UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ARRIMAGE SECONDAIRE-COLLÉGIAL
DÉMONSTRATION ET FORMALISME

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR

CLAUDIA CORRIVEAU

DÉCEMBRE 2007

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier M. Denis Tanguay de m'avoir initiée à la recherche en didactique des mathématiques. Je le remercie vivement pour sa disponibilité exceptionnelle, son soutien et ses précieux conseils. Je lui suis particulièrement reconnaissante de m'avoir aidée à préciser ma pensée et de m'avoir donné le goût de la rigueur.

Je tiens aussi à remercier les membres du Sédim (Séminaire des étudiants en didactique des mathématiques), Kalifa, Souleymane, Mireille, Christian, Alexandre et Liliane. Nos rencontres ont été si formatrices. J'aimerais particulièrement remercier Jean-François, et Izabella pour leur générosité, leur écoute et tous leurs conseils utiles.

Je suis également très reconnaissante à Mme Diane Demers pour sa précieuse collaboration, sans laquelle ce travail n'aurait pu voir le jour. Je remercie aussi les enseignants du collégial qui ont accepté de participer à la consultation décrite au chapitre I.

Finalement, merci à Jean pour son soutien, ses encouragements et ses efforts déployés pour atténuer les moments un peu moins faciles. Merci à la gentillesse de mon petit Léonard : elle m'aura permis de terminer ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Dans le cadre du présent travail, nous nous intéressons à la transition du secondaire vers le collégial, spécialement en ce qui concerne la démonstration et le formalisme. Nous avons choisi d'évaluer la complexité des tâches de démonstration soumises aux étudiants d'un cours du collégial, *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, tel qu'il a été donné au Collège de Maisonneuve à l'hiver 2006, dans le cadre du programme *DEC intégré*. Nous faisons ensuite une analyse des éléments qui peuvent constituer une préparation à ces tâches, dans le cadre des cours de mathématiques de quatrième et de cinquième secondaires.

Par l'analyse de tâches de démonstration de niveau collégial, nous dégageons plusieurs caractéristiques qui contribuent à complexifier largement la production de démonstrations. Nous relevons donc ces caractéristiques et vérifions à travers l'étude des programmes actuels et en processus d'implantation, comment les élèves sont outillés pour faire face à ces éléments de complexité. En conclusion, nous proposons des pistes de réflexions et d'interventions visant à minimiser les impacts de cette transition secondaire-collégial.

Mots clés : didactique des mathématiques, arrimage secondaire-collégial, algèbre linéaire, démonstration, formalisme.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons à l'arrimage entre le secondaire et le collégial, plus particulièrement en ce qui concerne la démonstration et le formalisme qui lui est lié. En effet, à ces niveaux (fin secondaire et cégep), les mathématiques pratiquées sont de plus en plus rigoureuses. Ainsi, la démonstration, activité centrale des mathématiques dites « expertes », et le formalisme sont de plus en plus présents et sollicités. Il semble que la démonstration représente un défi de taille pour les enseignants qui, parfois, en dépit de son importance, préfèrent la délaisser au profit de problèmes et exercices pouvant être réduits à des formules ou méthodes plus simples. Par ailleurs, plusieurs élèves et étudiants de tous les niveaux ont une attitude réfractaire à la démonstration. Cette activité leur demande une compréhension ainsi qu'une utilisation adéquate du formalisme et une certaine créativité, amenant plusieurs difficultés et obstacles.

1.2 La nécessité d'une harmonisation

Bouchamma (2002) rapporte dans un article que seulement deux tiers des étudiants reçus au collégial obtiennent leur diplôme. De plus, on y mentionne que 17% seulement des étudiants complètent leur Cégep dans les délais fixés. Les échecs scolaires du collégial ont des effets importants sur les étudiants (baisse de l'estime de soi, de la confiance en ses capacités, de la motivation, des chances d'accéder à l'université, etc.) mais aussi, il semble que l'enseignement collégial manque à sa responsabilité, qui est de hausser le taux et le niveau de scolarisation de la population. Une des nombreuses causes de ces échecs est certainement le manque d'harmonisation entre le secondaire et le collégial.

On peut lire dans le programme de *Mathématique 536*, en vigueur depuis 1998 et qui le restera au moins jusqu'en 2009, que :

> L'élève qui suit ce cours poursuivra probablement des études supérieures ; il faut donc lui assurer une préparation appropriée en relevant graduellement le niveau de traitement de la mathématique (MEQ, 1998, p. 16).

Il est connu que toutes formes de transitions scolaires apportent une part considérable de modifications tant au niveau de l'enseignement et des contenus, que des attentes envers les élèves et les étudiants. Au Québec, quelques études, menées entre les années 1988 et 1991 par le *Conseil des collèges* et le *Conseil supérieur de l'éducation*, mettent de l'avant l'importance d'une liaison efficace entre les niveaux secondaire et collégial et reprochent le manque de concertation entre ces deux ordres d'enseignement. On impute le problème d'harmonisation aux nombreuses réformes faites unilatéralement au niveau secondaire. La plupart des études recommandent aux différents ordres, du primaire à l'université, d'avoir une vision globale du système éducatif, surtout lorsqu'il est question de réforme. Nécessairement, une réforme de l'un de ces niveaux d'enseignement a des répercussions sur tous les autres paliers du système.

Si ces quelques études portent sur le passage du secondaire au collégial en général, on retrouve très peu de recherches spécifiques sur cette transition en mathématique. L'Association Mathématique du Québec (AMQ) présentait, en 1991, l'impact de deux réformes du secondaire sur l'enseignement des mathématiques au collégial.

À la fin des années soixante-dix, à la suite de la première réforme, la géométrie déductive a été délaissée pour donner plus de place à la géométrie descriptive et d'observation. La démonstration occupe désormais une place mineure au secondaire. « Sans étude d'impact, l'ordre collégial a dû s'adapter à ce changement considérable dont les effets sur le raisonnement déductif ont été désastreux (et le sont encore). Ainsi, les clientèles issues de cette réforme ont des difficultés importantes sur le plan de la pensée formelle et du raisonnement mathématique » (AMQ 1991, p. 5 – 5). Alors que les enseignants croyaient que la situation s'améliorerait avec la deuxième réforme de 1983, ils s'aperçoivent, au contraire, qu'il s'ajoute d'autres difficultés et qu'entre autres, il y a détérioration de la formation en algèbre.

Il nous semble que les préalables mathématiques jouent, à tort, un rôle de filtrage plutôt qu'un rôle de préparation. Interpellés par les questions d'arrimage secondaire-collégial, nous avons voulu connaître, dans le cadre d'un projet de fin de formation au *Baccalauréat en enseignement au secondaire* (concentration mathématique), ce qui était fait mathématiquement après le secondaire et quelles étaient les difficultés des étudiants du collégial. Plus précisément, nous cherchions comment aménager le cours *Mathématique 536* en vue de mieux préparer les élèves aux cours de mathématiques du Cégep et notamment, aux exigences de formalisme accrues dans ces cours.

Pour mettre en évidence ce qui semblait plus important, nous avons contacté des professeurs du cégep pour connaître leurs attentes envers les élèves arrivant du secondaire. Nous avons élaboré un questionnaire comprenant 10 questions et avons proposé à une soixantaine d'enseignants du collégial d'y répondre par écrit ou par entrevue. Dix enseignants ont répondu. Un premier compte-rendu de cette enquête est paru dans Corriveau et Parenteau (2005). De ce projet, nous présentons ici quelques éléments significatifs.

1.3 Rencontre avec des enseignants du collégial

La question 3 du questionnaire proposé allait comme suit : « Quelles difficultés (mathématiques, non organisationnelles) rencontrent les étudiants au début de leur apprentissage ? »

L'extrait suivant est tiré d'une entrevue avec un des répondants :

> *L'enseignant veut justifier tout ce qu'il fait au tableau mais les étudiants ne comprennent pas pourquoi ça doit être fait. Faire une preuve, c'est l'enfer ! Il faut arriver rapidement à une finalité en disant à quoi ça sert.* [...] *Ils n'ont pas le sens de la preuve : pourquoi raisonner en mathématiques ?* [...] *L'algèbre est un gros obstacle. Par exemple, la factorisation, la mise en évidence, le produit de racines carrées...*

Un autre écrit :

> *L'arrivée au collégial est souvent un choc. Le rythme est plus rapide qu'au secondaire, les sujets sont fortement dépendants les uns des autres, surtout en calcul. Ce qui constituait un exercice en soi au secondaire (une décomposition en facteurs par exemple) devient une simple étape dans la résolution d'un problème plus complexe au collégial.* [...] *En algèbre linéaire, à un certain point du cours, le niveau d'abstraction augmente brusquement. Il faut avoir du métier pour préparer de longue main ces passages difficiles pour les élèves, mais même dans ces conditions, l'expérience peut s'avérer difficile et frustrante, pour les étudiants et le professeur !*

En effet, le « choc » du passage du secondaire au collégial est véritable pour les étudiants mais aussi pour les enseignants. Alors que les enseignants s'attendent à ce que leurs étudiants comprennent les mathématiques vues au secondaire, ils s'aperçoivent que ceux-ci utilisent des modèles fournis, pas toujours consciemment, par les enseignants du secondaire. Aussi, au secondaire, on tente de maintenir la mission d'une école polyvalente axée sur le développement selon les intérêts personnels des élèves en offrant un large éventail de notions. Au collégial, on reproche à l'enseignement secondaire de s'éparpiller et d'aborder trop de concepts, sans approfondir la compréhension des concepts de base. Un troisième parmi les enseignants qui ont répondu ajoute à cet effet que :

> [Les étudiants] *ne savent ni lire ni écrire.* [Ils sont] *incapables de reproduire correctement une définition ou une preuve, aussi simple soit-elle. Insécurité à réfléchir au-delà des automatismes et de l'exécution de tâches; certains refusent le changement de perspective passant de l'opératoire au conceptuel. Leurs manipulations symboliques respectent rarement la syntaxe mathématique. Les simplifications algébriques sont souvent erronées. Ils ont retenu des formules fausses, en particulier pour les fonctions trigonométriques. Manque de rigueur intellectuelle; plusieurs n'ont appris qu'à exécuter des calculs sans réfléchir.*

Un quatrième nous écrit :

> *En général, ils ne savent pas lire des textes et des problèmes. Ils ne savent pas rédiger des solutions (incorporer des maths dans des textes ou du texte dans une démarche de maths).*

Finalement, un enseignant interviewé fait la liste des difficultés rencontrées par les étudiants :

- *Organisation et formalisation des preuves : il est difficile de savoir si les difficultés sont d'ordre organisationnel ou d'ordre mathématique;*
- *Les manipulations algébriques (fractions rationnelles, exposants, factorisation);*
- *Bien conduire un raisonnement;*
- *Fonctions exponentielles, logarithmiques;*
- *Notion de fonction inverse;*
- *Modéliser des problèmes discursifs.*

Nous demandions, à la question 5 du questionnaire, si le programme de Mathématique 536 prépare bien les élèves à faire des mathématiques de niveau collégial. Plusieurs enseignants ne connaissent pas le programme et ne peuvent répondre à la question. Ceux qui le connaissent s'entendent pour dire qu'en théorie, il prépare aux mathématiques de niveau collégial mais qu'en pratique, il en est tout autrement :

> [...] *malgré ce qu'on y lit, il semble que les étudiants n'aient pas acquis la capacité de construire ou de reproduire des preuves.*

Voici ce que ce même enseignant recommande aux enseignants du secondaire (question 6) :

> *L'analyse, la preuve, la construction des objets mathématiques (leur insight), la rigueur intellectuelle. Capacité d'exprimer correctement les nuances. Vision globale d'un processus et la justification de ses étapes; développement de l'intuition et de la compréhension.*
> *Maîtrise du niveau opératoire et exactitude du symbolisme. Souplesse de conversion entre les registres de représentation: discursive, symbolique, graphique, ...*

À la Question 8, « Avec quels concepts abordés les étudiants ont-ils plus de difficulté ? », un des enseignants interviewés répond entre autres :

> *LA PREUVE. La justification du recours aux preuves. La limite (mais ça dépend de l'approche qu'on lui donne...).*

Parmi les réponses écrites, on trouve :

> *L'algèbre et le raisonnement logique.*

Ou encore cette autre :

> *La manipulation de fractions, la manipulation et la simplification d'expressions algébriques. Aussi, les rudiments de la théorie des ensembles (les diagrammes de Venn, les opérations $\cap$ et $\cup$ ainsi que le symbolisme $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subset$, $\emptyset$).*

Pour finir, nous reproduisons quatre extraits de réponses à la Question 10 : « Sachant qu'un nouveau programme d'études est en rédaction pour le deuxième cycle du secondaire, avez-vous des recommandations à faire ? »

> *À mon humble avis, le programme actuel est trop diversifié. On pourrait par exemple, ne pas aborder les statistiques descriptives en 536. On a l'impression que le temps accordé à chaque thème est insuffisant pour permettre une assimilation plus profonde. On aurait intérêt à toucher moins de sujets, moins de notions et se consacrer davantage aux habiletés opératoires essentielles.*

> *...faire l'algèbre correctement et plus de géométrie.*

> *«Drill» pour l'algèbre de base, outils nouveaux pour montrer les mathématiques en action pour accrocher les élèves, l'autonomie (lire et comprendre un paragraphe), discuter de leur lecture, apprendre à lire et formalisme mathématique.*

> *Valoriser l'effort intellectuel! Prendre le temps de comprendre l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la logique, ... : UTILISER LA CALCULATRICE LE MOINS POSSIBLE! Il faut que l'étudiant soit autonome dans sa réflexion intellectuelle avant d'utiliser la technologie : sinon il devient vite dépendant de celle-ci et comme on le constate couramment, celle-ci sert alors à masquer temporairement l'ignorance et*

> *l'incompréhension de l'étudiant.* [...] *Réintroduire la théorie naïve des ensembles : elle est préalable à la théorie des probabilités abordée au secondaire! Que l'étudiant apprenne à reproduire des preuves mais aussi à en construire de nouvelles (par exemple dans des problèmes de construction en géométrie).*

La synthèse de ce travail nous amène à penser que les professeurs de Cégep évaluent la préparation des élèves du secondaire comme lacunaire. En général, le manque de contrôle et la perte de sens sont évoqués par les professeurs. Il semble que les étudiants ne savent ni lire ni écrire en mathématiques et qu'ils ne réfléchissent pas aux manipulations qu'ils effectuent. Toutes les formes de manipulations et de traitement du symbolisme entraînent des erreurs. D'une manière plus précise, les lacunes qui ressortent dans les cours de calcul différentiel et intégral du collégial sont à l'effet qu'il y a déficience en ce qui a trait aux manipulations algébriques, aux notions de composition de fonctions et de fonction réciproque. En algèbre linéaire, ce qui a trait au formalisme, aux démonstrations, à la rigueur, aux rudiments de la théorie des ensembles et de la logique propositionnelle est source de difficultés.

Il semble donc que les difficultés reliées à la démonstration et au formalisme soient prépondérantes dans le cours d'Algèbre linéaire et de géométrie vectorielle. C'est effectivement le cours de mathématique du Cégep le plus susceptible de mettre en œuvre la démonstration. Tanguay (2003) relève en effet que parmi les éléments de contenu où il est possible de retrouver des démonstrations dans les cours au Cégep, c'est celui d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle qui offre le plus de possibilités :

> Dans le cours NYC [sigle du cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*] (ancien 105) :
> - Arguments calculatoires (qui demandent cependant une bonne maîtrise des sommations et indices) en algèbre matricielle et théorie des déterminants ;
> - Preuves géométriques avec les vecteurs : se ramènent la plupart du temps à une astuce de calcul ;
> - Éléments de visualisation combinés à des preuves calculatoires, dans la justification des formules de distances et d'angles (entre deux plans, une droite et un plan, etc.) ;
> - En théorie des espaces vectoriels abstraits, quelques preuves ou une certaine maîtrise de logique propositionnelle est requise, et où le rôle des définitions est mis de l'avant : sous-ensembles versus sous-espaces, équivalence des deux définitions de l'indépendance linéaire, « si B est une base, alors tout vecteur admet des coordonnées selon B uniques », etc. (op. cit., pp. 84-85).

1.4 Buts de la recherche

Dans le cadre du présent projet de recherche, nous avons comme préoccupation centrale d'évaluer la complexité de ce qui est sollicité concernant le raisonnement déductif, dans les tâches que l'on donne aux étudiants dans le cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle. Nous nous demandons aussi en quoi ces tâches, c'est-à-dire les exercices, les devoirs et les examens, donnent lieu à la mise en œuvre de la démonstration mathématique. Ensuite, nous faisons une analyse des éléments qui pourraient constituer une préparation à ces tâches, dans le cadre des préalables, soit les cours de mathématique de quatrième et de cinquième secondaires.

Outre notre préoccupation de mieux comprendre, d'un point de vue mathématique, les défis d'harmonisation entre le secondaire et le collégial, nous espérons être en mesure de suggérer des pistes afin de minimiser les impacts de cette transition du point de vue du formalisme et de la démonstration. Selon nous, cette recherche peut répondre à des objectifs tels que donner aux enseignants des moyens d'évaluer la complexité des tâches soumises aux étudiants et les moyens d'aménager et améliorer ces tâches pour que la transition soit moins abrupte.

Nous croyons que le niveau collégial est très intéressant pour un chercheur en didactique des mathématiques. Sachant que les étudiants ont un bagage mathématique important et dès lors, une familiarité avec l'activité mathématique scolaire, il nous semble important de mettre en lumière en quoi ce bagage leur permet de mieux faire les mathématiques du collégial mais aussi, en quoi il peut nuire. Comme le mentionne Robert (1998, p. 141), il devient signifiant pour le chercheur de « concevoir des scénarios compatibles avec les diverses hypothèses, les contraintes, les spécificités (en matière de contenus, de public, d'institution) » de ce niveau.

Quatre autres chapitres composent le texte. Le chapitre suivant (chapitre 2) est composé des éléments théoriques qui ont été retenus pour mener cette recherche. D'abord, nous nous intéressons aux travaux de didacticiens des mathématiques portant sur les transitions inter-ordres. Nous chercherons ensuite à comprendre la structure du raisonnement déductif avec les travaux de Duval et de Tanguay. Nous relèverons ensuite, à partir des travaux de plusieurs chercheurs, les difficultés et obstacles que rencontrent les élèves et étudiants en contexte de démonstration. Finalement, nous faisons état de ce qui a été écrit, principalement par Dorier, sur l'obstacle du formalisme en algèbre linéaire. Nous allons ainsi tenter de déterminer les causes des difficultés des élèves lors de l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Le troisième chapitre met de l'avant la démarche retenue pour la mise en œuvre de cette recherche. Elle décrit donc la méthodologie de la recherche. Le quatrième chapitre est l'analyse des tâches données aux étudiants du cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle, donné au Collège de Maisonneuve à l'hiver 2006. Il s'agit du cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* du programme *DEC intégré*. Celui-ci offre une formation en sciences, lettres et arts permettant aux étudiants de poursuivre leurs études dans presque n'importe quel domaine à l'université. Nous discuterons au début du chapitre trois des raisons qui nous ont fait retenir ce cours pour l'analyse.

Le cinquième chapitre présente l'analyse de la préparation des étudiants face à ces tâches dans les programmes du secondaire. Finalement, nous présenterons, au chapitre six, les conclusions générales de cette recherche.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

2.1 Arrimage secondaire-collégial

Il semble que les ruptures entre les différents cycles scolaires soient présentes à tous les niveaux : primaire-secondaire, secondaire-collégial et collégial-universitaire. Au Québec, les mathématiques faites au collégial ressemblent de plus en plus aux mathématiques faites à l'université ou à celles faites par les mathématiciens. D'abord, contrairement au secondaire, où les cours de mathématiques sont généraux (le même professeur enseigne au même niveau l'algèbre, la géométrie, la statistiques...), les cours dispensés au collégial sont spécialisés comme à l'université. De plus, comme dans la *pratique experte* (dont nous cherchons à cerner les caractéristiques ci-dessous), un nombre important de connaissances préalables est nécessaire pour pouvoir être fonctionnel. Dans un article de 1998, la didacticienne française A. Robert cherche à procurer aux chercheurs les moyens de faire des analyses conformes aux particularités des mathématiques plus avancées.

2.1.1 Nouvelles pratiques attendues

Robert (1998) tente d'identifier les spécificité et complexité des mathématiques du lycée et des premières années d'université (15 à 19 ans), ce qui correspond environ aux mathématiques faites au Cégep et dans les premières années d'université au Québec. En plus des exigences d'ordre organisationnel, de travail personnel et d'autonomie, la transition du secondaire vers le post-secondaire s'accompagne d'une exigence accrue en ce qui a trait à la rigueur mathématique.[1]

L'auteure qualifie « d'expertes » ces pratiques mathématiques, dont les exigences en matière de démonstration et de formalisation s'accroissent et se complexifient. Les pratiques expertes se réfèrent en partie aux pratiques réelles des mathématiciens qui, souvent, sont une référence importante pour les enseignants.

Dans les nouvelles pratiques attendues de la part des étudiants, Robert (op. cit., section I) repère entre autres les éléments de complexité que nous énumérons ci-dessous. Ses exemples sont le plus souvent puisés au domaine de l'analyse. Nous avons choisi les nôtres en algèbre linéaire.

1. *Des types de problèmes jamais rencontrés jusqu'alors.*

Il s'agit de problèmes qui sont inhabituels pour les étudiants, par exemple, des problèmes dont le degré de décontextualisation et de généralité est nettement supérieur à ce que les étudiants ont rencontré jusqu'alors. Par exemple, montrer que le produit de Lie (défini pour deux matrices carrées A et B de même format comme la matrice $AB–BA$) n'est pas associatif.

2. *Pluralité d'arguments à faire intervenir concurremment pour un problème donné.*

Dans une démonstration ou dans un problème, il peut être difficile de distinguer les résultats à invoquer, d'autant plus quand il y a plusieurs résultats à faire intervenir en même temps. Par exemple, pour déterminer le volume d'un tétraèdre dont les coordonnées des sommets sont connues, on doit faire le lien entre le tétraèdre et le parallélépipède (de même hauteur, dont l'aire de la base est double de celle du tétraèdre) engendré par trois vecteurs bien choisis, entre les sommets donnés et ces vecteurs, entre le volume de ce parallélépipède et le produit mixte des trois vecteurs ou encore, le déterminant de la matrice construite sur ces trois vecteurs.

[1] Ces « nouvelles pratiques » se présentent parfois à l'intérieur d'un cycle, mais selon nous, la rupture est plus nette et généralisable du secondaire au collégial, entre autres parce les enseignants n'ont pas la même formation, ni la même façon d'envisager leur enseignement. D'autant plus que les enseignants du collégial savent que leurs étudiants ont fait le choix d'une formation scientifique.

3. *Arguments à appliquer à répétition...*

Par exemple quand, pour étudier le signe d'un discriminant (variable), il faut utiliser un autre discriminant. Il peut aussi arriver que des types de raisonnements analogues soient utilisés sur des connaissances différentes.

4. *Sélection d'information. Théorème à appliquer « en partie » seulement.*

Un résultat peut être invoqué partiellement dans la résolution d'un problème ou en démonstration. Par exemple, déduire de la valeur du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5. *Changements (à la charge de l'élève-étudiant) de cadre, de registre de représentations, de point de vue, d'angle d'attaque.*

Robert mentionne que ce procédé est souvent introduit implicitement dans l'enseignement. Il s'agit de traduire l'énoncé donné en une nouvelle expression qui, une fois démontrée, démontre l'énoncé initial. Ce sera le cas par exemple quand on demande de déterminer la position relative de trois plans dans l'espace, ce qui nécessite le passage du cadre de la géométrie vectorielle au cadre des systèmes d'équations linéaires. Autre exemple : on peut avoir à établir que A, B et C sont alignés en « réinterprétant » l'énoncé comme $C \in AB$ ou encore, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont multiples scalaires l'un de l'autre, etc.

6. *Quantifications implicites à repérer, à prendre en compte...*

Il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser les quantificateurs pour exploiter une définition. Parfois, l'utilisation du langage courant pour exprimer une quantification (toutes les matrices ... ou il existe une matrice pour laquelle...) ne permet pas à l'étudiant de bien décoder cette quantification et l'amène à interpréter certains énoncés liés de façon erronée. On sait par exemple que le produit matriciel est non commutatif. Certains étudiants interpréteront cet énoncé en disant que pour toute paire de matrices A et B, le produit AB n'est *jamais* égal à BA.

En plus d'intégrer la nouvelle matière, d'utiliser adéquatement leurs connaissances antérieures, on s'attend aussi à ce que les étudiants adoptent ces nouvelles pratiques.

2.2 Le raisonnement hypothético-déductif

Le point d'appui de la science en général est d'induire des lois à partir de constatations empiriquement relevées. En ce sens, les mathématiques se distinguent des autres sciences puisque qu'elles reposent principalement sur le raisonnement non pas inductif mais déductif. La déduction révèle des lois et principes parfois obscurs à l'intuition, mais dont la portée est considérable.

Malgré son importance, il semble que la déduction et la démonstration soient facilement un défi de taille pour les enseignants, qui trop souvent préfèrent la délaisser au profit de problèmes et exercices pouvant être réduits à des algorithmes simples. Également, beaucoup d'enseignants demandent aux élèves ou étudiants de conjecturer (processus cognitif qui relève de l'induction) mais délaissent tout processus de validation de nature déductive. Sans être démontrées, ces conjectures n'ont alors qu'un intérêt limité, du point de vue mathématique.

Même au niveau collégial, plusieurs étudiants sont réfractaires à la démonstration, qui demande une compréhension et une utilisation adéquate du formalisme et une certaine créativité, amenant ainsi plusieurs difficultés et obstacles. Il est étonnant de constater que même à des niveaux supérieurs, il est difficile pour les étudiants de mener un raisonnement logique. Epp (2003) écrit :

> Il semble que mes étudiants vivent dans un monde logique et linguistique différent du mien, un monde dans lequel il devient difficile pour eux de s'engager dans une pensée mathématique abstraite, une pensée mathématique abstraite que j'essaie de les aider à comprendre.[2] (p. 886, traduction libre).

---

[2] *My students seemed to live in a different logical and linguistic world from the one I inhabited, a world that made it very difficult for them to engage in the kind of abstract mathematical thinking I was trying to help them to learn.* (p. 886)

En effet, à l'école, en mathématiques, il faut vite arriver à ses fins, à des résultats et par conséquent, le raisonnement est trop souvent mis de côté. Pour fonctionner, les élèves et étudiants se construisent eux-mêmes un raisonnement qui peut leur paraître logique mais qui, mathématiquement, ne l'est pas ou comporte des failles.

2.2.1 Mise au point terminologique

Selon Balacheff (1982), les mots *preuve*, *démonstration*, *explication* et *raisonnement* sont souvent utilisés comme synonymes dans l'enseignement des mathématiques. Pour cette raison, il semble approprié de clarifier le vocabulaire avant de déterminer les éléments susceptibles de nous intéresser.

Balacheff établit qu'un *raisonnement* est l'activité intellectuelle servant à « produire de nouvelles informations » à partir de ce qui est connu.

L'*explication* est un propos rendant accessible la valeur de vérité d'un énoncé sans qu'on ait à statuer sur les critères d'acceptabilité des éléments de l'explication. Lorsque l'explication est acceptable pour une communauté, alors elle devient une *preuve*. Plus précisément, Balacheff (1987, p. 148) définit la preuve comme « ... une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut-être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs. »

Pour Balacheff et pour Duval, les *démonstrations* constituent une classe particulière de preuves. La démonstration enchaîne une suite de propositions acceptées par la communauté des mathématiciens. L'enchaînement se fait par juxtaposition de pas de déduction, dont la validité est assurée selon qu'ils suivent les règles de la logique propositionnelle.

Pour Duval, toute preuve qui n'est pas une démonstration est une *argumentation.* Tanguay (2005b, p. 58) précise : « L'argumentation consiste en un discours, dans lequel les propositions ne sont organisées que par cumul et interviennent essentiellement pour leur contenu. »

2.2.2 La structure de la démonstration

Selon Duval (1991), la compréhension du fonctionnement du raisonnement déductif apparaît nécessaire à l'activité de démonstration. En effet, la démonstration peut être confondue avec l'argumentation, mais Duval affirme que la démonstration et l'argumentation ne partagent pas les mêmes particularités. Voyons les distinctions qu'il expose par l'analyse cognitive de ces types de raisonnement.

Duval soulève les différences entre la démonstration et l'argumentation dans le cadre de deux types de passage, soit le passage *inférence* et le passage *enchaînement.*

Le passage *inférence*

Il entend par passage *inférence*, le passage d'une ou plusieurs propositions d'entrée, les prémisses, vers une proposition de sortie, la conclusion. Ce passage est justifié par une règle dite « règle d'inférence ». Autrement dit, il existe trois statuts opératoires possibles pour chaque proposition d'une inférence : les prémisses, la règle d'inférence et la conclusion. La combinaison des trois types de propositions de l'inférence est appelée « *pas de déduction* ». Ce qui caractérise le *pas de déduction* est que le statut opératoire des propositions en cause est indépendant de leur contenu sémantique. En effet, une même proposition pourra être, par exemple, la conclusion d'un *pas de déduction* ou encore, une prémisse pour une inférence ultérieure (le plus souvent l'inférence suivante). Duval juge qu'il s'agit d'une différence importante avec l'argumentation. Le « contenu sémantique des propositions » est essentiel dans l'argumentation alors que c'est le statut opératoire de la proposition qui est considéré dans le *pas de déduction.*

Le passage *enchaînement*

Duval mentionne que la démonstration ne s'arrête généralement pas à un seul *pas de déduction* mais peut en compter plusieurs. Pour que se déroule le raisonnement déductif, il y a ce que Duval appelle le ***recyclage*** de la conclusion d'une inférence antérieure en une prémisse pour un pas de déduction ultérieur. L'enchaînement se fait alors par la répétition, implicite ou explicite, de la conclusion. En effet, « il faut que la conclusion du premier pas soit la condition d'application de la règle d'inférence du second » (op. cit., p. 239). En ce sens, la structure du raisonnement déductif ne s'articule nullement à l'aide de connecteurs logiques comme dans le cas de l'argumentation. Dans l'argumentation, les connecteurs logiques (et, ou, mais donc, si. ... alors, etc.) ont un rôle structurel puisque ce sont eux qui indiquent si la proposition qu'ils amènent consolide ou conteste l'argument précédent. Duval mentionne cependant que les connecteurs logiques peuvent être utilisés dans un pas de déduction pour « marquer le statut opératoire des propositions ». Ils n'ont pas de rôle structurel mais facilite la distinction du statut d'une proposition donnée (Duval 1992-93).

2.2.3 Difficultés des étudiants lors de l'apprentissage de la démonstration

Tanguay (2005b) rapporte que les fondements de la principale thèse de Duval, en ce qui a trait à l'apprentissage de la démonstration, reposent sur le fait que les élèves ne comprennent pas d'emblée les exigences propres à la démonstration. Selon ces deux auteurs, les élèves ont tendance à traiter les démonstrations comme des argumentations. Une première cause de cette confusion est, selon Tanguay, l'implicite structure ternaire de l'inférence. Il est rare dans la rédaction d'une démonstration qu'on retrouve explicitement toutes les règles d'inférence invoquées. Tanguay (2005b, p. 58) ajoute :

> Même quand la structure de l'inférence est explicite, c'est ce que Duval (1995, p. 244) appelle *l'utilisation algorithmique de l'énoncé-tiers* — la vérification que les prémisses réunissent toutes les conditions d'application de la règle pour que se détache la proposition inférée — qui est relégué à l'implicite par les contraintes rédactionnelles. Le caractère opératoire des liens entre prémisses, énoncé-tiers [règles d'inférence] et conclusion reste alors masqué pour l'élève. Celui-ci ne perçoit que des relations symétriques de proximité sémantique, entre les arguments retenus pour leur pertinence, leur vérité et leur communauté thématique.

De plus, le travail qu'exige une démonstration est une autre raison d'être de la confusion des élèves. Démontrer n'est pas un travail linéaire. Cela demande des moments de réflexion, des retours en arrière qui sont difficiles (voire impossible quand la démonstration est complexe) à l'oral, et nécessitent donc un travail essentiellement axé sur l'écrit (Duval, 2001).

La compréhension de ce qu'est le raisonnement déductif ne peut pas se limiter à une connaissance des théorèmes et définitions. Les étudiants doivent bien connaître conceptuellement les objets sur lesquels ils travaillent, ils doivent comprendre les relations entre ces objets et les propositions les impliquant et, finalement, ils doivent articuler leur discours selon les démarches du raisonnement.

Un obstacle que rencontrent les étudiants avec la démonstration est certainement causé par la conception qu'ils en ont. Effectivement, ils n'ont pas une conception précise de ce qui constitue une preuve mathématique. En effet, Weber (2001) mentionne que plusieurs étudiants, même à un niveau avancé, croient qu'un ou plusieurs exemples numériques sont suffisants pour valider un théorème ou une proposition. Nous croyons cependant que les étudiants sont conscients qu'un ou plusieurs exemples ne constituent pas une démonstration valide. Plutôt que de ne pas répondre à une question de démonstration, ils choisiront de présenter quelques exemples pour montrer qu'ils comprennent l'énoncé à démontrer. Weber ajoute que d'autres étudiants croient qu'une démonstration sera valide seulement si elle est présentée sous un format bien précis, ce que plusieurs chercheurs (par exemple Harel et Sowder, 1998) appelle la conception « ritualiste » de la preuve. Dreyfus (1999) rapporte que les conceptions des élèves et étudiants concernant la démonstration sont limitées et uniformes puisque la plupart d'entre eux ne savent pas pourquoi ils doivent démontrer.

Une autre difficulté des étudiants réside dans l'application d'un théorème. Ils peuvent comprendre un théorème ou une propriété et ne pas l'appliquer correctement. Comme bien d'autres, Weber (op. cit.) relate que certains étudiants en algèbre linéaire, qui cherchent à appliquer certains théorèmes, ne manipulent que des formules sans raisonner sur les symboles qu'elles contiennent (obstacle du formalisme).

« Évaluer la valeur de vérité d'un résultat mathématique, aussi simple soit-il, fait appel à une activité cognitive complexe » (Epp, 2003, p. 886, traduction libre)[3]. Comme la logique ne fait plus partie explicitement du programme du secondaire, l'utilisation des règles de logique se fait, en partie, inconsciemment de la part des étudiants, ce qui selon nous peut largement complexifier les tâches de démonstration. En effet, Epp remarque que même au niveau universitaire, peu d'étudiants ont une compréhension sûre des principes de la logique. Lorsqu'ils doivent démontrer, il est difficile pour les étudiants de mener, par exemple, une démonstration par l'absurde. Si un grand nombre d'étudiants savent mener correctement un raisonnement par *modus ponens*[4], un certain nombre d'entre eux ne peuvent utiliser correctement le raisonnement par *modus tollens*[5]. De plus, un bon nombre affirmera que lorsqu'on a le conséquent, on peut en déduire l'antécédent ou encore que de la négation de l'antécédent, on en déduit la négation du conséquent[6].

2.3 Formalisme et symbolisme en algèbre linéaire

Depuis une vingtaine d'années, on peut avoir accès à des travaux de didactique portant sur l'algèbre linéaire. Ceux-ci incluent, entre autres, les travaux de recherche de J.-L. Dorier menés en France, de G. Harel aux États-Unis et de A. Sierpinska au Québec. Ces didacticiens s'entendent sur la nature formalisatrice, généralisatrice et unificatrice de plusieurs des concepts abordés en algèbre linéaire, ceux-ci commandant par conséquent un niveau d'abstraction causant plusieurs difficultés aux étudiants. Au collégial, le cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* est un des plus abstraits auxquels ils sont confrontés. Ils sont amenés à traiter des expressions et symboles nouveaux, souvent introduits de manière implicite par l'enseignant. Celui-ci introduit ces objets mathématiques nouveaux en utilisant d'emblée les symboles les représentant ou représentant leurs relations, sans se préoccuper d'insister sur le choix de ces symboles. Pourtant, les manipulations sur les nouveaux objets se

---

[3] Evaluating the truth and falsity of even very simple mathematical statements involves complex cognitive activity.

[4] Modus ponens : si $p \rightarrow q$ et p, alors on en déduit q.

[5] Modus tollens : si $p \rightarrow q$ et non-q, alors on en déduit non-p.

[5] Fausses conceptions des étudiants : si $p \rightarrow q$ et q, alors on en déduit p et si $p \rightarrow q$ et non-p, alors on en déduit non-q.

constituent en de nouvelles algèbres (algèbre vectorielle et algèbre matricielle) plus complexes que l'algèbre du secondaire. On remarque cette complexité lorsque les étudiants produisent des résultats incohérents ou vides de sens. Dorier et al. (1997, p. 116) mentionnent que :

> Pour la majorité des étudiants [de 18 à 20 ans qui en sont à leur premier cours d'algèbre linéaire], l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus, ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.

2.3.1 L'obstacle du formalisme

Les difficultés des étudiants en algèbre linéaire relèvent de ce que Dorier et al. appellent « l'obstacle du formalisme ». Sierpinska ajoute :

> L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques ; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel. Pour être efficaces en tant qu'étudiants, ceux-ci vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice et de la réduire à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée (Sierpinska et al., 1999, p. 12 ; trad. Tanguay, 2002b, p. 37).

L'insuffisance de sens contenu dans le langage mathématique formel peut, à raison, troubler plusieurs étudiants. La pauvreté sémantique du langage formel le rend difficile à comprendre. Il y a, en effet, une dualité évidente entre le langage épuré utilisé en mathématique, dont la simplicité rend sa compréhension difficile et la structure complexe du langage courant qui le rend facile à comprendre (Froger, 2003). Le formalisme mathématique si simplifié donne, à tort, l'impression de se suffire à lui-même. Or, « l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu » (Bloch et al., 2006). Beaucoup d'élèves et étudiants trouvent les manipulations de symboles mathématiques difficiles à maîtriser parce que, pour la majorité d'entre ceux-là, ils ne savent pas ce qu'ils manipulent.

Particulièrement, lors de la rédaction de démonstrations, les étudiants agencent élégamment une suite de symboles sans réfléchir aux objets qu'ils représentent. Il existe un paradoxe lors de l'introduction d'une nouvelle algèbre (par exemple l'algèbre de 2^{e} secondaire, l'algèbre vectorielle de 5^{e} secondaire ou l'algèbre matricielle vue au cégep) que nous appelons le « paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre ». Dorier (1997, p. 106) écrit : « Il faut pouvoir travailler sur des équations en oubliant momentanément ce qu'elles représentent mais en sachant y revenir quand besoin est [...] ». Nous poussons cette réflexion plus loin en relevant un véritable paradoxe : on accepte de confier à toute nouvelle algèbre une partie du raisonnement, au profit de calculs plus automatisés et d'une « algorithmisation » des démarches, qui doivent en principe permettre une plus grande efficacité dans celles-ci. Cependant, cette dévolution entraîne alors des pertes de contrôle et de sens. Un exemple simple en algèbre du secondaire : il arrive que, par des calculs algébriques, on obtienne $x = 7{,}54$ comme solution d'une équation à une inconnue. Si x représente une quantité entière, un réajustement est alors nécessaire pour conclure que la solution est 7 ou 8, dépendamment de ce qui est cherché. Mais l'élève qui a complètement dévolu sa démarche au profit du calcul pourrait ne pas faire ce réajustement, et donner 7,54 comme réponse !

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre au secondaire se prépare longuement. D'abord l'arithmétique du début secondaire (chaînes d'opérations, traduction d'énoncé en une expression arithmétique, etc.) ressemble de plus en plus à de l'algèbre. De plus, une progression de « pré-symboles » est présentée aux enfants. On manipule des jetons de couleurs, on reproduit picturalement les objets concernés, on utilise les cases vides à titre d'inconnues et finalement, on introduit la lettre en deuxième secondaire. Le niveau d'abstraction nécessaire peut alors être atteint par plusieurs puisqu'il découle d'une longue évolution. S'il est souhaitable que le symbolisme intervienne lorsque les étudiants commencent à manipuler et calculer avec des vecteurs, le degré d'abstraction est très vite haussé et particulièrement difficile à atteindre. D'abord, parce que le registre de représentation le plus concret de l'objet « vecteur » — la flèche dessinée dans un plan — ne se prête pas du tout à des manipulations symboliques. Le plus grand degré d'abstraction du vecteur représenté tient à plus qu'au simple fait que le registre de la représentation « flèche » soit plus visuel : toute autre flèche de mêmes longueur, direction et sens représentera en effet *le même* vecteur. De plus, la coordination des différentes représentations de l'objet « vecteur » est complexe : une flèche dessinée dans un croquis, une lettre minuscule surmontée ou non par une flèche, deux lettres majuscules surmontées d'une flèche, une chaîne de nombres réels entre parenthèses, une description du vecteur en langage naturel (Tanguay, 2002b). Également, on présente aux étudiants les nouveaux objets (vecteurs, matrices) et les symboles associés, croyant que c'est en les manipulant que les étudiants s'approprieront ce qu'ils représentent. Cependant, si les étudiants n'ont pas une connaissance convenable de ce qui est symbolisé, les manipulations restent alors vide de sens. Les travaux de Duval (1993) semblent suggérer qu'un travail de conversion entre les différents registres permet de casser ce cercle vicieux.

D'autant plus que, même si le vocabulaire et certains symboles sont nouveaux, la plupart des symboles attribués aux objets nouvellement introduits ont des significations propres dans d'autres cadres plus familiers. Les règles de manipulation peuvent alors interférer avec les règles propres à d'autres cadres. Par exemple, des règles empruntées à un cadre algébrique standard (comme la commutativité de la multiplication) seront utilisées, à tort, dans un cadre d'algèbre matricielle. En algèbre linéaire, certains symboles — par exemples, le symbole d'addition, la multiplication par les scalaires, toujours à gauche, par juxtaposition, l'opposé additif, les dernières lettres de l'alphabet pour les variables et les premières pour les constantes — se retrouvent dans les quatre cadres (géométrie vectorielle, matrices, système d'équations linéaires et espaces vectoriels abstraits) et souvent, un même symbole peut avoir une signification dans un autre cadre éloigné (cadre algébrique, arithmétique, géométrique, ...).

