UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA CALCULETTE COMME OUTIL POUR ENSEIGNER ET APPRENDRE LA NUMÉRATION DE POSITION DANS UNE CLASSE D'ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

PROJET DE RECHERCHE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

VIRGINIE HOULE

SEPTEMBRE 2006

REMERCIEMENTS

Merci, d'abord, à ma directrice de recherche, madame Jacinthe Giroux, pour la confiance qu'elle m'a accordée, ses rétroactions constructives, ses encouragements assidus ainsi que pour le temps qu'elle n'a pas et qu'elle m'a pourtant donné. Ce fut une chance inouïe d'être accompagnée par une femme à la fois compétente et modeste, une femme perfectionniste, déterminée et ouverte qui brille par son authenticité et son dynamisme.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à ma mère, Yolaine, qui m'a soutenue depuis le début de mes études et qui m'a transmis sa passion pour l'enseignement.

Je ne peux oublier l'appui inestimable de mon conjoint, Simon. Son sens de l'humour, sa croyance en mes capacités et son amour indéfectible m'ont aidée à rester optimiste tout au long de cette aventure.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Nous avons appris, lors de notre formation d'enseignement en adaptation scolaire, l'importance de la dévolution du savoir à l'élève. Or, dans la pratique, nous constatons que bon nombre d'enseignants ont de la difficulté à élaborer des activités qui privilégient la dévolution du savoir et ce, particulièrement dans les classes d'élèves en difficulté d'apprentissage où l'hétérogénéité des groupes-classes est omniprésente. Cette recherche vise donc à mettre en oeuvre une situation qui favorise l'apprentissage des élèves en difficulté par l'adaptation au milieu (source de rétroactions). Nous avons choisi la numération de position comme objet de savoir en raison de notre intérêt pour l'enseignement des mathématiques et de l'importance de la numération pour la maîtrise de plusieurs activités mathématiques élémentaires.

La situation didactique élaborée se nomme « La calculette ». Cette dernière vise l'identification de la valeur d'un chiffre et d'un groupement de chiffres selon leur position dans un nombre. La calculette offre la possibilité de travailler sur la base d'une puissance de 10 et d'un compteur de cette puissance (en appuyant plusieurs fois sur la touche =). La calculette est ici utilisée comme outil pour contrôler l'écriture d'un nombre suite à des transformations additives conçues pour faire travailler les relations opératoires entre les groupements et ce, en référant aux différentes puissances de la base (1, 10, 100, 1000, etc.). Nous avons élaboré 6 scénarios sur le canevas de cette situation. Nous jouons sur les variables de la situation afin d'accéder par différentes entrées aux connaissances numériques des élèves. Les différents scénarios se différencient par les valeurs des variables suivantes : grandeur du terme initial, valeur de la puissance de dix, nombre de compteurs, transformation additive (ajout ou retrait), symbole par lequel est donné le compteur (ex. : 10 = = =, 30 ou 3 dizaines) et place de l'inconnu dans l'opération (nombre initial, valeur de la puissance de 10, compteur de cette valeur, nombre final).

Nous dégageons 3 grandes stratégies de résolution qui permettent d'anticiper le résultat du calcul. La première consiste à compter en partant du terme initial; elle est peu économique lorsque le mot-nombre est long ou que le nombre de compteurs est élevé. La deuxième consiste à compter à partir du chiffre qui correspond à la position de la puissance de dix en jeu ou de compter en s'appuyant sur le ou les derniers chiffres partant de la position des unités jusqu'à la position qui correspond à la puissance de 10 indiquée dans le calcul. Cette dernière rencontre ses limites lorsque plus d'un chiffre est modifié dans le terme initial. Enfin, la stratégie optimale, selon nous, consiste à considérer la valeur de la puissance en jeu dans la transformation et à identifier ensuite le nombre de groupements correspondant à cette valeur dans le nombre initial. Cette stratégie peut être adaptée pour ne considérer que le nombre de chiffres affecté par la transformation additive.

L'analyse des données nous a permis de différencier deux types de fausses prévisions : celles qui relèvent de l'interprétation de l'opération et celles qui relèvent de l'application du calcul numérique. Les fausses prévisions relevant d'une erreur dans l'interprétation de l'opération sont subdivisées en trois sous catégories, lesquelles correspondent à différentes composantes de l'opération : la transformation additive, le compteur et la puissance. Les fausses prévisions liées à l'application du calcul numérique sont subdivisées en deux sous catégories : les erreurs dans le calcul oral et les erreurs dans le traitement des chiffres.

Chaque scénario est, en partie, construit pour contrer des stratégies élémentaires et favoriser l'élaboration d'une stratégie plus évoluée par laquelle des connaissances plus avancées sur la numération de position sont engagées. Nous dégageons pour chacune des catégories de prévisions erronées mentionnées ci-haut, les stratégies prédominantes en les liant aux caractéristiques de la tâche et aux connaissances sur la numération qu'elles supposent. Notre analyse montre que les erreurs sont de plus en plus complexes tout à l'image des tâches que nous avons soumises aux élèves, ce qui suggère une progression des connaissances sur la numération de position des élèves.

Enfin, l'utilisation de la calculette dans notre séquence d'enseignement a conduit les élèves à s'appuyer sur les propriétés de la numération pour exercer des calculs mentaux, coordonnant ainsi les connaissances sur la numération de position et celles sur les opérations. Elle a également permis à l'élève d'être actif dans son apprentissage, de recevoir plusieurs validations rapides et de bonifier ses stratégies en utilisant les connaissances sur la valeur d'un chiffre et d'un groupement de chiffres selon leur position dans un nombre. Nous croyons donc que la calculette est une outil intéressant à exploiter pour l'apprentissage de la numération.

Mots-clés : calculette, dévolution du savoir, difficulté d'apprentissage, numération de position, situations didactiques.

INTRODUCTION

La présente étude porte sur l'enseignement des mathématiques dans les classes d'élèves en difficulté d'apprentissage. Nous présentons, dans le premier chapitre, la problématique de la recherche. Nous exposons d'abord les relations entre l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ainsi que les difficultés qui y sont rencontrées. Nous traitons ensuite plus particulièrement des pratiques et des difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques dans les classes spéciales. Étant donné qu'un courant important de recherche en didactique des mathématiques met l'accent sur l'apprentissage des mathématiques par dévolution du savoir à l'élève et que les pratiques en classe spéciale favorisent généralement l'ostension, nous avons cru intéressant d'observer l'effet d'activités ouvertes auprès d'élèves de classe spéciale. Précisons que le type «d'ouverture» de ces activités n'est pas synonyme de dilution du savoir. Au contraire, le savoir est au centre de nos préoccupations. Nous avons choisi la numération comme notion mathématique en raison du rôle central qu'elle joue dans le programme au primaire.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le cadre conceptuel de notre recherche. Nous exposons d'abord les causes des difficultés d'apprentissage selon la typologie de Boutin et Daneau (2004). Nous nous intéressons plus spécifiquement, par la suite, aux difficultés d'apprentissage des élèves en les situant dans leur contexte de production, c'est-à-dire les difficultés qui proviennent de l'interaction de l'élève avec le savoir en situation d'enseignement, que ce soit par le biais de ses interactions avec un dispositif, avec l'enseignant ou avec d'autres élèves. Nous traitons ensuite de l'enseignement des mathématiques dans le contexte de la réforme, de la théorie des situations didactiques de Brousseau et de la modélisation par le jeu qu'il propose. La troisième partie de notre contexte théorique porte sur la numération : nous faisons d'abord ressortir les caractéristiques de notre système de numération, nous présentons ensuite différentes études portant sur l'apprentissage de la numération ainsi qu'un bref historique de l'enseignement de la numération. Puis, nous traitons de l'utilisation de la calculette comme outil d'apprentissage et d'enseignement pour la numération dans les classes spéciales au primaire. Le deuxième chapitre se termine par la présentation des objectifs spécifiques de la recherche.

Dans le troisième chapitre, nous abordons l'aspect méthodologique. Pour élaborer une situation ouverte qui rompt avec les pratiques habituelles, il nous fallait d'abord observer ce qui se fait actuellement dans les classes. Nous avons fait ressortir les exercices les plus courants dans les manuels scolaires approuvés par le MEQ. Nous présentons ensuite l'ingénierie didactique, méthodologie sur laquelle nous nous sommes inspirée pour élaborer et analyser notre situation didactique. Puis, nous présentons le milieu et le déroulement de l'expérimentation, les différents scénarios de notre situation, soit la calculette, ainsi que le pré-test et le post-test qui sont administrés aux élèves. Le chapitre se termine par la présentation des règles déontologiques.

L'analyse de la situation fait l'objet du quatrième chapitre. Il y a d'abord comparaison des données recueillies au pré-test et au post-test. Nous analysons ensuite les résultats obtenus pour chaque scénario à la lumière des objectifs fixés. Afin de faciliter l'analyse, nous avons catégorisé les fausses prévisions les plus récurrentes.

Nous procédons, au chapitre 5, à l'interprétation des principaux résultats. L'évolution des prévisions erronées permet d'interpréter le parcours d'apprentissage des élèves. Prenant appui sur les résultats obtenus, nous discutons ensuite de la pertinence des variables didactiques et des valeurs qu'elles ont prises dans les différents scénarios. Les limites de la situation sont présentées dans la conclusion.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Dans ce premier chapitre, nous mettons en relation les difficultés à apprendre les mathématiques et les difficultés à les enseigner. Nous nous intéressons ensuite particulièrement aux difficultés relatives aux interactions didactiques de l'enseignement des mathématiques dans les classes d'élèves en difficulté d'apprentissage. La présentation de l'objectif général de recherche clôt ce chapitre.

1.1 LES INTERACTIONS ENTRE LE SAVOIR, LES ÉLÈVES ET L'ENSEIGNANT

Pour qu'il y ait apprentissage, il va de soi que l'élève doit entrer en interaction avec le savoir; c'est en faisant des mathématiques qu'il apprend. Mais qu'est-ce que faire des mathématiques? Bkouche, Rouche, et Charlot (1992) répondent à cette question :

> « Faire des maths, c'est les FAIRE, au sens propre du terme, les construire, les fabriquer, les produire, que ce soit dans l'histoire de la pensée humaine ou dans l'apprentissage individuel. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire réinventer par les élèves des mathématiques qui existent déjà, mais de les engager dans un processus de production mathématique où leur activité ait le même sens que celle des mathématiciens qui ont effectivement forgé des concepts mathématiques nouveaux… » (p. 174)

C'est donc dire que l'apprentissage des mathématiques va au-delà de la connaissance formelle de définitions et de techniques. L'élève doit se questionner afin de résoudre des problèmes mathématiques. C'est à partir de questionnements, d'anticipations, d'hypothèses, d'essais et de mise en œuvre technique que les élèves produisent les mathématiques. L'apprentissage se définit alors en tant qu'adaptation à un milieu facteur de contradictions et de déséquilibres. Ainsi, les réponses nouvelles qu'apporte un élève en s'adaptant au milieu montrent qu'il y a eu un apprentissage.

En situation d'apprentissage scolaire, l'élève n'est pas le seul qui entre en interaction avec le savoir, l'enseignant aussi. Selon Brousseau (1986), l'enseignant provoque, chez les élèves, les apprentissages souhaités par un choix judicieux des problèmes proposés. Il doit ainsi aménager un milieu et organiser une progression des situations pour permettre à l'élève d'agir, de réfléchir sur son action et d'évoluer de son propre mouvement. Le choix des situations est déterminant, car le milieu doit résister à l'élève afin de provoquer les adaptations souhaitées, c'est-à-dire l'apprentissage ciblé. Cette activité de planification engage une interaction avec le savoir.

Conne (1999) mentionne que si faire des mathématiques, c'est justement les FAIRE, on peut donc dire qu'enseigner les mathématiques consiste à faire faire des mathématiques. L'enseignant fait alors des mathématiques lorsqu'il interagit avec ses élèves qui font des mathématiques. Le rôle de l'enseignant ne se limite donc pas à planifier une situation adéquate; il doit également entrer en interaction avec les élèves et le savoir enseigné pour piloter et animer les élèves, ce qui le conduit à faire des mathématiques au moment même où il les enseigne (Conne, 1999). Comme le mentionnent Conne, Favre et Giroux (2005) considérer que l'élève doit s'approprier un domaine de connaissances par l'intermédiaire de l'enseignant consiste à voir l'enseignement du seul point de vue de ce qu'il est sensé produire, c'est-à-dire un apprentissage de la part des élèves. L'enseignement est beaucoup plus vaste. C'est un processus qui lie tous les individus, l'enseignant comme les élèves, à un domaine de connaissances. Chacun des acteurs est amené à connaître les mathématiques selon sa position : l'enseignant «joue» sur les variables didactiques du milieu pour ajuster la situation au niveau des élèves alors que les élèves «jouent» sur le milieu pour résoudre le problème proposé.

Ratsimba-Rojohn introduit le concept de macle de contradictions pour désigner

> « ...l'ensemble des connaissances d'un individu ou d'un groupe d'individus, mais dans lesquelles il y a des éléments contradictoires que le sujet ne perçoit pas d'une façon claire ou pas du tout. » (Ratsimba-Rajohn, 1993, in Margolinas, 1995, p.105).

Pour amener les élèves à dénouer ces macles de contradictions, l'enseignant doit avoir une excellente maîtrise de la notion mathématique afin de pouvoir repérer rapidement les différents processus nécessaires à sa construction. Afin de maximiser le bon déroulement de la situation, il doit réfléchir aux réactions possibles des élèves, ce qui lui permettra d'orienter ses décisions lors de la situation d'enseignement. Contrairement au didacticien, l'enseignant doit posséder des connaissances didactiques qui sont mobilisables dans l'instant. Rogalski (2003) indique que lors de situations ouvertes, comme le sont les situations d'apprentissage par résolution de problèmes mathématiques, il y a souvent un décalage entre ce qui a été prévu et ce qui se passe effectivement, c'est ce qu'elle appelle les incidents. L'enseignant doit alors, sur le vif, selon les réactions des élèves, jouer sur les variables didactiques de sorte à déjouer l'état des élèves et à susciter l'utilisation de nouvelles stratégies. Les décisions que prend l'enseignant peuvent changer de manière importante ce qui se passera par la suite en classe. La compétence professionnelle est donc d'autant plus mise à l'épreuve lors d'un incident que lors d'une situation de routine.

Les difficultés à faire faire des mathématiques aux élèves amènent souvent les enseignants, de façon plus ou moins volontaire, vers l'ostension ou l'ostension déguisée. L'ostension, selon Salin (1999), consiste à présenter le savoir au début de l'enseignement et à inviter les élèves à appliquer ce savoir par la suite dans des exercices. Bautier-Castaing (1988) définit l'ostension comme étant « ... l'utilisation, dans une situation d'enseignement, de la capacité supposée de l'élève de percevoir certains objets et en l'illusion que le fait qu'il les ait perçus est porteur d'une connaissance intellectuelle éventuellement générale et précise. » L'ostension déguisée se différencie de l'ostension. Elle consiste, selon Salin (1999), à s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves en proposant des exercices avant la présentation du savoir. Or, l'enseignant utilise des moyens pour assumer les contraintes auxquelles les élèves font face : il hiérarchise les types d'erreurs et instaure un ordre dans leur traitement public, il choisit les élèves interrogés en fonction de l'état d'avancement de ses projets et il sème le doute en demandant l'accord des autres élèves à propos de ce que fait un élève interrogé en s'adressant parfois nominalement à un élève qui n'a pas fourni la même réponse que ce dernier. L'ostension peut être un choix spécifique de l'enseignant ou le résultat d'un système de contraintes qui dépassent le libre choix.

Dans le même ordre d'idées, Brousseau (1986) parle de l'effet Dienes, lequel consiste à donner aux élèves plusieurs problèmes ou exercices semblables de façon à induire une réponse type. Ce type d'enseignement, selon Brousseau, favorise l'apprentissage par mémorisation. L'enseignant met l'accent sur les variables qui ne modifient pas la situation plutôt que sur les conditions spécifiques de la situation qui peuvent favoriser l'apprentissage par adaptation. Brousseau (1986) introduit aussi le concept d'effet Topaze, lequel consiste à réunir les conditions qui permettent à l'élève d'obtenir la bonne réponse sans qu'il n'ait eu à investir des connaissances mathématiques. La réponse que doit donner l'élève est donc déterminée à l'avance et le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Cette façon de procéder, toujours selon Brousseau, ne favorise pas l'apprentissage.

D'une part, plusieurs chercheurs reprochent aux pratiques ostensives de favoriser la mémorisation au détriment de la compréhension. D'autre part, Ratsimba-Rajohn (1993) relève les difficultés à enseigner les mathématiques sans mentionner directement le savoir, c'est-à-dire par dévolution de la situation à l'élève. Brousseau (1986) a élaboré une théorie pour affronter ce paradoxe. Or, comme le relève Janine Rogalski (2003), un problème subsiste : la dévolution de la situation s'adresse à des élèves individuels alors que l'institutionnalisation s'adresse à des élèves génériques. Elle soulève ainsi la question fort sensible dans la théorie des situations didactiques, de l'articulation et de la transformation des connaissances en savoirs.

L'étude de Sarrazy (2003) montre l'importance de tenir compte des conditions particulières et spécifiques dans lesquelles se déroule un enseignement donné. Trois contextes didactiques fortement contrastés ont été étudiés (dévoluants, intermédiaires et institutionnalisants) afin de montrer leurs fonctions sur le système didactique et d'étudier leurs effets cognitifs sur les élèves. Les résultats de la recherche montrent, entre autres, que les formes interrogatives ont une fonction didactique différente selon le contexte didactique. Ainsi,

> « pour les « dévoluants », interroger un élève est une tâche centrée sur l'enseignement et dont la fonction est de réguler le processus d'enseignement lui-même, alors que pour les « Institutionnalisants », elle est centrée sur l'élève et a pour fonction déclarée (mais pas nécessairement effective) de réguler les processus d'apprentissage. » (p. 128)

Enfin, les résultats obtenus apportent des raisons valables de croire que l'étude des phénomènes interactifs doit se faire de pair avec l'étude de la culture de la classe. Il nous est donc apparu pertinent de situer l'enseignement des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire.

1.2 LES DIFFICULTÉS DE L'INTERACTION ENTRE LE SAVOIR, LES ÉLÈVES ET L'ENSEIGNANT DANS LES CLASSES D'ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Pour modifier adéquatement le milieu, l'enseignant doit être en mesure d'interpréter avec justesse les interprétations que font les élèves de la situation; c'est ce qui permettra à l'enseignant de piloter la situation de façon adéquate. Or, une interprétation adéquate des conduites des élèves ne se fait pas sans difficultés, et ce, particulièrement dans les classes d'adaptation scolaire. Baruk (1985) relève qu'il y a une différence dans l'interprétation des situations de l'enseignant et celle de l'élève, ce qui s'explique par le fait qu'ils ne possèdent pas le même bagage de connaissances. Cet écart rend le dialogue difficile entre les deux, d'autant plus que, comme le souligne Vergnaud (1998, in Giroux, 2004), les élèves ont du mal à expliquer ce qu'ils font. Malgré ces difficultés, il est à noter que les interactions entre l'enseignant et les élèves visent la synchronisation de leurs activités, ce qui amène l'enseignant à modifier sa perception de la tâche ainsi que ses attentes vis-à-vis des élèves. Cette synchronisation est un signe d'équilibre au sein du système didactique qui devrait témoigner de l'apprentissage. (Conne, 1999; Giroux, 2004)

Giroux (1999) précise deux rôles que doit assumer l'enseignant en adaptation scolaire, soit l'évaluation des apprentissages et l'adaptation de l'enseignement. En classe ordinaire, l'enseignant procède à l'évaluation en comparant les objectifs du programme et le rendement des élèves. L'hétérogénéité concernant le niveau scolaire des élèves en classe spéciale ainsi que leur difficulté à rencontrer les exigences du programme dans les délais prévus ne permettent guère aux enseignants de suivre le programme de façon aussi systématique. L'évaluation en cours d'activités d'apprentissage y est beaucoup plus fréquente. En ce qui a trait à l'adaptation de l'enseignement aux besoins spécifiques des élèves, deux moyens sont mis en œuvre : l'enseignement individualisé et l'enseignement en sous-groupes relativement homogènes d'élèves. L'enseignement individualisé est particulièrement fréquent au secondaire. Les élèves travaillent alors à partir de fiches de travail dans lesquelles les exercices sont regroupés autour d'un même objet, ce qui favorise cependant un morcellement des objets de savoir. De plus, le travail à partir de fiches ne favorise pas les interactions entre les élèves ni les interactions entre les élèves et l'enseignant. Le travail en sous-groupes d'élèves relativement homogènes est davantage fréquent au primaire. Des activités où des stratégies d'apprentissage relevant de la psychologie cognitive (ex. : imagerie mentale, API, approche réflecto, etc.) sont souvent prisées par les enseignants. Les enseignants peuvent généralement recourir à ces stratégies pour toutes les disciplines à enseigner; elles ne font donc pas ou peu référence aux contenus enseignés.

Enfin, selon Giroux (1999), les activités mathématiques, dans les classes d'enseignement spécialisé, sont moins diversifiées. Les élèves travaillent principalement à partir de cahiers d'exercices et font peu de résolution de problèmes, ce qui crée un morcellement des savoirs. De plus, selon Conne (2001) la liberté des enseignants en adaptation scolaire par rapport aux exigences des programmes amène ces derniers à consacrer énormément de temps et d'énergie sur les calculs écrits, ce qui crée un surinvestissement de certains savoirs. À ce propos, Cange et Favre (2003) se sont interrogés concernant les raisons pour lesquelles les élèves en enseignement spécialisé continuaient à produire des erreurs à propos d'objets dont l'enseignement leur est répété année après année. Ces auteurs rappellent qu'il y a parfois une systémique dans les erreurs des élèves, lesquelles sont qualifiées de « bugs », d' « obstacles » ou encore, d' « inventions intelligentes » selon les points de vue adoptés par les chercheurs.

Il est alors possible de comprendre la procédure engagée derrière l'erreur de l'élève. Or, il arrive aussi que les erreurs commises n'aient aucun lien entre elles. Les élèves en difficulté d'apprentissage possèdent un important réservoir de règles qu'ils accumulent au fil des années. Ils n'arrivent cependant pas toujours à savoir quelles règles utilisées selon la tâche demandée. Cange et Favre rapportent l'exemple d'une élève qui devait additionner 32 + 7 (calcul en colonne) et qui a confondu les règles de l'addition et de la soustraction. Pour additionner les unités, l'élève a fait un emprunt à la dizaine 3 puisque l'unité 2 était plus petite que l'unité 7. La même élève, lors d'une autre addition, a aligné les nombres à gauche. Enfin, pour avoir une idée des connaissances des élèves en difficulté d'apprentissage, on les compare habituellement aux élèves des classes ordinaires. On dira, par exemple, qu'un élève est de niveau de deuxième année. Or, le vécu scolaire d'un élève régulier de deuxième année et celui d'un élève en difficulté d'apprentissage qui a déjà redoublé est fort différent.

Butlen, Peltier-Barbier et Pézard (2002) ont procédé à une analyse des pratiques des enseignants en REP (réseaux d'éducation prioritaire). Il nous est apparu pertinent de faire un lien entre les contraintes qui pèsent sur l'enseignement en REP et sur l'enseignement spécialisé. Le faible nombre de demandes pour être affecté à des postes en REP ainsi que l'instabilité de plusieurs équipes montrent le défi que représente l'enseignement dans ces milieux. Les élèves en REP sont souvent violents ou au contraire très inhibés. Les enseignants accordent donc un temps considérable au travail de socialisation, de développement de l'autonomie et du respect des autres et, par conséquent, accordent moins de temps à l'enseignement des contenus. De plus, les enseignants accordent une grande importance à faire vivre des réussites à leurs élèves, ce qui se traduit, pour certains,

> « par un aplanissement des difficultés, une simplification des tâches, une prédominance d'activités algorithmisées, un étayage très important, et l'attribution presque systématique d'évaluations positives (bonnes notes ou encouragement parfois même excessifs). » (p.45)

En plus de craindre que les élèves rencontrent des échecs, les enseignants craignent que les élèves se lassent. Ils évitent donc de travailler plusieurs jours sur un même objet de savoir, ce qui se traduit par un découpage du savoir en micro tâches, lesquelles sont proposées à plusieurs jours d'intervalle. Les liens entre les notions traitées dans les différentes séances ne sont pas clairement identifiés et donc, difficilement assimilables pour les élèves.

Blouin et Lemoyne (2002) ont mené une étude portant sur l'enseignement des nombres rationnels auprès d'un groupe de cinq élèves âgés de 13 et 14 ans provenant d'une classe spéciale de première secondaire. Afin de favoriser l'apprentissage des élèves, ils les ont placés dans un contexte didactique nouveau par rapport à leur histoire scolaire, ils ont choisi un contexte signifiant pour leur groupe d'âge, ils ont utilisé un dispositif informatique et ils ont opté pour un découpage horizontal, contrairement au découpage vertical partant du plus simple au plus complexe. Les résultats de leur recherche montrent que les situations complexes, bien qu'elles soient généralement évitées dans les classes spéciales, sont aidantes pour la construction des connaissances auprès des élèves en difficulté d'apprentissage. Par ailleurs, le changement des habitudes de travail que ces situations complexes supposent, pour la grande majorité des classes, entraîne des résistances de la part des élèves. Or, des situations qui provoquent des ruptures dans les conceptions des élèves et une bonne planification des interventions de l'enseignant pour contrôler l'effet des ruptures favorisent, selon cette étude, la construction de connaissances mathématiques.

1.3 L'OBJECTIF GÉNÉRAL DE LA RECHERCHE

Nos lectures ont permis d'identifier des défis de taille concernant l'enseignement qui vise la dévolution du savoir et ce, particulièrement dans le contexte de l'enseignement aux élèves en difficulté :

- mettre en oeuvre une situation qui favorise l'apprentissage des élèves par l'adaptation au milieu qui est source de rétroactions ;
- intervenir sur le vif de manière adaptée à l'activité mathématique engagée par l'élève.

Plusieurs études convergent en effet vers l'hypothèse selon laquelle des activités qui rompent avec la facture classique de l'enseignement des mathématiques (exposé du savoir, exercices suivis d'une correction de l'enseignant) sont propices à l'apprentissage des élèves. Tenant compte des résultats d'études selon lesquels le morcellement du savoir est un phénomène didactique fréquent en adaptation scolaire, nous souhaitons mettre en place une situation qui favorise une interaction soutenue entre l'élève et la tâche mathématique à effectuer, autrement dit, qui favorise la dévolution du problème mathématique à l'élève.

L'objet de savoir investi par la situation que nous voulons expérimenter est la numération de position. Ce choix repose sur l'importance de cette notion du fait qu'elle est directement impliquée dans la maîtrise de plusieurs activités mathématiques élémentaires, telles les quatre opérations arithmétiques et les nombres rationnels.

Jean-François Perret (1985) souligne ainsi l'importance d'une bonne compréhension de la numération :

> « L'enjeu réel de cet apprentissage est d'asseoir l'ensemble des pratiques numériques de l'enfant sur des bases solides, qu'il s'agisse de recourir aux propriétés des nombres et des opérations, d'estimer le résultat d'une opération ou de maîtriser des algorithmes de calcul, chaque fois la compréhension de la numération est en jeu » (p. 49).

Ainsi, l'objectif général de notre étude vise l'élaboration d'une situation d'enseignement/apprentissage favorisant la dévolution d'un problème sur la numération de position dans une classe d'élèves de troisième cycle primaire en difficulté d'apprentissage et l'analyse de la progression de la situation lors de sa réalisation.

Le chapitre suivant présente le cadre conceptuel qui nous permettra de définir les objectifs spécifiques de notre recherche.

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

2.1 LES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Nous présentons d'abord les causes attribuées dans les études aux difficultés d'apprentissage et nous discutons de l'utilité des définitions de cette expression pour penser les interventions auprès des élèves. Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement à caractériser les difficultés d'apprentissage dans le domaine des mathématiques en tenant compte de l'élève et de son interaction avec les dispositifs d'enseignement.

2.1.1 À propos des définitions des difficultés d'apprentissage

Il est étonnamment difficile de trouver une seule et précise définition à ce terme. Brunet (1999) rappelle que les élèves présentant des difficultés d'apprentissage constituent l'effectif le plus important de la population en adaptation scolaire au Québec. Mais qu'entendons-nous au juste par élèves en difficulté d'apprentissage? Bien que ce champ d'études soit très récent (environ quarante ans), ce sujet préoccupe bon nombre de chercheurs. Toujours selon Brunet (1999), c'est au début du 20e siècle que les premiers textes scientifiques portant sur les difficultés d'apprentissage sont apparus. Les auteurs adoptaient alors un point de vue médical. Kirk et Bateman, vers 1960, ont sans doute été les premiers à manifester la nécessité de tenir compte de la dimension comportementale afin de pouvoir identifier les élèves en difficulté dans le domaine de l'éducation. En 1962, Kirk propose une définition qui trouve encore ses traces dans les définitions actuelles. Il mentionne qu'on retrouve, chez les élèves en difficulté d'apprentissage, un écart entre le potentiel et le rendement scolaire, lequel n'est pas causé par des conditions handicapantes. L'écart identifié concerne les retards dans le langage écrit et les mathématiques ainsi que les difficultés concernant l'orientation spatiale. Dans les années 1970, de nouvelles lois adoptées aux États-Unis ont légitimé et financé de nombreuses recherches concernant les difficultés d'apprentissage, ce qui a apporté des éléments nouveaux, dont la prise en considération des processus psychologiques et des habiletés au plan de l'écoute, de la parole et de la pensée. Par ailleurs, l'hyperactivité et le déficit de l'attention ont grandement préoccupé les chercheurs dans les années 70 et 80.

Au cours des années 1990 à 1993, divers chercheurs, dont Swanson, Singh et Beale et Lyon, (in Brunet, 1999) remettent en question la définition de difficulté d'apprentissage. Comme le soulève Brunet, « Les définitions en usage sont postulatoires et non validées; ce sont en fait des définitions de type déclaratif. En ce sens, elles n'ont pas à être vraies mais seulement utiles. ». (p. 18)

En effet, les définitions trouvées dans les écrits se fondent essentiellement sur la présence d'un retard scolaire non causé par une déficience, qui varie d'une à deux années. L'écart entre le rendement de l'élève et le rendement attendu est parfois le seul critère pour identifier et classer les élèves en difficulté d'apprentissage. Bien que des définitions de ce type soient utiles, elles n'aident toutefois pas à comprendre davantage le phénomène. Kavale, Forness et Lorsbach (1991, in Brunet, 1999) ont tiré quatre conclusions suite à une étude sur les définitions des difficultés d'apprentissage : 1. les définitions ne sont ni bonnes ni mauvaises, seulement utiles; 2. les définitions donnent peu de renseignements scientifiques sur les difficultés d'apprentissage; 3. l'ajout ou le retrait à la définition d'éléments tels que les habiletés sociales font peu de différence parce qu'il s'agit d'un procédé de type déclaratif; 4. le problème de la définition des difficultés d'apprentissage est interminable parce que les définitions déclaratives ne permettent pas de clore le débat.

Étant donné le manque de connaissance concernant les difficultés d'apprentissage,

> « ... le choix d'un objet sur lequel portera l'intervention est le résultat d'une croyance en certains postulats quant à la cause des difficultés d'apprentissage. Par exemple, si l'on estime que les difficultés sont dues à un déficit de l'attention ou de la mémoire, on orientera l'intervention dans ce sens. Ensuite, la forme que prendra l'intervention est à son tour le fruit d'un second ensemble de croyances. Cette fois, c'est l'idée que l'on se fait de l'apprentissage et de son corollaire l'enseignement qui influencera la dimension didactique de l'intervention. » (p.34)

Nous croyons donc que les définitions apportées jusqu'à ce jour, bien qu'utiles pour classifier les élèves en difficulté d'apprentissage, contribuent peu à améliorer les interventions.

Il existe cependant des élèves qui ne peuvent suivre le cheminement régulier et sont identifiés, pour obtenir des services scolaires spécialisés, en difficulté d'apprentissage. C'est l'utilité de la définition déclaratoire des difficultés d'apprentissage. Plusieurs études ont cherché à identifier les causes de ces difficultés. Il nous paraît incontournable de présenter brièvement les grandes classes de causes attribuées aux difficultés d'apprentissage.

