UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TRANSFORMATION D'ESPÈCES VIA LA DUALITÉ DE SCHUR-WEYL

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

PAR

LIONEL KATSHINGU

SEPTEMBRE 2013

REMERCIEMENTS

Un remerciement d'honneur a celui qui m'a imposé sa passion pour le raisonnement mathématique. Celui qui m'a appris à partager cette passion qui est devenue centrale dans ma vie. Merci François Bergeron, cher directeur, de m'avoir illuminer par tes contes mathématiques.

Je tiens à remercier deux professeurs qui m'ont inspiré indirectement à extendre la rigueur mathématique à tous les aspects de ma vie quotidienne, et à franchir les limites qu'on tente d'imposer à mon imagination. Merci à M. André Joyal et à M. Pierre Bouchard pour votre inspiration.

Mes remerciements à tous les membres du LACIM pour leur convivialité et leur disponibilité. En particulier, Srecko Brlek, Christophe Hohlweg et Franco Saliola.

Merci à mes amis et collègues de mathématiques pour leur support, leur aide, leurs conseils et leurs encouragements. Merci à Hugo Tremblay, Catherine Bourbeau, Marco Robado, Maxime Scott, Yannic Vargas, Hector Blandin et Jérome Tremblay pour avoir rendu mon expérience agréable.

Pour les sacrifices qu'ils ont fait afin de me permettre d'exploiter pleinement mon potentiel, je remercie et j'honore mon père et ma mère : Rémy Katshingu et Anne-Marie Molango. Merci à ma grande soeur, Vince, pour son support, son écoute et sa générosité. Merci à mon grand frère, Joe, de m'avoir guider sur la bonne voie, alors que j'étais encore insconscient. Merci à mon grand frère, Jonathan, pour son intérêt, sa présence et ses encouragements.

Merci à mon grand frère, Christian Kavulu, d'être pour moi un exemple ambulant de droiture et de discipline. Merci à ma grande soeur, Sandie Depas, d'être un exemple de dévotion.

Merci à ma famille artistique : Jamanimist. Merci à Jean-Sébastien Doddridge-Hinse et à Alexandre Arbour de m'avoir aider à créer un contexte musical qui stimule le développement spirituelle essentielle à ma concentration.

Merci à mes amis qui me supportaient intellectuellement même avant ma naissance dans le monde mathématique : Jean-François Arbour, Ali El-Jarmaki, Khalil Rihane, Tarek Ferssiwi, Christian Kanamby, Kim Mallette-Turgeon, Nikita Nitsoulenko, Souad Mendaci.

Merci à la Vie. C'est par Sa volonté que j'ai la chance de participer à l'éternel processus de création qui nous gouverne tous.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Partant d'une représentation linéaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'un ordre quelconque n, la dualité de Schur-Weyl construit une représentation polynomiale du groupe général linéaire GL_m. On peut alors restreindre l'action de GL_m au groupe de permutations. Il en résulte une représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$, d'un autre ordre m. On transforme donc une représentation de $\mathfrak{S}_n$ en une représentation de $\mathfrak{S}_m$ pour un m quelconque. Le but de ce mémoire est de décrire explicitement cette transformation, et d'expliquer comment calculer le caractère de la représentation qui en resulte. À cette fin, en plus d'énoncer les grands résultats des théories des représentations linéaires et polynomiales, on révise les bases de la théorie des fonctions symétriques qui est fondamentale pour passer d'une représentation linéaire à une représentation polynomiale, et vice versa. On montre au passage comment certaines constructions classiques de l'algèbre linéaire correspondent à des représentations particulières. Par ailleurs, après avoir survolé la notion d'espèces de structures, on focalise notre attention sur les espèces tensorielles, et les foncteurs polynomiaux qui leurs sont associées. En termes des structures d'une espèce, on voit comment on peut décrire explicitement les éléments d'une base de l'espace obtenu par l'évaluation d'un foncteur polynomial, lorsque celui-ci correspond à l'espèce tensorielle obtenue par la linéarisation de l'espèce considérée. On explique de plus comment les $\mathfrak{S}_n$-modules peuvent être considérés comme des espèces tensorielles, et les GL_m-modules polynomiaux comme l'évaluation des foncteurs polynomiaux associés à celles-ci.

Mots-clés : «caractère, espèce de structures, espèce tensorielle, foncteur polynomial, fonction symétrique, groupe général linéaire, groupe symétrique, représentation linéaire, représentation polynomiale»

INTRODUCTION

Ce travail se situe à la frontière entre deux domaines des mathématiques : l'algèbre et la combinatoire. D'un coté, on retrouve le vaste champ de l'algèbre dont la fertilité semble éternelle, et la richesse inépuisable. Les fruits qu'on y cultive sont souvent extrêmement nourrissants si on tient compte du grand nombre de disciplines mathématiques qui sont alimentées par l'évolution de l'algèbre abstraite. Avec le temps, les constructions algébriques se complexifient, et le labeur à fournir afin de goûter pleinement leur saveur s'intensifie. C'est alors qu'on se tourne vers la combinatoire qui offre des outils permettant de faciliter l'étude du comportement de structures algébriques complexes. Au 20ième siècle, alors que les algébristes se sont mis à explorer ardemment les profondeurs de l'abstraction, la combinatoire connut un véritable essor technique avec le calcul des séries génératrices entre autres. En démontrant de fascinants résultats connexes à une multitude de différents domaines mathématiques à l'aide de formules et d'objets concrets, les combinatoriciens ont prouvé à plusieurs reprises la pertinence de considérer certains contextes mathématiques du point de vue de la combinatoire. La combinatoire permet de repousser les frontières du champ de l'algèbre, et de récolter une agréable moisson qui s'avère difficilement atteignable si l'on n'utilise que des techniques algébriques.

Dans le présent exposé, l'objectif est d'expliquer comment on peut transformer des constructions combinatoires en constructions algébriques. Plus précisément, on vise à décrire combinatoirement un processus algébrique de transformation d'une représentation d'un groupe en une autre. Vers la fin du 19ième siècle et au début du 20ième siècle, Issai Schur et Hermann Weyl ont établi une correspondance explicite entre les représentations linéaires et les représentations polynomiales de groupes finis de Lie classiques. On s'intérresse plus particulièrement au cas du groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$, et du groupe général linéaire GL_m.

Notre objectif vise à décrire la construction d'une représentation linéaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ (d'ordre m), à partir d'une représentation linéaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (d'ordre n), en utilisant la notion combinatoire d'espèces de structures et ses variantes établies par André Joyal au début des années 1980. Il semble donc naturel de présenter préalablement les résultats importants relatifs à ces deux types de représentations de groupes, ainsi que les outils qui permettent de passer de l'une à l'autre. L'aspect calculatoire principal de la théorie de la représentation est pris en charge par la notion de caractères. Pour les représentations polynomiales de GL_m, le caractère est une fonction sur les matrices diagonales. C'est une fonction symétriques des valeurs propres de la matrice pour laquelle on évalue le caractère. Le caractère d'une représentation polynomiale irréductible de GL_m est une fonction de Schur. D'autre part, le caractère d'une représentation linéaire de $\mathfrak{S}_n$ est une fonction sur ses classes de conjugaisons. Par la transformée de Frobenius, on associe une fonction symétrique à tout caractère de $\mathfrak{S}_n$. La transformée de Frobenius est une traduction bijective des caractères admettant plusieurs propriétés intéressantes qwui implique que tout se calcule via les fonctions symétriques. Les fonctions de Schur correspondent au caractère des représentations linéaires irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. La dualité de Schur-Weyl relie le tout ensemble de façon claire.

Les éléments d'une base de l'anneau des fonctions symétriques sont définies à l'aide de la notion de partages. Il faut définir les partages d'un entier. Les structures combinatoires de diagrammes et de tableaux sont étroitement liées aux partages. On les introduit en vue de définir les fonctions de Schur, mais également pour construire les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et de GL_m. Étant donné qu'une espèce de structures est une application fonctorielle, on doit introduire quelques notions de la théorie des catégories. En plus de rappeler quelques résultats concernant le groupe symétrique, l'ensemble de ces notions préliminaires est discuté dans le premier chapitre. On a lors les outils nécessaires pour parcourir rapidement la théorie des fonctions symétiques. Plusieurs différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques existent. Parmi celles-ci, on s'intéresse spécialement aux fameuses fonctions de Schur. Les notions basiques de la théorie des fonctions symétriques sont abordées dans le chapitre II.

Les constructions qu'on étudie sont des représentations de groupes. On doit donc établir les définitions et les résultats fondamentaux à propos des représentations linéaires de groupes. On se spécialise sans perdre de temps au groupe symétrique en prenant soin de construire ses représentations irréductibles. On peut alors définir la transformée de Frobenius du caractère d'une représentation linéaire de $\mathfrak{S}_n$. De même, on doit définir les notions importantes concernant les représentations polynomiales de GL_m pour atteindre l'objectif fixé. Après avoir montré une construction des représentations polynomiales irréductibles du groupe général linéaire, on décrit la correspondance entre les représentations linéaires irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et les représentaions polynomiales irréductibles de GL_m. Aussi, on explique comment passer d'une représentation de GL_m à une représentation de $\mathfrak{S}_m$. Ces constructions sont traitées dans les chapitres III et IV respectivement.

On veut également expliquer comment concevoir ce genre de construction algébrique de façon combinatoire. Il faut donc introduire la théorie des espèces. Une attention profonde est accordée à la variante linéaire du concept d'espèces, soit la notion d'espèces tensorielles. Celle-ci est accompagnée de la notion de foncteurs polynomiaux. On montre comment les représentations de $\mathfrak{S}_n$ peuvent être percues comme des espèces tensorielles, et comment les représentations polynomiales de GL_m correspondent à l'évaluation d'un foncteur polynomial. Grâce au fait que toute espèce de structures engendre une espèce tensorielle, on montre aussi comment il est possible d'interpréter graphiquement certains foncteurs polynomiaux. Le chapitre V est consacré à l'étude de la théorie des espèces de structures.

Dans la partie de ce travail qui rappelle des notions classiques, plutôt que de reproduire les démonstrations, l'emphase est mise sur la description des notions et des résultats à l'aide d'exemples. Pour consulter une présentation élaborée des preuves des théorèmes fondamentaux ou de certains résultats plus techniques, plusieurs références à la littérature sont intégrées dans le texte afin de guider le lecteur qui cherche à approfondir son étude sur un sujet en particulier.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1.1 Groupe symétrique

Le groupe symétrique est reconnu pour son importance dans le domaine de la combinatoire. Dans le cadre de cette ouvrage, on peut le considérer comme un acteur principal intervenant dans toutes les scènes décisives de l'histoire racontée. Cette section vise à introduire quelques notations et terminologies tout en exhibant partiellement les propriétés clés du groupe concerné.

Une ***permutation*** σ d'un ensemble A est une bijection

$$\sigma : A \xrightarrow{\sim} A.$$

L'ensemble de toutes les permutations de A munit de l'opération associative de composition de fonctions forme un groupe multiplicatif. En effet, toute fonction bijective possède un inverse et la fonction identité $\epsilon : A \to A$ est l'élément neutre. Le groupe résultant est communément noté $\mathfrak{S}_A$. Il est clair que si A est de cardinalité n, il existe une correspondance bijective entre A et $\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Celle-ci donne lieu à un isomorphisme de groupes entre $\mathfrak{S}_A$ et $\mathfrak{S}_n$. En vertu de cet isomorphisme, les résultats discutés dans ce travail peuvent être établies pour le groupe $\mathfrak{S}_n$, sans perte de généralité.

Un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ est souvent présenté sous forme d'une suite

$$\sigma = a_1, a_2, \ldots, a_n$$

où $\sigma(1) = a_1, \sigma(2) = a_2, \ldots$ et $\sigma(n) = a_n$. Pour $r > n$, il y a au moins un nombre qui apparait au minimum deux fois dans la suite $(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^r(i))$ pour tout $i \in \underline{n}$. Il existe donc deux nombres a et b tel que $\sigma^a(i) = \sigma^b(i)$ avec $a < b$. Il s'ensuit que $i = \sigma^p(i)$ si $p = b-a$. En considérant la plus petite puissance p différente de zéro telle que $\sigma^p(i) = i$, on obtient une ***permutation cyclique*** dénotée $(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{p-1}(i))$. Toute permutation se décompose de façon unique en cycles disjoints. De cette décomposition découle une partition de l'ensemble $\underline{n}$. Autrement dit, $\sigma = a_1, a_2, \ldots, a_n$ peut s'écrire comme

$$\sigma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$$

où les γ_i sont des cycles disjoints. Pour plus de détails à ce sujet, voir (Armstrong, 1988).

Remarque 1.1.1. *Il est à noter que l'ordre dans lequel apparaissent les cycles et le choix du premier nombre à l'intérieur d'un cycle ne modifient pas la nature de la permutation.*

Si $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, on dit que γ est une permutation cyclique ou simplement un cycle de longueur k. Les cycles de longueur 1 sont appellé des points fixes. Le ***type cyclique*** d'une permutation σ détermine le nombre et la longueur des cycles dans la décomposition cyclique de σ. On l'exprime par

$$\lambda(\sigma) := \mathbf{1}^{\mathbf{d_1}}\mathbf{2}^{\mathbf{d_2}}\cdots\mathbf{n}^{\mathbf{d_n}}.$$

Cette notation signifie qu'il y a d_1 cycles de longueur 1, d_2 cycles de longueur 2, etc. Deux permutations σ et τ sont dites conjugués si et seulement s'il existe $\theta \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma = \theta^{-1}\tau\theta$. Le fait marquant est que σ et τ sont conjugués si et seulement si elles ont le même type cyclique. C'est-à-dire,

$$\sigma = \theta^{-1}\tau\theta \qquad \text{ssi} \qquad \lambda(\sigma) = \lambda(\tau)$$

pour un certain $\theta \in \mathfrak{S}_n$. Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont alors naturellement indexées par l'ensemble des différents types cycliques.

En utilisant le fait qu'il existe une bijection entre la classe de conjugaison d'une permutation et le quotient de $\mathfrak{S}_n$ par le centralisateur de celle-ci, on montre que le nombre de permutations de type cyclique $\lambda = \mathbf{1}^{\mathbf{d_1}}\mathbf{2}^{\mathbf{d_2}}\cdots\mathbf{n}^{\mathbf{d_n}}$ est

$$z_\lambda = \frac{n!}{1^{d_1}d_1!2^{d_2}d_2!\cdots n^{d_n}d_n!}.$$

On retrouve au numérateur le nombre de permutations de $\underline{n}$, tandis que le dénominateur correspond au nombre de façons d'écrire une même permutation de type λ.