D'un autre côté, les étudiants peuvent être dans le nouveau cadre mais ils sont incapables d'en sortir pour aller vers des cadres qu'ils maîtrisent mieux. Les difficultés sont alors d'une autre nature :

> L'absence de référence à un autre cadre limite les changements de cadres, parfois difficiles à gérer, mais du même coup, les moyens de contrôle ainsi que les possibilités de prise de sens sont d'autant plus restreints. Ainsi, si la tâche est de nature conceptuelle et s'il n'y a pas d'algorithme ou de méthode classique pour s'en sortir, les dérapages et les pertes de sens sont fréquents, donnant lieu à des propos apparemment incohérents ou absurdes. (Dorier 1997, p.119)

2.3.2 Les registres de représentation

S'il est fréquent en algèbre linéaire de représenter plusieurs objets par un même symbole (exemple : une lettre majuscule représentera tantôt une matrice, tantôt un espace vectoriel, tantôt une transformation linéaire...), le même objet peut aussi être représenté par différents symboles.

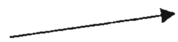
Tableau 2.1

Les quatre cadres en algèbre linéaire et leurs registres de représentation

Cadre des matrices
Représentations d'une matrice
Le tableau de nombre (ou de variables), par exemple : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
La lettre majuscule, par exemple : A
La lettre minuscule double indicée entre parenthèses ou entre crochets, par exemple : (a_{ij})
Des données introduites discursivement dans un problème contextualisé, et donnant lieu à une organisation en tableau.

Cadre de la géométrie vectorielle

Représentations d'un vecteur

Une flèche dessinée dans un croquis, par exemple : 

Une lettre minuscule surmontée ou non par une flèche, par exemple : $\vec{v}$ ou v

Deux lettres majuscules surmontées d'une flèche, par exemple : $\overrightarrow{AB}$

Une chaîne de nombres réels entre parenthèses, par exemple : (a, b, c) dans $\Re^3$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\Re^n$.

Dans certains contextes, une description du vecteur en langage naturel, par exemple : le vent souffle selon une direction faisant 35° avec le Nord, vers l'Est, à une vitesse de 40 km/h.

Cadre des systèmes d'équations linéaires

Représentations d'un système d'équations linéaires

D'un système d'équations :
Une description du système en langage naturel dans un problème contextualisé.

Des équations, par exemple : $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = c_3 \\ \ldots \end{cases}$

Utilisation de matrices, par exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \\ 7/10 & 11 & 4/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5/8 \end{pmatrix}$ ou encore : $AX = B$

Cadre des espaces vectoriels abstraits

Représentations propres à l'espace vectoriel considéré (vecteurs de $\Re^n$, matrices, polynômes, fonctions, etc.)

Représentation abstraite, par ex : soit $v \in V$, un vecteur dans l'espace vectoriel V de dimension finie n.

Selon Duval (1993), chaque registre de représentation, comme ceux ci-dessus, a ses propres règles et caractéristiques. La conversion entre registre de représentation, c'est-à-dire « la transformation d'une représentation en représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale » (p. 42), est une activité qui se dissocie cognitivement de celle du traitement. En effet, pour faire la conversion entre les registres, l'étudiant doit avoir perçu la différence entre le sens qu'il attribue à l'objet et les références à cet objet via ses représentations symboliques. La manière d'opérer sur ces symboles diffère d'un registre à l'autre mais les symboles utilisés dans différents registres représentent le même objet mathématique. L'étudiant doit pouvoir reconnaître le même objet à travers ses différentes représentations. Duval affirme qu'on a besoin de faire fonctionner différents registres de représentation et d'arriver à une coordination entre ces registres pour arriver à conceptualiser ce qu'on manipule. Cependant, une représentation est toujours, d'un point de vue cognitif, incomplète par rapport à l'objet qu'elle représente. Il existe un paradoxe, celui que Duval (1993, p. 38) appelle le *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* : « d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible ».

Par exemple, en algèbre linéaire, les symboles utilisés sont très épurés et contiennent beaucoup d'information implicite. Lorsqu'on écrit l'objet matrice sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

les indices doubles ont deux fonctions qui peuvent interférer chez les étudiants. D'un côté, ils représentent l'adresse du nombre : a_{11} est placé à la première ligne et à la première colonne, a_{ij} est à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. Les indices doubles servent aussi à différencier les variables de sorte que les nombres a_{11} et a_{12} peuvent être distincts. On ne peut évidemment pas se référer uniquement à la lettre a comme représentant la valeur de la variable. En transposant la matrice, il y a une grande perte d'information dépendamment de la manière d'écrire cette matrice. Voici ce qu'on retrouve souvent dans les copies d'étudiants en algèbre linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & .. \\ \dots & \dots & a_{ij} & .. \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ici, l'information en terme de valeur est gardée mais celle en terme d'adresse est perturbée, puisque dans la matrice transposée, le symbole a_{ij} est maintenant affecté à l'élément d'adresse *ji*. L'information concernant la dimension de la matrice est aussi brouillée. Autrement dit, si l'élève décide de préserver l'information quant à la valeur des variables, il perd alors l'information concernant l'adresse des éléments. S'il choisit de garder l'information relative à l'adresse des éléments, les indications concernant la valeur des éléments (en lien avec la matrice initiale) sont perdues.

Également, en utilisant la lettre majuscule pour symboliser une matrice, on fait référence, à travers ce symbole unique, à un tableau de nombres. Il est difficile, pour les étudiants, d'accepter qu'une seule lettre représente un tableau de nombres. Les glissements vers d'autres cadres sont alors possibles.

Tanguay (2002b), comme d'autres chercheurs tels Alves Dias (1995) ou Sierpinska (1999), rapporte que les objets mathématiques se construisent non seulement à travers leurs différents registres de représentation sémiotique ou à travers différents cadres, mais aussi, lorsque l'élève parvient à les dissocier de leurs représentations. Il faut alors que l'élève puisse reconnaître l'objet mathématique sous ses différentes représentations.

Dans l'exercice de démontrer, l'élève ou l'étudiant est amené à manipuler les objets mathématiques sous différents registres. Parfois, il doit changer de registre à l'intérieur même de la démonstration pour la mener à terme. Sans avoir dissocié l'objet de sa représentation, il devient encore plus difficile de passer d'un registre à l'autre à l'intérieur d'une même tâche.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Description globale

Nous avons mentionné précédemment que les professeurs de Cégep trouvent que la préparation des élèves qui arrivent du secondaire est déficiente ; particulièrement en algèbre linéaire, en ce qui concerne la rigueur mathématique, la démonstration et le traitement du symbolisme. Par conséquent, notre visée est de mesurer la complexité des tâches données aux étudiants dans le cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle au collégial, et à travers lesquelles le raisonnement hypothético-déductif est sollicité. Nous allons ensuite évaluer la préparation que les étudiants ont reçue à travers les cours de quatrième et cinquième secondaires. Pour Robert (1998) comme pour nous, les tâches sont les énoncés d'exercices ou de problèmes. Lorsque nous parlerons d'activités, cela signifiera plutôt les actions des étudiants (parfois souhaitées, parfois prévues) pour résoudre une tâche donnée.

3.1.1 Les tâches choisies

Notre première intention, dans le choix des tâches de démonstration, était de sélectionner un manuel scolaire utilisé par plusieurs enseignants d'algèbre linéaire et d'évaluer la complexité des tâches proposées par ce manuel. Cette idée a rapidement été rejetée puisque les enseignants demandent rarement à leurs étudiants de faire systématiquement toutes les tâches d'un manuel, ils en sélectionnent plutôt parmi celles proposées. Également, les enseignants ont accès à plusieurs autres sources et ont ainsi la possibilité de proposer d'autres tâches.

Pour ces raisons, nous avons préféré demander à une enseignante du cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle[6], du collège de Maisonneuve à Montréal, de nous transmettre, tout au long de la session d'hiver 2006, toutes les tâches (de démonstration ou non) soumises aux étudiants, que ce soit à titre d'exercice[7], de devoir ou d'examen. Pour nous permettre une meilleure analyse de la complexité des tâches en lien avec la préparation des étudiants, nous lui avons aussi demandé une planification de chacun des cours dispensés.

Ce choix méthodologique permet, selon nous, de mieux répondre à la problématique soulevée et aux objectifs de recherche que nous avons établis puisque nous suivons ainsi le parcours réel d'étudiants du collégial. En effet, le premier scénario ne nous aurait pas permis de prendre en considération le rôle de l'enseignant dans le choix des tâches données aux étudiants. De plus, la matière couverte par un livre dépasse, parfois largement, la matière couverte par l'enseignant. Pour que l'analyse de la préparation soit plus juste, il était important de prendre en compte la matière réellement couverte par un enseignant du collégial.

Finalement, les étudiants du programme *DEC intégré* doivent satisfaire des exigences d'admission plus importantes que les étudiants des programmes réguliers. On qualifie généralement ces étudiants comme étant particulièrement doués. En ce sens, les erreurs pouvant être relevées dans leurs productions seront *a fortiori* présentes dans les productions d'étudiants des programmes réguliers de sciences. Ainsi, ce que nous qualifierons comme complexe pour ces étudiants dans l'analyse des tâches, sera d'autant plus complexe pour des étudiants d'un parcours standard.

---

[6] Cours de sigle MATH-704, donné au Collège de Maisonneuve à l'hiver 2006. Il s'agit du cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* du programme *DEC intégré*. Voir § 3.3.2 pour plus de détails.

[7] Toutes les tâches données en exercices proviennent du livre Ste-Marie, Monique, *Algèbre vectorielle : une approche linéaire*. Éditions PointCarré, Montréal, 1994.

3.1.2 Évaluation de la complexité des tâches

Pour déterminer la difficulté des tâches soumises aux étudiants, nous utilisons des questions d'analyse élaborées par Robert (1998). Par la suite, nous jugeons de la pertinence et de la validité de ces questions en menant, d'abord, une analyse de la complexité de deux tâches et ensuite, en analysant des productions d'étudiants fournies en réponse à ces tâches. C'est ce que nous appelons l'*analyse diagnostique*. À la lumière de cette analyse diagnostique, des modifications sont nécessaires et nous ajustons les questions et en ajoutons d'autres pour permettre une analyse des tâches plus juste et plus nuancée.

3.1.3 Évaluation de la préparation des étudiants

C'est à travers une analyse des programmes de quatrième et cinquième secondaires, du programme actuel et du programme présentement en implantation que nous déterminons, par la suite, si les formations préalables et actuelles sont en continuité ou en rupture. D'un point de vue méthodologique, il aurait été profitable d'évaluer la préparation au secondaire de la même manière que ce qui a été fait par nous pour le collégial dans le cadre de ce mémoire. Également, nous aurions pu consulter des manuels utilisés au secondaire ou analyser concrètement les tâches de démonstrations préparées par des enseignants du secondaire. Cependant, pour des raisons pratiques, faire une analyse des tâches du secondaire comme celle faite pour le collégial nous a semblé un travail trop considérable compte tenu qu'il ne s'agit que d'un mémoire de maîtrise. Aussi, comme le « nouveau programme » est en voie d'implantation, aucun manuel n'est encore disponible et aucun enseignant n'enseigne selon cette réforme. L'étude du programme est donc notre seule possibilité.

3.2 Élaboration des questions pour l'analyse des tâches

Pour élaborer nos questions d'analyse des tâches, nous nous inspirons fortement de questions d'analyse proposées par Robert (1998) qu'elle sépare en six axes, mais que nous avons préféré regrouper en trois axes. D'abord, nous situons globalement le sujet mathématique dans lequel s'insère la tâche proposée. Nous allons ensuite analyser la complexité de chaque tâche donnée aux étudiants selon la manière dont elle est énoncée et finalement, l'analyse est faite à travers les activités attendues des étudiants. Nous entendons par « activités attendues » les activités souhaitées idéalement de la part des étudiants.

3.2.1 La description globale de la situation

Il nous semble important, avant toute analyse, de décrire le contexte mathématique global dans lequel prennent place les notions impliquées dans les tâches présentées aux étudiants. Voici les questions suggérées par Robert, que nous avons retenues pour cette description :

- Quels sont les savoirs à mettre en fonctionnement ?
- Les notions apparaissent-elles comme outils ou comme objets ?
- Quels sont les cadres, les registres mis en fonctionnement ou qui pourraient l'être ?
- Est-ce une notion déjà vue ou nouvelle ? Si la notion est nouvelle, quel est le niveau de conceptualisation ?

Nous considérons comme *nouvelles* les notions présentées en cours pour la première fois. Par exemple, lorsque les étudiants sont introduits aux matrices et aux opérations sur les matrices dans les premiers cours, toutes les tâches en lien avec ces nouveaux apprentissages portent, pour nous, sur des notions nouvelles. Si, à un autre moment du cours, les étudiants doivent utiliser ces apprentissages, nous indiquerons alors que les notions sont connues. Nous mentionnerons explicitement lorsque les notions connues auront été vues au secondaire.

En ce qui a trait au niveau de conceptualisation, Robert reprend succinctement ce qui a été écrit par Dorier et al. (1997). Elle emprunte l'exemple suivant :

> Par exemple, [...], la recherche des carrés magiques à coefficients réels d'ordre 3 peut se faire élémentairement, en résolvant un système d'équations réelles. On peut se placer dans la théorie des espaces vectoriels et montrer que l'ensemble cherché est un espace de dimension 3, puis en exhiber une base : on a changé de niveau de conceptualisation entre ces deux modes de résolution (Robert, 1998, p. 164).

C'est le sens proposé par Douady (1986) qu'il faut ici attribuer aux termes *outil*, *objet* et *cadre*. Quant à *registre*, Robert se réfère aux travaux de Duval (1993) concernant les registres de représentations sémiotiques.

Pour Douady (1986), un concept est un *outil* lorsque c'est l'usage qu'on en fait pour résoudre un problème qui retient notre attention. Lorsqu'il est décontextualisé, généralisé et que l'on s'intéresse à la conceptualisation de cet outil, ce dernier prend alors le statut d'*objet*. Par exemple, lorsque les étudiants utilisent les propriétés des matrices pour résoudre un système d'équations linéaires, la matrice est vue comme un outil. S'ils étudient les propriétés des matrices et les propriétés des opérations faites sur les matrices, les étudiants travaillent alors l'objet *matrice*.

Les objets associés à un domaine des mathématiques, les relations entre ces objets, les formulations et les images mentales que génèrent ces objets et relations forment ce que Douady (op. cit., p. 11) appelle un *cadre*. En algèbre linéaire, nous avons distingué quatre cadres : ce sont ceux des matrices, de la géométrie vectorielle, des systèmes d'équations linéaires et des espaces vectoriels abstraits. Un changement de cadres est alors un réaménagement et une reformulation des relations et objets.

Chaque cadre possède plusieurs registres de représentation des objets qu'il met en jeu. Ces représentations issues de divers registres servent non seulement à la communication mais elles sont aussi nécessaires à l'activité cognitive de la pensée. Selon Duval (1993), elles jouent trois rôles. D'abord, un rôle d'intériorisation, les représentations sémiotiques permettant le développement des représentations mentales. Également, il leur attribue un rôle d'« accomplissement de différentes fonctions cognitives » (p. 39) comme l'objectivation et le traitement. Finalement, elles jouent un rôle dans la production de connaissances puisque l'évolution de systèmes sémiotiques de plus en plus spécifiques permet le développement des sciences en général.

Duval (1996) explique ce qui différencie cadre et registre :

> Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres (p. 357).

3.2.2 L'analyse de la tâche

Cette analyse fondamentalement mathématique ne prend pas en compte les activités des étudiants. Voyons les questions, toujours suggérées par Robert, retenues pour cette analyse :

- Y a-t-il des étapes ? Les questions sont-elles liées ou indépendantes ?
- La question est-elle ouverte ?
- Une méthode, une représentation, un cadre ou un registre sont-ils indiqués ? Si oui, lesquels ?
- Quel est le degré de décontextualisation de la tâche ?
- Quels types de raisonnement sont en jeu ?
- Quel est le rôle spécifique du formalisme dans la démonstration ?
- Sur quoi porte l'énoncé (résultat, méthode, démarche) ?
- Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité, par exemple des quantificateurs cachés, ou sur ce qui est à justifier ?

À ce questionnement, nous ajoutons les difficultés plus généralement liées aux structures déductives, de plus en plus complexes (cf. par ex. Tanguay, 2005a) :

- La structure de la démonstration est-elle complexe (arbre plutôt que chaîne d'inférences, raisonnement par l'absurde, par cas ou par contraposition) ?

Nous émettons évidemment l'hypothèse que plus la structure d'une démonstration est complexe, plus la tâche est difficile.

3.2.3 L'analyse des activités attendues des étudiants

La troisième série de questions d'analyse porte sur les activités attendues idéalement des étudiants. Comme nous l'avons mentionné, cette analyse est en terme d'activités souhaitées de la part des étudiants, ce qu'on attend d'eux. En plus de la mise en fonctionnement des connaissances des étudiants, nous considérons les nouvelles pratiques attendues décrites précédemment (voir § 2.1.1). Les questions retenues pour cette analyse sont :

- Quel est le niveau de fonctionnement visé (technique, mobilisable, disponible; voir ci-dessous) ?
- Pour entrer dans la tâche y a-t-il lieu de reconnaître (un type de problèmes, de justifications, d'informations), de conjecturer, de modéliser, de faire des mises en relations, d'interpréter, de changer de cadres ou de registres, de point de vue – mathématique ou autres ?
- Faut-il choisir une méthode, un outil ?
- Quels théorèmes ou raisonnement appliquer ?
- Y a-t-il lieu d'introduire des étapes ?
- Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois, à gérer plusieurs variables à la fois ?
- Y a-t-il des arguments à appliquer plus d'une fois ?
- Y a-t-il un changement de point de vue à introduire (sans indication) ?
- Y a-t-il des modifications à faire, des transformations ?
- Faut-il introduire quelque chose (un objet intermédiaire, un nom, un formalisme, une notation) ?
- Une quantification est-elle à prendre en compte ou à repérer ?
- Y a-t-il un nouveau symbolisme à gérer ?

La mise en fonctionnement des connaissances des étudiants peut différer selon la tâche demandée et selon ce qui a été préalablement fait en classe. Robert (1998) subdivise en trois niveaux de fonctionnement ce qui est visé par la tâche. D'abord le *niveau technique*, « il s'agit donc de contextualisations simples, locales, sans étapes, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations » (p. 165). Le concept est alors utilisé comme outil.

Ensuite, Robert présente le *niveau des connaissances mobilisables* : il y a encore certaines indications, mais une adaptation des connaissances de l'étudiant au contexte particulier est nécessaire. Par exemple, lorsqu'il faut reconnaître l'application d'une règle, comme $(AB)^T = B^T A^T$, sous une nouvelle forme telle que $(ABC)^T = C^T (BA)^T$. L'étudiant doit reconnaître AB comme étant une matrice.

Finalement, le *niveau des connaissances disponibles* correspond à savoir résoudre le problème sans indication. L'étudiant doit trouver lui-même les connaissances dont il a besoin pour résoudre la situation.

En termes d'analyse des tâches, cette dimension est importante puisque la complexité d'une tâche dépend fortement du niveau de mise en fonctionnement des connaissances des étudiants.

3.3 Analyse diagnostique

Nous allons vérifier la pertinence des questions soulevées d'abord par l'analyse de deux tâches et ensuite, nous allons valider cette première analyse par l'examen de productions d'étudiants. Nous pourrons alors constater s'il y a cohérence entre l'identification du niveau de complexité des tâches à l'aide de notre questionnement et la complexité réellement dégagée par l'analyse des productions. Nous allons par la suite apporter les changements nécessaires à notre questionnement pour qu'il soit le plus efficace possible.

3.3.1 Les deux tâches et leur analyse *a priori*

Les tâches que nous avons choisies pour l'analyse diagnostique ont été prises dans un premier devoir élaboré par l'enseignante. Trois des quatre questions du devoir sont en lien avec la démonstration. Nous évaluerons donc la complexité de deux de ces tâches. Par l'analyse de productions d'étudiants, nous pourrons ensuite juger de la validité des questions d'analyse utilisées.

Tâche 1

Soit $A_{n \times n}$ une matrice inversible. En utilisant la *<u>définition</u>*[8] *d'une matrice inverse, montrer que*

a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

b) $(kA)^{-1} = (1/k)\, A^{-1}$.

Démonstration

Compte tenu de la consigne, de ce que nous connaissons des notes de cours et des résultats couverts au moment où la tâche a été soumise, nous avançons que les démonstrations attendues pour les Questions 1a et 1b auraient dû ressembler à ceci :

1. a) À montrer : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Selon les notations établies en cours, $(A^T)^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice A^T. Si nous parvenons à montrer que $(A^{-1})^T$ est aussi l'inverse de A^T, c'est-à-dire que la multiplication de ces deux matrices donne bien l'identité, par unicité de l'inverse d'une matrice carrée, nous aurons que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Vérifions :

$(A^{-1})^T A^T$	$= (AA^{-1})^T$	par la propriété de la transposition d'un produit,
	$= (I)^T$	par définition de l'inverse d'une matrice donnée,
	$= I$	car la matrice identité est symétrique.

On vérifie de la même façon[9] que $A^T (A^{-1})^T = I$.
Donc, $(A^{-1})^T$ est bien l'inverse de A^T, ce qui démontre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

---

[8] Souligné dans le texte fourni par l'enseignante aux étudiants.

[9] Un des évaluateurs du mémoire a suggéré de faire une place dans notre analyse aux énoncés du type « on vérifie de la même façon… ». De tels éléments « méta-logiques » seraient certainement à prendre en compte dans la grille d'analyse d'un éventuel travail de plus grande envergure, par exemple une thèse doctorale.

1. b) À montrer : $(kA)^{-1} = (1/k)\,A^{-1}$

Selon les notations établies en cours, $(kA)^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice kA. Si nous parvenons à montrer que $(1/k)A^{-1}$ est aussi l'inverse de kA, c'est-à-dire que la multiplication de ces deux matrices donne bien l'identité, par unicité de l'inverse d'une matrice carrée, nous aurons que $(kA)^{-1} = (1/k)\,A^{-1}$.

Vérifions :

$(1/k)\,A^{-1}kA = (1/k)k\,A^{-1}A$ par la propriété $(rX)Y = r(XY) = X(rY)$,

$= 1 \cdot I$ par la définition de l'inverse d'une matrice.

$= I$

On vérifie de la même façon que $kA\,(1/k)\,A^{-1} = I$.

Donc, $(1/k)A^{-1}$ est bien l'inverse de kA, ce qui démontre que $(kA)^{-1} = (1/k)\,A^{-1}$.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement consistent à opérer sur les matrices, à connaître et manipuler les matrices inverses et transposées et à démontrer.
- Les matrices sont étudiées en tant qu'objet ayant certaines propriétés.
- Nous sommes et restons tout au long de la démonstration dans le cadre des matrices et le registre de représentation est la lettre majuscule. Il n'y a aucun changement de cadre ni changement de registre à faire pour mener à bien la démonstration.
- Les matrices n'ont jamais été présentées aux étudiants avant le cours d' Algèbre linéaire et géométrie vectorielle. Il s'agit d'un savoir nouvellement introduit.

Analyse de la tâche

- Les deux questions portent sur l'unicité de la matrice inverse, mais sont indépendantes.
- Les questions sont fermées, nous savons que les égalités à démontrer sont vraies.
- Une méthode est imposée, l'étudiant doit utiliser la définition[10] de matrice inverse et ainsi, rester dans le registre de représentation qui est celui de l'énoncé de la question.

[10] Rappelons que le mot définition était souligné dans l'énoncé.

- Le rôle du formalisme est important. D'abord, les matrices impliquées ne sont pas n'importe quelles matrices, il s'agit des matrices inverses et transposées. Les symboles associés sont donc très importants.
- L'énoncé porte sur un résultat.
- La structure déductive n'est pas particulièrement complexe. Les graphes des démonstrations peuvent être représentés par des chaînes, qui sont en fait prises en charge par le « calcul ».

L'analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement visé est mobilisable, puisque les étudiants ont vu la définition de matrice inverse mais ils doivent maintenant la reconnaître sous une autre forme. Aussi, une propriété de la multiplication des matrices transposées est à utiliser avec une matrice et son inverse. Encore une fois, il s'agit de reconnaître la propriété sous une forme distincte de celle où elle avait été énoncée.
- Il n'y a pas de changement de cadre ou de registre de représentation à effectuer dans la mesure où le cadre est celui de l'algèbre matricielle et où la consigne impose un registre précis, qui est celui de l'énoncé, avec les matrices désignées par des majuscules.
- Il y a bien une pluralité d'arguments à coordonner, mais elle est relativement restreinte : définition et unicité de l'inverse, propriété de la transposition d'un produit, propriété de la multiplication d'une matrice par un scalaire, symétrie de l'identité.
- Il n'y a pas d'arguments à appliquer à répétition, il n'y a pas d'information à sélectionner dans les résultats invoqués.
- Il n'y a pas de quantification implicite à repérer (sinon que de comprendre que la démonstration doit être valable pour toute matrice carrée inversible).

Même s'il s'agit effectivement d'un type de démonstration assez éloigné de ce à quoi les étudiants sont habitués, de prime abord, on aurait donc tendance à évaluer cette tâche comme relativement simple. Nous verrons bientôt comment l'analyse de productions d'étudiants en rapport avec cette tâche nous amènera à nuancer cette première évaluation. On peut par ailleurs penser qu'à travers cette tâche, le professeur visait un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions (liées aux produit, inverse, neutre, transposition, dans le cadre de l'algèbre matricielle), comme le suggère d'ailleurs la consigne. Donc en ce sens, la tâche ne vise pas exclusivement un travail sur la démonstration.

La tâche 2

Il m'arrive régulièrement de rencontrer sur les copies d'examens d'étudiants des expressions de leur propre intuition pour $cof(A^T)$ *ou* $cof(A^{-1})$. *Mais que valent vraiment ces expressions ?*

a) Montrer que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$. *Pour ce faire, développer une expression pour l'élément ij de la première matrice et comparer avec une expression pour l'élément ij de la deuxième matrice.*

Démonstration

Selon les indications dans la question, la démonstration aurait dû ressembler à celle-ci :

$(cof(A^T))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\min_{ij}(A^T))$	Définition de la matrice des cofacteurs, où $\min_{ij}(A^T)$ désigne la matrice obtenue de A^T en enlevant sa *i*-ième ligne et sa *j*-ième colonne.
$= (-1)^{i+j} \det(\min_{ij}(A^T))^T$	invariance du déterminant par transposition,
$= (-1)^{j+i} \det\left(\min_{ji}(A)\right)$	car $(A^T)^T = A$, et cacher la *i*-ième ligne et la *j*-ième colonne de A^T revient à cacher la *j*-ième ligne et la *i*-ième colonne de A,
$= (cof(A))_{ji}$	définition de la matrice des cofacteurs,
$= ((cof(A))^T)_{ij}$	définition de la transposition.

Comme c'est vrai pour tout *i* et *j*, on conclut que $cof(A^T) = (cof(A))^T$.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de la matrice des cofacteurs (qui implique celle de déterminant et de mineur) et l'invariance du déterminant par transposition.
- La démonstration est un outil permettant l'étude des objets matrice, déterminant, et de leurs propriétés.
- Il n'y a pas de changement de cadre ni de registre.
- Il s'agit d'une notion nouvellement introduite dont le niveau de conceptualisation est élevé.

L'analyse de la tâche

- La question est fermée, on sait que l'égalité à montrer est vraie.
- Une méthode est indiquée : « Pour ce faire, développer une expression pour l'élément *ij* de la première matrice et comparer avec une expression pour l'élément *ij* de la deuxième matrice ».
- Le formalisme joue un rôle important puisqu'il s'agit d'une démonstration et qu'on demande de travailler sur un élément générique. Il faut pouvoir manipuler les indices et les définitions correctement.
- L'énoncé porte sur un résultat.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.

L'analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement aurait pu être celui des connaissances disponibles, mais comme il y a une indication sur la manière de mener la preuve, nous jugeons que le niveau est plutôt mobilisable.
- Il s'agit d'un nouveau type de démonstration pour les étudiants puisqu'une analyse de la situation est nécessaire au-delà de la rédaction de la preuve. Les objets impliqués dans la preuve sont plus complexes que les symboles pouvant les représenter, un temps de réflexion est nécessaire afin de se représenter mentalement et de valider chaque étape.
- Un nombre assez limité d'arguments est à organiser : définition de matrice des cofacteurs (de déterminant et de mineur), définition de matrice transposée et la propriété stipulant

que le déterminant reste invariant par transposition. Ce dernier argument est l'élément central de la preuve. Également, le lien entre un mineur et celui de la transposée.

- Il n'y a pas d'arguments à appliquer à répétition, il n'y a pas d'information à sélectionner dans les résultats invoqués.
- Il n'y a pas de changement de cadres à effectuer, mais le registre peut changer. Pour mener la démonstration à terme, il faut manipuler les indices puisqu'on demande de prouver pour un élément générique *ij* de la matrice.
- Il n'y a pas de quantification implicite à repérer (sinon que de comprendre que la démonstration doit être valable pour tous les éléments de la matrice).

Il s'agit encore une fois d'un type de démonstration éloignée de ce à quoi les étudiants sont habitués, mais comme une méthode est indiquée, on pourrait évaluer cette tâche comme étant plus difficile que la tâche 1.

3.3.2 Analyse des productions

Les participants

Les productions d'étudiants ont été recueillies dans le cadre d'un cours de sigle MATH-704, donné au Collège de Maisonneuve à l'hiver 2006. Il s'agit du cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle du programme *DEC intégré*. Celui-ci offre une formation en sciences, lettres et arts permettant aux étudiants de poursuivre leurs études dans presque n'importe quel domaine à l'université. Les étudiants qui le suivent sont, en principe, académiquement forts, puisque le programme accepte un nombre limité de candidats. Le cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle est sensiblement le même que celui offert dans le programme de *Sciences de la nature*, mais se donne en 60 heures plutôt qu'en 75 heures. Les participants de notre recherche en étaient à leur quatrième session au Cégep et avaient complété les cours de *Calcul différentiel* et de *Calcul intégral*. Le groupe comptait 26 étudiants. Nous avons pu obtenir les 21 copies remises pour le premier devoir, élaboré et soumis par le professeur en charge du cours. Nous avons utilisé 11 à 12 des 21 copies (selon les questions) pour faire l'analyse, rejetant celles que la reproduction avait rendu difficilement lisibles. Nous présentons de 4 à 5 copies d'étudiants pour chaque tâche.

Pour préserver l'anonymat des étudiants, nous avons recopié leurs productions en prenant soin de reproduire les disposition et graphie telles quelles. Nous avons ajouté des lignes numérotées pour faciliter le repérage dans la production.

Tâche 1a

Première production

Question 1 (Matrice inverse : définition)

Ligne 1	a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	
Ligne 2	Soit A une matrice carrée regulière d'ordre n	
Ligne 3	$AA^{-1} = I$	déf. matrice inverse
Ligne 4	$IAA^{-1} = I$	déf. matrice identité
Ligne 5	$[A^T(A^T)^{-1}]AA^{-1} = I$	déf. de la matrice inverse
Ligne 6	$(A^T(A^{-1})^T)AA^{-1} = I$	(loi exposant)
Ligne 7	$A^T(A^{-1})^T I = I$	déf. de la matrice inverse
Ligne 8	$(A^{-1})^T = \frac{1}{(A^T)}$	
Ligne 9	d'où $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$	

Analyse de la première production

L'étudiant[11] fait montre d'une conception ritualiste de la preuve :

- On part de la définition (l'étudiant interprète la consigne « En utilisant la définition d'une matrice inverse, montrer que ... » comme une indication de ce avec quoi il doit partir).
- On manipule.
- On arrive à l'égalité demandée.

[11] Nous utilisons systématiquement le masculin mais il peut s'agir en fait d'une étudiante.

Ligne 5. Procédé de manipulation (relativement) standard : on « ajoute 0 » ou on « multiplie par 1 » pour introduire une des expressions à laquelle on veut arriver. Ici, cela devient multiplier par $I = A^T(A^T)^{-1}$.

Ligne 6. L'étudiant est dans un cadre purement calculatoire, parce que c'est le cadre que commande sa démarche de preuve. Il applique donc des « règles de calcul » :

- en perdant de vue que ces règles ne sont pas valables dans le présent contexte (que « T » n'est pas un exposant) ; qu'elles n'y ont plus de sens. Nous faisons face ici à ce que nous avons appelé, au chapitre précédent, le « paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre » : on introduit une nouvelle algèbre comme outil de calcul permettant un détachement qui entraîne des pertes de contrôle et de sens.
- en perdant de vue la structure logique de la preuve : si cette règle (à savoir qu'on peut interchanger les « exposants » T et -1) était vraie, on aurait pu conclure la preuve en une ligne ; cela revient aussi à constater que l'étudiant utilise le résultat à prouver à l'intérieur de la démonstration.

Le cadre calculatoire a certainement provoqué ces pertes de sens, de contrôle, mais on peut également sans doute les attribuer aux difficultés qu'engendre l'utilisation de symboles nouveaux, à la pression psychologique causée par la vague conscience qu'a l'étudiant que « A », « T », « -1 » ne désignent plus des objets mathématiques familiers.

Ligne 7. AA^{-1} remplacé par I. Il y a ici un manque de contrôle de la structure logique : si l'expression AA^{-1} « revient » à I à la ligne 7, à quoi a-t-elle servi aux lignes 3, 4 et 5 ?

Ligne 8. Au-delà de la grosse perte de sens (paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre) qui fait traiter A^T comme un nombre qu'on envoie « en dessous », du côté droit de l'équation (en traitant par conséquent la matrice identité comme le nombre 1), il y a ici incapacité de l'étudiant à décoder ce qu'il y a à montrer du point de vue des définitions, et de voir que l'égalité de la ligne 7, $A^T(A^{-1})^T I = I$, traduit en fait exactement ce qu'on doit démontrer.

Deuxième production

Question 1

Ligne 1 • matrice inverse : Soit $A \in M_{n \times n}$

Ligne 2 S'il existe $B \in M_{n \times n}$ telle que $AB = BA = I$

Ligne 3 alors B est matrice inverse de A, notée A^{-1}

Ligne 4 $AA^{-1} = I$

Ligne 5 a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ligne 6 $(A^T)^{-1}$ est matrice inverse de A^T, donc

Ligne 7 $A^T (A^T)^{-1} = I$

Ligne 8 $I \quad = I$

Ligne 9 Si $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, alors $(A^{-1})^T$ est aussi

Ligne 10 matrice inverse de A^T, tel que

Ligne 11 $(A^{-1})^T A^T = I$

Ligne 12 $A^T (A^{-1})^T = I$

Ligne 13 $(AA^{-1})^T = I$

Ligne 14 $(I)^T = I$

Ligne 15 $I = I$

Ligne 16 d'où, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Analyse de la deuxième production

Ici, il semble que l'étudiant comprenne mieux comment faire intervenir la définition de la matrice inverse dans la démonstration. Il adopte un mode de fonctionnement fréquemment utilisé au secondaire : on part de l'égalité à montrer, qu'on transforme — soit un côté, soit les deux côtés à la fois — jusqu'à arriver à une égalité qu'on sait être vraie. Cette conduite dénote un manque de contrôle sur la structure logico-déductive de la preuve, puisqu'il n'y a visiblement pas vérification par l'étudiant que le passage de chaque égalité à la suivante résulte bien d'une équivalence, qui seule rendrait valide une telle démarche. Bien entendu, ni le signe $\Leftrightarrow$, ni le signe $\Rightarrow$ ne sont utilisés d'une égalité à l'autre.

Ligne 7. L'utilisation de la définition de la matrice inverse est valable, et semble-t-il bien contrôlée. Cependant, on ne sait trop quel statut donner à l'égalité de la ligne 8.

Lignes 9 et 10. L'étudiant énonce une implication sans se rendre compte que du point de vue de la structure logique, c'est en fait la réciproque qui est implicitement utilisée dans sa démonstration : pour l'étudiant, les lignes 11 à 15 montrent que $(A^{-1})^T$ est « aussi » l'inverse de A^T. C'est donc bien l'implication

$$(A^{-1})^T \text{ est l'inverse de } A^T \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

qui permet de conclure à l'égalité de la ligne 16. Or, c'est la réciproque qu'écrit l'étudiant à la ligne 9. Par ailleurs, il est vrai que la proposition sous-jacente est en fait une équivalence et que les deux implications sont valables.

Lignes 11, 12 et 13. Le passage de la ligne 11 à la ligne 12 à la ligne 13 est difficile à décoder cognitivement. Nous émettons l'hypothèse que ce passage résulterait d'une « réinterprétation » abusive de la règle $(AB)^T = B^T A^T$, réinterprétation qui ferait de la règle quelque chose comme l'énoncé « pour faire de deux transpositions une seule dans un produit, il faut [d'abord] commuter les matrices » ; énoncé qui expliquerait alors la ligne 12.

Troisième production

Ligne 1	Q1 a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	PAR: $(A^T)^{-1}(A^T) = I$
Ligne 2	$(A^T)^{-1}(A^T) = (A^{-1})^T(A^T)$	$(A^T)(A^T)^{-1} = I$
Ligne 3	$= (A^{-1})^T(A)^T$	$(A^{-1})^T(A^T) = I$
Ligne 4	$= (A^{-1}A)^T$	$(A^T)(A^{-1})^T = I$
Ligne 5	$= (I)^T$	
Ligne 6	$= I$	

Analyse de la troisième production

Dans cette production, on retrouve pratiquement toutes les erreurs relevées précédemment. Il est difficile de comprendre comment s'organise la preuve du point de vue du strict déroulement logique. Nous devons spéculer sur ce qu'a pu être le raisonnement. Parmi plusieurs possibles, l'hypothèse décrite ci-dessous est celle qui suppose à l'étudiant la meilleure compréhension.

L'étudiant veut montrer la ligne 1, mais va plutôt montrer la ligne 2 — équivalente dans son esprit — obtenue de la ligne 1 en multipliant chaque côté de l'égalité par (A^T). L'étudiant manipule le côté droit jusqu'à obtenir la matrice identité à droite, et l'égalité $(A^T)^{-1}(A^T) = I$. Cette dernière serait justifiée par ce qui est entouré d'un nuage, et qui viendrait de la définition de l'inverse (toujours donnée en cours sous la forme $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ce qui expliquerait la 2^e ligne du nuage). Une fois l'égalité $= I$ justifiée, l'égalité à montrer s'en trouve vérifiée (toujours en supposant qu'elles sont bien équivalentes ; l'étudiant ne précise bien sûr rien de tout cela). Par ailleurs, nous n'arrivons pas à comprendre la signification des 3^e et 4^e lignes du nuage.

Pour ce qui est du détail des manipulations ligne 2 à ligne 6, mentionnons que l'étudiant transpose le produit des deux matrices sans les commuter (lignes 3 et 4). On peut penser que comme dans la Production 1, l'étudiant traite « T » comme un exposant. Il est d'ailleurs très intéressant de constater que l'étudiant « sort » d'abord le « T » des parenthèses (passage de la ligne 2 à la ligne 3), comme pour le mettre au même niveau que le « T » qui affecte A^{-1}. Comme dans la Production 1, il y a ici perte du sens accordé aux manipulations et aux symboles, dont l'accumulation et la nouveauté étourdissent visiblement l'étudiant.

Quatrième production

	Question 1
Ligne 1	a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Ligne 2	$\frac{1}{(A^T)} = \left(\frac{1}{A}\right)^T$
Ligne 3	$\frac{1}{(A^T)} = \frac{1}{(A^T)}$ ou $\frac{1}{(A^T)} = \frac{1}{(A^T)}$
Ligne 4	$\frac{A^T}{A^T} = I$ $\quad$ $I = \frac{A^T}{A^T}$
Ligne 5	$A^T \cdot (A^T)^{-1} = I$ $\quad$ $(A^T)^{-1} \cdot A^T = I$
Ligne 6	par définition
Ligne 7	$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

Analyse de la quatrième production

L'étudiant procède selon une conception ritualiste de la preuve :

- On part de l'égalité à démontrer.
- On manipule chaque côté.
- On arrive à la même expression de chaque côté.

Nous supposons que cet étudiant aurait fourni une preuve ne comportant que les lignes 1 à 3 si, dans l'énoncé, il n'avait été question d'utiliser la définition de matrice inverse.

Ligne 2. L'étudiant se place dans un cadre exclusivement calculatoire. Il perd de vue les objets qu'il manipule. Il n'a pas encore décodé l'égalité à démontrer, mais s'engage d'emblée dans la démonstration. Il applique alors des règles de calculs qui lui sont familières, mais incohérentes dans le cadre de l'algèbre matricielle. Les matrices A et A^T sont manipulées comme des nombres et « -1 » et « T » comme des exposants. Étant détaché du cadre dans lequel il opère, l'étudiant accepte de remplacer le symbole -1 par une fraction dont une matrice est au dénominateur. L'étudiant est détaché des objets qu'il utilise, mais il est engagé dans les calculs les impliquant. Des règles d'autres cadres, plus familiers, apparaissent, mais elles ne sont plus valables ici. Nous faisons face, encore une fois, au paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre.

Ligne 3. Encore dans un cadre purement calculatoire, il considère « T » comme un exposant. Comme nous l'avons mentionné, nous croyons que l'étudiant aurait terminé sa démonstration à la ligne 3 s'il n'était pas fait mention d'utiliser la définition de matrice inverse. Ce rituel de preuve est souvent rencontré au secondaire. Par exemple, lorsque les élèves doivent démontrer l'identité d'expressions trigonométriques à l'aide des identités fondamentales de la trigonométrie, ils manipulent un ou deux côtés jusqu'à obtenir des expressions identiques.

La définition de matrice inverse est explicitée à la ligne 7. Comme la définition implique la commutativité de la multiplication d'une matrice et de son inverse, l'étudiant réécrit deux fois la même égalité (lignes 3, 4 et 5), voulant ainsi, selon nous, traiter les deux cas.

Ligne 4. Prise en charge du calcul et perte de contrôle du sens des symboles qui occasionne une utilisation de règles de calcul empruntées d'un autre cadre. On remarque nettement l'interférence de plusieurs cadres lorsque l'étudiant remplace le nombre 1 par la matrice identité (I).

Ligne 5. Cette ligne confirme notre hypothèse de l'intention de l'étudiant qui, à la ligne 3, décide d'écrire deux fois la même égalité afin de montrer que la multiplication de la matrice par son inverse ou de l'inverse par la matrice donnent bien l'identité. Même si a priori, l'étudiant n'a pas décodé l'égalité à démontrer, il a cependant reconnu la matrice inverse sous une forme différente de A^{-1}.