2.1.2 Les causes des difficultés d'apprentissage

Plusieurs recherches (Deschamps et Beauvais, 1996; Weiner, 1986; Dweck, 1989; Archambault et Chouinard, 1996) font ressortir l'influence de l'explication qu'apporte un élève concernant ses propres échecs. Ces explications sont connues sous le terme « attribution ». Archambault et Chouinard (1996) expliquent ainsi l'importance de ces attributions :

> « C'est sur la base de ces inférences, faites sur leur rendement, qu'ils (les élèves) établissent leurs attentes relatives à leur rendement futur et qu'ils déterminent leur niveau d'engagement dans les tâches scolaires ainsi que leur niveau d'autorégulation consciente, leur persistance et l'intensité de leurs efforts » (p. 109)

Les raisons invoquées par un élève pour expliquer son succès ou son échec seraient directement liées à sa motivation et, par conséquent, à son rendement. Un élève qui attribue ses difficultés scolaires à des causes externes à lui-même (ex. : examen trop difficile, mauvais enseignant) ou sur lesquelles il n'a pas de pouvoir (ex. : manque d'intelligence) a donc moins tendance à modifier son comportement qu'un élève qui attribue sa difficulté à des causes internes qu'il peut modifier (ex. : manque d'étude).

Outre l'explication de l'élève, il existe divers facteurs qui sous-tendent l'échec scolaire. Boutin et Daneau (2004) ont identifié plusieurs travaux portant sur les difficultés d'apprentissage par le biais d'une recension. Leur typologie comporte cinq grands ensembles : les dimensions physique, psychologique, sociale, scolaire et multiple.

La dimension physique englobe les causes biologiques, les causes neurologiques ainsi que les causes héréditaires ou génétiques. Les causes biologiques regroupent les maladies congénitales, les handicaps physiques et mentaux et tout ce qui concerne le fonctionnement du corps en tant qu'organisme vivant. Il est à noter que les handicaps physiques n'influencent pas directement les résultats scolaires. Ce sont les difficultés d'adaptation que ces handicaps provoquent qui risquent d'engendrer des échecs. Les causes neurologiques sont liées au système nerveux et au fonctionnement du cerveau. Des régions spécifiques du cerveau sont associées à des fonctions sensitives et cognitives spécifiques. Une région du cerveau qui est affectée a donc des répercussions sur les performances d'un individu. Les causes génétiques ou héréditaires font référence au quotient intellectuel (QI), c'est-à-dire aux capacités innées des individus. De ce point de vue, certains enfants naissent avec plus de potentiel intellectuel que d'autres. Cette hypothèse est néanmoins fortement controversée en raison de la difficulté à discerner l'inné de l'acquis.

Le second ensemble est la dimension psychologique. Elle regroupe les aspects affectif et cognitif. L'affectivité est, selon Mannoni (1964) et Bettelheim (1979) (in Boutin et Daneau, 2004), le moteur de la conduite humaine. Selon cette perspective, l'échec scolaire peut provenir de différentes sources telles que la phobie scolaire, la peur des évaluations, la peur de se tromper et le manque d'intérêt. L'affectivité comprend également les troubles adaptatifs et relationnels. Se sentir rejeté par ses camarades, par exemple, peut influencer le rendement scolaire d'un élève. L'aspect cognitif, grandement inspiré des travaux de Piaget, a pris une place considérable dans le système scolaire actuel. Selon cette conception, l'élève doit prendre conscience de sa façon d'apprendre. Les travaux réalisés sur cette dimension rapportent que l'échec scolaire s'explique par la difficulté qu'éprouve un élève à s'approprier les stratégies d'acquisition des connaissances qui lui sont proposées.

La troisième dimension, soit la dimension sociale, concerne l'origine sociale de l'élève et de sa famille ainsi que l'histoire scolaire de l'élève. De nombreux auteurs, allant de Bourdieu et Passeron (1969, in Boutin et Daneau, 2004) à Monteil et Huguet (2002, in Boutin et Daneau, 2004) ont démontré que l'origine sociale de l'élève constitue le premier facteur d'influence en ce qui a trait à la réussite ou l'échec scolaire. Selon les tenants de cette dimension, le milieu familial prend une importance primordiale. Ce sont alors des facteurs tels que l'engagement des parents, la compétence des parents, la scolarisation des parents et la dynamique dans la famille qui influencent les chances de réussites d'un élève. Un taux d'absentéisme élevé et un emploi rémunéré en même temps que les études peuvent également avoir des répercussions sur la réussite scolaire.

La dimension scolaire et parascolaire constitue la quatrième dimension de la typologie de Boutin et Daneau. L'école est souvent accusée d'être la cause des échecs des élèves. Divers éléments sont alors soulevés : l'inadéquation des méthodes pédagogiques, les pédagogies répétitives plutôt qu'innovatrices, le manque de ressources sur le plan matériel et humain, des lacunes du côté de la formation des enseignants (formation initiale et continue), la résistance aux changements des personnels scolaires, les retraites massives (perte de l'expertise), le manque de concertation des personnels et leur instabilité, la qualité médiocre de la relation enseignant-élève, etc.

Enfin, la cinquième et dernière dimension consiste en la multitude des causes et des obstacles. De plus en plus, les auteurs tentent d'expliquer le phénomène de l'échec scolaire non pas uniquement à partir d'une cause, mais de leur interaction. En effet, on ne pourrait attribuer l'échec scolaire exclusivement à l'élève, aux parents, aux enseignants, à l'école, aux cadres scolaires ou encore, à la société. Il convient d'envisager le phénomène à partir d'une vision systémique, prenant ainsi en considération les rôles, les tâches et les fonctions des différents acteurs concernés.

2.1.3 Difficultés d'apprentissage en mathématiques

Perrin-Glorian (1993) s'est intéressé à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans une classe d'élèves faibles. Ses observations lui ont permis de relever différentes difficultés éprouvées par les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques : 1) des difficultés sur le plan langagier ayant des incidences sur la conceptualisation, sur le développement du langage intérieur et de la pensée, et sur la création de représentations mentales intermédiaires; 2) des difficultés dans la décontextualisation des éléments d'une situation et le réinvestissement des connaissances dans d'autres contextes; 3) une certaine rigidité de pensée avec une difficulté à changer de point de vue et une persistance à utiliser des procédures connues; 4) une tendance à se générer des règles de fonctionnement, des algorithmes qui constituent des économies de pensée, leur évitant d'avoir à développer des raisonnements prenant appui sur un raisonnement significatif.

Par ailleurs, Blouin et Lemoyne (2002), à travers une recension de travaux, relèvent que les élèves en difficulté d'apprentissage, lorsqu'ils font face à une tâche mathématique, recherchent les indices dans la consigne pour trouver la réponse attendue plutôt que de chercher une réponse par un investissement mathématique. La peur de se tromper et le manque de confiance les conduisent à rechercher les règles apprises et à adopter des actions stéréotypées plutôt que de s'engager réellement dans un processus de recherche qui exige une implication cognitive. Sensevy (1998) mentionne que la rencontre de l'ignorance, chez les élèves en difficulté d'apprentissage, ne provoque pas le désir d'apprendre. Ils s'installent plutôt dans une position d'attente. Dans le même ordre d'idées, Parmar et Cawley (1991 in Debeurme, Van Grunderbeeck, 2002) attribuent l'attitude d'apprenant passif aux élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Celle-ci se développe à la suite de l'incapacité rencontrée à résoudre de nombreux problèmes en raison du manque de connaissances mathématiques nécessaires. Les élèves deviennent alors dépendants de l'enseignant et ne s'impliquent plus activement lors de résolution de problèmes.

Lemoyne et Lessard (2003) recensent et analysent les perspectives adoptées dans les études portant sur les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques réalisées avant et après

1980. Avant 1980, influencés par les sciences appliquées, les chercheurs étaient préoccupés par les problèmes dont souffraient les individus. Des épreuves psychologiques, cognitives, pédagogiques et disciplinaires telles que l'entrevue clinique, l'entrevue diagnostique et l'entrevue rééducative étaient donc réalisées auprès d'élèves dans le but de relever ce qui causait leur difficulté d'apprentissage. Diverses causes étaient soulevées dont les problèmes d'attention, l'hyperactivité, la persévérance dans l'utilisation de procédures qui ne sont plus appropriées, les difficultés de logique spatiale, les difficultés dans la planification, les difficultés d'accéder à la mémoire sémantique et les difficultés dans la coordination d'informations. Durant cette période, la façon de remédier à ces difficultés consistait le plus souvent à ré-enseigner les objets de savoir en utilisant des modèles ou des dispositifs matériels qui amenaient un découpage des objets se traduisant par un apprentissage des gestes à faire. Bien que des travaux cherchant à donner un sens aux erreurs des élèves soient encore réalisés de nos jours, pensons notamment aux études de Pesenti et Seron (2000, in Lemoyne et Lessard, 2003), l'insatisfaction quant à l'intérêt didactique des diagnostics des difficultés d'apprentissage a conduit bon nombre de chercheurs à s'intéresser à l'institution dans laquelle ces difficultés se révèlent.

En effet, vers les années 1980, beaucoup de chercheurs ne considèrent plus les difficultés d'apprentissage comme étant une caractéristique immuable à un individu. Inspirés par les théories des sciences cognitives, ils examinent davantage les difficultés des élèves en relation avec les dispositifs d'enseignement. Les difficultés n'appartiennent pas à l'élève. Elles proviennent de l'interaction entre les connaissances de l'élève et la situation devant laquelle il se trouve. Ainsi, il ne s'agit pas de rechercher quel est le problème de l'élève, mais plutôt, où l'interaction entre l'élève, l'enseignant et le savoir cause problème. Néanmoins, plusieurs chercheurs (DeBlois, 1996; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Deneau, Thivierge-Ayotte et Schmidt, 2001; in Lemoyne et Lessard, 2003) ont procédé à des analyses conceptuelles des savoirs enseignés et des problèmes que soulève leur construction; ils ont recherché des informations permettant de mieux interpréter les réponses des élèves et des manières de prendre appui sur les connaissances des élèves pour les questionner et les confronter. Cependant, dans une perspective systémique, il convient de prendre en considération non seulement l'interaction élève/savoir mais également toutes les interactions entre les trois pôles du système didactique qui caractérisent la dynamique de ce système : . l'élève, l'enseignant et le savoir. Comme le souligne Lemoyne (1996),

> « En se donnant pour finalité la compréhension du système didactique, la didactique ne répond pas seulement à un désir de se constituer en discipline différente de la psychologie cognitive. Elle affirme clairement que le fonctionnement du système cognitif que constitue l'élève ne peut être étudié qu'en prenant en compte le projet d'enseignement d'un savoir déjà-là qui est au centre de la relation didactique. Pour comprendre le fonctionnement de ce système cognitif, on ne peut donc faire abstraction de ce savoir. C'est, il nous semble, à cette condition que l'approche cognitive en didactique des mathématiques peut éclairer certains faits didactiques. » (p.162)

2.1.4 Enseignement des mathématiques en classe spéciale

Pour mieux comprendre ce que sont les difficultés d'apprentissage en mathématiques, il faut donc tenir compte de l'élève, de l'objet de savoir et des interactions entre l'enseignant et les élèves à propos de ce savoir. Dans cette section, nous dégageons certains résultats d'études concernant les interactions didactiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les classes spéciales.

Selon une étude comparative menée par Favre (1997, in Cherel et Giroux, 2002), les interactions didactiques (échanges entre enseignant, élève et savoir) diffèrent selon le type de classe : classe ordinaire et classe spécialisée. Selon Favre, une contrainte qui pèse sur les classes spéciales est celle de l'échec, que ce soit l'échec préalable des élèves (celui qui les a conduit en classe spéciale), l'échec effectif (lors de la réalisation de tâches mathématiques en classe), ou l'échec latent (celui auquel on «s'attend» de la part d'élèves identifiés en difficulté). Cette contrainte génère des différences au sein des systèmes didactiques de classes spéciale et ordinaire. Parmi ces différences, notons celle concernant le temps didactique défini comme la progression ou encore l'avancée du savoir dans la classe. Selon Favre (1997, in Cherel et Giroux, 2002), le temps didactique avance plus vite dans la classe ordinaire que dans la classe spéciale, ce qui s'explique par le fait qu'en classe ordinaire, il y a enseignement de nouveaux objets de savoir lorsque la majorité des élèves semblent avoir compris alors qu'en classe spéciale, l'enseignant procède davantage en faisant du cas par cas. Ainsi, un élève qui, selon l'enseignant, ne maîtrise pas la notion enseignée, continue à faire des activités sur cette notion, ce qui ralentit le temps didactique.

Favre (1997, in Cherel et Giroux, 2002) spécifie également que les parts privée et publique du travail de l'élève diffèrent selon le type de classe. Ainsi, l'élève de la classe spéciale serait davantage sollicité par l'enseignant pour expliciter sa démarche, montrer qu'il a compris, tandis que l'élève de la classe ordinaire travaille généralement de façon privée et que même interrogé, il est rarement contraint de justifier sa réponse, de faire état de sa démarche, de prouver ce qu'il avance. Ce qui peut justifier, en partie, que le savoir évolue plus lentement en classe spéciale qu'en classe ordinaire.

Giroux (2004) s'est intéressée à la spécificité des interactions didactiques en classe spéciale. Elle souligne que dans ces classes, les interactions sont marquées de l'importance accordée au traitement public des erreurs effectuées par les élèves. L'investissement du traitement des erreurs est visible par les nombreuses questions posées par l'enseignant aux élèves qui font des erreurs. Ces questions visent à corriger les conceptions inappropriées qui les sous-tendent. L'enseignant, par ailleurs, cherche à éviter d'identifier ouvertement l'erreur et cherche plutôt par un jeu de questions/réponses à permettre à l'élève de repérer l'erreur qu'il a produite. Cependant, aussitôt que l'enseignant demande à l'élève de s'expliquer sur ses réponses, l'élève interprète cette demande comme l'indice d'une erreur et s'engage alors dans la recherche d'une nouvelle solution. La correction de l'erreur ne se fait donc pas par adaptation au milieu, mais par substitution d'une réponse en réaction à la question de l'enseignant. Comme le souligne Giroux,

> « ...l'ignorance rencontrée dans les interactions didactiques n'est pas tant celle de l'élève qui serait gérée par l'enseignant, mais plutôt un élément dynamique de la situation d'enseignement/apprentissage qui implique donc à la fois l'enseignant et l'élève » (Giroux, 2004, p. 570).

C'est ce que Giroux appelle le rapport à l'ignorance. Dans cette perspective, les difficultés ne sont pas propres aux élèves, elles concernent autant l'enseignant que les élèves.

L'étude menée par Cherel et Giroux (2002) sur la comparaison de l'enseignement des mathématiques en classes spéciale et ordinaire, conforte celles conduites par Favre (1993, 1997, in Cherel et Giroux, 2002). Elle relève effectivement une différence dans la progression du temps didactique dans les systèmes régulier et spécialisé. En classe spéciale, un même thème est travaillé sur une longue durée (de deux à cinq mois) tandis qu'en classe régulière, les contenus sont fractionnés et travaillés sur une courte durée. En ce qui a trait à la deuxième et la troisième année du primaire, les contenus qui sont principalement traités en classe spéciale sont la numération, en particulier l'ordre des nombres, les décompositions de nombres ainsi que les opérations additives. Les contenus qui semblent moins importants ou trop difficiles sont laissés de côté, ce qui permet d'accorder davantage de temps aux contenus jugés essentiels. Une leçon type, dans la classe spéciale qui fait l'objet d'une étude de cas, se déroule ainsi : l'enseignant fait un bref exposé, il donne des exemples devant le groupe-classe en faisant participer les élèves et lorsque la procédure semble comprise, les élèves procèdent à des activités du même type. L'enseignant prend généralement le temps d'interroger tous les élèves pour s'assurer qu'ils ont tous bien compris, ce qui ralentit le temps didactique. Les tâches proposées aux élèves des classes spéciales sont moins variées dans la présentation et dans la formulation des consignes que celles des classes ordinaires. Enfin, les enseignants observés en classe spéciale, comparativement à ceux observés en classe régulière, emploient un vocabulaire moins spécifique, donnent plus de rétroactions, font moins de résolution de problèmes, donnent des consignes moins variées et investissent moins le contenu mathématique.

Cange et Favre (2003) se sont intéressés au statut de l'erreur dans les classes ordinaires et dans les classes spéciales. En classe ordinaire, certains élèves commettent plus d'erreurs que d'autres. L'enseignant compte sur les élèves qui font le moins d'erreurs pour aider les élèves qui en font plus et il s'appuie sur les erreurs commises pour diriger l'enseignement. En classe spéciale, étant donné que le nombre d'élèves est plus restreint et que l'enseignement est plus souvent individualisé, l'enseignant rencontre fréquemment une pluralité d'erreurs chez les différents élèves. L'impossibilité de suivre le programme établi pour les élèves de la classe ordinaire amène alors les enseignants à guider leur enseignement à partir des erreurs commises par les élèves. C'est donc presque exclusivement à partir d'explications sur leurs erreurs que les élèves des classes spéciales apprennent les mathématiques.

2.2 SITUATION DIDACTIQUE ET DÉVOLUTION DU SAVOIR

Il nous est apparu pertinent de situer l'enseignement des mathématiques dans le contexte de la réforme actuelle pour rendre compte de la place accordée à la résolution de problème dans la présente réforme. On peut d'ailleurs lier la dévolution du savoir, retenu dans l'objectif général de notre recherche, à la résolution de problèmes comme le montre la citation suivante de Brousseau :

> « Pour qu'un enfant lise une situation comme nécessité indépendante de la volonté du maître, il faut une construction épistémologique cognitive intentionnelle. La résolution du problème est alors de la responsabilité de l'élève, il a la charge d'obtenir un certain résultat. Ce n'est pas si facile, il faut que l'élève ait un projet et accepte sa responsabilité. Notons qu'il ne suffit pas de «communiquer» un problème à un élève pour que ce problème devienne son problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre. Il ne suffit pas non plus que l'élève accepte cette responsabilité pour que le problème qu'il résout soit un problème «universel» dégagé de présupposés subjectifs. Nous appelons «dévolution» l'activité par laquelle le professeur cherche à atteindre ces deux résultats». (Brousseau, 1998, p.301).

Nous présentons les dialectiques de la théorie des situations didactiques, comme cadre de référence pour la situation didactique que nous voulons expérimenter et analyser.

2.2.1 Enseignement des mathématiques dans le contexte actuel de la réforme

Le nouveau programme de formation suggère une approche par compétences inscrite dans un paradigme socioconstructiviste. Auparavant, l'enseignant identifiait, parmi une liste de contenus de matières, un savoir à présenter aux élèves. Il doit désormais fixer une ou des compétences à développer et proposer des problèmes aux élèves qui leur permettent de développer par eux-mêmes les compétences attendues. Les élèves réagissent aux problèmes présentés en modifiant leur comportement. L'enseignant peut alors, à partir de ses observations, déterminer si les élèves ont développé ou non les compétences attendues. Cette nouvelle approche, selon Tardif (1999), oblige les enseignants à rompre avec leur pratique habituelle. Alors que la tendance était de décortiquer un apprentissage avant de le présenter aux élèves, la réforme incite désormais les enseignants à présenter les situations dans leur complexité et à accompagner les élèves dans leur apprentissage, passant ainsi de l'enseignement à la construction de connaissances.

En mathématiques, le programme présente trois compétences, soit résoudre une situation-problème mathématique, raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques et communiquer à l'aide du langage mathématique. Les notions mathématiques, appelées ici savoirs essentiels, sont également mentionnées selon le cycle où elles doivent être acquises. Elles sont subdivisées en cinq grandes catégories : arithmétique, géométrie, mesure, statistique et probabilité. Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons à la première catégorie, soit l'arithmétique et plus particulièrement à la sous-catégorie sens et écriture des nombres.

2.2.2 La théorie des situations didactiques

La théorie des situations didactiques de Brousseau, très populaire en Europe, place la situation au centre de la construction des savoirs, en ne reniant toutefois pas l'importance de la transmission des savoirs. Selon Vergnaud (1994), cette théorie a été éprouvée par de nombreuses expérimentations.

La théorie des situations didactiques comporte trois dialectiques, c'est-à-dire trois types de fonctionnement de la connaissance. En premier lieu, il y a la dialectique de l'action. L'élève fait face à une situation qui lui cause problème. Son questionnement et sa recherche de solutions provoquent l'émergence de nouvelles connaissances. Il construit alors des connaissances qu'il peut utiliser, mais qu'il ne peut nommer ou expliquer. C'est ce que Douady (1986) appelle les connaissances en tant qu'outil implicite.

La deuxième dialectique est celle de la formulation. On s'intéresse ici à ce que l'élève puisse expliciter les outils implicites engagés dans la première phase. Pour ce faire, une situation de communication peut être proposée où un élève émetteur doit échanger des informations avec un ou plusieurs élèves récepteurs. La communication entre les différents actants est essentielle pour qu'il y ait réussite. Les messages formulés par l'élève émetteur servent à agir sur un milieu par l'intermédiaire du ou des récepteurs.

Et enfin, il y a la dialectique de la validation. L'élève doit alors justifier les informations apportées à la phase précédente à l'aide de preuve. À cette phase, on dit que les élèves ont à la fois des rapports dissymétriques, c'est-à-dire que l'enseignant sait quelque chose que les élèves ne savent pas, et des positions symétriques, puisque les élèves ont tous les mêmes informations et les mêmes moyens d'action. S'ils ont des points de vue opposés, les élèves coopèrent en ce sens qu'ils partagent le même désir, obtenir la vérité. En deux mots, cette phase a pour but d'amener les élèves à mettre en œuvre des mécanismes de preuve en vue de convaincre d'autres élèves.

Le processus de clôture de la situation est l'institutionnalisation du savoir où l'enseignant présente aux élèves le savoir socialement reconnu. L'élève pourra par la suite utiliser sa connaissance sans avoir à la justifier puisque celle-ci aura été validée par l'enseignant; sa connaissance devient donc une référence.

Enfin, la théorie des situations didactiques de Brousseau vise à dévoluer le savoir aux élèves, c'est-à-dire qu'elle les rend responsables de leurs apprentissages. En effet, la résolution du problème soumis est possible grâce aux interactions de l'élève avec le milieu, lequel est antagoniste à l'élève. Le processus d'institutionnalisation est lié au processus de dévolution. Il ferme la situation didactique en attribuant aux connaissances utilisées et développées au cours de la situation le statut de savoir socialement reconnu.

Alain Mercier (2001) résume bien, en les caractérisant, les dialectiques de Brousseau. Concernant la dialectique de l'action, c'est la situation, et non l'enseignant, qui doit permettre aux élèves d'évaluer l'échec ou la réussite de l'action demandée. De plus, les élèves doivent pouvoir recommencer l'action en cas d'échec. La répétition est déterminante, car c'est ce qui permet à l'élève d'observer l'effet de ses décisions sur le milieu, ce qui l'amène, par la suite, à modifier ses stratégies grâce à l'anticipation de la réponse du milieu. En ce qui a trait à la dialectique de la formulation, la situation doit amener les élèves à formuler leurs stratégies. Et enfin, la situation doit amener les élèves à débattre de leurs stratégies, ce qui est directement liée à la dialectique de la validation.

2.2.4 Modélisation par le jeu

Brousseau modélise la notion de situation par la notion de jeu, d'où l'expression « la modélisation par le jeu ». Il existe de nombreuses définitions du jeu. Or, le jeu dont il est question ici ne fait pas directement référence au terme « jeu » tel qu'il est couramment employé. Comme le souligne Brousseau (2001), le mot jeu comporte de nombreuses acceptions qui sont parfois même contradictoires : il évoque une certaine liberté qui n'exclut pas l'existence de règles, il évoque une certaine gratuité qui n'empêche pas la plupart des jeux du supposer un enjeu et il est associé au divertissement alors qu'un jeu n'est pas nécessairement divertissant pour tout le monde. De plus, le mot jeu est utilisé dans différents sens. Le jeu est défini par les sentiments qu'éprouve un joueur en y jouant tels que le plaisir et le sentiment de liberté. Il se définit également par les règles qu'il faut respecter pour y jouer ou encore par le matériel, l'instrument du jeu. Et enfin, le jeu est aussi défini par rapport à l'activité effective du joueur, c'est-à-dire ses réflexions et ses possibilités d'action.

Il est donc primordial de préciser ce que nous entendons par jeu, dans le sens de la modélisation par le jeu de Brousseau.

Dans la modélisation par le jeu, Brousseau nomme le sujet actant, le distinguant ainsi du joueur dont on parle habituellement. Un joueur choisit de jouer ou non à un jeu et s'il décide d'y participer, il joue pour se divertir, sans nécessairement que cela ne nécessite une réflexion. Un actant, quant à lui, a un rôle actif durant le jeu. Il lui faut utiliser ses connaissances, réfléchir, utiliser des stratégies, les évaluer et ainsi de suite. Ce sont les décisions qu'il prend tout au long du jeu, et non uniquement le hasard, qui détermine sa réussite. Les positions de l'actant et du joueur sont parfois opposées. Ainsi, certains élèves, préférant être joueurs qu'actants, se désintéressent d'un apprentissage, lequel les priverait du plaisir que leur apporte l'incertitude du jeu.

Le jeu comporte un actant (ou plusieurs) qui se trouve face à un milieu (un système matériel ou non) qui lui offre le choix entre des positions possibles permises. Le jeu n'est donc pas totalement libre; il y a des règles à respecter. À partir de ses connaissances et de ses réflexions, l'actant choisit une position à adopter. Le milieu répond de façon non intentionnelle au choix de l'actant, ce qui permet à celui-ci de constater l'effet de ses comportements et de se reprendre en adaptant son comportement selon les réponses obtenues par le milieu. Ainsi, ce n'est pas l'enseignant qui décide si les solutions apportées par l'élève sont conformes à celles qu'il attendait, mais plutôt le milieu qui informe l'élève de l'efficacité de sa solution. La tâche de l'enseignant consiste alors à agir sur les variables didactiques de la situation de sorte à provoquer la découverte des apprentissages par les élèves eux-mêmes. Certaines modifications de comportements adoptées par l'élève suite aux rétroactions du milieu améliorent l'adéquation des réponses, d'autres non. Or, toutes les modifications peuvent contribuer à l'apprentissage. Par ailleurs, théoriquement, chaque jeu est lié à une connaissance spécifique. Un enseignant ne présente donc pas le même jeu pour favoriser l'apprentissage de l'algèbre et pour favoriser l'apprentissage de la numération. Le jeu est construit selon le savoir à faire acquérir. Il est essentiel que la solution optimale du jeu soit la connaissance visée, car l'actant tend à retenir et à rechercher les modifications avantageuses.

Salin (2002) soulève des limites de la modélisation par le jeu. Élaborer des jeux spécifiques pour chacune des connaissances à faire acquérir aux élèves suppose qu'il existe au moins une situation pour chacune des connaissances qui la caractérise et la différencie de toutes les autres; ce qui n'est pas assuré. Par ailleurs, la modélisation par le jeu de la théorie des situations didactiques soulève deux questions essentielles qui, toujours selon Salin, peuvent conduire à des glissements de sens. D'une part, la difficulté à isoler une connaissance amène à parler plutôt de groupement de connaissances, aussi appelé agrégats. D'autre part, elle rappelle que l'activité didactique de l'enseignant ne se limite pas à la présentation de savoir nouveau, mais également à l'entraînement des élèves en vue de les familiariser avec des savoirs fondamentaux.

2.3 LA NUMÉRATION DE POSITION

Étant donné que nous avons choisi comme savoir mathématique à mettre en œuvre dans notre situation la numération de position décimale, nous présentons, dans cette section, les caractéristiques de ce système afin de mettre en lumière sa complexité, ce qui nous permettra, par la suite, de mieux comprendre les difficultés éprouvées par les élèves. Nous exposons ensuite les différents courants de l'enseignement de la numération des années 1950 à nos jours.

2.3.1 Caractéristiques des systèmes de numération de position

L'Association mathématique du Québec (1964) définit le concept système de numération comme suit : « moyen de désigner ou de nommer les nombres (...) (qui) comprend deux éléments : un ensemble de symboles et un ensemble de règles pour utiliser ces symboles. » (p. 1).

Les systèmes primitifs utilisaient différents symboles (ex. : marque sur un bâton) correspondant au nombre un. Plus tard, l'homme a commencé à grouper ces marques isolées de manière à être plus facilement comprises. Il s'intéressa alors aux différentes possibilités de regroupement. Pour trouver plus facilement la valeur d'un nombre représenté, l'homme décida de créer des symboles différents pour des groupements de grandeurs différentes. Ainsi apparut le système de numération égyptienne où différents symboles sont utilisés pour représenter un, dix, cent, mille et dix mille (base 10). Le système de numération égyptienne n'était pas un système positionnel puisque la valeur d'un symbole ne dépendait pas de sa position dans le nombre. Le système de numération babylonienne, quant à lui, était un système positionnel qui n'utilisait que deux symboles. L'absence de zéro causait toutefois des difficultés d'interprétation étant donné que l'absence d'un groupe d'une grandeur donné n'était pas indiquée. Un espace vide joua plus tard le rôle du zéro. Enfin, notre système positionnel est né de trois grands développements : 1- Différents symboles représentent des nombres différents; 2- Le même symbole représente différents nombres selon la position qu'il occupe dans le nombre; 3- Le zéro est utilisé pour indiquer l'absence de groupement dans une position.

L'Association mathématique du Québec (1964) fait ressortir les caractéristiques des systèmes positionnels. D'abord, les systèmes positionnels ont une base qui est un entier naturel supérieur à un (le système décimal est celui qui est le plus souvent utilisé). Les chiffres sont des symboles utilisés pour écrire les nombres. Le nombre de symboles nécessaires est le même nombre que la base. Il faut donc plus d'un chiffre pour désigner la base ou des nombres supérieurs à la base. La valeur d'un chiffre varie selon le chiffre lui-même, la base du système de numération et la position du chiffre dans le nombre. La valeur associée à la position à l'extrême droite dans un entier naturel est la base à la puissance zéro; celle associée à la deuxième position à partir de la droite est la base à la puissance un; celle associée à la troisième position à partir de la droite est la base à la puissance deux et ainsi de suite. Par exemple, 345 signifie $(3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$. Le nombre que désigne un chiffre est donc le produit de deux nombres, soit le nombre que désigne le chiffre lui-même et la valeur associée à la position qu'il occupe. Il faut ensuite faire la somme de ces produits pour connaître la valeur du nombre. Par ailleurs, pour indiquer la base du système dans lequel on écrit, un nombre est souscrit en lettres à la droite du nombre. L'écriture de la base en chiffres ne donnerait bien entendu aucune information sur la base puisque « 10 » serait noté pour chacune des bases.

2.3.2 Apprentissage de la numération

Une étude menée par Brêchet et Delémont (2001) montre bien la complexité de notre système de numération. Suite à quatre cours portant sur différents systèmes de numération, un enseignant a demandé à ses élèves de neuvième année (3^{e} secondaire) d'écrire tous les nombres naturels à l'aide de quatre signes (un carré, un cercle, un triangle et une anse de panier). Aucun élève n'a exprimé les nombres naturels en base quatre, ce qui pourtant constitue une solution analogue à celle de notre système décimal. C'est le modèle additif, sans doute en raison de la facilité de compréhension des règles de construction, qui a été le plus utilisé.

Une fois que l'élève a construit l'idée d'un nombre par abstraction réfléchissante[1], il peut le représenter avec des symboles. Par exemple, pour représenter le nombre 4, un élève peut dessiner 4 pommes, dire le mot « quatre » ou encore, inscrire le graphique « 4 ». Dans la théorie de Piaget, les symboles sont des signifiants qui permettent de communiquer avec les autres, mais ils n'ont pas de ressemblance avec le signifié. Un élève qui dit le mot « quatre » et dessine le graphique « 4 » n'a donc pas nécessairement construit l'idée de 4. Selon Constance Kamii (1990), peu d'élèves de première année peuvent comprendre que le 2 de 26 signifie 20 en tant que 2×10^{1}. Ils peuvent cependant reconnaître que 26 est plus petit que 62, car ils connaissent la succession des nombres dans la séquence parlée et écrite. Mieko Kamii (1980, 1981, 1982, in C.Kamii, 1990) a mené une étude où il a demandé, entre autres, à des enfants de 4 à 9 ans de dessiner le bon nombre de roues pour quatre autos. Il leur a

---

[1] Piaget différencie l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante. L'abstraction empirique, qui relève directement de l'environnement, est liée aux propriétés des objets. L'abstraction réfléchissante inclut également la construction de relations entre les objets L'apprentissage des nombres est donc une construction de l'esprit qui se différencie de l'apprentissage d'une propriété qui existe dans les objets comme la couleur, par exemple.

ensuite demandé s'ils croyaient que les chiffres 1 et 6 avaient un rapport avec les seize roues qu'ils avaient dessinées. Les résultats de son étude lui ont permis de faire ressortir cinq niveaux relatifs à la numération de position. Au premier niveau, l'écriture des nombres est liée aux objets de la vie réelle. Ainsi, 6 peut représenter le Canal 6. Au second niveau, les élèves tentent de faire un lien entre le nombre écrit et leur dessin. Un élève, par exemple, a mis en relation la couleur utilisée pour écrire le nombre et celle pour dessiner les objets. Au niveau 3, l'écriture des nombres, particulièrement les nombres à un chiffre, peut représenter des quantités d'objets dessinés. Or, certaines idées sont encore confuses, ce qui crée un manque de consistance dans les réponses. Par exemple, les nombres à deux chiffres ne peuvent être séparés en deux chiffres qui les composent : le 6 de 16 signifiant la sixième roue 6 roues et le 1, une voiture. Au quatrième niveau, les nombres à deux chiffres pris globalement représentent la totalité des objets dessinés, mais lorsque les chiffres qui composent le nombre sont pris séparément, des erreurs surviennent. Des élèves disent, par exemple, que le 6 de 16 signifie 6 objets et que le 1 signifie un objet. D'autres mentionnent que le 6 de 16 représente des ensembles de six objets et le 1, des ensembles de un. Au niveau 5, les élèves comprennent que la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre. Ils sont en mesure de mentionner que le 1 de 16 vaut 10 et que le 6 vaut 6. Selon cette étude, 0% des enfants de 4, 5 et 6 ans, 13% des élèves de 7 ans, 18% des élèves de 8 ans et 42% des élèves de 9 ans atteignent le niveau 5. C. Kamii s'est demandé ce qui en était pour les élèves plus âgés. Son étude révèle que la proportion d'élèves qui entourent 10 jetons pour montrer ce qui signifie le chiffre 1 dans le nombre 16 est de 51% en quatrième année, 60% en sixième et 78% en huitième.