1.2 Partages

Dans la présente section, on discute d'un objet combinatoire particulièrement intéressant d'un point de vue algébrique. La notion de partage sera grandement utile pour décrire ou compter les structures présentées par la suite.

Un ***partage*** λ d'un nombre positif n est une suite décroissante d'entiers naturels non nulles $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. Les éléments de la suite sont appelés les parts du partage. La longueur de λ, notée $\ell(\lambda)$, est son nombre de parts. Exceptionnellement, on admet le partage de zéro, dit vide, de longueur nulle.

Pour alléger l'écriture, il est fréquent d'exprimer un partage de n en supprimant les parenthèses et les virgules dans l'écriture précédente. On écrit $\lambda \vdash n$ pour exprimer que λ est un partage de n.

Exemple 1.2.1. *L'ensemble des partages de 3 est :*

$$\{\mathbf{3}, \mathbf{21}, \mathbf{111}\}.$$

On peut aussi écrire λ sous la forme

$$\lambda = \mathbf{1}^{\mathbf{d_1}}\mathbf{2}^{\mathbf{d_2}}\cdots\mathbf{n}^{\mathbf{d_n}}$$

où d_i est le nombre de parts égale à i.

Cette dernière écriture met en évidence le fait que les partages de n sont donc en bijection avec les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Autrement dit, les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont indexées par l'ensemble $\mathcal{P}(n)$ des partages de n.

1.3 Diagrammes

Normand Macleod Ferrers et Alfred Young ont parallèlement introduit, vers la fin du 19ième siècle, un outil efficace pour représenter graphiquement la notion de partage d'un entier. Les travaux de Young au début des années 1900, sur les remplissages d'un diagramme donné, ont rendu le concept encore plus passionnant lorsqu'on considère leurs applications à la théorie de la représentation du groupe symétrique.

Un ***diagramme*** est simplement un sous-ensemble du plan combinatoire $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On dit d'un élément (i, j) du diagramme que c'est une case. Géométriquement, la case en question est représenté par le carré dont le sommet en bas à gauche a pour coordonnées (i, j).

Un ***diagramme de Ferrers*** λ est un diagramme pour lequel, chaque fois que (i, j) est une case de λ, alors $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'est aussi lorsque $a \leq i$ et $b \leq j$.

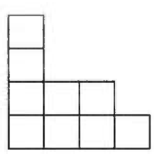


Figure 1.1: Un diagramme de Ferrers λ

De façon évidente, on associe à tout diagramme de Ferrers λ formé de n cases un partage de l'entier n en lisant du bas vers le haut la suite des nombres de cases par lignes de λ. En effet, on obtient ainsi une suite de nombres décroissante dont la somme est égale au nombre de cases de λ. Par exemple, le diagramme de la figure 1.1 représente le partage $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ de 9. Chaque classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspond donc bijectivement à un diagramme de Ferrers.

Le conjugué λ' d'un diagramme λ est le diagramme obtenu en interchangeant les lignes et les colonnes de λ. Autrement dit, (j, i) est une case de λ' si et seulement si (i, j) est une case de λ. La figure 1.2 illustre le diagramme $\lambda' = (4, 2, 2, 1)$ conjugué de $\lambda = (4, 3, 1, 1)$.

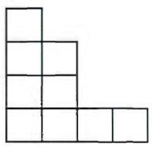


Figure 1.2: Le conjugué du diagramme λ de la figure 1.1

1.3.1 Tableaux

Un ***tableau*** est la donnée d'un remplissage d'un diagramme par les éléments d'un ensemble A quelconque. Plus précisément, un tableau τ de forme λ est une fonction

$$\tau : \lambda \longrightarrow A.$$

On dit que τ est un ***tableau bijectif*** si c'est une bijection. Un ***tableau*** est dit ***de Young*** lorsque sa forme λ est un diagramme de Ferrers. Par exemple, si $A = \{a, b, c, d\}$ et λ est le diagramme de Ferrers représenté par figure 1.1, alors la figure 1.3 est l'un des 4^9 tableaux de forme λ.

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{c} & & & \\
\mathrm{a} & & & \\
\mathrm{d} & \mathrm{a} & \mathrm{a} & \\
\mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{a}
\end{array}$$

Figure 1.3: Un tableau de Young τ de forme $\lambda = (4, 3, 1, 1)$

La valeur placée à l'intérieur de la case (i, j) est désignée par $\tau(i, j)$.

Pour A un ensemble ordonnée, on considère les notions de tableaux standards et semi-standards. Un tableau τ de forme λ est dit ***standard*** si les valeurs attribuées aux cases de λ apparaissent de façon strictement croissante de gauche à droite sur les lignes et du bas vers le haut sur les colonnes. Techniquement, on a donc $\tau(a, b) < \tau(i, j)$ si $a < i$ et $b = j$, et $\tau(a, b) < \tau(i, j)$ si $a = i$ et $b < j$. Par ailleurs, τ est dit ***semi-standard*** si les valeurs apparaissent en ordre croissant sur les lignes et en ordre strictement croissant sur les colonnes. Autrement dit, $\tau(a, b) \leq \tau(i, j)$ si $a = i$ et $b < j$, et $\tau(a, b) \leq \tau(i, j)$ si $a < i$ et $b = j$. Supposons, par exemple, que $a < b < c < d$ et que $\lambda = (4, 3, 1, 1)$. Les tableaux τ_1 et τ_2 de forme λ illustrés dans la figure 1.4 sont standard et semi-standand respectivement.

$$\tau_1 = \begin{array}{cccc}
\mathrm{d} & & & \\
\mathrm{c} & & & \\
\mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \\
\mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d}
\end{array} \qquad \tau_2 = \begin{array}{cccc}
\mathrm{d} & & & \\
\mathrm{c} & & & \\
\mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{c} & \\
\mathrm{a} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{d}
\end{array}$$

Figure 1.4: Tableaux standard et semi-standand de forme $\lambda = (4, 3, 1, 1)$

Lorsque le groupe symétrique $\mathfrak{S}_A$ agit sur un ensemble A quelconque, on peut définir une action de $\mathfrak{S}_A$ sur les tableaux à valeurs dans A. Si on dénote une case d'un diagramme de Ferrers par $\mathfrak{c} = (i, j)$, l'action

$$\mathfrak{S}_A \times \tau \longrightarrow \tau$$

de $\mathfrak{S}_A$ sur un tableau $\tau : \lambda \longrightarrow A$ est obtenu en substituant la valeur $\tau(\mathfrak{c})$ situé dans la case $\mathfrak{c}$ par $\sigma(\tau(\mathfrak{c}))$. Par exemple, si $A = \{a, b, c, d\}$ et $\sigma = (b, d, a, c)$, la figure 1.5 illustre le tableau $\sigma(\tau)$ où τ est représenté dans la figure 1.3.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathrm{c} \\ \cline{1-1} \mathrm{a} \\ \cline{1-3} \mathrm{d} & \mathrm{a} & \mathrm{a} \\ \hline \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{a} \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathrm{b} \\ \cline{1-1} \mathrm{c} \\ \cline{1-3} \mathrm{a} & \mathrm{c} & \mathrm{c} \\ \hline \mathrm{d} & \mathrm{d} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.5: Action de $\sigma = (b, d, a, c)$ sur le tableau τ de la figure 1.3

1.4 Catégories

La théorie des catégories a été introduite au milieu des années 40 par Saunders Mac Lane et Samuel Eilenberg. Elle sert entre autre à généraliser l'étude des multiples structures algébriques. Plusieurs notions de cet ouvrage se formule dans le contexte de cette théorie.

Rappelons qu'une ***catégorie*** $\mathcal{C}$ est la donnée de deux classes :

1) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ désigne la classe des objets de $\mathcal{C}$,

2) $\mathrm{F}\ell\,\mathcal{C}$ désigne la classe des flèches de $\mathcal{C}$.

De plus, on a des applications $\mathfrak{s}$ (pour source) et $\mathfrak{t}$ (pour but) :

$$\mathfrak{s}, \mathfrak{t} : \mathrm{F}\ell\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

On admet une flèche $\mathfrak{u}$ pour chaque objet A, dite unité de A

$$\mathfrak{u} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{F}\ell\,\mathcal{C}$$

Deux flèches f et g peuvent être composées lorsque $\mathfrak{t}(f) = \mathfrak{s}(g)$. Ce composé, dénoté gf est une flèche allant de $\mathfrak{s}(f)$ à $\mathfrak{t}(g)$.

Le tout doit satisfaire aux axiomes suivants :

Axiome 1 : Pour tout objet A, on a

$$\mathfrak{s}(\mathrm{u}(A)) = A = \mathfrak{t}(\mathrm{u}(A))$$

Axiome 2 : La loi de composition est associative, i.e pour des flèches f, g et h, on a

$$h(gf) = (hg)f$$

Axiome 3 : Pour toute flèche $f : A \to B$,

$$f\mathrm{u}(A) = f = \mathrm{u}(B)f$$

Exemple 1.4.1.

(1) On note $\mathbb{B}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, et les flèches sont des bijections entre ces ensembles. La source et le but d'une bijection sont respectivement l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

(2) Les espaces vectoriels de dimension finie forment les objets de la catégorie $\mathbb{V}$. Les flèches de $\mathbb{V}$ sont les applications linéaires inversibles.

(3) La catégorie des $\mathbb{K}$-matrices ayant $\mathbb{N}^+$ comme classe d'objets et l'ensemble des matrices de format $m \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, où m et n sont des entiers positifs non nuls, comme classe de flèches est noté **Mat**$(\mathbb{K})$. *C'est-à-dire, si m et n sont des objets de* **Mat**$(\mathbb{K})$, *alors toute matrice de format $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une flèche de m vers n. On compose deux flèches en effectuant le produit matriciel.*

1.4.1 Foncteurs

La notion de foncteur permet de comparer différentes catégories.

Un ***foncteur*** entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

est une application qui associe à chaque objet A dans $\mathcal{C}$ un objet $\mathcal{F}(A)$ dans $\mathcal{D}$, et à chaque flèche $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ une flèche $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ de $\mathcal{D}$ telle que :

1) pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

$$\mathcal{F}(\mathrm{u}(A)) = \mathrm{u}(\mathcal{F}(A))$$

où $\mathrm{u}(\mathcal{F}(A))$ est la flèche unité associée à l'objet $\mathcal{F}(A)$ dans $\mathcal{D}$

2) De plus,

$$\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f),$$

lorsque f et g sont composables.

Exemple 1.4.2.

(1) Certains foncteurs sont obtenus par le retrait de quelques composantes dans les objets algébriques. Par exemple, le foncteur oubliant $\mathcal{U} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{B}_\infty$ *de la catégorie des espaces vectoriels vers la catégorie des ensembles de cardinalité quelconque associe à chaque espace vectoriel de dimension finie son ensemble sous-jacent. De même pour les flèches, à chaque transformation linéaire inversible est associé la fonction bijective sous-jacente à celle-ci.*

(2) L'application $\mathbf{G} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{V}$ *qui associe à chaque ensemble* A *l'espace vectoriel librement engendré par les éléments de* A *est le foncteur dit «libre». Chaque bijection dans* $\mathrm{F}\ell\,\mathbb{B}$ *donne lieu à une transformation linéaire bijective obtenue par extension linéaire.*

(3) Pour toute catégorie $\mathcal{C}$*, il existe un foncteur identité* $\mathbb{1}_\mathcal{C}$ *qui associe tout objet à*

lui-même et toute flèche de $\mathcal{C}$ à elle-même.

Alors que les foncteurs servent à comparer les catégories, la notion de transformations naturelles permet de comparer les foncteurs.

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux foncteurs de la catégories $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$. Une ***transformation naturelle*** est une famille de flèches

$$\{\theta_A \mid \theta_A : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A)\}_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$$

dans $\mathcal{D}$ telle que le diagramme suivant est commutatif pour toute flèche $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[rr, "\theta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[rr, "\theta_B"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathcal{G}(B)
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, $\mathcal{G}(f) \circ \theta_A = \theta_B \circ \mathcal{F}(f)$. Si θ_A est un isomorphisme pour tout A, alors on a un ***isomorphisme naturel***, et on note $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$.

Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est appellé une ***équivalence de catégories*** s'il existe un foncteur $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \text{ et } \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \simeq \mathbb{1}_{\mathcal{C}}.$$

Dans ce cas, on dit que les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont équivalentes, et $\mathcal{G}$ est appelé l'inverse de $\mathcal{F}$. L'équivalence de catégories est une relation d'équivalence. De plus, elle préserve les propriétés essentielles des catégories impliquées. Notamment, si une flèche possède un inverse à droite et à gauche, alors son image par l'équivalence conservera cette caractéristique.

Exemple 1.4.3. *Le foncteur $\mathcal{F} : \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{K})$ de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec transformations linéaires vers la catégorie des $\mathbb{K}$-matrices est une équivalence. Pour le voir, il suffit de fixer des bases ordonnées et de considérer la matrice associée à toute transformation linéaire.*

Les équivalences de catégories surviennent dans peu de contexte. Il existe la notion d'adjonction entre deux foncteurs définis sur les mêmes catégories qui est moins «forte» mais plus courante. Lorsque deux foncteurs sont adjoints, ils préservent les sommes directes et les produits dans les catégories en question. Par conséquent, les structures indécomposables des deux catégories sont en correspondance. Pour plus d'informations à ce sujet, on peut se référer à n'importe quel livre d'introduction à la théorie des catégories tel que (Herrlich, 1973).

1.4.2 Flèches universelles

Une construction mathématique est considérée canonique si elle est la solution naturelle, en termes d'isomorphismes, d'un problème universelle. Dans le langage de la théorie des catégories, cette idée se traduit en partie par la notion de flèche universelle. Ce concept généralise plusieurs constructions élémentaires dans une variété de branches des mathématiques.

Formellement, si $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une foncteur de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$, une flèche universelle est la donnée d'un objet X dans $\mathcal{C}$ et d'une flèche u dans $\mathcal{D}$. Soit Y un objet dans $\mathcal{D}$. On dit que (X, u) est une ***flèche $\mathcal{G}$-universelle*** *pour* Y si pour tout objet X' dans $\mathcal{C}$ et pour toute flèche $f : Y \longrightarrow \mathcal{G}(X')$ dans $\mathcal{D}$, il existe une flèche $\bar{f} : X \longrightarrow X'$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{G}(\bar{f}) \circ u = f$ où $u : Y \longrightarrow \mathcal{G}(X)$.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{dans } \mathcal{D} & & \text{dans } \mathcal{C} \\
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, dashed, "\mathcal{G}(\bar{f})"] \\
& \mathcal{G}(X')
\end{tikzcd}
& &
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\
X'
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

Lorsque le contexte est clair, on dit aussi que X est une solution universelle pour f.

