch)
        DyL=[chv]
        l=len(DyL)
        j=0
        while (l>j):
            chi=DyL[j]
            DyLX=[]
            M1=[0 for k in [1..j]]
            for i in [1..n-1]:
                if chi[i]==1:
                    t=Permutation(Trp(i+1,n+1))
                    chn=t.action(chi)
                    DyLX.append(tuple(chn))
            SX=Set(DyLX)
            S=Set(DyL)
            DS=SX.difference(S)
```

```
            DyL=DyL+DS.list()
            Ml=Ml+[1 for k in range(len(SX))]
            l=len(DyL)
            j=j+1
            M=M+[Ml]
        M=Lst_Mx(M)
        return M

def Dyck_Rect(a,b,BgC='gray!20',DwC='white',UpC='yellow!50',ch=[]):
    S=''
    M=MDiagram(a,b)
    for i,L in enumerate(M):
        for j,m in enumerate(L):
            Co='yellow!50'
            if m<0:Co='gray!20'
            x=j
            y=-a+i
            S=S+LatexExpr(r'\draw')+'[fill='+Co+']'+'('+str(x)+','+str(y)+') rectangle
                            ('+str(x+1)+','+str(y+1)+');'
    return S

def MDiagram(a,b):
    M=[]
    for i in [1..a]:
        M1=[]
        for j in [1..b]:
            M1=M1+[a*b-i*b-j*a]
        M=M+[M1]
    M=Matrix(M)
    return M

def Diag(a,b,*arg,**kwds):
    vColor='blue'
    vStyle=''
    K=kwds
    for vArg in K.items():
        if vArg[0]=='vColor':
            vColor=vArg[1]
        if vArg[0]=='vStyle':
            vStyle=vArg[1]
    r=LatexExpr(r'\draw')+'[color='+vColor+','+vStyle+']+(0,0) -- ('+str(a)+','+str(-b)+');'
    return r
```

```
def Ch_Latex(a,b,ch,vColor='black'):
    x=0; y=0
    if vColor=='':
        vColor='black'
    dr=LatexExpr(r'\draw [line width=1pt,color='+vColor+']')
    S=''
    for k in range(len(ch)):
        if ch[k]==0:
            x1=x
            y1=y-1
        if ch[k]==1:
            x1=x+1
            y1=y
        S=S+dr+'('+str(x)+','+str(y)+ ') -- ('+str(x1)+','+str(y1)+');'
        x=x1
        y=y1
    return S

def Position(vLst,x):
    try:
        p=vLst.index(x)
    except ValueError:
        p=-1
    return p

def SZeros(vLst):
    L=vLst
    P=Position(L,0)
    while P>=0:
        L.remove(0)
        P=Position(L,0)
    return L

def DyckNum(a,b,vP,Co='white'):
    S=''
    cfn=''
    M=MDiagram(a,b)
    for i,L in enumerate(M):
        for j,m in enumerate(L):
            Cf='red'
```