La construction du nombre comprend nécessairement l'addition puisque les nombres naturels se construisent par l'addition répétée de un. La compréhension des dizaines fait appel à la construction de 1 à partir de 10 unités, ce qui exige la coordination de la structure des unités avec celle des dizaines. De plus, le système de base dix implique la multiplication (ex. : le 2 de 26 signifie 2 x 10), laquelle n'est généralement pas introduite avant la deuxième ou troisième année.

Bednarz et Dufour-Janvier (1986) ont mené une étude dans les classes de 3ième et 4ième années du primaire au Québec sur la numération de position. Elles mentionnent que certaines caractéristiques de l'enseignement de la numération amènent les élèves à percevoir les nombres comme une suite de chiffres. Les mots tels que centaine et dizaine, au lieu d'être associés à des groupements, semblent être associés à un découpage, à un ordre dans l'écriture. De plus, lorsque le matériel est utilisé seulement à des fins de codage, beaucoup d'élèves sont alors incapables d'opérer concrètement sur les groupements. D'ailleurs, ils ne semblent pas associer le matériel à un outil pouvant aider à effectuer des calculs. La numération étant détachée de l'apprentissage des opérations, plusieurs élèves ne semblent pas faire le lien entre les opérations effectuées lors d'exercices de numération et les opérations effectuées lors d'exercices de calcul.

2.3.3 Bref historique de l'enseignement de la numération

Dans les années 1950, on enseignait par des cours magistraux le système de règles de la numération (Perret, 1985). On apprenait aux élèves, par exemple, que le nombre 15 est composé d'une dizaine et de cinq unités. Pour aider les élèves à comprendre ce que signifie chaque chiffre qui compose un nombre, on illustrait les nombres à l'aide d'objets concrets. On pouvait représenter le nombre 15 par une pile de dix bols et à la droite de la pile, cinq bols séparés. Enfin, le but n'était pas de faire découvrir le système de règles et ce qu'il permettait pour la désignation des nombres, mais d'apprendre aux élèves les règles qui le régissent et de leur donner des exercices pour le maîtriser.

Dans les années 1960, une nouvelle approche didactique est développée. On rend alors les élèves actifs dans leur apprentissage dans le but de favoriser une réelle compréhension du système de numération. Divers matériels sont alors conçus afin de permettre aux élèves d'expérimenter le fonctionnement de la numération. Deux matériels ont eu un impact considérable, soit les blocs multibases et les réglettes, connues également sous le nom de nombres en couleur. On croyait qu'en permettant aux élèves de travailler à l'aide de matériel sur des bases différentes de 10, les élèves comprendraient mieux le système décimal. L'enseignement était fondé sur l'aspect formel du système de numération.

Dans les années 1970, on continue de favoriser les expériences concrètes et la représentation du nombre en différentes bases. Or, le matériel didactique utilisé a moins d'importance. On utilise désormais une variété de matériels et d'activités pour favoriser l'apprentissage de la numération.

Les études de Jean-François Perret (1985), entre autres, ont montré que l'enseignement des nombres en différentes bases n'était pas très efficace pour l'apprentissage des principes de la numération positionnelle décimale. L'apprentissage de la numération en différentes bases amenait les élèves à maîtriser un ensemble de tâches concernant les différentes bases, mais ils ne permettaient pas l'établissement de liens entre ces tâches et l'organisation de notre système de numération. Selon Perret, il est donc préférable de supprimer les activités numériques en diverses bases de numération et de développer des activités numériques qui tiennent compte des connaissances numériques des élèves pour susciter la recherche et le questionnement sur le système décimal.

Plus récemment, Gairin-Calvo (1988) a proposé une séquence pour l'apprentissage de l'écriture des nombres selon la théorie des situations didactiques de Brousseau. Elle distingue trois étapes dans l'apprentissage de l'écriture du nombre. D'abord, il y a l'écriture usuelle. Les enfants doivent être en mesure de dénombrer au moins jusqu'à dix avant d'entreprendre l'apprentissage des écritures. Il y a ensuite l'écriture additive où l'on présente aux enfants des collections d'une quantité importante d'objets (au moins cinquante) dans le but de leur faire éprouver la nécessité d'une écriture additive. Les élèves font alors des paquets et notent le nombre d'éléments par paquet (ex. : 7 + 8 + 3 + 9 ...). La troisième étape consiste à la numération. Il s'agit de faire remarquer aux élèves que la communication est plus facile lorsque les paquets sont équipotents, ce qui amènera subséquemment les enfants à comprendre le principe multiplicatif présent dans notre système de numération. L'enseignement impose ensuite que la valeur des paquets soit de 10.

2.4 LA CALCULETTE

Vers la fin des années 1970, la calculatrice de poche se vend à un prix abordable, ce qui permet son utilisation dans les écoles. Au fil des ans, les calculatrices sont de plus en plus à bon marché et elles offrent de nouvelles possibilités de calcul (ex. : les opérations avec les fractions), ce qui augmente leur popularité. (Pochon, 2005) Depuis une trentaine d'années, la calculatrice est utilisée comme moyen d'enseignement dans les écoles secondaires et, de plus en plus, dans les écoles primaires. Son entrée a provoqué quelques changements dans les contenus mathématiques. Au primaire, les programmes accordent moins d'importance qu'il y a trente ans aux algorithmes écrits « en colonnes » et promeuvent davantage le calcul réfléchi qu'autrefois ainsi que l'utilisation de la calculatrice. (Floris, 2005) Néanmoins, l'utilisation de la calculatrice à l'école primaire est actuellement sensible. En effet, quelques questions subsistent dont l'antagonisme entre l'usage de la calculatrice, l'apprentissage des algorithmes de calcul et l'exercice du calcul mental. (Pochon, 2005)

2.4.1 Utilisation de la calculatrice dans les écoles

Selon Floris (2005), bien que la calculatrice soit présente dans les écoles depuis plus d'une vingtaine d'années, elle cherche encore sa place dans les écoles primaires. Dans l'enseignement des mathématiques, le sens et la technique ont longtemps été distingués ; le sens consistant à trouver la bonne opération lors d'un problème et la technique, à effectuer cette opération. Dans la même perspective, certains auteurs dont Delord (2000, in Floris, 2005) et Bruillard (1993, in Favre, à paraître) considèrent que les élèves doivent maîtriser complètement une tâche sans la calculatrice avant que l'on permette son utilisation. Or, de nombreuses recherches en didactique des mathématiques montrent aujourd'hui l'aspect dialectique des relations entre la technique et le sens.

Malgré les apparences, l'utilisation de la calculatrice dépasse le simple mode d'emploi où il suffit d'appuyer sur une touche donnée pour obtenir le résultat souhaité. L'utilisateur doit souvent interpréter les réponses qui apparaissent à l'écran, ce qui exige certaines connaissances mathématiques. C'est le cas, entre autre, de la division par zéro. Un manque de connaissance en mathématiques peut également causer des problèmes par rapport à la façon dont les résultats sont présentés (ex. : en fraction ou en nombre décimal). Enfin, la calculatrice peut être utilisée autrement que comme auxiliaire de résolution. Elle peut être un outil pédagogique de choix lorsqu'on sait la mettre à profit.

Selon Floris (2005),

> « … l'utilisation de calculatrices conservant l'affichage et la mémoire des opérations effectuées est très importante, ainsi que la possibilité d'en présenter le résultat à l'ensemble de la classe en utilisant une calculatrice adaptée (transparente pour rétroprojecteur ou en reliant la calculatrice à une tablette de rétroprojection) ». (p.24)

En effet, une calculatrice qui conserve les traces des calculs effectués permet aux élèves de revenir sur leurs actions. La calculatrice, comme tout autre logiciel mathématique, peut être utilisée lors de la construction d'un milieu d'apprentissage. Or, ce type d'enseignement doit s'intégrer à la culture de la classe. Selon Floris, bien que la calculatrice soit utilisée dans les écoles primaires, elle ne participe pas encore pleinement à la culture mathématique dans les classes.

2.4.1 Utilisation de la calculette pour l'apprentissage de la numération

Del Notaro et Floris (2005) se sont intéressés à l'utilisation de la calculette pour l'enseignement de la numération dans les écoles primaires. Selon eux, la calculette possède des possibilités qui sont encore peu investies dans les écoles. De plus, la calculette permet l'économie de l'aspect graphique, lequel pose souvent problème chez les jeunes élèves qui commencent à écrire. Elle permet donc un accès rapide et sans ambiguïté pour ces élèves. Par ailleurs, la calculette n'a pas uniquement un caractère utilitariste. Elle peut être utilisée comme contrainte entre le savoir mathématique qu'elle représente et les connaissances des élèves. « Ici la calculette, ne représente plus un simple outil pour opérer, mais devient le lien « contraignant » permettant de modéliser, par ses fonctions, les connaissances des élèves se rapportant au milieu de la situation. » (p.5) La calculette n'est alors plus un objet facultatif, elle représente le savoir mathématique et fournit à l'élève une rétroaction immédiate. La calculette peut donc jouer le rôle de validation numérique, lequel est habituellement assumé par l'enseignant.

Del Notaro et Floris ont mené une recherche dans laquelle ils présentent des jeux de tâches sur des bandes numériques, c'est-à-dire sur un support matériel constitué par des rouleaux de papier où est inscrit la suite des nombres. L'expérimentation s'est faite auprès d'élèves âgés de 5 et 6 ans. La calculette est utilisée comme support technologique. Douze tâches ont été présentées aux élèves. La première d'entre elles consistait à faire écrire aux élèves la suite des nombres entiers sur une bande et lorsque les connaissances de l'élève ne lui permettaient plus de poursuivre, il utilisait la calculette en exploitant la touche +1. Différentes variables ont été ajoutées lors des tâches suivantes, notamment l'écart entre les nombres (2, 3, 5, 100…), le nombre de départ (0 ou autre), la façon d'écrire sur les bandes (de façon horizontale ou verticale), la distance entre les nombres selon les nombres écrits et la couleur dont les nombres sont écrits. Les élèves ont aussi été amenés à prévoir le nombre de nombre à écrire pour passer d'un nombre à un autre. Dans la dernière tâche, l'élève devait, à partir d'un nombre de départ, par exemple 3, ajouter le nombre qui en un coup, lui permettait d'atteindre une cible donnée, par exemple 10.

Enfin, les résultats de la recherche montrent que l'utilisation de la calculette est possible à l'école élémentaire et qu'elle peut agir autrement que comme outil de calcul. En effet, les jeux de tâches présentés permettent de croire que la calculette est un outil pertinent pour explorer les relations entre les nombres. Comme le souligne les auteurs, « …on peut considérer la calculette comme le dépositaire de modélisations mathématiques pouvant rencontrer la connaissance des élèves et donc fournir un caractère d'utilité aux connaissances » (p.17). La calculette agit alors comme interface contraignante entre le milieu mathématique de la situation et les connaissances de l'élève.

2.4.3 Utilisation de la calculette en classe spéciale

Selon Favre (à paraître), la calculette est très peu utilisée en classe spéciale. Les enseignants se montrent résistants pour diverses raisons. Ils disent manquer de temps pour intégrer des activités avec la calculette, percevant ainsi la calculette comme un objet d'enseignement supplémentaire. Ils mentionnent également le manque de pré-requis des élèves ainsi que le fait que la calculette ne favorise pas la compréhension. De plus, les enseignants craignent que l'utilisation de la calculette crée une dépendance et nuise à l'apprentissage des calculs. Ils relèvent également l'absence d'activités pour utiliser la calculette dans les manuels. Et enfin, les enseignants en classe spéciale hésitent à utiliser la calculette par crainte d'être victimes de préjugés. Les expérimentations de Favre montrent néanmoins que l'emploi de la calculette est un terrain d'expérimentation intéressant, et ce, aussi avec les élèves en difficulté qui n'osent pas toujours s'aventurer vers l'inconnue.

On attribue généralement deux usages à la calculette : calculer et vérifier ses calculs. Favre a expérimenté d'autres usages, moins classiques, qui peuvent être investis dans les classes spéciales. Pour introduire la calculette en classe spéciale, il propose simplement de remettre une calculette à chaque élève et de leur permettre une exploration libre. Les élèves essaient des calculs et notent les calculs et leur résultat sur un papier, ce qui permet de faire diverses découvertes sur les opérations. Par la suite, l'enseignant peut procéder à des activités plus structurées. La calculette peut être utilisée comme compteur. Ainsi, en appuyant sur les touches + 1 = = = = =, la calculette fait apparaître successivement la suite des nombres. Il est possible de procéder de la même façon pour compter par 2 (+ 2 = = = =), par 5 (+ 5 = = = =), par 1000 (+ 1000 = = = =), etc. La calculette peut aussi être utilisée pour opérer avec des grands nombres. L'enseignant peut demander aux élèves d'écrire le plus grand nombre possible sur leur calculette, ou encore, faire découvrir des régularités avec des grands nombres (ex. : la division de tout nombre par lui-même donne 1). De plus, la calculette peut être utilisée pour inventer des calculs. L'enseignant peut, par exemple, demander aux élèves de noter le plus de calculs possibles qui ont 8 comme résultat. Il peut ensuite ajouter d'autres variables telles que donner le nombre de départ, interdire l'utilisation de certains nombres et limiter le nombre d'opérations à faire. La calculette peut également être utilisée dans le but d'occasionner des surprises. L'enseignant demande aux élèves de faire des calculs qui aboutissent à des résultats dont ils ne s'attendent pas, ce qui est susceptible d'entraîner une activité de recherche. En effet, comme la calculette n'affiche pas sa façon de calculer, on peut tirer parti de cette caractéristique pour demander aux élèves d'imaginer comment la calculette s'y prend pour faire les calculs. Favre présente aussi une potentialité quelque peu marginale qui consiste à utiliser la calculette, donc des chiffres, pour écrire des mots.

Enfin, la calculette offre plusieurs potentialités qui s'étendent bien au-delà de celles de calculer et de vérifier ses calculs. Le manque de connaissances sur les multiples utilisations possibles de la calculette est sans doute un facteur considérable pour expliquer la résistance des enseignants en classe spéciale face à son emploi.

2.5 LES OBJECTIFS SPÉCIFIQUES DE LA RECHERCHE

Pour préciser nos orientations de recherche et nos objectifs spécifiques, nous nous appuyons sur les dialectiques des situations dans la théorie des situations didactiques et nous tenons compte des résultats d'études sur les interactions didactiques dans les classes d'adaptation ainsi que des études portant sur la complexité de l'apprentissage de la numération de position.

Dans notre objectif général, nous visons l'élaboration d'une situation d'enseignement/apprentissage favorisant la dévolution d'un problème sur la numération de position. La situation élaborée sera essentiellement une situation d'action, laquelle comportera des phases d'action, de formulation et de validation, donnant lieu à des rétroactions sur les choix effectués par les élèves. La situation portera sur la numération de position et visera plus spécifiquement l'identification de la valeur d'un chiffre et d'un groupement de chiffres selon leur position dans un nombre. Elle devra être différente des activités habituelles sur la numération de position et être adaptable, par un jeu sur ces contraintes, à des profils mathématiques différents, pour tenir compte de l'hétérogénéité du groupe-classe.

Il est à noter que nous considérons notre situation insuffisante, entre autre, en raison de l'absence de véritable dialectique de formulation et de validation, pour institutionnaliser le savoir sur la numération de position. Nous nous intéressons plus fondamentalement à « évaluer » si les connaissances développées ou utilisées au cours de notre situation sont reconnus utiles pour effectuer les tâches classiques sur la numération de position. Nous nous référons ainsi à la définition du savoir de Connes en tant que connaissances utiles, lequel est antérieur, pourrions-nous dire dans la progression didactique, au savoir socialement reconnu.

Notre objectif général vise également l'analyse de la progression de la situation lors de sa réalisation. Pour ce faire, nous analyserons les réponses des élèves et les protocoles d'interactions en fonction des variables didactiques définies pour chacun des scénarios. De plus, un pré-test et un post-test ayant comme contenu les tâches classiques de la numération de position seront administrés aux élèves, ce qui permettra d'analyser l'impact de la situation sur les performances des élèves lors de tâches habituelles.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Afin d'élaborer une situation qui rompt avec les pratiques habituelles des classes spéciales, nous avons d'abord fait ressortir les principaux exercices des manuels scolaires. Nous nous inspirons de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986) afin d'adapter[2] une situation qui favorise la dévolution du savoir à l'élève. Nous présentons ensuite le milieu de l'expérimentation, le déroulement de l'expérimentation ainsi que la situation didactique que nous avons élaborée. Pour mieux connaître le niveau des connaissances des élèves et de recueillir un indice de l'évolution de leurs connaissances, nous administrons un pré-test et un post-test. Ce chapitre se termine par la présentation des règles déontologiques.

3.1 EXERCICES PROPOSÉS DANS LES MANUELS SCOLAIRES

Afin de savoir ce qui se fait actuellement dans les classes en ce qui a trait l'enseignement de la numération, nous faisons ressortir les activités de numération de la fin du 1er cycle et du 2^{e} cycle de manuels scolaires couramment utilisés dans les écoles primaires pour l'enseignement des mathématiques, soit Défi, Sprint, Tangram et Clicmaths. Nous avons séparé les différentes activités en 7 groupes : les activités de groupement, les activités de codage, les activités portant sur la valeur des chiffres dans un nombre, les activités de décomposition de nombres, les activités de comparaison de nombres, les activités portant sur l'ordre des nombres ainsi que les activités portant sur l'écriture des nombres.

---

[2] La situation a été conçue à l'origine par la directrice du mémoire et pré-expérimentée auprès de quelques groupes d'élèves de 2^{ième} et 3^{ième} cycles primaire d'adaptation scolaire. Notre travail d'élaboration porte plus spécifiquement sur l'identification des variables didactiques et de leurs valeurs pour assurer une progression didactique adaptée à des élèves de 3^{ième} cycle en difficulté d'apprentissage.

Les activités les plus courantes concernant les groupements sont les suivantes : on donne aux élèves un ensemble d'objets qu'ils doivent regrouper par 10 afin de trouver le nombre d'objets total de chacun des ensembles; on place des objets en groupements différents de 10 (ex. : des groupements de 5) et on demande aux élèves de trouver la quantité totale.

En ce qui a trait au codage, les manuels présentent des activités pour faire découvrir notre système de codage. Il y a des activités qui relèvent de l'histoire des nombres (ex. : contrôler des quantités en utilisant la correspondance terme à terme) et des activités liées à d'autres systèmes de numération (ex. : égyptien).

D'autre part, divers matériels sont utilisés pour conscientiser les élèves sur la valeur d'un chiffre selon sa position dans le nombre : l'argent (soit en dollars, soit en sous), l'abaque, les blocs, les enveloppes de différentes valeurs et les unités de mesure (mm, cm, dm, m). Il arrive aussi qu'on invente un système (ex. : le cercle rouge représente les dizaines, le cercle bleu, les unités). Les exercices consistent alors à représenter avec le matériel un nombre donné ou de nommer un nombre représenté par le matériel. On ajoute parfois des restrictions comme, par exemple, de représenter 127 sans utiliser de centaine ou de trouver différentes façons de représenter un nombre donné. On travaille également par répétition sur la valeur de position dans le nombre (ex. : quel nombre a un 5 à la position des dizaines? quel nombre contient plus de 5 dizaines?) Il arrive aussi que ce type de questions soit présenté sous forme de devinette. À partir d'une série d'indices, les élèves doivent alors identifier un nombre parmi un ensemble de nombres. L'activité suivante se retrouve également dans plus d'un manuel: les élèves doivent former le plus de nombres possibles à partir de 3 chiffres et placer les différents nombres obtenus en ordre croissant ou décroissant. Les élèves doivent alors comparer les nombres selon la position des chiffres dans le nombre.

Les activités de décomposition se retrouvent dans plus d'un manuel; on demande aux élèves de décomposer sous forme d'addition des nombres tenant compte de la valeur de chacun de leurs chiffres. (ex. : $326 = 300 + 20 + 6$).

Puis, il y a des activités dans lesquelles différentes représentations de nombres sont comparées. La tâche consiste alors à trouver les représentations équivalentes. Il y a aussi des comparaisons de nombres avec les signes <, > et =. La comparaison peut se faire à partir du code écrit (ex. : 95), à partir d'écritures additives (ex. :15-7) ou à partir de groupements (ex. :10 dizaines).

Il y a également des activités portant sur l'ordre des nombres. On fait remplir des tableaux avec des suites et des nombres manquants (ex. : 500, 501, 502... 560). Parfois, on demande uniquement d'écrire le nombre qui vient après et avant un nombre donné. Les intervalles de ces suites sont variés et l'ordre est croissant ou décroissant. Des exercices de mise en ordre, croissant ou décroissant, sont également fréquents. La droite numérique est parfois utilisée : les élèves doivent alors situer un nombre sur la droite ou identifier le nombre qui correspond à un point sur la droite.

Des activités de lecture et d'écriture sont aussi donnés aux élèves. Ils sont de formes variées : transcodage digital-numéral (lecture), transcodage numéral-digital (écriture), formation de nombres par un contrôle des relations multiplicatives et additives partant de noms de nombres (ex. : cinq et cent peuvent former cinq cents (5 X 100 = 500) ou encore cent cinq (100 + 5 = 105).

3.2 THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES ET INGÉNIERIE DIDACTIQUE

Dans notre contexte théorique, nous avons présenté certains éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau. Nous nous sommes inspirée de cette théorie pour élaborer une situation didactique qui permet la dévolution du savoir à l'élève. Notre situation vise à placer l'élève en contexte de résolution de problèmes et à favoriser les dialectiques d'action, de formulation et de validation.

L'ingénierie didactique, méthodologie ayant émergé au début des années 1980, découle de cette théorie. Elle permet d'élaborer, d'expérimenter et d'analyser une séquence d'enseignement. Artigue (1988) identifie quatre phases à cette méthodologie. La première phase, appelée « les analyses préalables », consiste en l'élaboration d'un cadre théorique, lequel permet de se préparer à la conception des situations didactiques. Il s'agit ici de recueillir des informations sur les contenus visés par l'enseignement, sur leurs enseignements usuels et leurs effets ainsi que sur les conceptions et les difficultés des élèves. En ce qui concerne notre recherche, cette première phase a été traitée dans le cadre conceptuel. La deuxième phase, soit « conception et analyse a priori », comporte une partie descriptive et une partie prédictive. Il faut d'abord décrire le déroulement des séquences d'enseignement en justifiant le choix des variables et ensuite prédire les conduites des élèves pour chacune des séquences. Artigue (1988) regroupe la troisième phase, « l'expérimentation », et la quatrième phase, « l'analyse a posteriori ». Suite à l'expérimentation, il convient d'interpréter les données recueillies et de les comparer avec les prévisions faites précédemment. Cette dernière phase a pour but l'analyse de la situation didactique.

L'ingénierie didactique est une méthodologie comportant différents niveaux d'analyse (épistémologique et didactique) et elle ne peut, dans son intégralité, être appliquée dans le cadre d'un mémoire de maîtrise. Nous nous en inspirons cependant comme cadre d'élaboration et de structuration de la séquence d'enseignement que nous expérimentons.

3.3 MILIEU DE L'EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation se fait à Beloeil, auprès d'une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage. La classe est composée de 15 élèves de 8 à 13 ans, dont 13 garçons et 2 filles. La plupart des élèves ont un niveau d'apprentissage semblable aux élèves du deuxième cycle du primaire ou à ceux du début du troisième cycle du primaire.

3.4 DÉROULEMENT DE L'EXPÉRIMENTATION

Nous travaillons sur la base d'une situation didactique intitulée «la calculette» à partir de laquelle nous définissons six scénarios différents en jouant sur les contraintes de la situation, c'est-à-dire les valeurs de ses variables didactiques (Brousseau 1998). Nous parlerons de la «séquence» pour référer à l'ensemble de ces six scénarios.

Afin de s'assurer que l'animation respecte les objectifs de la recherche (enseignement par dévolution du savoir), la situation est pilotée par l'expérimentateur. L'enseignant est présent dans la classe. Ce dernier est informé du déroulement général de l'expérimentation. Des modifications mineures à la séquence peuvent être apportées en cours de route suite à des observations concernant les réactions des élèves face à la situation, ou encore, pour tenir compte du niveau d'apprentissage des élèves. L'expérimentateur est donc responsable de la gestion et de l'animation de la séquence. La séquence didactique « la calculette » comporte six scénarios construits sur la base d'une situation plus générale définie préalablement. Les scénarios sont répartis sur 3 semaines à raison de 2 scénarios d'une heure chacun par semaine.

L'expérimentateur administre un pré-test et un post-test de manière collective portant sur la numération de position. La facture du pré/test et post/test est semblable; les données numériques seules sont modifiées. Nous espérons, par l'usage de ces pré-test et post-test, obtenir des informations concernant l'effet du travail réalisé par les élèves au cours de la séquence sur leur performance aux tâches de numération de position habituelles.

En ce qui a trait à la cueillette des données, un observateur est présent pour prendre des notes sur le déroulement des situations. Sa grille d'observation est séparée en trois sections. Dans la première colonne, l'observateur note les propos tenus par l'expérimentateur et dans la deuxième colonne, les propos tenus par les élèves. Il est alors possible de repérer les interactions « enseignants »/élèves. Dans la troisième colonne, l'observateur note tout ce qui s'écrit au tableau noir. Nous conservons également toutes les traces écrites des productions des élèves.

La situation proposée est principalement individuelle. Les élèves sont placés en équipe sur la base d'un critère d'homogénéité des forces et peuvent échanger entre eux. Ils ont chacun leur feuille et écrivent la réponse de leur choix. L'expérimentateur peut également demander aux élèves de répondre individuellement, sans permettre les échanges.

3.5 PRÉSENTATION DE LA SITUATION DIDACTIQUE ET ANALYSE A PRIORI

La séquence s'inscrit dans le champ de la numération de position. Elle est plus spécifiquement liée au savoir essentiel portant sur les nombres naturels tel que décrit dans le Programme de formation de l'école québécoise (MEQ, 2001) de la manière suivante :

> «Nombres naturels inférieurs à 1 000 000 (centaines de mille) : lecture, écriture, représentation, comparaison, classification, ordre, expressions équivalentes, décomposition, régularités, droite numérique. » (p. 134)

La situation vise la compréhension de la valeur d'un chiffre et d'un groupe de chiffres dans un nombre de manière à mieux contrôler les relations opératoires entre les groupements. Par exemple, 2507 peut se comprendre comme 25 centaines et 7 unités ou encore comme 250 dizaines et 7 unités (Dubois, Fénichel et Pauvert, 1993). Le contrôle de situations exigeant ces relations opératoires est un indice majeur d'une compréhension satisfaisante du fonctionnement de notre système de numération décimale telle qu'attendue au troisième cycle primaire.

La situation utilise la calculette comme outil pour contrôler l'écriture d'un nombre suite à des transformations additives conçues pour faire travailler les relations opératoires entre les groupements et ce, en référant aux différentes puissances de la base (1, 10, 100, 1000, etc.). C'est sur le canevas de cette situation que nous concevons les scénarios.

Pour engager un travail sur les groupements, nous considérons certaines potentialités de la calculette qui nous paraissent particulièrement pertinentes. En effet, la calculette offre la possibilité de travailler sur la base d'une puissance de 10 et d'un compteur de cette puissance. Par exemple, partant du nombre 35, en appuyant successivement sur les touches suivantes : + 10 = = = =, l'écran affiche, suite à chacun des compteurs, les nombres suivants : 45, 55, 65, 75. Ainsi le + 10 indique que la transformation est un ajout de 10^1 et le nombre de signes «=» indique le nombre de fois que cette transformation a lieu. Autrement dit, à 35 est ajouté 4 fois 10. Dans le nombre 35, il y a 3 dizaines (le nombre 3 est à la position des dizaines et n'est précédé d'aucun autre chiffre) et 5 unités. Si à 35, on ajoute 10 et ce, à 4 reprises (4 fois le signe «=»), le nombre de dizaines est augmenté de 4, passant ainsi de 3 à 7. Le nombre 35 est ainsi transformé pour obtenir 75 (ou 35 + 40 = 75).

Dans cet exemple (35 + 10 = = = =), le nombre 35 appartient au domaine numérique pour lequel le transcodage digital-numéral (la lecture du nombre) est aisé. Nous considérons que 10^1 et 4 (pour le compteur de cette puissance), permettent de trouver assez rapidement par comptage (35 → 45, 55, 65, 75) le nouveau nombre. L'anticipation du résultat est donc relativement accessible à des élèves de fin primaire. Il en est toutefois autrement lorsque le nombre de départ n'appartient pas au même domaine numérique et lorsque la puissance de 10 et/ou le compteur de cette puissance augmentent la complexité du calcul par comptage. Dans ce dernier cas, les connaissances sur la numération de position peuvent alors permettre une meilleure anticipation du résultat. En voici un exemple : 8 945 302 + 10 000 = = = = = = = = = = = = = = . Pour anticiper le résultat que fournira la calculette, il n'est pas très aisé de faire le comptage par 10 000 puisque le terme initial (8 945 302) et le compteur (14) s'y prêtent peu. Il est plus simple de repérer le nombre de «dix mille» dans le nombre, soit 894, et d'ajouter à ce dernier le nombre de signes «=» : 894 + 14 = 908. Il y a donc 908 groupements de 10 000 dans le nombre 90845302.

Nous dégageons 3 grandes stratégies de résolution qui permettent d'anticiper le résultat du calcul. D'abord, on peut procéder par comptage en partant du terme initial. Pour que cette stratégie soit facile d'application, il est préférable que le mot-nombre soit court et que le nombre de déplacements dans le comptage (avancer ou reculer de 10^n) comporte 5 éléments ou moins. Trois éléments est le nombre facilement traitable par la mémoire à court terme et 5, le nombre de doigts d'une main pouvant supporter le comptage.

La seconde stratégie est de compter en s'appuyant sur le ou les derniers chiffres partant de la position des unités jusqu'à la position qui correspond à la puissance de 10 indiquée dans le calcul. Cette stratégie fonctionne dans le cas de 456 + 10 = = : on dira, 66, 76 donc 476. Cette stratégie peut être adaptée en comptant à partir du chiffre qui correspond à la position de la puissance de dix en jeu. Pour l'opération 4$\underline{5}$6 + 10 = =, on dit alors 6, 7 (ajoutant ainsi deux dizaines à 5), donc 476. Cependant, ce type de stratégie est inappropriée lorsque plus d'un chiffre est affecté. Par exemple, dans 456 + 10 = = = = = = , on compte de 56 à 116 et il faut alors additionner 4 centaines et 116 pour obtenir 516. Ce qui n'est pas du tout commode. Une erreur serait alors d'anticiper ce nombre : 4116. Il est alors plus simple, de considérer le nombre de dizaines dans le nombre, soit 45, et d'y ajouter 6 pour obtenir 51 dizaines. On peut alors identifier le nombre recherché soit 516. Ce qui correspond à une troisième stratégie.

La troisième stratégie consiste en effet à considérer la valeur de la puissance en jeu dans la transformation et d'identifier ensuite le nombre de groupements correspondant à cette valeur dans le nombre initial. Prenons l'exemple de 4568 + 100 = = = = = . Dans 4568, il y a 45 centaines (45 X 100), il faut ajouter 5 centaines à 45 centaines, obtenant ainsi 50 centaines. Le nombre recherché est donc 5068.