Exemple 1.4.4. *Une classe d'exemples consiste à considérer le foncteur oubliant*

$$\mathcal{U} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{B}_\infty$$

où $\mathcal{H}$ est n'importe quel catégorie dans laquelle les objets sont des ensembles munis d'une même structure algébrique et les flèches sont des fonctions entre ces ensembles qui, en quelque sens, préservent leur structure. Dans ce contexte, étant donné un ensemble B quelconque dans $\mathbb{B}_\infty$, il existe une flèche $\mathcal{U}$-universelle (X, u) pour B. Dans tous les cas, l'ensemble structuré X est défini comme étant une structure algébrique dans $\mathcal{H}$ librement engendré par les éléments de B de telle sorte que la flèche $u : B \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ dans $\mathbb{B}$ est l'inclusion de B dans l'ensemble sous-jacent de X. Ainsi, si $\mathcal{H} = \mathbb{V}^*$, la catégorie des espaces vectoriels avec transformations linéaires, alors $X = \langle B \rangle$ et u est la fonction injective qui associe chaque élément de B à lui-même dans $\mathcal{U}(X)$.

$$
\begin{array}{ccc}
\textit{dans } \mathbb{B} & & \textit{dans } \mathbb{V} \\
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "u"] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathcal{U}(X) \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\bar{f})"] \\
& \mathcal{U}(X')
\end{tikzcd}
& &
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\
X'
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

Comme une transfomation linéaire est entièrement déterminée par son image sur les générateurs de l'espace vectoriel de départ, il est évident qu'il existe $\bar{f} : X \longrightarrow X'$ telle *que* $\mathcal{U}(\bar{f}) \circ u = f$.

Cette situation est également possible avec des foncteurs qui n'oublient qu'une partie de la structure algébrique batie sur un ensemble. La construction suivante provient d'une situation universelle en rapport avec un tel foncteur. Soient $\mathbb{K}$ *un corps et* V *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On définit*

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes_{\mathbb{K}} V \otimes_{\mathbb{K}} \cdots V \otimes_{\mathbb{K}} V}_{k \text{ facteurs}}$$

où $k \geq 0$ *et* $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. *On construit une* $\mathbb{K}$*-algèbre*

$$T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k} = \mathbb{K} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$$

avec la multiplication

$$(e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_i)(e'_1 \otimes e'_2 \otimes \cdots \otimes e'_j) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_j$$

où $(e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_i) \in V^{\otimes i}$ *et* $(e'_1 \otimes e'_2 \otimes \cdots \otimes e'_j) \in V^{\otimes j}$. *Il s'agit de la fameuse algèbre tensorielle de* V. *Cette construction classique satisfait à la propriété universelle suivante :*

Soient $\mathbb{A}$ *la catégorie des* $\mathbb{K}$*-algèbres et le foncteur*

$$\mathcal{U}^* : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{V}^*$$

qui associe à toute $\mathbb{K}$*-algèbre son* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel sous-jacent. Si* A *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre quelconque et* $\phi : V \longrightarrow \mathcal{U}^*(A)$ *un morphisme de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel multilinéaire, alors il existe un unique morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\bar{\varphi} : T(V) \longrightarrow A$ *tel que* $\bar{\varphi} \circ u = \phi$ *où* $u : V \longrightarrow \mathcal{U}^*(T(V))$ *est l'inclusion de* V *dans* $T(V)$.

$$\begin{array}{cc} \textit{dans } \mathbb{V}^* & \textit{dans } \mathbb{A} \\ \begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \mathcal{U}^*(T(V)) \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}^*(\bar{\varphi})"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathcal{U}^*(A) \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} T(V) \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"] \\ A \end{tikzcd} \end{array}$$

En effet, il existe une bijection entre l'ensemble des morphismes de $\mathbb{K}$-espace vectoriels multilinéaires et l'ensemble des morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres. En vertu de ce résultat, $(T(V), u)$ est une flèche $\mathcal{U}^*$-universelle pour V. Lorsque le contexte est clair, on omettra de spécifier la présence sous-entendue du foncteur oubliant $\mathcal{U}^*$.

Il est démontré que si $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur et si (X, u) ainsi que (X', u') sont des flèches $\mathcal{G}$-universelle pour un même objet Y dans $\mathcal{D}$, alors il existe un unique isomorphisme $f : X \longrightarrow X'$ tel que $\mathcal{G}(f) \circ u = u'$. Autrement dit, les flèches universelles sont uniques à isomorphimes près.

Remarque 1.4.1. *Supposons que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^k$ est l'anneau des polynômes en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré k. En faisant correspondre bijectivement une base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathcal{V}$ à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut identifier les tenseurs simples de $\mathcal{V}^{\otimes k}$ aux monômes non commutatifs de degré k. Donc, on identifie $\mathcal{V}^{\otimes k}$ à l'espace des polynômes de degré k non commutatifs en n variables. On extend ce principe à $T(\mathcal{V})$ qu'on identifie à l'anneau des polynômes en n variables non commutatifs.*

CHAPITRE II

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Pour ce chapitre, on se situe dans l'anneau des polynômes $\mathbf{R}$. Les polynômes symétriques apparaissent comme un cas particulier de la théorie des invariants. On dit qu'un polynôme est G-invariant s'il est fixé par tous les éléments d'un groupe G agissant sur $\mathbf{R}$. Il est clair que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur cet anneau par permutation des variables. Avec cette action, l'anneau des polynômes symétriques est simplement le sous-anneau des polynômes $\mathfrak{S}_n$-invariants. On parle de fonctions symétriques lorsqu'on considère des polynômes en une infinité de variables. Les fonctions symétriques sont parfois une nécéssité pour prouver des résultats sur les représentations de $\mathfrak{S}_n$. Pour une étude détaillée des fonctions symétriques, le livre de référence est celui de Macdonald, soit (Macdonald, 1995).

2.1 Notions de base

Soit $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3, \ldots$ un ensemble infini de variables et f une fonction en $\mathbf{x}$. On dit que f est ***symétrique*** si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\sigma \cdot f(\mathbf{x}) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = f(\mathbf{x})$$

où $\sigma(i) = i$ pour tout $i > n$. On peut définir l'anneau des polynômes symétriques à partir de l'ensemble des fonctions symétriques monomiales. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ un partage quelconque de k où $\ell \leq n$. On note $m_\lambda = m_\lambda(\mathbf{x})$ la somme de tous les monômes en $\mathbf{x}$ ayant $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ comme suite d'exposants :

$$m_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\ell \text{ distincts}} x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_\ell}^{\lambda_\ell}$$

On appelle m_λ la fonction symétrique ***monomiale*** correspondant à λ. On conçoit que si λ est un partage de k, alors m_λ est de degré k. On définit alors l'anneau des polynômes symétriques de degré k, noté Λ^k, comme étant l'espace vectoriel engendré par $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$.

Comme il est clair que les m_λ sont linéairement indépendants, on déduit qu'ils forment une base de Λ^k. Sachant que l'anneau des polynômes symétriques est gradué par le degré, l'ensemble de tous les m_λ où λ est un partage de k quelconque forment une base de Λ.

2.2 Bases de l'anneau des fonctions symétriques

Certains ensembles de fonctions symétriques sont particulièrement intéressantes en raison de leurs rôles dans différentes théories. On a déjà vue que les fonctions symétriques monomiales forment une base de l'anneau des fonctions symétriques Λ. Cependant, il existe plusieurs autres bases.

Les fonctions symétriques ***élémentaires*** e_k constituent un tel ensemble de fonctions symétriques. On trouve une expression pour la k-ième fonction symétrique élémentaire

e_k à l'aide de la définition de leur série génératrice

$$\begin{aligned}
E(\xi) &:= \sum_{k\geq 0} e_k \xi^k = \prod_{i\geq 1}(1+x_i t)\\
&= (1+x_1\xi)(1+x_2\xi)\cdots(1+x_n\xi)\cdots\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\ell} (x_{i_1}\xi)(x_{i_2}\xi)\cdot\cdots(x_{i_\ell}\xi)\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\ell} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_\ell}\xi^\ell\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\xi^k\\
&= \sum_{k\geq 0} m_{1^k}\xi^k
\end{aligned}$$

D'où,

$$e_k = m_{(1^k)}.$$

En outre, pour un partage quelconque $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, on pose $e_\lambda := e_{\lambda_1}\cdots e_{\lambda_\ell}$.

Un autre ensemble de fonctions symétriques considérable est celui des fonctions symétriques ***homogènes*** h_k. On les décrit également en passant par leur série génératrice

$$\begin{aligned}
H(\xi) &:= \sum_{k\geq 0} h_k\xi^k = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-x_i\xi)}\\
&= (1+x_1\xi+(x_1\xi)^2\cdots+(x_1\xi)^n\cdots)(1+x_2\xi+(x_2\xi)^2\cdots+(x_2\xi)^n\cdots)\cdots\\
&= \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_\ell\\ a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_\ell}} x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}\cdots x_{i_\ell}^{a_\ell}\xi^{a_1+a_2+\cdots+a_\ell}\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{\lambda\vdash k\\ i_1<i_2<\cdots<i_\ell}} x_{i_1}^{\lambda_1}x_{i_2}^{\lambda_2}\cdots x_{i_\ell}^{\lambda_n}\xi^k\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda\vdash k} m_\lambda\xi^k
\end{aligned}$$

D'où,

$$h_k = \sum_{\lambda\vdash k} m_\lambda.$$

De même, pour un partage quelconque $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, on pose $h_\lambda := h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_\ell}$.

La famille des fonctions symétriques des ***sommes de puissances*** p_k est aussi fondamentale dans l'étude de l'anneau des fonctions symétriques. On définit la k-ième fonction symétrique de somme de puissances par

$$p_k := m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k + \cdots .$$

On peut également associé une série génératrice aux fonctions symétriques sommes de puissances :

$$\begin{aligned}
P(\xi) &:= \sum_{k\geq 1} p_k \frac{\xi^k}{k} = \sum_{k\geq 1}\sum_{i\geq 1} x_i^k \frac{\xi^k}{k} \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1} \frac{(x_i\xi)^k}{k} = \sum_{i\geq 1} \ln(\frac{1}{1-x_i\xi}) \\
&= \ln \prod_{i\geq 1} (\frac{1}{1-x_i\xi})
\end{aligned}$$

On pose $p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}$ où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$.

Les séries génératrices permettent d'établir des liens efficaces entre les familles de fonctions symétriques introduites. Par exemple, on observe directement que

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{k\geq 0} e_k \xi^k = \prod_{i\geq 1} (1 + x_i t) \\
&= \exp(\ln \prod_{i\geq 1} (1 + x_i\xi)) = \exp(\sum_{i\geq 1} \ln(1 + x_i\xi)) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(1 + x_i\xi - 1)^k}{k}) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(x_i\xi)^k}{k}) = \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1} (x_i^k) \frac{(-1)^{k+1}\xi^k}{k}) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1} p_k \frac{(-1)^{k+1}\xi^k}{k}) = \exp(-\sum_{i\geq 1} p_k \frac{(-1)^k\xi^k}{k}) \\
&= \exp(-P(-t))
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
H(\xi) &= \sum_{k\geq 0} h_k \xi^k = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{(1-x_i\xi)} \\
&= \exp(\ln(\prod_{i\geq 1} \frac{1}{(1-x_i\xi)})) = \exp(\sum_{i\geq 1}(-1)\ln(1-x_i\xi)) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}(-1)\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{(1-x_i\xi-1)^k}{k}) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{(-x_i\xi)^k}{k}) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k(-1)^k\frac{(x_i\xi)^k}{k}) \\
&= \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1}x_i^k\frac{\xi^k}{k}) = \exp(\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1}p_k\frac{\xi^k}{k}) \\
&= \exp(P(\xi)).
\end{aligned}$$

En comparant le coefficient de ξ des deux côtés des égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
h_k &= \sum_{\lambda\vdash k}\frac{p_\lambda}{z_\lambda} \\
e_k &= \sum_{\lambda\vdash k}(-1)^{k-\ell(\lambda)}\frac{p_\lambda}{z_\lambda}.
\end{aligned}$$

Ces identités permettent de passer d'une base des fonctions symétriques à une autre. Conséquemment, chacune des familles $\{h_\lambda\}_{\lambda\vdash k}, \{e_\lambda\}_{\lambda\vdash k}$ et $\{p_\lambda\}_{\lambda\vdash k}$ forme une base de Λ^k. Pour le prouver, il suffit de savoir exprimer les m_λ comme combinaisons linéaires de l'une de ces familles. Une preuve combinatoire de ce résultat est présentée dans le livre de Richard Stanley (Stanley, 1999) dans laquelle on fait appel aux $(0,1)$-matrices auxquelles on fait correspondre des monômes. Il est pertinent de mentionner qu'il existe une commande dans le logiciel Maple, introduite par John Stembridge, pour écrire un polynôme symétrique quelconque dans l'une ou l'autre de ces familles. Le logiciel Sage offre également la possibilité d'effectuer ces calculs. En plus de celles-ci, il existe une cinquième base qui joue un rôle crucial dans plusieurs domaines des mathématiques.

2.3 Fonctions de Schur

On peut emprunter une variété d'approches pour définir les fonctions de Schur. Chacune de ses approches permet de faire ressortir des propriétés qui ont des applications dans différents contextes mathématiques. La définition prisée dans cet ouvrage fait intervenir la notion combinatoire de tableaux semi-standards.

À tout tableau $\tau : \lambda \longrightarrow \mathbb{N}$, on peut associer une monôme en $\mathbf{x}$, noté $\mathbf{x}_\tau$, par la définition suivante

$$\mathbf{x}_\tau = \prod_{c \in \lambda} x_{\tau(c)}.$$

On pourrait aussi décrire, de façon équivalente, $\mathbf{x}_\tau$ comme étant le produit des éléments à l'intérieur des cases de τ si τ est un remplissage de λ par les variables $\mathbf{x}$. Il suffit alors de convenir que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$.