Cinquième production

Quest. 1

Ligne 1 a) Montrer que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ligne 2 → déf. matrice inverse : $B = A^{-1}$ si $AB = I$ et $BA = I$

Ligne 3 ainsi nous avons que : $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$

Ligne 4 $I = (A^T)^{-1}(A^T) = (A^{-1})^T(A^T)$

Ligne 5 $(A^{-1})^T(A^T)(A^T)^{-1} = I(A^T)^{-1}$

Ligne 6 $(A^{-1})^T((A^T)(A^T)^{-1}) = (A^T)^{-1}$

Ligne 7 $(A^{-1})^T \; I = (A^T)^{-1}$

Ligne 8 $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

Analyse de la cinquième production

Aux lignes 2 et 3, l'étudiant définit la matrice inverse puisqu'on lui demande, dans la question, d'utiliser la définition.

Ligne 4. Il tient pour acquis que les deux matrices $(A^T)^{-1}$ et $(A^{-1})^T$ sont inverses de la matrice A^T. L'étudiant perd de vue la structure logique de la démonstration, car avec un tel raisonnement, il aurait pu conclure, par unicité de la matrice inverse d'une matrice carrée, que les deux matrices sont égales. Il préfère continuer pour arriver à l'égalité à démontrer. Il s'agit d'une autre conception ritualiste de la preuve : il faut partir d'une égalité connue comme étant vraie et arriver à l'égalité à démontrer.

Ligne 5. Il réécrit une partie des égalités de la ligne 4, en tenant toujours pour acquis que $(A^{-1})^T A^T = \mathrm{I}$ est accepté et il multiplie par $(A^T)^{-1}$ de chaque côté (nous faisons l'hypothèse que le côté gauche de la ligne 4 est passé à droite à la ligne 5, et vice-versa). Il manipule jusqu'à obtenir l'égalité à démontrer. Du point de vue de la structure logique, il utilise ce qu'il doit démontrer puisque l'égalité retenue de la ligne 4 est $(A^{-1})^T A^T = \mathrm{I}$.

Lignes 6, 7 et 8. Manipulations valables, pour arriver à l'égalité à montrer. Mais le mal est fait aux lignes 4 et 5 !

Tâche 1b

Première production

Ligne 1 b) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Ligne 2 Soit A une matrice régulière d'ordre n.

Ligne 3 $AA^{-1} = I$ déf. de la matrice inverse

Ligne 4 $k(AA^{-1}) = kI$ déf. de multiplication de matrice par 1 scalaire.

Ligne 5 $(kA)A^{-1} = kI$ associativité de multiplication de matrice par un scalaire.

Ligne 6 $(kA)\frac{1}{k}A^{-1} = I$ égalité équation

Ligne 7 $\frac{1}{k}A^{-1} = I(kA)^{-1}$

Ligne 8 d'où $\boxed{\frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1}}$ multiplication de matrice par la matrice identité.

Analyse de la première production

L'étudiant veut se conformer à la directive et pour lui, « utiliser la définition » est une piste de ce avec quoi il doit commencer la démonstration. Il ne sait pas comment traduire l'énoncé à démontrer du point de vue de la définition et pour lui, un format est nécessaire pour démontrer (conception ritualiste de la preuve) :

- On part de la définition.
- On manipule.
- On arrive à l'égalité demandée.

Ligne 5 et 6. Le passage de la ligne 5 à la ligne 6 est valable mais mené maladroitement. L'étudiant ne sait comment justifier ce passage.

Ligne 7. À première vue, nous croyons que l'étudiant comprend ce qu'il fait, mais d'un œil plus attentif, on s'aperçoit qu'il n'est pas en contrôle des règles qu'il applique. Deux raisons nous laisse croire à une telle hypothèse. D'abord, à la question 1a), cet étudiant manipule « T » comme un exposant et justifie une des étapes de sa démonstration par la loi des exposants. De plus, s'il avait bien décodé l'égalité de la ligne 6, il aurait pu conclure à la ligne suivante par $\frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1}$. Mais, on remarque qu'il a laissé le symbole de matrice identité du côté droit de l'égalité à la ligne 7. Le passage de la ligne 6 à la ligne 7 résulte donc en fait d'un simple calcul et $(kA)^{-1}$ est plutôt perçu comme « on divise par (kA) de chaque côté ». La signification de « -1 » n'est pas contrôlée.

Encore une fois, le cadre calculatoire et les symboles nouveaux ont provoqué ces pertes de sens et de contrôle. Nous remarquons qu'en contexte de démonstration, ce qui est conforme aux règles mathématiques est davantage obscur pour les étudiants. Les difficultés reliées à l'introduction de nouveaux objets et symboles sont alors amplifiées par les difficultés liées à la démonstration.

Deuxième production

Ligne 1	b) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ (prop. matrice inverse)
Ligne 2	$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ k est un scalaire.

Analyse de la deuxième production

Cet étudiant utilise des règles empruntées au cadre numérique. Il distribue le « -1 » comme un exposant. Ses difficultés sont reliées à un manque de connaissance des règles et propriétés propres à l'algèbre matricielle.

Troisième production

Ligne 1	b) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$	
Ligne 2	$A(kA)^{-1} = \frac{1}{k}$	ou $\frac{1}{kA} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{A}$
Ligne 3	$A \frac{1}{kA} = \frac{1}{k}$	$I = \frac{kA}{kA}$
Ligne 4	$\frac{A}{A} \cdot \frac{k}{k} = I$	$I = \frac{A}{A}$
Ligne 5	$\frac{A}{A} \cdot 1 = I$	$I = A^{-1} \cdot A$
Ligne 6	$A \cdot A^{-1} = I$	
Ligne 7	par définition : $A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} A$	

Analyse de la troisième production

Ligne 2. Cet étudiant cherche à obtenir les égalités donnant la définition de matrice inverse, qu'il a explicitée à la ligne 7. Sa définition implique qu'il doive traiter la multiplication d'une matrice et de son inverse, mais aussi la multiplication de l'inverse par la matrice (commutativité) et obtenir l'identité dans les deux cas. Pour pouvoir traiter les deux cas, il réécrit l'égalité à démontrer de deux manières différentes.

Dans l'égalité de gauche, il multiplie $(kA)^{-1}$ par A, ce qui lui permet, selon lui, d'enlever A^{-1} de l'autre côté de l'égalité. Deux difficultés sont à souligner. D'abord, dans une démonstration, il est parfois possible de manipuler et de changer un côté à la fois dans le but de réécrire sous une forme équivalente les expressions impliquées (Ex : on veut montrer que $\sin x = \cos x \cdot \sqrt{\sec^2 - 1}$; on manipule le côté droit jusqu'à obtenir $\sin x$). On peut aussi multiplier par 1 ou ajouter 0 s'il le faut. Cependant, pour opérer de chaque côté de l'égalité, il faut considérer que l'égalité de départ est vraie (Ex : Soit a, b et $c \in \Re$, $ab = ac \Rightarrow b = c$; pour prouver ce résultat, il est possible de diviser par a de chaque côté de l'égalité $ab = ac$, puisqu'on la considère vraie). Cet étudiant manipule l'égalité à démontrer comme on le lui a appris, mais il confond « montre que cette égalité est vraie » avec « cette égalité est vraie alors montre que … ».

Lignes 3, 4, 5 et 6. L'étudiant est dans un cadre calculatoire et des règles plus familières, qui ne s'appliquent pas à l'algèbre matricielle, interfèrent. Il est satisfait lorsqu'il réussit à obtenir une partie de la définition de matrice inverse. Il ne se rend pas compte que, d'un point de vue logique, la suite de déduction est valide seulement si l'égalité à démontrer est considérée comme vraie.

Quatrième production

Ligne 1	b) $kA \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = I$	
Ligne 2	$\underbrace{(kA)^{-1}\, kA}_{I} \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1} I$	associativité
Ligne 3	$I \; \frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1} I$	déf. de l'inverse
Ligne 4	$\frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1}$	déf de la matrice identité

Analyse de la quatrième production

L'étudiant mène sa démonstration selon les étapes suivantes :

- On part avec une égalité acceptée comme vraie.
- On manipule.
- On arrive à l'égalité demandée.

Cependant, l'égalité avec laquelle il débute la démonstration résulte de celle qui est à prouver (presque immédiatement) si l'étudiant avait su la décoder.

Ligne 2. L'étudiant multiplie chaque côté de la ligne 1 par $(kA)^{-1}$.

Ligne 3. Comme il a multiplié par $(kA)^{-1}$ à la ligne 2, il reconnaît alors sous cette écriture la définition de matrice inverse de kA et l'utilise.

Ligne 4. Il a fait des manipulations jusqu'à obtenir ce qu'il faut démontrer. Cependant, même s'il reconnaît les définitions et peut les utiliser, il n'arrive pas à mener à bien la démonstration. En effet, il ne se rend pas compte qu'il utilise ce qu'il faut prouver à l'intérieur de sa démonstration.

Cinquième production

Ligne 1	b) Montrer que $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
Ligne 2	→ Si $AA^{-1} = I$
Ligne 3	① $(kA)^{-1}A = \left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)A = \frac{1}{k}I$
Ligne 4	② $(kA)^{-1}Ak = \frac{1}{k}(A^{-1}A)(k) = I$
Ligne 5	③ $\boxed{(kA)^{-1}(kA) = (A^{-1}A) = I}$

Analyse de la cinquième production

Ligne 1. L'étudiant écrit ce qu'il doit démontrer.

Ligne 2. Il écrit la définition de matrice inverse (parce qu'on lui a dit qu'il devait s'en servir).

Ligne 3. Il a multiplié chaque côté de l'égalité à montrer, à droite par A. Il utilise la ligne 2 (définition de A^{-1}) pour transformer $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)A$ en $\frac{1}{k}I$. Il a saute l'étape qui aurait consisté à déplacer les parenthèses : $\frac{1}{k}\left(A^{-1}A\right)$.

Ligne 4. Il multiplie tout par k (à droite dans les deux membres de gauche, et en simplifiant directement $\frac{1}{k}$ dans $\frac{1}{k}I$).

Ligne 5. Il réécrit $(kA)^{-1}Ak$ sous la forme $(kA)^{-1}(kA)$ à gauche. Il simplifie $\frac{1}{k}$ et k dans $\frac{1}{k}\left(A^{-1}A\right)(k)$ au milieu. Il laisse I inchangé à droite.

Ce qu'on peut dire sur le raisonnement de l'étudiant quant à la validité de la preuve est forcément spéculatif. Mais au mieux, on peut penser (et c'est même tout à fait plausible) qu'il a manipulé l'égalité à montrer jusqu'à obtenir des égalités vraies (ligne 5), ce qui en ferait une preuve valable aux signes « $\Leftrightarrow$ » manquants près.

Tâche 2

Première production

2a)

$$\begin{array}{l} \\ \text{Ligne A} \\ \text{Ligne B} \\ \text{Ligne C} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Matrice 1} \\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Matrice 2} \\ A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ligne 1 $\quad cof\left(A_{12}{}^{T}\right) = (-1)^{1+2}\ min\,(5)$

Ligne 2 $\quad (cof\ A_{12})^{T} = \left[(-1)^{1+2}\ min\,(3)\right] = (-1)^{1+2}\ min\,(5)$

Ligne 3 $\quad$ donc $cof\,(A^{T}) = (cof\ A)^{T}$

Analyse de la première production

Premièrement, l'étudiant s'appuie sur un exemple pour démontrer. Nous ne croyons pas que l'étudiant fournisse un exemple à titre de démonstration. Nous croyons qu'il sait que son exemple ne constitue pas une démonstration, mais comme il n'arrive pas à entrer dans la démonstration, autant montrer une certaine compréhension avec un exemple. Par ailleurs, cet étudiant n'avait pas fourni d'exemple à titre de démonstration pour les questions 1a) et 1b). Nous faisons l'hypothèse que cet étudiant est arrivé à une impasse, incapable de démontrer ce qu'on lui demande. Bien que l'étudiant n'ait pas fourni de démonstration, l'exemple n'est pas traité tout à fait comme attendu.

Ligne 1. La manière dont il écrit le cofacteur et le mineur laisse présumer que pour lui, ils sont dépendants non pas d'une position, mais de la valeur d'un élément. Il semble incapable de décoder la définition de cofacteur ou de mineur. Le mineur relatif à une adresse donnée est le déterminant de la sous-matrice obtenue en enlevant la ligne et la colonne de l'adresse donnée. Puisque l'étudiant présente un exemple, il aurait pu vérifier si les deux sous-matrices donnent le même déterminant. Il y a confusion entre la définition de mineur et le concept de fonction vu au secondaire. En effet, une fonction associe un nombre à un autre nombre et ce dernier est dépendant du premier. Le mineur est le déterminant de la sous-matrice et dépendant d'une adresse et non de la valeur de l'élément à cette adresse.

Ligne 2. Encore une fois, l'étudiant ne comprend pas la définition de mineur car lorsque nous déterminons le mineur de l'adresse *ij* d'une matrice, la valeur de l'élément à cette adresse n'a aucune importance et même si nous avons la même valeur à cette adresse dans deux matrices, les mineurs associés ne seront pas nécessairement les mêmes puisque les sous-matrices peuvent être différentes.

Deuxième production

Qustion 2

$$\begin{array}{l l}
 & \text{Matrice 1} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Matrice 2} \\
\text{Ligne A} & \\
\text{Ligne B} & a) \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & a_{ji} & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \\
\text{Ligne C} & \\
\text{Ligne D} &
\end{array}$$

Ligne 1 ① $cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\, min_{ij}\,(A)$

Ligne 2 donc $(cof_{ij}\,(A))^T = (-1)^{j+i}\, min_{ji}\,(AT)$

Ligne 3 ② $cof_{ij}\,(A^T) = (-1)^{j+i}\, min_{ji}\,(A^T)$

Ligne 8 d'où $cof(A^T) = (cof\,(A))^T$

Analyse de la deuxième production

Comme la matrice de droite est la transposée de la matrice A (à gauche), l'étudiant inverse les colonnes et les lignes. Les indices doubles sont donc garants de la valeur et ne représentent plus la position, sauf pour l'élément a_{ij} qui devient a_{ji}. Cependant, il faut comprendre que la valeur associée à a_{ji} dans la matrice A^T est celle de a_{ij} mais sa position est bien la j-ième ligne et la i-ième colonne. L'information concernant la valeur est partiellement perdue, mais l'information concernant l'adresse est adéquate.

Ligne 2. L'étudiant confond le cofacteur associé à une position, donc un nombre, avec la matrice des cofacteurs. Il prend soin d'indiquer les indices, ce qui confirme habituellement que le travail se fait sur un des éléments de la matrice, mais il accepte d'en faire la transposition, ce qui indique que pour lui, il ne travaille pas sur un nombre mais sur une matrice. Il arrive alors à une perte de sens lorsqu'il essaie d'écrire cette expression selon la définition de cofacteur.

Puisqu'il y a le symbole de transposition, il permute ij pour ji comme le veut la définition de transposée. L'étudiant est incapable d'adapter la définition de transposition au nouveau contexte, qui demande une fine compréhension de ce qui est manipulé. De plus, l'étudiant applique le mineur à la transposée de A. Le membre de droite de l'égalité est en fait égal à $cof_{ji}(A^T)$.

Ligne 3. Encore une fois, il y a confusion entre les définitions de cofacteur et de matrice transposée. Pour l'étudiant, lorsqu'il est question de matrice transposée, il faut permuter ij et ainsi, il n'arrive pas à écrire correctement le cofacteur selon sa définition.

Troisième production

Question 2
a)

Ligne 1 $A = (a_{ij})$ $A^T = (a_{ji})$ par définition de transp.

Ligne 2 $cof(A^T) = (cof(A))^T$

Ligne 3 pour le 1er élément de la matrice :

Ligne 4 $(-1)^2 a_{ji} = ((-1)^2 a_{ij})^T$

Ligne 5 $(-1)^2 a_{ji} = (-1)^2 a_{ji}$

Analyse de la troisième production

Ligne 1. L'étudiant définit d'abord la matrice A et utilise la définition de matrice transposée pour définir la matrice transposée de A.

Ligne 3. On demande dans la question de démontrer pour un élément ij de la matrice. Il choisit de démontrer pour le premier élément. Il partira de cette égalité à montrer, dénotant ici la conception ritualiste de la démonstration : partir de ce qu'il faut démontrer et arriver à la même expression de chaque côté de l'égalité.

Ligne 4. Cependant, il démontre en utilisant à la fois implicitement l'adresse 11, qui donne l'exposant 2 affecté à -1 (conformément à la définition d'un cofacteur), mais également l'élément générique a_{ij}, dont l'adresse quelconque ij ne coïncide pas forcément avec l'adresse 11. Encore une fois, la confusion causée par le symbolisme (notamment celui des adresses) vient exacerber la confusion logique, puisque l'étudiant ne comprend visiblement pas en quoi consiste « montrer pour un élément générique d'adresse ij et conclure ».

Quatrième production

Question 2

Ligne 1 $cof(A^T) = (cof\,A)^T$

Matrice 1

$$\begin{array}{l}\text{Ligne A}\\ \text{Ligne B}\\ \text{Ligne C}\\ \text{Ligne D}\\ \text{Ligne E}\\ \text{Ligne F}\end{array} \quad \text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice 2

$$\begin{array}{l}\text{Ligne A}\\ \text{Ligne B}\\ \text{Ligne C}\\ \text{Ligne D}\\ \text{Ligne E}\\ \text{Ligne F}\end{array} \quad 1)\ A^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice 3

$$\begin{array}{l}\text{Ligne A}\\ \text{Ligne B}\\ \text{Ligne C}\\ \text{Ligne D}\\ \text{Ligne E}\\ \text{Ligne F}\end{array} \quad cof(A^T) = \begin{pmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{21}) & \cdots & cof(a_{n1}) \\ cof(a_{12}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{n2}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \boxed{cof(a_{ij})} & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ cof(a_{1n}) & cof(a_{2n}) & \cdots & cof(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Matrice 4

$$\begin{array}{l}\text{Ligne A}\\ \text{Ligne B}\\ \text{Ligne C}\\ \text{Ligne D}\\ \text{Ligne E}\\ \text{Ligne F}\end{array} \quad 2)\ cof\ A = \begin{pmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{12}) & \cdots & cof(a_{1n}) \\ cof(a_{21}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{2n}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & cof(a_{ij}) & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ cof(a_{n1}) & \cdots & \cdots & cof(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Matrice 5

$$\begin{array}{l}\text{Ligne A}\\ \text{Ligne B}\\ \text{Ligne C}\\ \text{Ligne D}\\ \text{Ligne E}\\ \text{Ligne F}\end{array} \quad (cof\ A)^T = \begin{pmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{21}) & \cdots & cof(a_{n1}) \\ cof(a_{12}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{n2}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \boxed{cof(a_{ij})} & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ cof(a_{1n}) & cof(a_{2n}) & \cdots & cof(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Ligne 2 l'élément a_{ij} (ex: a_{12}) occupe la même position dans la matrice

Ligne 3 $cof(A^T)$ que dans la matrice $(cof\ A)^T$, soit $cof(a_{ji})$ (ex: $cof(a_{21})$)

Ligne 4 d'où $cof(A^T) = (cof\ A)^T$

Analyse de la quatrième production

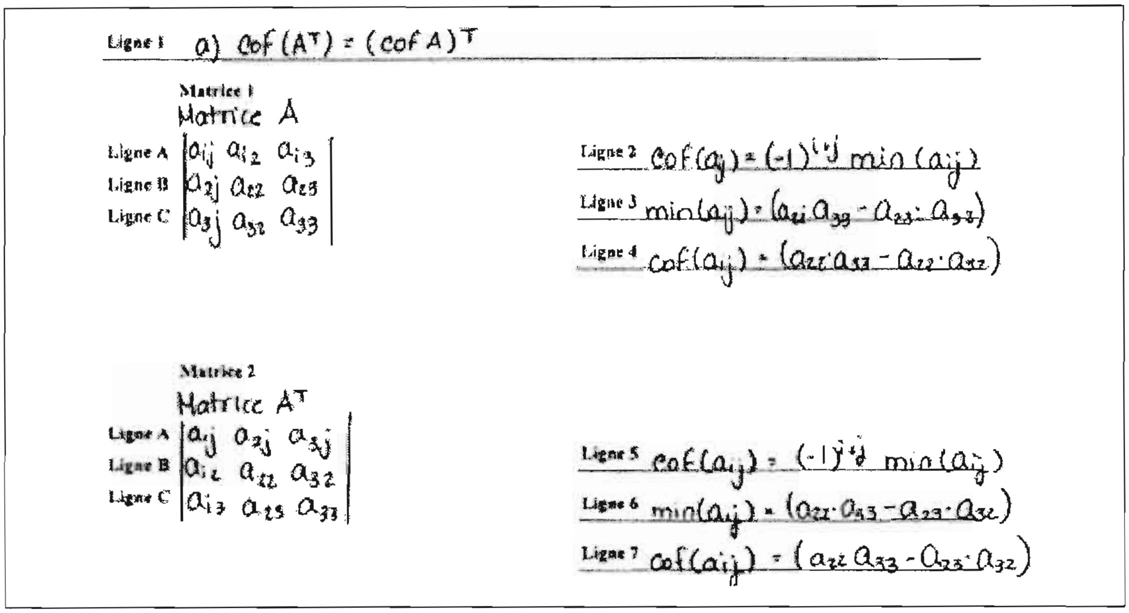
Matrice 2. Cette matrice est la transposée de la matrice A (Matrice 1) et l'étudiant intervertit les colonnes et les lignes, c'est-à-dire que, par exemple, l'élément a_{12} se retrouve à la ligne 2, colonne 1 dans la matrice transposée. Contrairement à l'étudiant précédent, celui-ci garde les indices de l'élément générique, de position ij dans la matrice A, intacte. Autrement dit, l'information concernant la valeur est conservée mais l'information concernant la position est perdue puisqu'il faut comprendre que cet élément est en position ji dans la matrice transposée.

Matrices 3, 4 et 5. Pour cet étudiant, le cofacteur semble dépendre d'un élément plutôt que de l'adresse d'un élément. Il semble utiliser le cofacteur comme une fonction, c'est-à-dire que pour tout élément a_{ij} de même valeur, en appliquant le cofacteur, on obtiendra une même valeur.

Ligne 2 et 3. La manipulation des indices semble difficile pour cet étudiant puisque pour toutes les manipulations faites dans les matrices, a_{ij} représente une valeur seulement. Lorsqu'il se questionne sur la position de l'élément générique, il y a confusion, du moins pour le lecteur, puisqu'il arrive à l'expression $cof(a_{ji})$. Cependant, cet étudiant semble accepter qu'il arrive à deux expressions différentes. Dans sa manipulation à l'intérieur des matrices 3 et 5, il arrive à l'expression $cof(a_{ij})$ et dans sa réflexion sur la position (ligne 3), il indique $cof(a_{ji})$.

Cet étudiant n'utilise pas l'argument central de la démonstration, c'est-à-dire l'invariance du déterminant par transposition. Il ne fait pas non plus appel à la définition de cofacteur, ni de mineur, ni même de déterminant.

Cinquième production



Analyse de la cinquième production

Matrice 1. D'abord, l'étudiant mène sa preuve en utilisant une matrice d'un format particulier, 3 × 3. Comme l'enseignante demande de travailler avec un élément *ij* de la matrice, l'étudiant remplace par *ij* l'indice double « 11 ». De ce fait, il remplace par *i* tous les « 1 » de la première ligne et par *j* tous les « 1 » de la première colonne. Il ne peut décoder ce que *ij* sous-entend, soit un cas générique, représentant de tous les cas possibles.

Ligne 2, 3 et 4. De la manière dont il écrit le cofacteur, il semble que pour lui, le cofacteur dépend non pas d'une position, mais d'un élément. Comme il manipule l'élément a_{11}, même s'il le nomme a_{ij}, ses calculs sont faits selon l'élément a_{11} (lignes 3 et 4). Il arrive à exprimer simplement le mineur et le cofacteur puisqu'il n'a plus besoin de mettre $(-1)^{i+j}$: de fait, il manipule l'élément a_{11} et alors, $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+1} = 1$. Il arrive donc à représenter le cofacteur associé à la position « 11 » dans une matrice carrée *A*, d'ordre 3.

Matrice 2. Il présente la matrice transposée de *A* en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes. Les indices des éléments donne l'information concernant la valeur mais l'information concernant la position est perdue puisqu'il faut comprendre que l'élément ij est en position ji dans cette matrice.

Ligne 5, 6 et 7. Comme aux lignes 2, 3 et 4, il arrive à représenter le cofacteur associé à l'élément a_{11} de la matrice A^T.

Sa démonstration se termine mais en fait, l'étudiant n'a pas pu montrer ce qu'on lui demandait. Il a représenté le cofacteur associé à l'élément de position « 11 » de la matrice A mais il n'a pas pu se représenter l'élément de la matrice des cofacteurs transposée. Tout ce qu'il démontre est que le cofacteur de l'élément « 11 » d'une matrice A est égal au cofacteur de l'élément « 11 » de la matrice A^T. Bien entendu, cette « faille » lui échappe complètement.

3.4 Bilan de l'analyse diagnostique

Après l'analyse des productions, nous remarquons que les difficultés et erreurs des étudiants relèvent à la fois de la manipulation des objets en algèbre linéaire et de la démonstration en général. Nous constatons par ailleurs que les difficultés provoquées par l'introduction de nouveaux objets et de nouvelles règles de manipulation et les difficultés liées au contrôle du raisonnement déductif et de sa structure logique s'amplifient mutuellement.

Mentionnons qu'en cours, la propriété $(AB)^T = B^T A^T$ avait été énoncée et illustrée par un exemple (avec matrice 2×2). Un exercice des notes de cours demandait de montrer que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$. Dans la Question 1a du devoir, neuf copies sur douze n'ont pas utilisé la propriété, ou l'ont utilisée incorrectement. Toujours pour la Question 1a, on n'arrive pas à décoder l'égalité à montrer à l'aide de la définition de la matrice inverse dans sept copies sur douze. Six copies sur douze traitent « -1 » comme un exposant dans la Question 1b, et passent directement de $(kA)^{-1}$ à $k^{-1}A^{-1}$ ou encore à $(1/k)\,A^{-1}$.

À la Question 2 du devoir, où il fallait montrer que $cof(A^T) = (cof(A))^T$, une seule copie sur onze a fait intervenir l'invariance du déterminant par transposition — l'argument central de la démonstration — et encore était-ce de façon totalement inadéquate.

Nous avons remarqué que plusieurs étudiants ont une conception ritualiste de la preuve. Certains commencent avec l'égalité à montrer et manipulent pour arriver à des expressions identiques de chaque côté de l'égalité. D'autres essaient d'obtenir l'égalité à démontrer à partir d'une égalité qu'ils considèrent vraie. Cette méthode entraîne plusieurs erreurs puisque les étudiants s'engagent dans la démonstration avant d'avoir décodé ce qu'ils doivent réellement démontrer. Ils entrent, par conséquent, dans un cadre purement calculatoire ce qui cause de nombreuses pertes de contrôle et de sens. Ils appliquent des règles de calculs familières qui, dans le cadre des matrices, ne sont plus adéquates. Maîtriser le nouveau symbolisme, les nouveaux termes, particulièrement quand ils rentrent en conflit avec les anciens, est difficile pour les étudiants. Comme nous l'avons mentionné, ils traitent « T » et « -1 » comme des exposants et les matrices comme des nombres.

Fréquemment, les étudiants perdent de vue la structure logique de la démonstration et utilisent le résultat à prouver. Ils introduisent des objets qui ne servent pas dans la démonstration (par exemple, dans la première copie, le terme $A\,A^{-1}$ n'a jamais servi). Ils ne sont pas conscients de la différence entre équivalences et implications simples (deuxième et troisième copies). Ils confondent une implication et sa réciproque.

Lorsqu'ils utilisent des résultats, ils ont de la difficulté à lire l'égalité dans le bon sens. Par exemple, la règle $(AB)^T = B^TA^T$ doit en fait être appliquée de droite à gauche dans la démonstration de la question 1a. Ils ont aussi du mal à reconnaître ou appliquer une définition ou une propriété quand il faut y remplacer une variable par une expression complexe (par exemple, appliquer correctement une règle énoncée avec A, quand A y est remplacé par BC ou A^{-1} ou A^T). Ils ont beaucoup d'ennui à interpréter, décoder une règle, une définition. Par exemple, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ est à décoder comme « l'inverse de A^T s'obtient en transposant l'inverse de A ». Ce qu'il faut comprendre ici, dans une égalité qui concentre à peine une douzaine de symboles, parenthèses comprises, c'est que A est une matrice inversible dont on connaît (ou dont on pourra éventuellement calculer) l'inverse A^{-1} et qu'alors, l'inverse de A^T s'obtiendra simplement en transposant A^{-1}.

À la question 2a, il semble que le symbolisme soit trop difficile à gérer pour les étudiants. Manipuler les indices dans la définition de la matrice des cofacteurs est très difficile pour eux, d'autant plus que la matrice impliquée est en fait une matrice transposée.

3.5 Questions retenues pour l'analyse des tâches

À la lumière de l'analyse des productions d'étudiants, nous remarquons que les tâches, que nous avions évaluées comme simples ou relativement simples à l'aide des questions initiales, sont beaucoup plus complexes qu'il n'y paraît de prime abord. Nous croyons qu'une analyse épistémologique comme propose Robert (c'est-à-dire en terme d'explication de la situation globale) des tâches et des activités souhaitées est nécessaire pour mesurer une certaine complexité. Mais nous croyons, à la suite de l'étude des productions d'étudiants, qu'une analyse en terme d'activités cognitives possibles des étudiants est tout aussi indispensable. Idéalement, un travail d'analyse d'erreurs, comme nous l'avons fait, permet de mieux mesurer la difficulté de ce qui est demandé aux étudiants. Cependant, s'il est souhaitable qu'une telle analyse soit faite pour chaque tâche, cela paraît impossible pratiquement. Comme nous souhaitons que les enseignants du collégial (et les enseignants en général) puissent évaluer la complexité de ce qu'ils demandent à leurs étudiants, nous proposons donc d'utiliser les éléments théoriques relevés au chapitre précédent ainsi que les éléments relevés dans l'analyse des productions pour compléter le questionnaire proposé par Robert. Nous ajoutons donc à notre analyse une quatrième partie qui porte sur les activités cognitives prévues ou simplement envisageables de la part des étudiants.

Voici les questions que nous retenons :

Analyse des activités possibles des étudiants

- Est-ce que des conceptions ritualistes de la preuve, comme celles soulevées dans l'analyse diagnostique, peuvent entraîner des erreurs, des difficultés ?
- Dans l'énoncé, est-ce qu'il peut être difficile pour l'étudiant de décoder ce qui est à démontrer ? En quoi cela peut-il être difficile ?
- Est-ce qu'il y a lieu de reconnaître les objets, impliqués dans les résultats, définitions et théorèmes à utiliser, sous une autre forme ?
- Est-ce que les résultats, définitions et théorèmes à utiliser sont appliqués tels qu'énoncés ou non ?
- Le nouveau symbolisme peut-il interférer avec des règles plus familières ? Si oui, lesquelles ?

Il est possible de penser que plus les règles avec lesquelles interfère le nouveau symbolisme sont familières, plus il y a risque de confusion de la part des étudiants. Nous l'avons remarqué dans les productions avec le symbole « T » traité en exposant.

- Le nouveau symbolisme est-il condensé au point où il pourrait entraîner des pertes de contrôle et de sens ?
- Le cadre est-il seulement calculatoire et peut-il occasionner des glissements vers des cadres plus familiers et des pertes de sens.

L'analyse diagnostique nous a permis d'ajouter une quatrième dimension à l'analyse, soit celle des activités possibles des étudiants. Nous entendons par possibles, les activités prévisibles, envisageables de la part des étudiants. Contrairement aux activités attendues, qui sont idéales, nous prévoyons dans les activités possibles les erreurs et difficultés que pourraient avoir les étudiants en cours de démonstration. Évidemment, plus les risques d'erreurs et de difficultés sont élevés, plus le niveau de complexité de la tâche risque d'être élevé.

CHAPITRE IV

ANALYSES DES TÂCHES

Nous entamons maintenant l'analyse des tâches proposées aux étudiants du cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*. Il s'agit de toutes les tâches de démonstration données en exercices, en devoir et en examen. Nous avons subdivisé cette analyse en quatre parties. D'abord, les tâches données dans le cadre de l'étude des matrices et déterminants, ensuite celles données en géométrie vectorielle; suivent les tâches données dans le cadre des espaces vectoriels abstraits et finalement, nous présentons les tâches de démonstration en algèbre vectorielle. Cet ordre est celui choisi par l'enseignante du collégial pour dispenser son cours.

Pour chaque tâche, nous présentons l'énoncé en italique accompagné de la solution attendue dans un encadré et, à la suite, nous proposons les analyses en caractères droits. Bien qu'il existe plusieurs démonstrations possibles pour chaque tâche, nous retenons une seule démonstration qui, selon notre évaluation, apparaît comme étant la plus simple. Comme nous nous intéressons au niveau de complexité des tâches, le niveau de complexité attribué à la solution la plus simple sera *a fortiori* valable pour une solution plus compliquée, en ce sens que le niveau de complexité ne pourra être que plus grand ou égal si la solution considérée est plus complexe. Nous proposons pour conclure une synthèse de l'analyse des tâches. Nous indiquons entre parenthèses si la tâche a été donnée en exercice, en devoir, en examen ou en classe.

4.1 Matrices et déterminants

Tâche 1 (Exercice)

En général dans $M_{n\times n}$, *on a :*

a) $(AB)^2 \neq A^2B^2$

b) $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$

c) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

Justifier.

Cette première tâche est particulière. En fait, nous croyons que ce qu'on demande, ici, est de montrer que $\forall A, \forall B \in M_{n\times n}$, $(AB)^2 = A^2B^2$, $(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ et $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ sont des énoncés faux. Pour cette raison, nous estimons que la solution voulue est de montrer que $\exists A, \exists B \in M_{n\times n}$ pour lesquelles $(AB)^2 \neq A^2B^2$, $(A\pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ et $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $(AB)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

$A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists A, \exists B \mid (AB)^2 \neq A^2B^2$

b) $(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists A, \exists B \mid (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$(A-B)^2=\left(\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2-2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists\, A, \exists\, B \,\middle|\, (A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$$

c) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists\, A, \exists\, B \,\middle|\, (A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les opérations sur les matrices et la notion de contre-exemple pour infirmer la véracité d'un résultat quantifié universellement.
- Les matrices sont vues comme objet d'étude.
- Nous sommes et restons tout au long de la démonstration dans le cadre des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules alors que dans la démonstration, puisqu'il faut fournir des contre-exemples, il faut travailler avec des tableaux de nombres. Un changement de registre est donc nécessaire.
- Les opérations matricielles ont été introduites aux étudiants dans le cours qui précède les exercices, il s'agit donc d'un savoir nouveau.

Analyse de la tâche

- Les questions peuvent être reliées puisqu'en choisissant adéquatement un contre-exemple qui peut satisfaire toutes les inégalités, certains calculs peuvent être faits une seule fois. En ce sens, les questions sont reliées. Elles peuvent aussi être considérées comme indépendantes si l'on choisit un nouveau contre-exemple à chaque fois.
- La question est fermée puisque les valeurs de vérité sont connues.
- Aucune méthode n'est suggérée.

- Il y a certains éléments implicites dans l'énoncé. En effet, les quantificateurs sont cachés. Ce qu'il faut comprendre de l'énoncé, c'est qu'il existe au moins une matrice A et une matrice B pour lesquelles les égalités $(AB)^2 = A^2B^2$, $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ et $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ne sont pas vraies.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Pour ce qui est d'opérer sur les matrices, le niveau de fonctionnement est technique puisque les étudiants viennent d'être introduits aux opérations sur les matrices. Par contre, le travail de justifier la valeur de vérité des inégalités à l'aide de contre-exemples peut être de niveau mobilisable puisque les étudiants doivent comprendre qu'il ne faut pas démontrer les inégalités présentées dans l'énoncé, mais bien infirmer, par un contre-exemple, les égalités qui leur correspondent.
- Il y a un changement de point de vue à introduire, car les étudiants ne doivent pas démontrer qu'en général c'est faux, mais bien montrer, à l'aide de contre-exemples, qu'il existe au moins deux matrices pour lesquelles les égalités sont fausses. La formulation de la question peut porter à confusion.
- Il y a lieu de reconnaître que ce qui est demandé est de montrer que $\forall A, \forall B \in M_{n \times n}$, $(AB)^2 = A^2B^2$ et $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ sont des énoncés faux.
- Une transformation de l'énoncé, telle que présentée au point précédent, est nécessaire pour pouvoir répondre à la question.
- Une quantification est à prendre en compte puisqu'on dit qu' « en général » les égalités sont fausses, ce qui est à interpréter comme « il existe au moins une matrice A et une matrice B pour lesquelles les égalités sont fausses ».
- Dans le cas de la production d'un contre-exemple, le formalisme est moins important : les matrices sont à gérer sous la forme d'un tableau de nombres et les étudiants peuvent choisir la dimension désirée. Le seul aspect formel à prendre en compte est la gestion logique d'un énoncé quantifié, alors même que les quantificateurs sont implicites.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la preuve peut nuire aux étudiants. En effet, on pourrait s'attendre à ce que les étudiants essaient de démontrer les inégalités. Dans ces cas, on pourrait s'attendre à des productions comme :

  $(AB)^2 = ABAB$ et $A^2B^2 = AABB$ mais, $ABAB \neq AABB$ puisque la multiplication de matrices n'est pas commutative, c'est-à-dire que $BA \neq AB$.
- Il semble que la formulation de la question complexifie largement la tâche de l'étudiant puisque telle qu'elle est formulée, on a l'impression qu'il faut démontrer que les inégalités sont vraies. En fait, il faut plutôt montrer, à l'aide de contre-exemple, que les égalités correspondantes peuvent être fausses.

Cet item nous apparaît comme complexe, entre autres, parce que la formulation de la question est difficile à interpréter. Comme nous l'avons mentionné, malgré le fait qu'on mentionne « en général » dans le texte, plusieurs étudiants pourraient confondre et croire que les inégalités sont vraies pour toutes les matrices. Or, ces inégalités peuvent être ou ne pas être vraies. Ce qu'il faut démontrer est que les égalités correspondantes aux inégalités, c'est-à-dire $(AB)^2 = A^2B^2$, $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ et $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, sont fausses pour au moins deux matrices A et B.

Tâche 2 (Exercice)

Dans $M_{3\times3}$, montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure).

Démonstration :

Soit les deux matrices triangulaires supérieures $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag+b\times 0+c\times 0 & ah+bj+c\times 0 & ai+bk+cl \\ 0\times g+d\times 0+e\times 0 & 0\times h+dj+e\times 0 & 0\times i+dk+el \\ 0\times g+0+0 & 0\times h+0\times j+f\times 0 & 0\times i+0\times k+fl \end{pmatrix}$, par définition du produit matriciel

$$= \begin{pmatrix} ag & ah+bj & ai+bk+cl \\ 0 & dj & dk+el \\ 0 & 0 & fl \end{pmatrix},$$

ce qui est bien, par définition, une matrice triangulaire supérieure.

Par un même raisonnement, nous pouvons démontrer que le résultat est vrai pour les matrices triangulaires inférieures.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de matrice triangulaire et le produit matriciel.
- Les matrices sont vues comme objet d'étude. La démonstration joue plutôt un rôle d'outil permettant de faire travailler les étudiants sur les savoirs à mettre en fonctionnement, et que nous avons énoncés ci-dessus.
- Nous sommes et restons tout au long de la démonstration dans le cadre des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées en mots alors qu'il faut travailler avec des tableaux de variables (3×3) dans la démonstration. Une traduction de l'énoncé discursif dans le registre algébrique est nécessaire et laissée à la charge de l'étudiant.
- Le produit matriciel et la définition de matrice ont été introduits aux étudiants dans le cours qui précède les exercices, il s'agit donc de savoirs nouveaux.

Analyse de la tâche

- La question est fermée puisque la valeur de vérité est donnée. Les étudiants savent que la proposition « le produit de deux matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) » est vraie.
- Aucune méthode n'est suggérée, cependant, un format de matrice est imposé.
- Le raisonnement à appliquer est formel.
- Il n'y a aucun élément implicite dans l'énoncé.
- La démonstration est prise en charge par le calcul et donc, sa structure est linéaire et non complexe.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement est technique puisque les étudiants ont été introduits au produit matriciel et aux matrices triangulaires, et l'énoncé donne directement la piste de ce qu'il y a à faire.
- Seules les définitions de produit matriciel et de matrices triangulaires sont à invoquer. Les étudiants doivent alors être capables d'écrire deux matrices triangulaires à entrée variables en toute généralité avec douze variables.
- Il n'y a pas d'argument à appliquer plus d'une fois.
- Il n'y a pas de changement de point de vue à introduire.
- Le formalisme est important : les matrices sont à gérer sous la forme de tableaux de variables, il faut pouvoir reconnaître les matrices triangulaires dans ces tableaux et ceux-ci doivent être aussi généraux que possible, pour que la preuve soit valable.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la preuve ne peut nuire au déroulement de la démonstration puisqu'il s'agit de faire ce qui est demandé dans la question : faire la multiplication et vérifier si la matrice obtenue est bien triangulaire supérieure (ou inférieure). Cependant, comme il n'y a pas d'égalité ou d'expression présentée explicitement dans l'énoncé, un étudiant très attaché à cette conception pourrait rester bloqué et ne savoir que faire.
- Les définitions à utiliser sont sous une forme facilement reconnaissable par l'étudiant, mais il pourrait y avoir confusion avec la définition de produit matriciel. On peut

s'attendre à ce que certains étudiants reforgent leur propre définition du produit matriciel, qui serait plus simple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ag & bh & ci \\ 0 & dj & ek \\ 0 & 0 & fl \end{pmatrix}.$$

En effet, par analogie avec l'addition de matrices, les étudiants pourraient seulement multiplier les composantes de même adresse. Comme cette erreur mène à une matrice triangulaire supérieure, elle nous paraît encore plus probable.

- Comme les étudiants doivent travailler avec des matrices 3×3 écrites sous leur forme la plus explicite, c'est-à-dire en tableaux, nous ne croyons pas qu'ils puissent y avoir des pertes de sens associées à un symbolisme trop poussé.

Cet item nous paraît complexe dans la mesure où la difficulté principale est d'écrire deux matrices triangulaires aussi générales que possibles. Selon nous, l'erreur la plus fréquente serait d'utiliser deux fois la même matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}=\ldots,$$

ou d'autre erreurs semblables, avec des matrices qui ne seraient pas assez générales.