Cette stratégie peut être adaptée pour ne considérer que le nombre de chiffres affecté par la transformation additive. Par exemple, dans 456 789 + 100 = = = = = = = , il faut ajouter 7 centaines. Considérant que le chiffre en position des centaines est 7, on peut juger que la transformation affectera non seulement 7, mais également le chiffre qui le précède (6). On ajoute 7 à 67 pour obtenir 74. On substitue alors 74 à 67 dans le nombre pour obtenir : 457 489. Sur la base de cette analyse, nous identifions quelques variables à partir desquelles nous pouvons générer le contenu mathématique des scénarios.

Les variables didactiques sont :

1) Terme initial: Nombre appartenant au domaine numérique pour lequel le transcodage digital-numéral est aisé ou non. On peut penser que les nombres à plus de 5 chiffres rendent le comptage oral relativement difficile.
2) Valeur de la puissance de 10 : 1, 10, 100, 1000, 10000, 100 000.
3) Le compteur de la valeur: Le facteur par lequel est multipliée la valeur de la puissance en jeu fourni par le nombre de = sur la calculette.
4) Transformation additive : Ajout ou retrait sur le nombre initial.
5) Le symbole par lequel est donné le compteur
   a. Sur la calculette, la récurrence du signe = (ex. : = = = =)
   b. Dans une tâche papier : le nombre écrit (ex. : 4)
6) Place de l'inconnue : nombre initial, valeur de la puissance de 10, compteur de cette valeur, nombre final.

Selon les valeurs des variables, on peut générer des scénarios dans lesquels un ou plusieurs chiffres dans le nombre de départ sont modifiés. Sans être spécifié en tant que variable didactique puisqu'elle découle des valeurs accordées aux quatre premières variables, nous spécifions pour chacun des scénarios, le nombre de chiffres affecté par l'opération.

La séquence didactique « la calculette » vise à favoriser les dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation. Le déroulement général prévu pour chaque scénario est le suivant. L'expérimentateur présente aux élèves un tableau qui comporte trois colonnes : calcul pour la calculette, prévision et résultat. Dans la dialectique de l'action, les élèves essaient d'anticiper le résultat des calculs présentés et notent leurs prévisions dans le tableau. Le comptage à partir d'un groupement de chiffres dans le nombre est, selon nous, la stratégie optimale pour obtenir une prévision juste à partir d'un calcul mental. Dans l'éventualité que les élèves fassent un calcul en colonne, nous imposerons comme contrainte que le calcul écrit est proscrit. La calculette permet aux élèves de vérifier leurs prévisions. Les rétroactions apportées par la calculette devraient provoquer l'utilisation de nouvelles stratégies dans les groupes de calculs suivants. Concernant les dialectiques de la formulation et de la validation, elles peuvent se faire avant que les élèves vérifient leurs prévisions, ou après.

L'expérimentateur fait un retour en grand groupe où les élèves tentent d'expliquer leur raisonnement avec leur propre langage. Il les invite ensuite à mettre en œuvre des mécanismes de preuve de sorte à lancer un débat au cœur duquel on retrouve le savoir.

Chacun des six scénarios se distingue par les valeurs de ses variables. Chaque scénario, à l'exception du premier, regroupe plusieurs groupes de tâches. Nous faisons succéder de deux à quatre groupes de tâches pour permettre aux élèves d'ajuster et de bonifier leurs stratégies. En effet, les anticipations se réalisent sur un premier groupe de quelques tâches (de 3 à 8 tâches). Une fois la vérification faite sur ces tâches, ils s'engagent dans un nouveau groupe de tâches dont les valeurs des variables sont comparables. Ils pourront ainsi réinvestir les connaissances dégagées suite aux validations.

Dans la description de chacun des scénarios qui suit, nous précisons d'abord les raisons didactiques ou autrement dit l'effet recherché par les choix didactiques. Nous présentons ensuite les calculs soumis aux élèves par groupe de tâches. Du coup, sont définies les valeurs des variables spécifiques à chaque calcul. Nous décrivons pour chaque groupe de tâches, les stratégies les plus susceptibles d'être mises en œuvre. Les prévisions fausses relèvent soit de l'application d'une stratégie peu efficace (par exemple, comptage oral dans une situation qui s'y prête peu), soit d'une mauvaise application d'une stratégie (par exemple, mauvaise identification du groupe de chiffres affecté par la transformation).

3.5.1 Scénario 1

Le premier scénario a pour but la familiarisation avec la situation et la mise en oeuvre de stratégies de comptage qui seront confrontées ultérieurement.

<u>Groupe de tâches</u>

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
3 + 1 = = =		
42 + 10 = =		

15 + 1000 = = =		

Stratégies utiles aux prévisions

Il est fort probable que les élèves ne connaissent pas la fonction du signe = à répétition sur une calculette. Ce premier exercice devrait permettre aux élèves d'abstraire la règle selon laquelle le signe = consiste à réitérer la dernière opération. Ainsi, 3 + 1 = = = = est l'équivalent de 3 + 1 + 1 + 1 + 1. Chaque signe = de ce calcul correspond donc à avancer d'un intervalle de 1 dans la suite des nombres.

La stratégie pour anticiper le résultat sera sans doute de faire du comptage oral par 10 (ex. : 42 + 10 = = donne 52, 62), normalement disponible chez les élèves de ce niveau scolaire.

Dans la troisième opération, les élèves peuvent, à l'oral, chercher comment font quinze et mille : mille quinze. À l'oral, il est assez facile de trouver la somme et de compter par 1 000 (1015, 2015, 3015). La difficulté sera peut-être de mettre ce nombre sous forme écrite (ex. : 3015 et non 30015 ou 300015).

3.5.2 Scénario 2

Les valeurs des variables ont été choisies afin que les élèves dégagent les régularités dans les additions et les soustractions avec 10^1. Ils pourront ainsi identifier que le dernier chiffre du nombre n'est pas modifié par une transformation additive de 10 (+ ou –); ce qui sera affecté c'est le nombre de dizaines dans le nombre. Cette transformation peut affecter un chiffre (celui en position des dizaines) ou plusieurs chiffres. Ce scénario devrait permettre aux élèves de recourir au comptage mais également de rencontrer les limites de stratégies qui ne se limitent qu'au comptage. Le choix des valeurs des variables vise à provoquer des stratégies qui reposent sur l'identification des chiffres qui seront affectés, tenant compte de leur position, par la transformation.

a. Premier groupe de tâches

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
65 + 10 = = =		
1509 + 10 = = =		
34578 + 10 = = = = =		

Stratégies utiles aux prévisions

Dans cette suite de trois calculs, les élèves pourront, dans les deux premiers cas, procéder assez facilement sur la base d'un calcul par comptage oral. Pour le calcul de 1509 + 10 = = =, il peut suffire de considérer le chiffre des unités et compter : 9 → 19, 29, 39 pour conclure à 1539.

Le troisième calcul présente un saut qualitatif par rapport aux deux premiers. Ne considérer que les deux derniers chiffres pour avancer par comptage de 10 n'est pas une solution efficace car plusieurs chiffres changent. Il serait toujours possible d'avancer de 10 partant du nombre oral : trente quatre mille cinq cent soixante-dix-huit. Mais la longueur du mot de ce nombre en fait un comptage difficile à contrôler.

b. Deuxième groupe de tâches

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
46 822 + 10 = = =		
659 - 10 = = =		
52 761 + 10 = = = = =		

Stratégies utiles aux prévisions

Dans le premier calcul, certains élèves compteront sans doute oralement à partir des derniers chiffres du nombre (22→ 32, 42, 52, donc 46852). D'autres élèves additionneront simplement trois au chiffre des dizaines. Le deuxième calcul présente pour la première fois une soustraction. De plus, les élèves qui procèdent par comptage risquent d'avoir plus de difficulté puisqu'ils doivent compter par ordre décroissant; le rappel de la suite en ordre décroissant est généralement plus fragile que celui en ordre croissant.

Le troisième calcul engendre la transformation de plus d'un chiffre. Le comptage oral «61→ 71, 81, 91, 101, 111 » rencontre ses limites. En effet, il faut considérer que 111 correspond à l'ajout de 11 dizaines à 5376 dizaines. Cette transformation additive modifie deux chiffres dans le nombre de dizaines : 5381. On obtient 53811 pour le nombre total.

On peut également élaborer une stratégie de comptage qui ne s'appuie que sur le nombre de dizaines dans le nombre considérant qu'effectivement le chiffre des unités ne sera pas affecté. On peut alors dégager le nombre de dizaines dans le nombre, soit 5376 et lui ajouter 5 dizaines pour obtenir 5381 dizaines pour obtenir finalement 53811. Enfin, on peut identifier le chiffre à la position des dizaines (6) et juger qu'un ajout de 5 dizaines modifiera non seulement le 6 mais le chiffre qui le précède. On considère alors 76, auquel on ajoute 5 pour obtenir 81. On peut alors substituer 76 par 81 dans le nombre initial pour obtenir 53811.

3.5.3 Scénario 3

Les valeurs des variables du scénario 3 visent d'une part à ce que les élèves dégagent les régularités des transformations additives avec des valeurs de puissances autres que 10^1 et, d'autre part, qu'ils puissent identifier qu'un chiffre ou un groupe de chiffres peut être affecté par la transformation additive.

Dans le premier groupe de tâches, le nombre initial est le même, mais la valeur de la puissance de 10 varie, ce qui permet de mettre en évidence les transformations du nombre initial selon la puissance de dix qui est en jeu dans le calcul. Dans chacun des calculs suivants, un seul chiffre est modifié.

a. Premier groupe de tâches

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
35 651 + 10 = = =		
35 651 + 100 = = =		
35 651 + 10 000 = = =		
35 651 – 1 000 = = =		

Stratégies utiles aux prévisions

Pour identifier sur quel chiffre s'opère la transformation, il faut considérer la puissance de 10 du calcul ainsi que le compteur. Cette transformation est nécessairement différente pour chaque calcul.

b. Deuxième groupe de tâches

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
699 + 100 = = = = = =		
1 822 – 100 = = = =		
28 537 + 1000 = = = =		
3 151 589 876 + 10 = = =		

Les calculs sont choisis pour que plus d'un chiffre dans le nombre soit modifié. Nous avons mis un calcul (le deuxième) dont un seul chiffre est modifié. Nous considérons important de créer certains déséquilibres dans la formation d'un groupe de tâches pour éviter une adaptation des connaissances par substitution de règles et, au contraire, favoriser la diversification des règles, exigeant ainsi les élèves à tenir compte des caractéristiques des calculs.

Stratégies utiles aux prévisions

La caractéristique du premier calcul est que le nombre de centaines passe d'un à deux chiffres suite à la transformation. En effet, le nombre initial est 699 auquel on ajoute 6 centaines pour obtenir 1299. Il y a donc un chiffre qui est ajouté dans le nombre.

Le deuxième et le troisième calculs impliquent la transformation de deux chiffres dans le nombre. Ils devraient présenter un certain défi aux élèves.

Le dernier calcul se différencie des autres par le premier terme. Les élèves ne peuvent sans doute pas lire facilement ce nombre et pas plus celui qui le succède. Ainsi, une stratégie qui s'appuierait sur le comptage oral partant du premier terme devrait rencontrer ses limites. De plus, une calculette à 8 positions à l'écran ne peut «prendre» le premier nombre. Si les élèves n'y prennent garde, le calcul effectué sera : 31515898 + 10 = = = 31515928. Ce résultat devrait produire un effet ! Nous disposerons alors d'une calculatrice permettant l'affichage d'un nombre à 10 chiffres pour valider. Ce sera l'occasion de tester aussi les limites d'une calculette.

c. Troisième groupe de tâches

Calcul pour la calculette	Prévisions	Résultats
999 + 1 =		
99 999 + 1 =		
99 + 1 =		
999 999 999 + 1 =		

Nous présentons ensuite aux élèves un tableau avec des nombres de départ composés uniquement du chiffre 9 et nous les additionnons de 1.

Stratégies utiles aux prévisions

Étant donné que le nombre additionné est +1 (10 à la 0), il suffit de trouver le nombre entier qui suit pour obtenir le résultat. La stratégie du comptage oral s'avère efficace pour le troisième calcul (99+1), pour le premier calcul (999+1), et peut-être également, pour certains élèves, pour le deuxième calcul (99 999 + 1). Elle rencontre néanmoins ses limites lors du quatrième calcul étant donné la grandeur du nombre 9 999 999 999. Les élèves doivent donc utiliser une stratégie qui nécessite des connaissances sur le système de numération. Il est difficile, pour des élèves du primaire, de comprendre le changement successif de chacun des chiffres qui composent les nombres formés uniquement par le chiffre 9 lorsqu'on additionne une unité: en ajoutant une unité à 9 unités, on obtient une dizaine; en ajoutant une dizaine à 9 dizaines, on obtient une centaine; en ajoutant une centaine à 9 centaines, on obtient une unité de mille et ainsi de suite. Les élèves appliquent plutôt une règle, à l'écrit, qui substitue 10 à 9. Ils produiront, par exemple comme successeur à 999 999 : 101010 101010. Le comptage peut être alors utile pour invalider cette règle : ce qui suit «quatre-vingt-dix-neuf» n'est pas «dix mille dix» mais «cent» qui s'écrit 100. En observant les calculs précédents, ils peuvent cependant dégager une règle selon laquelle lorsqu'on additionne 1 à un nombre formé uniquement du chiffre 9, tous les 9 se transforment en 0 et on ajoute le chiffre 1 au début du nombre; ce qui marque l'entrée dans une puissance supérieure de 10.

d. Quatrième groupe de tâches

Calcul pour la calculette	**Prévision**	**Résultat**
1010 + 10 = = = =		
999 + 10 = = =		
783 + 10 = = = = =		
783 + 100 = = = =		
99 999 + 1 =		

Stratégies utiles aux prévisions

Le résultat du premier calcul engendre uniquement le changement d'un chiffre. Dans le second calcul, l'élève doit ajouter 1 dizaine à 99 dizaines. Le nombre de dizaines passe alors de 2 à 3 chiffres. L'écriture s'en trouve fortement modifiée et les zéros au centre du nombre (100) risquent de déstabiliser l'élève. Le troisième calcul nécessite le changement de plus d'un chiffre, il est donc nécessaire de tenir compte du nombre de groupements de 10 dans 783 pour obtenir le bon résultat. Le nombre de centaines, dans le quatrième calcul, passe de un à deux chiffres. Le nombre obtenu au résultat aura donc un chiffre de plus que le nombre de départ. Le dernier calcul du groupe de tâches est un retour sur le groupe de tâches précédent.

3.5.4 Scénario 4

Dans le quatrième scénario, les inconnues sont présentées différemment que dans les scénarios précédents. En ce qui a trait au nombre final, des réponses sont présentées aux élèves. De plus, une inconnue est ajoutée, soit le compteur, c'est-à-dire le nombre de signes «=» sur lequel on doit s'appuyer pour obtenir un résultat donné.

a. Premier groupe de tâches

En faisant 51 + 10 sur ma calculette en en appuyant plusieurs fois sur «=», est-ce que je peux obtenir les nombres suivants ?		
Nombre	**Prévision**	**Vérification**
101		
150		
510		
601		
289		
431		
331		
2 359 841		

L'enseignant demande ensuite aux élèves de souligner les nombres qu'ils ont pu obtenir et de noter leur observation.

Le premier groupe de tâches permet de mettre en lumière le fait que le dernier chiffre d'un nombre ne change jamais lorsqu'on additionne ou soustrait 10. On peut dès lors poser la question sur les chiffres qui ne changent pas lorsqu'on additionne ou soustrait 100 et ainsi de suite.

Stratégies utiles aux prévisions

L'élève doit comprendre que le nombre d'unités ne se modifie jamais lorsqu'on ajoute des dizaines. Il doit comprendre aussi que tous les nombres qui se terminent par le chiffre 1 (audessus de 51 étant donné qu'on ajoute des dizaines) peuvent être obtenus en appuyant sur la touche =.

b. Deuxième groupe de tâches

En faisant 34 + 10 sur ma calculette en en appuyant plusieurs fois sur égal, est-ce que je peux obtenir les nombres suivants, et si oui, en appuyant combien de fois sur = ?				
Nombre	**Prévision** (oui ou non)	**Prévision** (nombre de coups)	**Résultat** (oui ou non)	**Résultat** (nombre de coups)
84				
143				
134				
340				
403				
444				

Dans le tableau suivant, les élèves doivent, en plus de prévoir si un nombre proposé peut être obtenu comme résultat final, prévoir combien de fois ils devront appuyer sur la touche = pour obtenir les nombres présentés.

Stratégies utiles aux prévisions

Dans le second groupe de tâches, en plus de comprendre que le nombre d'unités ne se modifie pas lorsqu'on ajoute des dizaines, l'élève doit compter, à partir du nombre de dizaines de 34, c'est-à-dire 3, le nombre de dizaines à ajouter pour obtenir les différents résultats indiqués. Pour les résultats 84 et 134, l'élève peut ajouter des dizaines à 34 en comptant sur ses doigts, ce qui correspond au nombre de fois à appuyer sur la touche «=» de la calculette. Cependant, pour le nombre 444, cette stratégie s'avère lourde et difficile à appliquer. Il est alors plus efficace de rechercher la différence entre le nombre de dizaines dans 34 et 444, soit 41 dizaines – 3 dizaines = 41 dizaines. On peut donc conclure qu'il faut appuyer 41 fois sur «=» pour obtenir 444. La vérification sur la calculette risque d'être difficile à effectuer (appuyer 41 fois sur la touche «=»). Le calcul sur les dizaines pourra agir pour certains élèves comme la meilleure preuve; autrement dit, la réponse que l'on doit obtenir sur la calculette !

c. Troisième groupe de tâches

En faisant 34 + 100 sur ma calculette en en appuyant plusieurs fois sur égal, est-ce que je peux obtenir... si oui, en combien de coups?				
Nombre	**Prévision** (oui ou non)	**Prévision** (nombre de coups)	**Résultat** (oui ou non)	**Résultat** (nombre de coups)
334				
534				
1234				
4321				
5064				
5334				

Les élèves soulignent les nombres qu'ils ont pu obtenir.

Contrairement aux tableaux précédents, le nombre additionné dans le tableau qui suit n'est pas 10, mais plutôt 100. Les élèves devraient dégager la règle selon laquelle lorsqu'on additionne 100, les deux derniers chiffres du nombre additionné ne changent pas.

Stratégies utiles aux prévisions

La stratégie la plus simple consiste retenir les nombres qui finissent par 34 et repérer le nombre de centaines de ces nombres. Ainsi, le nombre 134 est obtenu en ajoutant une centaine à 34 et le nombre 9934 est obtenu en y ajoutant 99 centaines.

d. Quatrième groupe de tâches

<table>
<tr><td colspan="5">En faisant 222 222 + 100 000 sur ma calculette en en appuyant plusieurs fois sur égal, est-ce que je peux obtenir… si oui, en combien de coups?</td></tr>
<tr><td>Nombre</td><td>Prévision
(oui ou non)</td><td>Prévision
(nombre de coups)</td><td>Résultat
(oui ou non)</td><td>Résultat
(nombre de coups)</td></tr>
<tr><td>922 222</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1 222 222</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>333 222</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>333 333</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Stratégies utiles aux prévisions

L'élève peut, lors du premier calcul, rechercher le complément par comptage en s'appuyant sur ses doigts, par exemple, pour trouver le nombre de centaines de mille à ajouter à 2 (dans 222 222) pour obtenir 9 (dans 922 222) qui est 7. Pour le second calcul, il serait plus économique de soustraire le nombre de centaines de mille, soit 12, au nombre de centaines de mille du nombre du terme initial, 2.

3.5.5 Scénario 5

Dans le cinquième scénario, l'inconnue varie d'un calcul à l'autre : le nombre de départ, le deuxième nombre, le nombre de compteurs ou le résultat de l'opération.

a. Premier groupe de tâches

Quels nombres on peut additionner ou soustraire à 658 pour modifier…		
Nombre	Hypothèse	Vérification
Uniquement le chiffre 5		
Uniquement le chiffre 6		
Uniquement le chiffre 8		
Les trois chiffres		
Uniquement les chiffres 6 et 8		
Uniquement les chiffres 6 et 5		
Uniquement les chiffres 5 et 8		

Dans le tableau présenté ci-haut, l'inconnue est le deuxième terme de l'addition. Plusieurs réponses sont bonnes, la calculette ne permet donc qu'une vérification partielle.

Stratégies utiles aux prévisions

Dans le cas d'un seul chiffre à changer, il s'agit d'observer la position du chiffre qu'on souhaite changer et additionner ou soustraire un nombre de la même valeur que ce chiffre en s'assurant que cette transformation n'affecte que ce chiffre. Lorsque deux chiffres sont à changer, il faut choisir un nombre qui comporte un «0» à la position du chiffre qui ne change pas.

b. Deuxième groupe de tâches

Équation	Hypothèse	Vérification
5 869 327 + _______ = 5 869 337		
69 + _______ = = = = 109		
38 + 10 ____________ 78		
_________ + 100 = 922 266		

Dans le tableau ci-haut, l'inconnue varie et une seule réponse est juste.

<u>Stratégies utiles aux prévisions</u>

Les élèves, en comparant le nombre initial et le résultat obtenu, doivent observer les transformations qu'il y a eues dans le nombre. Dans le premier calcul, en comparant le terme initial 5 869 327 au résultat obtenu, soit 5 869 337, on constate qu'un seul chiffre dans le nombre est modifié. Le 2 placé à la position des dizaines devient trois dans le résultat. Une dizaine a donc été ajoutée au terme initial.

Dans le deuxième calcul, le résultat 109 compte un chiffre de plus que le terme initial 69. L'élève doit compter le nombre de dizaines ajouté pour passer de 6 dizaines à 10 dizaines : 4. Il peut vérifier si le nombre de compteur correspond à ce nombre. Il y a, en effet, quatre compteurs ce qui signifie que quatre dizaines ont été ajoutées.

Dans le troisième calcul, il s'agit de trouver combien de dizaines ont été ajoutées à 38 pour obtenir 78. L'élève peut compter par dix à partir de 38 jusqu'à 78 en comptant sur ses doigts le nombre de dizaines ajoutées : 48, un doigt; 58, deux doigts; 68, trois doigts; 78, quatre doigts, donc 4 dizaines. Il peut aussi soustraire le nombre de dizaines dans 38, soit 3, par le nombre de dizaines dans 78, c'est-à-dire 7.

Le quatrième calcul a comme inconnue le terme initial. L'élève doit d'abord savoir que c'est le chiffre des centaines qui est modifié puisqu'une centaine est ajoutée. De plus, il doit comprendre qu'étant donné qu'une centaine a été additionnée à un nombre inconnu pour donner 922 266, il doit soustraire une centaine au résultat pour trouver le terme initial.

3.5.6 Scénario 6

Ce scénario vise à favoriser le passage d'une écriture additive des transformations à une écriture multiplicative. Ce passage permet également de travailler plus directement sur la valeur de chacun des chiffres dans un nombre en tant que sous-produits. Ainsi, la transformation additive suivante : 1628 +10 = = = fera place à 1628 + 30 = 1628 qui se décompose en sous-produits : 16 X 100 + 2 X 10 + 8 X 1 sera transformée ainsi : 16 X 100 + (2 + 3) X 10 + 8 X 1.

a. Premier groupe de tâches

Calculs pour la calculette	Prévisions	Résultats
11 + ______ = 31		
11 + ______ = = 31		
111 – 10 ________ 41		
111 - ______ = 41		
1 628 + ______ = 4 628		

Stratégies utiles aux prévisions

Dans le premier calcul, il s'agit de comparer le terme initial 11 avec le résultat 31. Le chiffre affecté est à la position des dizaines. L'élève peut compter par dix à partir de 11 jusqu'à 31 ou soustraire le nombre de dizaines dans 31 par le nombre de dizaines dans 11. Au lieu d'inscrire dix et d'inscrire deux fois le signe =, l'élève multiplie le nombre de fois qu'on retrouve le groupement (2) par le groupement qui est ajouté (10), obtenant ainsi le nombre manquant 20.

Le deuxième calcul est présenté dans le but de faire constater l'équivalence entre 11 + 10 = = 31 et 11 + 20 = 31.

Dans le troisième calcul, en comparant le terme initial avec le résultat, on constate que le nombre de dizaines est modifié. L'élève peut compter par dix par ordre décroissant de 111 à 41 ou compter par dix en ordre croissant de 41 à 111 pour trouver le nombre de compteurs à retrancher ou à ajouter. Il peut aussi soustraire le nombre de dizaines du terme initial au nombre de dizaines au résultat.

Le quatrième calcul est équivalent au troisième calcul. Pour trouver le résultat, il faut multiplier le groupement (10) par le nombre de fois qu'il a été retranché (7), obtenant ainsi le nombre manquant 70 (111 – 10 = = = = = = = 41 correspond à 111 – (7 X 10) = 41 ou encore 111 – 70 = 41).

Dans le dernier calcul de ce groupe de tâches, il faut d'abord comparer le terme initial et le résultat, ce qui permet de constater que le nombre d'unités de mille a été modifié. On multiplie ensuite le groupement (1000) par le nombre de fois qu'il a été ajouté (3).

b. Deuxième groupe de tâches

Calculs pour la calculette	**Prévisions**	**Résultats**
625 + 3 centaines =		
________ + 20 dizaines = 210		
30 736 - ____ unités de mille = 22 736		

Dans le tableau ci-haut, les élèves doivent faire des calculs avec des nombres écrits sous forme de groupement.

Stratégies utiles aux prévisions

Dans le premier calcul, il s'agit d'ajouter 3 centaines à 625, qui contient 6 centaines. Une stratégie serait de compter par 100 par ordre croissant en comptant sur ses doigts pour s'assurer d'ajouter 3 centaines. Pour faciliter le comptage, l'élève peut compter à partir de 600, mais il ne doit pas oublier d'ajouter les 25 unités après le comptage. L'élève peut aussi ajouter 3 au nombre de centaines dans 625.

Dans le deuxième calcul, l'élève doit trouver le terme initial. Il doit chercher le nombre auquel on ajoute 20 dizaines, pour obtenir 210. Il faut comprendre qu'on doit soustraire 20 dizaines de 210, et non 2 dizaines. Le comptage s'avère donc une stratégie peu efficace puisqu'il faudrait compter, en ordre décroissant, 20 intervalles de 10; ce qui est difficile à contrôler. Une stratégie plus économique consiste à soustraire 20 dizaines des 21 dizaines de 210, obtenant ainsi une dizaine, donc 10.

Dans le troisième calcul, l'élève peut comparer le nombre initial 30 736 avec le résultat 22 736. Il doit identifier la différence entre ces nombres, soit 8 unités de mille. Pour ce faire, il peut compter par intervalle de mille de 22 000 à 30 000 à l'aide d'un compteur (doigts, par exemple). Il peut aussi soustraire le nombre d'unités de mille du terme initial au nombre d'unité de mille du résultat.

3.6 PRÉ-TEST ET POST-TEST

Nous avons cru intéressant d'élaborer un pré-test et un post-test, lesquels seront administrés de façon collective avant et après l'expérimentation. Le pré-test nous permettra de mieux connaître le niveau des élèves concernant leurs connaissances mathématiques en numération et le post-test nous donnera un indice sur la capacité des élèves à réinvestir les connaissances mises en œuvre au cours de la séquence dans les exercices habituels présentés en classe. Au pré-test, nous ajoutons une tâche individuelle pour évaluer les connaissances des élèves sur la stratégie de comptage par 10 et par 100. Il est à noter que le pré-test et le post-test sont similaires; il n'y a que les nombres qui changent.

Pré-test	Post-test
43 = _____ dizaines + _____ unités 76 = _____ unités + _____ dizaines 652 = 600 + _____ + 2 Combien y a-t-il de dizaines dans 121? _____ Combien y a-t-il d'unités dans 627? _____ Quel chiffre est à la position des dizaines dans 362? _____ 5 x 10 = (8 x 10) + (5 x 1) = 62 + 20 = 74 + 30 =	56 = _____ dizaines + _____ unités 39 = _____ unités + _____ dizaines 927 = 900 + _____ + 7 Combien y a-t-il de dizaines dans 322? _____ Combien y a-t-il d'unités dans 313? _____ Quel chiffre est à la position des dizaines dans 567? _____ 10 x 8 = (2 x 10) + (9 x 1) = 45 + 30 = 94 + 20 =

Tâches à l'oral individuellement :

Peux-tu compter par 10, en ordre croissant, en commençant par…

a) 79
b) 987
c) 1030

Peux-tu compter par 10, en ordre décroissant, en commençant par…

a) 2012
b) 721
c) 98

Peux-tu compter par 100, en ordre croissant, en commençant par…

a) 89
b) 713
c) 5978

Peux-tu compter par 100, en ordre décroissant, en commençant par…

a) 806
b) 6563

3.7 RÈGLES DÉONTOLOGIQUES

Étant donné que la directrice de ce mémoire a déjà travaillé avec la classe dans laquelle se déroule l'expérimentation, l'accord de la direction, de l'enseignant et des parents des élèves est déjà donné. Les élèves ont d'ailleurs l'habitude de travailler en mathématiques sur des activités particulières animées par une autre personne que leur enseignant habituel.

Par ailleurs, afin de garantir l'anonymat des sujets, un numéro leur sera attribué. De plus, les informations seront utilisées uniquement pour le cadre de cette recherche et elles seront détruites par la suite.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS

Le quatrième chapitre porte sur les résultats obtenus lors de l'expérimentation. Nous présentons d'abord les résultats obtenus au pré-test et au post-test. Nous procédons ensuite à l'analyse des différents scénarios.

4.1 PRÉ-TEST/ POST-TEST

Le pré-test comporte une partie orale où chaque élève est rencontré de façon individuelle. Cet entretien nous permet d'évaluer les connaissances des élèves dans le rappel oral, selon les ordres croissant et décroissant, de la suite par intervalle de dix et de cent.

La partie écrite du pré-test et le post-test sont tous deux composés de dix questions semblables aux exercices classiques sur la numération de position. Les questions sont similaires dans chacun des tests, seuls les nombres changent.

4.1.1 Partie orale du pré-test

Avant de réaliser la séquence d'enseignement, nous avons rencontré les élèves individuellement pour évaluer leurs connaissances sur les stratégies de comptage par 10 et par 100 et ce, selon les ordres croissant et décroissant. Il faut préciser que si les élèves échouent à l'oral, la tâche est donnée à l'écrit; l'élève doit alors compléter une suite écrite. Le tableau 4.1 présente les résultats obtenus à cette partie du pré-test.

Le pourcentage global de réussite est de 45% à l'oral. Le taux de réussite lors du passage à l'écrit est de 68%. Le recours aux règles de la numération écrite a permis, à maintes reprises, aux élèves de compléter des suites qu'ils sont incapables de compléter d'abord à l'oral. Certains élèves peuvent ensuite poursuivre la suite à l'oral en faisant la lecture de la suite écrite. Il arrive que les élèves soient, par ailleurs, incapables de nommer les nombres qu'ils ont écrits.

Il est important de noter que les différences entre les taux de réussite ne relèvent ni de l'ordre (croissant ou décroissant) du rappel de la suite, ni de l'intervalle (par 10 ou par 100), ni de la grandeur des nombres de la séquence à rappeler.

Examinant les rappels les moins réussis (réussite par moins de 50% des élèves) et les plus réussis (réussite par plus de 50% des élèves), nous identifions trois facteurs de complexité : 1) la longueur du nom du nombre; 2) la forme simple ou complexe du nom du nombre; 3) la complexité de certains passages dans le rappel (décade, centaine, millier).

La longueur du nom du nombre se détermine par le nombre de mots qui le composent. Plus le nom d'un nombre est long, plus il est difficile de rappeler son successeur ou son prédécesseur. La forme du nom d'un nombre est dite simple lorsque le nom d'un nombre est calqué sur les chiffres dont il est formé à l'écrit, c'est le cas de soixante-neuf (69). En effet, il y a un mot pour chaque chiffre du nom de nombre qui évoque sa position. La forme est dite complexe lorsque chaque mot du nom de nombre ne peut être associé à un chiffre de ce nombre. C'est le cas de quatre-vingt-dix-neuf (99). Le nom est composé de 4 mots dont les trois premiers correspondent au premier chiffre du nombre ou encore de quatre-vingt-treize dont aucun mot ne correspond strictement à un des chiffres du nombre (93). Enfin, le facteur qui semble avoir le plus d'impact sur le taux de réussite est la complexité du changement de décade ou de centaine. Pour évaluer cette complexité, il faut évaluer le nombre de mots qui change d'un intervalle à l'autre et l'ordre affecté par rapport à la valeur du comptage. Prenons à titre d'exemple la suite qui a posé le plus de difficulté aux élèves, soit le comptage en ordre décroissant par intervalle de dix à partir de 2 022. Lors du passage de deux mille deux à mille neuf cent quatre-vingt-douze, le nombre de mots passent de trois à six et seul le mot mille est conservé. De plus, le changement de décade affecte non seulement le chiffre à la position des centaines, mais aussi celui à la position des unités de mille.