La ***fonction de Schur*** s_λ associée au diagramme de Young λ est définie par

$$s_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_\tau \mathbf{x}_\tau$$

où la sommation est faite sur tous les tableaux semi-standards de forme λ remplis par $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Par exemple, si $\lambda = (2, 1)$ et qu'on se limite aux variables x_1, x_2 et x_3, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\tau &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \\ &= m_{21} + 2m_{111}. \end{aligned}$$

Les tableaux correspondant à ces monômes sont illustrés dans la figure 2.1.

$$\begin{array}{|c|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \hline \end{array}$$

Figure 2.1: Tous les tableaux semi-standards de forme $\lambda = (2,1)$

Ceci anticipe une description alternative des fonctions de Schur. En général, les fonctions de Schur peuvent également être décrite par

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda,\mu} m_\mu$$

Le ***nombre de Kostka***, $K_{\lambda,\mu}$, est le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ. Le contenu d'un tableau τ est le partage obtenu en placant en ordre décroissant la suite des multiplicités de chaque entrée i dans τ. Par exemple, le contenu du tableau de la figure 2.2 est $\mathbf{1^3 2^1 3^3}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{1-1} 3 & \multicolumn{3}{l}{} \\ \cline{1-2} 2 & 3 & \multicolumn{2}{l}{} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Figure 2.2: Tableau de forme $\lambda = (4,2,1)$ et de contenu $\mu = (3,3,1)$

Il est clair que $K_{\lambda,1^n}$ est le nombre de tableaux standards de forme λ, puisque le contenu $\mathbf{1}^n$ signifie qu'on ne peut utiliser qu'une seule fois chaque nombre entre 1 et n pour remplir le diagramme λ qui est constitué de n cases. On remarque aussi aisément que $K_{\lambda,\lambda} = 1$. Ceci implique que $s_{(n)} = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu = h_n$ et que $s_{1^n} = m_{1^n} = e_n$. De plus, en associant une matrice, qui est naturellement triangulaire supérieure avec toutes les entrées sur la diagonale égales à 1, à toute forme λ, on peut montrer que s_λ est une base de l'anneau des fonctions symétriques en utilisant le fait que cette matrice est inversible. Pour plus d'informations à ces notions, il est suggéré de consulter (Bergeron, 2009).

Il n'est pas difficile de démontrer l'équivalence entre les deux définitions si on sait que s_λ est une fonction symétrique. Or, on peut voir que s_λ est symétrique avec la définition combinatoire. Pour le voir, il faut d'abord remarquer que transposer les variables x_i et x_{i+1} dans s_λ consiste à interchanger le nombre d'apparitions des valeurs i et $i+1$ dans tous les tableaux de forme λ qui interviennent dans la définition de s_λ sans compromettre la qualité semi-standard de ceux-ci. On remarque alors que, si on applique cette transformation à chaque tableau dans la sommation de la définition, la fonction de Schur obtenue suite à ce changement reste inchangée. Par exemple, si on interchange le nombre d'apparitions des valeurs 1 et 2 dans les tableaux de la figure 2.1 on obtient les tableaux de la figure 2.3.

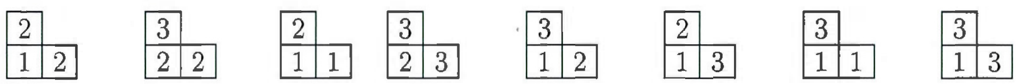


Figure 2.3: Tableaux semi-standards obtenues en interchangeant le nombre d'apparitions de 1 et 2 des tableaux de la figure 2.1.

Il est évident qu'on obtient la même fonction de Schur, puisqu'on a obtenu le même ensemble de tableaux semi-standards. Autrement dit, l'ensemble des tableaux semi-standards à valeurs dans $\underline{n}$ de forme λ est fermé pour cette transformation, et les fonctions de Schur sont des fonctions symétriques.

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DE $\mathfrak{S}_N$

3.1 Notions de base

Une représentation d'un groupe G consiste à interpréter ce groupe en terme de transformations linéaires. L'histoire de la théorie de la représentation débute environ en 1896 avec les travaux révolutionnaires de Ferdinand Georg Frobenius visant à faciliter l'étude des groupes ou, plus précisément, à trouver une approche efficace pour simplifier la classification des groupes finis. Le concept de représentation d'un groupe s'avère à être un élément essentiel dans l'élaboration des théories de Galois et de Polyà. Il intervient aussi dans le développement d'une multitude de différentes branches des sciences naturelles, notamment en physique des particules, et en probabilités et statistiques, avec les oeuvres de Eugène Wigner et de Persi Diaconis respectivement. Portant une attention particulière au groupe symétrique, on propose dans ce chapitre une présentation succincte des notions principales de la représentation des groupes finis. Pour une présentation plus détaillée des concepts introduits ici, il est suggéré de consulter l'ouvrage de Bruce Sagan (Sagan, 2000) ou de Gordon James (James, 1978).

Soit un corps $\mathbb{K}$ fixé, algébriquement clos et de caractéristique 0. Une ***représentation*** d'un groupe G est une action linéaire ρ de G sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \rho: \quad G \times \mathcal{V} &\longrightarrow \quad \mathcal{V} \\ (g, v) &\longrightarrow \quad g \cdot v \end{aligned}$$

avec les conditions que, pour tout $v, w \in \mathcal{V}$, $a, b \in \mathbb{K}$ et $g, h \in G$,

1) $g \cdot (av + bw) = ag \cdot v + bg \cdot w$

2) $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$

3) $1_G(v) = v$.

De façon équivalente, une représentation d'un groupe G par $\mathcal{V}$ peut également être présentée comme la donnée d'un morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho : \ G &\longrightarrow \ \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \\ g &\longmapsto \ \rho(g) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \end{aligned}$$

où $\rho(g)(v) = g \cdot v$. Rappelons que $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ désigne habituellement le groupe général linéaire de $\mathcal{V}$ dont les éléments sont les transformations linéaires inversibles de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}$. On dit, dans les deux cas, que $(\mathcal{V}, \rho)$ est une représentation de G, ou encore que $\mathcal{V}$ est un ***G*-module**. On peut également les appeler des représentations linéaires de G.

Remarque 3.1.1. *Lorsque le groupe G agit à gauche de façon linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, on dit que $\mathcal{V}$ est un G-module à gauche. On définit de manière analogue la notion de G-module à droite. Il est possible qu'un groupe G agissent linéairement à gauche de $\mathcal{V}$, et qu'un groupe H agissent linéairement à droite de $\mathcal{V}$. Dans ce cas, on dira que $\mathcal{V}$ est un (G, H)-bimodule.*

Exemple 3.1.1. *Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées*

$$\sigma \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \ldots, c_{\sigma(n)}).$$

Cette action induit un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, l'espace des matrices inversibles de format $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

où $\rho(\sigma)$ est la matrice de permutation caractérisée par σ. On vérifie facilement les propriétés d'homomorphisme.

Remarque 3.1.2. *Lorsque $\mathcal{V}$ est de dimension finie n, $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ s'identifie au groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ des matrices inversibles de format $n \times n$ modulo le choix d'une base.*

Exemple 3.1.2. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn} : \ \mathfrak{S}_n &\longrightarrow \ \mathbb{C} \\ \sigma &\longmapsto \ (-1)^{\ell(\sigma)} \end{aligned}$$

où $\ell(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions de σ. Il est bien connu que $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$. Ceci permet de définir une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1. Ici, on identifie $\mathbb{C}$ aux matrices de format 1×1 à coefficients dans $\mathbb{C}$. La représentation linéaire correspondante

$$\begin{aligned} \rho : \ \mathfrak{S}_n \times \mathbb{C} &\longrightarrow \ \mathbb{C} \\ (\sigma, z) &\longmapsto \ \mathrm{sgn}(\sigma) z \end{aligned}$$

est la ***représentation alternée*** *de $\mathfrak{S}_n$, et on la dénote par $\mathbb{C}^{\mathrm{alt}}$.*

Soit $(\mathcal{V}, \rho)$ et $(\mathcal{W}, \rho')$ deux représentations d'un groupe G. Un ***morphisme de G-modules***

$$\theta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

est une transformation linéaire de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{W}$ telle que

$$\rho'(g) \circ \theta = \theta \circ \rho(g)$$

pour tout $g \in G$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\rho(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{W} \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{W} \end{tikzcd}$$

pour tout $g \in G$. Si θ est une transformation linéaire inversible, on dit alors qu'on a un isomorphisme de G-modules, ou que $\mathcal{V}$ est isomorphe à $\mathcal{W}$ en tant que G-module. On note $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$ le fait qu'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$.

Dans l'étude de structures algébriques relativement complexes, une question naturelle est de savoir s'il est possible de décomposer cette structure en «sous-structures indécomposables». Cela nécéssite de définir la notion de sous-G-modules indécomposables.

On a une ***sous-représentation*** $\mathcal{V}_o$ d'une représentation $(\mathcal{V}, \rho)$ de G, si $\mathcal{V}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ telle que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)(\mathcal{V}_0) \subseteq \mathcal{V}_0$. Couramment, on dit que $\mathcal{V}_0$ est un sous-G-module de $\mathcal{V}$.

Par définition, $(\mathcal{V}, \rho)$ est une sous-représentation d'elle-même. De plus, on admet évidemment la sous-représentation triviale $(\{0\}, \rho)$, puisque $\rho(g)(0) = 0$ pour tout $g \in G$.

Exemple 3.1.3. *Soit*

$$\mathbb{C}^{geo} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n \mid c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0\}$$

un hyperplan, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ *de dimension* $n-1$. *Pour montrer que* $\mathbb{C}^{geo}$ *est un sous-*$\mathfrak{S}_n$*-module de* $\mathbb{C}^n$, *il suffit de voir que l'action de* $\mathfrak{S}_n$ *est stable sur* $\mathbb{C}^{geo}$. *Ceci est évident puisque l'action permuter les coordonnées d'un élément* *de $\mathbb{C}^{geo}$ n'a aucune influence sur le fait que la somme de ses coordonnées est égale à* 0. *Donc, $\mathbb{C}^{geo}$ est bien un sous-$\mathfrak{S}_n$-module de $\mathbb{C}^n$.*

Une représentation $(\mathcal{V}, \rho)$ de G est dite ***irréductible*** si elle ne contient pas de sous-représentations autres qu'elle-même et la sous-représentation triviale. En terme de modules, si $(\mathcal{V}, \rho)$ est irréductible, on dit que $\mathcal{V}$ est un ***G-module simple***. Pour G fini, il est bien connu que le nombre de représentations irréductibles non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaison. Le théorème suivant attribué à Heinrich Mashke répond à la question énoncée précédemment pour le cas des groupes finis.

Théorème 3.1.1. *Soit G un groupe fini. Tout G-module $\mathcal{V}$ se décompose de façon unique à isomorphismse près en une somme directe de G-modules simples*

$$\mathcal{V} \simeq \sum_{c \in C} a_c \mathcal{V}_c.$$

Ici, C désigne l'ensemble des classes de conjugaison de G et a_c est le nombre de copies du G-module simple $\mathcal{V}_c$ apparaissant dans la décomposition. On dit que a_c est la multiplicité de $\mathcal{V}_c$ dans la décomposition en irréductibles de $\mathcal{V}$.

On a donc qu'il existe $\{\mathcal{V}_c\}_{c \in C}$ une famille complète de représentants de G-modules simples non isomorphes.

3.2 Caractères

Modulo le choix d'une base, une description explicite d'une représentation linéaire $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ nécessite la description de toutes les matrices M_g associées aux transformations linéaires inversibles $g = \rho(g)$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Ainsi, si $\mathcal{V}$ est de dimension n et G est généré par m éléments, il faut connaitre m matrices de format $n \times n$. Surprenamment, un G-module est entièrement caractérisé, à isomorphismes près, par une seule fonction de G vers le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ appelée caractère de ρ.

Précisément, le ***caractère*** associé au G-module $\mathcal{V}$ est la fonction

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{V}} : \ G &\longrightarrow \ \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \ \mathrm{tr}(M_g) \end{aligned}$$

où $\mathrm{tr}(M_g)$ est la trace de la matrice associée à l'opérateur linéaire g selon une base quelconque de $\mathcal{V}$.

Remarque 3.2.1.

(1) Le choix de la base n'a aucune importance dans cette définition puisque la fonction «trace» est invariante par conjugaison de matrices. De plus, la fonction $\chi_{\mathcal{V}}$ est constante sur les classes de conjugaison de G. On observe que le caractère de $\mathcal{V}$ évalué sur l'élément identité e_G de G est égal à la dimension de $\mathcal{V}$ puisque la transformation linéaire $e_G = \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$ correspond à la matrice identité de format $\dim(\mathcal{V}) \times \dim(\mathcal{V})$.

(2) Le fait que $\chi_{\mathcal{V}}$ caractérise ρ à isomorphisme près semble moins mystèrieux si on observe que $\chi_{\mathcal{V}}$ donne non seulement la trace de M_g, mais aussi la trace de toutes les puissances de M_g. Il en résulte qu'on peut calculer les valeurs propres de M_g. En effet, M_g est généralement diagonalisable avec ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale. Donc, même si M_g demeure inconnue, on connait la somme de ses valeurs propres. Grâce aux fonctions symétriques, il est possible de reconstruire M_g à partir de cette information. Sachant que

$$e_k = \sum_{\mu \vdash k} (-1)^{k-\ell(\mu)} \frac{p_\mu}{z_\mu},$$

on peut calculer

$$p_\mu = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_\ell}$$

avec $p_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = \mathrm{tr}(M_g)^k$. Ainsi, les p_μ donnent les valeurs des e_k qui *elles nous donnent le polynôme caractéristique de M_g, puisque*

$$\begin{aligned}\det(x\,\mathrm{Id} - M_g) &= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)\\ &= x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n\end{aligned}$$

où les $e_k = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les valeurs propres de M_g. On peut alors trouver les valeurs propres de M_g en factorisant ce polynôme caractéristique. Ensuite, par conjugaison de matrices, on peut reconstruire M_g.

Par ailleurs, on sait que $\chi_{\mathcal{V}} = \sum_{c\in C} a_c\chi_c$. Si on connait les modules simples $\mathcal{V}_c$ et leur caractère χ_c, trouver la décomposition en irréductibles de $\mathcal{V}$ devient le problème combinatoire de calculer les entiers a_c ; compter le nombre de fois que $\mathcal{V}_c$ apparait dans la décomposition en irréductibles.