Également, plus simplement, un étudiant pourrait faire l'erreur de ne donner qu'un exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}=\ldots$$

Tâche 3 (Exercice)

Dans $M_{2\times 2}$, *démontrer les 4 propriétés des matrices transposées.*

Soit A et B deux matrices dont les transposées respectives sont A^T *et* B^T *et soit k un scalaire;*

alors :

1. $(A^T)^T = A$;

2. $(kA)^T = kA^T$;

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$ *si* $A+B$ *est définie;*

(La transposée d'une somme est la somme des transposées.)

4. $(AB)^T = B^T A^T$, *si* AB *est défini.*

(La transposée d'un produit est le produit, dans l'ordre inverse, des transposées.)

1. À montrer $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T, \text{ par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ par définition de la transposée}$$

$$= A$$

2. À montrer $(kA)^T = kA^T$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(kA)^T = \left(k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}^T \text{, par définition de multiplication d'une matrice par un scalaire}$$

$$= \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix} \text{, par définition de la transposée}$$

$$= k \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{, par définition de multiplication d'une matrice par un scalaire}$$

$$= k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \text{, par définition de la transposée}$$

$$= kA^T$$

3. À montrer $(A + B)^T = A^T + B^T$ si $A + B$ est définie;

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, A et B sont des matrices 2 × 2, leur somme est définie (2 × 2).

$$(A + B)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}^T \text{, par définition d'addition de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix} \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \text{, par définition d'addition de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^T \text{, par définition de la transposée}$$

$$= A^T + B^T$$

4. À montrer $(AB)^T = B^T A^T$, si AB est défini.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, A et B sont des matrices 2 × 2, leur produit est défini (2 × 2).

$$(AB)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}^T \text{, par définition de produit matriciel puisque } AB \text{ est défini}$$

$$= \begin{pmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{pmatrix} \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} ea+gb & ec+gd \\ fa+hb & fc+hd \end{pmatrix} \text{, par commutativité de la multiplication dans } \Re$$

$$= \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{, par définition de produit matriciel}$$

$$= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \text{, par définition de la transposée}$$

$$= B^T A^T$$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de matrice transposée, l'addition et le produit matriciels, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la commutativité de la multiplication dans les nombres réels.
- Les matrices sont vues comme objet : par cette tâche, on vise un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions liées aux matrices transposées. En ce sens, la démonstration intervient au moins autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet.
- Nous sommes et restons tout au long des trois premières démonstrations dans le cadre des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules alors qu'on demande de travailler avec des tableaux de variables (2 × 2) dans les démonstrations. Une traduction d'un registre à l'autre est nécessaire et laissée à la charge de l'étudiant. Dans la quatrième démonstration, une étape nécessite un changement de cadre, c'est-à-dire qu'un passage du cadre des matrices à un cadre de l'algèbre des

nombres réels est nécessaire, pour effectuer les réorganisations à l'intérieur d'une même entrée.

- Les étudiants ont nouvellement été introduits aux matrices transposées, à l'addition de matrice, au produit d'une matrice et d'un scalaire et au produit matriciel. Ce sont tous des savoirs relativement nouveaux.

Analyse de la tâche

- Même si toutes les démonstrations portent sur les propriétés des matrices transposées, il n'y a pas d'étapes, chaque propriété à démontrer est indépendante des autres.
- La question est fermée puisque la valeur de vérité des propriétés est connue.
- Aucune méthode n'est suggérée, mais on demande de démontrer pour les matrices de format 2×2. Ainsi, le registre est indiqué.
- Le degré de généralisation est peu élevé puisque la démonstration doit être faite pour un format précis de matrices, soit les matrices 2×2.
- Il n'y a pas vraiment d'éléments implicites dans l'énoncé, sinon que de comprendre que les démonstrations doivent être valides pour toutes les matrices 2×2.
- La structure des démonstrations est simple et prise en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement des trois premières démonstrations est technique puisque les étudiants ont été introduits aux matrices transposées, à l'addition de matrice, au produit d'une matrice et d'un scalaire et finalement au produit matriciel. De plus, l'énoncé donne un format de matrice bien précis avec lequel travailler. La dernière démonstration exige, pour une seule étape, un niveau de fonctionnement mobilisable, l'étudiant doit utiliser la propriété de commutativité de la multiplication dans les réels.
- Pour chaque démonstration, une même opération sur les matrices est à faire plus d'une fois.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- Le symbolisme à gérer est peu complexe puisqu'il s'agit de matrices 2×2.

Analyse des activités des étudiants possibles

- Une conception ritualiste de la preuve pourrait nuire au déroulement de la démonstration. Les étudiants pourraient débuter la preuve par l'égalité à démontrer et manipuler un ou deux côtés jusqu'à obtenir une même expression de chaque côté. Comme nous l'avons remarqué dans les analyses diagnostiques au chapitre III, beaucoup d'étudiants qui ont une conception telle de la démonstration s'engagent dans un processus purement calculatoire qui, souvent, cause des pertes de sens.
- Ce qui est à démontrer nous paraît explicite dans les énoncés. En effet, en plus d'utiliser un langage mathématique pour les propriétés, on les décrit en mots.
- Les définitions sont à appliquer telles que présentées dans le cours.
- Une confusion possible, comme nous l'avons vue dans l'analyse diagnostique, est de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant. Cependant, ces conceptions du symbole de transposition seraient fortement ébranlées avec cette question puisqu'il devient impossible de démontrer les égalités. Également, comme pour la tâche précédente, les étudiants pourraient se réapproprier fautivement la définition de produit matriciel.

En somme, cette tâche est relativement simple si l'étudiant maîtrise la notion de matrice transposée. La dernière démonstration nous paraît légèrement plus complexe dû au changement de cadre nécessaire.

Tâche 4 (Exercice)

Dans $M_{2\times 2}$, démontrer les 5 propriétés des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Le produit d'une matrice A par sa transposée A^T est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$(AA^T)^T = AA^T.$$

2. La somme d'une matrice carrée A et de sa transposée A^T est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$(A + A^T)^T = A + A^T.$$

3. La différence entre une matrice carrée A et sa transposée A^T est une matrice antisymétrique, c'est-à-dire

$$(A - A^T)^T = -(A - A^T).$$

4. Si la matrice A est symétrique ou antisymétrique alors le produit de A par sa transposée A^T est commutatif, c'est-à-dire

$$AA^T = A^T A.$$

5. Si la matrice A est symétrique ou antisymétrique alors A^2 est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$A^2 = (A^2)^T.$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; à montrer $(AA^T)^T = AA^T$.

$$(AA^T)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \right)^T$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right)^T \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de multiplication de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ca + db \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad \text{, par commutativité de la multiplication dans } \Re$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de multiplication de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= AA^T$$

2. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, à montrer $(A+A^T)^T = A+A^T$.

$$(A+A^T)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right)^T$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition d'addition de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & c+b \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{, par définition d'addition de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{, par commutativité de l'addition de matrices}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= A+A^T$$

3. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, à montrer $(A-A^T)^T = -(A-A^T)$..

$$(A-A^T)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right)^T$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)^T \quad \text{, par définition de matrice transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} a-a & b-c \\ c-b & d-d \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de soustraction de matrices}$$

$=\begin{pmatrix} a-a & c-b \\ b-c & d-d \end{pmatrix}$, par définition de matrice transposée

$=\begin{pmatrix} -a+a & -b+c \\ -c+b & -d+d \end{pmatrix}$, par commutativité de l'addition dans $\Re$

$=\begin{pmatrix} -(a-a) & -(b-c) \\ -(c-b) & -(d-d) \end{pmatrix}$, mise en facteur de -1

$=-\begin{pmatrix} a-a & b-c \\ c-b & d-d \end{pmatrix}$, par définition de la multiplication d'un scalaire et d'une matrice

$=-\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)$, par définition de soustraction de matrices

$=-\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right)$, par définition de matrice transposée

$=-(A-A^T)$

4. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique, à montrer $AA^T = A^T A$.

$AA^T=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^T$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, par définition de la transposée

$=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, par définition de la transposée

$=A^T A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0. \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique. À montrer $AA^T = A^T A$.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de matrice opposée}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^T\left(-\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\right)$$

, selon la règle d'associativité du produit matriciel et de la multiplication par un scalaire

$$= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^T A$$

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique, à montrer $A^2 = (A^2)^T$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ba+cb & b^2+c^2 \end{pmatrix} \quad \text{, par définition de produit matriciel}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} \quad \text{, par la commutativité de la multiplication dans } \Re$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= (A^2)^T$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0. \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique, à montrer $A^2 = (A^2)^T$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}, \text{ par définition de produit matriciel}$$

$$= \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}^T \quad \text{, par définition de la transposée}$$

$$= (A^2)^T$$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les définitions de matrices symétriques et antisymétriques, la définition de matrice transposée, la définition d'addition de matrices et la définition de produit matriciel. Également, les démonstrations nécessitent la mise en fonctionnement des propriétés des opérations sur les matrices et des opérations sur les nombres réels.
- Les matrices sont vues comme objet et la démonstration intervient autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet. On vise un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions liées aux matrices symétriques et antisymétriques mais en même temps, on vise un travail sur la démonstration.
- Le cadre est celui des matrices mais le cadre de l'algèbre des nombres réels intervient dans certaines démonstrations. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules alors qu'on demande de travailler avec des tableaux (2×2) de variables et de nombres dans les démonstrations. Une traduction des matrices représentées par une lettre majuscule au registre des matrices représentées par des tableaux de variables est nécessaire et laissée à la charge de l'étudiant.
- À l'intérieur du même cours, les étudiants ont brièvement été introduits aux matrices transposées, symétriques et antisymétriques. Au cours précédent, ils avaient été introduits à l'addition de matrice, au produit d'une matrice et d'un scalaire et au produit matriciel. Ce sont tous des savoirs nouveaux.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle faite pour la tâche 3.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement des savoirs dans les démonstrations est mobilisable puisque les étudiants doivent gérer des propriétés d'opérations sur les matrices avec des matrices dont la forme est particulière (matrices symétriques et antisymétriques). De plus, les étudiants doivent penser à utiliser la propriété de commutativité de la multiplication dans les réels et ils doivent pouvoir changer le signe des nombres d'une matrice sans affecter l'égalité.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On ne doit pas introduire d'étapes.
- On ne doit pas développer plusieurs arguments à la fois.
- Le symbolisme semble peu complexe puisqu'il s'agit de matrices 2×2. Cependant, les matrices à manipuler ont une forme bien précise et cette forme se traduit par un symbolisme précis. Par exemple, pour une matrice symétrique d'ordre 2, $x_{12} = x_{21}$.

Analyse des activités des étudiants possibles

- Une conception ritualiste de la preuve pourrait nuire au déroulement de la démonstration. Les étudiants pourraient débuter la preuve par l'égalité à démontrer et manipuler un ou deux côtés jusqu'à obtenir une même expression de chaque côté. Comme nous l'avons remarqué dans les analyses diagnostiques au chapitre II, beaucoup d'étudiants qui ont une conception telle de la démonstration s'engagent dans un processus purement calculatoire qui, souvent, cause des pertes de sens et des incohérences d'un point de vue logique.
- Ce qui est à démontrer nous paraît explicite dans les énoncés. En effet, en plus d'utiliser un langage mathématique pour les propriétés, on les décrit en mots.
- Les définitions sont à appliquer telles que présentées dans le cours mais les matrices impliquées dans la démonstration ont une forme particulière, ce qui peut complexifier la tâche.

- Une confusion possible est de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant. Aussi, on peut s'attendre à ce que certains étudiants remodèle leur propre définition du carré d'une matrice, sous la forme plus simple :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}.$$

- Comme il n'y a pas de symbole propre aux matrices symétriques et antisymétriques, c'est-à-dire que leur représentation sous la forme d'une lettre majuscule est la même que celle de n'importe quelle matrice, les étudiants pourraient entrer dans la tâche avec des matrices quelconques. En ce sens, le symbolisme utilisé dans la question contient plus d'information qu'il n'en paraît. L'étudiant a lui-même la charge de générer une représentation d'une matrice symétrique ou antisymétrique d'ordre 2. Ainsi, il doit réaliser que $x_{12}=x_{21}$ pour la matrice symétrique et que $x_{12}=-x_{21}$ pour une matrice antisymétrique.

La tâche nous semble assez complexe puisque les matrices impliquées ont une forme précise à gérer, ce qui n'apparaît pas dans l'énoncé. De plus, quelques changements de cadre sont nécessaires pour mener à bien certaines démonstrations. En particulier, lorsque les signes des variables de la matrice doivent changer, il faut penser à multiplier la matrice par 1 mais sous la forme -1×-1. Certains symboles peuvent entrer en conflit avec des symboles d'autres cadres, tels que le symbole de transposition et le carré d'une matrice.

Tâche 5 (Exercice)

Démontrer que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ *si le produit* ABC *est défini.*

Démonstration

$(ABC)^T = C^T (AB)^T$, par la propriété de la transposition d'un produit
$\qquad = C^T B^T A^T$, par la propriété de la transposition d'un produit

Description globale de la situation

- Le seul savoir à mettre en fonctionnement est la propriété de la transposition d'un produit de matrices.
- Le travail visé est une mise en fonctionnement de cette propriété. Ainsi, la démonstration semble jouer un rôle d'outil plus que d'objet. Les matrices sont étudiées en tant qu'objet.
- Le cadre est celui des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules et aucun changement de registre n'est nécessaire pour mener la démonstration à terme.
- Les étudiants ont été introduits aux matrices transposées et aux propriétés de telles matrices dans le cours précédent les exercices. Il s'agit d'un savoir nouveau.

Analyse de la tâche

- La question est fermée puisque nous savons que l'égalité à montrer est vraie.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Le degré de généralisation est plutôt élevé puisque la démonstration doit être faite pour toutes les matrices de tous les formats.
- Il n'y a pas vraiment d'élément implicite dans l'énoncé, sinon que de comprendre que les démonstrations sont valides pour toutes les matrices.
- La structure de la démonstration est très simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement de la démonstration peut, à première vue, sembler technique mais nous le considérons mobilisable puisqu'il y a lieu de reconnaître un produit de matrices comme une seule matrice.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On ne doit pas introduire d'étapes.
- On ne doit pas développer plusieurs arguments à la fois.
- Le symbolisme semble peu complexe mais il faut reconnaître que les lettres majuscules représentent toutes les matrices de n'importe quel format.

Analyse des activités des étudiants possibles

- Dépendamment de la conception qu'ont les étudiants, une conception ritualiste de la démonstration peut engendrer des pertes de sens si les étudiants décidaient de manipuler les deux côtés de l'égalité à la fois. Cependant, si les étudiants ont plutôt la conception qu'il faut partir d'un côté de l'égalité et manipuler pour obtenir l'autre, cela ne leur nuit pas.
- Ce qui est à démontrer nous paraît explicite dans les énoncés.
- La propriété à utiliser n'est pas à appliquer telle que présentée dans le cours, il y a lieu de reconnaître une matrice sous une nouvelle forme, c'est-à-dire sous la forme d'un produit de matrices.
- Une fois encore, une erreur possible est de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant. Ainsi, les étudiants pourraient mener la démonstration en distribuant le symbole d'exposant et en commutant le produit de matrices :

$$\begin{aligned}(ABC)^T &= A^T B^T C^T \text{, en distribuant l'exposant}\\ &= B^T A^T C^T \text{, par commutativité}\\ &= B^T C^T A^T \text{, par commutativité}\\ &= C^T B^T A^T \text{, par commutativité}\end{aligned}$$

- Le symbolisme est plutôt poussé puisqu'une seule lettre représente un tableau de nombres de n'importe quel format ; mais il ne s'agit pas d'une matrice particulière, comme une matrice symétrique par exemple.

La tâche nous semble relativement complexe. La difficulté est de savoir comment appliquer la règle $(XY)^T = Y^T X^T$ quand la première des deux matrices X résulte en fait du produit AB, qui doit être reconnu comme une seule matrice. Mais cette difficulté est aussi amplifiée par le fait que la règle a en fait été annoncée en classe avec les lettre A et B et non X et Y ! On imagine facilement les confusions possibles. Il est difficile de savoir si l'enseignante s'attendait à une étude plus poussée de la dimension des matrices et des produits. Si c'était le cas, la solution aurait dû comporter ce qui suit.

Soit A de format $m \times n$, B de format $n \times p$ et C de format $p \times q$. AB est défini, de format $m \times p$ et ABC est défini, de format $m \times q$. $(ABC)^T$ est donc de format $q \times m$. $(AB)^T$ est de format $p \times m$ et C^T de format $q \times p$; donc, $C^T(AB)^T$ est défini, de format $q \times m$. Finalement $B^T A^T$ est défini et de format $p \times m$ et donc $C^T B^T A^T$ est défini, de format $q \times m$.

Tâche 6 (Exercice)

À l'aide des propriétés, démontrer les 5 propriétés des matrices symétriques et antisymétriques, dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

1. Le produit d'une matrice A par sa transposée A^T est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$(AA^T)^T = AA^T.$$

2. La somme d'une matrice carrée A et de sa transposée A^T est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$(A + A^T)^T = A + A^T.$$

3. La différence entre une matrice carrée A et de sa transposée A^T est une matrice antisymétrique, c'est-à-dire

$$(A - A^T)^T = -(A - A^T).$$

4. Si la matrice A est symétrique ou antisymétrique alors le produit de A par sa transposée A^T est commutatif, c'est-à-dire

$$AA^T = A^T A.$$

5. Si la matrice A est symétrique ou antisymétrique alors A^2 est une matrice symétrique, c'est-à-dire

$$A^2 = (A^2)^T.$$

1. À montrer $(AA^T)^T = AA^T$.

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T$, par la propriété de la transposition d'un produit $= AA^T$, puisque la transposée d'une matrice transposée est la matrice elle-même.

2. À montrer $(A + A^T)^T = A + A^T$.

$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T$, la transposée d'une somme est la somme des transposées $= A^T + A$, puisque la transposée d'une matrice transposée est la matrice elle-même $= A + A^T$, par la commutativité de l'addition de matrices.

3. À montrer $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$.

$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T$, la transposée d'une différence est la différence des transposées $= A^T - A$, puisque la transposée d'une matrice transposée est la matrice elle-même $= -A + A^T$, par la commutativité de l'addition de matrices. $= -(A - A^T)$, selon la propriété de la multiplication par un scalaire.

4. À montrer $AA^T = A^T A$, sachant que A est une matrice symétrique ou antisymétrique.

Soit A une matrice symétrique, $AA^T = AA$, selon la définition de matrice symétrique comme matrice égale à sa transposée $= A^T A$, selon la définition de matrice symétrique. Soit A, une matrice antisymétrique, $AA^T = A(-A)$, selon la définition de matrice antisymétrique comme matrice dont la transposée égale l'opposée $= -(-A)(-A)$, car $-1 \times -1 = 1$ $= -(A)^T(-A)$, selon la définition de matrice antisymétrique $= -(-(A^T A))$, selon la propriété de la multiplication par un scalaire $= A^T A$, puisque $-1 \times -1 = 1$.

5. À montrer $A^2 = (A^2)^T$, sachant que A est une matrice symétrique ou antisymétrique.

Soit A une matrice symétrique,

$A^2 = AA$, par définition du carré d'une matrice

$= A^T A^T$, par définition de matrice symétrique

$= (AA)^T$, par la propriété de la transposition d'un produit

$= (A^2)^T$, par définition du carré d'une matrice.

Soit A une matrice antisymétrique,

$A^2 = AA$, par définition du carré d'une matrice

$= -A(-A)$, selon la propriété de la multiplication par un scalaire

$= A^T A^T$, par définition de matrice antisymétrique comme matrice dont l'opposée égale la transposée

$= (AA)^T$, par la propriété de la transposition d'un produit

$= (A^2)^T$, par définition du carré d'une matrice.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les définitions de matrices symétriques et antisymétriques, la définition et les propriétés des matrices transposées, les définitions et propriétés des opérations sur les matrices.
- Les matrices sont vues comme objet et la démonstration intervient autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet. On vise un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions liées aux matrices symétriques et antisymétriques mais en même temps, on vise un travail sur la démonstration.
- Le cadre est celui des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules et on demande aux étudiants de démontrer à l'aide des propriétés. Ainsi, aucun changement de registre n'est nécessaire.
- À l'intérieur du même cours, les étudiants ont brièvement été introduits aux matrices transposées, symétriques et antisymétriques. Au cours précédent, ils avaient été introduits

à l'addition de matrice, au produit d'une matrice et d'un scalaire et au produit matriciel. Ce sont tous des savoirs nouveaux.

Analyse de la tâche

- Il n'y a pas d'étapes, chaque propriété à démontrer est indépendante des autres.
- La question est fermée puisque la valeur de vérité des propriétés est connue.
- Une méthode est suggérée, c'est-à-dire qu'on demande de démontrer à l'aide des propriétés.
- Le degré de généralisation est élevé puisque la démonstration doit être faite pour les matrices de n'importe quel format.
- Il n'y a pas vraiment d'élément implicite dans l'énoncé sinon que de comprendre que les démonstrations sont valides pour toutes les matrices.
- La structure des démonstrations est simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement des savoirs dans ces démonstrations est mobilisable puisque à peu près toutes les définitions et propriétés doivent être manipulées sous une autre forme que celle présentée dans le cours.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On doit introduire des étapes aux démonstrations 4 et 5 puisqu'on ne peut mener les démonstrations pour les matrices symétriques et antisymétriques à la fois.
- Aucune quantification n'est à prendre en compte, sinon que de comprendre que les démonstrations sont valides pour toutes les matrices ou pour toutes les matrices symétriques et antisymétriques.
- Le symbolisme est plutôt complexe puisque les matrices symétriques et antisymétriques doivent être manipuler avec les mêmes symboles que les matrices quelconques.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la preuve pourrait nuire au déroulement de la démonstration. Les étudiants pourraient débuter la preuve par l'égalité à démontrer et manipuler un ou deux côtés jusqu'à obtenir une même expression de chaque côté. Comme nous l'avons remarqué dans les analyses diagnostiques au chapitre II, beaucoup d'étudiants qui ont une conception telle de la démonstration s'engagent dans un processus purement calculatoire qui, souvent, cause des pertes de sens et des incohérences d'un point de vue logique.

- Ce qui est à démontrer est explicite dans les énoncés. En effet, en plus d'utiliser un langage mathématique pour les propriétés, on les décrit en mots.
- Les définitions et propriétés ne sont pas à appliquer telles que présentées dans le cours; en effet, elles sont toutes à appliquer sous un format différent. Il est fort probable que les étudiants ne reconnaissent pas les propriétés à appliquer sous cette nouvelle forme. Par exemple, $A^T A^T = (AA)^T$, issue de la règle $(AB)^T = B^T A^T$, est à appliquer dans le sens inverse qu'elle est présentée aux étudiants ; mais en plus, il faut reconnaître les matrices sous une autre forme, c'est-à-dire qu'ici, $A = A$ mais $B = A$ aussi. Pour cette raison, il nous semble que la règle est d'autant plus difficile à reconnaître. Cependant avec la conception que « T » est un exposant, les étudiants pourraient produire des étapes paraissant valables, alors qu'elles ne le seraient pas en réalité ! Comment en effet détecter que l'étudiant n'a pas commuté les deux A en passant de A^TA^T à $(AA)^T$?
- Une erreur possible est de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant. Les étudiants pourraient aussi justifier certains passages par la commutativité de la multiplication de matrices. Par exemple :

  $$AA^T = A^T A \text{, par commutativité.}$$
- Comme il n'y a pas de symbole propre aux matrices symétriques et antisymétriques, c'est-à-dire que leur représentation sous la forme d'une lettre majuscule est la même que pour n'importe quelle matrice, les étudiants pourraient entrer dans la tâche en réfléchissant sur des matrices quelconques. En ce sens, le symbolisme utilisé dans la question contient plus d'information qu'il n'en paraît.
- Le symbolisme peut être source de confusion puisqu'il n'y a qu'une matrice A à manipuler dans toutes les démonstrations ; ainsi, les règles sont difficiles à reconnaître puisqu'elles sont habituellement présentées aux étudiants avec plusieurs matrices.

Il s'agit du même énoncé que la tâche 4, mais les étudiants doivent prouver les propriétés pour toutes matrices carrées, de format quelconque. Ainsi, il n'y a aucun changement de registre à gérer. Il serait possible de croire que, puisqu'il n'y a pas de changement de registre à effectuer, la tâche est alors plus facile, mais au contraire, en opérant sur des symboles qui enferment beaucoup d'information, les étudiants sont susceptibles de produire un discours vide de sens et de recourir à des règles plus faciles qu'ils se forgent eux-mêmes. Également, cette tâche est complexe puisque, dû à la forme des matrices, les règles à utiliser sont difficiles à reconnaître.

Tâche 7 (Exercice)

Toute matrice carrée A peut s'exprimer comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, c'est-à-dire

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T).$$

Montrer que cette affirmation est vraie.

Démonstration

Montrons d'abord que $\frac{1}{2}(A+A^T)$ est bien symétrique :

$\frac{1}{2}(A+A^T)=(\frac{1}{2}(A+A^T))^T=\frac{1}{2}(A+A^T)^T$, par la tâche 6, démonstration 2 et par la propriété $(kA)^T=kA^T$. Par définition, la matrice $\frac{1}{2}(A+A^T)$ est bien symétrique.

Montrons ensuite que $\frac{1}{2}(A-A^T)$ est bien antisymétrique :

$\frac{1}{2}(A-A^T)=(-\frac{1}{2}(A-A^T))^T=-\frac{1}{2}(A-A^T)^T$, par la tâche 6, démonstration 3 et par la propriété $(kA)^T=kA^T$. Par définition, la matrice $\frac{1}{2}(A-A^T)$ est bien antisymétrique.

$\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^T$, par la distributivité de la multiplication d'un scalaire sur l'addition de matrices

$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^T-\frac{1}{2}A^T$, par la commutativité de l'addition de matrices

$=A$, par définition d'addition (soustraction) de matrices.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les définitions de matrice symétrique et antisymétrique, leurs propriétés, la définition d'addition de matrices et ses propriétés et les propriétés de la multiplication d'un scalaire et d'une matrice.
- Les matrices sont vues comme objet. Il est difficile de déterminer le statut de la démonstration pour cette tâche. Le travail de mise en fonctionnement des règles est peu élaboré et alors la démonstration est assez élémentaire.
- Le cadre est celui des matrices. Dans l'énoncé les matrices sont représentées par des lettres majuscules et aucun changement de registre n'est nécessaire.
- À l'intérieur du même cours, les étudiants ont brièvement été introduits aux matrices transposées, symétriques et antisymétriques. Au cours précédent, ils avaient été introduits à l'addition de matrice, au produit d'une matrice et d'un scalaire et au produit matriciel. Ce sont tous des savoirs nouveaux.

Analyse de la tâche

- Il y a très peu d'étapes, celles de montrer que les matrices $\frac{1}{2}(A+A^T)$ et $\frac{1}{2}(A-A^T)$ sont respectivement symétrique et antisymétrique et la démonstration de l'égalité $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$.
- La question est fermée puisque la valeur de vérité est connue.
- Le degré de généralisation est assez élevé puisque la démonstration doit être faite pour les matrices carrées de n'importe quel format.
- Il y a un élément implicite dans l'énoncé. Il faut vérifier que les matrices $\frac{1}{2}(A+A^T)$ et $\frac{1}{2}(A-A^T)$ sont bien des matrices, respectivement, symétrique et antisymétrique.
- La structure de la démonstration est simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement de savoirs est technique puisque les définitions et propriétés y apparaissent sous une forme connue. Seules les propriétés d'addition et de multiplication par un scalaire sont à invoquer.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On doit montrer que les matrices $\frac{1}{2}(A+A^T)$ et $\frac{1}{2}(A-A^T)$ sont respectivement symétrique et antisymétrique.
- Aucune quantification n'est à prendre en compte, sinon que de comprendre que les démonstrations sont valides pour toutes les matrices carrées.
- Le symbolisme est condensé et la lettre majuscule ne représente pas une matrice quelconque mais bien une matrice carrée.

Analyse des activités possibles des étudiants

- La démonstration que les matrices $\frac{1}{2}(A+A^T)$ et $\frac{1}{2}(A-A^T)$ sont respectivement symétrique et antisymétrique est implicite dans l'énoncé, alors que la démonstration de l'égalité $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$ est explicite. En effet, en plus d'utiliser le langage mathématique pour cette égalité, on la décrit en mots.
- Les règles et définitions à appliquer sont simples.
- Une erreur possible serait de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant mais comme les étudiants ne le manipulent pas, cette confusion n'entraînerait pas d'erreur (apparente).
- Comme il n'y a pas de symbole propre aux matrices carrées, c'est-à-dire que leur représentation sous la forme d'une lettre majuscule est la même que pour n'importe quelle matrice, les étudiants pourraient entrer dans la tâche sans être conscients que les matrices sont carrées. Il semble que cela ne poserait pas de problème pour cette démonstration.

Cette tâche nous apparaît simple puisque les règles à utiliser sont semblables aux règles de calcul familières aux étudiants. Malgré un glissement possible vers ces règles, les étudiants pourraient mener à bien la démonstration, sans erreur apparente. Cependant, les étudiants pourraient ne pas montrer que les matrices $\frac{1}{2}(A+A^T)$ et $\frac{1}{2}(A-A^T)$ sont, respectivement, symétrique et antisymétrique.

Tâche 8 (Exercice et examen pour la propriété 1, exercice et devoir pour la propriété 2 et exercice pour la propriété 3)

Démontrer les propriétés des matrices inverses énoncées à la page 42.

Soit A et B deux matrices carrées régulières de même ordre ;

Alors ;

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$

1. À montrer $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

D'abord,

$AA^{-1} = I$, par définition de matrice inverse

$AIA^{-1} = I$, par définition de matrice identité

$A(BB^{-1})A^{-1} = I$, par définition de matrice inverse

$((AB)B^{-1})A^{-1}) = I$, par associativité du produit matriciel.

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$, par associativité du produit matriciel.

Mais aussi,

$A^{-1}A = I$, par définition de matrice inverse

$A^{-1}IA = I$, par définition de matrice identité

$A^{-1}(B^{-1}B)A = I$, par définition de matrice inverse

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, par associativité du produit matriciel.

D'autre part,

$(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I$, par définition de matrice inverse.

D'où,

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, par unicité de la matrice inverse.

2. À montrer $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (cf. p. 35)

3. À montrer $(A^{-1})^{-1} = A$.

D'abord,

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$, par définition de matrice inverse

Mais aussi,

$(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(A^{-1}) = I$, par définition de matrice inverse.

D'où

$(A^{-1})^{-1} = A$, par unicité de la matrice inverse.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de matrice inverse et les opérations sur les matrices.
- Les matrices sont vues comme objet. La démonstration intervient autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet. On vise un travail de mise en fonctionnement des règles d'opérations, des définitions et des propriétés liées aux matrices inverses mais en même temps, on vise un travail sur la démonstration.
- Le cadre est celui des matrices. Dans l'énoncé les matrices sont représentées par des lettres majuscules et aucun changement de registre n'est nécessaire pour achever la démonstration.

- Les étudiants ont été introduits aux définitions, propriétés et règles d'opérations sur les matrices à l'intérieur du cours même d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle. Le savoir est relativement nouveau.

Analyse des tâches

- La question est fermée puisque la valeur de vérité de chaque propriété à démontrer est connue.
- Chaque propriété à démontrer est indépendante des autres.
- On ne suggère aucune méthode.
- Le degré de généralisation est élevé puisqu'on démontre pour n'importe quelle matrice.
- Le formalisme est important puisque certaines matrices impliquées ne sont pas n'importe quelle matrice mais bien des matrices inverses.
- Les propriétés sont présentées en langage mathématique seulement ce qui les rend moins explicites.
- La structure des démonstrations est relativement simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement des savoirs dans ces démonstrations est mobilisable puisque à peu près toutes les définitions et propriétés à mettre en œuvre doivent être utilisées ou reconnues sous une autre forme que celle présentée dans le cours ou dans le manuel.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On ne doit pas introduire d'étapes.
- On ne doit pas développer plusieurs arguments à la fois.
- Le symbolisme est complexe puisque certains symboles sont utilisés dans d'autres cadres et ont d'autres applications.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la preuve pourrait nuire au déroulement de la démonstration. Les étudiants pourraient débuter la preuve par l'égalité à démontrer et tenter de manipuler un ou deux côtés pour obtenir une même expression de chaque côté. Il faut pourtant débuter la démonstration à l'aide de la définition de matrice inverse ce qui est peu familier pour les étudiants.

- Ce qui est à démontrer peut paraître explicite mais comme les propriétés ne sont pas présentées en mots, nous croyons, à la lumière de l'analyse diagnostique, que les égalités sont difficiles à interpréter pour les étudiants.
- Les définitions et propriétés ne sont pas à appliquer telles que présentées dans le cours. Il est fort probable que les étudiants ne reconnaissent pas les propriétés à appliquer sous ces nouvelles formes. Par exemple, il y a lieu de reconnaître que $(AB)^{-1}$ est l'inverse de la matrice AB et alors, admettre que AB n'est pas une opération à effectuer mais bien le résultat du produit de matrices et ainsi, une matrice. Également, les étudiants doivent non seulement accepter que $(A^{-1})^{-1}$ est l'inverse de la matrice A^{-1} mais que A l'est également. Ce n'est pas facilement acceptable de la part des étudiants puisque c'est très éloigné de la définition de matrice inverse qu'ils ont vue en classe.
- Une erreur est possible, celle de confondre le symbole de matrice inverse avec celui d'exposant. Nous pourrions avoir des démonstrations comme :

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{ en distribuant l'exposant et par commutativité}$$

$$\text{et } (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{A^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{A}} = A .$$

Cette tâche est complexe puisque nous avons vu en analysant des productions d'étudiants dans l'analyse diagnostique qu'il est difficile pour eux de maîtriser le nouveau symbolisme, particulièrement lorsqu'il entre en conflit avec des symboles déjà familiers. Comme nous l'avons mentionné, il est probable que certains étudiants traitent « -1 » comme un exposant. Ils ont aussi du mal à reconnaître ou appliquer une définition ou une propriété quand il faut y remplacer une variable par une expression plus complexe. Ils ont beaucoup de difficulté à interpréter, décoder une règle ou une définition, surtout quand le symbolisme condense beaucoup d'information, comme c'est le cas ici.

Tâche 9 (Examen)

Démontrer le résultat suivant à l'aide des propriétés des matrices:

«Pour toute matrice carrée A, la matrice $\frac{1}{2}\left(A^T - A\right)$ *est antisymétrique».*

(Indiquer toutes les étapes sans les justifier.)

Démonstration

Une matrice est dite antisymétrique si elle est égale à l'inverse additif de sa transposée.

Vérifions :

$-\left(\frac{1}{2}(A^T - A)\right)^T = -\frac{1}{2}(A^T - A)^T$, car $(kA)^T = kA^T$

$= -\frac{1}{2}((A^T)^T - A^T)$, propriété de la transposée d'une différence de matrices

$= -\frac{1}{2}(A - A^T)$, la transposée de la transposée d'une matrice donne cette matrice

$= -\frac{1}{2}(-A^T + A)$, commutativité de l'addition matricielle

$= -\frac{1}{2}\left[-(A^T - A)\right]$, mise en évidence du facteur -1

$= \frac{1}{2}(A^T - A)$.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition et les propriétés des matrices transposées, les opérations sur les matrices et la définition de matrices antisymétriques.
- Les matrices sont vues comme objet. La démonstration intervient autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet. On vise un travail de mise en fonctionnement des règles d'opérations, de définitions et de propriétés liées aux matrices transposées et antisymétriques mais en même temps, on vise un travail sur la démonstration.

- Le cadre est celui des matrices. Dans l'énoncé les matrices sont représentées par des lettres majuscules et aucun changement de registre n'est nécessaire pour mener la démonstration à terme.
- Les savoirs sont tous relativement nouveaux.

Analyse des tâches

- La question est fermée, la valeur de vérité étant donnée.
- Il n'y a pas d'étapes.
- On ne suggère aucune méthode.
- Le degré de généralisation est assez élevé puisque la démonstration doit être faite pour toutes les matrices carrées de tous les formats.
- Il n'y a pas vraiment d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure de la démonstration est relativement simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement des savoirs dans ces démonstrations est mobilisable, les définitions et propriétés doivent être utilisées ou reconnues sous une autre forme que celle présentée dans le cours ou dans le manuel. En effet, elles sont à utiliser ou à reconnaître avec des matrices transposées ou avec des soustractions de matrices.
- Aucun changement de point de vue n'est à introduire.
- On ne doit pas introduire d'étapes.
- On ne doit pas développer plusieurs arguments à la fois.
- Le symbolisme est complexe puisque certains symboles sont utilisés dans d'autres cadres et ont d'autres applications.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la preuve pourrait nuire au déroulement de la démonstration. Les étudiants pourraient débuter la preuve par l'expression donnée dans l'énoncé et manipuler pour arriver à l'expression $-\left(\frac{1}{2}(A^T - A)\right)^T$. Ce serait possible d'y arriver mais les manipulations sont plus difficiles. Il faut alors introduire des objets neutres comme multiplier par 1 mais en faisant -1×-1.

- Ce qui est à démontrer nous paraît explicite dans l'énoncé.
- La matrice antisymétrique est à reconnaître sous une autre forme puisque A est antisymétrique lorsque $A=-A^T$.
- Il y a toujours la possibilité de confondre le symbole de transposition avec celui d'exposant. Cependant, les étudiants ne pourraient mener à terme la démonstration s'ils confondaient les significations de ces deux symboles.

Cette tâche est relativement complexe puisque ce n'est pas un type de démonstration familier pour les étudiants et de plus, il faut produire l'expression de la matrice antisymétrique à partir d'un format très différent de celui vu en classe.

Tâche 10 (Exercice donné en classe)

Si A^{-1} existe alors $|A|\neq 0$. Démontrer.

Démonstration

$1=|I_{n\times n}|=|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$, car le déterminant d'un produit égale le produit des déterminants.

$\Rightarrow |A|\neq 0$ et $|A^{-1}|\neq 0$, car les termes d'un produit non nul ne peuvent être nuls.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de matrice inverse, la définition de déterminant et les propriétés des déterminants.
- Les matrices et déterminants sont étudiés en tant qu'objet. La démonstration intervient pour faire travailler la définition et les propriétés des déterminants.
- Nous sommes dans le cadre des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules. Aucun changement de registre n'est nécessaire. Cependant, pour passer du nombre 1 aux déterminants de matrices, un changement de cadre est fait, c'est-à-dire qu'on passe du cadre numérique au cadre des matrices. Ce changement de cadre permet d'introduire la matrice identité (I).

- Il s'agit d'un savoir nouvellement introduit en ce qui concerne la définition de déterminant. À ce stade, les étudiants doivent être plutôt familiers avec la notion de matrice inverse.

Analyse de la tâche

- Il y a des étapes importantes, notamment celle qui consiste à partir de la valeur du déterminant de la matrice identité ($1 = |I_{n\times n}|$).
- La question est fermée puisque la valeur de vérité du résultat est connue.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Le niveau de généralisation est élevé puisque le travail est fait pour les matrices carrées inversibles de toutes dimensions.
- Le rôle du symbolisme est important puisque nous travaillons avec une matrice et son inverse.
- Pour la démonstration, il y a une prise en charge de l'enchaînement des inférences par le calcul et alors, les structures sont non complexes.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de fonctionnement est mobilisable, les étudiants ont besoin de s'adapter dans la manière de mener à bien la démonstration.
- Il y a un changement de point de vue à introduire puisque l'étudiant doit entamer la démonstration sans utiliser les déterminants.
- Ce qui est demandé est explicite dans l'énoncé.
- Un changement de point de vue est nécessaire pour mener à bien la démonstration.
- Aucune quantification n'est à prendre en compte.
- Les matrices sont à gérer sous forme de lettres majuscules comme dans l'énoncé.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Les définitions ne sont pas utilisées sous une forme facilement reconnaissable. D'abord, il faut que l'étudiant reconnaisse que $|AA^{-1}|$ est le déterminant de la matrice AA^{-1}. On peut penser que certains étudiants n'acceptent pas la notation $|AB|$ puisque pour eux, AB est une opération à faire, une multiplication de deux matrices, plutôt que le résultat du produit de deux matrices, soit une matrice. Également, il faut reconnaître la propriété $|AB| = |A||B|$ sous une nouvelle forme, c'est-à-dire que dans la démonstration, $B = A^{-1}$.

- Une fois encore, il y a possibilité de confondre le symbole de matrice inverse avec un exposant. Le symbole du déterminant pourrait être confondu avec celui de valeur absolue.

La tâche nous paraît complexe puisque les étudiants pourraient avoir de la difficulté à entrer dans la démonstration.

Tâche 11 (Exercice donné en classe)

Démontrer que le déterminant de la matrice inverse de A est l'inverse multiplicatif du déterminant de A, c'est-à-dire $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Démonstration

$AA^{-1} = I$, par définition de matrice inverse

$|AA^{-1}| = |I| = 1$, par définition du déterminant de la matrice identité

$|A||A^{-1}| = 1$, puisque le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants des deux matrices

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$, par définition et notation de l'inverse multiplicatif d'un réel donné.

Description globale de la situation

Il s'agit sensiblement de la même analyse que la tâche 10. Cependant, ici, la propriété est représentée par des lettres majuscules mais elle est aussi décrite en mots. Il y a également un changement de cadre à effectuer, soit celui de passer du cadre des matrices au cadre de l'algèbre des nombres réels. Ce changement de cadre permet l'interprétation de $|A^{-1}|$ comme l'inverse multiplicatif du réel non nul $|A|$.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que la tâche 10 mais l'étape importante de cette tâche consiste à partir de la définition de matrice inverse. Ici aussi le rôle du symbolisme est important puisque nous travaillons avec une matrice et son inverse. De plus, on entame la démonstration en manipulant des matrices et on travaille ensuite avec des déterminants, donc des nombres.

Analyse des activités attendues des étudiants

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 10.

Analyse des activités possibles des étudiants

Encore une fois, l'analyse est semblable à celle de la tâche 10. Également, une conception ritualiste de la preuve peut nuire puisque plusieurs étudiants pourraient essayer de débuter la démonstration à partir d'un des côtés de l'égalité présentée dans l'énoncé.