Enfin, les résultats montrent les limites des connaissances des élèves du rappel à l'oral des nombres et l'utilité des règles de la numération écrite pour dépasser ces limites (passage à l'écrit et lecture des nombres écrits). Ces résultats confortent le choix des valeurs des variables didactiques de notre situation. En effet, les valeurs des variables des scénarios visent à permettre aux élèves d'utiliser les stratégies de comptage oral mais aussi de rencontrer les limites de celles-ci, nécessitant alors un appui sur les connaissances de la numération écrite.

Tableau 4.1

Partie orale du pré-test

	10 ↑			10 ↓			100 ↑			100 ↓		Réussite à l'oral	Réussite à l'écrit
	79	**977**	1 030	98	**731**	**2 022**	89	**713**	**5 978**	806	**6 563**		
E1	X	X	E	E	X	X	X	X	X	R	X	1/11	3/11
E2	R	R	R	R	R	E	R	R	R	R	R	10/11	11/11
E3	R	X	R	R	X	X	R	X	X	R	X	5/11	5/11
E4	R	E	R	R	R	R	R	R	R	R	E	9/11	11/11
E5	R	E	R	R	R	X	R	R	R	R	E	8/11	10/11
E6	R	E	R	R	E	E	R	R	E	R	E	6/11	11/11
E7	X	X	E	E	X	X	R	E	X	E	X	1/11	5/11
E8	E	R	R	R	E	X	R	R	E	R	X	6/11	9/11
E9	R	X	R	R	R	E	R	R	R	R	R	9/11	10/11
E10	E	X	R	R	E	X	R	R	E	R	E	5/11	9/11
E11	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0/11	0/11
E12	R	E	R	R	E	X	R	R	X	R	X	6/11	8/11
E13	E	E	R	R	E	X	E	E	E	R	E	3/11	10/11
E14	R	R	R	R	E	X	R	R	R	R	E	8/11	10/11
E15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0/11	0/11
Réussite à l'oral	8/15	3/15	11/15	11/15	4/15	1/15	11/15	9/15	5/15	12/15	2/15	45%	---
Réussite à l'écrit	11/15	8/15	13/15	13/15	10/15	4/15	12/15	11/15	9/15	13/15	8/15	---	68%

Légende :
R : Réussi
X : Non réussi
E : Échoué à l'oral, réussi lors du passage à l'écrit
Caractère gras : la réussite suppose que la suite rappelée comprend des nombres dont plus d'un chiffre est modifié

4.1.2 Comparaison du pré-test et du post-test

Un pré-test et un post-test sont administrés dans le but d'observer la capacité des élèves à réinvestir les connaissances mises en œuvre au cours de la séquence dans le type d'exercices habituellement présenté en classe. Le tableau 4.2 présente les résultats obtenus pour l'ensemble des questions.

Les taux de réussite globaux sont semblables au pré-test et au post-test, soit respectivement 67% et 70%. Cependant, la nature des réponses obtenues au pré-test et au post-test, à certaines questions, permettent de relever certains effets possibles sur les connaissances des élèves de la séquence d'enseignement. Nous rappelons chacune des questions (regroupées selon leur parenté) ainsi que leur taux de réussite et discutons des erreurs les plus fréquentes.

	Pré-test	Post-test
Question 1	43 = ___ dizaines + ___ unités	56 = ___ dizaines + ___unités
Question 2	76 = ___ unités + ___ dizaines	39 + ___ unités + ___ dizaines

En ce qui a trait aux deux premières questions, les taux de réussite sont sensiblement les mêmes au pré-test et au post-test. L'erreur la plus souvent commise consiste à inscrire la valeur du chiffre à la position des dizaines (ex. : 43 = 40 dizaines + 3 unités). À la deuxième question, étant donné que le mot unités est placé avant le mot dizaine, certains élèves inscrivent le nombre d'unités à la place des dizaines ou vice versa.

	Pré-test	Post-test
Question 3	652 = 600 +____ + 2	927 = 900 + ____ + 7

À la troisième question, le taux de réussite est semblable au pré-test et au post-test. Deux erreurs sont récurrentes : la première consiste à écrire le chiffre à la position des dizaines (ex. : 652 = 600 + 5 + 2) et la seconde consiste à additionner les termes à la droite du signe égal (ex. : 652 = 600 + 602 + 2). Cette dernière erreur n'engage pas les connaissances sur la numération.

	Pré-test	Post-test
Question 4	Combien y a-t-il de dizaines dans 121 ?	Combien y a-t-il de dizaines dans 322 ?
Question 5	Combien y a-t-il d'unités dans 627 ?	Combien y a-t-il d'unités dans 313 ?

Le taux de réussite augmente lors du post-test passant de 3/15 à 7/15 pour la question 4 et de 3/15 à 5/15 pour la question 5. L'erreur la plus souvent commise consiste à nommer le chiffre à la position des dizaines lors de la question 4, et celui à la position des unités lors de la question 5.

	Pré-test	Post-test
Question 6	Quel chiffre est à la position des dizaines dans 362 ?	Quel chiffre est à la position des dizaines dans 567 ?

Le taux de réussite diminue lors du post-test, passant de 14/15 à 11/15. L'erreur commise au pré-test consiste à nommer la valeur du chiffre à la position des dizaines, soit 60. L'élève qui a fait cette erreur, fait encore la même erreur au post-test. Les trois autres élèves à avoir commis une erreur au post-test inscrivent le nombre de dizaines dans 567, soit 56.

	Pré-test	Post-test
Question 7	5 X 10 =	10 X 8 =
Question 8	(8 X 10) + (5 X 1) =	(2 X 10) + (9 X 1) =

Les taux de réussite pour les questions 7 et 8 sont sensiblement les mêmes au pré-test et au post-test. Il est à noter que tous les élèves obtiennent la bonne réponse au numéro 7 lors du post-test et qu'il y a seulement une erreur au pré-test. Concernant la question 8, les erreurs varient d'un élève à l'autre.

	Pré-test	Post-test
Question 9	62 + 20 =	45 + 30 =
Question 10	74 + 30 =	94 + 20 =

En ce qui a trait aux deux dernières questions, les taux de réussites sont exactement les mêmes au pré-test et au post-test, soit de 14/15 à la question 9 et de 10/15 à la question 10. On constate cependant des types d'erreurs différents au pré-test et au post-test concernant la question 10. Au pré-test, le type d'erreur le plus fréquent consiste à inscrire 94, arrêtant ainsi de compter lorsque plus d'un chiffre est modifié. Au post-test, l'erreur la plus fréquente consiste à inscrire 11, ce qui correspond au nombre de dizaines.

Si l'on compare les résultats du post test à ceux obtenus au pré test, on remarque que sept des dix questions ont un taux de réussite semblable, deux ont un taux de réussite plus élevé au post-test qu'au pré-test et une question a un taux de réussite plus faible lors du post-test. L'augmentation du taux de réussite aux questions 4 et 5 suggèrent que certains élèves, suite à la séquence d'enseignement, n'interprètent plus les mots tels que centaine et dizaine seulement comme la position d'un seul chiffre d'un nombre mais également en terme de groupements. C'est aussi ce qui explique le taux de réussite plus faible au numéro 6. Il n'est cependant pas étonnant que certains élèves réfèrent de manière presque systématique aux groupements dans leur interprétation des questions au post-test puisque la séquence d'enseignement portait exclusivement sur cette notion. Ensuite, il n'y a pas eu d'institutionnalisation qui aurait permis de statuer sur la distinction entre la valeur d'un groupement de chiffres et celle d'un chiffre selon sa position dans un nombre.

Tableau 4.2

Résultats au pré-test et au post-test

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		Total /10	
	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post	Pré	Post
E1	R	R	X	X	X	X	X	X	X	X	R	R	R	R	X	X	X	R	X	X	3	4
E2	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	10	10
E3	X	X	X	X	R	R	X	X	X	X	R	R	R	R	X	X	R	R	R	R	5	5
E4	X	R	X	R	R	R	X	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	X	6	8
E5	R	R	R	R	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	R	X	R	R	R	R	9	8
E6	R	R	R	R	R	R	X	R	X	R	R	X	R	R	R	R	R	R	R	R	8	9
E7	R	R	R	R	X	X	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	R	X	R	R	7	6
E8	R	R	R	R	R	R	X	R	X	X	R	X	R	R	R	R	R	R	X	X	7	7
E9	R	R	R	R	X	X	X	R	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	7	8
E10	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	10	10
E11	R	X	R	X	X	X	X	R	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	X	X	6	6
E12	R	R	R	R	X	X	X	X	X	X	R	X	R	R	R	R	R	R	X	X	6	5
E13	R	R	R	R	R	R	X	X	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	7	7
E14	R	R	X	R	X	R	X	X	X	X	R	R	X	R	R	R	R	R	R	R	5	8
E15	R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	R	R	X	R	5	5
Total /15	13	12	10	11	7	8	3	7	3	5	14	11	14	15	13	12	14	14	10	10	67%	70%

Légende :

R : Réponse exacte

X : Réponse inexacte

4.2 PRÉSENTATION ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans cette section, nous procédons à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus lors de chacun des scénarios. Pour faciliter la lecture, nous rappelons, pour chacun des scénarios, l'objectif et les valeurs des variables. Nous précisons, s'il y a lieu, les modifications apportées au scénario tel que présenté dans le chapitre méthodologique. Un tableau des réponses des élèves pour chaque groupe de tâches réalisé au cours d'un même scénario accompagne les analyses menées à la lumière des objectifs poursuivis. Précisons qu'il n'y a pas de références concernant les effets des interventions de l'enseignant, de l'expérimentateur et de l'observateur puisque ceux-ci se sont abstenus d'intervenir le plus possible dans le but de favoriser l'apprentissage des élèves par l'adaptation au milieu.

Il est à noter que lors des scénarios 1 et 2, les élèves disposent d'un tableau vide comprenant trois colonnes (calculs pour la calculette, prévision et résultat). Ils notent les calculs inscrits au tableau dans la première colonne, écrivent leur prévision dans la deuxième colonne, vérifient à l'aide de la calculette et notent la réponse obtenue dans la troisième colonne. Les vérifications ne sont donc pas faites à la suite de chaque groupe de tâches tel que présenté dans la méthodologie. Procéder en notant au fur et à mesure les calculs au tableau assure un meilleur suivi des élèves et le maintien de leur attention.

À partir du scénario 3, concernant la vérification des prévisions, nous procédons tel que prévu dans la méthodologie. Les élèves reçoivent un tableau dans lequel la première colonne présente des calculs, font leur prévision pour chaque calcul (ce qui est parfois suivi d'un retour en grand groupe) et vérifient celles-ci à l'aide de leur calculette. Il y a ensuite un retour en grand groupe. Quelques modifications sont apportées concernant les calculs et les égalités à trou dans certains groupes de tâches en cours de réalisation. Chaque modification est indiquée et justifiée dans ce chapitre.

4.2.1 Catégories de prévisions erronées

Afin de faciliter l'analyse des données, nous regroupons les différentes prévisions erronées. Nous avons en effet dégagé deux grandes catégories : les prévisions dont l'interprétation de l'opération est erronée et celles dont l'application du calcul numérique est erronée. Nous subdivisons chacune de ces grandes catégories. Un code est attribué aux différents types de prévisions erronées (voir tableau 4.3); la référence à ce code, dans le texte, allège la présentation et l'analyse des résultats.

Concernant la première catégorie (prévisions dont l'interprétation de l'opération est erronée), l'analyse a priori et les variables didactiques de la situation permettent de relever trois sous catégories de fausses prévisions dont chacune relève d'une composante de l'opération à la calculette : la transformation additive, le compteur et la puissance.

La transformation additive engendre trois types d'erreur. Le premier type (T1) est la confusion ajout/retrait qui consiste à faire une soustraction au lieu d'une addition ou l'inverse. Le deuxième type d'erreur (T2) est l'itération du premier nombre. Dans cette erreur, c'est le terme initial, au lieu de la puissance, qui subit l'effet du signe =. Par exemple, lors de l'opération 15+1 000 = = =, l'élève obtient 1 045 en ajoutant trois fois 15 à 1 000. Le troisième type d'erreur (T3) est l'itération de la somme. À chaque signe =, l'élève additionne la somme obtenue. Ainsi, pour l'opération 3 + 1 = = =, l'élève obtient 12 : 3 + 1 = (4) = (+4) = (+4). Dans le cas d'une opération avec retrait, il s'agit alors de l'itération de la différence qui est également codée T3.

Les erreurs d'interprétation peuvent également être liées au compteur. Nous subdivisons les prévisions erronées en raison du traitement du compteur en trois types. L'erreur de type C1 consiste à ne considérer qu'un signe =. Par exemple, pour l'opération 3+1= = =, l'élève obtient la réponse 4. Pour C2, l'erreur consiste à faire un ajout de plus que le nombre de signes = l'exige, considérant le résultat du calcul avant même le premier signe =. C'est le cas d'un élève qui obtient 7 pour l'addition 3+1 = = = : 3+1 (4) = (+1) = (+1) = (+1). Le troisième type d'erreur (C3) consiste à ne pas respecter le nombre de compteurs donnés. Nous avons choisi de faire une catégorie spécifique pour ce type d'erreur à cause de sa fréquence élevée. Pour toutes les autres prévisions erronées concernant le nombre de compteurs, et qui ne relève pas de C2, il s'agit d'erreur de type C3. Obtenir, par exemple, 1 522 à l'opération 1 822 – 100 = = = = en est un exemple puisqu'un compteur a été omis.

La puissance est également une composante de l'opération qui engendre des erreurs d'interprétation. Il arrive que les élèves ne respectent pas la puissance donnée. C'est le cas d'un élève qui obtient 945 lors de l'opération 925 + 100 = =, ajoutant des dizaines au lieu d'ajouter des centaines. Lorsque le chiffre affecté dans le terme initial n'est pas respecté, nous considérons, donc, qu'il s'agit de l'erreur de type P1.

La deuxième grande catégorie de prévisions erronées concerne l'application du calcul numérique. L'élève commet alors une erreur dans l'application d'une stratégie efficace. Rappelons d'abord brièvement les trois grandes stratégies efficaces pour anticiper le résultat d'un calcul : 1- compter à partir du terme initial; 2- compter en s'appuyant sur les derniers chiffres du terme initial correspondant à la puissance de dix indiquée dans le calcul; 3- effectuer la transformation à partir des premiers chiffres du nombre initial correspondant au nombre de groupements de la valeur de la puissance en jeu. Il est à noter que la deuxième et la troisième stratégies peuvent être adaptées en tenant compte uniquement des chiffres affectés dans le terme initial.

Nous subdivisons les fausses prévisions concernant l'application du calcul numérique en deux types d'erreurs : erreurs dans le comptage oral (S1) et erreurs dans le traitement des chiffres (S2). Il est difficile de différencier les erreurs dans le comptage oral (S1) des erreurs dues au non-respect du nombre de compteurs (C3). Lorsque l'erreur semble provenir d'une omission ou d'un ajout de compteurs ou d'un manque de synchronisation entre le comptage par intervalle et le comptage du nombre de compteurs, nous considérons l'erreur de type C3. Bien sûr, il peut arriver qu'une erreur soit codée C3 alors qu'il s'agit d'une erreur dans le comptage oral. Ce serait le cas, par exemple, d'un élève qui a omis un intervalle en comptant. Or, nous ne disposons pas des informations nécessaires pour distinguer parfaitement ces deux catégories. Nous avons donc choisi de coder les erreurs S1 uniquement si l'erreur dans le comptage ne peut être issue d'une erreur de non-respect du nombre de compteurs. Obtenir 52 681 pour l'opération 52 811-10= = = est un exemple d'erreur dans le comptage oral (S1). L'élève utilise sans doute la deuxième stratégie pour alléger le comptage, comptant alors à partir des derniers chiffres du terme initial : 801-691-681, faisant le saut d'une centaine. Une erreur de comptage peut aussi survenir lors de l'utilisation de la troisième stratégie. C'est le cas de l'élève qui obtient 1 103 lors de l'opération 783 + 10 = = = = =. Ce dernier compte à partir du nombre de groupements de 10 dans le terme initial, soit 78, mais ne maintient pas le comptage par 1. L'élève passe effectivement d'un comptage par 1 à un comptage par 10 : 79, 80, 90, 100, 110. Cette erreur manifeste une certaine confusion entre avancer, partant de 78 (dizaines), par intervalle de un (dizaine) et avancer, partant de 783, par intervalle de 10. Il obtient ainsi 110 dizaines auxquelles il juxtapose le chiffre 3 aux unités pour produire l'écriture : 1 103.

Les erreurs dans le traitement des chiffres (S2) sont spécifiques du calcul en jeu. Nous les analyserons donc cas par cas.

Les réponses erronées proviennent parfois de plus d'un type d'erreurs. Advenant le cas, nous noterons plus d'un code à côté de la prévision obtenue par l'élève. Par ailleurs, certains élèves, particulièrement les élèves 1, 11 et 15, semblent parfois écrire une prévision de façon aléatoire, ou encore, modifier le terme initial du calcul un peu à l'aveuglette, simplement pour participer à la tâche. Lorsqu'une prévision ne correspond à aucun type d'erreur présenté, aucun code ne lui est attribué.

Tableau 4.3

Types de prévisions erronées

	Types d'erreurs	Code	Description	Exemple
Erreur dans l'interprétation de l'opération	Transformation additive	T1	Confusion ajout/retrait	35 651 – 1 000 = = = 38 651
		T2	Itération du premier nombre	15 + 1 000 = = = 1 045
		T3	Itération de la somme	3 + 1 = = = 12
	Compteur	C1	Considérer un seul signe =	3 + 1 = = = 4
		C2	Trouver la réponse au calcul avant de considérer le premier signe =	42 + 10 = = 72 Procédant ainsi : 42 + 10 (52) = (+10) = (+10)
		C3	Ne pas respecter le nombre de compteurs	1 822 – 100 = = = = 1 522 Un compteur a été omis.
	Puissance	P1	Ne pas respecter la puissance	925 + 100 = = 945
Erreur dans l'application du calcul numérique	Comptage oral	S1	Erreur dans l'application de la stratégie de comptage oral qui n'est pas issue du non-respect du nombre de compteurs	52 811 – 10 = = = 52 681 Faisant le saut d'une centaine passant alors de 52 801 à 52 691.
	Traitement des chiffres	S2	Erreur dans l'application d'une stratégie qui nécessite le traitement des chiffres	34 578 + 10 = = = = 34 128 Obtenant 12 en ajoutant cinq dizaines à 7 et modifiant ensuite 57 par 12.

4.2.2 Scénario 1

Le premier scénario a pour but la familiarisation avec la situation. Ce scénario comporte un seul groupe de tâches composé de trois opérations. La transformation additive est un ajout, le nombre de compteurs est inférieur à 4 et un seul chiffre du terme initial est affecté pour obtenir le nombre final.

Tableau 4.4

Scénario 1

	3+1= = = (6)	42+10 = = (62)	15+1 000 = = = (3 015)	Taux de réussite
E1	16 (T3, C2)	52 (C1)	8 000	0/3
E2	4 (C1)	72 (C2)	1 045 (T2)	0/3
E3	R	R	R	3/3
E4	12 (T3)	142 (P1, C1)	R	1/3
E5	12 (T3)	R	18 000 (S2, C2)	1/3
E6	12 (T3)	R	R	2/3
E7	R	R	R	3/3
E8	R	R	R	3/3
E9	4 (C1)	54 (P1, C2)	1 045 (T2)	0/3
E10	12 (T3)	R	R	2/3
E11	4 (C1)	54 (P1, C2)	1 018 (P1, C2)	0/3
E12	12 (T3)	R	4 500 (T2, S2)	1/3
E13	33	55 (P1, C3)	4 500 (T2, S2)	0/3
E14	12 (T3)	R	R	2/3
E15	4 (C1)	53 (P1)	2 000	0/3
Taux de réussite	3/15	8/15	7/15	40%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(--) : Type d'erreur

Double ligne : vérification après le calcul

En observant les prévisions du premier groupe de tâches, on constate que la majorité des erreurs proviennent d'une mauvaise interprétation de l'opération. Lors de la première opération, seulement trois élèves font une prévision exacte. Ce faible taux de réussite est probablement dû au fait que la plupart des élèves ne connaissent pas la fonction du signe = à répétition sur une calculette. Sept élèves font l'itération de la somme (T3) et quatre élèves considèrent un seul signe = (C1).

Le taux de réussite passe de 3/15 lors de la première opération à 8/15 lors de la deuxième opération, ce qui montre une certaine familiarisation avec la touche = à répétition sur la calculette. Aucune erreur de type 3 n'est présente lors des prévisions de la deuxième opération, alors que c'était l'erreur la plus fréquente lors de la première opération. Un nouveau type d'erreur apparaît, soit le non-respect de la puissance et ce, dû à l'effet pérenne de la tâche précédente. Les élèves ayant obtenu 53, 54 et 55, additionnent 1 au lieu de 10 pour chaque signe = étant donné que c'est l'effet que prenait ce signe lors de la première opération. Deux élèves ne considèrent encore qu'un seul signe =.

Lors de la troisième opération, un seul élève ajoute 1 à chaque compteur et aucun élève ne considère qu'un seul compteur. Cependant, un nouveau type d'erreur apparaît, soit l'itération du premier nombre (T2). Cette erreur est sans doute due au fait que pour la première fois, le terme initial de l'opération est inférieur au second terme à itérer (15 + 1 000). De fausses prévisions relevant du traitement des chiffres sont également présentes. C'est le cas des deux élèves qui obtiennent 4 500 comme prévision, faisant l'itération du premier nombre (T2) et additionnant 15 sur les chiffres situés à gauche de 1000 (S2). Les élèves font alors : 15 + 1000 = (15--)= (+ 15--) = (+ 15--) pour obtenir l'écriture 4 500. L'élève qui obtient 18 000 comme prévision a un raisonnement de même nature mais en faisant subir l'itération au deuxième terme, comme il se doit, et commettant l'erreur de type C2. Il procède donc ainsi : 15 + 1 000 (15---) = (16---) = (17---) = (18---), ce qui se compte facilement à l'oral 15 + 1000 (quinze *mille*) = (seize *mille*) = (dix sept *mille*) = (dix huit *mille*).

On observe une évolution dans les types d'erreur, ce qui fait preuve d'un apprentissage sur l'effet du signe = à répétition sur la calculette. Trois opérations ne semblent cependant pas être suffisantes pour permettre à l'ensemble de la classe de se familiariser avec la situation puisque six élèves, suite aux trois opérations, n'ont obtenu aucune prévision exacte.

4.2.2 Scénario 2

Le but du deuxième scénario est d'amener les élèves à dégager les régularités lors de transformations additives avec 10^1. Les opérations choisies devraient permettre aux élèves d'identifier que le dernier chiffre du nombre n'est pas modifié. Ce scénario comporte des transformations additives avec ajout (+) et retrait (-) sur le nombre initial. Il arrive que plus d'un chiffre soit modifié entre le terme initial et le nombre final. Le deuxième scénario comporte deux groupes de tâches.

Tableau 4.5

Premier groupe de tâches du scénario 2

	65+10 = = = (95)	1 509+10 = = = (1 539)	34 578+10 = = = = = (34 628)	Taux de réussite
E1	99	1999	∅	0/3
E2	R	R	34 528 (S2)	2/3
E3	R	R	34 678 (S2)	2/3
E4	R	R	R	3/3
E5	R	R	34 128 (S2)	2/3
E6	R	R	34 638 (C2)	2/3
E7	R	R	R	3/3
E8	85 (C3)	R	34 598 (C3)	1/3
E9	105 (C2)	3 519 (P1)	∅	0/3
E10	105 (C2)	R	R	2/3
E11	105 (C2)	199	34 584 (P1)	0/3
E12	R	R	∅	2/3
E13	∅	∅	84 578 (P1)	0/3
E14	R	R	R	3/3
E15	75 (C1)	91 151	5 000	0/3
Taux de réussite	8/15	10/15	4/15	49%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(--) : Type d'erreur

Double ligne : vérification après le calcul

Premier groupe de tâches

Lors de la première opération, 8/15 élèves obtiennent une prévision exacte et 3 élèves font une erreur de type C2, ce qui montre l'appropriation de la tâche par la majorité des élèves. Les élèves qui commettent des erreurs dans l'interprétation de l'opération semblent néanmoins utiliser des stratégies efficaces. Lors de la deuxième opération, 10/15 élèves obtiennent une prévision exacte. Ces résultats montrent que la majorité des élèves sont maintenant familiarisés avec la situation.

Le taux de réussite est beaucoup plus faible à la troisième opération (34 578 + 10 = = = = =) puisque la troisième stratégie anticipée est la seule qui est à la fois efficace et économique (3 457 dizaines + 5 dizaines = 3 462 dizaines donc 34 628). En effet, le comptage à partir du nombre initial est difficile à contrôler et considérer uniquement les deux derniers chiffres du terme initial pour avancer par comptage de dix ne permet pas d'obtenir la bonne réponse. Le choix de cette opération visait d'ailleurs, dans l'analyse a priori, à confronter les élèves à un calcul qui modifie plus d'un chiffre dans le nombre. La valeur des variables de cette opération cause des difficultés dans l'application du calcul numérique. Trois élèves commettent des erreurs dans le traitement des chiffres (S2). Un élève inscrit 34 128 comme prévision, obtenant 12 en ajoutant cinq dizaines à 7 (chiffre à la position des dizaines dans le terme initial), et modifiant par la suite 57 par 12. Par un raisonnement comparable, un élève prévoit 34 528, ajoutant cinq à 7 dizaines (12) et ne modifie que le chiffre des dizaines (7) par le chiffre 2 de 12: 34 578 --> 34 528. Un autre élève ne modifie que le chiffre des centaines dans sa prévision : 34 578 → 34 678.

Il est à noter que les erreurs dans l'interprétation de l'opération peuvent être issues d'une incapacité à effectuer le calcul numérique. Par exemple, l'élève 8 prévoit 34 598, considérant 2 compteurs au lieu de 5, ne sachant sans doute comment poursuivre la suite lorsque plus d'un chiffre est modifié dans le nombre. Ce même élève commettra également cette erreur dans le groupe de tâches suivant. L'élève 13, quant à lui, fait une erreur de puissance, ajoutant cinq dizaines de mille au lieu de cinq dizaines. Il est à noter que cet élève, lors de ce scénario, modifie toujours le premier chiffre du terme initial.

Deuxième groupe de tâches

Lors du deuxième groupe de tâches, nous présentons pour la première fois des transformations qui nécessitent un retrait, ce qui ne semble pas causer de difficultés particulières.

La troisième opération prévue pour ce groupe de tâches, soit 52 761 +10 = = = = =, a été remplacée par l'opération suivante : 52 811 – 10 = = =. Nous avons choisi de faire une soustraction au lieu d'une addition car aucune soustraction de ce type n'avait encore été présentée.

Tableau 4.6

Deuxième groupe de tâches du scénario 2

	46 822 + 10 = = = (46 852)	659 - 10 = = = (629)	52 811 - 10 = = = (52 781)	Taux de réussite
E1	∅	∅	∅	0/3
E2	R	R	R	3/3
E3	R	R	∅	2/3
E4	R	R	R	3/3
E5	R	R	52 771(C2)	2/3
E6	R	R	R	3/3
E7	R	619 (C2)	52 691 (S1)	1/3
E8	R	R	52 801(C3)	2/3
E9	R	R	50 800	2/3
E10	R	R	78 (S2)	2/3
E11	46 862 (C2)	6 569 (S2)	52 824 (T1,P1, C2)	0/3
E12	R	R	R	3/3
E13	76 822 (P1)	129 (P1)	∅	0/3
E14	R	R	R	3/3
E15	500	500	528	0/3
Taux de réussite	11/15	10/15	5/15	58%

Légende :
R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
(--) : Type d'erreur
Double ligne : vérification après le calcul

11/15 élèves font une prévision exacte lors de la première opération et 10/15 élèves, lors de la deuxième opération. L'élève 11, lors de la deuxième opération, inscrit 6 569. Cette prévision fait preuve d'une reconnaissance que les dizaines sont affectées. Cependant, il ajoute un chiffre aux dizaines sans que l'on puisse identifier en comprendre la raison.

Le taux de réussite lors de la troisième opération, 52 811 - 10 = = =, est de 5/15, ce qui s'explique par le fait que cette opération entraîne la transformation de plus d'un chiffre. Un nouveau type d'erreurs dans l'application d'une stratégie efficace apparaît. L'élève 10 obtient 78, effectuant la transformation des chiffres affectés dans le terme initial correspondant au nombre de groupements de la valeur de la puissance en jeu. L'élève compte donc par ordre décroissant à partir de 81 de sorte à retrancher trois dizaines. Il substitue 81 pour 78 dans le nombre, mais omet d'écrire les autres chiffres qui composent le nombre. La prévision de l'élève 11 concernant cette opération provient d'un ensemble de trois types d'erreurs (T1, P1, C2). L'élève obtient 52 824 procédant sans doute ainsi : 52 811-10 (52 821) = (+1) = (+1) = (+1).

Suite au deuxième scénario, on constate qu'à l'exception des élèves 1, 11 et 15, les élèves semblent identifier que le dernier chiffre du terme initial n'est pas modifié lors d'une transformation additive avec 10^1.

4.2.4 Scénario 3

Le troisième scénario comporte deux objectifs :

- dégager les régularités des transformations additives avec des puissances de 10 autres que 1
- identifier le chiffre ou le groupe de chiffres affectés par une transformation additive avec une puissance de 10.

Ces mêmes buts sont poursuivis lors des scénarios 4 et 5. Les différents scénarios se différencient par la valeur des variables.

Dans le troisième scénario, quatre groupes de tâches sont prévus qui se différencient par la valeur des variables. Pour chaque groupe de tâches, l'inconnue est le nombre final, le même que lors des scénarios précédents. De plus, nous avons demandé aux élèves de souligner avant chaque validation les chiffres qui, selon eux, sont modifiés lors de l'opération de manière à réinvestir le travail réalisé au scénario précédent.

Premier groupe de tâches

Les calculs présentés dans le premier groupe de tâches ont le même terme initial et différentes puissances de dix. Un seul chiffre est modifié dans le nombre initial.

Tableau 4.7

Premier groupe de tâches du scénario 3

	35 651 + 10 = = = (35 681)	35 651 + 100 = = = (35 951)	35 651 + 10 000 = = = (65 651)	35 651 – 1 000 = = = (32 651)	Taux de réussite
E1	35 951 (P1)	35 751 (C1)	∅	∅	0/4
E2	R	R	R	R	**4/4**
E3	R	R	R	38 651 (T1)	3/4
E4	**R**	**R**	**R**	R	4/4
E5	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E6	**35 951 (P1)**	36 051 (C2)	**45 651 (C1)**	**36 651 (T1, C1)**	0/4
E7	35 691 (C2)	36 000 (C2, S2)	**75 651 (C2)**	**31 651 (C2)**	0/4
E8	R	R	95 651 (C3)	36 651 (T1, C1)	2/4
E9	**35 691 (C2)**	36 051 (C2)	**75 651 (C2)**	**31 651 (C2)**	0/4
E10	**R**	**R**	R	**38 651 (T1)**	3/4
E11	**35 691 (C2)**	**R**	**75 651 (C2)**	R	2/4
E12	681 (S2)	R	R	R	3/4
E13	R	R	R	38 651 (T1)	2/4
E14	**R**	**R**	**R**	**38 651 (T1)**	3/4
E15	35 751 (P1, C1)	35 651 + 200	∅	∅	0/4
Taux de réussite	8/15	10/15	8/15	5/15	52%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(--) : Type d'erreur

Caractère gras : les chiffres du terme initial qui sont modifiés sont correctement identifiés

D'abord, en ce qui a trait au soulignement, 43% des prévisions sont exactes. Les erreurs commises consistent, à l'exception de trois élèves, à souligner dans le terme initial le chiffre à la position de la puissance de dix qui est visée par le calcul et tous les chiffres à sa droite. Ainsi, lorsque la puissance de dix est de deux, l'élève souligne, dans le terme initial, le chiffre à la position des centaines et ceux aux positions de dizaines et d'unités. Par ailleurs, lorsque le soulignement des chiffres modifiés dans le terme initial est juste, 13/25 prévisions sont exactes et lorsque les chiffres modifiés sont incorrectement identifiés dans le soulignement, 17/31 prévisions sont exactes. Les résultats obtenus au premier groupe de tâches ne permettent pas de faire un lien entre la prévision des chiffres qui changent dans le terme initial et la prévision du résultat de l'opération.