Un caractère $\chi_{\mathcal{V}}$ est dit ***irréductible*** si $\mathcal{V}$ est un G-module simple. Parallèlement aux raisonnements présentés dans la section précédente, on voudrait pouvoir décomposer un caractère en une somme de caractères irréductibles. À cette fin, on montre que deux G-modules sont isomorphes si et seulement s'ils ont le même caractère. De plus, le fait que $\chi_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}} = \chi_{\mathcal{V}} + \chi_{\mathcal{W}}$ donne le moyen d'établir un résultat analogue au théorème de Mashke pour les caractères.

Théorème 3.2.1. *Soit $\mathcal{V}$ un G-module quelconque. Alors,*

$$\chi_{\mathcal{V}} = \sum_{c\in C} a_c\chi_c$$

où les χ_c sont des caractères irréductibles distincts deux à deux et a_c est la multiplicité de χ_c dans la décomposition en irréductibles de $\chi_{\mathcal{V}}$.

La notion de caractère devient d'autant plus intéressantes lorsqu'on y ajoute un produit scalaire. Ce produit scalaire donne lieu à de puissants résultats qui permettront d'évaluer l'irréductibilité d'un caractère.

Soit $\chi_{\mathcal{V}}$ et $\chi_{\mathcal{W}}$ deux caractères associés aux modules $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ respectivement. Le produit scalaire de caractères est défini par

$$\langle \chi_{\mathcal{V}}, \chi_{\mathcal{W}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{V}}(g) \overline{\chi_{\mathcal{W}}(g)}$$

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathcal{V}$ un G-module tel que*

$$\mathcal{V} \simeq m_1 \mathcal{V}_1 \oplus m_2 \mathcal{V}_2 \oplus \cdots m_k \mathcal{V}_k$$

avec les $\mathcal{V}_i$ irréductibles et non isomorphes deux à deux. Posons $\chi_{\mathcal{V}}$ et $\chi_{\mathcal{V}}^{(i)}$ les caractères associés à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_i$ respectivement pour tout i. Alors,

1. $\left\langle \chi_{\mathcal{V}}, \chi_{\mathcal{V}}^{(i)} \right\rangle = m_i$ *pour tout i*

2. $\langle \chi_{\mathcal{V}}, \chi_{\mathcal{V}} \rangle = 1 \iff \chi_{\mathcal{V}}$ *est irréductible*

Ces résultats permet de calculer la multiplicité d'un caractère irréductible dans la décomposition en irréductible d'une G-module et de déterminer l'irréductibilité d'un caractère respectivement.

3.3 Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$

Un problème digne d'intérêt dans le cadre de la théorie de la représentation des groupes est celui de construire toutes les représentations irréductibles d'un groupe G donné. S'il est possible de le faire, les théorèmes des deux sections précédentes affirment alors qu'on serait en possession de tous les outils nécessaires à l'exception des multiplicités pour décrire toutes les représentations de G. Lorsque G est fini, le fait que le nombre de représentations irréductibles corresponde au nombre de classes de conjugaison de G implique qu'on devrait théoriquement être capable de les lister. En particulier, dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, les classes de conjugaison sont en correspondance avec les partages de n. Donc, les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont indexées par les partages de n. De façon équivalente, les $\mathfrak{S}_n$-modules simples sont indexées par les diagrammes de Ferrers à n cases. Dans cette section, on expose, dans un premier temps, les $\mathfrak{S}_n$-modules simples pour un n fixé en n'utilisant que les notions de la théorie des représentations des groupes finis à travers un exemple. Ensuite, on présente une méthode basée sur les diagrammes associés aux partages de n pour produire les $\mathfrak{S}_n$-modules simples.

3.3.1 Exemple : Les $\mathfrak{S}_3$-modules simples

Considérons le cas où $n = 3$. On cherche à déterminer les $\mathfrak{S}_3$-modules simples. Par la théorie, on sait qu'il n'en existe que 3 puisqu'il n'y a que 3 partages possibles du chiffre 3, soit $(3), (2,1), (1,1,1)$. De plus, on sait que tout sous-$\mathfrak{S}_3$-module de dimension 1 est simple, car ils ne peuvent pas contenir de sous-$\mathfrak{S}_3$-modules propres. Par conséquent, la représentation $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}$ de $\mathfrak{S}_3$ par $\mathbb{C}$ avec l'action trivial est irréductible car elle est de dimension 1. Par cette même explication, on peut affirmer que $\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}$, le $\mathfrak{S}_3$-module alterné rencontré précédemment, est aussi un $\mathfrak{S}_3$-module simple. Il ne reste donc qu'un seul $\mathfrak{S}_3$-module simple à trouver. Il s'agit de la représentation par un hyperplan de $\mathbb{C}^3$, soit $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$. Vérifions qu'il est bien question du dernier $\mathfrak{S}_3$-module simple recherché.

On sait que $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$ est de dimension 2 par définition d'un hyperplan. Donc, $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$ est simple si et seulement s'il ne contient aucun sous-$\mathfrak{S}_3$-module de dimension 1. Par contradiction, supposons que $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$ contient un sous-$\mathfrak{S}_3$-module de dimension 1, en l'occurrence une droite $\mathbf{d} = \langle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\rangle \subset \mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$. En général, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transposition $(12), (23), \cdots (n-1, n)$. Observons l'action des générateurs (12) et (23) de $\mathfrak{S}_3$ sur la base de $\mathbf{d}$:

$$(12) \cdot (a, b, c) = (b, a, c) = \lambda(a, b, c)$$
$$(23) \cdot (a, b, c) = (a, c, b) = \mu(a, b, c)$$

où λ et μ sont des nombres complexes. La deuxième égalité dans chacun de ces équations découle de la supposition que $\mathbf{d}$ est un sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$. Évidemment, ces égalités sont contradictoires. Effectivement, si $c = 0$, alors par les équations ci-haut, on obtient que $b = a = 0$, ce qui est impossible puisque (a, b, c) est le vecteur directeur de **d**. Autrement, si $c \neq 0$, alors $b \neq 0$ et de même pour a. Donc, il faut nécessairement que $\lambda = \mu = 1$, ce qui implique que $a = b = c$. Comme (a, b, c) est un élément de $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$, il faut aussi que $a + b + c = 3a = 0$. On se retrouve encore avec la contradiction $a = b = c = 0$. On a donc montrer que $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$ est un $\mathfrak{S}_3$-module simple.

La théorie impose que tout $\mathfrak{S}_3$-module simple est isomorphe à l'un des $\mathfrak{S}_3$-modules suivants : $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}, \mathbb{C}^{\mathbf{alt}}, \mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$.

3.3.2 Construction des $\mathfrak{S}_n$-modules simples

On s'intéresse ici à construire les $\mathfrak{S}_n$-modules simples. Chacun d'eux correspond à un partage λ de l'entier n en raison du fait que les représentations irréductibles d'un groupe quelconque G sont en bijection avec ses classes de conjugaison et que les classes latérales de $\mathfrak{S}_n$ s'identifient aux partages de n. D'autre part, on associe un diagramme de Ferrers composés de n cases à tout partage de n. La construction présentée ici est une version polynomiale, telle que décrite par Bergeron (Bergeron, 2009), de la méthode des polytabloids de James (James, 1978).

Soit $\mathbf{R}$ l'anneau des polynômes en $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit linéairement sur $\mathbf{R}$ par permutation des variables. Fixons un diagramme de Ferrers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ de n cases. On construit un polynôme Δ_τ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ associé à chaque tableau bijectif

$$\tau : \lambda \longrightarrow \underline{n}$$

de forme λ à valeurs dans $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. On définit

$$\Delta_\tau := \prod_{i=1}^{\ell} \Big(\prod_{j<k} (x_{\tau(i,j)} - x_{\tau(i,k)}) \Big).$$

Par exemple, si

$$\tau = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-1} 5 \\ \cline{1-3} 7 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 10 & 9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

alors,

$$\Delta_\tau = (x_2 - x_7)(x_2 - x_5)(x_7 - x_5)(x_3 - x_8)(x_6 - x_4)$$

Remarque 3.3.1. *Étant donné un tableau bijectif de Young τ, le polynôme Δ_τ est unique par définition. De plus, on vérifie facilement que $\sigma \cdot \Delta_\tau = \Delta_{\sigma \cdot \tau}$ pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$.*

Posons

$$\mathcal{S}_\lambda := \langle \{\Delta_\tau \mid \tau \text{ tableau bijectif de forme } \lambda\} \rangle$$

le sous-$\mathfrak{S}_n$-module de $\mathbf{R}$ engendré par les polynômes Δ_τ.

Revenons au cas où $n = 3$ pour observer le comportement de $\mathcal{S}_\lambda$ dans un exemple. Il y a trois partages de 3, donc trois formes de diagrammes de Ferrers à considérer, soit $(3), (2,1)$ et $(1,1,1)$.

Lorsque $\lambda = (3)$, les six tableaux bijectifs de forme λ possibles sont présentés dans la figure 3.1.

$$\tau_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \tau_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \tau_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\tau_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \tau_5 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \tau_6 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 3.1: Tableaux bijectifs de forme $\lambda = (3)$ à valeurs dans $\underline{3}$.

Les polynômes associés à ces tableaux sont

$$\Delta_{\tau_1} = \Delta_{\tau_2} = \Delta_{\tau_3} = \Delta_{\tau_4} = \Delta_{\tau_5} = \Delta_{\tau_6} = 1.$$

Donc,

$$\mathcal{S}_\lambda = \langle \{1\} \rangle \simeq \mathbb{K}$$

est un $\mathfrak{S}_3$-module simple, puisqu'il est de dimension 1. L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathcal{S}_\lambda$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_3 \times \mathcal{S}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{S}_\lambda \\ (\sigma, 1) & \longmapsto & \sigma(1) = 1 \end{array}$$

est trivial pour tout σ dans $\mathfrak{S}_3$. On en déduit que

$$\mathcal{S}_\lambda \simeq \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3},$$

$\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}$ étant le $\mathfrak{S}_3$-module trivial.

À l'opposé, lorsque $\lambda = (1, 1, 1)$, la figure 3.2 illustre les tableaux bijectifs de forme λ possibles.

$$\tau_1 = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \qquad \tau_2 = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \qquad \tau_3 = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\tau_4 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \qquad \tau_5 = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \qquad \tau_6 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$$

Figure 3.2: Tableaux bijectifs de forme $\lambda = (1, 1, 1)$ à valeurs dans $\underline{3}$.

On obtient alors les polynômes

$$\begin{aligned}
\Delta_{T_1} &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) & \\
\Delta_{T_2} &= (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) &= -\Delta_{T_1} \\
\Delta_{T_3} &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) &= -\Delta_{T_1} \\
\Delta_{T_4} &= (x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) &= \Delta_{T_1} \\
\Delta_{T_5} &= (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) &= \Delta_{T_1} \\
\Delta_{T_6} &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) &= -\Delta_{T_1}.
\end{aligned}$$

Le module engendré par ces polynômes

$$\mathcal{S}_\lambda = \langle \{\Delta_{T_1}\} \rangle \simeq \mathbb{K}$$

est simple. L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathcal{S}_\lambda$ est entièrement déterminée par l'action des générateurs de $\mathfrak{S}_3$ sur une base de $\mathcal{S}_\lambda$. Regardons comment les permutations (12) et (23) agissent sur Δ_{T_1}.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_3 \times \mathcal{S}_\lambda &\longrightarrow \mathcal{S}_\lambda \\
((12), \Delta_{T_1}) &\longmapsto (12) \cdot \Delta_{T_1} = \Delta_{(12)\cdot T_1} = -\Delta_{T_1} \\
((23), \Delta_{T_1}) &\longmapsto (23) \cdot \Delta_{T_1} = \Delta_{(23)\cdot T_1} = -\Delta_{T_1}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout i et pour tout σ dans $\mathfrak{S}_3$,

$$\sigma \cdot \Delta_{T_i} = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta_{T_i}$$

où $\operatorname{sgn}(\sigma)$ est le signe de σ. Cette action coincide avec l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}$, d'où

$$\mathcal{S}_\lambda \simeq \mathbb{C}^{\mathbf{alt}}$$

où $\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}$ est le $\mathfrak{S}_3$-module alterné.

Pour $\lambda = (2,1)$, les polynômes Δ_{τ_i} générateurs de $\mathcal{S}_\lambda$ sont issues des 6 tableaux bijectifs de la figure 3.3.

$$\tau_1 = \begin{array}{ll} \boxed{3} & \\ \boxed{1} & \boxed{2} \end{array} \qquad \tau_2 = \begin{array}{ll} \boxed{2} & \\ \boxed{1} & \boxed{3} \end{array} \qquad \tau_3 = \begin{array}{ll} \boxed{3} & \\ \boxed{2} & \boxed{1} \end{array}$$

$$\tau_4 = \begin{array}{ll} \boxed{1} & \\ \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \qquad \tau_5 = \begin{array}{ll} \boxed{2} & \\ \boxed{3} & \boxed{1} \end{array} \qquad \tau_6 = \begin{array}{ll} \boxed{1} & \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{array}$$

Figure 3.3: Tableaux bijectifs de forme $\lambda = (2,1)$ à valeurs dans $\underline{3}$.

On trouve alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tau_1} &= (x_1 - x_3) \\
\Delta_{\tau_2} &= (x_1 - x_2) \\
\Delta_{\tau_3} &= (x_2 - x_3) \\
\Delta_{\tau_4} &= (x_2 - x_1) &&= -\Delta_{\tau_2} \\
\Delta_{\tau_5} &= (x_3 - x_2) &&= -\Delta_{\tau_3} \\
\Delta_{\tau_6} &= (x_3 - x_1) &&= -\Delta_{\tau_1}.
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\Delta_{\tau_1} = \Delta_{\tau_2} + \Delta_{\tau_3}.$$

Donc, l'espace engendré par les Δ_{τ_i},

$$\mathcal{S}_\lambda = \langle \{\Delta_{\tau_2}, \Delta_{\tau_3}\} \rangle,$$

est un $\mathfrak{S}_3$-module de dimension 2. L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur la base $\{\Delta_{\tau_2}, \Delta_{\tau_3}\}$ de $\mathcal{S}_\lambda$ est déterminée par

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_3 \times \mathcal{S}_\lambda &\longrightarrow \mathcal{S}_\lambda \\
((12), \Delta_{T_2}) &\longmapsto -\Delta_{T_2} \\
((12), \Delta_{T_3}) &\longmapsto \Delta_{T_1} = \Delta_{T_2} + \Delta_{T_3} \\
((23), \Delta_{T_2}) &\longmapsto \Delta_{T_1} = \Delta_{T_2} + \Delta_{T_3} \\
((23), \Delta_{T_3}) &\longmapsto -\Delta_{T_3}.
\end{aligned}$$

Les matrices correspondant au générateurs de $\mathfrak{S}_3$ sont

$$M_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{(23)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Elles sont égales aux matrices des générateurs de $\mathfrak{S}_3$ sur

$$\mathbb{C}^{\mathbf{geo}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

En effet, si $\{k_1, k_2, k_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$, alors $\{k_1 - k_2, k_2 - k_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$. Il est élémentaire de vérifier que les matrices de (12) et (23) par rapport à cette base sont exactement $M_{(12)}$ et $M_{(23)}$ respectivement. Comme une représentation est essentiellement déterminée par les traces des matrices associées aux générateurs du groupe, on conclut que

$$\mathcal{S}_\lambda \simeq \mathbb{C}^{\mathbf{geo}}.$$

En général, $S_{(n)}$ et $S_{(1^n)}$ correspondent toujours aux représentations triviale et alternée de $\mathfrak{S}_n$ respectivement. Elles sont chacune de dimension 1. $S_{(n-1,1)}$ est toujours isomorphe à la représentation de $\mathfrak{S}_n$ de dimension $n-1$ par un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

Le théorème classique suivant appuie ce qui a été observé à travers l'exemple précédent.