Une conception ritualiste de la démonstration et de fausses conceptions pourraient amener les étudiants à fournir une démonstration de ce type :

$$\left|A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

En ce sens, il y a risque de perte de contrôle et de sens. Comme le symbolisme est nouveau, nous croyons que ce dérapage est possible. Également, comme il faut d'abord débuter la démonstration par la définition de matrice inverse, sans utiliser les déterminants, la tâche est complexifiée d'autant. Nous croyons qu'il s'agit d'une tâche complexe.

Tâche 12 (Exercice)

Soit A une matrice diagonale d'ordre 3 et soit B une matrice quelconque d'ordre 3. Trouver une règle qui permet de calculer le produit AB.

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Selon la règle de la multiplication de deux matrices, nous avons :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+0+0 & a_{11}b_{12}+0+0 & a_{11}b_{13}+0+0 \\ 0+a_{22}b_{21}+0 & 0+a_{22}b_{22}+0 & 0+a_{22}b_{23}+0 \\ 0+0+a_{33}b_{31} & 0+0+a_{33}b_{32} & 0+0+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{33}b_{31} & a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Pour les matrices d'ordre 3, le produit d'une matrice diagonale par une matrice quelconque peut, pour un élément ij, se simplifier ainsi :

$$(AB)_{ij} = a_{ii}b_{ij},$$

multiplier la i-ième ligne de la matrice de droite par l'entrée sur la diagonale à la i-ième ligne de la matrice de gauche.

Nous avons bien trouvé une règle qui définit le produit d'une matrice diagonale par une matrice quelconque pour les matrices d'ordre 3.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition de matrice diagonale, la définition de multiplication de matrices.
- Les matrices sont étudiées en tant qu'objet.

- Nous sommes dans le cadre des matrices. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des lettres majuscules et décrites en mots : « une matrice diagonale » et « une matrice quelconque ». Pour représenter la règle, il est nécessaire d'identifier un élément générique *ij* de la matrice et pour vérifier la validité de cette règle, comme la question précise qu'il s'agit de matrices d'ordre 3, il faut manipuler des tableaux de variables. En tout, il y a quatre registres de représentations utilisés.
- Il s'agit d'un savoir nouvellement introduit en ce qui concerne la définition de matrice diagonale et la multiplication de matrices. Concernant la recherche d'une règle, il s'agit d'un savoir nouveau, les étudiants ne connaissent pas cette règle et sont peu familiers avec ce type de tâche.

Analyse de la tâche

- Il y a des étapes importantes, soit d'abord la conjecture d'une règle et ensuite la validation de cette règle pour les matrices carrées d'ordre 3.
- La question est ouverte, on demande de créer une règle pour la multiplication de matrices diagonales par une matrice carrée quelconque.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Le niveau de généralisation est assez élevé puisqu'il s'agit de trouver une règle pour un terme général et ce terme pourrait provenir de la multiplication d'une matrice diagonale d'ordre n par une matrice carrée quelconque d'ordre n. Cependant, la démonstration de la validation se fait avec une matrice carrée d'ordre 3.
- Il faut en principe conjecturer et ensuite, démontrer que la règle est vraie. Cependant, le calcul fait apparaître la règle de façon relativement immédiate. La difficulté réside alors beaucoup plus dans la façon de symboliser cette règle.
- Le rôle du formalisme est très important puisque nous travaillons avec une matrice diagonale. En ce sens, le choix d'utiliser les doubles indices est nécessaire pour représenter la règle correctement. Il n'est pas nécessaire de les utiliser dans les matrices de format 3×3 mais cela facilite la découverte de la règle et sa validation.
- Pour la démonstration, il y a une prise en charge par le calcul et alors, les structures sont non complexes.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Il semble que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances soit mobilisable puisque l'étudiant doit trouver la règle avec peu d'indication, mais il peut adapter la règle générale qu'il connaît de la multiplication de matrices.
- Une fois la règle suggérée par le calcul, l'étudiant doit trouver la façon de l'exprimer symboliquement.
- Seules les définitions de produit matriciel et de matrices triangulaires sont à invoquer.
- Il n'y a pas d'argument à appliquer plus d'une fois.
- La matrice est à gérer sous la forme d'un tableau de variables.

Analyse des activités des étudiants possibles

- Comme les étudiants doivent trouver une règle, une conception ritualiste de la démonstration ne peut nuire à l'obtention de cette règle. Pour valider la règle, l'étudiant doit simplement vérifier si le résultat obtenu par sa règle et celui obtenu par la définition de multiplication de matrices sont bien équivalentes.
- Dans l'énoncé, il est clair que l'étudiant doit lui-même trouver une règle mais ce qui peut être moins clair pour lui, c'est que pour que sa règle soit acceptée, il doit démontrer l'équivalence entre celle-ci et la multiplication de matrices.
- Le symbolisme dans la règle est particulier puisque l'étudiant doit utiliser les indices doubles et en plus, pour les indices de la matrice diagonale, il doit utiliser la mettre lettre pour les deux indices. Il peut être difficile pour les étudiants de remplacer x_{ij} par x_{ii} lorsque $i=j$. Autrement dit, pour les étudiants, l'indice i représente une ligne alors que l'indice j représente une colonne. Comme les indices ont des significations différentes, même s'ils ont la même valeur, on ne peut remplacer la colonne par une ligne.

Ici, nous pouvons facilement penser que les étudiants peuvent conjecturer et omettre de valider la règle trouvée, à moins que comme dans la démonstration que nous avons proposée, le calcul donne directement les entrées qui vérifient la règle. Sans validation, la conjecture d'une règle reste incomplète. L'écriture de la règle générale peut aussi troubler les étudiants. Ainsi, nous jugeons cette tâche comme complexe.

Tâche 13 (Exercice)

À l'aide des propriétés seulement, démontrer que :

a) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

a) À montrer, $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)$

$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, si une matrice est obtenue en permutant deux colonnes ou deux lignes d'une autre matrice, alors son déterminant est l'opposé du déterminant de l'autre matrice

$$-a^2L_1 + L_3 \rightarrow L_3$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$-aL_1 + L_2 \rightarrow L_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$-(b+a)L_2 + L_3 \rightarrow L_3$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b+a)(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a)-(b+a)(c-a) \end{vmatrix}, \text{ car } c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a-b-a) \end{vmatrix}, \text{ mise en facteur de } (c-a)$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix}$$

$$= -(1 \times (b-a) \times (c-a) \times (c-b)),$$

le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale

$$= -(b-a) \times (c-a) \times (c-b)$$

$$= (a-b) \times (c-a) \times (c-b)$$

$$= (a-b) \times -(c-a) \times -(c-b), \text{ car } -1 \times -1 = 1$$

$$= (a-b) \times (a-c) \times (b-c)$$

b) À montrer, $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}, \text{ la fonction}$$

« déterminant » est linéaire en les lignes ou colonnes de la matrice à laquelle elle s'applique

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}, \ C_3 - C_1 \to C_3 \text{ (matrice de gauche)},$$

si une matrice est obtenue en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne, alors la matrice obtenue et la matrice initiale ont le même déterminant.

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}, \; C_2 - C_3 \to C_2 \text{ (matrice de gauche)}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}, \; C_2 - C_1 \to C_2 \text{ (matrice de droite)}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}, \; C_3 - C_2 \to C_3 \text{ (matrice de droite)}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}, \; C_1 \leftrightarrow C_3$$

si une matrice est obtenue en permutant deux lignes d'une autre matrice, alors le déterminant de la matrice obtenue est l'opposé du déterminant de la matrice initiale,

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés des déterminants.
- Les matrices et déterminants sont étudiés en tant qu'objet et la démonstration vise un travail sur les propriétés des déterminants.
- Nous sommes dans le cadre des matrices et dans celui de l'algèbre. Dans l'énoncé, les matrices sont représentées par des tableaux de nombres et variables et l'étudiant aura à gérer les matrices sous cette forme pour mener à bien les démonstrations. Aucun changement de registre de représentations n'est nécessaire. Toutefois, il y des

changements de cadre à effectuer. En effet, pour la démonstration en a), il faut travailler dans le cadre de l'algèbre des réels pour arriver à l'expression voulue.

- Il s'agit de savoirs nouvellement introduits en ce qui concerne les propriétés des déterminants. L'algèbre utilisée est familière et a été apprise dès la deuxième année du secondaire.

Analyse de la tâche

- Les questions a) et b) sont indépendantes.
- Les questions sont fermées, les valeurs de vérité étant connues.
- Une méthode est imposée : il faut utiliser les propriétés des déterminants et ne pas développer selon la définition de déterminant.
- Le niveau de généralisation est peu élevé puisque le travail est fait sur des matrices dont la forme et le format sont précis.
- La structure de la démonstration est peu complexe puisqu'il s'agit d'appliquer certaines propriétés des déterminants. Cependant, trouver quelle propriété appliquer pourrait être difficile.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Il semble que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances soit mobilisable puisque les propriétés ne sont pas à utiliser telles que présentées dans le livre. Également, certaines manipulations des matrices sont nécessaires.
- Il ne faut pas choisir de méthode puisqu'elle est imposée.
- Il y a lieu d'introduire des étapes puisque par exemple, en a), il faut d'abord rendre la matrice triangulaire pour ensuite appliquer une propriété des déterminants.
- Il y a plusieurs arguments à appliquer plus d'une fois.
- Il y a un changement de point de vue à introduire. En effet, appliquer des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir des matrices « lignes-équivalentes » de même déterminant est un changement de point de vue sur la façon de calculer un déterminant. Ce changement est à la charge de l'étudiant.
- La matrice est à gérer sous la forme d'un tableau de variables.
- Il n'y a pas de nouveau symbole à gérer.

Analyse des activités des étudiants possibles

- Avec une conception ritualiste de la preuve, l'étudiant pourrait décider d'utiliser la définition de déterminant et arriver à l'expression finale voulue. Cependant, comme ce n'est pas ce qui est demandé, cet étudiant ne satisferait pas aux exigences de l'enseignante.
- Il est facile de décoder ce qu'il y a à démontrer.

Cette tâche est très complexe puisqu'il y a plusieurs manipulations à faire pour pouvoir appliquer une propriété qui permettra de déterminer le déterminant sans utiliser la définition. En a), par exemple, l'étudiant pourrait chercher à appliquer certaines propriétés sans rendre la matrice initiale triangulaire. De plus, rien n'indique à l'étudiant quelle est la manipulation à faire et quand. Le fait d'avoir à appliquer plusieurs fois de suite le même type de manipulation (sans indication!) rend la tâche ardue et étourdissante. L'idée d'introduire des opérations élémentaires sur les lignes est aussi laissée à la charge des étudiants, quoique la consigne « à l'aide des propriétés seulement » suggère cette piste.

Il y a beaucoup de manipulations algébriques et, en se référant aux commentaires des enseignants du collégial concernant leurs étudiants, il semble que ces derniers aient beaucoup de difficultés avec ce type de manipulations.

4.2 Systèmes d'équations linéaires

Tâche 14 (Devoir)

Considérons un système quelconque de 3 équations linéaires à trois inconnues :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Un tel système peut s'écrire comme une équation matricielle AX=B. Répondre par vrai ou faux aux questions ci-dessous. Si vous répondez vrai, présentez une argumentation. Si vous répondez faux, donnez un contre-exemple.

a) Si $|A| \neq 0$, alors le système d'équations possède exactement une solution.

b) Si $|A| = 0$, alors le système possède une infinité de solutions.

Démonstration

a) Vrai, si $|A| \neq 0$, alors A est inversible et alors, le système possède une solution unique : $X = A^{-1}B$.

En effet, soit $AX=B$.

Alors $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, puisque A est inversible

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, par associativité du produit matriciel

$IX = A^{-1}B$, par définition de matrice inverse

$X = A^{-1}B$, par définition de matrice identité.

b) Faux, soit le contre-exemple suivant :

$0x + 0y + 0z = 1$

$0x + 0y + 0z = 0$

$0x + 0y + 0z = 3$

Ici, le déterminant de A est 0 mais le système n'a aucune solution.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la résolution des systèmes d'équations linéaires à l'aide des matrices, les propriétés et opérations sur les matrices, les propriétés du déterminant et la notion de matrice augmentée.

- Ici, les matrices sont utilisées en tant qu'outil. Les systèmes d'équations linéaires sont l'objet à l'étude. Encore une fois, la démonstration intervient en tant qu'outil et en tant qu'objet puisqu'on vise un travail sur la résolution des systèmes d'équations linéaires mais en même temps, on vise un travail de démonstration.
- Nous sommes dans le cadre des systèmes d'équations linéaires. Dans l'énoncé, le système est présenté par des équations mais dans la démonstration a), un changement de registre est nécessaire : il faut gérer le système à l'aide de matrices exprimées sous forme de lettres majuscules. En b), le système est géré à l'aide d'une matrice augmentée.
- Les systèmes d'équations linéaires et les matrices augmentées sont des savoirs nouveaux, alors que les propriétés des opérations matricielles et les définitions invoquées en a) devraient maintenant être maîtrisées par les étudiants.

Analyse de la tâche

- Les questions a) et b) sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de résoudre a) pour résoudre b).
- Les questions sont ouvertes puisque les valeurs de vérité sont inconnues.
- Aucune méthode n'est imposée.
- Le niveau de généralisation est assez élevé, mais la démonstration ne doit pas être faite pour tous les systèmes d'équations linéaires possibles, mais pour un système à trois équations, trois inconnues.
- Il y a un élément implicite dans l'énoncé qui est utile pour démontrer l'affirmation en a). En effet, si le déterminant de la matrice A n'est pas nul, alors la matrice inverse de A existe.
- La structure de la démonstration en a) est peu complexe puisqu'elle est prise en charge par des propriétés d'opérations sur les matrices et des propriétés de matrices.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement visé nous semble à mi-chemin entre mobilisable et disponible. Malgré le fait que les systèmes d'équations linéaires sont à l'étude au moment où l'enseignante demande de faire cette tâche, comme on ne sait pas si les énoncés sont vrais ou faux et comme la manière de démontrer est complètement laissée à la charge de l'étudiant, il faut que ce dernier se réfère lui-même aux propriétés des déterminants, des matrices et des opérations sur les matrices.

- Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître que si le déterminant de la matrice A n'est pas nul, alors la matrice inverse de A existe. Cela permettra de démontrer que l'énoncé a) est vrai. Quant à l'énoncé b), il y a lieu de reconnaître que l'énoncé est faux pour pouvoir produire un contre-exemple.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes.
- Il n'y a pas d'arguments à appliquer plus d'une fois.
- Il n'y a pas de changement de point de vue à introduire.
- Le système d'équations linéaires est à gérer à l'aide des matrices, avec les lettres majuscules en a) et avec un tableau de nombres en b).
- Il n'y a pas de nouveau symbole à gérer.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Avec une conception ritualiste de la preuve, l'étudiant pourrait s'engager dans une preuve en essayant de résoudre le système avec les variables.
- Il n'est pas facile de décoder ce qu'il y a à montrer; d'abord, parce qu'on ne sait pas si l'énoncé est vrai ou faux mais aussi, parce que les étudiants doivent penser à utiliser les matrices pour démontrer qu'en a), l'énoncé est vrai et à utiliser un contre-exemple en b) pour montrer que l'énoncé est faux.
- Il n'y a pas lieu de reconnaître les objets sous une autre forme.
- Les résultats sont à appliquer tels que présentés dans le cours.
- Comme les étudiants ont plutôt l'habitude de manipuler des équations que de manipuler des matrices, ils pourraient être tentés de démontrer en manipulant le système d'équations sous la forme présentée dans l'énoncé.

Cette tâche est complexe puisque les étudiants ne connaissent pas la valeur de vérité des énoncés a) et b). Il y a un élément implicite important, celui de comprendre que si le déterminant de A est nul, alors A est inversible. Même en sachant que A est inversible, résoudre en multipliant de chaque côté par A^{-1} ne va pas du tout de soi. Dans le cadre de l'algèbre des réels, les étudiants sont habitués à résoudre une équation comme $5x = 4$ en

« envoyant le 5 en dessous », sans nécessairement avoir conscience qu'il s'agit de multiplier chaque côté de l'équation par $\frac{1}{5}$, inverse multiplicatif de 5. Il n'est donc pas du tout certain que les étudiants reconnaîtront l'analogie dans le cadre de l'algèbre matricielle. Finalement, il peut être difficile de trouver un contre-exemple pour la question b), d'autant plus que les étudiants ne savent pas si l'énoncé est vrai ou faux. Ils pourraient tenter de démontrer que l'énoncé est vrai.

4.3 Espace vectoriel

4.3.1 Vecteurs géométriques

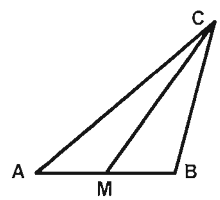
Dans cette partie de l'analyse, plusieurs tâches se ressemblent et donnent lieu à des analyses similaires. Plutôt que de reprendre les analyses pour chaque tâche, nous préférons référer le lecteur à une analyse similaire et nous nous contentons d'indiquer les différences lorsqu'il y en a.

Tâche 15 (Exercice)

Dans le triangle ABC, M est le milieu de AB.

Montrer que l'on a :

$$2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$



Démonstration

Soit le triangle ABC avec M, le milieu de AB.

Hypothèse : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Conclusion : $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB})$, par la relation de Chasles

$= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, par commutativité

$= 2\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$ étant le vecteur opposé de $\overrightarrow{MA}$

$= 2\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}$, par hypothèse

$= 2\overrightarrow{CM}$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont : les vecteurs géométriques, les opérations sur ces vecteurs géométriques (addition, soustraction de vecteurs et multiplication par un scalaire), leurs propriétés et la relation de Chasles (addition de vecteurs).
- La démonstration apparaît comme un objet dans laquelle la géométrie vectorielle apparaît comme un outil.
- L'énoncé du problème est à la fois dans le cadre de la géométrie et dans le cadre de la géométrie vectorielle. Pour mener la démonstration, il faut rester dans le cadre de la géométrie vectorielle. Les registres de représentations sont le registre discursif dans le cadre de la géométrie et les lettres majuscules surmontées d'une flèche dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il n'y a aucun changement de cadre ni de registre à faire pour mener la démonstration puisque l'énoncé indique clairement le cadre et le registre à utiliser pour démontrer. De plus, une figure accompagne l'énoncé.
- Les vecteurs géométriques ont été travaillés au secondaire et les démonstrations à l'aide des vecteurs géométriques aussi, il s'agit donc de notions connues.

Analyse de la tâche

- Il n'y a pas d'étapes.
- La question est fermée puisque ce qu'il faut démontrer est connu comme étant vrai.
- La démonstration doit être faite à l'aide des vecteurs géométriques.
- Le formalisme est donc important pour montrer que le travail est fait dans le cadre de la géométrie vectorielle.
- Il n'y a pas vraiment d'éléments implicites, sinon que de comprendre que « M est le milieu du segment $\overline{AB}$ » s'exprime comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ à l'aide des vecteurs.
- La structure de la démonstration est prise en charge par le calcul. C'est une structure relativement simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Il est difficile d'évaluer si le niveau de fonctionnement visé est technique ou mobilisable. Il apparaît selon nous comme technique puisque les démonstrations avec les vecteurs géométriques ont été travaillées en cinquième secondaire. Également, il n'y a pas beaucoup de propriétés, définitions et règles à invoquer lors de la démonstration. L'important est d'utiliser la relation de Chasles correctement et de manipuler des expressions impliquant les vecteurs.
- Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître que si M est le milieu du segment AB, alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Cependant, il n'y a pas lieu de reconnaître ce qui est à démontrer; au contraire, on le retrouve explicitement dans l'énoncé.
- Pour mener la démonstration, il n'y a pas de méthode à choisir, le cadre de la géométrie vectorielle est imposé et l'outil à utiliser est la relation de Chasles. Cependant, c'est à l'étudiant de reconnaître qu'il doit y recourir.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes.
- Il n'y a que quatre arguments à invoquer et ils ne doivent pas être invoqués plus d'une ou deux fois (dans le cas de la relation de Chasles).
- Il n'y a pas de changement de point de vue à introduire.
- La seule transformation ici est de traduire « M est le milieu du segment AB » en $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
- Il n'y a pas lieu d'introduire quelque chose d'intermédiaire.
- Pas de quantification à prendre en compte, sinon que de comprendre que cette démonstration est valable pour tous les triangles.
- Le symbolisme à gérer est connu des étudiants depuis la cinquième secondaire.

Analyse des activités possibles des étudiants

- La conception ritualiste de la preuve stipulant qu'il faut partir d'un côté de l'égalité et arriver à exprimer l'expression de départ par l'expression voulue est adéquate dans ce cas-ci. Cependant, il est possible que des étudiants écrivent : $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ pour commencer la démonstration et manipule un seul côté pour obtenir une expression identique au deuxième côté. Cette manière de faire est valable à condition d'être conscient qu'il s'agit d'équivalence entre les étapes de la démonstration.

- Ce que l'étudiant doit démontrer est explicite dans l'énoncé, l'étudiant ne devrait pas avoir de difficulté à le décoder.
- Il n'y a pas lieu de décoder certains résultats ou définitions sous d'autres formes.
- Comme le symbolisme est déjà connu des étudiants, il semble peu probable qu'il interfère avec des règles d'autres cadres plus familiers d'autant plus que, mis à part la relation de Chasles et les vecteurs opposés, les opérations utilisées (addition et multiplication par un scalaire) ont les mêmes propriétés que les opérations usuelles dans le cadre numérique.
- Le symbolisme pourrait paraître très condensé et ainsi entraîner des pertes de sens, puisque l'objet vecteur géométrique est représenté par des lettres majuscules. Cependant, comme la démonstration est prise en charge par le calcul, en appliquant correctement les règles de calculs des vecteurs géométriques, il y a peu de risque de perte de sens et de contrôle. En effet comme les règles ne sont pas en contradiction avec d'autres règles, l'étudiant qui applique, à tort, les règles de calcul du cadre numérique pourrait réussir sa démonstration.
- Le cadre est calculatoire, mais les règles (mise à part la relation de Chasles) sont les mêmes que les règles du cadre numérique.

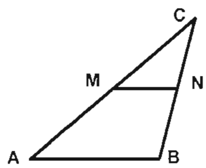
En somme, nous considérons cette tâche comme étant peu complexe puisque les étudiants ont déjà été introduits à ce type de démonstration au secondaire. De plus, ce qu'il faut démontrer est explicite dans l'énoncé ce qui facilite la tâche. Finalement, la démonstration est complètement prise en charge par le calcul.

Tâche 16 (Exercice)

Démontrer que le segment de droite qui joint les milieux des côtés AC et CB d'un triangle ABC est parallèle au troisième côté et en vaut la moitié.

Démonstration

Soit M, le milieu de $\overrightarrow{AC}$ et N, le milieu de $\overrightarrow{CB}$.



Hypothèse : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB}$

Conclusion : $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$, par la relation de Chasles

$= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CN}$, par hypothèse

$= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MN}$, par commutativité

$= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$, par la relation de Chasles

$= 2\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Comme le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une constante réelle ($\frac{1}{2}$), nous concluons que les vecteurs sont colinéaires et que les segments $\overline{MN}$ et $\overline{AB}$ sont parallèles. Également, comme la longueur du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égale à la moitié de la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on peut donc dire que la longueur du segment $\overline{MN}$ vaut la moitié de la longueur du segment $\overline{AB}$.

Description globale de la situation

La description globale de la situation est semblable à la description faite pour la tâche 15. Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les mêmes. La démonstration apparaît ici aussi comme un objet dans lequel les opérations sur les vecteurs géométriques sont des outils. Cependant, l'énoncé du problème est dans le cadre de la géométrie seulement. Pour démontrer, il faut alors traduire l'énoncé dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il n'y a aucune représentation visuelle, le registre de représentation est celui des mots en langage courant. Il faudra donc traduire en lettres majuscules surmontées d'une flèche. Il y a alors un changement de registre et un changement de cadre à effectuer. Mais il faut ensuite refaire un changement de cadre pour interpréter l'égalité vectorielle obtenue dans le cadre géométrique et dire en quoi elle montre ce qui était demandé. Comme pour la tâche 15, les vecteurs géométriques ont été travaillés au secondaire.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que la tâche 15, mais en plus, il faut considérer un autre élément implicite, le point milieu engendre des vecteurs égaux. Le parallélisme dont il est question dans l'énoncé de la tâche devra se traduire en géométrie vectorielle par la colinéarité de deux vecteurs, c'est-à-dire qu'il est possible d'exprimer un des vecteurs comme étant un multiple de l'autre par une constante réelle.

Analyse des activités attendues des étudiants

L'analyse des activités attendues des étudiants de la tâche 16 ressemble aussi à l'analyse de la tâche 15, mais quelques modifications sont nécessaires. D'abord, le fait que ce qui est à démontrer est à traduire dans le cadre vectoriel hausse le niveau de fonctionnement visé qui est, selon nous, mobilisable. Même si les étudiants ont travaillé les démonstrations avec les vecteurs géométriques en cinquième secondaire, décoder ce qu'il faut démontrer et le traduire en vecteurs géométriques demande à l'étudiant un certain ajustement. Il y a certaines indications en mots, mais une adaptation des connaissances de l'étudiant est nécessaire pour s'ajuster au contexte particulier. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître ce qu'il y a à démontrer et alors, de comprendre que les vecteurs colinéaires peuvent s'exprimer l'un comme multiple scalaire de l'autre.

Analyse des activités possibles des étudiants

Encore une fois, l'analyse se rapproche de l'analyse faite pour la tâche 15. Cependant, en terme de symbolisme, ce que l'étudiant doit démontrer est explicite dans l'énoncé mais ce qui est à la charge de l'étudiant sont les deux changements de cadre à effectuer (du cadre de la géométrie synthétique au cadre de la géométrie vectorielle pour revenir au cadre géométrique) et alors, l'étudiant doit décoder ce qu'il faut démontrer en terme de vecteurs géométriques.

et dire en quoi elle montre ce qui était demandé. Comme pour la tâche 15, les vecteurs géométriques ont été travaillés au secondaire.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que la tâche 15, mais en plus, il faut considérer un autre élément implicite, le point milieu engendre des vecteurs égaux. Le parallélisme dont il est question dans l'énoncé de la tâche devra se traduire en géométrie vectorielle par la colinéarité de deux vecteurs, c'est-à-dire qu'il est possible d'exprimer un des vecteurs comme étant un multiple de l'autre par une constante réelle.

Analyse des activités attendues des étudiants

L'analyse des activités attendues des étudiants de la tâche 16 ressemble aussi à l'analyse de la tâche 15, mais quelques modifications sont nécessaires. D'abord, le fait que ce qui est à démontrer est à traduire dans le cadre vectoriel hausse le niveau de fonctionnement visé qui est, selon nous, mobilisable. Même si les étudiants ont travaillé les démonstrations avec les vecteurs géométriques en cinquième secondaire, décoder ce qu'il faut démontrer et le traduire en vecteurs géométriques demande à l'étudiant un certain ajustement. Il y a certaines indications en mots, mais une adaptation des connaissances de l'étudiant est nécessaire pour s'ajuster au contexte particulier. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître ce qu'il y a à démontrer et alors, de comprendre que les vecteurs colinéaires peuvent s'exprimer l'un comme multiple scalaire de l'autre.

Analyse des activités possibles des étudiants

Encore une fois, l'analyse se rapproche de l'analyse faite pour la tâche 15. Cependant, en terme de symbolisme, ce que l'étudiant doit démontrer est explicite dans l'énoncé mais ce qui est à la charge de l'étudiant sont les deux changements de cadre à effectuer (du cadre de la géométrie synthétique au cadre de la géométrie vectorielle pour revenir au cadre géométrique) et alors, l'étudiant doit décoder ce qu'il faut démontrer en terme de vecteurs géométriques.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 17, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit essentiellement de la même analyse que celle de la tâche 16.

Analyse des activités attendues des étudiants

L'analyse des activités attendues des étudiants de la tâche 17 ressemble à celle de la tâche 16. Il faut cependant ajouter qu'il y a un changement de point de vue à introduire, si l'on compare avec les deux autres démonstrations des tâches 15 et 16. En effet, il faut exprimer un même vecteur de deux manières différentes à l'aide de la relation de Chasles et ensuite, additionner les expressions trouvées.

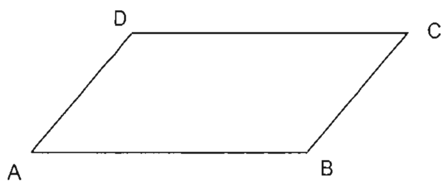
Analyse des activités possibles des étudiants

L'analyse de la tâche 17 est sensiblement correspondante à l'analyse de la tâche 15 à quelques modifications près. Ici, une conception ritualiste de la preuve peut nuire au bon déroulement de la démonstration. En effet, si l'étudiant décide de « partir d'un côté » de l'égalité pour arriver à exprimer l'expression de départ par l'expression voulue, il risque de manipuler longtemps les expressions équivalentes sans parvenir à l'expression escomptée. Comme pour la tâche 16, en terme de symbolisme, ce que l'étudiant doit démontrer est explicite dans l'énoncé mais l'étudiant doit traduire ce qu'il faut démontrer en terme de vecteurs géométriques.

En terme de complexité, cette tâche nous apparaît comme plus difficile que les tâches 15 et 16 puisqu'en plus de devoir traduire ce qu'il faut démontrer en une expression contenant des vecteurs géométriques, les étudiants doivent mener la démonstration différemment de ce à quoi ils sont habitués. En effet, exprimer un même vecteur de deux façons différentes et penser à additionner ces deux expressions ne se fera pas d'emblée chez les étudiants. Mentionnons également que l'énoncé de la tâche est inadéquat. En effet, qu'est-ce que la demi-somme de deux segments ? On aurait dû parler de longueur de segment.

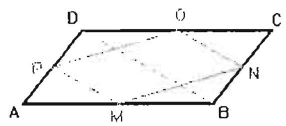
Tâche 18 (Exercice)

Démontrer que si l'on joint les milieux consécutifs des côtés d'un parallélogramme on obtient un parallélogramme.



Remarque : en géométrie vectorielle, ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Démonstration



Voir la démonstration plus générale de la tâche 19.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 18, il suffit de se référer à la description de la tâche 15. Cependant, il y a plus d'information dans le texte de l'énoncé que dans la figure.

Analyse de la tâche

Pour l'analyse de la tâche 18, se référer à l'analyse de la tâche 19.

Analyse des activités attendues et possibles des étudiants

Encore une fois, pour les analyses de cette tâche, il faut se référer à l'analyse de la tâche 19.

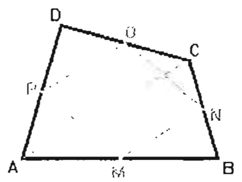
Cette tâche nous paraît complexe pour les raisons explicitées à la tâche 19. Notons la remarque qui est ajouté à l'énoncé de la tâche. Selon l'énoncé, les vecteurs formant le parallélogramme pourrait tous être supportés par une même droite. Ainsi, selon cette remarque, on accepte les parallélogrammes dégénérés.

Tâche 19 (Exercice)

Démontrer que si l'on joint les milieux consécutifs des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme.

Démonstration

Soit le quadrilatère $ABCD$ avec M le milieu de $\overrightarrow{AB}$, N le milieu de $\overrightarrow{BC}$, O le milieu de $\overrightarrow{CD}$ et P le milieu de $\overrightarrow{DA}$.



Hypothèse : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PD}$ et $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OC}$

Conclusion : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MP}$

1. Considérons le triangle ABC.

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, par la tâche 16.

2. Considérons le triangle ADC.

$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, par la tâche 16.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$, par 1 et 2.

Par un même raisonnement, nous prouvons que $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MP}$.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 19, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 16 en ajoutant des éléments implicites. En effet, en plus de dégager que le point milieu engendre deux vecteurs congrus, il faut considérer qu'avec un quadrilatère, nécessairement, on peut former des triangles avec les sommets de ce quadrilatère.

Analyse des activités attendues des étudiants

L'analyse des activités attendues des étudiants pour la tâche 19 est comparable à l'analyse de la tâche 16. En plus, comme pour la tâche 17, il faut tenir compte d'un changement de point de vue à introduire. En effet, pour les tâches précédentes, il suffisait d'exprimer un vecteur comme combinaison de plusieurs vecteurs et de manipuler les différentes expressions équivalentes. Ici, il faut passer par une figure géométrique intermédiaire, le triangle, pour pouvoir utiliser la démonstration de la tâche 16. Il faut alors considérer les diagonales du quadrilatère même si l'énoncé n'en fait pas mention. Il s'agit donc d'un élément implicite à prendre en considération.

Analyse des activités possibles des étudiants

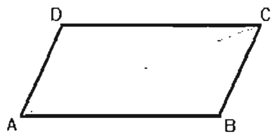
Pour cette tâche, l'analyse est comparable à celle de la tâche 16. Cependant, avec cette démonstration (d'autres solutions sont possibles), il y a lieu de reconnaître un résultat sous une autre forme. En effet, l'étudiant est amené à reconnaître qu'avec une diagonale d'un quadrilatère, on forme deux triangles. L'étudiant pourrait penser qu'il est possible d'utiliser le résultat démontré de la tâche 16 seulement lorsqu'un énoncé porte sur un triangle.

Cette tâche est très simple si l'étudiant arrive à percevoir qu'une diagonale permet d'obtenir deux triangles et qu'alors, il est possible d'exprimer les côtés du quadrilatère formé par une même expression qui dépend de cette diagonale. Cependant, il nous semble que ce passage est assez complexe puisqu'il demande à l'étudiant de reconnaître un résultat sous une autre forme ce qui, par l'analyse diagnostique que nous avons faite, est parfois ardu pour les étudiants. Nous considérons donc cette tâche comme complexe.

Tâche 20 (Exercice)

Démontrer qu'un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles de même longueur est un parallélogramme.

Démonstration



Hypothèse : Soit le quadrilatère $ABCD$ avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Conclusion : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Considérons la diagonale $\overrightarrow{AC}$.

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, par la relation de Chasles

2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, par la relation de Chasles

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, par 1 et 2

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$, par hypothèse

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, en soustrayant $\overrightarrow{AB}$ de chaque côté.

Par la remarque énoncée à la tâche 18, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 20, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que pour la tâche 17.

Analyse des activités attendues des étudiants

Bien qu'il n'y ait pas de changement de point de vue à introduire, l'analyse des activités attendues des étudiants pour la tâche 20 est comparable à l'analyse de la tâche 19 puisqu'il faut considérer la diagonale, ce qui est implicite dans l'énoncé.

Analyse des activités possibles des étudiants

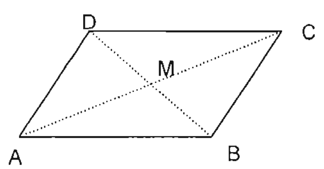
L'analyse de la tâche 20 est sensiblement correspondante à l'analyse de la tâche 17 et celle de la tâche 19. Ici aussi, une conception ritualiste de la preuve peut induire l'étudiant en erreur. Comme pour la tâche 19, l'étudiant doit considérer la diagonale pour mener à bien la démonstration.

Cette tâche nous apparaît comme relativement complexe. Il pourrait être difficile de décoder ce qu'il faut montrer puisqu'il faut changer de cadre et traduire l'énoncé géométrique dans le cadre vectoriel.

Tâche 21 (Exercice)

Démontrer qu'un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Démonstration



Hypothèse : Soit le quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales se coupent en leur milieu M.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$

Conclusion : Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}$, par hypothèse

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$, par commutativité de l'addition de vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, par la relation de Chasles,

donc le côté AB est parallèle au côté DC et les deux sont de même longueur. Par la tâche 20, on conclut que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 21, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que pour la tâche 16.

Analyse des activités attendues des étudiants

Il s'agit de la même analyse que pour la tâche 16.

Analyse des activités possibles des étudiants

Il s'agit de la même analyse que la tâche 16.

Cette tâche nous paraît moyennement complexe. Il faut traduire l'énoncé en géométrie vectorielle. Une fois les hypothèses traduites et la conclusion décodée, la démonstration est simple à mener.

Tâche 22 (Exercice)

Démontrer que, dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Démonstration

Hypothèse : Soit le parallélogramme *ABCD* et *M*, le milieu de la diagonale *AC*, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

Conclusion : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$, puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*ABCD* est un parallélogramme)

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$, on a remplacé $\overrightarrow{AM}$ par $\overrightarrow{MC}$, qui lui est égal par hypothèse

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$, par simplification.

Cette dernière égalité nous permet de conclure que les vecteurs sont colinéaires et donc que les segments $\overline{MB}$ et $\overline{DM}$ sont parallèles. Puisque les vecteurs ont en commun le point *M*, les segments $\overline{MB}$ et $\overline{DM}$ forment donc la diagonale $\overline{DB}$. Finalement, la longueur des vecteurs (et par le fait même des segments) est la même et alors, *M* est bien le point milieu de $\overline{DB}$.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 22, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que pour la tâche 16.

Analyse des activités attendues des étudiants

Il s'agit essentiellement de la même analyse que pour la tâche 16. Cependant, un changement de point de vue est à introduire ici, à savoir, reformuler « les diagonales se coupent en leur milieu » par « le milieu d'une des diagonales est sur l'autre et est au milieu de cette autre ».

Analyse des activités possibles des étudiants

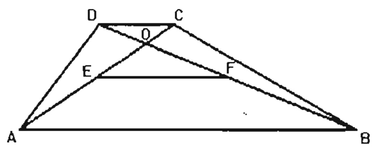
Il s'agit de la même analyse que pour la tâche 16.

Cette tâche nous paraît moyennement complexe pour les mêmes raisons évoquées à la tâche précédente et pour le changement de point de vue nécessaire.

Tâche 23 (Exercice)

Soit un trapèze quelconque ABCD. On mène les diagonales AC et BD.

Démontrer que le segment EF joignant les milieux des diagonales est parallèle aux bases et sa longueur est la demi-différence des longueurs des bases.



Démonstration

Hypothèse : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FD}$

Conclusion : $\overline{EF}$ est parallèle à $\overline{AB}$ et $\left\| \overrightarrow{EF} \right\| = \frac{1}{2}(\left\| \overrightarrow{AB} \right\| - \left\| \overrightarrow{DC} \right\|)$

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, par la relation de Chasles

2. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$, par la relation de Chasles

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$, en additionnant 1 et 2 membre à membre

$2\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FD}$, vecteurs opposés

$2\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BF}$, par hypothèse

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, en simplifiant

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

Comme le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et par la dernière égalité, $\overrightarrow{EF}$ leur est colinéaire. Autrement dit, les segments $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ et $\overline{EF}$ sont parallèles. Également, la longueur du vecteur $\overrightarrow{EF}$ vaut la demi-différence des longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 23, il suffit de se référer à la description de la tâche 16. Une seule modification : il y a une figure représentant l'énoncé en mots. Le changement de registres se fait alors à partir des mots et de la figure.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 17.

Analyse des activités possibles des étudiants

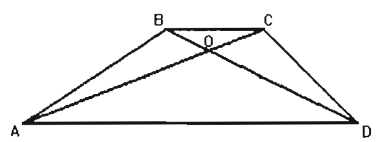
Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 17.

Cette tâche apparaît comme étant très complexe puisqu'il faut traduire ce qui est à démontrer en une expression contenant des vecteurs géométriques. Les étudiants doivent mener la démonstration différemment de ce à quoi ils sont habitués. En effet, devoir exprimer un même vecteur de deux façons différentes et penser à additionner ces deux expressions ne se fera pas d'emblée chez les étudiants. La traduction de la dernière égalité dans le cadre géométrique peut être difficile pour les étudiants. De plus, les manipulations à faire sont particulièrement compliquées. L'étudiant pourrait ne pas savoir comment diriger son calcul et pourrait tourner en rond.

Tâche 24 (Exercice)

Dans le trapèze ci-contre, on a $3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Démontrer que les diagonales se coupent en un point O situé au quart de chacune d'elles.



Démonstration

Hypothèse : $3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Nous allons choisir le point O sur la diagonale $\overline{AC}$ tel que $3\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$.

Nous allons ensuite montrer que $3\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$, par hypothèse et par la relation de Chasles

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{CO}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO}$, en distribuant le scalaire sur les termes de l'addition

$\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO}$, vecteur opposé

$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{CO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO}$, par le choix fait pour le point O.

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$, par simplification

$3\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

Par la dernière égalité, nous concluons que les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires. Ainsi les segments $\overline{BO}$ et $\overline{OD}$ sont parallèles. Comme ils ont le point O en commun, ils sont donc supportés par une même droite BD. Le point O appartient donc au segment $\overline{BD}$, l'autre diagonale du trapèze et comme $3\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ et $\left\|\overrightarrow{BO}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 24, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 17.

Analyse des activités attendues des étudiants

Il s'agit d'une analyse proche de l'analyse de la tâche 16, mais il y a un changement de point de vue à introduire. En effet, il ne s'agit pas ici de partir d'un vecteur géométrique à exprimer comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs, mais bien de placer le point O aux trois quarts sur une des diagonales et de montrer que l'autre diagonale passe bel et bien par ce point O et qu'il est au quart de cette autre diagonale.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une fois que l'égalité à démontrer a été trouvée de la part des étudiants, ces derniers peuvent entamer la démonstration en partant d'un côté pour arriver, par manipulation à l'autre. Cette conception ritualiste de la preuve ne nuit pas dans ce cas particulier.
- Il faut comprendre que si le point O est au quart du segment, alors $3\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$.
- Il y a lieu de décoder un résultat sous une autre forme car pour montrer que le point O est sur la diagonale $\overline{BD}$ et est situé au quart de celle-ci, il suffit de montrer que $3\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.
- Comme ce symbolisme est déjà connu des étudiants, il ne semble pas possible qu'il interfère avec des règles d'autres cadres plus familiers d'autant plus que, mis à part la relation de Chasles et les vecteurs opposés, les opérations utilisées (addition et multiplication par un scalaire) ont les mêmes propriétés que les opérations usuelles dans le cadre numérique.
- Un raisonnement direct ne suffit pas pour mener la démonstration puisqu'il faut d'abord supposer un point O au quart du segment $\overline{AC}$.

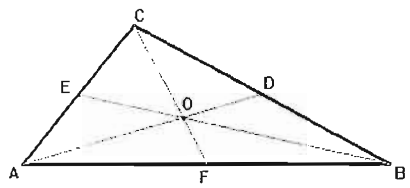
Cette tâche nous paraît très complexe dans la mesure où un changement de point de vue est laissé à la charge des étudiants. Les étudiants ne sont pas familiers avec ce type de démonstration, qui demande une réinterprétation complète de ce qui est demandé : « les diagonales se coupent en O ». On place d'abord un point O sur une diagonale et on montre que l'autre diagonale passe aussi par ce point O. Également, il faut que les étudiants décodent dans une expression vectorielle que le point O appartient à la diagonale $\overline{BD}$. De plus, les étudiants ont à gérer la proportion donnée en terme de vecteurs.