Si on ne tient pas compte des erreurs de type C2, 11/15 élèves font une prévision exacte lors de la première opération. L'élève 12 obtient 681 comme prévision qui correspond aux trois derniers chiffres du résultat. Cette prévision semble témoigner de la mise en œuvre d'une stratégie de comptage qui s'appuient sur les derniers chiffres du terme initial. Cette stratégie témoigne de l'investissement des connaissances sur la numération de position.

Lors de la deuxième opération, commettre une erreur de type C2 modifie plus d'un chiffre dans le terme initial. Les élèves 6 et 9 considèrent un signe «= » en trop et changent les deux chiffres du terme initial avec succès, ce qui fait preuve, malgré une erreur d'interprétation du calcul numérique, d'une application adéquate de la troisième stratégie. L'élève 7, quant à lui, commet sans doute une erreur de type C2, mais ne réussit pas à modifier adéquatement le terme initial. Et l'élève 15 semble toujours à la recherche du sens du signe «=» à répétition sur la calculette.

Lors de la troisième opération, toutes les fausses prévisions concernent l'interprétation du compteur. Si on ne tient pas compte des erreurs de type C2, 11/15 élèves réussissent à obtenir une prévision juste.

Les prévisions concernant la quatrième opération sont celles qui sont le plus échouées. Si on ne tient pas compte de l'erreur de type C2, 7/15 élèves obtiennent une prévision exacte. Dans ce groupe de tâches, c'est la seule soustraction; ce qui peut expliquer les six erreurs concernant la confusion ajout/retrait (T1).

Deuxième groupe de tâches

À l'exception de la deuxième opération, les calculs choisis dans le deuxième groupe de tâches entraînent la modification de plus d'un chiffre dans le nombre.

Il est à noter qu'en ce qui concerne le quatrième calcul, nous avions prévu présenter aux élèves le calcul suivant : 3 151 589 876 + 10 = = =. La longueur du terme initial rendait impossible son inscription à l'écran de la calculette, ce qui aurait permis aux élèves de tester les limites d'une calculette. Nous avons jugé prématuré la présentation de ce calcul et raccourci en conséquence le terme initial afin que les élèves puissent valider leur réponse à l'aide de la calculette. Nous avons donc enlevé les premiers chiffres du terme initial de sorte à obtenir, comme quatrième opération, 589 876 + 10 = = =.

Tableau 4.8

Deuxième groupe de tâches du scénario 3

	699 + 100 = = = = = = (1 299)	1 822 – 100 = = = = (1 422)	28 537 + 1000 = = = = (32 537)	589 876 + 10 = = = (589 906)	Taux de réussite
E1	∅	∅	∅	∅	0/4
E2	R	**R**	**R**	**R**	4/4
E3	R	R	R	589 916 (C2)	3/4
E4	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E5	**R**	**422 (S2)**	**R**	590 176 (P1)	2/4
E6	**R**	**1 322 (C2)**	**33 537 (C2)**	**R**	2/4
E7	**R**	**R**	**R**	R	4/4
E8	**R**	**R**	**R**	R	4/4
E9	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E10	R	**R**	**24 537 (T1)**	5 898 106 (S2)	2/4
E11	**R**	**1 222 (C3)**	**R**	R	3/4
E12	R	R	33 537 (C2)	589 910 (S2,C2)	2/4
E13	R	R	R	R	4/4
E14	R	2 222 (T1)	R	R	3/4
E15	R	1 299	8 537	589 777	3/4
Taux de réussite	14/15	9/15	10/15	9/15	70%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(--) : Type d'erreur

Caractère gras : les chiffres du terme initial qui sont modifiés sont correctement identifiés

D'abord, en ce qui a trait au soulignement des chiffres du terme initial, 53% des prévisions sont exactes, taux de réussite légèrement supérieur à celui du premier groupe de tâches. On constate cependant que les types d'erreurs changent. Alors qu'au premier groupe de tâches, l'erreur la plus fréquente était de souligner le chiffre du terme initial correspondant à la valeur de la puissance de dix visée dans la tâche et les chiffres à sa droite, aucun élève ne fait cette erreur dans ce groupe de tâches. Par ailleurs, lorsque le soulignement des chiffres modifiés dans le terme initial est juste, 9/14 prévisions sont exactes et lorsque les chiffres du terme initial qui sont modifiés ne sont pas correctement identifiés, 15/42 prévisions sont exactes. Contrairement au groupe de tâches précédent, ces résultats tendent à montrer que les élèves qui prévoient avec justesse les chiffres qui changent ont un taux de réussite plus élevé pour prédire le nombre final.

Dans le premier calcul (699 + 100 = = = = = =), le taux de réussite est particulièrement élevé. En effet, 14/15 élèves font des prévisions justes, ce qui suggère que le passage d'un à deux chiffres concernant le nombre de centaines ne pose pas de problème chez ces élèves.

9/15 élèves font une prévision exacte lors de la deuxième opération qui nécessite la modification d'un seul chiffre dans le terme initial. L'élève 5 fait une erreur d'application du calcul numérique, comptant à partir de 822 pour alléger le comptage et oubliant par la suite de transcrire l'unité de mille.

Bien que les deux dernières opérations nécessitent la transformation de plus d'un chiffre, 10/15 élèves font une prévision juste lors de la troisième opération et 9/15 lors de la quatrième opération. L'élève 5, lors de la dernière opération (589 876 + 10 = = =), ne respecte pas la puissance donnée. Il ajoute des centaines au lieu d'ajouter des dizaines. Son erreur le conduit à appliquer avec succès un calcul numérique dans lequel trois chiffres du terme initial sont modifiés. L'élève 10, quant à lui, obtient 5 898 106 comme prévision au lieu de 589 906. Il ajoute trois dizaines en comptant à partir de 7, chiffre à la position des dizaines dans le terme initial. Il modifie ensuite le 7 du terme initial par la somme obtenue, soit 10. L'élève 12 ajoute le bon nombre de dizaines, mais omet de retranscrire le chiffre à la position des unités, obtenant 589 910.

Troisième groupe de tâches

Le troisième groupe de tâches présente des calculs ayant des nombres composés du chiffre 9 comme terme initial et ayant 0 comme puissance de 10 (qui correspond au nombre 1). Ces valeurs entraînent la modification de tous les chiffres qui composent le terme initial.

Tableau 4.9

Troisième groupe de tâches du scénario 3

	999 +1 = (1 000)	99 + 1= (100)	99 999 + 1 = (100 000)	999 999 999 + 1 = (1 000 000 000)	Taux de réussite
E1	2	R	1000 (S2)	1 000 000 (S2)	1/4
E2	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E3	R	R	R	R	4/4
E4	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E5	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E6	**R**	R	**R**	R	**4/4**
E7	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E8	R	R	R	R	4/4
E9	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E10	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E11	9 200	9 101	2 200	9 999 200	0/4
E12	**R**	**R**	**10 000 (S2)**	**100 000 (S2)**	2/4
E13	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E14	**R**	**R**	**R**	**R**	4/4
E15	200	R	1 000 (S2)	10 000 (S2)	1/4
Taux de réussite	12/15	14/15	11/15	11/15	80%

Légende :

R : Prévision exacte

(--) : Type d'erreur

Caractère gras : les chiffres du terme initial qui sont modifiés sont correctement identifiés

En ce qui a trait au soulignement des chiffres du terme initial, soit les élèves réussissent le soulignement pour les 4 opérations, soit ils ne font aucun soulignement exact. Ainsi, 10/15 élèves prévoient adéquatement que tous les chiffres du terme initial sont modifiés pour chaque calcul. Deux élèves soulignent uniquement le dernier chiffre (parce qu'on fait +1), un élève souligne le premier et le dernier chiffre de chaque terme initial et deux élèves ne font aucun soulignement. Notons que les élèves qui soulignent adéquatement les chiffres dans le terme initial ont généralement prévu la bonne somme. En effet, lorsque le soulignement est juste, 10/12 prévisions sont exactes et lorsque qu'il y a erreur dans le soulignement, 10/48 prévisions sont exactes.

Dans ce groupe de tâches, la stratégie de comptage oral s'avère efficace. Les connaissances sur la suite orale des nombres sont sans doute suffisantes pour la majorité des élèves aux deux premières prévisions. Étant donné la grandeur des termes initiaux pour les deux dernières opérations, la plupart des élèves utilisent sans doute leurs connaissances sur le système écrit pour conforter la règle qui se dégage des deux premiers calculs : le successeur d'un nombre composé seulement de chiffres 9 est composé du chiffre 1 suivi d'autant de chiffres 0 qu'il y avait de chiffres 9. Un élève obtient la bonne prévision lors des deux premières opérations, mais non lors des deux dernières, ce qui suggère qu'il est confronté aux limites de la stratégie du comptage oral. Enfin, trois élèves semblent reconnaître la configuration d'un nombre qui suit un nombre composé uniquement du chiffre 9, mais sont incapables de contrôler le nombre de zéro qui suit le chiffre 1.

Il est à noter que 11/15 élèves obtiennent des prévisions exactes pour chaque opération de ce groupe de tâches.

Par ailleurs, la longueur du terme initial de la quatrième opération ne permet pas son entrée dans une calculette étant donné qu'un maximum de 8 chiffres peuvent être inscrits à l'écran. Les élèves apprennent ainsi une limite de la calculette au moment de la vérification.

Quatrième groupe de tâches

Le quatrième groupe de tâches reprend les différents types d'opérations présentés dans les groupes de tâches précédents, offrant ainsi aux élèves l'occasion de faire à nouveau des prévisions, suite aux validations obtenues lors des groupes de tâches précédents. Une sixième opération est ajoutée afin de privilégier une puissance de 10 plus élevée.

Tableau 4.10

Quatrième groupe de tâches du scénario 3

	1010+10 = = = = (1 050)	999+10 = = = = (1 039)	783+10 = = = = = (833)	783+100 = = = = = = = (1 483)	99 999+1 = (100 000)	275 832 + 100 000 = = = (575 832)	Taux de réussite
E1	1 014 (P1)	30 000	∅	∅	10 000 (S2)	278 832	0/6
E2	**R**	1 049 (C2)	R	R	**R**	**R**	5/6
E3	R	1 309 (S1)	1 103 (S1)	1 783 (P1, C1)	R	R	3/6
E4	**1 020 (C1)**	**1 009**	**823 (C3)**	**R**	**R**	**R**	3/6
E5	1 060 (C2)	**4 009 (S1)**	**R**	**R**	**R**	**375 832 (C1)**	3/6
E6	R	959 (T1)	R	R	R	R	**5/6**
E7	**1 040 (C3)**	1 030 (S2)	830 (S2)	R	R	R	**3/6**
E8	1 060 (C2)	1 040 (S2, C2)	813 (C3)	**R**	R	675 832 (C2)	2/6
E9	R	1 030 (S2)	**840 (S2, C2)**	**1 040 (S1)**	R	R	**3/6**
E10	R	1 000 (P1, C1)	**R**	**R**	R	**375 832 (C1)**	4/6
E11	5 010 (P1)	140	R	1 583 (C2)	10 000 (S2)	**675 832 (C2)**	1/6
E12	R	∅	∅	∅	10 000 (S2)	R	2/6
E13	R	1 049 (C2)	1 383 (P1, C2)	∅	R	R	4/6
E14	R	1 049 (C2)	R	R	R	R	**5/6**
E15	1 020 (C1)	9 910	3 783	∅	1 000 001 (S2)	∅	0/6
Taux de réussite	8/15	0/15	6/15	8/15	11/15	9/15	47%

Légende :
R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
(--) : Type d'erreur
Caractère gras : les chiffres du terme initial qui sont modifiés sont correctement identifiés

Observons d'abord le taux de réussite concernant les prévisions des élèves sur le soulignement des chiffres modifiés dans le terme initial. 47% des soulignements sont exacts. Lorsque le soulignement est juste, 30/40 prévisions sur la somme sont exactes alors que lorsqu'il y a erreur dans le soulignement, seulement 10/42 prévisions sur la somme sont exactes. Cinq élèves ne réussissent aucun soulignement. Parmi ces derniers, quatre ne font tout simplement pas de prévision. L'élève 8, qui n'obtient aucune bonne prévision, souligne pour chaque terme initial le chiffre correspondant à la valeur de la puissance de dix en jeu dans le calcul ainsi que tous les chiffres à sa droite, erreur fréquemment commise lors du premier groupe de tâches. L'élève 11, qui obtient une seule bonne réponse, souligne le premier chiffre de chaque terme initial. Quatre élèves réussissent uniquement le soulignement lorsque le calcul engendre la modification d'un seul chiffre du terme initial ainsi que le cinquième calcul (99 999 + 1 = = = =).

La première opération (1 010 + 10 = = = =) engendre uniquement la modification d'un chiffre. L'élève 11 répond 5 010, ce qui constitue une erreur de puissance; il ajoute 1000 au lieu de 10.

Aucun élève ne réussit à faire une prévision juste au deuxième calcul (999 + 10 = = = =). Le nombre de dizaines passe de deux à trois chiffres (99 à 100). Les zéros au centre du nombre déstabilisent peut-être certains élèves. Les élèves ayant répondu 1 030 et 1 040 ont, soit réalisé le calcul sur 1 000 plutôt que 999 (sans doute pour faciliter le comptage), soit omis de retranscrire le chiffre à la position des unités suite au comptage du nombre de dizaines. L'élève 3, obtenant 1 309, compte probablement à partir des 99 dizaines du terme initial d'abord par intervalle de un et ensuite par intervalle de dix (99, 100, 110, 120, 130) alors que l'élève 5, obtenant 4009, compte sans doute par un et ensuite par 100 (99, 100, 200, 300, 400). L'élève 10 répond 1 000, additionnant une unité et considérant un seul compteur, comme dans les opérations présentées dans le groupe de tâches précédent ; ce qui semble relever d'un effet pérenne.

Lors de la troisième opération (783 + 10 = = = = =), un élève fait 1 103 comme prévision, comptant le nombre de dizaines à partir de 78 d'abord par intervalle de 1 et ensuite par intervalle de dix (79, 80, 90, 100, 110). Les élèves ayant répondu 830 et 840 omettent de retranscrire le 3 à la position des unités suite au comptage.

Il est intéressant de porter une attention particulière à l'erreur de comptage de l'élève 9 lors de la quatrième opération (783 + 100 = = = = = = =). Cet élève obtient 1 040, comptant à partir de 700, d'abord par intervalle de 100 pour ajouter les centaines et ensuite par 10 : 700, 800, 900, 1 000, 1 010, 1 020, 1 030, 1 040.

Les erreurs commises lors du cinquième calcul (99 999 + 1 =) relèvent d'un manque de contrôle sur le nombre de zéros à ajouter. À l'exception d'un seul, les élèves semblent dégager la règle selon laquelle le successeur d'un nombre composé que de chiffres 9 s'écrit par le chiffre 1 suivi de zéros. L'élève 15 obtient 1 000 001 comme prévision, ajoutant sans doute un 1 à la fin étant donné qu'on ajoute une unité en faisant + 1.

La plupart des élèves ne semblent pas déstabilisé par la puissance de 10 élevé au sixième calcul (275 832 + 100 000 = = =) puisque 9/15 d'entre eux obtiennent une prévision juste.

Les résultats obtenus lors du troisième scénario montrent que les élèves ont dégagé des régularités sur les transformations additives impliquant un terme qui est puissance de 10. Par ailleurs, on observe que les erreurs concernant le soulignement des chiffres dans le terme initial se sont modifiées au cours du scénario. Lors du premier groupe de tâches, près de la moitié de la classe ne considère que le chiffre qui correspond à la puissance de dix en jeu dans l'opération ainsi que tous ceux à sa droite seront modifiés alors qu'au dernier groupe de tâches, un seul élève fait encore cette erreur.

4.2.5 Scénario 4

Rappelons d'abord que les objectifs poursuivis lors du quatrième scénario sont les mêmes que ceux du scénario précédent, c'est-à-dire :

- dégager les régularités des transformations additives avec des puissances de 10 autres que 1
- identifier le chiffre ou le groupe de chiffres affectés par une transformation additive avec une puissance de 10.

Le scénario 4 se différencie des scénarios précédents par la nature des inconnues. À partir d'un nombre initial et d'une puissance de dix, les élèves sont d'abord invités à se prononcer sur la possibilité d'obtenir certains nombres. À partir du deuxième groupe de tâches, les tâches visent davantage un travail sur le compteur. Les élèves doivent alors rechercher le nombre de compteurs nécessaire pour obtenir un nombre final donné.

Premier groupe de tâches

Dans ce premier groupe de tâches, les élèves sont invités à se prononcer sur la possibilité d'obtenir un nombre final, partant de 51 + 10 et appuyant sur le signe =; le nombre de compteurs n'étant pas spécifié. Il faut, pour répondre adéquatement, considérer que l'ajout successif de 10 ne modifie en rien le chiffre des unités qui est 1. Donc tout nombre supérieur à 51 qui se termine par 1 peut être produit par le calcul donné.

Tableau 4.11

Premier groupe de tâches du scénario 4

51 + 10

	101	150	510	601	289	431	331	2 359 841	Taux de réussite
E1	X	R	R	X	R	X	∅	∅	3/8
E2	A	A	A	A	A	A	A	A	A
E3	X	R	X	X	R	X	X	X	2/8
E4	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E5	R	R	X	R	R	X	R	R	6/8
E6	R	R	X	R	R	R	R	R	7/8
E7	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E8	X	R	R	R	R	R	R	R	7/8
E9	X	R	X	R	R	R	R	R	6/8
E10	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E11	X	X	X	R	X	X	X	R	2/8
E12	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E13	R	R	X	R	R	R	R	R	7/8
E14	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E15	R	R	X	X	X	R	X	X	3/8
Taux de réussite	9/14	13/14	7/14	11/14	12/14	10/14	10/14	11/14	74%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

X : Prévision inexacte

A : Élève absent

10/14 élèves réussissent au moins six des huit prévisions. La grandeur du nombre 2 359 841 ne semble pas déstabiliser les élèves puisque 11/14 d'entre eux font une prévision juste. Ainsi, il semble bien que c'est la règle qui est utilisée par les élèves et non une stratégie de comptage oral. Le plus grand nombre de prévisions erronées (7/14) concerne le nombre 510, ce qui s'explique sans doute par la confusion avec la règle de la multiplication par 10.

Deuxième groupe de tâches

À partir de l'opération 34 + 10, les élèves doivent prévoir s'il est possible d'obtenir les nombres proposés dans le tableau qui suit, et si oui, en appuyant combien de fois sur la touche =. Dans ce groupe de tâches, il faut donc identifier le nombre de compteurs.

Tableau 4.12

Deuxième groupe de tâches du scénario 4

34 + 10

	74		143		134		340		403		444		
	Oui ou non	Nbre de = (4)	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de = (10)	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	**Nbre de =** (41)	Taux de réussite
E1	R	∅	R	R	X	∅	X	∅	R	∅	R	∅	5/12
E2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
E3	R	40	R	11	R	R	R	30	R	36	R	40	7/12
E4	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	12/12
E5	R	R	R	R	R	7	R	R	R	R	R	40	10/12
E6	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	12/12
E7	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	40	11/12
E8	R	R	R	R	R	100	R	R	R	R	R	410	10/12
E9	R	R	R	8	R	7	R	10	R	20	R	25	7/12
E10	R	R	R	R	R	9	R	R	R	R	R	44	10/12
E11	R	1	R	R	R	3	R	R	R	R	R	4	9/12
E12	R	R	R	R	X	∅	R	R	R	R	R	12	9/12
E13	R	R	R	R	X	∅	R	R	R	R	R	16	9/12
E14	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	40	11/12
E15	X	∅	R	R	X	∅	X	5	R	R	X	∅	4/12
Taux de réussite	13/14	10/14	14/14	12/14	10/14	5/14	12/14	10/14	14/14	11/14	13/14	2/14	75%

Légende :

R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
X : Prévision inexacte
A : Élève absent

Alors que dans le premier groupe de tâches, 5/14 élèves avaient fait une prévision juste pour tous les nombres, ce taux de réussite augmente à 10/14 dans le second groupe. Par ailleurs, 12/14 élèves prévoient qu'il est impossible d'obtenir 340 en faisant 34 + 10. Ils ont ainsi ajusté leur prévision selon les résultats obtenus à la tâche 51 + 10 qui précède.

Certains élèves ne tiennent pas compte de la puissance de 10 pour identifier le nombre de compteurs (P1). Les élèves indiquent simplement la différence entre le nombre final et le terme initial, obtenant ainsi 40 pour la première tâche (74 – 34), 100 pour la troisième tâche (134 – 34) et 410 pour la dernière tâche (444 – 34).

Les plus faibles réussites pour la seconde consigne (nombre de compteurs) s'observent aux nombres 134 (5/14) et 444 (2/14). Deux élèves répondent qu'il faut appuyer 7 fois sur la touche = pour obtenir 134, considérant sans doute qu'en additionnant 7 dizaines aux 3 de 34, on obtient une centaine et donc, 134 (S2). Un élève répond 9, commettant probablement une erreur lors du comptage ou dans la synchronisation entre le comptage par dix et le comptage du nombre de signes = (C3). En ce qui a trait au nombre 444, le comptage est une stratégie peu économique. Il est plus efficace de faire la différence entre le nombre de dizaines de 34 et le nombre de dizaines de 444. Quatre élèves prévoient qu'ils doivent appuyer 40 fois sur la touche = (C2). Ils font d'abord le calcul, 34 + 10, obtenant 44, et considèrent ensuite qu'il faut ajouter 400, donc 40 dizaines à cette somme pour obtenir 444.

Troisième groupe de tâches

Dans le troisième groupe de tâches, la consigne est semblable au groupe de tâches précédent. Cependant, la puissance de 10 n'est plus de 1, mais de 2. Il faut donc considérer que le chiffre des unités et celui des dizaines ne seront pas affectés par le calcul. Le calcul proposé est 34 + 100.

Tableau 4.13

Troisième groupe de tâches du scénario 4

34 + 100

	334		534		1 234		4 321		5 064		5 334		
	Oui ou non	Nbre de = (3)	Oui ou non	Nbre de = (5)	Oui ou non	Nbre de = (12)	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de = (53)	Taux de réussite
E1	R	1	R	2	X	∅	R	R	R·	R	R	93	7/12
E2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
E3	R	R	R	R	R	R	R	46	X	96	R	100	8/12
E4	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E5	R	R	R	R	R	R	R	43	R	50	R	R	10/12
E6	R	R	R	R	R	R	R	R	X	∅	R	R	10/12
E7	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	12/12
E8	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E9	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E10	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	63	11/12
E11	R	36	R	49	∅	∅	R	R	R	R	X	∅	6/12
E12	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E13	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E14	R	R	R	R	R	R	R	R	X	50	R	R	10/12
E15	R	6	R	10	R	7	R	4	X	11	R	12	5/12
Taux de réussite	14/14	11/14	14/14	11/14	12/14	11/14	14/14	11/14	5/14	4/14	13/14	9/14	77%

Légende :
R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
X : Prévision inexacte
A : Élève absent

La prévision concernant le nombre 5 064 est celle qui est le plus échouée. Seulement 5/14 élèves prévoient qu'il est impossible d'obtenir ce nombre. Notons que 5 064 est le seul nombre qui ne se termine pas par 34 tout en se terminant par 4. Il est difficile d'interpréter les taux de réussite élevés comme le signe de la compréhension de la transformation de l'écriture par l'ajout de 100 car les nombres proposés ne sont pas suffisamment contraignants.

En ce qui a trait au nombre de fois à appuyer sur la touche =, les taux de réussite sont élevés. Étant donné que le terme initial ne contient pas de centaine, la différence entre le nombre de centaines du nombre final et celui du terme initial est une tâche relativement aisée. (Ex. : 34 + 100 → $\underline{3}$34 ; le nombre de signes = est 3).

Quatrième groupe de tâches

Dans ce groupe de tâches, la puissance de dix est 5, ce qui vise à observer si les validations lors des groupes de tâches précédents ont permis aux élèves d'identifier quel(s) chiffre(s) ne changent pas lors d'une transformation additive avec des puissances de 10 élevées. Il s'agit en fait de généraliser une règle qui peut être dégagée des tâches des groupes précédents. Le calcul proposé est 222 222 + 100 000.

Tableau 4.14

Quatrième groupe de tâches du scénario 4

222 222 + 100 000

	922 222		333 333		333 222		1 222 222		Taux de réussite
	Oui ou non	Nbre de = (7)	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de =	Oui ou non	Nbre de = (10)	
E1	R	9	R	R	R	R	X	∅	5/8
E2	A	A	A	A	A	A	A	A	A
E3	R	9	R	R	R	R	R	12	6/8
E4	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E5	R	∅	R	R	R	R	R	12	6/8
E6	X	∅	R	R	R	R	R	R	6/8
E7	X	∅	R	R	R	R	R	12	5/8
E8	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8
E9	R	R	R	R	X	1	R	R	6/8
E10	R	8	R	R	X	1	R	11	4/8
E11	R	6	R	R	X	5	R	1	4/8
E12	R	R	R	R	X	1	R	R	6/8
E13	R	9	R	R	X	3	R	12	4/8
E14	R	9	R	R	R	R	X	∅	5/8
E15	R	10	R	11	X	12	R	13	3/8
Taux de réussite	12/14	4/14	14/14	13/14	8/14	8/14	12/14	4/14	67%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

X : Prévision inexacte

A : Élève absent

12/14 élèves reconnaissent qu'il est possible d'obtenir les nombres 922 222 et 1 222 222 et tous les élèves prévoient qu'il est impossible d'obtenir le nombre 333 333. Le taux de réussite est plus faible concernant la prévision du nombre 333 222, soit de 8/14, ce qui suggère que certains élèves ont de la difficulté à contrôler le nombre de chiffres qui ne changent pas selon la puissance de dix en jeu.

Au groupe de tâches précédent, le nombre de compteurs correspondait au nombre de centaines du nombre final. Relevant d'un effet pérenne, une erreur fréquente dans ce groupe de tâches consiste à faire correspondre le chiffre à la position des centaines de mille du nombre final au nombre de fois à appuyer sur la touche =, ne tenant pas compte du nombre de centaines de mille dans le terme initial. À titre d'exemple, quatre élèves prévoient qu'il faut 9 compteurs pour obtenir 922 222 et 12 pour obtenir 1 222 222. Les autres prévisions erronées relèvent d'une erreur lors du comptage ou de la synchronisation du comptage oral et du comptage du nombre de compteurs (C3).

Enfin, les données obtenues lors du quatrième scénario montrent que les élèves dégagent certaines régularités dans les transformations additives comprenant des puissances de 10. Cependant, en observant le dernier groupe de tâches, on constate que seulement 4 élèves prévoient avec justesse les nombres qu'il est possible d'obtenir à partir d'une addition ayant 5 comme puissance de 10. Le contrôle n'est donc pas assuré pour identifier les chiffres modifiés dans une transformation additive avec des puissances de dix qui sont élevées.

4.2.6 Scénario 5

Rappelons d'abord que les buts poursuivis au scénario 5 sont les mêmes que ceux qui étaient poursuivis lors des scénarios 3 et 4, c'est-à-dire :

- dégager les régularités des transformations additives avec des puissances de 10 autres que 1
- identifier le chiffre ou groupe de chiffres affecté par une transformation additive avec des puissances de 10

Contrairement aux scénarios précédents, nous procédons avec des sous-groupes d'élèves relativement homogènes. Nous fonctionnons avec les mêmes sous-groupes que ceux de la classe, lesquels ont été formés par leur enseignant selon leur force : élèves 2, 4 et 10 ; élèves 5, 6, 9 et 14 ; élèves 8, 12 et 13 ; élèves 3 et 7 ; élèves 1, 11 et 15. Il nous était impossible de rencontrer l'ensemble de la classe comme prévu.

Le premier groupe de tâches a comme inconnue le deuxième terme et le nombre final. La présentation de la situation laisse également plusieurs possibilités de réponses, ce qui est nouveau pour les élèves. Le deuxième groupe de tâches de ce scénario présente des égalités trouées. L'inconnue est différent d'un calcul à l'autre : nombre de départ, puissance de 10, nombre de compteurs et nombre final.

Premier groupe de tâches

Dans le premier groupe de tâches, l'élève doit trouver un nombre qu'il peut additionner à 658 pour modifier différents chiffres de ce nombre. Plusieurs réponses sont possibles. La calculette permet à l'élève de confirmer ou d'infirmer son hypothèse.

Il est à noter que nous avons procédé à quelques exercices préalables avec le sous-groupe composé des élèves 1, 11 et 15, les plus faibles de la classe. Nous leur avons demandé, à partir des égalités qui suivent, de souligner le chiffre qui change et ensuite, de faire leur prévision:

23 + ____ = 24

23 + ____ = 33

231 + ____ = 331

231 + ____ = 241

Tableau 4.15

Premier groupe de tâches du scénario 5

Consigne : Trouver un nombre qu'on peut additionner à 658 pour modifier…

	Uniquement le chiffre 5	Uniquement le chiffre 6	Uniquement le chiffre 8	Les trois chiffres	Uniquement les chiffres 6 et 8	Uniquement les chiffres 6 et 5	Uniquement les chiffres 5 et 8	Taux de réussite
E1	8	R*	R*	∅	∅	∅	∅	2/7
E2	668	3	R	R	R	R	R	5/7
E3	R	R	8	R	R	R	R	6/7
E4	R	R	R	R	R	64	R	6/7
E5	R	R	R	R	R	R	R	7/7
E6	R	R	R	R	105	R	R	6/7
E7	R	R	R	R	102	R	R	6/7
E8	2	R	2	R	R	R	R	5/7
E9	668	R	R	R	R	R	R	6/7
E10	608	R	R	R	R	R	R	6/7
E11	R*	R*	R*	R*	759	∅	∅	4/7
E12	R	R	R	150	R	1	100	4/7
E13	648	15	5	R*	708	R*	58	2/7
E14	50	R	R	R	R	R	R	6/7
E15	668	R*	R*	∅	∅	∅	∅	2/7
Taux de réussite	7/15	13/15	12/15	12/15	9/15	10/15	10/15	70%

Légende :
R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
R* : Réussi avec de l'aide
Double ligne : vérification après l'hypothèse

Pour réussir chaque tâche, il faut considérer que 9 est le plus grand chiffre possible. Il faut donc trouver un nombre composé de chiffres qui, additionné à 658, n'affecte que le ou les chiffres visés par la consigne. Par exemple, à la question « Quel nombre peut-on additionner à 658 pour modifier uniquement le chiffre 8 ? », le plus grand nombre possible est 1 puisque 8+1=9. L'erreur la plus fréquente consiste à trouver un nombre qui affecte plus de chiffres que souhaités. Les prévisions erronées concernant la tâche où les élèves doivent trouver un nombre qui permet de modifier les chiffres 6 et 8 de 658 l'illustre bien puisque trois d'entre elles contiennent un zéro à la position des dizaines : 102, 105, 708.

Par ailleurs, la première tâche est celle qui a le plus faible taux de réussite (7/15). Cinq élèves font l'erreur d'écrire le nombre recherché plutôt que d'écrire le nombre à additionner pour obtenir le nombre recherché, erreur qui est commise par un seul élève dans les tâches suivantes.

L'élève 12, lors des deux dernières tâches, semble avoir interprété la consigne à l'inverse puisqu'il propose les nombres à additionner qui n'affectent pas les chiffres identifiés. L'élève 3, lorsqu'il doit modifier plus d'un chiffre dans le nombre (4 dernières prévisions), choisit de faire plusieurs additions successives pour modifier chacun des chiffres, un à la fois. Par exemple, pour modifier les trois chiffres, il fait 100+10+1. Ce découpage selon les puissances de dix témoigne que des connaissances sur la numération de position utiles à la tâche sont mobilisées.

Les élèves 8, 13 et 14, lors de la dernière prévision, ajoutent un zéro devant leur nombre, ce qui suggère également le recours à des connaissances sur la numération de position utiles. Au lieu d'écrire par exemple 11, ils écrivent 011. Le fait d'ajouter un zéro à la position des centaines est ainsi une façon de s'assurer que le chiffre 1 à la position des dizaines dans 11 n'est pas additionné au 6 du terme initial 658.

Deuxième groupe de tâches

Le deuxième groupe de tâches est composé d'égalités trouées dont l'inconnue varie d'un calcul à l'autre.

Ce groupe de tâches n'a pas été présenté avec le sous-groupe d'élèves faibles (élèves 1, 11 et 15) considérant son niveau élevé de difficultés.