Théorème 3.3.1.

(1) $\{\mathcal{S}_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ *est l'ensemble de tous les* $\mathfrak{S}_n$*-modules simples à isomorphisme près ;*

(2) $\dim(\mathcal{S}_\lambda)$ *est égale au nombre de tableaux standards de forme* λ.

Pour voir une preuve complète de ce théorème, il est recommandé de consulter (Sagan, 2000).

3.4 Produit scalaire de fonctions centrales

On a déjà mentionné plus tôt qu'on associe à toute représentation $\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ son caractère $\chi_{\mathcal{V}} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est une fonction constante sur les classes de conjugaison. La caractère est en fait un cas particulier d'un concept plus générale. On introduit dans cette section la notion de fonction centrale. Le produit scalaire défini sur de telles fonctions permet de donner un critère simple pour l'irréductibilité d'un caractère. Son rôle est significatif dans l'étude des fonctions symétriques comme on le verra dans le chapitre suivant.

Une fonction centrale sur un groupe G est une fonction

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui est constante sur les classes de conjugaison de G. Autrement dit, f est centrale si

$$f(ghg^{-1}) = f(h)$$

pour tout g et h dans G. On note $\mathcal{C}\ell(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions centrales sur G.

Exemple 3.4.1.

(a) Si $\mathcal{V}$ est un G-module, alors le caractère $\chi_{\mathcal{V}}$ qui lui est associé est une fonction centrale.

(b) Soit c une classe de conjugaison de G. On définit

$$f_c : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

la fonction caractéristique de c par $f_c(g) = 1$ si g appartient à c. Dans le cas contraire, $f_c(g) = 0$. Ceci est évidemment une fonction centrale puisque ghg^{-1} est dans la même classe de conjugaison que h, et donc $f_c(ghg^{-1}) = f_c(h)$ pour tout g, h dans G.

L'addition de deux fonctions centrales φ et ψ définie par

$$(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g),$$

est une fonction centrale. Le produit d'une fonction centrale par un scalaire l'est aussi. L'ensemble des fonctions centrales $\mathcal{C}\ell(G)$ munit de ces deux opérations est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans cet espace, l'ensemble des fonctions centrales caractéristiques est linéairement indépendant. On le vérifie en montrant que si $\sum_{d \in C} a_d f_d = 0$, alors $a_d = 0$ pour tout d dans C. En effet, $\sum_{d \in C} a_d f_d = 0$ implique que $\sum_{d \in C} a_d f_d(g) = 0$ pour tout g dans G. Donc, si g est dans la classe de conjugaison c, alors $a_d f_d(g) = 0$ pour tout $d \neq c$. Dans ces circonstances, $\sum_{d \in C} a_d f_d(g) = a_c f_c(g) = a_c$. Étant donné que $f_c(g) = 1$, il faut obligatoirement que $a_c = 0$, et ce pour tout c dans C.

Prenons une fonction centrale φ quelconque. Pour un élément g dans la classe de conjugaison c, notons

$$\varphi(g) = k_c.$$

En prenant une combinaison linéaire des f_c avec pour coefficients les k_c, on obtient une fonction centrale $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{c \in C} k_c f_c$$

Pour tout h dans G avec h dans d,

$$\tilde{\varphi}(h) = \sum_{c \in C} k_c f_c(h) = k_d f_d(h) = k_d = \varphi(h)$$

On a donc montré que $\tilde{\varphi} = \varphi$, et que, par le même fait, l'ensemble des fonctions centrales caractéristiques est un ensemble de générateurs de $\mathcal{Cl}(G)$. En conclusion,

$$\{f_c \mid c \in C\}$$

forme une base de $\mathcal{Cl}(G)$. Du coup, on a montré que la dimension de $\mathcal{Cl}(G)$ est le nombre de classes de conjugaisons de G. On munit $\mathcal{Cl}(G)$ d'une structure d'espace hermitien en introduisant le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma) \overline{\psi(\sigma)}.$$

Lorsque $G = \mathfrak{S}_n$, l'ensemble des caractères irréductibles

$$\{\chi_{\mathcal{V}} \mid \mathcal{V} \text{ est un } \mathfrak{S}_n\text{-module simple}\}$$

constitue une base orthonormale de $\mathcal{Cl}(\mathfrak{S}_n)$. Explicitement, si $\chi_{\mathcal{V}}$ et $\chi_{\mathcal{W}}$ sont deux caractères irréductibles, alors

$$\langle \chi_{\mathcal{V}}, \chi_{\mathcal{W}} \rangle = \delta_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$$

où δ est le delta de Kronecker. Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en correspondance avec les partages de n. Si on note la fonction centrale caractéristique C_μ de la classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspondante à un partage μ définie par

$$C_\mu(\sigma) := \delta_{\lambda(\sigma)\mu},$$

alors l'ensemble des fonctions caractéristiques $\{C_\mu \mid \mu \vdash n\}$ forme une base de $\mathcal{C}\ell(\mathfrak{S}_n)$. Ceci met en évidence le fait que le nombre de partages de n est exactement le nombre de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. Si μ et ν sont des partages de n, alors

$$\langle C_\mu, C_\nu \rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{z_\mu}$$

où $\frac{n!}{z_\mu}$ est le nombre de permutations de type cyclique μ.

Ainsi, pour $\varphi \in \mathcal{C}\ell(\mathfrak{S}_n)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi, C_\mu \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) C_\mu(\sigma) \\ &= \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \varphi(\nu) C_\mu(\nu) \\ &= \frac{\varphi(\mu)}{z_\mu} \end{aligned}$$

où $\varphi(\nu) = \varphi(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\lambda(\sigma) = \nu$.

3.5 Transformée de Frobenius

Il est possible d'associer une fonction symétrique à une fonction centrale sur $\mathfrak{S}_n$. La ***transformée de Frobenius*** d'une fonction centrale φ sur $\mathfrak{S}_n$ est une fonction symétrique définie par

$$\mathrm{frob}(\varphi) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}$$

où $p_{\lambda(\sigma)}$ désigne la fonction symétrique somme de puissances. Comme on sait que $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau\sigma\tau^{-1})$ pour tout σ et τ dans $\mathfrak{S}_n$ appartenant à la même classe de conjugaison μ, et qu'il y a $\frac{n!}{z_\mu}$ permutations de type cyclique μ, on en déduit que

$$\mathrm{frob}(\varphi) = \sum_{\mu \vdash n} \varphi(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

où $\varphi(\mu)$ est l'application de φ sur un représentant de la classe μ. Dans cette écriture, on fait la somme sur tous les partages de n, puisqu'ils correspondent bijectivement aux classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

Le caractère associé à une représentation de $\mathfrak{S}_n$ est une fonction centrale. Si

$$\chi_{\mathcal{V}} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}$$

est le caractère d'une représentation $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{S}_n$, on écrit sa transformée de Frobenius

$$\mathrm{frob}(\mathcal{V}) = \sum_{\mu \vdash n} \chi_{\mathcal{V}}(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

L'intérêt d'une telle transformation repose sur le fait qu'elle contient l'entièreté de l'information concernant le caractère auquel elle est associée. En fait, on peut retrouver un caractère à partir de sa transformée de Frobenius par le biais du produit scalaire suivant défini sur les fonctions symétriques des sommes de puissances :

$$\left\langle \frac{p_\mu}{z_\mu}, \frac{p_\nu}{z_\nu} \right\rangle := \frac{\delta_{\mu\nu}}{z_\mu}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{frob}(\varphi), \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\rangle &= \sum_{\nu \vdash n} \varphi(\nu) \left\langle \frac{p_\nu}{z_\nu}, \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\rangle \\
&= \varphi(\mu) \left\langle \frac{p_\mu}{z_\mu}, \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\rangle \\
&= \frac{\varphi(\mu)}{z_\mu} \\
&= \langle \varphi, C_\mu \rangle
\end{aligned}$$

Autrement dit, on construit un lien entre les fonctions centrales sur $\mathfrak{S}_n$ et les fonctions symétriques de degré n en fabriquant une correspondance entre C_μ et $\frac{p_\mu}{z_\mu}$ à travers la transformée de Frobenius.

Suivant cette traduction, on obtient que les caractères irréductibles des représentations de $\mathfrak{S}_n$ se transforment en fonctions de Schur. En effet, il est bien connu que si χ_λ est le caractère d'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ où $\lambda \vdash n$, alors

$$\mathrm{frob}(\chi_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} \chi_\lambda(\mu)\frac{p_\mu}{z_\mu} = s_\lambda.$$

Exemple 3.5.1. *À titre d'illustration, considérons $\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ une représentation linéaire du groupe symétrique à n éléments. On s'intérresse au cas où*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Évidemment, on sait que $\dim(\mathcal{V}) = n-1$ et donc que $\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{GL}_{\text{n-1}}(\mathbb{C})$ où $\mathrm{GL}_{\text{n-1}}(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de format $(n-1)\times(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ muni de la multiplication matricielle. On peut alors considérer $\tilde{\rho} : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_{\text{n-1}}(\mathbb{C})$ la représentation matricielle de $\mathfrak{S}_n$ provenant de ρ.

Notons $\chi_{(n-1)1}$ le caractère associé à $\tilde{\rho}$ et $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ une base de $\mathcal{V}$. Ainsi, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\chi_{(n-1)1}(\sigma) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(\sigma))$$

où $M_{\mathcal{B}}(\sigma) \in \mathrm{GL}_{\text{n-1}}(\mathbb{C})$.

Or, si $M_{\mathcal{B}}(\sigma) = [m_{ij}]$ où $1 \le i, j \le n-1$, alors

$$m_{ii} = \delta_{\sigma(i)i}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M_B(\sigma)) &= |\{i : \sigma(i) = i, 1 \le i \le n-1\}| \\ &= (\textit{nombre de points fixés par } \sigma) - 1 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{frob}(\chi_{(n-1)1}) &= \sum_{\mu \vdash n} \chi_{(n-1)1}(\mu)\frac{p_\mu}{z_\mu} = h_{n-1}h_1 - h_n \\
&= s_{(n-1)1}
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en transformant les sommes de puissances en fonctions symétriques homogènes, et la dernière égalité est obtenue en appliquant la formule de Jacobi-Trudi. Pour comprendre la formule de Jacobi-Trudi, on peut consulter (Stanley, 1999) ou (Bergeron, 2009).

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATIONS POLYNOMIALES DE GL($\mathcal{V}$)

L'importance des représentations du groupe symétrique provient en partie du fait que tout groupe fini peut être percu comme un sous-groupe d'un certain groupe symétrique. À l'aide d'une jolie correspondance, elles peuvent être comprises en étudiant les représentations polynomiales du groupe des matrices inversibles. Ce chapitre résume brièvement certains résultats connus concernant les représentations polynomiales du groupe général linéaire GL_m. L'étude de telles représentations a pris son véritable envol au début du 19ième siècle suite à la publication en 1901 de la thèse de Issai Schur. Les méthodes purement algébriques développées à cette époque furent améliorées en 1927 par le même auteur en vue d'obtenir les mêmes résultats de façon plus élégante. Ces nouvelles portes furent employées par quelques mathématiciens contemporains dont Hermann Weyl pour généraliser les concepts introduits dans la première dissertation de Schur en 1901. Récemment, l'approche négligée de la dissertation doctorale de Schur est sorti des catacombes grâce aux travaux de J.A. Green qui admet sa pertinence en géométrie algébrique. La présentation de ce chapitre s'inspirent généreusement de l'oeuvre classique de Green (Green, 2007).

4.1 Notions de bases

4.1.1 Contexte

Soit GL_m, dit le groupe général linéaire sur un corps $\mathbb{K}$, l'ensemble des matrices inversibles de format $m \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On définit une structure d'algèbre sur l'espace

$$\mathbb{K}^{\mathrm{GL}_m} = \{f : \mathrm{GL}_m \to \mathbb{K} \mid f \text{ est une fonction}\}$$

en posant $(f + f')(g) = f(g) + f'(g)$ et $(ff')(g) = f(g)f'(g)$ pour tout $f, f' \in \mathbb{K}^{\mathrm{GL}_m}$ et pour tout $g \in \mathrm{GL}_m$. Les détails concernant cette algèbre ne seront pas explicités dans cette ouvrage. On retient seulement que la structure d'algèbre de cette espace ainsi que sa structure de cogèbre sont essentielles à l'établissement des constructions suivantes.