Tâche 25 (Exercice)

Les médianes d'un triangle ABC quelconque concourent en un point O situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet. Démontrer.

Démonstration

Soit D, E et F les milieux, respectivement, des côtés $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AB}$. Nous allons choisir un point O sur la médiane issue de A, tel que $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$. Nous allons ensuite montrer que $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OE}$ et que $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{OF}$. Ces deux égalités permettent de conclure puisqu'elles ne sont vectoriellement possibles que si B, O et E sont alignés et si C, O et F sont alignés, c'est-à-dire que si O est sur chacune des deux autres médianes, aux deux tiers de chacune d'elle.



$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, par choix de O

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})$, par hypothèse, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})$, par la relation de Chasles $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})$, par hypothèse, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$ et par le choix du point O, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}) + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})$, par la relation de Chasles $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, distribution du scalaire $\frac{1}{2}$ sur l'addition

$\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AE}$, en additionnant

$\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OE}$, par la relation de Chasles.

Par la dernière égalité, nous concluons que les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires. Ainsi les segments $\overline{BO}$ et $\overline{OE}$ sont parallèles. Comme ils ont un point commun; *O*, ils sont donc supportés par une même droite *BE*. Le point *O* appartient donc au segment $\overline{BE}$ et comme $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

Par un même raisonnement, nous prouvons que *O* appartient donc au segment $\overline{BE}$ et que $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$.

Description globale de la situation

Pour la description globale de la situation de la tâche 25, il suffit de se référer à la description de la tâche 16.

Analyse de la tâche

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 17.

Analyse des activités attendues des étudiants

Pour l'analyse des activités attendues des étudiants de la tâche 25, il suffit de se référer à la description de la tâche 24.

Analyse des activités possibles des étudiants

On peut se référer à l'analyse de la tâche précédente.

Comme pour la tâche 24, cette tâche est très complexe dû au changement de point de vue à introduire sans indication, à la réinterprétation de ce qui est à démontrer, à l'interprétation des expressions vectorielles et à la traduction de la proportion donnée en terme de vecteurs.

Tâche 26 (Devoir)

*Considérons le trapèze ABCD dont la base $\overline{BC}$ mesure le cinquième de la base $\overline{AD}$. On construit P et Q, les milieux des côtés non parallèles du trapèze, de même que M et N, points situés au 1/3 des diagonales du trapèze à partir des points A et D respectivement. Démontrer que le quadrilatère PQNM est un parallélogramme. (Indiquer clairement les **hypothèses** et la **conclusion** en termes **vectoriels**.)*

Démonstration

Hypothèses : $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$, P et Q milieux des côtés $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$ respectivement.

Conclusion : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

1. $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}}{2} = 3\overrightarrow{BC}$, dans un trapèze, le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases et en égale la demi-somme

2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, par la relation de Chasles

$= \frac{-1}{2}\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$, par hypothèses

Mais aussi,

3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$, par la relation de Chasles

$= \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{NB}$, vecteurs opposés

4. En additionnant 2 et 3 membre à membre,

$2\overrightarrow{MN} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MC} + MC + 5\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NB}$

$2\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$

$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + 8\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{NB}$, en multipliant par 2 de chaque côté

$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + 8\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}$, vecteur opposé

$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} + 9\overrightarrow{BC}$

$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + 9\overrightarrow{BC}$

$3\overrightarrow{MN} = 9\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BC}$

d'où $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, par 1 et par 4,

d'où le quadrilatère $PQNM$ est un parallélogramme par la tâche 20.

Description globale de la situation

La description globale de la situation est semblable à la description faite pour la tâche 16 puisque l'énoncé du problème est dans le cadre de la géométrie seulement. Pour démontrer, il faut alors pouvoir traduire les hypothèses et la conclusion dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il n'y a aucune représentation visuelle, le registre de représentations est celui des mots en langage courant. Il faudra donc traduire en lettres majuscules surmontées d'une flèche.

Analyse de la tâche

Il s'agit d'une même analyse que les tâches précédentes, mais dans cette démonstration, les étapes sont importantes. En effet, il y a lieu d'exprimer le vecteur $\overline{MN}$ de deux manières différentes et d'ensuite additionner les deux expressions obtenues pour éventuellement arriver à une même expression que pour le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Ici, le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable. Les étudiants doivent adapter leur connaissance pour arriver à démontrer l'énoncé.
- Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de traduire en une expression vectorielle la proportion « M est au tiers du segment $\overline{AC}$ » (Ex : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$). Il y a aussi lieu de

reconnaître ce qui est à démontrer puisque vectoriellement, on ne démontre pas tout à fait ce qui est demandé dans l'énoncé.

- Pour mener la démonstration, il n'y a pas de méthode à choisir, le cadre de la géométrie vectorielle est imposé et alors, l'outil à utiliser est la relation de Chasles.
- Il y plusieurs arguments à invoquer, mais ils devraient être connus des étudiants.
- Il y a un changement de point de vue à introduire, soit celui de prouver que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ pour prouver que $PQNM$ est un parallélogramme. Ce changement de point de vue est laissé à la charge des étudiants.
- Les transformations nécessaires sont d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- Il est possible que l'étudiant doive introduire quelque chose d'intermédiaire. En effet, dans notre démonstration, nous arrivons à l'expression $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + 8\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}$ et nous voulons avoir l'expression $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$. Ainsi, nous ajoutons et retranchons le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- Pas de quantification à prendre en compte. Cette démonstration est valable pour tous les trapèzes dont la petite base est le cinquième de la grande base.
- Le symbolisme à gérer est connu des étudiants depuis la cinquième secondaire.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Il serait difficile pour les étudiants de démontrer ce qu'on leur demande avec une conception de la démonstration voulant qu'il faut partir d'un côté de l'égalité et arriver à exprimer l'expression de départ avec l'égalité suivante : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.
- Ce que l'étudiant doit démontrer est explicite mais la traduction dans le cadre de la géométrie vectorielle est laissée à la charge de l'étudiant.
- Il y a lieu de décoder certains résultats ou définitions sous d'autres formes : si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, alors $PQNM$ est un parallélogramme.
- Comme ce symbolisme est déjà connu des étudiants, il ne semble pas possible qu'il interfère avec des règles d'autres cadres plus familiers d'autant plus que, mis à part la relation de Chasles et les vecteurs opposés, les opérations utilisées (addition et

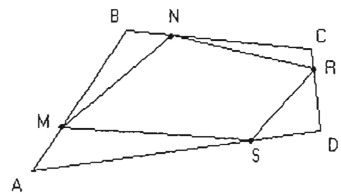
multiplication par un scalaire) ont les mêmes propriétés que les opérations usuelles dans le cadre numérique.

- Le symbolisme pourrait paraître très condensé et ainsi entraîner des pertes de sens puisque l'objet vecteur géométrique est représenté par des lettres majuscules. Également, comme la démonstration est prise en charge par le calcul, nous avons vu dans l'analyse diagnostique qu'il y a des risques de perte de sens et de contrôle.

En somme, nous considérons cette tâche comme très complexe même si les étudiants ont déjà été introduits à ce type de démonstration au secondaire. Comme la démonstration est prise en charge par le calcul, il devient plausible que les étudiants manipulent les quelques relations et propriétés des opérations sur les vecteurs qu'ils connaissent, mais n'arrivent pas à démontrer l'énoncé. D'abord parce qu'ils doivent traduire en une expression vectorielle ce qu'ils ont à démontrer, deuxièmement parce que la démonstration n'est pas sous une forme habituelle. En effet, il faut exprimer $\overrightarrow{MN}$ de deux manières différentes et ensuite additionner les expressions. Finalement, parce qu'il est possible que l'étudiant doive introduire quelque chose d'intermédiaire (on ajoute et retranche le même vecteur). Cela ne ressemble pas à ce que les étudiants ont l'habitude de faire (par exemple ajouter 4 et retrancher 4 ou multiplier par $\frac{5}{5}$).

Tâche 27 (Devoir)

Considérons un quadrilatère quelconque ABCD et soit MNRS les points situés dans le rapport $\frac{1}{4}$ *de leur segment à partir de A, B, C et D respectivement. (Le problème peut également fonctionner avec un rapport k, plus généralement.)*



a) Montrer que : « Sous ces conditions, le vecteur $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RS}$ *est parallèle au vecteur* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ *». (Indiquer clairement les* ***hypothèses*** *et la* ***conclusion*** *en termes* ***vectoriels****.) Faire un dessin qui illustre bien cet énoncé.*

b) En considérant toujours la figure décrite ci-haut, trouver une condition supplémentaire sur la figure ABCD qui assure que le quadrilatère MNRS est un parallélogramme. Votre condition doit être assez simple pour être décrite en mots.

c) Démontrer ensuite votre résultat : « Dans la figure ci-haut, si [CONDITION TROUVÉE] alors MNRS est un parallélogramme. » (Indiquer clairement les ***hypothèses*** *et la* ***conclusion*** *en termes* ***vectoriels****.)*

Démonstration

a) À montrer $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RS})=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$

Hypothèses : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$

Conclusion : $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RS})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$

$(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RS})=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{DS}$, par la relation de Chasles

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, par hypothèses

$4(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RS}) = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, en multipliant par 4 de chaque côté

$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$, par la relation de Chasles

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

d'où $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

Comme le vecteur $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RS}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ par une constante réelle ($\frac{1}{2}$), nous concluons que les vecteurs sont colinéaires et que les segments représentés par $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ sont parallèles.

b) La condition nécessaire est que le rapport des points *M*, *N*, *R* et *S* par rapport aux segments respectifs *AB*, *BC*, *CD* et *DA* soit de ½.

c) La démonstration a été faite à la tâche 19.

Description globale de la situation

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 26.

Analyse de la tâche

L'analyse de la tâche 27 est semblable à celle de la tâche 26, cependant, ici, il n'y a pas lieu d'exprimer un même vecteur de deux manières différentes.

Analyse des activités attendues des étudiants

Encore une fois, on peut se référer à l'analyse de la tâche 26, cependant, il faut reconnaître que le parallélisme se traduit par cette expression vectorielle : $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RS}) = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

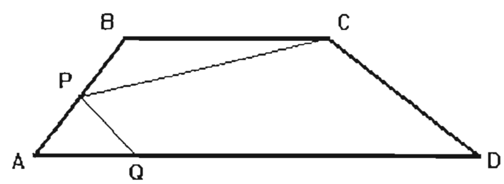
Analyse des activités possibles des étudiants

Pour cette démonstration, on retrouve les mêmes éléments soulevés que pour la démonstration précédente.

Nous considérons cette tâche complexe. En plus du type de démonstration auquel les étudiants sont peu habitués, il leur faut gérer les proportions à travers les manipulations des vecteurs et des opérations sur ceux-ci. Comme nous avons vu dans la problématique, il semble que ce type de manipulations soit propice aux glissements de sens.

Tâche 28 (Examen)

*Considérons un trapèze ABCD dont la longueur de la base BC est le 3/5 de la base AD. Considérons P situé au milieu de AB et Q situé au 1/5 de AD à partir de A (voir tableau). Montrer que PQDC est un trapèze. (Indiquer clairement les **hypothèses** et la **conclusion** en termes **vectoriels**.)*



Démonstration

Hypothèses : $\frac{3}{5}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$

Conclusion : $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CD}$ pour un certain $k \in \Re$.

1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$, par la relation de Chasles

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, par hypothèses

2. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ}$, par la relation de Chasles

$= \overrightarrow{PB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \frac{-4}{5}\overrightarrow{AD}$, par hypothèses

3. En additionnant 1 et 2 membre à membre,

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \frac{-4}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{-4}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$$

$= \overrightarrow{CD}$, vecteurs opposés

d'où $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Comme le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{CD}$ par une constante réelle ($\frac{1}{2}$), nous concluons que les vecteurs sont colinéaires et que les segments représenté par $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles. Par définition de « trapèze », le quadrilatère *PQDC* est un trapèze.

Description globale de la situation

Il s'agit de la même analyse que celle de la démonstration 26, mais une représentation visuelle de la figure est fournie.

Analyse de la tâche

Il s'agit d'une même analyse que pour les tâches précédentes mais dans cette démonstration, les étapes sont importantes. En effet, il y a lieu d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ de deux manières différentes et d'ensuite additionner les deux expressions obtenues pour éventuellement arriver à une expression contenant le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Analyse des activités attendues des étudiants

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche 26.

Analyse des activités possibles des étudiants

Il est aussi possible de se référer à la tâche 26 pour l'analyse des activités possibles des étudiants.

Encore une fois, nous considérons cette tâche comme très complexe, même si les étudiants ont déjà été introduits à ce type de démonstration au secondaire. Comme la démonstration est prise en charge par le calcul, il devient plausible que les étudiants manipulent les quelques relations et propriétés des opérations sur les vecteurs qu'ils connaissent, mais n'arrivent pas à démontrer l'énoncé. D'abord parce qu'ils doivent reconnaître ce qu'ils ont à démontrer, deuxièmement parce que la démonstration n'est pas sous une forme habituelle, il faut exprimer $\overrightarrow{PQ}$ de deux manières différentes et ensuite, additionner les expressions.

4.3.2 Indépendance linéaire et dépendance linéaire

Tâche 29 (Exercice)

Soit V un espace vectoriel sur $\Re$ *et soit* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *des vecteurs de V et soit*

$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ *et* $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$. *Montrer que*

a) Si $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *sont linéairement indépendants alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont aussi linéairement indépendants.*

b) Si $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *sont linéairement dépendants alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont aussi linéairement dépendants.*

Démonstration

a) Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants, alors $k_1\vec{x} + k_2\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$.
Vérifions que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi linéairement indépendants. Supposons que pour $m_1, m_2 \in \Re$, on ait $m_1\vec{u} + m_2\vec{v} = \vec{0}$. Alors, $m_1\vec{x} + m_1\vec{y} + m_2\vec{x} - m_2\vec{y} = \vec{0}$
$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\vec{x} + (m_1 - m_2)\vec{y} = \vec{0}$.
Sachant que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants, alors $m_1 + m_2 = 0$ et $m_1 - m_2 = 0$, système dont $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$ est solution unique.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

b) Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants, alors $\vec{y} = \vec{0}$ ou $\vec{x} = k\vec{y}$ ou pour un certain $k \in \Re$.

Si $\vec{y} = \vec{0}$, alors $\vec{u} = \vec{x} = \vec{v}$ est clairement une relation de dépendance linéaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Sinon, on a

$\vec{u} = k\vec{y} + \vec{y} = (k+1)\vec{y}$ et $\vec{v} = k\vec{y} - \vec{y} = (k-1)\vec{y}$.

Si $k \neq 1$, on peut écrire

$\vec{u} = \frac{(k+1)}{(k-1)}(k-1)\vec{y} = \frac{(k+1)}{(k-1)}\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

Si $k = 1$, alors $\vec{x} = \vec{y}$

$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{y}$ et $\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants puisque $\vec{v} = 0\vec{u}$ est une relation de dépendance linéaire possible.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les définitions de dépendance et d'indépendance linéaire.
- C'est autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet qu'on utilise la démonstration. On peut penser qu'à travers cette tâche, le professeur visait un travail de mise en fonctionnement des définitions de dépendance et d'indépendance linéaire. La tâche peut aussi viser un travail sur la démonstration, surtout en b) où il faut gérer deux cas possibles.
- La tâche est dans le cadre des espaces vectoriels abstraits et le registre de représentations est l'équation vectorielle, tant dans l'énoncé que dans la démonstration. Dans l'énoncé, on présente ce qui est à démontrer en mots. Une traduction en équations vectorielles sera laissée à la charge de l'étudiant. De plus, en a), un changement de cadre est nécessaire : il faut travailler dans le cadre de l'algèbre des réels pour résoudre un système d'équations.
- Il s'agit d'un savoir nouveau pour les étudiants qui travaillent pour la première fois, dans le cadre de ce cours, les notions de dépendance et d'indépendance linéaire.

Analyse de la tâche

- Telles que présentées dans la démonstration ci-dessus, les questions sont indépendantes.
- Les questions sont fermées, la valeur de vérité de chacune est connue.

- Aucune méthode n'est suggérée.
- Le degré de généralisation est élevé puisque les vecteurs impliqués n'ont pas de dimension définie. Ainsi, la démonstration est valable pour tous les espaces vectoriels de toutes dimensions. Cependant, si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ peuvent être n'importe lesquels (de même dimension) les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont précisément donnés en fonction de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
- Le rôle du formalisme est important puisqu'il faut distinguer les vecteurs des scalaires. Ainsi, la flèche qui surmonte la lettre minuscule est à conserver tout au long de la démonstration, d'autant plus qu'en a), on manipule des équations vectorielles et des équations algébriques usuelles.
- La structure de la démonstration est assez simple dans les deux quoi qu'en b), il faut gérer deux cas possibles, qui ne peuvent être gérés par la définition plus générale.
- Il y a lieu d'utiliser deux définitions de l'indépendance linéaire qui sont équivalentes, la première : « $k_1\vec{x} + k_2\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ » et la deuxième : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont multiples scalaires l'un de l'autre ». Le choix de la définition à utiliser et à quel moment, est laissé à la charge de l'étudiant.

Analyse des activités attendues des étudiants

- En ce qui concerne l'utilisation des définitions de dépendance et d'indépendance linéaire, on peut qualifier de technique le niveau de fonctionnement visé; cependant, en ce qui a trait à la démonstration, le niveau est plutôt mobilisable puisqu'aucune méthode n'est suggérée à l'étudiant.
- Pour les questions a) et b), il y a lieu d'introduire des étapes. En a), il faut d'abord gérer l'équation vectorielle et ensuite, résoudre un système d'équations algébriques dans les réels. En b), il faut gérer plusieurs cas possibles.
- Il faut introduire les scalaires m_1 et m_2 à la démonstration en a) pour faire la vérification voulue.
- Les définitions de dépendance et d'indépendance supposent des quantifications implicites : $\forall\, k_1, k_2 \in \Re,\ \ k_1\vec{x} + k_2\vec{y} = \vec{0} \ \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$. Pour la dépendance, la

négation de ces quantifications est difficile à gérer : $\exists k_1, k_2 \in \Re \mid k_1\vec{x} + k_2\vec{y} = \vec{0}$ et $(k_1,k_2) \neq (0,0)$.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste ne permet pas d'entrer dans la démonstration puisqu'on ne présente pas dans l'énoncé une égalité à démontrer. Ainsi, plusieurs étudiants pourraient être bloqués dès le départ, ne sachant comment utiliser les définitions de dépendance et d'indépendance linéaire.
- Il n'est pas difficile pour l'étudiant de décoder ce qu'il doit démontrer car la question est explicite. Cependant, il pourrait être difficile de traduire en équations vectorielles ce qui est à démontrer, surtout en a).
- Dans la démonstration en a), il y a lieu de reconnaître la définition d'indépendance linéaire sous une forme légèrement modifiée. En effet, l'étudiant arrive à un facteur multiplicatif qui a la forme d'une addition (ou soustraction) de constantes. Il pourrait ne pas percevoir qu'il est possible d'arriver à ce qu'il veut avec cette somme (ou soustraction).
- Le symbolisme nous semble assez familier pour les étudiants.

Cette tâche est très complexe dans la mesure où il faut pouvoir entrer dans la démonstration. En effet, même si ce qu'il faut démontrer est explicite, aucune méthode n'est suggérée. Il suffit d'utiliser la définition d'indépendance linéaire, mais les étudiants pourrait ne pas penser à vérifier que les coefficients multipliant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bel et bien 0 (en utilisant l'hypothèse que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants) pour obtenir l'égalité suivante : $(m_1 + m_2)\vec{x} + (m_1 - m_2)\vec{y} = \vec{0}$. Également, il y a un changement de cadres à effectuer, les étudiants doivent passer au cadre de l'algèbre des réels pour résoudre un petit système d'équations. La principale difficulté est l'utilisation de deux définitions équivalentes de l'indépendance linéaire. Ces deux définitions n'ont d'abord rien de commun mais l'étudiant doit passer de l'une à l'autre sans indication. De plus, la négation de ces définitions (la dépendance linéaire) n'est pas du tout évidente, notamment à cause de la gestion des quantificateurs implicites. Par exemple : traduire la négation de $\forall r \in \Re,\ \vec{u} \neq r\vec{v}$ par $\exists r \in \Re \mid \vec{u} = r\vec{v}$. Il s'agit, selon notre évaluation, de la principale difficulté du problème.

4.4 Algèbre vectorielle

Il est à noter que dans cette partie, nous avons adopté les symboles utilisés dans l'énoncé de la tâche. Ainsi, le symbole de la norme d'un vecteur $\vec{u}$ sera noté parfois $\left|\vec{u}\right|$ et parfois $\left\|\vec{u}\right\|$.

Tâche 30 (Exercice)

Démontrer que le produit scalaire possède les propriétés énoncées en 6.1.2. Faire la démonstration pour des vecteurs quelconques de V_3.

Dans V_n, le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

1. commutativité : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u} \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_n$

2. distributivité sur l'addition vectorielle à gauche et à droite :

a) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w} \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_n$

b) $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{w} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w} \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_n$

3. associativité mixte :

a) $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet k\vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v}) \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_n, (\forall k) \in \Re$

b) $(k\vec{u}) \bullet (m\vec{v}) = (km)(\vec{u} \bullet \vec{v}) \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_n, (\forall k), (\forall m) \in \Re$

1. À démontrer $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u} \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_3$

Soit $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_2, b_2, c_2)$

$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$, par définition du produit scalaire

$= a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1$, la multiplication est commutative dans $\Re$

$= (a_2, b_2, c_2) \bullet (a_1, b_1, c_1)$, par définition du produit scalaire

$= \vec{v} \bullet \vec{u}$

2. a) À démontrer $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ $\quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$

Soit $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ et $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = (a_1, b_1, c_1) \bullet ((a_2, b_2, c_2) + (a_3, b_3, c_3))$

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3)$, par définition d'addition de vecteurs

$= (a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3) + c_1(c_2 + c_3))$, par définition de produit scalaire

$= a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3 + c_1c_2 + c_1c_3$, distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\Re$ et associativité de l'addition (pour enlever les parenthèses)

$= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3$, commutativité de l'addition dans $\Re$

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_2, b_2, c_2) + (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_3, b_3, c_3)$, par définition du produit scalaire

$= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

2. b) À démontrer $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{w} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ $\quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$

Soit $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ et $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = ((a_2, b_2, c_2) + (a_3, b_3, c_3)) \bullet (a_1, b_1, c_1)$

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet ((a_2, b_2, c_2) + (a_3, b_3, c_3))$, le produit scalaire est commutatif

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_2, b_2, c_2) + (a_1, b_1, c_1) \bullet (a_3, b_3, c_3)$, par 2. a)

$= (a_2, b_2, c_2) \bullet (a_1, b_1, c_1) + (a_3, b_3, c_3) \bullet (a_1, b_1, c_1)$, le produit scalaire est commutatif

$= \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{w} \bullet \vec{u}$

3. a) À démontrer $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet k\vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v}) \quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_n, (\forall k) \in \Re$

Soit $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = (k(a_1, b_1, c_1)) \bullet (a_2, b_2, c_2)$

$= (ka_1, kb_1, kc_1) \bullet (a_2, b_2, c_2)$, par la déf. du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$= ka_1a_2 + kb_1b_2 + kc_1c_2$, par définition du produit scalaire, et associativité de la multiplication dans $\Re$ (pour enlever les parenthèses)

$= a_1ka_2 + b_1kb_2 + c_1kc_2$, la multiplication est commutative dans $\Re$

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet (ka_2, kb_2, kc_2)$, par définition du produit scalaire

$= (a_1, b_1, c_1) \bullet k(a_2, b_2, c_2)$, par la déf. du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$= \vec{u} \bullet k\vec{v}$

$(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = (k(a_1, b_1, c_1)) \bullet (a_2, b_2, c_2)$

$= (ka_1, kb_1, kc_1) \bullet (a_2, b_2, c_2)$, par la définition du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$= ka_1a_2 + kb_1b_2 + kc_1c_2$, par définition du produit scalaire, et associativité de la multiplication dans $\Re$ (pour enlever les parenthèses)

$= k(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$, mise en évidence du facteur k

$= k((a_1, b_1, c_1) \bullet (a_2, b_2, c_2))$, par définition du produit scalaire

$= k(\vec{u} \bullet \vec{v})$

3. b) À démontrer $(k\vec{u}) \bullet (m\vec{v}) = (km)(\vec{u} \bullet \vec{v}) \quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_n, (\forall k), (\forall m) \in \Re$

Soit $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$(k\vec{u}) \bullet (m\vec{v}) = k(a_1, b_1, c_1) \bullet m(a_2, b_2, c_2)$

$= (ka_1, kb_1, kc_1) \bullet (ma_2, mb_2, mc_2)$, par la définition du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$= ka_1ma_2 + kb_1mb_2 + kc_1mc_2$, par définition de produit scalaire

$= km(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$, mise en évidence du facteur k et du facteur m

$= km((a_1,b_1,c_1) \bullet (a_2,b_2,c_2))$, par définition du produit scalaire

$= (km)(\vec{u} \bullet \vec{v})$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition du produit scalaire, les propriétés des opérations dans $\Re$, l'addition de vecteurs et le produit d'un vecteur par un scalaire.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de manipuler les différentes propriétés et définitions énoncées au point précédent.
- La tâche est dans le cadre de l'algèbre vectorielle et il y a lieu de changer de cadre pour celui de l'algèbre des réels à certaines étapes des démonstrations. Les propriétés à démontrer sont présentées à l'aide des vecteurs écrits sous la forme de lettres minuscules surmontées d'une flèche alors que dans les démonstrations, il faut travailler avec les vecteurs écrits selon leurs composantes. Il y a alors changement de registre laissé à la charge des étudiants.
- La définition de produit scalaire a été nouvellement introduite aux étudiants, mais en ce qui concerne tous les autres savoirs à mettre en fonctionnement, ils sont connus de la part des étudiants depuis au moins la cinquième secondaire (et même avant pour les propriétés des opérations dans $\Re$).

Analyse de la tâche

- Les questions pourraient être liées puisqu'on utilise certaines propriétés démontrées antérieurement pour en démontrer d'autres. Par exemple, on peut utiliser les propriétés 1 et 2a) pour démontrer la propriétés 2b). Mais on peut également faire chaque sous-question indépendamment des autres.
- Les questions sont fermées, la valeur de vérité de chaque propriété est connue.
- On demande de faire les démonstrations pour des vecteurs quelconques de V_3.
- Il n'y a pas d'éléments implicites dans l'énoncé.

- La structure des démonstrations est simple puisque le raisonnement est pris en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement des savoirs est technique puisque la définition du produit scalaire vient d'être introduite et toutes les autres connaissances nécessaires sont connues des étudiants depuis le secondaire.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il n'y a pas de changement de point de vue à introduire et les changements de registres vont de soi puisqu'imposer la dimension 3 suggère très fortement le passage aux composantes.
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte, sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs de V_3.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration ne nuit pas au bon déroulement de la démonstration puisqu'il suffit de choisir un côté de l'égalité à démontrer et de manipuler jusqu'à obtention de l'autre.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Le symbolisme pourrait interférer avec des règles familières comme les opérations sur les nombres réels. En effet, un étudiant pourrait avoir de la difficulté à prouver les propriétés qui lui sembleraient trop évidentes.

Cette tâche nous paraît peu complexe puisque les manipulations que les étudiants ont à faire sont connues depuis le secondaire.

Tâche 31 (Exercice)

Dans V_3, si $\vec{x}$ est un vecteur perpendiculaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes, démontrer que $\vec{x}$ est aussi perpendiculaire à tous les vecteurs de la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$, où a et b sont des réels. Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat ?

Démonstration

$\vec{x} \bullet (a\vec{u} + b\vec{v}) = \vec{x} \bullet a\vec{u} + \vec{x} \bullet b\vec{v}$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

$= a(\vec{x} \bullet \vec{u}) + b(\vec{x} \bullet \vec{v})$, par associativité mixte

$= a \times 0 + b \times 0$, par hypothèse

$= 0 \quad \Rightarrow \vec{x}$ est perpendiculaire à tous les vecteurs de la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$.

Interprétation géométrique : $\vec{x}$ est perpendiculaire au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés du produit scalaire.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de manipuler les différentes propriétés du produit scalaire.
- La tâche est dans le cadre de la géométrie vectorielle et la démonstration se fait à l'aide de l'algèbre vectorielle. Ce qu'il faut démontrer est dit en mots et le passage au registre de l'algèbre vectorielle est laissé à la charge de l'étudiant. Également, il y a des étapes qui nécessitent un passage au cadre algébrique.
- La définition et les propriétés du produit scalaire ont été nouvellement introduites aux étudiants.

Analyse de la tâche

- La question est fermée puisque la valeur de vérité est donnée.
- Aucune méthode n'est suggérée.

- Le rôle du symbolisme est important puisqu'il faut distinguer les vecteurs des scalaires. Ainsi, la flèche qui surmonte la lettre minuscule est à conserver tout au long de la démonstration.
- L'élément implicite de l'énoncé est qu'il faut montrer que le produit scalaire est nul alors qu'on demande plutôt de montrer que les vecteurs sont perpendiculaires.
- La structure de la démonstration est simple puisqu'elle est prise en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement des savoirs est entre technique et mobilisable puisqu'il y a une petite adaptation à faire, c'est-à-dire que les étudiants doivent utiliser la propriété du produit scalaire stipulant qu'il est nul lorsque les vecteurs sont perpendiculaires, pour montrer que les vecteurs sont bien perpendiculaires.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il y a un changement de points de vue à introduire, c'est-à-dire que pour montrer que les vecteurs sont perpendiculaires, il faut montrer que le produit scalaire entre ces vecteurs est nul.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration peut laisser l'étudiant bloqué puisque dans l'énoncé, on ne présente pas explicitement ce qu'il faut démontrer.
- Ce que l'étudiant a à démontrer est explicite dans l'énoncé de la tâche. Cependant, la traduction en langage vectoriel est implicite et laissée à la charge de l'étudiant.
- Le symbolisme peut interférer avec des règles plus familières, c'est-à-dire que dans la démonstration, on doit gérer le produit scalaire (•) et le produit de nombres réels (×) en utilisant des symboles différents, mais dans le cadre numérique ou algébrique, ces deux symboles représentent une même opération, soit le produit de nombres réels. Il pourrait peut-être y avoir confusion.

Cette tâche nous apparaît comme peu complexe. Le seul élément de complexité notable est celui de devoir reconnaître que des vecteurs non nuls sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Tâche 32 (Exercice)

Dans V_n, démontrer que pour des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques, on a :

a) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v}$

b) $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\vec{u}\bullet\vec{v}$

c) $\left|\vec{u}\bullet\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

Démonstration

a) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v})$, le carré de la longueur d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même

$= \vec{u}\bullet(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\bullet(\vec{u}+\vec{v})$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

$= (\vec{u}\bullet\vec{u}) + (\vec{u}\bullet\vec{v}) + (\vec{v}\bullet\vec{u}) + (\vec{v}\bullet\vec{v})$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

$= (\vec{u}\bullet\vec{u}) + (\vec{u}\bullet\vec{v}) + (\vec{u}\bullet\vec{v}) + (\vec{v}\bullet\vec{v})$, par symétrie du produit scalaire

$= \left|\vec{u}\right|^2 + 2(\vec{u}\bullet\vec{v}) + \left|\vec{v}\right|^2$, le carré de la longueur d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même

$= \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 + 2(\vec{u}\bullet\vec{v})$, par commutativité de l'addition dans $\Re$

b) $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}+(-\vec{v})\right|^2$, soustraire un vecteur revient à additionner son opposé

$= \left|\vec{u}\right|^2 + \left|-\vec{v}\right|^2 + 2(\vec{u} \bullet -\vec{v})$, par a)

$= \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 + 2(\vec{u} \bullet -\vec{v})$, la norme d'un vecteur ou de son opposé est la même

$= \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2(\vec{u} \bullet \vec{v})$, mise en facteur de -1.

c) $\left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| = \left|\left|\vec{u}\right| \times \left|\vec{v}\right| \times \cos\theta\right| = \left|\vec{u}\right| \times \left|\vec{v}\right| \times \cos\theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

mais comme $0 \leq \cos\theta \leq 1$, alors $0 \leq \left|\vec{u}\right| \times \left|\vec{v}\right| \times \cos\theta \leq \left|\vec{u}\right| \times \left|\vec{v}\right|$

d'où $\left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right|$.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la proposition stipulant que le carré de la longueur d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même et la proposition disant que le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des normes des vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs. Il y a aussi la définition et les propriétés du produit scalaire.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de manipuler les différentes propriétés, propositions et définitions énoncées au point précédent.
- La tâche se situe dans le cadre de l'algèbre vectorielle et il n'y a pas de changement de cadres à effectuer pour achever la démonstration. Les propriétés à démontrer sont présentées à l'aide des vecteurs écrits sous la forme de lettres minuscules surmontées d'une flèche. Aucun changement de registres n'est nécessaire pour mener la démonstration à terme.
- La définition, les propriétés et les propositions concernant le produit scalaire ont été nouvellement introduites aux étudiants, mais en ce qui concerne tous les autres savoirs à mettre en fonctionnement, ils sont connus de la part des étudiants depuis le secondaire.

Analyse de la tâche

- Les questions sont dépendantes dans la démonstration présentée mais elles peuvent être démontrées indépendamment.
- Les questions sont fermées, la valeur de vérité de chaque propriété est connue.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Le rôle du formalisme est important puisqu'il faut distinguer les vecteurs des scalaires. Aussi, le symbole des deux barres ($\left|\ \right|$) est utilisé avec des significations différentes à l'intérieur d'un même résultat. Il signifie dans un cas la longueur d'un vecteur et dans un autre cas la valeur absolue d'un nombre.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure des démonstrations est simple puisque les démonstrations sont prises en charge par le calcul. En c), une déduction intermédiaire, non-prise en charge par le calcul est nécessaire.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable surtout en ce qui concerne la question c) qui nécessite une adaptation. En effet, les étudiants doivent démontrer une inégalité ce qui n'est pas habituel pour eux.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il n'y a pas de changement de point de vue à introduire.
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs.
- Le symbolisme de la norme d'un vecteur est nouveau pour les étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration ne nuit pas au bon déroulement de la démonstration puisqu'il suffit de choisir un côté de l'égalité à démontrer et de manipuler jusqu'à obtention de l'autre.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.

- Le symbolisme pourrait interférer avec des règles familières puisque le symbole de la norme d'un vecteur est le même que le symbole de valeur absolue qui lui, est connu des étudiants.

Cette tâche nous paraît assez complexe surtout à cause de la question c). Cet exercice a été tiré du livre utilisé par l'enseignante. Dans ce livre, on utilise le même symbole pour la norme d'un vecteur et pour la valeur absolue d'un nombre. Or, en classe, l'enseignante utilise plutôt le symbole des doubles barres ($\| \;\|$) pour représenter la norme d'un vecteur. Le symbolisme du livre pourrait occasionner des erreurs de compréhension. En effet, les étudiants pourraient confondre la norme et la valeur absolue.

Tâche 33 (Exercice)

Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ *de* V_n, *on a :*

$$(\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{w}+\vec{z}) = (\vec{u} \bullet \vec{w}) + (\vec{u} \bullet \vec{z}) + (\vec{v} \bullet \vec{w}) + (\vec{v} \bullet \vec{z})$$

Démonstration

$(\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{w}+\vec{z}) = \vec{u} \bullet (\vec{w}+\vec{z}) + \vec{v} \bullet (\vec{w}+\vec{z})$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

$= (\vec{u} \bullet \vec{w}) + (\vec{u} \bullet \vec{z}) + (\vec{v} \bullet \vec{w}) + (\vec{v} \bullet \vec{z})$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

Description globale de la situation

Le lecteur pourra se référer à l'analyse de la tâche 31 pour la description globale de la situation.

Analyse de la tâche

- La question est fermée, la valeur de vérité est connue.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure de la démonstration est simple puisqu'elle est prise en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est technique, il ne s'agit que d'une application des propriétés du produit scalaire.
- Il n'y a pas lieu d'introduire d'étapes.
- Il n'y a pas de changement de points de vue à introduire.
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Le bon déroulement de la démonstration peut se faire en choisissant l'un ou l'autre des côtés de l'égalité à démontrer et en manipulant jusqu'à obtention de l'autre. Cependant, les manipulations à faire sur les « côtés droits » sont plus difficiles à trouver que sur les « côtés gauches ». En effet, il s'agirait plutôt de faire l'équivalent d'une mise en facteur, ce qui ne se voit pas si facilement avec des produits scalaires.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Une confusion est possible quant au symbole de produit scalaire : il pourrait être confondu avec le symbole de multiplication des nombres réels.

Cette tâche nous paraît simple.

Tâche 34 (Exercice)

Démontrer que le produit vectoriel possède les propriétés énoncées en 7.1.2.

Dans V_3,, le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

1. *anticommutativité :* $(\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{u}) \quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_3$.
2. *distribution sur l'addition vectorielle :*

   a) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

   b) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

   $(\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$
3. *associativité mixte :*

   a) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$

   b) $(k\vec{u}) \times (m\vec{v}) = km(\vec{u} \times \vec{v})$

   $(\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_3, \quad (\forall k), (\forall m) \in \Re$

Démonstration

1. À montrer : $(\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{u}) \quad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_3$

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, par définition du produit vectoriel

et

$$-(\vec{v} \times \vec{u}) = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$, truc mnémotechnique pour le calcul du produit vectoriel

$= -\left[(b_2 a_3 - b_3 a_2)\vec{i} - (b_1 a_3 - b_3 a_1)\vec{j} + (b_1 a_2 - b_2 a_1)\vec{k} \right]$, par définition de déterminant (en développant selon la première ligne)

$= (-b_2 a_3 + b_3 a_2,\ b_1 a_3 - b_3 a_1,\ -b_1 a_2 + b_2 a_1)$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$, par commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\Re$.

À montrer : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2,\ b_3 + c_3)$, par définition d'addition de vecteurs

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$, truc mnémotechnique pour le calcul du produit vectoriel

$= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2),\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3),\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1))$, par le calcul du déterminant

$= (a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2,\ a_3 b_1 + a_3 c_1 - a_1 b_3 - a_1 c_3,\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1)$, par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\Re$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_2 c_3 - a_3 c_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_3 c_1 - a_1 c_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1 c_2 - a_2 c_1)$, par commutativité de l'addition dans $\Re$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 c_3 - a_3 c_2,\ a_3 c_1 - a_1 c_3,\ a_1 c_2 - a_2 c_1)$, par définition d'addition de vecteurs

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

2. b) Par un raisonnement similaire, on peut prouver que $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.

3. a) À montrer : $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$.

1. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = (ka_1, ka_2, ka_3) \times (b_1, b_2, b_3)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= (ka_2b_3 - ka_3b_2,\ ka_3b_1 - ka_1b_3,\ ka_1b_2 - ka_2b_1)$

2. $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (a_1, a_2, a_3) \times (kb_1, kb_2, kb_3)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix}$$

$= (a_2kb_3 - a_3kb_2,\ a_3kb_1 - a_1kb_3,\ a_1kb_2 - a_2kb_1)$

$= (ka_2b_3 - ka_3b_2,\ ka_3b_1 - ka_1b_3,\ ka_1b_2 - ka_2b_1)$, par commutativité de la multiplication

3. $k(\vec{u} \times \vec{v}) = k[(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)]$

$$= k\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= k(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

$= (k(a_2b_3 - a_3b_2),\ k(a_3b_1 - a_1b_3),\ k(a_1b_2 - a_2b_1))$ par définition de la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur

$= (ka_2b_3 - ka_3b_2,\ ka_3b_1 - ka_1b_3,\ ka_1b_2 - ka_2b_1)$, par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\Re$

Nous avons pu montrer que $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$

3. b) À montrer : $(k\vec{u})\times(m\vec{v}) = km(\vec{u}\times\vec{v})$

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$(k\vec{u})\times(m\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ mb_1 & mb_2 & mb_3 \end{vmatrix}$$

$= (ka_2mb_3 - ka_3mb_2,\ ka_3mb_1 - ka_1mb_3,\ ka_1mb_2 - ka_2mb_1)$

$= (km(a_2b_3 - a_3b_2),\ km(a_3b_1 - a_1b_3),\ km(a_1b_2 - a_2b_1))$, par la mise en facteur de km

$= km(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

$$= km\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= km(\vec{u}\times\vec{v})$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont la définition du produit vectoriel, le truc mnémotechnique et le calcul des déterminants, l'addition de vecteurs, la multiplication d'un vecteur par un scalaire et les propriétés des opérations dans $\Re$.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de faire manipuler les savoirs mentionnés ci-dessus.
- La tâche est dans le cadre de la géométrie vectorielle et la démonstration se fait à l'aide de l'algèbre vectorielle. Les registres de représentations des vecteurs sont la lettre minuscule surmontée d'une flèche et le triplet de nombres réels. Les démonstrations se font surtout à l'aide de la représentation sous forme de triplets. Il y a donc un changement de registres à faire pour démontrer puisque les vecteurs sont systématiquement donnés dans l'autre registre dans l'énoncé.
- La définition du produit vectoriel vient d'être présentée aux étudiants alors que les autres savoirs à mettre en fonctionnement ont été présentés antérieurement dans le cadre du cours ou à l'école secondaire.

Analyse de la tâche

- Les questions sont indépendantes.
- Les questions sont fermées, la valeur de vérité de chaque propriété est connue.
- Il faut mener la démonstration dans V_3.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure des démonstrations est simple puisque celles-ci sont prises en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est technique puisque la définition de produit scalaire vient d'être introduite et toutes les autres connaissances nécessaires sont connues des étudiants.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il n'y a pas de changement de points de vue à introduire.
- Il n'y a pas de quantificateur à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs.
- Le symbole du produit vectoriel est connu des étudiants, mais pourrait interférer avec le symbole de la multiplication des nombres réels. Les autres symboles sont connus des étudiants

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration pourrait nuire. En effet, pour certaines démonstrations, il est plus facile de partir d'un côté de l'égalité, d'obtenir un certain résultat et de montrer qu'en prenant le deuxième côté de l'égalité, on arrive au même résultat[12]. Un étudiant qui part d'un côté et essaie d'obtenir l'autre pourrait donc avoir de la difficulté à « se rendre » jusqu'à cet autre.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.