Tableau 4.16

Deuxième groupe de tâches du scénario 5

	5 869 327 + _____ = 5 869 337 (10)	69 + ___ = = = = 109 (10)	38 + 10 _________ 78 (= = = =)	____ + 100 = 922 266 (922 166)	Taux de réussite
E2	R	R	R	922 366 (T1)	3/4
E3	R	R	R	922 366 (T1)	3/4
E4	R	40 (C1)	R	R	3/4
E5	R	R	= = = (C2)	R	3/4
E6	R	R	R	R	4/4
E7	R	R	= = (C3)	822 266 (P1)	2/4
E8	R	40 (C1)	30 (C1)	R	2/4
E9	R	40 (C1)	30 (C1)	R	2/4
E10	R	40 (C1)	= = = (C2)	R	2/4
E12	R	11	R	922 366 (T1)	2/4
E13	5 809	R	R	R	3/4
E14	50 (T1)	40 (C1)	= = = (C2)	166 (S2)	0/4
Taux de réussite	10/12	6/12	6/12	7/12	60%

Légende :
R : Prévision exacte
(--) : Type d'erreur

Pour réussir la première égalité (5 869 327 + _____ = 5 869 337), il faut comparer le terme initial et le nombre final et observer les différences dans leur écriture. La majorité des élèves le font avec succès. L'élève qui répond 50 fait la somme du nombre de dizaines des deux nombres au lieu de faire la différence.

Au deuxième calcul, cinq élèves ne tiennent pas compte des quatre compteurs.

Au troisième calcul, trois élèves font l'erreur de type C2, additionnant le 10 et continuant ensuite à compter par intervalle de dix pour chaque signe = . Deux élèves font l'erreur de type C1 considérant qu'il existe un compteur (=) ; ils écrivent ainsi 30 suggérant que 38 + 10 + 30 = 78. Il faut signaler que 38 + 10 + 30 = 78 est une écriture mathématique juste alors que 38 + 10 = = = = n'est qu'une écriture transitoire qui évoque le calcul sur la calculette.

Au dernier calcul, trois élèves font une erreur de transformation (T1), recherchant la somme au lieu de rechercher le terme initial. (Ex. : 922 266 + 100 = plutôt que _____ + 100 = 922 266. Un élève fait une erreur de puissance (P1) traitant les chiffres du terme initial de gauche à droite et retranchant une centaine de mille au lieu d'une centaine. Enfin, un élève obtient 166 retranchant une centaine à 266 (de 922 266) et omet, par la suite, de rappeler les chiffres de l'ordre des milliers (922) .

Enfin, le premier groupe de tâches de ce scénario montre que la majorité des élèves observe les zéros du deuxième terme pour identifier les chiffres du terme initial qui sont modifiés par le calcul. Toutefois, certains élèves ne considèrent pas que lorsque la somme pour une même position dépasse neuf, plus d'un chiffre est alors affecté. Les résultats obtenus au deuxième groupe de tâches montrent que bon nombre d'élèves semble désormais en mesure de comparer les groupements dans le terme initial et ceux dans le nombre final pour compléter une égalité trouée.

4.2.7 Scénario 6

Le sixième scénario vise le passage d'une écriture additive des transformations à des écritures conventionnelles. Nous avons ainsi modifié la présentation de la puissance et du compteur. Deux groupes de tâches composés d'égalités trouées ont été prévues : le premier favorise une écriture de groupements pour le deuxième terme (ex. : 4 dizaines au lieu de 10 = = = =) et le second favorise une écriture chiffrée pour le deuxième terme (ex. : 40 au lieu de 10 = = = =). Nous voulons explorer ainsi le passage d'une écriture « transitoire » faisant référence à la calculette à des écritures conventionnelles.

Nous avons ajouté un groupe de tâches précédant ceux prévus dans la méthodologie afin de permettre aux élèves de faire un parallèle entre ces différentes écritures.

Premier groupe de tâches

Le premier groupe de tâches a pour but de faire constater aux élèves l'équivalence entre l'écriture additive (ex. : 10 + 10 + 10 ou, sur la calculette, 10 = = =), l'écriture multiplicative (ex. : 30, qui correspond à 3 x 10) et une écriture en terme de groupements (ex. : 3 dizaines). La correction est faite par l'expérimentateur. Ce premier groupe de tâches est une forme d'institutionnalisation car il y a une brève explication par l'expérimentateur sur l'équivalence des différentes écritures

Au départ, nous avions ajouté le signe + ou – devant les écritures, ce qui provoquait la recherche d'une réponse chez certains élèves. Nous avons donc décidé, sur le vif, d'enlever ces signes des écritures.

Nous avons relevé 5 types d'erreurs dans ce groupe de tâches. On retrouve l'erreur de type C2 qui consiste à considérer un compteur en trop et l'erreur de type P1 qui consiste à ne pas respecter la puissance qui peut, ici, être présentée par des mots tel que centaine. Les trois autres types d'erreurs n'ont pas été rencontrés précédemment. Deux types d'erreurs concernent les groupements. L'erreur codée G1 consiste à ignorer le terme de groupement (mot qui indique la puissance) et à inscrire la valeur totale du nombre. Considérer 11 comme étant équivalent à 11 dizaines en est un exemple. L'erreur codée G2 consiste à tenir compte de la position du chiffre dans un nombre au lieu du nombre de groupements. L'élève considère alors que dans 110, il y a une dizaine. Et enfin, un nouveau type d'erreur consiste à confondre le compteur et la puissance (CP), ce qui correspond à une confusion entre le multiplicateur et le multiplicante. C'est le cas d'un élève qui indique que 900 correspond à 9 = = = = = = = = = au lieu de 100 = = = = = = = = =.

Tableau 4.17
Premier groupe de tâches du scénario 6

	10 = = = = = = a) _____ b)____ dizaines	110 a) ___ = = = = = = = = = = = b)___ dizaines	100 = = = = a) _____ b)____ centaines	900 a) ___ = = = = = = = = = b)____ centaines	12 dizaines a) _____ b)10 _______	2 unités de mille a) _____ b) ______ = =	Taux de réussite
E1	a) ∅ b) ∅	a) ∅ b) ∅	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) ∅	a) R b) R	7/12
E2	a) R b) R	a) 11 (CP) b) 1 (G2)	a) 500 (C2) b) 5 (C2)	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	8/12
E3	a) ∅ b) R	a) 220 b) 1 (G2)	a) R b) R	a) 9 (CP) b) 900 (G1)	a) R b) (11) = (C2)	a) R b) R	6/12
E4	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	12/12
E5	a) R b) 60 (G1)	a) 11 (CP) b) R	a) R b) 100 (G1)	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	9/12
E6	a) R b) R	a) 11 (CP) b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	11/12
E7	a) 600 (P1) b) 60 (G1)	a) 2 010 b) 1 (G2)	a) R b) R	a) 90 (C2) b) R	a) 20 b) R	a) R b)100 (P1)	5/12
E8	a) R b) 10 (CP)	a) 11 (CP) b) 110 (G1)	a) R b) R	a) 10 (P1) b) R	a) R b) R	a) R b) R	8/12
E9	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	12/12
E10	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) 25	a) R b) R	a) 12 (G1) b) (11) = (C2)	a) R b) R	9/12
E11	a) ∅ b) ∅	a) ∅ b) ∅	a) 96 400 b) R	a) 9 (CP) b) R	a) 50 b) ∅	a) R b) R	4/12
E12	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) 90 (C2) b) R	a) R b) (11) = (C2)	a) R b) R	10/12
E13	a) 70 (C2) b) 7 (C2)	a) 1 b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	a) R b) R	9/12
E14	a) 70 (C2) b) 70 (G1, C2)	a) R b) 110 (G1)	a) R b) 400 (G1)	a) R b) 900 (G1)	a) R b) R	a) R b) R	7/12
E15	a) 30 b) 60 (G1)	a) 1 000 b) R	a) 40 b) R	a) 90 (C2) b) R	a) 121 b) R	a) R b) R	6/12
Taux de réussite	15/30	13/30	23/30	22/30	21/30	29/30	68%

Légende :
R : Prévision exacte
∅ : Aucune prévision
(x) = : x correspond au nombre de signes =
(--) : type d'erreur

Le tableau qui suit est présenté pour mettre en lumière les types d'erreurs commises selon les tâches. Il permet également de récapituler les erreurs inscrites au tableau précédent.

Tableau 4.18

Types d'erreur dans les prévisions pour le premier groupe de tâches du scénario 6

	10 = = = = = = a) _____ b)____ dizaines	110 a) ___ = = = = = = = = = = = b)___ dizaines	100 = = = = a) _____ b)____ centaines	900 a) ___ = = = = = = = = = b)____ centaines	12 dizaines a) ____ b)10 ______	2 unités de mille a) _____ b) ______ = =	Total
Réussi	15	13	23	22	21	29	123
Pas de prévision	5	4	0	0	2	0	11
C2	4	0	2	3	3	0	12
P1	1	0	0	1	0	1	3
G1	4	2	2	2	1	0	11
G2	NP	3	NP	NP	NP	NP	3
CP	1	4	NP	2	0	0	7
Autres	1	4	2	0	3	0	10

Légende :

NP: Ne s'applique pas

De façon générale, le nombre de prévisions exactes augmente au fur et à mesure de la progression de ce groupe de tâches. Il faut dire que la dernière équivalence était sans doute plus aisée à établir étant donné qu'elle ne contenait que deux compteurs. Le nombre d'élèves notant aucune prévision semble aussi avoir diminué, ce qui suggère que certains élèves, lors des deux premières tâches, se sont abstenus de noter une prévision, comprenant mal ce qu'ils devaient faire.

Le nombre d'erreurs de type C2 semblent relativement constant, et ce, pour l'ensemble de la séquence. Les trois erreurs codées P1 sont réparties dans différentes tâches. Dans la première tâche, un élève compte par intervalle de 100 au lieu de compter par intervalle de 10, obtenant ainsi 600 au lieu de 60. Lors de la quatrième tâche, en a, un élève note 10 au lieu de

100, interprétant qu'il doit inscrire une puissance de dix avant les compteurs sans contrôler, cependant, le nombre de zéros. La troisième erreur de type P1 se trouve dans la dernière tâche. C'est d'ailleurs la seule erreur qui est commise lors de cette tâche. Au lieu d'écrire que deux unités de mille correspondent à faire 1000 = = sur la calculette, l'élève inscrit 100 = =.

Onze prévisions erronées sont issues d'une erreur de type G1. La progression concernant ce type d'erreur montre que les validations ont amené certains élèves à considérer les groupements. Il est malheureusement impossible d'observer l'évolution concernant l'erreur de type G2 puisqu'une seule tâche permet de la relever. Concernant la confusion entre le nombre de compteurs et la puissance (CP), il semble y avoir eu progression puisque ce type d'erreur ne se reproduit pas lors des deux dernières tâches.

Deuxième groupe de tâches

Ce groupe de tâches a la particularité de représenter la puissance de dix par des expressions de groupements (ex. : centaine, dizaine). Rappelons qu'une erreur codée G1 signifie que l'élève ne tient pas compte des groupements.

La dernière égalité à trou, soit _____ - 5 centaines = 400, n'était pas prévue lors de la planification de la séquence. Nous avons choisi de l'ajouter en pensant que 3 égalités étaient insuffisantes.

Tableau 4.19

Deuxième groupe de tâches du scénario 6

	625 + 3 centaines = (925)	____ + 20 dizaines = 210 (10)	30 736 - ___ unités de mille = 22 736 (8)	____ - 5 centaines = 400 (900)	Taux de réussite
E1	628 (G1)	R	33	∅	1/4
E2	R	R	R	R	4/4
E3	325 (T1)	190 (G1)	7 (C3)	9 (P1)	0/4
E4	655 (P1)	190 (G1)	18 (S2)	R	1/4
E5	R	R	R	R	4/4
E6	1 025 (C3)	R	R	100 (T1)	2/4
E7	R	R	R	405 (G1)	3/4
E8	655 (P1)	R	R	R	3/4
E9	R	1 (P1)	R	R	3/4
E10	R	190 (G1)	R	R	3/4
E11	655 (P1)	230 (T1, G1)	8 000 (G1)	1001	0/4
E12	R	R	R	100 (T1)	3/4
E13	R	19	52 (T1)	990	1/4
E14	R	190 (G1)	7 (C3)	R	2/4
E15	900 (S1)	4046	22	500	0/4
Taux de réussite	8/15	7/15	8/15	7/15	50%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(--) : type d'erreur

De façon générale, l'erreur la plus souvent commise est celle de type G1. Elle est à la source de huit prévisions erronées. Ce type d'erreurs avait diminué lors du premier groupe de tâches, mais est ici réapparu. Cinq prévisions erronées sont causées par une mauvaise interprétation de la puissance qui est représentée par des groupements. Une mauvaise interprétation de la transformation est à la source de cinq prévisions inexactes dont quatre sont commises lorsque l'inconnue n'est pas le nombre final. Il y a également trois erreurs qui concernent le nombre de compteurs (C3) lesquelles sont probablement liées à une erreur de comptage.

Par ailleurs, seulement deux erreurs dans l'application d'une stratégie efficace sont commises. Lors de la première égalité, l'élève 15 compte à partir de 600 pour faciliter le comptage et omet d'ajouter les 25 unités par la suite. Lors de la troisième égalité, l'élève 4 fait la différence entre le nombre d'unités de mille du terme initial (30) et celui du nombre final (22) mais fait une erreur dans le calcul. Il procède sans doute en calculant d'abord la différence sur les premiers chiffres (3–2 = 1) et ensuite sur les deuxièmes chiffres en effectuant un emprunt (10 – 2) obtenant ainsi 18 plutôt que 8.

Troisième groupe de tâches

Ce groupe de tâches vise à favoriser le passage d'une écriture additive à une écriture multiplicative.

Tableau 4.20

Troisième groupe de tâches du scénario 6

	11 + ___ = 31 (20)	11+ ___ = = 31 (10)	111 – 10 _____ 41 (= = = = = = =)	111 - ___ = 41 (70)	1 628 + ___ = 4 628 (3 000)	Taux de réussite
E1	3	32	(4) = (C3)	∅	∅	0/5
E2	R	R	(8) = (C3)	80	R	3/5
E3	R	R	(6) = (C2)	R	R	4/5
E4	R	R	R	R	R	5/5
E5	R	R	R	R	R	5/5
E6	R	R	R	R	R	5/5
E7	10	20 (C1)	(6) = (C2)	60	4000 (S1)	0/5
E8	R	R	R	R	R	5/5
E9	R	R	(6) = (C2)	60	R	3/5
E10	R	R	(8) = (C3)	80	R	3/5
E11	12	12	(5) = (C3)	12	12	0/5
E12	42 (T1)	30	R	7 (P1)	3 (P1)	1/5
E13	42 (T1)	20 (C1)	R	7 (P1)	R	2/5
E14	R	R	R	R	R	5/5
E15	291	33	11	14	6628	0/5
Taux de réussite	9/15	9/15	7/15	6/15	10/15	55%

Légende :

R : Prévision exacte

∅ : Aucune prévision

(x) = : x correspond au nombre de signes =

(--) : type d'erreur

Lors de la première égalité à trou (11 + ____ = 31), deux élèves recherchent la somme plutôt que la transformation additive (T1). La deuxième égalité à trou (11+ ____ = = 31) est équivalente à la première. Ce sont d'ailleurs les mêmes élèves qui font des prévisions erronées.

La troisième égalité à trou (111 – 10 ______ 41) et la quatrième (111 - ____ = 41) sont équivalentes. Il est possible que certains élèves aient identifié cette équivalence: deux élèves notent 60 alors qu'ils avaient écrit 6 signes = au 3e calcul et deux élèves notent 80 alors qu'ils avaient écrit 8 signes = au 3e calcul. Par ailleurs, deux élèves écrivent 7, reprenant simplement le nombre de signes = noté au calcul précédent, lequel correspond au nombre de dizaines à retrancher.

À la dernière égalité à trou (1 628 + _____ = 4 628), un élève note 3, calculant la différence entre les chiffres des unités de mille du nombre final et du terme initial. Un autre élève inscrit 4 000, comptant à partir du terme initial ainsi : 1 628 (1 000), 2 628 (20 00), 3 628 (3 000), 4 628 (4 000).

Enfin, le deuxième groupe de tâches suggère que la majorité des élèves est en mesure de traiter des opérations avec des termes de groupements. Il arrive cependant à quelques élèves de ne pas tenir compte de ces termes. Par ailleurs, les résultats obtenus au troisième scénario montrent que la majorité des élèves ont effectué le passage d'une écriture « transitoire » faisant appel à la technique de la calculette à une écriture conventionnelle.

CHAPITRE V

INTERPRÉTATION

Nous procédons dans ce chapitre à l'interprétation des principaux résultats. La nature des prévisions, sur les calculs effectués par la calculette, se modifie tout au long de la séquence didactique en fonction non seulement des caractéristiques des tâches mais également en fonction des connaissances de plus en plus élaborées dont témoignent les élèves. L'évolution des prévisions est ainsi une fenêtre sur le parcours d'apprentissage des élèves et sur l'intérêt didactique de la situation. L'évolution des prévisions est dégagée en rappelant comment les prévisions erronées se transforment, se modifient tout au long de la séquence. Ensuite, prenant appui sur les résultats obtenus, nous discutons de la pertinence des variables didactiques et des valeurs qu'elles ont prises dans les différents scénarios. Cette discussion permettra de mieux juger de l'adéquation de la situation au savoir visé par cette séquence : la numération de position.

5.1 INTERPRÉTATION DU PARCOURS D'APPRENTISSAGE DES ÉLÈVES PAR LE BIAIS DES PRÉVISIONS RÉALISÉES

Considérant les difficultés comme le produit d'interactions didactiques et non pas seulement comme relevant de facteurs propres à l'élève, nous nous intéressons à l'ensemble de la situation pour interpréter les conduites des élèves. L'élève modifie sa conduite en fonction de ses connaissances et de l'interprétation qu'il fait de la situation. Cette interprétation est en partie commandée par les valeurs des variables et par l'expérience qu'il acquiert, progressivement au cours de la séquence, du type de tâches exploitées dans cette séquence. Par ailleurs, l'analyse des prévisions erronées que nous avons réalisée au chapitre précédent s'appuie sur les variables de la tâche.

Rappelons d'abord que les prévisions erronées peuvent concerner l'interprétation de l'opération ou l'application du calcul numérique. On retrouve trois sous catégories concernant l'interprétation qui correspondent à différentes composantes de l'opération : la transformation additive, le compteur ou encore la puissance. Les fausses prévisions liées à l'application du calcul numérique sont subdivisées en deux sous catégories : les erreurs dans le calcul oral et les erreurs dans le traitement des chiffres. Chacune de ces sous catégories est reprise pour mettre en évidence la progression de la situation telle qu'elle s'est effectivement déroulée dans cette classe.

Chaque scénario étant construit, en partie, pour contrer des stratégies élémentaires et favoriser l'élaboration d'une stratégie plus évoluée par laquelle des connaissances plus avancées sur la numération de position sont engagées, nous ne pouvons nous appuyer sur les taux de réussite pour tracer le portrait de l'évolution des connaissances. Nous avons donc choisi de procéder en tentant de dégager pour chacune des catégories de prévisions erronées, les stratégies prédominantes en les liant aux caractéristiques de la tâche et aux connaissances sur la numération qu'elles supposent. Autrement dit, nous avons choisi de repérer à travers les erreurs réalisées et analysées au chapitre précédent, les connaissances sur la numération de position susceptibles d'être engagées dans les stratégies ayant conduit à des prévisions erronées.

5.1.1 Erreurs dans l'interprétation de l'opération

La nature des fausses prévisions se rapportant à l'interprétation de l'opération est liée aux valeurs des variables propres à chacun des scénarios. Ce type d'erreurs permet difficilement de dégager la progression des connaissances des élèves sur la numération puisqu'il ne concerne pas directement les stratégies mises en œuvre par les élèves pour faire des prévisions.

La transformation additive

Lors du premier scénario, plusieurs élèves, pour trouver le résultat, font l'itération de la somme ou l'itération du premier nombre. Les élèves, en effet, font des prévisions concernant l'effet du signe = à répétition sur la calculette. Ces conduites, qui ne se représentent pas dans les scénarios suivants, sont davantage liées à l'appropriation de la tâche qu'aux connaissances sur la numération.

Dans les scénarios suivants, quelques confusions de type ajout/retrait semblent relever d'un glissement de sens qui permet ainsi aux élèves d'interpréter l'opération de manière à engager une procédure qui exige la modification d'un seul chiffre au lieu d'un groupe de chiffres. C'est le cas, entre autres, de l'opération 52 811 – 10 = = = au deuxième scénario. Une soustraction nécessite la modification de deux chiffres dans le terme initial (81) alors qu'une addition modifie uniquement le chiffre à la position des dizaines dans le terme initial (1). Au troisième scénario, il y a également glissement de sens, mais cette fois-ci de l'addition à la soustraction. Ainsi, à l'opération 28 537 + 1000 = = = = , un élève prévoit 24 537. Cette prévision permet de modifier un seul chiffre plutôt que deux comme l'exige l'addition proposée. Ce résultat montre que la soustraction n'est pas d'emblée plus difficile que l'addition. C'est davantage les caractéristiques de l'opération qui dirigent l'interprétation et la mise en œuvre du calcul de l'élève. On voit également la difficulté que pose la modification d'un groupe de chiffres dans un nombre; ce qui motive l'élaboration de situations qui confrontent les élèves à cette difficulté.

D'autres confusions ajout/retrait relèvent de l'effet pérenne des tâches précédentes. Par exemple, lors du premier groupe de tâches du scénario 3, les trois premières opérations sont des additions et la quatrième, une soustraction, ce qui a provoqué six confusions ajout/retrait. Ces confusions n'engagent pas de glissement de sens comme dans les exemples précédents. Il est difficile d'éviter de tels effets. Nous pouvons à tout le moins prendre note d'alterner le plus possible les opérations pour les limiter.

Au scénario 4, les tâches prenaient en charge la question de la transformation additive. Il n'y a donc pas de prévisions fausses associées à la transformation additive lors de ce scénario.

Aux scénarios 5 et 6, l'inconnue varie d'une tâche à l'autre. Lors d'égalités trouées, certains élèves recherchent la somme au lieu du terme manquant (ex. répondre 42 à 11+____ = 31) ou la différence au lieu du terme manquant (ex. : répondre 100 à _____ - 5 centaines = 400). Ces fausses prévisions relèvent alors de connaissances sur les relations additives partie/tout plutôt que des connaissances sur la numération de position. Il s'agit ici aussi de glissement de sens, mais sur les relations additives parties/tout. Nous n'avions pas prévu de telles erreurs au moment de l'élaboration de notre séquence. Cependant, cette erreur est bien répertoriée dans les études didactiques sur les égalités additives ou encore les problèmes additifs (Conne, 1989; Giroux et Ste-Marie, 2001). Les prévisions erronées témoignent cependant d'un engagement des connaissances sur la numération. L'élève, qui interprète l'égalité de la forme ___ *- 5 centaines = 400* par la forme *5 centaines – 400* et répond 100, ne fait pas d'erreur sur la numération de position. Est-il alors pertinent de poser ce type d'égalité aux élèves dans une séquence qui porte sur la numération de position? Nous estimons que les élèves doivent être placés devant des écritures additives dont l'inconnue varie pour justement avoir des occasions de dépasser l'obstacle que présentent des égalités dont on recherche l'un des termes plutôt que la somme ou la différence. L'élève de notre exemple a pu au moins, dans cette tâche, confronter lors de la vérification sur la calculette son interprétation. Nous ne pouvons affirmer, bien sûr, que cette seule tâche a permis de réguler ces glissements de sens. Cependant, cet exercice participe sans doute à cette régulation par l'exigence d'articuler les connaissances sur la numération et les opérations.

Le compteur

Les premières prévisions erronées concernant le compteur sont liées à l'appropriation de la tâche. Les élèves ne savent pas, au début de notre séquence, qu'appuyer plusieurs fois sur la touche = d'une calculette modifie le calcul. Leurs anticipations au premier scénario ne peuvent donc tenir compte du nombre de compteurs de l'opération. Les élèves prévoient le résultat à l'opération selon les connaissances qu'ils possèdent sur le calcul et ne considèrent ainsi qu'un seul signe =.

Lors du deuxième scénario, un élève (E8) seulement cesse de considérer les compteurs lorsque plus d'un chiffre est modifié. Le non-respect du nombre de compteurs relève alors d'une incapacité à poursuivre le dénombrement lorsque plus d'un chiffre est modifié, ce qui est lié aux connaissances sur la numération de position. Cet élève répond 34 598 à l'opération 34 578 + 10 = = = = = =. Cette erreur n'est plus réalisée dans les scénarios suivants. Ainsi, les tâches semblent lui avoir permis de développer sinon de consolider ses connaissances sur le rappel, par intervalle d'une puissance de 10, de la suite des nombres. Il est également possible que ce soit par l'articulation entre les connaissances à l'oral (comptage par 10, 100, etc.) et celles qui portent sur la numération écrite (6 dizaines à ajouter à 57 dizaines font 63 dizaines) qui ont permis à cet élève de ne plus répéter cette erreur lors des scénarios subséquents.

Dans tous les scénarios, il arrive que le nombre de compteurs ne soit pas respecté. Les raisons en sont variées et pas toujours facilement repérables. L'erreur la plus fréquente est celle de calculer avec un compteur en trop. Dans ce cas, la procédure consiste à débuter le comptage à partir du deuxième terme de l'opération comme dans l'exemple suivant. Pour 659 – 10 = = =, l'élève recule dans la suite ainsi : 659 – 10 → 649, 639 (1er compteur), 629 (2^{e} compteur), 619 (3^{e} compteur) plutôt que de reculer ainsi : 659 – 10 → 649 (1er compteur), 639 (2^{e} compteur), 629 (3^{e} compteur). Il pourrait procéder également en considérant le nombre de groupements. Dans 659, il y a 65 dizaines auxquelles on doit retirer 3 : 65 – 1 (64), 63 (1er compteur), 62 (2^{e} compteur), 61 (3^{e} compteur). Il est cependant étonnant que l'on ne rencontre pas plus souvent l'erreur inverse, c'est-à-dire, celle qui consiste à calculer avec un compteur en moins. Effectivement, cette dernière erreur serait comparable à une erreur extrêmement fréquente lorsque les élèves font le passage des stratégies de dénombrement aux stratégies de comptage pour effectuer des opérations additives. En effet, plusieurs élèves procèdent en intégrant le premier terme dans le comptage : 6 + 3→ 6 (+1), 7 (+ 2), 8 (+3). Cette erreur peut se manifester sur une longue période de temps. Il est donc étonnant qu'elle n'ait pas trouvé à se produire dans le contexte de notre situation. Une interprétation possible est que l'erreur soit effectivement réalisée, mais qu'elle soit annulée par l'erreur de considérer un compteur de trop. Voyons sur un exemple. Pour 659 – 10 = = =, l'élève pourrait intégrer 659 comme premier terme de son comptage, mais à partir de 10 : 659 – 10 → 659, 649 (1er compteur), 639 (2^{e} compteur), 629 (3^{e} compteur). Cette même procédure peut également s'appliquer en considérant le nombre de dizaines. Résumons, toutefois, qu'elle permet d'obtenir le nombre recherché en cumulant deux erreurs dans l'application du comptage qui, cependant, s'annulent. Pour vérifier notre hypothèse, il faudrait effectuer des entretiens auprès des élèves afin de recueillir des informations précises sur le traitement qu'ils mettent en œuvre. Il est aussi possible que les signes = soient une marque pour chaque déplacement et permette ainsi de bien contrôler le comptage. La présence de trois signes = serait alors un support à l'élève pour effectuer chacun des trois déplacements requis dans la suite des nombres.

Les tâches du scénario 4 sont principalement centrées sur l'identification du nombre de compteurs (le nombre qui multiplie la puissance de 10). L'analyse a révélé des taux de réussite relativement élevés. Prenons, à titre d'exemple, la dernière tâche du troisième groupe. Les élèves devaient identifier le nombre de compteurs nécessaire pour obtenir 5334 partant de 34 + 100. Neuf élèves sur 14 réussissent à identifier qu'il faut appuyer 53 fois sur la touche =. Il est évident que dans cette tâche, les élèves ne peuvent recourir à leurs connaissances sur la suite orale. Ils doivent nécessairement passer par le repérage du nombre de centaines dans 5334. La tâche la plus difficile était certes de trouver le nombre de compteurs approprié pour obtenir 1 222 222 partant de 222 222 + 100 000. Quatre élèves ont pu dégager qu'il fallait 10 compteurs mettant à profit leurs connaissances sur la numération de position. Trois élèves ont identifié 12 considérant le nombre de centaines de milles dans 1 222 222; ce qui met également à profit des connaissances sur la numération de position. On peut apprécier dans ce scénario que plusieurs élèves, bien qu'ils ne soient pas appelés à répondre à des questions conventionnelles sur la numération de position, réussissent à considérer la valeur des premiers chiffres, en terme de groupements, dans un nombre.

Considérer un seul compteur est une erreur récurrente, et ce, particulièrement lors d'égalités à trou (scénarios 5 et 6). Répondre 40 pour compléter : 69 + ____ = = = = 109 en est un exemple. Il semble que la quantité d'informations à traiter pour compléter une égalité trouée soit trop importante pour permettre à certains élèves de gérer, du même coup, plus d'un compteur. Il est à noter que cette erreur se retrouve surtout lors de la première égalité trouée.

La puissance

Tout comme les premières prévisions fausses concernant la transformation additive et le compteur, les premières erreurs de puissance relèvent également de l'appropriation de la tâche. Étant donné que la première opération était 3+1 = = =, plusieurs élèves, dans l'opération suivante, qui consiste à ajouter 10, ajoutent encore 1 à chaque compteur, faisant la prévision qu'appuyer sur la touche = a pour effet de poursuivre la suite des nombres entiers. Au cours du premier scénario, les élèves apprennent donc l'effet du signe = dans le calcul effectué avec la calculette.

Lors du deuxième scénario, il arrive que les élèves modifient le premier chiffre du terme initial (ex. : 46 822 + 10 = = = 76 822). Cette erreur est peut-être due à une perception du calcul en colonne, où le deuxième terme est aligné à gauche sous le terme initial. Cette erreur ne se produit plus dans les scénarios suivants, ce qui suggère que les validations ont permis aux élèves de rejeter cette stratégie inappropriée.

La fréquence des prévisions où la puissance n'est pas respectée est plus élevée au sixième scénario, alors que la puissance est indiquée en terme de groupement (ex. : 625 + 3 centaines = 655). Les élèves ont peut-être de la difficulté à mettre en correspondance l'écriture utilisée dans les scénarios précédents (ex. : + 100 = = =) et l'écriture introduite à ce scénario (ex. : + 3 centaines). D'abord, le nombre de signes = est remplacé par une écriture chiffrée (ex. : 3), et la puissance de 10 (ex. : 100) est exprimée sous une forme littérale (ex. : centaine); l'ordre est ainsi renversé. On exprime d'abord le facteur qui multiplie 100 (3) et ensuite la valeur de la puissance de 10 (100). Il semble que cette transformation ait déstabilisé les élèves. C'est sur une base volontaire que l'expérimentateur n'a pas spécifié cette différence aux élèves. La tâche avait pour objectif de relever les interprétations que pouvaient faire les élèves de cette écriture qu'ils avaient, d'ailleurs, déjà rencontré. Nous voulions ainsi favoriser le passage d'une écriture non conventionnelle à une écriture conventionnelle.

Notons, que dans le scénario 4, les prévisions erronées concernent principalement les compteurs et donc, peu les puissances. Certaines prévisions erronées peuvent malgré tout s'interpréter en termes de fausse interprétation sur la puissance. C'est le cas de l'élève qui, pour obtenir 134 partant de 34 + 10, propose 100 compteurs. On peut juger que l'élève a recherché la différence entre 34 et 134. Cette stratégie montre aussi que l'élève n'a pas tenu compte de la puissance de 10. Il a procédé en considérant 10 puissance 0, l'unité.

Par ailleurs, après avoir présenté des égalités avec des termes relatifs aux groupements, quelques élèves n'indiquent que le compteur. Par exemple, un élève complète l'égalité à trou suivante 1628 + _______ = 4628 en inscrivant 3, omettant d'inscrire la puissance (3000 ou 3 unités de mille). Cette erreur témoigne de connaissances sur la numération de position : l'élève observe que la différence entre le terme initial et le terme final concerne les unités de mille et trouve ensuite la différence de groupements de mille entre les deux nombres. En effet, cette erreur provient sans équivoque d'une pensée en terme de groupement.