On considère les fonctions

$$c_{\mu\nu} : \mathrm{GL}_m \longrightarrow \mathbb{K}$$

où $\mu, \nu \in \underline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ avec $c_{\mu\nu}(g)$ désignant le coefficient à l'intersection de la μ-ième ligne et de la ν-ième colonne de la matrice $g \in \mathrm{GL}_m$. On vérifie de façon élémentaire que l'algèbre $A_{\mathbb{K}}(m)$ librement engendré par les fonctions $c_{\mu\nu}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathrm{GL}_m}$. Il est commun de percevoir les éléments d'une algèbre libre comme des polynômes en les variables libres par la procédure décrite dans la remarque 1.4.1. On regarde donc $A_{\mathbb{K}}(m)$ comme étant l'espace des polynômes en les m^2 variables libres $c_{\mu\nu}$ et on note $A_{\mathbb{K}}(m, n)$ le sous-espace constitué de ceux qui sont homogènes de degré n. Il est bien connu que cette algèbre se décompose en sommes directes de sous-espaces de dimension finie

$$A_{\mathbb{K}}(m) = \bigoplus_{n \geq 0} A_{\mathbb{K}}(m, n).$$

4.1.2 Définition

Soit $(\mathcal{W}, \rho)$ une représentation de l'algèbre du groupe général linéaire $\mathbb{K}\mathrm{GL}_m$. On rappelle que $\rho : \mathbb{K}\mathrm{GL}_m \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$ est un morphisme de groupe, et que l'on note $g{\cdot}v := \rho(g)(v)$. Étant donné une base $B_{\mathcal{W}} = \{w_1, w_2, \ldots, w_M\}$ de $\mathcal{W}$,

$$g \cdot w_\nu = \sum_{\mu=1}^{M} r_{\mu\nu}(g) w_\mu$$

où $r_{\mu\nu}(g) \in \mathbb{K}$ et $\nu \in \underline{M}$. On peut percevoir $r_{\mu\nu}$ comme un élément de l'algèbre $\mathbb{K}^{\mathrm{GL}_m}$ avec $r_{\mu\nu}(g)$ étant le coefficient de w_μ dans l'écriture de $g \cdot w_\nu$ selon la base $B_{\mathcal{W}}$. On dit que $\mathcal{W}$ est une ***représentation polynomiale*** de GL_m, ou un GL_m-module polynomial, si les $r_{\mu\nu}$ sont des éléments de $A_{\mathbb{K}}(m)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_m$. Le terme «polynomial» met en évidence le fait que $A_{\mathbb{K}}(m)$ est perçu comme l'anneau des polynômes en les m^2 coefficients d'un élément de GL_m. La représentation linéaire $(\mathcal{W}, \rho)$ est donc polynomiale si, pour un g dans GL_m fixé, les coefficients de la matrice $(r_{\mu\nu}(g))$ associée à la transformation linéaire $\rho(g)$ par rapport à une base de $\mathcal{W}$ sont des polynomes en les m^2 coefficients de g. Autrement dit, $\mathcal{W}$ est un GL_m-module polynomial si les coefficients de $g{\cdot}w_\nu$ par rapport à la base $B_{\mathcal{W}}$ sont des polynômes en les variables $c_{\mu\nu}$ pour tout w_ν dans $B_{\mathcal{W}}$. On peut ainsi définir une représentation polynomiale de GL_m simplement comme un morphisme de groupe

$$\tilde{\rho} : \mathrm{GL}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_M$$

tel que les entrées de la matrice $\tilde{\rho}(g)$ sont des polynômes en les entrées de g.

Exemple 4.1.1. *Considérons l'espace $\mathbb{K}^m$ de dimension m. Cette espace est un $\mathbb{K}\mathrm{GL}_m$-module en vertu d'un isomorphisme entre $\mathbb{K}^m$ et l'espace des vecteurs colonnes d'ordre m avec l'action suivante*

$$g \cdot \kappa := g[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_m]^{\mathsf{T}}$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_m$ et $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{K}^m$.

Soit

$$\kappa_\mu = \left(0,\dots,0,\underbrace{1_{\mathbb{K}}}_{\mu\text{-ième coordonnée}},0,\dots,0\right) \in \mathbb{K}^m.$$

Il est évident que $\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$ *forment une base de* $\mathbb{K}^m$. *Si* $g_{\mu\nu}$ *est le coefficient à l'intersection de* μ*-ième ligne et de la* ν*-ième colonne de la matrice* g*, alors*

$$g \cdot \kappa_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} r_{\mu\nu}(g)\kappa_\mu = g_{1\nu}\kappa_1 + g_{2\nu}\kappa_2 + \cdots + g_{m\nu}\kappa_m$$

Dans ce cas, la matrice $\mathcal{M}_g$ *associé à l'action de* g *sur* $\mathbb{K}^m$ *est simplement égale à la matrice* g. *Donc, les coefficients de* $\mathcal{M}_g$ *sont des polynômes en les coefficients de la matrice* g. *D'où,* $\mathbb{K}^m$ *est bien une représentation polynomiale de* GL_m.

Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension m, alors l'espace $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ des transformations linéaires inversibles de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est isomorphe à GL_m. Donc, il est sensé de parler de représentations polynomiales de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Cette approche met en évidence le fait que certaines structures algébriques classiques sont des représentations polynomiales par construction.

Exemple 4.1.2. *Soit la fonction*

$$\rho : \mathrm{GL}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}_4$$

telle que

$$\rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} aa & ab & ba & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ cc & cd & dc & dd \end{bmatrix}$$

On voit que cette application définie une représentation polynomiale en effectuant le *calcul matriciel élémentaire qui montre que*

$$\rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\rho\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right).$$

On peut traduire ce morphisme de groupes en termes de transformations linéaires. Soit $\mathcal{V}$ *un espace vectoriel de dimension* 2 *avec une base* $B = \{e_1, e_2\}$. *Alors,* $\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{GL}_2$. *D'autre part,* $\mathcal{V}^{\otimes 2} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ *est un espace vectoriel de dimension* 4, *puisque l'ensemble*

$$\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$$

est une base. Si T *est une transformation linéaire dans* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$, *alors*

$$T^{\otimes 2}(v \otimes w) = T(v) \otimes T(w)$$

est une transformation linéaire dans $\mathrm{GL}(\mathcal{V}^{\otimes 2})$. *Supposons que*

$$M_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

où M_T *est la matrice associée à* T *pour une base donnée. Alors,*

$$M_{T^{\otimes 2}} = \begin{bmatrix} aa & ab & ba & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ cc & cd & dc & dd \end{bmatrix}$$

Donc, ρ *est équivalent au morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{GL}(\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V}^{\otimes 2}) \\ T &\longmapsto T^{\otimes 2} \end{aligned}$$

et $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ est une représentation polynomiale de $\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{GL}_2$. *En général, si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension m, alors la composante homogène de degré n de l'algèbre tensoriel $\mathcal{V}^{\otimes n}$ est une représentation polynomiale de* $\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{GL}_m$.

Les morphismes de GL_m-modules polynomiaux sont simplement des morphismes de $\mathbb{K}\mathrm{GL}_m$-modules. Il est necessaire de remarquer que les sous-modules ainsi que les sommes directes de GL_m-modules polynomiaux sont également des GL_m-modules polynomiaux. Naturellement, on veut décomposer les GL_m-modules polynomiaux en sous-modules polynomiaux simples. Nous verrons une façon les construire après avoir introduit la notion crucial de caractères formels.

4.2 Caractères formels

Lors du survol de la théorie des représentations des groupes finis présenté au chapitre 3, il a été mentionné que le caractère $\chi_{\mathcal{W}} : G \to \mathbb{C}$ associé à une représentation $\mathcal{W}$ de G contient proprement l'information nécessaire à l'étude de celle-ci. On insinue que deux représentations sont isomorphes si elles possèdent le même caractère. Un résultat similaire existe pour les représentations polynomiales.

Pour des raisons topologiques, il est suffisant de ne calculer le caractère formel d'une représentation polynomiale que sur des matrices diagonales. Ceci est principalement dû au fait que l'ensemble des matrices diagonales est dense dans l'ensemble des matrices. Il est donc possible d'approximer toute matrice par une matrice diagonale. On peut donc définir le caractère formel d'une représentation polynomiale en considérant la matrice diagonale ayant des 0 à toutes les entrées sauf sur la diagonale principale dont les coefficients sont des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$D = D(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$$

Le ***caractère formel*** d'une représentation polynomiale $(\mathcal{W}, \theta)$ est défini par

$$\Phi_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) := \mathrm{tr}(\theta(D(\mathbf{x}))).$$

Comme θ est un morphisme de groupes, il est clair que

$$\theta(P^{-1}DP) = \theta(P^{-1})\theta(D)\theta(P) = \theta(P)^{-1}\theta(D)\theta(P).$$

Il est bien connu que la fonction trace est invariante par conjugaison de matrices. Donc,

$$\mathrm{tr}\left(\theta(D)\right) = \mathrm{tr}\left(\theta(P)^{-1}\theta(D)\theta(P)\right)$$

Or, la conjugaison de $\theta(D)$ par $\theta(P)$ est équivalent à une permutation des variables sur la diagonale de $\theta(D)$. Autrement dit, calculer la trace de $\theta(P)^{-1}\theta(D)\theta(P)$ consiste à calculer une permutation des variables dans le polynôme $\mathrm{tr}\left(\theta(D)\right)$. Dans ce cas, l'égalité ci-haut signifie que le caractère formel $\Phi_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$ associé à une représentation polynomiale $\mathcal{W}$ est une fonction symétrique en $\mathbf{x}$.

Exemple 4.2.1. *Soit $(\mathcal{W}, \tilde{\rho})$ la représentation polynomiale introduite dans l'exemple 4.1.1. On rappelle que*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}: \ \mathrm{GL}_m &\longrightarrow \mathrm{GL}_M \\ g &\longmapsto \mathcal{M}_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes tel que les coefficients de $\mathcal{M}_g$ sont des polynômes en les *coefficients de g. Dans ce cas particulier, $M = m$ et les coefficients de $\mathcal{M}_g$ sont exactement les mêmes que ceux de la matrice g. On veut calculer le caractère formel de cette représentation.*

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{x})(\kappa_\nu) &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_{\mathbb{K}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_\nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (0, \ldots, 0, x_\nu, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

En effectuant ce calcul pour tout $\nu \in \underline{m}$, on obtient

$$\tilde{\rho}(D(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$$

Le caractère formel de $(\mathcal{W}, \tilde{\rho})$ est donc égale à

$$\mathrm{tr}(\tilde{\rho}(D(\boldsymbol{x}))) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m = h_1(\boldsymbol{x})$$

où h_1 est la première fonction symétrique homogène.

Tout comme le caractère $\chi_{\mathcal{W}} : \mathrm{GL}_m \longrightarrow \mathbb{K}$ associé à une représentation linéaire, le caractère formel se révèle très utile, puisque deux représentations polynomiales sont équivalentes si et seulement si elles possèdent le même caractère formel. De plus, les deux notions sont remarquablement reliées par le fait que si $\mathcal{W}$ est une représentation linéaire de $\mathbb{K}\mathrm{GL}_m$ qui est aussi une représentation polynomiale de GL_m, alors, pour tout $g \in \mathrm{GL}_m$, on a l'égalité suivante :

$$\chi_{\mathcal{W}}(g) = \Phi_{\mathcal{W}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de g.

4.3 Représentations polynomiales irréductibles de GL_m

L'objectif de cette section est de présenter une façon de construire les représentations polynomiales irréductibles de GL_m. On sait qu'elles sont nécessairement homogène d'un certain degré n. Tout comme pour les représentations linéaires de $\mathfrak{S}_n$, chaque classe d'isomorphisme de GL_m-modules polynomiaux simples correspond à un partage de n en au plus m parts. Autrement dit, toute représentation polynomiale irréductible de GL_m est isomorphe à un GL_m-module polynomial simple paramétré par un diagramme de Ferrers à n cases ayant au plus m lignes. Bien que Schur ait résolu le problème dans sa thèse en 1901, le cas où $m < n$ ne sera pas traité. L'approche prisée dans la rédaction de cette section est largement inspirée de Fulton dans (Fulton, 1997).

Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-module de dimension finie. En posant

$$\begin{aligned} (\tau_1 + \tau_2)(i,j) &:= \tau_1(i,j) + \tau_2(i,j) \\ (k\tau)(i,j) &:= k\tau(i,j), \end{aligned}$$

on définit un $\mathbb{K}$-module pour tout diagramme de Ferrers λ à n cases

$$V^{\times\lambda} := \{v_\tau \mid \tau : \lambda \longrightarrow V\}$$

avec les opérations

$$\begin{aligned} v_{\tau_1} + v_{\tau_2} &= v_{\tau_1+\tau_2} \\ kv_{\tau} &= v_{k\tau} \end{aligned}$$

On peut voir les éléments de $V^{\times\lambda}$ comme des suites de n éléments de V en spécifiant une bijection

$$\underline{n} \xrightarrow{\sim} \lambda.$$

On produit alors une bijection entre $V^{\underline{n}} = \{f : \underline{n} \longrightarrow V \mid f \text{ fonction}\}$ et $V^{\times\lambda}$ en composant

$$\underline{n} \xrightarrow{\sim} \lambda \xrightarrow{\tau} V$$

Faisons correspondre un élément i dans $\underline{n}$ à la i^e case de λ quand on lit les cases du bas vers le haut en parcourant les colonnes de gauche à droite. À titre d'illustration, supposons que $n = 7$, et que $\lambda = (3, 3, 1)$. Si

$$(x, y, c, b, a, x, z)$$

est un élément de $V^{\underline{n}}$, alors l'élément v_{τ} de $V^{\times\lambda}$ qui lui est associé correspond au tableau τ de la figure 4.1.

$$\tau = \begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-1} \text{c} \\ \hline \text{y} & \text{a} & \text{z} \\ \hline \text{x} & \text{b} & \text{x} \\ \hline \end{array}$$

Figure 4.1: Un élément de $V^{\times\lambda}$ où $\lambda = (3, 3, 1)$.

De même, on dénote par $V^{\otimes\lambda}$ le produit tensoriel de n copies de V pour sous-entendre cette correspondance.

Pour construire les GL_m-modules polynomiaux simples, supposons que

$$B = (v_1, v_2, \ldots, v_M)$$

est une base ordonnée de V. Si $I_k = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$ est une suite strictement croissante d'éléments de B, on pose

$$v_{I_k} := v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}.$$

Le ***produit extérieur*** $\wedge$ est défini de tel sorte que, si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des éléments de V, alors

$$x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge v_k$$

pour tout σ dans $\mathfrak{S}_k$.

On fait intervenir le concept intermédiaire d'un tableau quasi-semi-standard. Un tableau $\tau : \lambda \longrightarrow B$ est dit ***quasi-semi-standard*** si $\tau(i, j_1) < \tau(i, j_2)$ pour tout i lorsque $j_1 < j_2$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\cline{1-1}
v_7 \\
\hline
v_5 & v_7 & v_2 \\
\hline
v_4 & v_1 & v_1 \\
\hline
\end{array}$$

Figure 4.2: Tableau quasi-semi-standard de forme (2,2,1).