---

[12] Même si ça ne transparaît pas dans la solution écrite telle que nous l'avons rédigée, il nous est arrivé de trouver de cette façon cette solution pour quelques sous-tâches de la tâche 34.

- Les définitions sont parfois à appliquer sous une autre forme puisqu'on introduit des scalaires ou des additions de vecteurs. Les étudiants pourraient alors avoir de la difficulté à appliquer la définition ou des règles de calcul du produit vectoriel correctement.
- Le symbolisme pourrait interférer avec des règles familières comme les opérations sur les nombres réels. Ainsi, un étudiant pourrait avoir de la difficulté à prouver les propriétés qui lui sembleraient trop évidentes.
- Il y a beaucoup de manipulations algébriques à faire puisque les démonstrations sont très calculatoires.

Cette tâche nous apparaît moyennement complexe dû aux nombreuses manipulations algébriques à effectuer. Cependant, s'il n'y a pas de confusion entre la croix (×) signifiant le produit vectoriel et le même symbole qui signifie la multiplication de nombres réels et si les manipulations sont menées adroitement, la tâche sera assez simple.

Tâche 35 (Exercice)

Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *tels que* $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$. *Démontrer que* $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$.

Démonstration

Soit $\vec{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{v}=(b_1,b_2,b_3)$ et $\vec{w}=(c_1,c_2,c_3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$, par le calcul du déterminant

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$, par le calcul du déterminant mais par hypothèse, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, ce qui implique que $-a_1-b_1=c_1$, $-a_2-b_2=c_2$ et $-a_3-b_3=c_3$. On a alors, par substitutions,

$(\vec{u}\times\vec{v})=$

$(b_2(-a_3-b_3)-b_3(-a_2-b_2),\ b_3(-a_1-b_1)-b_1(-a_3-b_3),\ b_1(-a_2-b_2)-b_2(-a_1-b_1))$

$=(-b_2a_3-b_2b_3+b_3a_2+b_3b_2,\ -b_3a_1-b_3b_1+b_1a_3+b_1b_3,\ -b_1a_2-b_1b_2+b_2a_1+b_2b_1)$

$=(-b_2a_3+b_3a_2,\ -b_3a_1+b_1a_3,\ -b_1a_2+b_2a_1)$

$=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$, par commutativité de l'addition dans $\Re$.

Par un raisonnement analogue, nous pouvons prouver que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}\times\vec{u}$.

Description globale de la situation

Il s'agit de la même analyse que celle de la tâche précédente, cependant, il y a moins de savoirs à mettre en fonctionnement. Ces derniers sont les formules de calcul du produit vectoriel et du déterminant et les propriétés des opérations dans $\Re$. Également, dans le présent cas, il semble que la tâche vise autant un travail sur le produit vectoriel que sur la démonstration. En ce sens, cette dernière intervient au moins autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet.

Analyse de la tâche

- La question est fermée, la valeur de vérité étant connue.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Il n'y a pas vraiment d'élément implicite dans l'énoncé sinon que de comprendre que si $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, alors $a_1+b_1+c_1=0$, $a_2+b_2+c_2=0$ et $a_3+b_3+c_3=0$.
- La structure de la démonstration est simple puisque les démonstrations sont prises en charge par le calcul. Cependant, les substitutions à faire sont laissées à la charge de l'étudiant, qui doit trouver par lui-même comment faire intervenir l'hypothèse $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il y a un changement de points de vue à introduire. L'étudiant doit traduire l'hypothèse $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ dans le registre de l'écriture en triplets de composantes, et traduire l'égalité vectorielle en trois égalités composante à composante.
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs dont la somme est nulle.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration pourrait nuire au bon déroulement des démonstrations puisque pour cette démonstration, il faut absolument utiliser le fait que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$. Il ne s'agit plus ici de manipuler une égalité afin d'obtenir une expression spécifique.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Le symbolisme pourrait interférer avec des règles familières comme les opérations sur les nombres réels. Le symbole du produit vectoriel pourrait être confondu avec le symbole de la multiplication avec les nombres réels.

Cette tâche nous apparaît complexe dans la mesure où l'étudiant doit utiliser correctement l'hypothèse $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$. Le passage dans le registre de l'écriture en triplets de composantes et celui de l'égalité vectorielle en trois égalités composante à composante ne va pas de soi.

Tâche 36 (Exercice)

Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_3, on a :

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}\bullet\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2. \qquad \textit{(Identité de Lagrange)}$$

Démonstration

$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2 + \left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2 \sin^2\theta + \left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2 \cos^2\theta$, car la longueur du produit vectoriel de deux vecteurs est égal au produit de leur longueur par la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs, et le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leur longueur par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs

$= \left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, par la mise en facteur de $\left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2$

$= \left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2$, car $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés des produits vectoriel et scalaire et l'identité trigonométrique $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant un travail sur les propriétés des produits scalaire et vectoriel.
- La tâche est dans le cadre de la géométrie vectorielle et la démonstration se fait à l'aide de l'algèbre vectorielle. Le registre de représentations des vecteurs est celui de la lettre minuscule surmontée d'une flèche et la démonstration peut se faire dans le même registre.
- Les propriétés des produits vectoriel et scalaire viennent d'être introduites aux étudiants alors que l'identité trigonométrique est connue depuis le secondaire.

Analyse de la tâche

- La question est fermée, la valeur de vérité est connue.
- Aucune méthode n'est suggérée.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure de la démonstration est simple si l'étudiant trouve quelles propriétés invoquer.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable puisque les propriétés à utiliser doivent être adaptées à la situation.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il pourrait ne pas y avoir de changement de points de vue à introduire si l'étudiant fait appel aux « bonnes » propriétés.
- Il n'y a pas de quantificateur à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration ne nuit pas au déroulement de la démonstration puisqu'il est possible de partir d'un côté de l'égalité et d'obtenir le deuxième côté de l'égalité.
- Ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Ici, l'étudiant pourrait utiliser les définitions de produit vectoriel et s'enliser dans des calculs plus complexes, par exemple :

  $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}\bullet\vec{v}\right|^2=(\vec{u}\times\vec{v})\bullet(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\bullet\vec{v})\bullet(\vec{u}\bullet\vec{v})$, le produit scalaire d'un vecteur par lui même est égal au carré de la longueur de ce vecteur

  $=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_3b_1)\bullet(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_3b_1)$
  $+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\bullet(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$, par définition du produit vectoriel et du produit scalaire

  $=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_3b_1)^2+(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2$,

  par définition du produit scalaire

  $=a_2{}^2b_3{}^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_1{}^2-2a_3b_1a_1b_3+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_2{}^2-2a_1b_2a_3b_1+a_3{}^2b_1{}^2$
  $+a_1{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2$

  en développant les différences de carré.

  L'étudiant pourrait alors avoir de la difficulté à manipuler les expressions avec indices et exposants et ne pas pouvoir démontrer l'égalité.

- Le symbolisme peut porter à confusion, car le symbole $\left|\;\right|$ signifie la norme d'un vecteur et aussi, la valeur absolue d'un nombre. L'étudiant doit être vigilant.

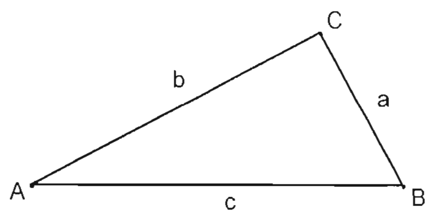
Cette tâche nous apparaît moyennement complexe car l'étudiant pourrait s'embourber dans des calculs demandant des manipulations complexes.

Tâche 37 (Exercice)

À l'aide du produit vectoriel, démontrer la loi des sinus dans un triangle ABC quelconque.

Loi des sinus : dans un triangle, le rapport du sinus des angles sur le côté opposé respectivement à ces angles est constant, c'est-à-dire

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Démonstration

Nous savons que la norme du produit vectoriel de $\vec{u}$ avec $\vec{v}$ nous donne l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, l'aire du triangle peut s'exprimer de ces trois différentes façons :

$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ et $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$. Or, la formule de calcul de la norme du produit vectoriel donne $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right| = \frac{1}{2}ab\sin C$, etc.

D'où $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}cb\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$,

$\Rightarrow ab\sin C = cb\sin A = ca\sin B$, en multipliant par 2

$\Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, en divisant par *abc*, ce qui est bien ce qu'on voulait démontrer.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés du produit vectoriel.
- La démonstration est l'objet d'étude et l'algèbre vectorielle sert d'outil.
- La tâche est dans le cadre de la géométrie et la démonstration se fait à l'aide de l'algèbre vectorielle. La démonstration se fait avec le registre de représentations des vecteurs représentés par des lettres majuscules surmontées d'une flèche.
- Les propriétés des produits vectoriel et scalaire viennent d'être introduites aux étudiants.

Analyse de la tâche

- La question est fermée.
- Une méthode est imposée, il faut utiliser le produit vectoriel. Cependant, on ne mentionne pas comment utiliser ce produit.
- Il y a des éléments implicites dans l'énoncé. Nous savons que la norme du produit vectoriel de deux vecteurs donne l'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs. Dans cette tâche, il faut remarquer que la moitié de l'aire du parallélogramme donne l'aire d'un triangle engendré par les mêmes vecteurs.
- La structure de la démonstration n'est pas simple puisqu'il faut exprimer l'aire du triangle de trois manières différentes.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement des savoirs est mobilisable puisque la manière de mener la démonstration est peu familière pour les étudiants. De plus, on laisse à la charge de l'étudiant le fait que l'aire du triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme.
- Il y a lieu d'introduire des étapes, puisqu'il faut exprimer l'aire du triangle de trois manières différentes pour arriver à montrer que les égalités sont vraies.
- Il y a un changement de points de vue à introduire, celui d'exprimer l'aire du triangle de trois manières différentes
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte sinon que de comprendre que cette démonstration est valable pour tous les triangles.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration peut nuire au bon déroulement de la démonstration. En effet, on ne peut partir d'une seule égalité ici : on doit exprimer de trois manières différentes l'aire du triangle pour arriver aux égalités voulues, ce qui ne va pas de soi pour les étudiants.
- Ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- La propriété stipulant que la norme du produit vectoriel de deux vecteurs est égale au produit de la norme des vecteurs par le sinus de l'angle entre les deux vecteurs n'est pas à utiliser tel qu'elle est présentée dans le cours. En effet, les étudiants doivent exprimer la norme des vecteurs selon la lettre minuscule qui représente la longueur du segment sur le dessin. De plus, la norme du produit vectoriel de deux vecteurs donne l'aire d'un parallélogramme et non l'aire d'un triangle. Les étudiants doivent adapter la propriété.

Cette tâche nous paraît très complexe car les étudiants doivent non seulement exprimer l'aire du triangle de trois manières différentes (ce qui leur est peu familier), mais ils doivent aussi reconnaître que l'aire du triangle est en fait la moitié de l'aire du parallélogramme formé par deux des côtés du triangle.

Tâche 38 (Exercice)

Soit ABC un triangle quelconque dont l'aire est S. À l'aide du produit vectoriel, montrer que l'aire S de ce triangle peut s'exprimer de la façon suivante : $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ *où* α *est l'angle au sommet A et où b et c sont les longueurs des côtés respectivement opposés aux sommets B et C.*

Démonstration

La norme du produit scalaire de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme qu'engendrent ces vecteurs. Ici, $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ sont les côtés du triangle de longueur b et c respectivement, et l'angle au sommet A entre les deux vecteurs est α . Nous pouvons donc obtenir l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui sera le double de l'aire du triangle :

$\left| \vec{u} \times \vec{v} \right| = bc \sin \alpha$ est l'aire du parallélogramme,

$\frac{1}{2}\left| \vec{u} \times \vec{v} \right| = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ est donc l'aire du triangle.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propositions relatives au produit vectoriel.
- Les vecteurs et le produit vectoriel servent d'outils.
- La tâche est dans deux cadres en même temps, et nécessite une coordination entre ces deux cadres.
- Les propositions concernant le produit vectoriel sont relativement nouvelles pour les étudiants.

Analyse de la tâche

- La question est fermée la valeur de vérité est connue.
- Une méthode est imposée, soit celle d'utiliser le produit vectoriel.
- L'élément implicite est que l'aire du parallélogramme engendré par deux des vecteurs du triangle égale deux fois l'aire du triangle.
- La structure de la démonstration est simple.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable puisque les propositions à utiliser doivent être légèrement adaptées à la situation.

- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- L'énoncé spécifie d'avoir recours au produit vectoriel, mais la traduction dans le cadre vectoriel est laissée à la charge de l'étudiant.
- Il n'y a pas de quantificateur à prendre en compte sinon que de comprendre que la démonstration est valide pour tous les triangles.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

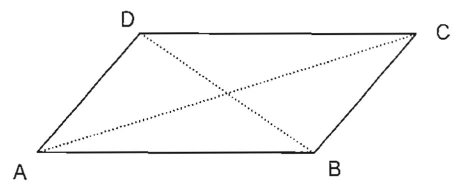
- Une conception ritualiste de la démonstration peut nuire à l'étudiant car il n'y a pas d'expression dans l'énoncé du problème. En fait, il doit partir de la proposition concernant le produit vectoriel et l'aire d'un parallélogramme pour ensuite arriver à l'expression voulue pour exprimer l'aire d'un triangle.
- Ce à quoi l'étudiant doit arriver est explicite, mais malgré le fait qu'on donne une piste, la manière dont il doit mener la démonstration ne va pas de soi.

Étant donné que les étudiants ont déjà prouvé la loi des sinus avant de faire cette démonstration, nous considérons la tâche 38 simple. Cependant, ce qui nous semble particulièrement étrange est le fait qu'on demande aux étudiants de faire la tâche 37 avant la tâche 38. Pour nous, il semble qu'on devrait présenter ces tâches aux étudiants dans l'ordre inverse.

Tâche 39 (Exercice)

Dans le parallélogramme ABCD ci-dessous, posons $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ *et* $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$.

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *servent de côté pour un autre parallélogramme, alors l'aire de ce dernier parallélogramme est le double de l'aire du parallélogramme ABCD.*



Démontrer à l'aide de la géométrie vectorielle.

Démonstration

Nous allons calculer le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, ce qui donnera l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs :

$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}$, par hypothèse

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \times (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$, par la relation de Chasles

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{CD}$, par distributivité du produit vectoriel sur l'addition de vecteurs

$= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$, par distributivité du produit vectoriel sur l'addition de vecteurs

$= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + 0 + 0 + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$, le produit vectoriel de vecteurs colinéaires est nul ($\overrightarrow{BC}$ est évidemment colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ par hypothèse puisque $ABCD$ est un parallélogramme)

$= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$

mais $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ est l'aire du parallélogramme $ABCD$ et $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$ est aussi l'aire du parallélogramme $ABCD$, d'où

$\vec{u} \times \vec{v} = 2$ fois l'aire du parallélogramme $ABCD$

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés et propositions relatives au produit vectoriel.
- Les vecteurs et le produit vectoriel servent d'outils pour la démonstration.
- L'énoncé de la tâche est à la fois dans le cadre de la géométrie vectorielle et dans le cadre de la géométrie synthétique. La démonstration se fait à l'aide de l'algèbre vectorielle. Le registre de représentations de l'énoncé est principalement le registre discursif mais une figure accompagne l'énoncé.
- Les propriétés et propositions concernant le produit vectoriel sont relativement nouvelles pour les étudiants.

Analyse de la tâche

- La question est fermée.
- Une méthode est imposée, soit celle d'utiliser la géométrie vectorielle.
- L'élément implicite est que l'aire du parallélogramme s'obtient par le produit vectoriel de deux vecteurs non-parallèles qui forment un « coin » du parallélogramme. Également, il faut invoquer le fait que le produit scalaire de vecteurs colinéaires est nul.
- La structure de la démonstration est assez simple puisqu'elle est prise en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement des savoirs est mobilisable puisque les propositions à utiliser doivent être légèrement adaptées à la situation. Il faut choisir les bonnes propositions pour arriver à mener à bien la démonstration. De plus, on utilise des notions vues antérieurement dans le cours (relation de Chasles).
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il y a un changement de point de vue à introduire : on utilise le produit vectoriel pour calculer l'aire du parallélogramme.
- Il n'y a pas de quantificateur à prendre en compte sinon que de comprendre que la démonstration est valide pour tous les parallélogrammes.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Ce à quoi l'étudiant doit arriver est explicite. Même si l'on demande à l'étudiant d'utiliser la géométrie vectorielle, la manière dont il doit mener la démonstration est laissée à sa charge.

Cette tâche nous apparaît relativement complexe car l'étudiant doit reconnaître la propriété à utiliser : le produit vectoriel de deux vecteurs donne l'aire du parallélogramme engendré par ces vecteurs. Cependant, ce qui nous paraît le plus complexe ici est d'arriver au produit vectoriel de vecteurs colinéaires et de reconnaître qu'il est nul.

Tâche 40 (Exercice)

Démontrer les propriétés du produit mixte énoncées en 8.1.2.

Dans V_3, le produit mixte $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *associativité mixte :*

$$(k_1 \vec{u}) \bullet ((k_2 \vec{v}) \times (k_3 \vec{w})) = (k_1 k_2 k_3)(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}))$$

$$(\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3, (\forall k_1), (\forall k_2), (\forall k_3) \in \Re.$$

2. *une permutation de deux vecteurs entre eux change le signe du produit mixte :*

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}))$ *(permutation de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*)*

$= -(\vec{u} \bullet (\vec{w} \times \vec{v}))$ *(permutation de* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$*)*

$= -(\vec{w} \bullet (\vec{v} \times \vec{u}))$ *(permutation de* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$*)*

$$(\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$$

3. *une permutation circulaire des vecteurs entre eux laisse le produit mixte inchangé :*

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$

4. *une permutation des opérations, sans changer l'ordre des vecteurs, laisse le produit mixte inchangé :*

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} \qquad (\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}), (\forall \vec{w}) \in V_3$

5. *une répétition du même vecteur dans le produit mixte annule ce produit :*

$\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$

$(\forall \vec{u}), (\forall \vec{v}) \in V_3$

Démonstration

1. À montrer $(k_1\vec{u}) \bullet ((k_2\vec{v}) \times (k_3\vec{w})) = (k_1k_2k_3)(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}))$

$(k_1\vec{u}) \bullet ((k_2\vec{v}) \times (k_3\vec{w})) = (k_1\vec{u}) \bullet k_2k_3(\vec{v} \times \vec{w})$, par associativité mixte du produit vectoriel $= (k_1k_2k_3)(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}))$, par associativité mixte du produit scalaire.

2. À montrer $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}))$

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = (a_1, a_2, a_3) \bullet ((b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3))$

$= (a_1, a_2, a_3) \bullet (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_3c_1)$, par définition du produit vectoriel

$= (a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_3c_1)$, par définition du produit scalaire

$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_3c_1$, par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\Re$

$-(\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w})) = -[(b_1, b_2, b_3) \bullet ((a_1, a_2, a_3) \times (c_1, c_2, c_3))]$

$= -[(b_1, b_2, b_3) \bullet (a_2c_3 - a_3c_2,\ a_3c_1 - a_1c_3,\ a_1c_2 - a_3c_1)]$, par définition du produit vectoriel

$= -[(b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_3c_1 - a_1c_3) + b_3(a_1c_2 - a_3c_1)$, par définition du produit scalaire

$= -[b_1a_2c_3 - b_1a_3c_2 + b_2a_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_3a_1c_2 - b_3a_3c_1]$, par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\Re$

$= -[a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 - a_3b_3c_1]$, par commutativité de la multiplication dans $\Re$

$= -[-a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 - a_3b_1c_2 + a_2b_1c_3 - a_3b_3c_1 + a_3b_2c_1]$, par commutativité de l'addition dans $\Re$

$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_3c_1 - a_3b_2c_1$, en distribuant -1.

Nous avons donc démontré que $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}))$ et de la même manière, nous pouvons démontrer que $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \bullet (\vec{v} \times \vec{u}))$ et que $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{u} \bullet (\vec{w} \times \vec{v}))$.

3. À montrer $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}))$, par la démonstration précédente

$= -(-\vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u}))$, par la démonstration précédente

$= \vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u})$

De la même manière nous pouvons démontrer que $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$.

4. À montrer $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$, par la démonstration précédente

$= (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$, par symétrie du produit scalaire.

5. À montrer $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$

$\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}))$, par la propriété démontrée en 2 (nous avons permuté les vecteurs $\vec{u}$).

Aucun nombre sauf zéro n'est égal à son opposé, d'où $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$. Les autres égalités se prouvent de la même manière.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les définition et propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel, les propriétés des opérations dans $\Re$.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de manipuler les différentes propriétés et définitions énoncées au point précédent et de se familiariser avec les propriétés du produit mixte.

- La tâche est dans le cadre de l'algèbre vectorielle et il y a lieu de changer de cadre pour celui de l'algèbre des nombres réels à certaines étapes de quelques démonstrations. Les propriétés à démontrer sont présentées à l'aide des vecteurs écrits sous la forme de lettres minuscules surmontées d'une flèche alors que dans la première démonstration, il faut travailler avec les vecteurs écrits selon leurs composantes. Il y a alors changement de registres laissé à la charge des étudiants. Pour les autres démonstrations, il n'y a pas lieu de changer de cadres.
- Le produit scalaire et le produit vectoriel viennent d'être introduits, on considère ces savoirs comme relativement nouveaux.

Analyse de la tâche

- Les questions sont liées puisque la démonstration de certaines propriétés nécessite d'avoir démontré antérieurement d'autres propriétés, à moins de refaire à chaque fois tous les calculs. Par exemple, la propriété 3 nécessite d'avoir démontré la propriété 2.
- Les questions sont fermées, la valeur de vérité de chaque propriété est connue.
- Une méthode est imposée, soit celle d'utiliser la géométrie vectorielle.
- Il n'y a pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure des démonstrations est simple puisque le raisonnement est pris en charge par le calcul.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement est technique puisque les définitions de produit scalaire et vectoriel viennent d'être introduites et toutes les autres connaissances nécessaires sont connues des étudiants depuis le secondaire.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il n'y a pas de changement de points de vue à introduire, sauf un changement de registres pour la première démonstration.
- Il n'y a pas de quantificateurs à prendre en compte sinon que de comprendre que ces démonstrations sont valables pour tous les vecteurs de V_3.
- Le symbolisme est connu des étudiants.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Une conception ritualiste de la démonstration ne nuit pas au bon déroulement de la démonstration puisqu'il suffit de choisir un côté de l'égalité à démontrer et de manipuler jusqu'à obtention de l'autre.
- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Le symbolisme pourrait interférer avec des règles familières comme les opérations sur les nombres réels. En effet, on utilise les deux symboles « • » et « × » pour distinguer les deux produits (scalaire et vectoriel) mais ces symboles ont la même signification dans le cadre numérique. Il pourrait y avoir confusion et des étudiants pourraient démontrer une propriété :

  $(k_1\vec{u}) \bullet ((k_2\vec{v}) \times (k_3\vec{w})) = (k_1\vec{u}) \bullet (k_2 k_3 \vec{v}\,\vec{w})$, par commutativité de la multiplication

  $= k_1 k_2 k_3\, \vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}$, par commutativité de la multiplication

  et croire qu'ils arrivent à ce qui est demandé.

Cette tâche nous paraît peu complexe puisque les manipulations que les étudiants ont à faire sont maintenant connues. Cependant, rappelons-nous que les enseignants du collégial ont mentionné que les étudiants ont beaucoup de difficultés avec ce type de manipulations algébriques.

Tâche 41 (Devoir)

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V_3$, deux vecteurs unitaires et orthogonaux. Considérons un troisième élément $\vec{v} \in V_3$.

Montrer que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}_1} - \vec{v}_{\vec{u}_2}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$. (*Indications : Utiliser uniquement les propriétés du produit scalaire et la définition de la projection. Ne pas décomposer les vecteurs en composantes.*)

Démonstration

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u_1}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Nous allons donc montrer que le produit scalaire de $\vec{w}$ et $\vec{u_1}$ est nul.

$\vec{w} \bullet \vec{u_1} = (\vec{v} - \vec{v_{\vec{u}1}} - \vec{v_{\vec{u}2}}) \bullet \vec{u_1}$, par hypothèse

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - \vec{v_{\vec{u}1}} \bullet \vec{u_1} - \vec{v_{\vec{u}2}} \bullet \vec{u_1}$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition (soustraction)

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - ((\frac{\vec{v} \bullet \vec{u_1}}{\left\| \vec{u_1} \right\|^2}) \vec{u_1}) \bullet \vec{u_1} - ((\frac{\vec{v} \bullet \vec{u_2}}{\left\| \vec{u_2} \right\|^2}) \vec{u_2}) \bullet \vec{u_1}$, par définition de projection orthogonale

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - ((\vec{v} \bullet \vec{u_1}) \vec{u_1}) \bullet \vec{u_1} - ((\vec{v} \bullet \vec{u_2}) \vec{u_2}) \bullet \vec{u_1}$, car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont unitaires

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - (\vec{v} \bullet \vec{u_1}) (\vec{u_1} \bullet \vec{u_1}) - (\vec{v} \bullet \vec{u_2}) (\vec{u_2} \bullet \vec{u_1})$, par associativité mixte

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - (\vec{v} \bullet \vec{u_1}) (\vec{u_1} \bullet \vec{u_1}) - 0$, car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul

$= \vec{v} \bullet \vec{u_1} - (\vec{v} \bullet \vec{u_1}) \left\| \vec{u_1} \right\|^2$, car le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de la longueur de ce vecteur ; mais comme $\vec{u_1}$ est unitaire, $\left\| \vec{u_1} \right\|^2 = 1$, d'où,

$\vec{w} \bullet \vec{u_1} = \vec{v} \bullet \vec{u_1} - (\vec{v} \bullet \vec{u_1}) = 0$.

Comme le produit scalaire de $\vec{w}$ et de $\vec{u_1}$ est nul, les vecteurs sont orthogonaux.

Par un raisonnement analogue, nous pouvons démontrer que le produit scalaire de $\vec{w}$ et $\vec{u_2}$ est nul, donc qu'ils sont orthogonaux.

Description globale de la situation

- Les savoirs à mettre en fonctionnement sont les propriétés et propositions relatives au produit scalaire et la formule de calcul de la projection orthogonale.
- C'est en tant qu'objet qu'on étudie ici l'algèbre vectorielle. La démonstration apparaît alors comme un outil permettant de manipuler les différentes propriétés et propositions énoncées au point précédent et de se familiariser avec la formule de calcul de la projection orthogonale.

- La tâche est dans le cadre de l'algèbre vectorielle et il n'y a pas de changement de cadres à faire pour mener la démonstration à bien. Les vecteurs sont écrits sous la forme de lettres minuscules surmontées d'une flèche et il n'y a pas de changement de registres à faire.
- Le produit scalaire et la projection orthogonale viennent d'être introduits : on considère donc ces savoirs comme relativement nouveaux.

Analyse de la tâche

- La question est fermée car la valeur de vérité est connue.
- Une méthode est imposée, soit celle d'utiliser le produit scalaire et la définition de projection orthogonale.
- Il n'y pas d'élément implicite dans l'énoncé.
- La structure des démonstrations est simple puisque le raisonnement est pris en charge par le calcul. Mais les manipulations et l'application des propriétés sont plutôt complexes.

Analyse des activités attendues des étudiants

- Le niveau de mise en fonctionnement des savoirs est mobilisable.
- Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes pour démontrer les propriétés.
- Il y a un changement de points de vue : montrer que les vecteurs sont orthogonaux en montrant que leur produit scalaire est nul.
- Le symbolisme de la projection orthogonale est peu connu des étudiants et il est très important. Il n'est pas évident de retenir quel vecteur est projeté sur quel autre vecteur. C'est une question de convention. Soulignons aussi le choix de la lettre u pour représenter les vecteurs unitaires. Comme la lettre u est souvent utilisée pour représenter des vecteurs, l'étudiant pourrait ne pas penser utiliser le fait qu'il est unitaire dans la démonstration. De plus, le symbolisme devient vite étourdissant : qui est un scalaire et qui est un vecteur. Le rôle des parenthèses est alors très important.

Analyse des activités possibles des étudiants

- Il nous semble que ce que l'étudiant doit démontrer est explicite.
- Plusieurs propriétés sont à utiliser sous une autre forme que celle habituellement présentée aux étudiants. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{u}_2$ sont unitaires et orthogonaux, ce qui entraîne des simplifications à l'application des propriétés du produit scalaire et de la formule de calcul de la projection orthogonale.

Cette tâche nous paraît complexe puisque nous savons que de telles manipulations entraînent souvent des pertes de contrôle chez les étudiants. Il devient difficile de savoir ce qui représente un vecteur et ce qui représente un scalaire. Le symbolisme représentant la projection orthogonale est très condensé et il pourrait y avoir confusion. Également, les vecteurs impliqués sont particuliers. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{u}_2$ sont unitaires et orthogonaux.

4.5 Bilan des analyses

Nous avons pu analyser toutes les tâches de démonstration qu'une enseignante du cours *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* a proposées aux étudiants. Certaines tâches étaient plutôt simples alors que plusieurs tâches nous ont paru complexes. En somme, 8 tâches nous ont paru simples ou peu complexes, 11 tâches nous ont paru relativement complexes, 14 nous paraissaient complexes et 8 tâches étaient, selon nous, très complexes. Nous remarquons qu'un bon nombre de démonstrations possèdent des caractéristiques de complexité communes. Voici les caractéristiques principales que nous avons relevées de cette analyse, comme indice de complexité

- *Le rôle de la démonstration*

Nous avons relevé que le rôle de la démonstration n'est pas clairement défini. Nous savons que les étudiants sont toujours en processus d'apprentissage relativement à la démonstration mais généralement, le travail de démonstration n'est pas l'objectif de la tâche. Nous avons constaté qu'il n'y a que dans les démonstrations géométriques à l'aide des vecteurs que le travail est réellement centré sur la démonstration. On demande d'expliciter les hypothèses et la conclusion. Dans toutes les autres sections, la démonstration apparaît plutôt comme un outil permettant la mise en fonctionnement de nouvelles définitions, règles, propriétés, bref de nouvelles algèbres (matricielle et vectorielle). Cependant, comme la démonstration génère des difficultés chez les étudiants et comme l'introduction de nouveaux objets, de nouveaux symboles et de nouvelles règles de manipulation ajoute d'autres difficultés, en général, les tâches proposées sont assez complexes pour les étudiants.

Comme nous l'avons mentionné dans le cadre théorique, la compréhension de ce qu'est le raisonnement déductif ne peut pas se limiter à une connaissance des théorèmes et définitions. Les étudiants doivent bien connaître conceptuellement les objets sur lesquels ils travaillent, ils doivent comprendre les relations entre ces objets et les propositions les impliquant et, finalement, ils doivent articuler leur discours selon les démarches du raisonnement. Or, dans ce cas-ci, les étudiants n'ont pas encore une bonne connaissance des objets qu'ils manipulent; au contraire, on utilise la démonstration pour rendre ces nouveaux objets accessibles. Nous avons souligné que cette mauvaise connaissance vient souvent amplifier les difficultés d'ordre logique liées à la démonstration.

- *La structure de la démonstration*

Nous avons également remarqué qu'il y a beaucoup de démonstrations dont le raisonnement est pris en charge par le calcul. Même si la structure de ces démonstrations est souvent relativement simple, comme nous avons vu dans l'analyse diagnostique, il est possible que les étudiants fournissent des démonstrations dans lesquelles il y a une confusion entre différents cadres et où il peut y avoir des glissements de sens. On pourrait croire que de telles démonstrations sont plus faciles (elles le sont d'un point de vue de la structure logique puisque le graphe de la démonstration est linéaire). Mais d'autre part, comme les démonstrations sont prises en charge par le calcul et qu'en plus, certaines tâches se font dans un contexte d'apprentissage d'une nouvelle algèbre, nous croyons que cela peut amplifier les risques de faire face au paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre. Au profit de calculs plus automatisés, il y a un risque élevé que les étudiants se réapproprient de façon erronée certaines définitions et certaines règles basées sur des définitions et règles plus familières, plus simples ou plus intuitives. Comme nous l'avons vu dans l'analyse des productions des étudiants, cette réinterprétation des règles entraîne alors des pertes de contrôle et de sens.

Lors des démonstrations géométriques à l'aide des vecteurs (tâches 15 à 28), il est possible de croire que les démonstrations sont simplifiées en utilisant les vecteurs puisqu'il y a en quelque sorte une algébrisation du raisonnement. Au contraire, il semble que les étudiants soient alors plus susceptibles de produire des démonstrations dans lesquelles les calculs n'en finissent plus et dont l'aboutissement n'est pas ce qui est cherché. Citons Tanguay (2002a, p. 45) :

> Si l'élève moyen parvient généralement assez bien à traduire les hypothèses et la thèse (la proposition à montrer) vectoriellement, il ne sait absolument pas comment **diriger ses calculs**. Se basant sur les exemples abordés en classe ou dans le manuel, l'élève introduit au jugé de nouveaux points à l'aide de la règle de Chasles dans les égalités données par hypothèses ou à montrer, et se lance ensuite dans des calculs qui tournent le plus souvent en rond, faute de contrôle intuitif.

Tanguay mentionne que faute de contrôle intuitif, les élèves (ou étudiants) se perdent dans des calculs qui ne finissent pas et souvent, les calculs nécessaires pour aboutir à ce qui est cherché ne vont pas de soi intuitivement. Effectivement, il est rare qu'en raisonnant sur la figure, on puisse arriver à décoder en terme de calcul vectoriel ce qu'il faut faire pendant la démonstration. La figure sert à traduire les hypothèses, la conclusion et elle sert aussi à guider l'utilisation de la règle de Chasles, mais la démonstration est vraiment prise en charge par le calcul. Le raisonnement doit alors être axé sur ce qu'on veut prouver et sur les manipulations algébriques à effectuer pour arriver à l'expression voulue. Par ce fait, il arrive souvent que les calculs faits n'aient aucun lien avec la figure géométrique. Barbin et al. (2001, p. 9) confirment :

> Or, le principe même d'une méthode, vectorielle ou algébrique, est de traduire les hypothèses et la conclusion sous forme d'une graphie, vectorielle ou algébrique, afin de pouvoir ensuite mener les calculs sans regarder la figure, mais en regardant les calculs.

En effet, Barbin et al. (2001) hésitent même à considérer comme des démonstrations les tâches qui demandent l'utilisation de ce qu'ils appellent la *méthode vectorielle.*

Qu'on considère ce type d'activités comme des démonstrations ou des méthodes, les stratégies utilisées sont non routinières. Tantôt la démonstration peut être menée par un raisonnement direct à partir de l'égalité à démontrer, tantôt il faut pouvoir exprimer un même vecteur de plusieurs façons et additionner ou soustraire les expressions pour arriver à ce qui est demandé. Parfois, il faut supposer qu'un point partage un segment dans un certain rapport et montrer qu'un autre segment passe par ce point, et il faut quelquefois introduire des vecteurs intermédiaires pour arriver à démontrer.

En effet, plusieurs fois (tâches 9, 10, 11, 14, 17, 18, 19, 22 à 29 et 37), la manière de mener la démonstration est peu familière pour les étudiants. Ainsi, en plus des difficultés de manipulation du nouveau symbolisme, des difficultés concernant l'organisation de la démonstration s'ajoutent.

- *Le symbolisme*

Le symbolisme, particulièrement en algèbre linéaire, est très condensé, c'est-à-dire que les symboles contiennent beaucoup d'information. Nous notons que dans les tâches de démonstration du cadre des matrices, il arrive fréquemment (comme aux tâches 2, 4 et 6) qu'une matrice soit représentée par une seule lettre majuscule, mais qu'en fait, la matrice est particulière (carrée, triangulaire, symétrique, antisymétrique, etc.). Cette impossibilité de représenter autrement certaines matrices particulières (puisqu'elles ont la même représentation que des matrices quelconques) peut complexifier la démonstration. Le fait que les étudiants aient affaire à un type particulier de matrices augmente le niveau de complexité, surtout si la traduction est laissée à leur charge. En effet, comment gérer cette traduction ? En passant par les matrices écrites en composantes ou en utilisant une propriété particulière (comme par exemple : $A = A^T$). Quand cette traduction est à la charge de l'étudiant, celui-ci pourrait ne pas trouver la bonne propriété ou le bon mode de représentation.

De plus, plusieurs symboles utilisés en algèbre linéaire entrent en conflit avec des symboles utilisés dans les cadres numérique et algébrique (mieux connus des étudiants) ou même dans d'autres cadres de l'algèbre linéaire. Nous avons répertorié plusieurs symboles pouvant causer des glissements vers ces autres cadres.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse diagnostique, les symboles de transposition (T) et de matrice inverse (-1) peuvent être confondus avec un symbole d'exposant. Dans les exercices du manuel, le symbole de déterminant et le symbole de la norme d'un vecteur sont identiques et peuvent non seulement entrer en conflit l'un avec l'autre, mais aussi avec le symbole de valeur absolue qui est mieux connu des étudiants. D'autant plus que certaines tâches de démonstration que nous avons analysées comprenaient, dans une même expression, à la fois la norme d'un vecteur et la valeur absolue.

Toujours en algèbre matricielle, des symboles très similaires représentent tantôt des matrices et tantôt des nombres. Nous pensons au symbole d'une matrice quelconque A et celui, par exemple, du déterminant de cette matrice noté, $|A|$. Les symboles se ressemblent, mais les étudiants doivent comprendre que dans un cas, il s'agit d'une matrice et dans l'autre cas, d'un nombre. Le même problème se pose en algèbre vectorielle, lorsqu'on additionne deux vecteurs, $\vec{u} + \vec{v}$, cette expression représente un vecteur alors que le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$ donne plutôt un nombre.

Également, tous les symboles d'opérations peuvent entraîner des erreurs d'interprétation chez les étudiants. En effet, pour l'addition et la soustraction de matrices et de vecteurs, on utilise les symboles connus « + et − ». Pour ce qui est du produit scalaire et du produit vectoriel, on tente de les différencier en utilisant deux symboles différents, soit respectivement « • » et « × », mais ces symboles représentent une seule et unique opération dans le cadre numérique (ou algébrique). Les étudiants pourraient alors ne pas les différencier.

En somme, les tâches 2, 4, 6, 8, 11, 13, 23, 27, 32, 34, 36 et 41 nous ont paru plus complexes pour des raisons de gestion du symbolisme, que ce soit la confusion entre symboles, un symbolisme trop condensé ou pour des raisons de manipulations difficiles.

- *La forme des définitions et des règles*

Comme nous avons pu le remarquer dans l'analyse diagnostique, lorsque les règles et définitions sont présentées ou sont à utiliser sous une nouvelle forme, les étudiants ont du mal à les reconnaître. Nous donnions l'exemple de remplacer une variable par une expression plus complexe, par exemple le remplacement de A par BC ou A^{-1} ou A^T dans une règle ou une définition.

De plus, il est difficile pour eux de lire une égalité dans le bon sens. Comme nous l'avions donnée en exemple, pour un étudiant, la règle $(AB)^T = B^T A^T$ devient difficile à reconnaître lorsqu'appliquer de droite à gauche dans une démonstration.

Nous avons relevé plusieurs tâches dans lesquelles ce risque de confusion apparaît. Par exemple, dans le cadre de l'algèbre matricielle, dans une tâche comme celle de démontrer que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ si le produit ABC est défini (tâche 5), les étudiants doivent considérer le produit de matrices sous l'angle de son résultat, qui est une « nouvelle » matrice, et non comme l'opération de multiplication. Également, dans une démonstration, les étudiants doivent conclure que $A^T A^T = (AA)^T$, à partir de la règle $(AB)^T = B^T A^T$, qui est à appliquer dans le sens inverse où elle est présentée aux étudiants; mais en plus, il faut reconnaître les matrices sous une autre forme, c'est-à-dire qu'ici, $A = A$ mais aussi $B = A$. Cependant, cette utilisation de la règle avec les deux mêmes matrices pourraient renforcer la conception que « T » se manipule comme un exposant.

En algèbre vectorielle, on retrouve, par exemple, cette expression : $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2$. Or, dans le manuel, la règle sous-jacente est présentée avec un seul vecteur : $\left|\vec{u}\right|^2=\vec{u}\bullet\vec{u}$. Les étudiants doivent reconnaître la différence de deux vecteurs comme étant un seul vecteur. Ainsi, ils pourront déduire, à partir de la règle, que $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})$.

Nous avons pu identifier des difficultés de ce type aux tâches 8, 9, 18, 19 et 41.

- *Les changements de cadres et de registres laissés à la charge des étudiants*

En ce qui concerne les changements de cadres nécessaires, pour mener à bien plusieurs démonstrations, il faut traduire l'énoncé donné en une nouvelle expression qui, une fois démontrée, démontre l'énoncé initial. Ceci s'est produit le plus souvent en géométrie vectorielle. Par exemple, pour montrer que des segments sont parallèles, l'étudiant doit montrer que les vecteurs associés aux segments sont colinéaires. Autrement dit, il doit exprimer un des vecteurs en fonction de l'autre et ainsi introduire un élément intermédiaire, par exemple le scalaire *k*. Pour montrer qu'une figure est un parallélogramme, il suffit de montrer que les segments opposés peuvent être représentés par le même vecteur. Nous avons remarqué que ceci s'est produit en algèbre vectorielle également. À l'intérieur même de certaines démonstrations (surtout en algèbres matricielle et vectorielle), un changement de cadre était nécessaire, soit celui de passer au cadre de l'algèbre des nombres réels.

Dans les tâches soumises aux étudiants, les changements de registres sont plus fréquents que les changements de cadres. En algèbre matricielle, souvent, les énoncés impliquent des matrices écrites sous la forme de lettres majuscules, mais on demande de démontrer pour un format précis de matrices. Selon nous, ce changement de registres facilite la démonstration. Pour plusieurs démonstrations en algèbre vectorielle, il faut passer du vecteur représenté par la lettre minuscule surmontée d'une flèche à sa représentation sous forme de composantes dans une dimension précise. Encore une fois, pour nous, ce changement de registres ne complexifie pas nécessairement la tâche, à condition que l'énoncé donne au moins un indice à l'étudiant qu'un tel changement est à faire.

Les tâches qui nécessitent un changement de cadres sont : 4, 16, 20 à 28.
Les tâches nécessitant un changement de registres sont : 1, 2, 3, 4, 12, 14, 16, 17, 19 à 23, 25 à 31, 35 et 37 à 40.