```
            Co='white'
            if m<0:
                Cf='black'
                Co='gray!20'
            else:
                if j>=vP[i]:
                    Co='yellow!50'
            x=j+1
            y=-a+i+1
            S=S+LatexExpr(r'\draw')+'[fill='+Co+']'+'('+str(x-1)+','+str(y-1)+') rectangle
                        ('+str(x)+','+str(y)+');'
            S=S+LatexExpr(r'\draw')+'[color='+Cf +']('+str(x-0.5)+','+str(y-0.5)+')
                        node[fill='+Co+']{'+str(m)+'};'
    return S
```

## INDEX TERMINOLOGIQUE


A

$\langle a \rangle$, le semi-anneau, 86

aire d'un chemin de Dyck, 33

B

bijection entre $\mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{a,b}$, 25

bijection entre $\mathscr{D}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{a,b}$ à partir du mot associé, 29

Bizley, formule de, 46

C

Catalan généralisé, formule de, 21

Catalan généralisée, formule de, 45

Catalan, formule de Fuss-, 45

Christoffel, chemin de, 33, 91

Cœur maximal, taille du, 87

Cœur, conjugué d'un, 39

Cœur, taille d'un, 42

D

$\mathscr{D}_{4,k}$ nombre de chemins de, 59

$\mathscr{D}_{4,4n+2}$, nombre de chemins de, 59, 65

$\mathscr{D}_{6,6n+2}$, nombre de chemins de, 67

$\mathscr{D}_{6,6n+4}$, nombre de chemins de, 62

$\mathscr{D}_{8,8n+6}$, nombre de chemins de, 64

diagramme, conjugué d'un, 39

Dyck, chemin de, 19, 100

E

équerre, longueur de l', 36

F

Ferrers, diagramme de, 31, 36

formule pour le nombre total de cases, 17

Frobenius, le nombre de, 8

Frobenius pour trois valeur,le nombre , 80

Frobenius, problème de, 7

Fuss-Catalan, formule de, 45

K

Kréwéras, treillis de, 31, 95

M

Méthode de comparaison de diagrammes de Ferrer., 54

N

$\mathbb{N}$-module, 3

$\mathbb{N}$-module Affine, 4, 23

$\mathbb{N}$-module, complément d'un, 5

$\mathbb{N}$-module Affine, 38

$\mathbb{N}$-module, représentation cartésienne, 15

O

L'opération de somme $+$, 4

Opérations sur un treillis, 32, 95

P

partage d'un entier, 30

$(\mathscr{P}(\mathbb{N}), +)$, le semi-groupe, 79

$(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \cup, +)$, le semi-anneau, 79

Polynôme $q$-énumérateur, 33, 100

Le problème des pièces de monnaie, 7

Le problème des timbres pour la poste aérienne, 12

R

$(a, b)$-rectangle, 15

S

Sage pour des treillis, 95

Sage pour le chemin de Christoffel, 91

Sage pour le chemin de Dyck, 100

Somme d'une forme quadratique de la partie entière, 89

$S^*_{a,b}(j)$,les ensembles, 5, 17, 57

suite arithmétique, 8

suite géométrique, 8

Sylvester, James Joseph, 8

T

treillis, 31, 95

Y

Young, treillis de, 31, 95

RÉFÉRENCES


[1] Amderberhan, T. et Leven, E. (2014). Multi-cores, posets, and lattice paths. *arXiv :1406.2250v2 [math.CO].*

[2] Anderson, J. (2002). Partitions which are simultaneously $t_1$- and $t_2$-core. *Disctret Mathematical,* (248), 237–243.

[3] Armstrong, D., Hanusa, C. et B., J. (2013). Results and conectures on simultaneous core partitons. *arXiv :1308.0572v1[math.CO].*

[4] Berg, C., Jones, B. et Vazirani, M. (2008). A bijection on core partitions and a parabolic quotient of the affine symetric group. *arXiv :0804.1380v1 [math.CO].*

[5] Bergeron, F. (2013). Notes on Catalan combinatorics : (m,n)-Dyck paths, and (m,n)-Parking functions.

[6] Bizley, M. T. L. (1954). Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from $(0,0)$ to $(km, kn) \cdots$. *JIA 80*, 55–62.

[7] Fishel, S. et Vazirani, M. (2009). A bijection between dominant shi regions and core partitions. *arXiv :0904.3118 [math.CO].*

[8] Flajolet, P. et Sedgewick, R. (2009). *Analytic Combinatorics.* Cambridge University.

[9] Ford, B., Mai, H. et Sze, L. (2009). Self-conjugate simultaneous $p$- and $q$-core partitions and blocks of $a_n$. *Journal Number Theory, 129(4)*, 858–865.

[10] G. Melançon, G. et Reutenauer, C. (2013). On a class of Lyndon words extending Christoffel words and related to a multidimensional continued fraction algorithm. *Journal of Integer Sequences*, *16*(Article 13.9.7).

[11] Gorky, E., Mazin, M. et Vazirani, M. (2014). Affine permutations and rational slope parking functions. *arXiv :1403.0303v1 [math.CO].*

[12] Kloetzel, J. E. (2009). *Standard Postage Stamp Catalogue*, volume 1. A-B. Scott Publishing Co.

[13] Moyano-Fernandez, J. et Uliczka, J. (2014). Lattice paths with given number of turns and semimodules over numerical semigroups. *Semigroup Forum*, (88), 631–646.

[14] Olsson, J. et Stanton, D. (2007). Block inclusions and cores of partitions. *Aequations Math*, *74*(90-110).

[15] Ong, C. et Ponomarenko, D. (2008). The frobenius number of geometric sequences. *he Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 8.*

[16] Ramírez Alfonsín, J. (2005). *The Diophantine Frobenius Problem* (oxford university press éd.). Numéro p. 59-69. Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications 30.

[17] Rosales, J. C. (2003). Principal ideals of numerical semigroups. *Bull. Belg. Math. Soc.*, (10), 329–343.

[18] Sylvester, J. J. (1884). *Question 7382*, volume 41. Mathematical Questions from the Educational Times.