5.1.2 Erreurs dans l'application du calcul numérique

Cette catégorie d'erreurs relève plus spécifiquement des trois grandes stratégies identifiées dans la méthodologie comme utiles à la résolution des tâches. La première stratégie, qui consiste à compter à partir du terme initial, relève nécessairement du comptage oral alors que les deux autres stratégies, qui consistent à considérer un groupe de chiffres dans le nombre, peuvent relever du comptage oral ou du traitement des chiffres.

Nous discutons ci-bas des différents types d'erreurs de prévisions selon les valeurs des variables des scénarios en rappelant sur quelles stratégies elles se fondent. L'évolution de ce type d'erreurs permet également d'observer les stratégies utilisées par les élèves et par conséquent, d'observer la progression des connaissances des élèves sur la numération de position.

Comptage oral

Rappelons que la première grande stratégie que nous avons identifiée est celle qui consiste à compter en partant du terme initial. Pour que cette stratégie soit facile d'application, il est préférable que le mot-nombre soit court et que le nombre de déplacements dans le comptage (avancer ou reculer de 10^n) comporte 5 éléments ou moins. La seconde stratégie est de compter en s'appuyant sur le ou les derniers chiffres partant de la position des unités jusqu'à la position qui correspond à la puissance de 10 indiquée dans le calcul ou encore, de s'appuyer uniquement sur le chiffre correspondant à la puissance en jeu. Cette stratégie fonctionne dans le cas de 456 + 10 = = : on dira, 66, 76 donc 476. Cependant, elle est inappropriée lorsque plus d'un chiffre est affecté. Par exemple, dans 456 + 10 = = = = = = , on compte de 56 à 116; il faut alors additionner 4 centaines et 116 pour obtenir 516.

Très peu de prévisions erronées semblent relever d'une erreur dans le comptage oral. En particulier, d'erreurs qui relèveraient de la première stratégie puisque nous avons cherché à la mettre en défaut dans le choix des valeurs des variables. Des erreurs qui concernent la deuxième stratégie sont plus fréquentes. Nous interprétons ici, les principales erreurs analysées du point de vue des connaissances qu'elles engagent.

Rappelons que nous considérons comme erreurs dans le comptage oral (S1) les erreurs qui ne peuvent être issues du non-respect du nombre de compteurs. Oublier un intervalle en comptant, par exemple, n'est pas traité ici puisque cette erreur peut aussi être attribuée au dénombrement des compteurs.

Il n'y a aucune erreur de comptage au premier scénario. Les erreurs concernaient davantage l'interprétation de l'opération puisque le but visé était la familiarisation avec la situation.

Au scénario 2, les erreurs de comptage surviennent lorsque plus d'un chiffre est modifié dans le nombre et montre alors les limites des stratégies qui s'appuient sur le comptage oral, comme nous l'avions anticipé. Par exemple, un élève, pour l'opération 52 811 – 10 = = =, passe de 52 801 à 52 $\underline{6}$91 lors du comptage, ce qui comporte l'omission d'une centaine : 811, 801, 691. Ce type d'erreur est bien connu dans le rappel décroissant de la suite des nombres chez les jeunes élèves : 61, 60, 49 (Fuson, 1991). Un rappel en ordre décroissant fluide et sans erreurs implique la coordination des connaissances sur la suite nommée et écrite des nombres (Giroux et Lemoyne, 1993).

Au scénario 3, certaines prévisions fausses témoignent d'une erreur dans l'application de la troisième stratégie. Quelques élèves semblent compter à partir du nombre de groupements du terme initial, mais commettent une erreur en modifiant l'intervalle par lequel ils comptent. Ils ajoutent d'abord un groupement à la fois et au cours du comptage, compte par intervalle de dix ou de cent. Lors de l'opération $\underline{99}9$ + 10 = = = =, par exemple, un élève obtient 1 309 en comptant à partir de 99 dizaines, ajoutant d'abord une dizaine et comptant ensuite par dix : 99, 100, 110, 120, 130, donc 130 dizaines. L'élève pense ensuite à ajouter les 9 unités dans sa réponse obtenant ainsi 1 309. Cette erreur est, selon nous, fort intéressante car elle rend compte de la possibilité qu'acquiert l'élève de considérer les groupements pour eux-mêmes, autrement dit, de considérer que les dizaines, centaines, ... se comptent comme peuvent se compter les unités. La suite n'est donc plus seulement la suite des unités, mais davatange celle des nombres; des nombres de 1 comme des nombres de 10 ou de 100, etc. Elle permet donc de compter les unités, les dizaines, les centaines, etc. On peut donc éviter de compter par intervalle de 10, de 100, ... en traitant directement le nombre de groupement. Cependant, cette nouvelle connaissance sur la suite des nombres se maîtrise progressivement et certaines erreurs manifestent son appropriation. Il en est ainsi de la suite : 99 dizaines, 100 dizaines, 110, 120, 130... 130 dizaines.

L'erreur d'un autre élève au scénario 3 témoigne d'une stratégie de comptage non prévue ; c'est une forme adaptée de la première stratégie. Il arrondit, à la valeur inférieure, le groupement affecté par l'opération (ex. : 700 pour 783 + 100 = = = ou 780 pour 783 + 10 = = =) pour faciliter le comptage. Cette stratégie exige de bien identifier le groupement de chiffres qui correspond à la puissance de 10 impliquée dans l'opération. Il omet toutefois de retranscrire les unités lors de l'écriture du terme final possiblement parce que le traitement est concentré sur le comptage. De plus, il modifie l'intervalle par lequel il compte lors de la récitation. Il obtient ainsi 1040 à l'opération 783 +100 = = = = = = = en comptant à partir de

700 par cent, et ensuite, par dix (700, 800, 900, 1000, 1010, 1020, 1030, 1040). La suite étant composée de plus de 5 nombres, il est moins surprenant que des erreurs dans le rappel de la suite soient effectuées. Il est possible que soient impliquées des erreurs dans le transcodage digital-oral. L'élève devait rappeler 1100 au lieu de 1010. Mille cent (mille + cent) est dans une relation additive tout comme l'est mille dix (mille + dix). De plus, les nombres sont composés des mêmes chiffres, ne sont inversés qu'un 0 et un 1. Deloche et Séron (1991) ont examiné les erreurs dans la dictée et l'écriture de nombres chez des personnes atteintes d'un trouble cérébral ou encore des élèves de l'école primaire. Ils ont relevé un ensemble d'erreurs qui rendent compte de l'impact des connaissances de l'oral sur la production à l'écrit. Dans notre séquence, quelques erreurs peuvent être rapportées à une telle analyse. Il s'agit cependant bien de connaissances sur la numération de position qui se mettent en forme. Notre situation permet aux élèves de mettre à l'épreuve les connaissances liées au transcodage. En effet, même si l'élève n'est pas dans une tâche de «dictée de nombres», l'évocation des mots qui composent le nombre participent à la production de l'écriture du nombre. Plus on possède de connaissances sur les nombres écrits et oraux, plus le rappel, autant à l'écrit qu'à l'oral, est facilité par la coordination des connaissances sur les deux codes des nombres (Deloche et Séron, 1991; Giroux et Lemoyne, 1993).

Au scénario 6, la prévision erronée d'un élève montre également l'utilisation d'une stratégie efficace. Tout comme l'élève précédent, il arrondit le terme initial pour faciliter le comptage, mais oublie de retranscrire les unités non traitées. Lors de l'opération 625 + 3 centaines, il obtient alors 900 en comptant à partir de 600.

Étant donné que le scénario 4 vise à forcer le recours aux stratégies qui s'appuient sur la valeur des chiffres dans le nombre, et donc en évitant de procéder par comptage oral, nous ne repérons pas de prévisions erronées dues à des erreurs de comptage oral. Ceci nous informe que le scénario 4 permet d'atteindre l'objectif visé.

Traitement des chiffres

Dans notre méthodologie, nous avions identifié comme stratégie optimale celle qui était visée par notre séquence. Elle consiste à considérer la valeur de la puissance en jeu dans la transformation et ensuite, à identifier le nombre de groupements correspondant à cette valeur dans le nombre initial. Reprenons l'exemple de 4568 + 100 = = = = = . Dans 4568, il y a 45 centaines (45 X 100), il faut ajouter 5 centaines à 45 centaines, obtenant ainsi 50 centaines. Le nombre recherché est donc 5068. Nous avons alors précisé que cette stratégie peut être adaptée pour ne considérer que le nombre de chiffres affecté par la transformation additive. Par exemple, dans 456 789 + 100 = = = = = = = , il faut ajouter 7 centaines. Considérant que le chiffre en position des centaines est 7, on peut juger que la transformation affectera non seulement 7, mais également le chiffre qui le précède (6). Nous interprétons donc les erreurs qui relèvent du traitement de chiffres pour chacun des scénarios.

Lors de la dernière tâche du premier scénario, quelques élèves commettent des erreurs dans le traitement des chiffres. Ils font subir la transformation à partir des chiffres à gauche du nombre. Par exemple, deux élèves obtiennent 4 500 lors de l'opération 15 + 1000 = = = en faisant l'itération du premier nombre. Cette dernière prévision est très intéressante du point de vue des connaissances sur la numération. En effet, elle révèle la difficulté de co-habitation des règles additive et multiplicative dans la composition d'un nombre. Dans quinze mille, le rapport entre quinze et mille est multiplicatif, c'est en effet 15 X 1000 alors que dans mille quinze (les mots ne sont qu'inversés), la relation est additive c'est en effet 1000 + 15. L'écriture 15 + 1000 sollicite, par l'ordre des deux termes, les deux règles et les confrontent. Elle met en scène d'abord le 15 et ensuite le 1000 comme dans une relation multiplicative (quinze mille) mais la relation qui les lie est additive : quinze + mille et donc mille + quinze, 1015. C'est alors tout à fait précieux que de voir cette erreur se produire chez ces élèves. Identifier 4500 comme résultat de 15 + 1000 = = = ne peut se faire qu'en connaissant la règle multiplicative de la numération, puisque 45 est ce qui répète 15 trois fois sachant que 15 est le premier terme de l'écriture additive tout comme il l'est dans le mot nombre quinze mille.

Au deuxième scénario, la modification de plus d'un chiffre dans le terme initial entraîne des erreurs dans l'application de la deuxième stratégie. Lors de l'opération 34 578+10 = = = = =, un élève inscrit 34 128 comme prévision, obtenant 12 en ajoutant 5 dizaines à 7, et modifiant par la suite 57 par 12. Cette erreur témoigne bien des limites de la deuxième stratégie telle que nous l'avions prévu. De même, un élève prévoit 34 528, obtenant également 12 par l'ajout de 5 à 7, puisqu'il ne modifie que le chiffre des dizaines (7) par le chiffre 2 de 12: 34 578 --> 34 528. Un autre élève ne modifie que le chiffre des centaines dans sa prévision : 34 578 → 34 678.

Une erreur est directement liée à l'application de la troisième stratégie qui consiste à s'appuyer sur les chiffres affectés dans le terme initial. Lors de l'opération 52 811 - 10 = = =, l'élève obtient 78, effectuant la transformation en comptant en ordre décroissant à partir de 81 de sorte à retrancher trois dizaines. Il substitue 81 pour 78 dans le nombre, mais omet d'écrire les autres chiffres qui composent le nombre.

Lors du scénario 3, bon nombre de prévisions erronées témoignent d'un travail sur un groupement de chiffres du terme initial et relèvent de l'application de la deuxième (ex. : 35 651 + 10 = = = 681). Une limite de la deuxième stratégie est révélée par l'erreur suivante : 589 876 + 10 = = =. Un élève obtient 5 898 106 comme prévision au lieu de 589 906. Il ajoute trois dizaines en comptant à partir de 7, chiffre à la position des dizaines dans le terme initial, et modifie ensuite le 7 du terme initial par la somme obtenue, soit 10. Dans ce dernier cas, l'élève ne part pas des derniers chiffres mais ne fait que traiter le chiffre à la position qui correspond à la puissance en jeu (le chiffre des dizaines). Le passage d'un nombre à deux chiffres pour une seule position marque la limite de cette stratégie.

Concernant les opérations ayant comme terme initial des nombres composés uniquement du chiffre 9, auquel une unité est ajoutée, certains élèves reconnaissent la configuration du nombre final (le chiffre 1 suivi de zéros), mais sont incapables de contrôler le nombre de zéros. Les connaissances sur la numération de position sont ici insuffisantes pour déterminer que le successeur doit comporter un chiffre de plus.

Il est difficile d'établir dans le scénario 4 les stratégies utilisées par les élèves et, par conséquent, de juger des erreurs qui relèveraient du traitement des chiffres. Cependant, comme nous l'avons précisé dans la section sur le nombre de compteurs, les réponses des élèves semblent témoigner du recours à des connaissances justes sur la numération de position.

Au scénario 5, une seule erreur est repérée dans le traitement des chiffres, laquelle relève de la deuxième stratégie. L'élève obtient alors 166 comme prévision lors de l'égalité trouée suivante : ____ + 100 = 922 266. Au scénario 6, lors de l'égalité à trou : 30 736 - ___ unités de mille = 22 736, un élève obtient 18 comme prévision, faisant la différence entre le nombre d'unités de mille du terme initial (30) et celui du nombre final (22), mais commettant une erreur dans le calcul. Il calcule sans doute la différence sur les premiers chiffres d'abord (3-2 = 1) et ensuite, sur les deuxièmes chiffres en effectuant un emprunt (10 – 2), obtenant ainsi 18 plutôt que 8. Ce ne sont donc pas les connaissances sur la numération qui sont prises en défaut.

Pour terminer, rappelons que les erreurs sont de plus en plus complexes tout à l'image des tâches que nous avons soumises aux élèves. Cela nous permet d'apprécier, de manière globale certes, la progression des connaissances sur la numération de position des élèves, en particulier sur le fait que la suite semblent se modifier, passant d'une suite de nombres permettant de compter des unités à une suite de nombres permettant de compter les dizaines, les centaines, … et donc selon les différents ordres de position dans le système décimal.

5.2 PROGRESSION DE LA VALEUR DES VARIABLES

Lors des scénarios 1, 2 et 3, les élèves devaient trouver le nombre final. Le premier scénario visait la familiarisation de la situation. Les valeurs des variables ont donc été choisies pour rendre les opérations les plus simples possibles de sorte à permettre aux élèves de se concentrer sur l'effet du signe = à répétition sur une calculette. Au deuxième scénario, toutes les opérations choisies ont le nombre 10 comme puissance. Le niveau de difficulté est plus élevé qu'au scénario précédent : on retrouve de plus grands nombres, le nombre de compteurs est parfois élevé, on retrouve des additions et des soustractions et certaines opérations exigent la transformation de plus d'un chiffre. Nous avons vu que la première stratégie, la plus élémentaire n'a pu effectivement être mise en œuvre dès le deuxième scénario. De ce point de vue, les valeurs des variables étaient adaptées. Au scénario 3, la puissance de dix varie d'une tâche à l'autre. De plus, les élèves doivent anticiper, avant chaque prévision, les chiffres qui, selon eux, sont modifiés lors de l'opération. Cette nouvelle exigence a permis, aux élèves, selon la consigne, d'attribuer un statut particulier à un chiffre ou un groupe de chiffres. Les nombres ne peuvent plus dès lors être composés d'un alignement de chiffres. Nous estimons que l'entrée des élèves dans ce type de tâches a favorisé leur introduction à la valeur d'un groupement de chiffres dans un nombre.

À partir du scénario 4, l'inconnue varie d'une tâche à l'autre. Au scénario 4, on propose des nombres finaux aux élèves et ceux-ci doivent prévoir s'il est possible d'obtenir ces derniers à partir d'une transformation additive composée d'une puissance de dix, et si oui, en appuyant combien de fois sur la touche =. Ce type de tâches diffère des autres dans la mesure où la contrainte de traiter le compteur est extrêmement forte. De plus, les stratégies qui ne reposent que sur le comptage oral ne peuvent suffire puisque les tâches impliquent des compteurs très élevés (par exemple, 40). C'est par cette caractéristique que les élèves sont conduits à favoriser une stratégie qui s'appuie sur la valeur de groupements de chiffres. Cependant, les nombres que nous avons choisis ne permettent pas bien de contrer des effets de contrat. Donnons l'exemple du troisième groupe de tâches qui porte sur 34 + 100. Les élèves doivent prévoir si on peut atteindre une liste de nombres qui leur est fourni et si oui, avec combien de compteurs. Parmi la liste, un seul nombre se termine par 4 et non par 34, ce qui laisse peu de choix de stratégies. Les élèves développent une seule stratégie qu'ils cherchent à appliquer à tous les nombres. Ils ne sont piégés qu'une seule fois. Ce type de tâches a cependant un potentiel que nous n'avons pas l'impression d'avoir épuisé ou suffisamment exploité.

Le scénario 5 est le seul où les élèves ont été rencontrés en sous-groupe. De plus, on retrouve de nouveaux inconnues dans les opérations. Le premier groupe de tâches a comme inconnue le deuxième terme et le nombre final. La présentation de la situation laisse plusieurs possibilités de réponses, ce qui est nouveau pour les élèves. Cependant, les consignes devraient être modifiées pour contraindre davantage une réflexion engageant des connaissances sur les groupements de chiffres dans un nombre. Par exemple, comment modifier uniquement les chiffres 6 et 8 dans 658 peut se faire en composant un nombre en traitant un seul chiffre à la fois : pour modifier le 6, on peut enlever 2 (4), pour modifier 8, on peut enlever 2 (6) donc 406. Cette réponse peut être trouvée sans référer à la valeur des chiffres dans le nombre.

Dans le deuxième groupe de tâches, des égalités à trou sont présentées ; l'inconnue varie alors d'une opération à l'autre. La nouvelle exigence concerne ici l'articulation des connaissances sur les relations partie/tout dans une structure additive et les connaissances sur la numération de position. Ici, les stratégies les plus économiques sont celles qui font appel au traitement de chiffres. Le choix des nombres semble approprié.

Le dernier scénario, quant à lui, vise le passage d'une écriture additive des transformations à une écriture multiplicative. Le premier groupe de tâches est animé sous forme conventionnelle en ce sens que la validation se fait par l'expérimentateur et non par la calculette et qu'il y a explication suite à chacune des tâches. Cela ouvre à une certaine forme d'institutionnalisation sur les écritures multiplicatives. Ensuite sont présentés deux groupes de tâches composés d'égalités à trou dans lesquels le symbole par lequel est donné le compteur varie. L'écriture de la puissance est présentée avec des termes de groupements lors du premier groupe de tâches (ex. : 3 dizaines) et avec des nombres sous une écriture multiplicative lors du deuxième groupe de tâches (ex. : 30). Cela permet une certaine liaison avec les tâches habituelles sur la numération de position que les élèves connaissent. Cependant, les résultats du post-test ne nous permettent pas de conclure que les élèves ont eu suffisamment d'occasions de travailler à cette liaison pour bien l'intégrer.

Enfin, la séquence possède plusieurs variables : grandeur du terme initial, valeur de la puissance, nombre de compteurs, symbole par lequel est donné le compteur (signe =, groupement, écriture multiplicative), transformation additive (ajout ou retrait sur le nombre initial) et place de l'inconnue et nombre d'inconnues dans l'opération. En observant les différents scénarios, on constate, d'une part, une évolution progressive par rapport aux valeurs des variables, ce qui permet aux élèves de s'adapter aux contraintes de chacun des scénarios et, d'autre part, une grande diversité dans le jeu des variables des scénarios, ce qui favorise différentes entrées pour accéder au savoir et permet d'éviter la lassitude de la part des élèves. Par ailleurs, lors des cinq premiers scénarios, les opérations sont présentées sous une écriture non conventionnelle qui représente les touches appuyées sur la calculette. Le dernier scénario, où une écriture conventionnelle est présentée, permet aux élèves de faire le parallèle entre les deux écritures, ce qui semble être une formule intéressante pour favoriser le réinvestissement des connaissances dans des tâches typiques.

CONCLUSION

La situation « La calculette » diffère de l'enseignement classique dans les classes d'élèves en difficulté d'apprentissage. En dévoluant le savoir à l'élève, elle le rend responsable des connaissances qu'il y investit. L'élève fait des prévisions qu'il valide lui-même à l'aide de la calculette. Ses interactions avec le milieu (la calculette agissant ici comme l'élément antagoniste à l'élève) l'entraînent à développer des stratégies de plus en plus élaborées du fait des tâches de plus en plus complexes. C'est ainsi qu'il développe de nouvelles connaissances. Cette situation ne vise pas le travail à partir des erreurs des élèves, ce qui, selon Favre, provoque un ralentissement du temps didactique. Les élèves n'ont pas à justifier leurs réponses mais plutôt à rechercher une stratégie qui permet d'arriver une réponse juste qui est validée par la calculette et non par le jugement de l'enseignant. Les groupes de tâches se succèdent rapidement de sorte à ne pas insister sur les erreurs des élèves, à les rendre actifs dans des phases de recherche et à recevoir plusieurs validations rapides qui leur permettent de bonifier leurs stratégies. Il est à noter que l'enseignant a été étonné de l'investissement de ses élèves et de leur capacité à travailler intensément aussi longtemps.

Par ailleurs, comme il a été mentionné dans le contexte théorique, certaines caractéristiques de l'enseignement de la numération dans les classes spéciales conduisent les élèves à percevoir un nombre comme une suite de chiffres et les groupements comme un ordre dans l'écriture. La situation « La calculette » vise à favoriser la coordination de différentes connaissances qui donne accès à la signification des groupements dans la numération de position. De plus, une étude menée par Bednarz et Dufour-Janvier montre que la numération est habituellement détachée de l'apprentissage des opérations et que, par conséquent, plusieurs élèves ne semblent pas faire le lien entre les opérations effectuées lors d'exercices de numération et les opérations effectuées lors d'exercices de calcul. « La calculette », au contraire, utilise les opérations pour favoriser l'apprentissage de la numération.

En ce qui a trait à la calculette, outil qui fait naître quelque controverse quant à son utilisation dans les écoles primaires, elle est utilisée comme outil de validation (rôle habituellement assumé par l'enseignant) et permet à l'élève d'obtenir une rétroaction immédiate. Elle met en confrontation les connaissances des élèves au savoir mathématique qu'elle représente. Les élèves sont amenés à interpréter les réponses numériques que fournit la calculette et à imiter, répliquer les règles qui la régissent. De plus, la calculette permet d'explorer les groupements en opérant sur des grands nombres, ce qui permet de dégager certaines règles de numération. Utiliser la calculette, qui permet un jeu didactique original sur le compteur (en tant que facteur d'une puissance de 10), nous a permis d'élaborer des activités favorables à l'apprentissage de la numération. Enfin, en plus d'être un milieu riche pour l'apprentissage de la numération, la calculette entraîne un intérêt soutenu de la part des élèves.

Limites et perspectives de la recherche

La situation «La calculette» a le mérite d'avoir permis une réelle dévolution du savoir à l'élève en favorisant l'appui sur les propriétés de la numération pour exercer des calculs mentaux. En d'autres mots, elle a favorisé la coordination entre la numération et les opérations. Elle présente cependant ses limites.

D'abord, six rencontres en trois semaines sont insuffisantes pour qu'il y ait de répercussions durables sur l'apprentissage des élèves. Augmenter les interactions élèves/milieu aurait permis de clôturer la séquence avec une institutionnalisation qui s'appuie sur l'expérience des élèves. L'institutionnalisation, comme le mentionne Brousseau, est la présentation du savoir socialement reconnu par l'enseignant, ce qui permet aux élèves d'utiliser leur connaissance sans avoir à la justifier; la connaissance devient alors une référence. Une institutionnalisation aurait donc permis aux élèves de solidifier et de valider les connaissances acquises au cours de la séquence.

De façon générale, le niveau de difficulté de la séquence était adapté à la classe dans laquelle s'est déroulée l'expérimentation. Cependant, le groupe-classe étant très hétérogène, les tâches auraient eu avantage à être plus difficiles pour certains élèves et plus simples pour d'autres. Il serait donc intéressant de modifier les variables de sorte à présenter des tâches adaptées aux différents niveaux des élèves.

Par ailleurs, les modalités d'enseignement ont été très peu variées, le travail se faisant presque exclusivement de façon individuelle. Nous croyons qu'un travail en dyade, lequel permet les échanges entre les élèves, aurait eu un effet bénéfique pour l'apprentissage. Dans le cadre de cette recherche, nous avons favorisé le travail individuel de sorte à recueillir le plus de données possible. Nous n'avons pas mentionné aux élèves qu'il devait travailler individuellement. Ils n'ont pas cherché à échanger entre eux et plusieurs cachaient même leur réponse pour éviter que d'autres copient. Il aurait également été intéressant de prévoir des moments de confrontation des prévisions entre les élèves.

Somme toute, cette recherche montre que les élèves dits en difficulté d'apprentissage peuvent s'investir dans des situations relativement complexes, qui se prolongent dans une certaine durée sans que leur motivation en soit affectée et bien au contraire! Leur plaisir évident à s'investir cognitivement et affectivement dans la situation ne fait pour nous aucun doute.

BIBLIOGRAPHIE

Archambault, J., Choinard, R. 1996. *Vers une gestion éducative de la classe*. Boucherville : Gaëtan Morin Éditeur.

Artigue, M. «Ingénierie didactique ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 9/3, 1988, p. 281-308.

Association mathématique du Québec. 1964. *Les systèmes de numération des entiers naturels*. Montréal : Copyright.

Baruk, S. 1985. *L'âge du capitaine : De l'erreur en mathématiques*. Paris : Éditions du Seuil.

Bauthier-Castaing, E. « Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques ». *Revue Française de Pédagogie*. No. 84, juillet-août-septembre 1988, p. 13-20.

Bednarz, N. Dufour-Janvier, B. « Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire ». *European Journal of Psychology of Education*. Vol. I, no. 2, 1986, p. 17-33.

Bettinger, S., Geoffroy M., Labonté A., Matteau, M.-C. 2002. *Tangram*. Saint-Laurent: Éditions du renouveau pédagogique Inc.

Blouin, P., Lemoyne, G. « L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficultés d'apprentissage: une approche didactique de la rééducation et ses effets. » *Petit x.*, no 58, 2002, p.7-23.

Bkouche, R., Rouche, N., Charlot, B. 1992. *L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques*. Paris : Armand Colin.

Boutin, G. Daneau, C. 2004. *Réussir, prévenir et contrer l'échec scolaire*. Montréal : Éditions nouvelles AMS.

Brêchet, M., Delémont. «Systèmes de numération ». *Math-école*. No.196, mars 2001, p. 3-10.

Brousseau, G. « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ». *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 7 , no. 2, 1986, p. 33-115.

Brousseau, G. 1998. *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : Éditions La pensée Sauvage.

Brousseau. G. 2001. *Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques*. Conférence Inter-Irem. Toulouse : 15-17 juin 2001.

Brunet, J.- P. 1999. *Pour une définition des difficultés d'apprentissage : du caractère déclaratif à la modalité opérationnelle.*
Tiré du site http://www.adaptationscolaire.org/themes/diap/textes_diap.htm

Butlen, D. Peltier, M.L., Pezard, M. « Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions ». *Revue Française de Pédagogie.* No. 140, 2002, p.41-52.

Cange, C. Favre, J.-M. Automne 2003. *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.* Éducation et francophonie, Volume XXXI, no 2.

Cherel, C. Giroux, J. «Intégration d'élèves en difficulté : une problématique didactique». *Revue Instantanés Mathématiques.* Volume XXXIX, 2002, p. 37-48.

Conne, F., Favre, J.-M., Giroux, J. « Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé » *Intervenir auprès des élèves qui ont des besoins particuliers.* Éditions Presses de l'Université du Québec, 2005, p. 118-141.

Conne, F. « Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne ». *Le cognitif en didactique des mathématiques.* Presses de l'Université de Montréal, 1999, p. 31-69.

Conne, F. 2001. *Pertes de contrôles et prises de contrôles dans l'interaction de connaissances : le cas de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé.* In Actes (cd-rom) de la XI ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Corps (France): ARDM.

Conne, F. (1989). Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9, no 1, p. 71-116.

Debeurme, G. Van Grunderbeeck, N. 2002. *Enseignement et difficultés d'apprentissage.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Deloche, G., Séron, X., Noel, M.P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant : la production des chiffres sous dictée. in J. Bideaud, C. Meljac, J.P. Fischer (eds) *Les chemins du nombre.* pp 303-328. Lille : Éditions Presses Universitaires de Lille.

Douady, R. Brousseau, G. 1986. *Recherches en didactiques des mathématiques.* Volume 7.2. Paris : Éditions la pensée sauvage.

Dubois, C., Fénichel, M., Pauvert, M. 1993. *Se former pour enseigner les mathématiques.* Tome 3: Numération, décimaux. Paris: Éditions Armand Colin.

ERMEL-INRP. 1995. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours moyen (CM1).* Paris: Hatier.

Favre, J.-M. « Intégrer des calculettes dans l'enseignement des mathématiques en classe spéciale : quelques idées de tâches, productions d'élèves et réflexions». *Revue Pédagogie Spécialisée*. No.1/06, à paraître.

Floris, R. « À l'école obligatoire, la calculatrice peut-elle contribuer à l'apprentissage des mathématiques? ». *Math-École*. No.215, juillet 2005, p. 19-27.

Gairin-Calvo, S. 1988. *Problèmes didactiques liés à la construction du nombre*. Acte du séminaire IDEN. Document inédit. IREM de Bordeaux.

Forget, N., Guilbault, T. 2002. *Sprint*. Laval: Éditions HRW.

Fuson, K. et Kwon, Y (1991). Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels : effets sur les premiers calculs de l'enfant in J. Bideaud, C. Meljac, J.P. Fischer (eds) *Les chemins du nombre*. pp 351-376, Lille : Éditions Presses Universitaires de Lille.

Giroux, J. « Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire ». *Langage et Mathématique : Revue des sciences de l'éducation*. Vol.30, no2, 2004, p. 561-589.

Giroux, J. « La formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire : Quel rôle peut jouer la didactique. » *Les recherches enseignées en espaces francophones, sciences en construction et enseignement universitaire*. No 2, 1999, p.159-180.

Giroux, J., Lemoyne, G. (1993). La construction des connaissances sur les codes numéraux et digitaux des nombres: un processus de coordination de connaissances multiples. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol, XIX, no 5, p.511 -535.

Giroux, J., Ste-Marie, A. (2001). The solution of compare problems among first grade students. *European Journal of Psychology of Education*. Vol, XVI, no 2, p.141-161

Guay, S., Lemay, S. 2004. *Clicmaths*. Laval: Éditions HRW.

Kamii, C. 1990. *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne: Peter Lang.

Lemoyne, G., Lessard, G. 2003. *Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants*. Éducation et francophonie. Volume XXXI, no.2. (Publication électronique).

Lemoyne, G. «Mathematics teaching from the standpoint of genetic epistemology». *Revue de l'UNESCO*. Vol. *XXVI*(1), 1996, p. 159-182.

Lyons, M., Lysons, R. 2000. *Défi*. Montréal : Chenelière/NcGraw-Hill.

Margolinas, C. 1995. *Les débats de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Mercier, A., Lemoyne, G., Rouchier. 2001. *Le génie didactique*. Bruxelles : De Boek Université.

Ministère de l'Éducation. 2001. *Programme de formation de l'école québécoise*. Bibliothèque nationale du Québec : Mono-Lino Inc.

Notaro, L., Floris, R. « L'utilisation de la calculette à l'école élémentaire : une nouvelle approche didactique pour l'enseignement de la numération ». *Math-école*. 43ième année, no 215.

Perret, J.-F. 1985. *Comprendre l'écriture des nombres*. Berne : Éditions Peter Lang SA.

Perrin-Glorian, M.-J. « Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles" ». *Recherches en didactique des mathématiques*. No. 13, 1.2, 1993, p. 5-118.

Pochon, L.O. «La saga de la calculatrice ». *Math-école*. Vol. 215, 43e année, 2005.

Rogalski, J. « Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert ». *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. Vol. 23, no. 3, 2003, p. 343-388.

Salin, M-H. 1999. *Les pratiques ostensives des enseignants*. In G. Lemoyne et F. Conne (éds), Le cognitif en didactique des mathématiques (p. 327-349). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Salin, M.-H. 2002. *Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations*. In Dorier J. L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R. & Floris R. (Eds), Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (p. 111-124). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Sarrazy, B. « Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. » *Revue française de pédagogie*. No126, 2003, p. 117-132.

Sensevy, G. 1998. *Institutions didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris : Presses Universitaires de France.

Tardif, J. « On va à l'école pour acquérir un pouvoir de compréhension et d'action ». *Vie pédagogique*. No. 11, Avril-mai 1999, p. 5-9.

Vergnaud, G. 1998. *Au fond de l'action, la conceptualisation*. In J.M. Barbier (éd), Savoirs théoriques et savoirs d'action (p.275-291). Paris : Presses Universitaires de France.

Vergnaud, G. 1994. *Apprentissages et didactiques, où en est-on?* Paris : Hachette.