- *L'interprétation de ce qui est à démontrer, les éléments implicites et les changements de points de vue*

Occasionnellement, des éléments implicites ou des changement de points de vue sont à considérer ce qui, par conséquent, rend la démonstration plus difficile (tâches 1, 14, 24 et 25). Par exemple, dans une tâche, on mentionne que le déterminant de la matrice A est nul. Pour mener la démonstration, l'étudiant doit alors décoder que la matrice A est inversible. En géométrie vectorielle, on demande une démonstration impliquant un quadrilatère. Implicitement, comme nous sommes en présence d'un quadrilatère, nous sommes aussi en présence de plusieurs triangles. Pour démontrer, l'étudiant doit utiliser les triangles inclus dans le quadrilatère.

- *Le sens des démonstrations*

Trente-neuf des quarante et une tâches présentées sont fermées, c'est-à-dire que la valeur de vérité des énoncés est donnée ou explicite. Seule la tâche 14 présente un énoncé ouvert. Nous pouvons nous demander quel rôle les étudiants prêteront aux mathématiques dans ces tâches, et il est aussi légitime de se demander si les étudiants seront réellement en construction de connaissances. Nous avons d'ailleurs rapporté les propos de Dreyfus (1999), dans le cadre théorique, disant que les conceptions des élèves et étudiants concernant la démonstration sont limitées et uniformes puisque la plupart d'entre eux ne savent pas pourquoi ils doivent démontrer. Le fait de donner la valeur de vérité de presque toutes les tâches renforce alors la conception que la démonstration est une exigence un peu arbitraire de l'enseignant pour discriminer les forts et les faibles, et non un véritable moyen de validation pour statuer définitivement sur la valeur de vérité.

CHAPITRE V

ANALYSE DE LA PRÉPARATION

Dans ce chapitre, nous évaluons, à la lumière du bilan de l'analyse des tâches, la préparation que les étudiants reçoivent en termes de démonstration et de formalisme. Nous évaluons cette préparation à travers l'étude des programmes du Ministère, Mathématique 436 et Mathématique 536 (de quatrième secondaire et cinquième secondaire respectivement), programmes en vigueur jusqu'en 2008-2009. Par la suite, nous allons regarder ce qui est présenté dans le nouveau programme en processus d'implantation, toujours pour les deux dernières années du secondaire. Nous présentons finalement le bilan de cette étude des programmes.

5.1 Étude des programmes actuels de mathématique

Les programmes de Mathématique 436 et 536 s'adressent aux élèves qui désirent poursuivre leurs études en sciences, en administration ou dans un domaine technique. Comme en principe, on prépare les élèves à des études scientifiques, on cite dans le programme Resnick et Kloffer (1989) pour exposer le point de vue adopté : « Acquérir des connaissances n'est pas suffisant, il faut de plus que les élèves deviennent des penseurs compétents [traduction libre] » (Mathématique 536, p. 8).

Trois grands principes (les principes directeurs) ont guidé la rédaction du programme. Ces principes sont de *favoriser la participation active de l'élève dans son apprentissage*, de *favoriser le processus de résolution de problèmes* et de *favoriser l'utilisation de la technologie.* En résolution de problèmes, on mentionne que les problèmes proposés serviront entre autres à « acquérir des habiletés intellectuelles (organiser, structurer, abstraire, analyser, synthétiser, estimer, généraliser, déduire, justifier, etc.) » (p. 10) et aussi, à « adopter des attitudes positives (prendre conscience de ses capacités, respecter le point de vue des autres, faire preuve d'imagination, de créativité, de rigueur et de précision, etc.) » (p. 10).

Quatre objectifs globaux sont présentés dans le programme. D'abord, on demande que l'élève puisse établir des liens, qu'il puisse communiquer, qu'il puisse résoudre une situation-problème et finalement, qu'il raisonne en émettant des hypothèses et en les vérifiant de manière inductive ou déductive.

5.1.1 Programme Mathématique 436

Dans ce programme, trois objectifs généraux précisent les objectifs globaux mentionnés plus haut, en déterminant les contextes mathématiques dans lesquels ils seront abordés :

- Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre;
- Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques;
- Accroître l'esprit critique de l'élève devant une étude statistique.

Regardons ce qui est dit au sujet de la démonstration et du formalisme en algèbre et en géométrie.

Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre

En ce qui concerne le raisonnement déductif, les élèves pourront démontrer des propositions en utilisant la géométrie analytique. Selon le programme, les élèves pourraient être amenés à démontrer des propositions du type : *Les milieux des côtés de tout quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.*

Concernant le formalisme, voici ce qui est proposé :

> La formalisation de la mathématique étudiée dans le programme devrait se traduire par l'emploi de symboles et de connecteurs logiques ou ensemblistes. On leur reconnaît comme avantage la précision et la concision. L'enseignante ou l'enseignant devrait donc les présenter à ses élèves au fur et à mesure des besoins, en les expliquant, puis en

incitant les élèves à les utiliser fréquemment; c'est ainsi que les élèves parviendront à les comprendre et à les appliquer facilement (MEQ, Mathématique 436, p. 15).

Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques

On demande ici aux élèves, lorsqu'ils travaillent l'isométrie et la similitude des figures, de dégager des propriétés et théorèmes, de les démontrer quand c'est possible et de les appliquer à la résolution de problèmes.

5.1.2 Programme Mathématique 536

Dans le programme de Mathématique 536, les élèves sont amenés à travailler les objectifs généraux suivants :

- Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre ;
- Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques ;
- Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des données statistiques.

Voyons le rôle de la démonstration et du formalisme à l'intérieur des objectifs relatifs à l'algèbre et à la géométrie.

Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre

On mentionne dans ce programme que le formalisme qui a été entamé dans le programme Mathématique 436 doit être poursuivi et qu'il « devrait se traduire dans l'enseignement par l'emploi de symboles appropriés, de connecteurs logiques et du langage ensembliste » (MEQ, Mathématique 536, p. 16). On ajoute que c'est par l'utilisation qu'en fait l'enseignant que les élèves arriveront à comprendre le langage symbolique.

On ajoute, dans cette section, que dans le programme Mathématique 536, « démonstrations et preuves devraient être constamment présentes, autant en algèbre qu'en géométrie » (MEQ, Mathématique 536, p. 16). Plus précisément, dans cette section, on demande que les élèves puissent démontrer l'identité d'expressions trigonométriques et appliquer les propriétés des logarithmes. On envisage la possibilité que l'enseignant démontre ces propriétés des logarithmes mais ce n'est pas une prescription.

Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques

En cinquième secondaire, les élèves doivent démontrer certaines propriétés des vecteurs (ex : $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$) et des propositions à l'aide des vecteurs (ex : Les médianes d'un triangle se rencontrent aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet). Les élèves doivent aussi démontrer des propositions lorsqu'ils travaillent les relations métriques dans le cercle et le triangle rectangle. Tout comme en algèbre, on mentionne que les démonstrations et preuves doivent être présentes continuellement. On signale également que l'utilisation de la technologie est d'une grande utilité; entre autres, elle permet « de formuler les conjectures, d'en discuter et de les tester » (op. cit., p. 27). Remarquons cependant qu'on ne spécifie pas qu'il faille les valider par la démonstration.

Toujours en géométrie, on nous dit qu'il est important de se centrer autant sur la compréhension de la preuve que sur sa mécanique.

Dans les deux programmes, 436 et 536, les attentes quant à la démonstration sont énoncées assez clairement, à travers les objectifs globaux, terminaux ou intermédiaires. Pour chaque thème abordé (géométrie analytique, isométrie et similitude, vecteurs, etc.), on retrouve en annexe une liste de propriétés pouvant faire l'objet de démonstrations.

5.2 Étude du programme en processus d'implantation

Au moment d'écrire le présent mémoire, le nouveau programme du secondaire est encore en processus d'implantation. La partie de ce programme qui touche le deuxième cycle (troisième, quatrième et cinquième secondaires, en préparation) propose un choix de trois profils de formation, que les auteurs nomment *séquences*. La troisième secondaire offre une formation générale et, dès la quatrième, les élèves choisissent selon leurs intérêts l'une ou l'autre des séquences suivantes :

- La séquence *Culture, société et technique* vise à préparer les élèves à poursuivre leurs études dans le domaine des arts, de la communication, des sciences humaines et sociales. On s'attend à ce que les élèves qui choisissent cette séquence ne fassent plus beaucoup de mathématiques ultérieurement. On cherche alors à développer le jugement critique des élèves. Cette séquence devrait permettre l'enrichissement de la formation de base en mathématique et ce, dans tous les champs mathématiques (arithmétique, algèbre, probabilités, statistiques et géométrie). Cette formation ne permet pas aux élèves de poursuivre des études en sciences de la nature au Cégep. Les élèves qui choisissent cette séquence en quatrième secondaire pourraient poursuivre, en cinquième secondaire, dans la même séquence ou choisir d'opter pour la séquence technico-sciences. Cependant, ils ne pourraient passer à la séquence sciences naturelles. Pour les quatrième et cinquième années du secondaire, on accorde 4 crédits mathématiques à cette séquence. Les responsables du nouveau programme prévoient l'ajout d'un cours d'appoint de 2 crédits qui pourrait permettre le passage, de la quatrième à la cinquième secondaire, entre cette séquence et la séquence sciences naturelles.

- La séquence *Technico-sciences* prépare les élèves aux domaines techniques tels que l'alimentation, les techniques en biologie ou en physique, l'administration, la communication graphique, etc. Toutefois, avec une formation mathématique en *Technico-sciences*, les élèves pourraient être admis en sciences de la nature au collégial. Cette séquence offre une formation en algèbre et géométrie qui se répartit sur deux ans et une formation en statistiques et probabilités qui s'échelonne sur un an. C'est une séquence dans laquelle les apprentissages ont une portée concrète, surtout basée sur l'application. Les élèves sont amenés à conjecturer, mais n'ont pas nécessairement à valider, à l'aide de démonstrations formelles, toutes les conjectures proposées. Puisque le domaine technique est très instrumenté, on encourage fortement l'usage d'instruments à des fins d'apprentissages. Un élève de quatrième secondaire en Technico-sciences pourrait décider de poursuivre dans n'importe laquelle des trois séquences en cinquième secondaire.

- La séquence *Sciences-naturelles* permet aux élèves de poursuivre des études en sciences de la nature au Cégep. On mentionne aussi que cette séquence, dont le niveau d'abstraction est un peu plus élevé que dans les deux autres séquences, pourrait intéresser les élèves qui s'orientent vers la recherche. Les élèves poursuivent leur formation en algèbre, en géométrie, en statistiques, mais ne travaillent plus les probabilités. Les statistiques sont exploitées en lien avec les fonctions. Cette séquence met l'accent sur la compréhension du fonctionnement de certains phénomènes souvent liés au domaine des sciences. Alors que ce n'est pas explicitement mentionné dans la séquence *Technico-sciences*, on favorise ici explicitement l'élaboration de preuves et démonstrations en algèbre et en géométrie. Un élève de cette séquence en quatrième secondaire pourrait décider de continuer dans n'importe laquelle des trois séquences en cinquième secondaire.

Les enseignants du collégial doivent donc s'attendre à ce que les étudiants inscrits aux cours de mathématiques des filières scientifiques du collégial proviennent des séquences *Technico-sciences* ou *Sciences-naturelles*.

À travers ces trois profils, les élèves doivent développer leurs compétences à *communiquer à l'aide du langage mathématique,* à *déployer un raisonnement mathématique* et à *résoudre une situation-problème*. L'explication générale de la compétence *déployer un raisonnement mathématique* évoque l'importance de travailler plusieurs types de raisonnement (par analogie, par disjonction de cas, déductif, inductif, à l'aide d'un contre-exemple et par l'absurde), de conjecturer, critiquer et justifier lors d'activités mathématiques. Réaliser des preuves est une composante de cette compétence et, selon le programme, elle devrait être évaluée chez les élèves.

Tableau 5.1

Les mathématiques au programme selon les séquences

4^e secondaire	Culture, société et technique	Technico-sciences	Sciences naturelles
Arithmétique et algèbre	- Inéquations du premier degré à deux variables ; - Fonctions réelles (polynomiales de degré 0, 1 et 2, exponentielles, périodiques, en escaliers et définies par parties) ; - Systèmes d'équations du premier degré à deux variables.	- Nombres réels (nombres radicaux, puissance de bases 2 et 10) ; - Inéquations du premier degré à deux variables ; - Fonctions réelles (polynomiales de degré 2 (forme canonique avec les seuls paramètres multiplicatifs), exponentielles, périodiques, en escaliers et définies par parties) ; - Système d'équations du premier degré à deux variables.	- Identités algébriques ; - Équations et inéquations du deuxième degré à une variables ; - Fonctions réelles (polynomiales de degré 2 (formes générale et canonique) et en escaliers) ; - Système d'équations du premier degré à deux variables et composé d'une équation du premier degré et d'une équation du deuxième degré à deux variables.
Géométrie	- Géométrie analytique (accroissements : distance, point de partage, pente et droite et demi-plan : parallélisme et perpendicularité) ; - Relation dans le triangle (sinus, cosinus, tangente, loi des sinus et formule de Héron).	- Géométrie analytique (distance entre deux points, coordonnées d'un point de partage et droites : équation, pente, parallélisme, perpendicularité et médiatrice) ; - Relations métriques et trigonométriques dans le triangle rectangle	- Géométrie analytique (droites et distance entre deux points) ; - Relations métriques et trigonométriques dans le triangle (sinus, cosinus, tangente, loi des sinus et des cosinus).

5e secondaire	Technico-sciences	Sciences naturelles
Arithmétique et algèbre	- Inéquations du premier degré à deux variables ; - Fonctions réelles (polynomiales de degré 2 (forme canonique avec tous les paramètres et forme générale), rationnelles et sinusoïdales); - Opérations sur les fonctions ; - Système d'inéquations du premier degré à deux variables ; - Système d'équations et d'inéquations de différents modèles fonctionnels.	- Nombres réels (valeur absolue, nombres radicaux, exposants et logarithmes) ; - Fonctions réelles (valeur absolue, racine carrée, rationnelle, exponentielle, logarithmique, sinusoïdale, tangente et définie par parties) ; - Opérations sur les fonctions ; - Système d'inéquations du premier degré à deux variables ; - Système d'équations du deuxième degré.
Géométrie	- Figures équivalentes ; - Géométrie analytique (lieux géométriques, positions relatives, lieux plans et coniques) ; - Relations métriques dans le cercle et trigonométriques dans le triangle (lois des sinus et cosinus).	- Géométrie analytique (cercle trigonométrique et identités trigonométriques, vecteurs et coniques).

5.2.1 La séquence Technico-sciences

Les processus importants de cette séquence sont la modélisation et la prise de décision. On dit dans le programme que l'élève devrait alterner entre « preuves pragmatiques » et « preuves intellectuelles » ; on peut penser que les auteurs du programme désignent par ces dernières, comme chez Balacheff (1987), les démonstrations plus formelles. Or, à la lecture de la description détaillée de cette séquence, la démonstration ne nous semble pas y avoir une place si importante. Notamment, les élèves sont amenés à faire de la géométrie analytique, mais avec une tout autre visée que celle de démontrer des résultats géométriques. Ils se concentrent sur les concepts de distance entre deux points, de droite, de pente et de coniques avec une approche par lieu géométrique. Ils ont principalement recours à la géométrie analytique pour modéliser. De plus, on demande que l'élève découvre les relations métriques dans le triangle rectangle (ou quelconque) à partir de ses connaissances du concept de similitude, sans mentionner toutefois l'importance de démontrer les conjectures trouvées.

5.2.2 La séquence Sciences-naturelles

Dans cette séquence, on mentionne que le processus de modélisation est central et que le niveau de formalisation augmente. En algèbre, on demande à l'élève de démontrer des identités algébriques. En géométrie, les élèves travaillent les figures isométriques et semblables, les figures et solides équivalents, les relations métriques dans le triangle rectangle, les rapports trigonométriques, les coniques et finalement les vecteurs. Contrairement au programme actuel, il n'y a pas dans le nouveau programme l'exigence explicite de démontrer les propriétés des vecteurs, ni de démontrer des propositions géométriques à l'aide des vecteurs. Seules les opérations addition, soustraction et multiplication par un scalaire semblent être à l'étude.

La deuxième année du cycle (secondaire 4) apparaît comme celle où la démonstration devrait être davantage sollicitée. L'étude des figures semblables et isométriques, des rapports trigonométriques et des relations métriques dans le triangle rectangle gagnerait, selon le programme, à être faite par la découverte. Conjecturer est un processus dominant. On mentionne que l'élève pourra utiliser les conjectures (qu'il aura énoncées et validées empiriquement) à titre de justification en résolution de problèmes. On note que certaines propriétés seront déduites « ... à l'aide d'un raisonnement organisé à partir de définitions ou de propriétés déjà établies tout en introduisant la rigueur souhaitée » (MELS, p. 192). Également, comme l'approche privilégiée est « analytique », il n'y a plus de géométrie euclidienne ni d'étude des relations métriques dans le cercle.

5.3 Bilan de l'étude des programmes

Établissons un bref bilan des transformations apportées par le nouveau programme en comparaison avec le programme des années 1990.

Dans le nouveau programme, l'accent est surtout mis sur les processus généraux que les enseignants doivent mettre de l'avant en classe. Par exemple, on insiste sur le fait que les élèves doivent conjecturer et démontrer, mais on ne sait pas à quels concepts ou contenus donner priorité. C'est dans la séquence *Sciences naturelles* que les élèves sont le plus susceptibles d'être amenés à démontrer.

Il nous semble clair que le nouveau programme laisse plus de latitude aux enseignants pour ce qui est du traitement des contenus, ce qui pourra stimuler l'enseignant consciencieux et donner lieu à un enseignement riche et dynamique. Mais à l'inverse, un enseignant moins impliqué pourrait avoir tendance à évincer les contenus auxquels l'élève n'a pas accès par l'exploration, ou encore à ne demander systématiquement que des conjectures et des validations empiriques ou informelles, sans jamais solliciter le raisonnement déductif. Si l'on s'en tient à ce qui est explicitement prescrit dans le nouveau programme, on peut donc difficilement dire que les élèves seront mieux préparés au raisonnement déductif.

Nous remarquons, en plus, la place prépondérante que prend l'algèbre. Ainsi, si les enseignants décident de travailler les démonstrations avec leurs élèves, ils seront amenés à le faire en algèbre (pour démontrer les propriétés des nombres réels), en géométrie analytique et ils pourront aussi démontrer des expressions trigonométriques. Nous remarquons que la géométrie du cercle et du triangle qui, dans le programme actuel, visait un travail de déduction, semble avoir été évacuée du nouveau programme en *Sciences naturelles* et semble avoir un tout autre but (que celui qu'il avait dans le programme des années 1990) en *Technico-sciences*. Remarquons aussi que dans le programme des années 1990, la géométrie analytique est sous l'objectif général qui concerne l'algèbre alors que dans le programme en voie d'être implanté, il est classé en géométrie.

La question se pose : est-ce qu'une algébrisation de la géométrie permet de mieux préparer les élèves à poursuivre des études mathématiques au collégial, surtout en ce qui concerne la démonstration et le formalisme commandés par le cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle? Nous croyons qu'au contraire, l'économie des raisonnements qu'apporte l'algèbre, bien qu'utile en mathématiques, n'est pas une solution profitable d'un point de vue didactique et pédagogique au secondaire.

Selon Thom (1974, p. 53), « la géométrie euclidienne est un intermédiaire nécessaire entre le langage usuel et le langage algébrique ». En effet, dans le langage ordinaire, chaque mot, bien que non formalisable, contient un sens bien précis. À l'opposé, dans le langage formel algébrique, un symbole, pris indépendamment, ne contient pas de sens. Ainsi, la géométrie euclidienne peut être considérée comme un intermédiaire entre les deux langages. En effet, l'objet mathématique est défini par un mot ou une figure qui peut être formalisable mais aussi, le sens du mot ou de la figure est accessible. Citons encore Thom (ibid, p. 53) : « La géométrie permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale ». Et Thom ajoute en note de bas de page : « Et en même temps, le sens d'un élément y est déjà donné par une définition formalisable ».

Comme au collégial, plus précisément en algèbre linéaire, on cherche à initier les étudiants à de nouvelles algèbres permettant entre autres de démontrer des résultats géométriques dans un cadre purement calculatoire, il semble important que les élèves du secondaire aient pu travailler dans un cadre intermédiaire. Surtout que les enseignants du collégial s'attendent à ce que les élèves du secondaire aient travaillé ce type de démonstrations.

Comme nous l'avons mentionné dans le cadre théorique, l'économie de raisonnement des démonstrations algébriques peut entraîner des pertes de contrôle et de sens puisque les symboles ne représentent rien pour les élèves ou étudiants. Pour pouvoir juger des possibilités de ces derniers, il faut pouvoir les placer devant des situations à travers lesquelles ils peuvent donner une signification aux objets qu'ils manipulent. De ce point de vue, nous sommes d'avis qu'en remplaçant le langage propre à la géométrie par un langage algébrique trop tôt dans l'enseignement, l'on occasionne un saut cognitif trop élevé et alors, les compétences des élèves au secondaire et au collégial seront affectées négativement. On aurait avantage selon nous à travailler d'abord les démonstrations en géométrie synthétique avant de se lancer dans des démonstrations algébriques (en algèbre ou en géométrie). D'autant plus que les démonstrations en géométrie offrent un grand choix de problèmes de niveaux de difficulté différents. En algèbre, les démonstrations accessibles aux élèves et étudiants des cours de mathématiques pré-universitaires ne sont pour la plupart que de simples applications de règles et définitions. Nous employons le mot simple ici du point de vue mathématique et non simple du point de vue des étudiants.

Quant au formalisme, les directives du nouveau programme sont au moins aussi vagues que dans le programme actuel, et ne vont pas au-delà des « vœux pieux », comme « s'assurer du respect des règles et des conventions propres au langage mathématique » (MELS, p. 129), ou encore :

> Mentionnons aussi la compréhension des rôles des quantificateurs [...] et des opérateurs logiques [...]. Étant donné que plusieurs définitions de termes et de symboles se précisent à mesure que progressent les apprentissages, il importe de leur accorder une attention particulière afin de s'assurer que l'élève en comprenne le sens, en perçoive l'utilité et ressente le besoin d'y recourir (MELS, p. 126).

Cinq formations différentes pourraient permettre à un élève d'accéder à un programme de sciences de la nature au Cégep :

- Culture, société et technique en secondaire 4, cours d'appoint et Technico-sciences en secondaire 5 ;

- Culture, société et technique en secondaire 4, cours d'appoint et Sciences naturelles en secondaire 5 ;
- Technico-sciences en secondaire 4 et 5 ;
- Technico-sciences en secondaire 4 et Sciences naturelles en secondaire 5 ;
- Sciences naturelles en secondaire 4 et 5.

Nous évaluons donc que les enseignants du Cégep devraient s'attendre, après la réforme, à avoir des groupes plus hétérogènes, à ce que leurs étudiants soient outillés de façon très variable, tant au niveau des contenus que du degré de formalisme avec lequel auront été abordés ces contenus. De plus, si les élèves provenant de la séquence *Technico-sciences* peuvent être admis en sciences pures au Collégial, nous croyons qu'il pourrait y avoir une différence marquée quant à leur compétence à démontrer et à déduire, par rapport aux étudiants provenant de la séquence *Sciences-naturelles*.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

À l'issue de ce travail, nous constatons qu'il peut y avoir une rupture entre les exigences de niveau secondaire et celles de niveau collégial en ce qui concerne le formalisme et la démonstration. Nous proposons, en guise de conclusion, des pistes de réflexions et d'interventions visant à amoindrir ce décalage.

6.1 Au secondaire

Comme nous l'avons mentionné, dans les programmes de mathématiques du secondaire, notamment dans le programme en voie d'implantation, on demande aux enseignants d'amener les élèves à conjecturer. Il faudrait cependant que les enseignants comprennent l'importance de démontrer les conjectures et d'y mettre en œuvre de véritables raisonnements déductifs. Les prescriptions du nouveau programme, si elles sont bien prises en considération par les enseignants, auront alors l'avantage de faire plus souvent porter les démonstrations sur des résultats moins accessibles à l'intuition, pas d'emblée acceptés comme vrais par l'élève, des conjectures où se pose un véritable « enjeu de vérité » (Grenier et Payan, 1998). Par ailleurs, il serait profitable de faire travailler la démonstration en dehors de tout cadre algébrique, avec des preuves où l'enchaînement des inférences n'est pas nécessairement linéaire. Selon Thom (1974), le cadre de la géométrie synthétique (ou euclidienne, c'est-à-dire sans coordonnées) peut être profitable et servir d'intermédiaire, avant d'accéder au niveau d'abstraction que demandent les preuves algébriques (cf. § 5.3).

Selon nous, l'algèbre aurait avantage à être travaillée autant que possible à travers des problèmes contextualisés, ce qui est largement prescrit par le nouveau programme de mathématiques. Travailler les manipulations algébriques en contexte peut aider les élèves à attacher une plus grande importance aux symboles qu'ils manipulent et ainsi, favoriser une meilleure interprétation de ces symboles. Nous avons vu, à travers l'analyse des problèmes faite au chapitre IV, à quel point cette compétence à donner du sens et décoder les symboles est cruciale pour aborder le formalisme des cours du collégial. Par exemple, en quatrième et cinquième secondaire, il est possible de donner du sens aux variables que les élèves doivent manipuler lors de l'étude des fonctions, surtout si ces fonctions modélisent des situations contextualisées.

Également, les enseignants devraient utiliser plus systématiquement les notations ensemblistes et la syntaxe qui s'y rattache ce que commande le programme. Par exemple, dans le programme de Mathématique 436, on peut lire :

> La formalisation de la mathématique étudiée dans le programme devrait se traduire par l'emploi de symboles et de connecteurs logiques ou ensemblistes. On leur reconnaît comme avantage la précision et la concision. L'enseignante ou l'enseignant devrait donc les présenter à ses élèves au fur et à mesure des besoins, en les expliquant, puis en incitant les élèves à les utiliser fréquemment; c'est ainsi que les élèves parviendront à les comprendre et à les appliquer facilement. (p. 15)

Dans les programmes actuel et en voie d'implantation, on laisse entendre que les notions ensemblistes ont purement un rôle utilitaire, ce qui pourrait laisser croire aux enseignants que la syntaxe qui s'y rapporte n'est pas importante. Pourtant, les travaux de Dorier et al. (1997) tendent à montrer que des connaissances de logique et de théorie des ensembles sont souhaitables pour aborder un cours d'algèbre linéaire. Il est donc important à notre avis que les enseignants s'attachent à expliciter cette syntaxe.

En ce qui concerne l'enseignement des vecteurs en cinquième secondaire, il serait intéressant de repenser la manière de les aborder. En effet, comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, le raisonnement pour démontrer un résultat à l'aide des vecteurs est souvent évacué puisqu'il est pris en charge par le calcul. Il est même possible de mener la démonstration à terme en ne réfléchissant qu'aux symboles manipulés et non plus à ce qu'ils représentent (figure géométrique). De plus, ce type de démonstration est complètement repris au collégial. Or, plusieurs autres démonstrations, accessibles aux élèves de cinquième secondaire, peuvent être faites à l'aide des vecteurs. On peut, par exemple, demander aux élèves de démontrer, avec les vecteurs et en toute généralité (à savoir ici avec des points situés dans n'importe quels quadrants), la formule dite « du point de partage ».

Il serait aussi intéressant que les élèves puissent effectuer des changements de registres lorsqu'il est question de vecteurs. Voici un exemple de question qui pourrait être présentée au secondaire :

Soit la droite d d'équation $7y = -4x + 3$. Montrez que le vecteur (4, 7) est orthogonal à la droite d :

a) d'abord approximativement, à l'aide d'une construction graphique appropriée ;
b) ensuite exactement, en passant par l'expression vectorielle de la droite.
c) Démontrez plus généralement et vectoriellement que le vecteur (a, b) est orthogonal à toute droite dont l'équation est de la forme $by = -ax + c$.
d) Utilisez ce qui précède pour montrer que deux droites dont les pentes sont opposées et inverses, sont perpendiculaires.

Dans cet exemple, il y a changement de cadres et de registres. En effet, l'élève doit passer de la droite représentée sous la forme d'une équation cartésienne et d'abord l'exprimer graphiquement, pour ensuite l'exprimer sous sa forme d'équation vectorielle (ou paramétrique). Également, nous avons guidé la démonstration plus générale (en c) en demandant de montrer le résultat pour une droite et un vecteur particulier (en b). En ce sens, pour la démonstration générale, une méthode est suggérée, soit celle d'utiliser les vecteurs, et l'étudiant est éclairé par la question b. Un élément est toutefois implicite, celui de calculer un produit scalaire pour déterminer l'orthogonalité. Il serait aussi possible de refaire la tâche, mais cette fois avec le vecteur directeur, soit $(-b, a)$.

Un autre exemple d'une tâche nécessitant des changements de registres et cadres est donné dans Tanguay (2002b), section 5.

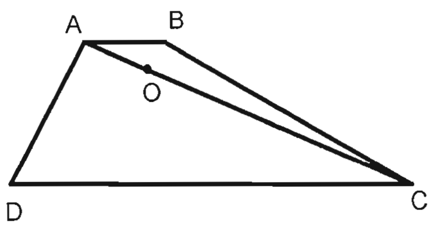
6.2 Au collégial

Nous avons déjà mentionné que pour l'appropriation d'un concept, il est non seulement important que les élèves et étudiants puissent passer d'un registre de représentations d'un objet mathématique à un autre de ses registres, mais aussi qu'ils puissent passer d'un cadre à un autre. Or, dans l'analyse des tâches que nous avons faite, cette coordination entre les différents cadres est peu sollicitée chez les étudiants et dans les quelques tâches où on leur demande, le passage d'un cadre à l'autre est très difficile. En effet, les changements de cadres sont présents dans les démonstrations des propriétés des figures géométriques (passage du cadre de la géométrie synthétique à celui de la géométrie vectorielle et vice versa). À travers nos analyses, nous avons soulevé qu'interpréter un résultat sous la forme d'une expression vectorielle en géométrie synthétique complexifie la tâche. Nous avons donc pensé à une manière d'aborder une tâche comme la tâche 24, pour que les difficultés reliées à la démonstration soient moins importantes.

Un réaménagement possible de la tâche 24

Cette tâche permet une coordination guidée entre le cadre de la géométrie synthétique et celui de la géométrie vectorielle.

Dans le trapèze ci-contre, on a $3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Soit un point O sur la diagonale $\overline{AC}$, tel que $3\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$.



Est-ce que le point O appartient à la diagonale $\overline{BD}$? Si oui, démontrez. Sinon, justifiez.

La visée du réaménagement de la tâche 24 est de faire interpréter un résultat obtenu sous une forme vectorielle dans un cadre géométrique. Les difficultés reliées à l'enchaînement de la démonstration sont en partie évacuées mais l'interprétation d'une égalité vectorielle dans le cadre de la géométrie synthétique reste. Également, la question est ouverte, ce qui peut favoriser une perception plus juste des étudiants face à la démonstration en mathématiques. Il est voulu que le point O sur la figure ne soit pas bien placé.

Également, il semble qu'aborder l'algèbre linéaire par sa théorie axiomatique demande un niveau d'abstraction trop grand pour les étudiants du collégial. Citons Tanguay (2002b, p. 37) :

> L'idée que les théorèmes et résultats nouvellement dérivés ne dépendent que des axiomes de la théorie, indépendamment des objets spécifiques auxquels on les applique, est en totale rupture avec la pratique et les conceptions mathématiques d'un étudiant de niveau collégial. [...] Il faut bien comprendre que cette rupture est inévitable dans les cours d'algèbre linéaire. Il s'agit donc de savoir comment l'aménager, et la question n'est pas simple.

Par exemple, à propos du produit scalaire, Tanguay (2002b, § 6) propose une séquence d'enseignement qui met l'accent sur son sens géométrique.

Un travail d'analyse d'erreurs, comme nous l'avons fait aux chapitres III et IV, permet de mieux mesurer la difficulté de ce qui est demandé aux étudiants. Il semble que les enseignants du collégial n'évaluent pas toujours bien le niveau de complexité des tâches soumises aux étudiants. Ainsi, il serait souhaitable que les enseignants (du collégial) s'attachent avec autant d'application que possible à évaluer ces difficultés, les ruptures et sauts cognitifs impliqués, au besoin par le biais d'un tel travail d'analyse. Par exemple, nous avons remarqué que les tâches de démonstration proposées par l'enseignante concernant le déterminant était d'un niveau de difficulté particulièrement élevé. Pourtant plusieurs démonstrations concernant le déterminant sont accessibles aux étudiants. En voici quelques exemples :

- Montrez que $\det A^T = \det A$ lorsque A est une matrice 2×2 ou une matrice 3×3.
- Montrez que $\det AB = \det A \det B$ lorsque A et B sont deux matrices quelconques 3×3.

- Montrez que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure 3×3 est égal au produit des entrées sur sa diagonale principale. Généralisez ensuite aux matrices triangulaires $n \times n$.

En analysant le niveau de difficulté des tâches soumises, les enseignants du collégial se donneraient alors de meilleurs moyens pour aménager une transition moins abrupte du secondaire vers le collégial. Les sauts cognitifs inévitables pour aborder le symbolisme utilisé au collégial sont souvent trop grands pour des étudiants qui arrivent du secondaire. Une analyse des tâches comme celle que nous avons faite permettrait alors d'amoindrir la passage au formalisme, ce qui devrait constituer pour les enseignants une préoccupation constante.

Par exemple, dans la tâche de la question 1a du devoir (voir § 3.3.1), il faut savoir interpréter correctement l'expression présentée à l'aide d'à peine une dizaine de symboles :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Malgré le fait que l'expression soit concise, ce qu'il faut comprendre est complexe : c'est que A est une matrice inversible dont on connaît (ou dont on pourra éventuellement calculer) l'inverse A^{-1} et qu'alors, l'inverse de A^{T} s'obtiendra simplement en transposant A^{-1}. Nous proposons donc un réaménagement de cette tâche qui, selon nous, pourrait aider les étudiants à mieux comprendre l'expression $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Un réaménagement possible de la Question 1a du devoir

On suppose que la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ aura été vue en cours, et illustrée à travers quelques exemples et exercices.

Question 1. La propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

a) Considérez la matrice L donnée par

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrez que la matrice M, donnée ci-dessous, est l'inverse de L ;

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-25}{92} & \frac{11}{46} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{23} & \frac{-9}{23} & \frac{7}{23} & 0 \\ \frac{6}{23} & \frac{49}{92} & \frac{-5}{46} & \frac{-1}{4} \\ \frac{19}{23} & \frac{45}{46} & \frac{-6}{23} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Déterminez l'inverse de la matrice W, donnée par :

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} & \frac{6}{23} & \frac{19}{23} \\ \frac{-25}{92} & \frac{-9}{23} & \frac{49}{92} & \frac{45}{46} \\ \frac{11}{46} & \frac{7}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-6}{23} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, pour toute matrice $A_{3\times3}$ inversible.

d) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, pour toute matrice $A_{n\times n}$ inversible, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indice : utilisez la définition et l'unicité de l'inverse d'une matrice carrée donnée.

Cette tâche, comme nous la proposons, prend en compte les difficultés identifiées aux chapitres III et IV. Afin de ne pas inciter l'utilisation de l'algorithme de Gauss-Jordan, nous avons choisi des entrées fractionnaires et une matrice de format 4×4. On notera que le fait qu'une réponse correcte à d) constitue également une réponse correcte à c) peut être utilisé en classe par l'enseignant comme base de discussion, d'ordre méta-mathématique, sur ce qu'est une démonstration *générale* et sur les avantages que cette généralité confère au résultat démontré.

D'autres pistes de solutions sont envisageables et mériteraient d'être approfondies. Nous sommes conscients qu'il peut être difficile pour les enseignants d'entreprendre l'analyse des tâches qu'ils soumettent aux étudiants puisque l'investissement requis en temps n'est pas disponible pour chacun. L'élaboration d'une grille encore plus fine d'analyse des tâches pourrait être envisagée, dans le but qu'elle soit utilisable par les enseignants. Aussi, des cours de didactique des mathématiques pourraient être offerts aux enseignants du collégial. Nous avons pu remarquer que certaines tâches proposées aux étudiants étaient très complexes. Notamment, la deuxième tâche présentée dans la méthodologie était de toute évidence beaucoup trop complexe pour les étudiants. Ainsi, des formations à contenus didactiques portant sur les enjeux réels de l'enseignement des mathématiques post-secondaires (le rôle et le sens de la démonstration, le symbolisme, le formalisme, etc.) devraient être offertes aux enseignants du collégial. Finalement, un quatrième cours de mathématiques pourrait être obligatoire et préalable aux cours de mathématiques actuellement offerts dans les programmes de sciences du collégial (*Calcul différentiel*, *Calcul intégral* et *Algèbre linéaire et géométrie vectoriel*). Quelques Cégeps, comme le collège Ahuntsic ou le cégep Maisonneuve, offrent un cours de mathématiques de base dans lequel on prend soin d'introduire aux différents types de démonstrations et à un formalisme accru.

BIBLIOGRAPHIE

Alves Dias, Marlène et Artigue, Michèle. (1995) . Articulation problems between different systems of symbolic representation in linear algebra. *Proceedings of the 19th meeting of the international group of the PME,* Vol. 2, pp. 374-341, Recife (Brésil), Universidade Federal de Pernambuco.

Association Mathématique du Québec et Québec, Conseil des Collèges. (1991). *Potentiel humain et mathématiques : une essentielle conjugaison aux temps futurs*. Association Mathématique du Québec. Montréal, 99 p.

Balacheff, Nicolas. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 3, n° 3, pp. 261-304.

Balacheff, Nicolas. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 18, n° 2, pp. 147-176.

Barbin, Évelyne, Duval, Raymond, Houdebine, Jean et Laborde Colette (2001). Analyse de texte de démonstration dans des cadres théoriques différents. In *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses Édition Marketing, pp. 3 à 30.

Bloch, Isabelle, Kientega, Gérard et Tanguay, Denis. (2006). Synthèse du Thème 6. À paraître dans les *Actes du Colloque EMF 2006*. Université de Sherbrooke.

Bouchamma, Yamina. (2002). Relation entre les explications de l'échec scolaire et quelques caractéristiques d'enseignants du collégial. *Revue des sciences de l'éducation,* Vol. XXVIII, n° 3, pp. 649-674.

Corriveau, Claudia et Tanguay, Denis. (2006). Arrimage secondaire collégial et raisonnement hypothético-déductif, à paraître dans les *Actes du 49^e^ Congrès de l'Association mathématique du Québec* (AMQ), Université de Sherbrooke.

Corriveau, Claudia et Parenteau, Jessica. (2005). Comment aménager le cours mathématique 536 du secondaire en vue de mieux préparer les élèves aux cours de mathématiques du cégep. *Envol*, n°132 (juillet-août-septembre 2005), pp. 25-28.

Dienes, Zoltán Paul. (1965). *Comprendre la mathématique*. O. C. D. L. Paris. 162 p.

Dorier, Jean-Luc, Harel, Guershon, Hillel, Joel, Rogalski, Marc, Robinet, Jacqueline, Robert, Aline, Sierpinska, Anna. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* Coord. par J.-L. Dorier. La Pensée Sauvage. Grenoble, France.

Douady, Régine. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n° 2, pp. 5-31.

Dreyfus, Tommy. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, n° 38, pp. 85-119.

Duval, Raymond. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, n° 3, pp. 349-382.

Duval, Raymond. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.

Duval, Raymond. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), pp. 233-261.

Epp, Suzan S. (2003). *The role of logic in teaching proof.* The mathematical association of America, 110, pp. 886-899.

Froger, Jean-François. *Structure de la connaissance*. Méolans-Revel : Désiris, France, 2003, 226 p.

Grenier, D. et Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Harel, Guershon et Sowder, Larry. (1998). *Students' proof schemes : Result from Exploratory Studies*. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld and J. J. Kaput (éds.), Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, pp. 234-283.

Québec, Conseil des Collèges. (1989). *L'harmonisation du secondaire et du collégial.* ISBN 2-550-20173-6. Conseil des Collèges. Québec, 117 p.

Québec, Conseil supérieur de l'Éducation. (1989). *Une meilleure articulation du secondaire et du collégial.* ISBN 2-550-14983-1. Conseil supérieur de l'Éducation. Direction des communications. Québec, 114 p.

Québec, Ministère de l'Éducation du Québec, Direction de la formation générale des jeunes (1997). *Programme d'Études, Mathématique 536,* ISBN 2-550-30587-6, Québec, 49 p.

Québec, Ministère de l'Éducation du Québec, Direction de la formation générale des jeunes (1996). *Programme d'Études, Mathématique 436*, ISBN 2-550-25514-3. Québec, 54 p.

Québec, Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport. (2007). *Programme de formation de l'école Québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle, Domaine de la mathématique de la science et de la technologie*, ISBN 978-2-550-49162-0 (PDF). Québec, 147 p.

Robert, Aline. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18, n°2, pp. 139-190.

Sierpinska, Anna., Dreyfus, Tommy. et Hillel, Joel. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra : the Case of Linear Transformations. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 19, n°1, pp. 7-40.

Ste-Marie, Monique. *Algèbre vectorielle : une approche linéaire*. Éditions PointCarré, Montréal, 1994.

Tanguay, Denis. (2005a). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 55-93. IREM de Strasbourg.

Tanguay, Denis. (2005b). Une expérimentation sur l'apprentissage de la structure déductive en démonstration. In *Actes du 4e Colloque de didactique des mathématiques de l'université de Crête*, pp. 57-75. M. Kourkoulos, G. Troulis et C. Tzanakis, éds. Rethymnon, Grèce.

Tanguay, Denis. (2003). Un enseignement de la preuve au collégial. *Actes du 45e Congrès de l'AMQ*, publiés sous la dir. d'André Ross, pp. 82-103. Les éditions *Le Griffon d'argile*. Sainte-Foy, Québec.

Tanguay, Denis. (2002a). Démonstrations géométriques et vecteurs. *Envol*, n°120, pp. 45-48.

Tanguay, Denis. (2002b). L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, Vol. XLII, n°4, pp. 36-47.

Thom, René. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. In *Pourquoi la mathématique ?*, Éditions 10/18, pp. 39-56.

Thom, René. (1974). La mathématique « moderne » une erreur pédagogique et philosophique ? In *Pourquoi la mathématique ?*, Éditions 10/18, pp. 57-77.

Weber, Keith. (2001). Student difficulty in constructing proofs : the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, n° 48, pp. 101-119.