Pour tout tableau τ quasi-semi-standard, on définit

$$\wedge v_\tau := v_{I_1} \otimes v_{I_2} \otimes \cdots \otimes v_{I_{\ell(\mu)}}$$

avec $I_k = (\tau(k,1), \tau(k,2), \ldots, \tau(k, \mu_k))$ où μ est le diagramme conjugué de λ. Si

$$\bigwedge\nolimits^{\mu} V = \langle \{\wedge v_\tau \mid \tau \text{ quasi-semi-standard}\} \rangle,$$

on remarque sans difficulté que $\bigwedge^{\mu} V = \bigotimes_{i=1}^{\ell(\mu)} \bigwedge^{\mu_i} V$.

Il est possible d'obtenir un tableau semi-standard à partir de n'importe quel tableau quasi-semi-standard en appliquant des opérations adéquates sur ses colonnes. Un k-échange sur la i-ième colonne d'un élément de $\wedge v_{\tau}$ est l'application

$$\epsilon_{ik} : \bigwedge^{\mu} V \longrightarrow \bigwedge^{\mu} V$$

qui consiste à choisir k cases superposées dans la $(i+1)$-ième colonne, et à interchanger les valeurs de ces cases avec celles des k cases voisines de la i-ième colonne en préservant l'ordre vertical.

$$\begin{array}{|c|cc} \hline v_6 & \multicolumn{1}{|c}{} & \\ \hline v_3 & \multicolumn{1}{|c|}{v_7} & \multicolumn{1}{c|}{v_2} \\ \hline v_2 & \multicolumn{1}{|c|}{v_3} & \multicolumn{1}{c|}{v_1} \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|cc} \hline v_6 & \multicolumn{1}{|c}{} & \\ \hline v_3 & \multicolumn{1}{|c|}{v_2} & \multicolumn{1}{c|}{v_7} \\ \hline v_2 & \multicolumn{1}{|c|}{v_1} & \multicolumn{1}{c|}{v_3} \\ \hline \end{array}$$

Figure 4.3: Un 2-échange sur la 2-ième colonne.

On dit que $\wedge v_{\tau}$ est équivalent à $\wedge v_{\tau'}$, et on note $\wedge v_{\tau} \equiv \wedge v_{\tau'}$, si

$$\wedge v_{\tau} = \wedge \epsilon_{ik}(v_{\tau'})$$

L'espace obtenu par le quotient de $\bigwedge^{\mu} V$ par la relation d'équivalence $\equiv$ est noté V_{λ}, soit

$$V_{\lambda} := \bigwedge^{\mu} V / \equiv$$

Cette relation signifie que

$$V_{\lambda} = \langle \{ \wedge v_{\tau} \mid \tau \text{ semi-standard} \} \rangle,$$

car les classes d'isomorphisme de V_{λ} correspondent aux tableaux semi-standards. Un élément de V_λ est noté $\mathbf{v}_T$. Il est clair que tout morphisme de $\mathbb{K}$-module

$$f : V \longrightarrow F$$

induit un morphisme

$$f_\lambda : V_\lambda \longrightarrow F_\lambda.$$

On obtient l'image d'un élément $\mathbf{v}_T$ de V_λ en appliquant le morphisme f à chacun de ses facteurs. En particulier, tout endomorphisme de V induit un endomorphisme de V_λ. Cela implique que $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_\lambda)$ agit sur V_λ

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_\lambda) \times V_\lambda &\longrightarrow V_\lambda \\ (f_\lambda, \mathbf{v}_T) &\longmapsto f_\lambda(\mathbf{v}_T) \end{aligned}$$

Ceci permet de définir une action de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ sur V_λ

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \times V_\lambda &\longrightarrow V_\lambda \\ (f, \mathbf{v}_T) &\longmapsto f \cdot \mathbf{v}_T := f_\lambda(\mathbf{v}_T). \end{aligned}$$

Si V est de dimension m, alors $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ est isomorphe à l'espace des matrices carrées d'ordre m. Donc, le sous-groupe GL_m des matrices inversibles d'ordre m agit sur V_λ. En d'autres termes, V_λ est un GL_m-module. Il s'agit d'un GL_m-module polynomial simple. En fait, toutes les représentations polynomiales irréductibles de GL_m sont isomorphes à un V_λ pour un certain partage λ de n ayant au plus m parts. Outre cela, le caractère de V_λ est la fonction de Schur provenant de λ,

$$\Phi_{V_\lambda} = s_\lambda.$$

Remarque 4.3.1. *Derrière la construction précédente des* GL_m*-modules polynomiaux simples se cache une situation universelle.*

Soit $u : V^{\times\lambda} \longrightarrow \bigwedge^{\mu} V$ *définit par*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{I_1} \otimes x_{I_2} \otimes \cdots \otimes x_{I_k}$$

La cardinalité de I_j *est* μ_j. *On obtient les* I_j *en réordonnant les éléments situés dans* j*-ième colonne du tableau* τ *de forme* λ *en ordre croissant. Par définition de* $\bigwedge^{\mu} V$, $u(v_\tau) = 0$ *lorsque* $\tau(i,j) = \tau(i,k)$ *pour un* i *quelconque. Considérons des morphismes* φ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) φ *est* $\mathbb{K}$*-multilinéaire,*

(2) φ *est anti-symétrique sur les entrées des colonnes de* λ,

(3) *Pour tout* v_τ *dans* $V^{\times\lambda}$, $\varphi(v_\tau) = \sum \varphi(v_{\tau'})$, *où on somme sur tous les* $v_{\tau'}$ *obtenus en effectuant un* k*-échange sur* v_τ.

On remarque que (V_λ, u) *est une flèche* $\mathbb{1}_{\mathbf{Mod}(\mathbb{K})}$*-universelle pour* $V^{\times\lambda}$,

dans $\mathbf{Mod}(\mathbb{K})$

$$\begin{tikzcd} V^{\times\lambda} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\circlearrowleft"] & V_\lambda \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire, si F *est un* $\mathbb{K}$*-module quelconque et* $\varphi : V^{\times\lambda} \longrightarrow F$ *est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-module satisfaisant les 3 propriétés, alors il existe un unique morphisme de* $\mathbb{K}$*-module* $\bar{\varphi} : V_\lambda \longrightarrow F$ *tel que* $\bar{\varphi} \circ u = \varphi$. *En effet, lorsqu'on considère des morphismes* φ $\mathbb{K}$*-multilinéaires, on sait que* $(V^{\otimes\lambda}, u)$ *est une flèche universelle pour* $V^{\times\lambda}$ *par rapport au foncteur* $\mathbb{1}_{\mathbf{Mod}(\mathbb{K})}$ *où* $u' : V^{\times\lambda} \longrightarrow V^{\otimes\lambda}$ *est défini par*

$$u'(e_1, \ldots, e_n) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n,$$

puisque tout morphisme $\mathbb{K}$*-multilinéaire de* $\mathbb{K}$*-module* $f : V^{\underline{n}} \longrightarrow N$ *induit un morphisme* *de* $\mathbb{K}$*-module* $\bar{f} : V^{\otimes n} \longrightarrow N$*. Donc,* $(\bigwedge^{\mu} V, u)$ *l'est aussi pour des morphismes* φ *satisfaisant aux propriétés (1) et (2). Comme la propriété (3) est essentiellement un reformulation de la relation d'équivalence* $\equiv$*, cette situation universelle est bien résolu par* V_λ *pour des morphismes satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3).*

Exemple 4.3.1. *Suite à la remarque précédente, on peut voir que les deux partages extrèmes définissent des structures algébriques classiques.*

En effet, lorsque $\lambda = (n)$*, étant donné que chaque colonne ne contient qu'une seule case, la propriété (2) d'être anti-symétrique sur les colonnes est insignifiante. Par ailleurs, la propriété (3) implique que toutes les entrées d'un élément de* $V_{(n)}$ *commutent. Les tableaux semi-standards de forme* λ *correspondent aux éléments*

$$v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$$

d'une base de $V_{(n)}$ *où* $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$*.Comme toutes les composantes dans les tenseurs commutent, l'espace* $V_{(n)}$ *s'identifie à la* n*-ième composante homogène de l'algèbre symétrique* $\mathcal{S}^n(\mathcal{V})$*.*

À l'opposé, lorsque $\lambda = (1^n)$*, la propriété (3), qui nécessite que le diagramme de Ferrers considéré contienne un minimum de deux colonnes, ne s'applique pas. Quant à la propriété (2), elle signifie que les éléments d'une base de* $V_{(1^n)}$ *sont de la forme*

$$v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$$

où $\wedge$ *est le produit extérieur, car ils correspondent aux tableaux semi-standards de forme* (1^n)*. On peut conclure que* $V_{(1^n)}$ *est égal à la composante homogène de degré* n *de l'algèbre extérieure* $\bigwedge^n \mathcal{V}$*.*

4.4 Dualité de Schur-Weyl

Les représentations du groupe général linéaire GL_m sont intimement reliées aux représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Par l'intermédiaire d'une construction plus générale, il est possible de voyager entre ces deux univers en ce sens que leurs morceaux indécomposables sont en correspondance. Bien que l'oeuvre classique de Hermann Weyl *The Classical Groups* (Weyl, 1946) exposa ce résultat au grand jour, Issai Schur fut le premier à la développer. Sans discrimination, on célèbre ces deux figures mythiques dans la dénomination du concept. Il s'agit de la dualité de Schur-Weyl.

Concrètement, étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ et une base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, on construit un $\mathfrak{S}_n$-module à droite

$$\mathcal{V}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}}_{\text{n facteurs}}$$

en posant

$$(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) \cdot \sigma = (v_{i_{\sigma(1)}} \otimes v_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\sigma(n)}})$$

pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$. Autrement dit, $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathcal{V}^{\otimes n}$ par permutation des composantes dans les tenseurs.

D'autre part, on définit également une action à gauche de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. Toute transformation linéaire T de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ induit une transformation linéaire $\mathcal{W}(T)$ de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ définie par

$$\mathcal{W}(T)\big(w \otimes (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n})\big) := w \otimes \big(T(v_{i_1}) \otimes T(v_{i_2}) \otimes \cdots \otimes T(v_{i_2})\big)$$

On peut donc affirmer que $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ est un $(\mathrm{GL}(\mathcal{V}), \mathfrak{S}_n)$-bimodule. De plus, on remarque aisément que ces actions commutent. Pour tout $\mathfrak{S}_n$-module à gauche $\mathcal{W}$, on construit un nouvel espace

$$\mathcal{W}(\mathcal{V}) := \mathcal{W} \otimes_{\mathbb{K}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}.$$

où $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ désigne l'algèbre du groupe symétrique. Comme $\mathcal{W}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module à gauche et $\mathcal{V}^{\otimes n}$ est un $(\mathrm{GL}(\mathcal{V}), \mathfrak{S}_n)$-bimodule, il est garanti que $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ est un $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module à gauche.

L'application qui associe un $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ à tout $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{W}$ est fonctorielle. Par ailleurs, on remarque directement deux résultats importants :

1. $(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)(\mathcal{V}) = \mathcal{W}_1(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{W}_2(\mathcal{V})$

2. $\mathcal{W}_1 \simeq \mathcal{W}_2 \implies \mathcal{W}_1(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{W}_2(\mathcal{V})$.

Le premier résultat découle immédiatement des propriétés du produit tensoriel sur $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ dans la construction de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$, alors que le deuxième résultat provient du fait que l'action de $\mathfrak{S}_n$ commute avec l'action de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. La fonctorialité de l'application ainsi que les deux résultats ci-haut implique qu'il existe une correspondance entre les $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-modules polynomiaux et les $\mathfrak{S}_n$-modules.

De plus, sachant que

$$\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \mid v_{i_j} \in B\}$$

forme une base de $\mathcal{V}^{\otimes n}$, on déduit que les éléments d'une base de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ sont de la forme

$$w \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$$

où w appartient à une base de $\mathcal{W}$. Les propriétés du produit tensoriel sur $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ produisent des relations sur les éléments de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$.

Exemple 4.4.1. *Fixons $n = 3$ et supposons que $\mathcal{W}$ est la représentation alternée $\mathbb{C}^{\mathrm{alt}}$*

de $\mathfrak{S}_3$ par $\mathbb{C}$ avec l'action par le signe

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\sigma, z) & \longmapsto & \operatorname{sgn}(\sigma) z. \end{array}$$

On rappelle que $\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}$ est le $\mathfrak{S}_3$-module simple correspondant au partage (3) du chiffre 3. Alors,

$$\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}(\mathcal{V}) = \mathbb{C}^{\mathbf{alt}} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_3} (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}).$$

Lorsqu'on fait agir une permutation σ dans $\mathfrak{S}_3$ sur un élément

$$\omega = z \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}$$

tiré d'une base de $\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}(\mathcal{V})$, on doit avoir

$$\begin{array}{rrcl} & (\sigma \cdot z) \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} & = & z \otimes \sigma \cdot (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}) \\ \Longleftrightarrow & \operatorname{sgn}(\sigma) z \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} & = & z \otimes (v_{i_{\sigma(1)}} \otimes v_{i_{\sigma(2)}} \otimes v_{i_{\sigma(3)}}) \end{array}$$

Autrement dit, faire agir une transposition sur ω à pour effet de changer son signe. Cette propriété démontre que

$$\mathbb{C}^{\mathbf{alt}}(\mathcal{V}) \simeq \bigwedge^3 \mathcal{V}.$$

où $\bigwedge^3 \mathcal{V}$ est le $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial simple associé au partage (3) de chiffre 3, soit la composante homogène de degré 3 de l'algèbre extérieure $\bigwedge(\mathcal{V})$.

Supposons maintenant que $\mathcal{W}$ est la représentation $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}$ de $\mathfrak{S}_3$ par $\mathbb{C}$ avec l'action triviale

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\sigma, z) & \longmapsto & z, \end{array}$$

alors

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}(\mathcal{V}) = \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_3} (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}).$$

L'action d'une permutation σ de $\mathfrak{S}_3$ induit que

$$\begin{aligned}(\sigma\cdot z)\otimes v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes v_{i_3} &= z\otimes\sigma\cdot(v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes v_{i_3})\\ \iff z\otimes v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes v_{i_3} &= z\otimes(v_{i_{\sigma(1)}}\otimes v_{i_{\sigma(2)}}\otimes v_{i_{\sigma(3)}})\end{aligned}$$

Cela signifie que permuter les composantes des tenseurs de $\mathcal{V}^{\otimes n}$ dans un générateur de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ n'a aucun effet sur celui-ci. Il y a donc un isomorphisme évident

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}(\mathcal{V})\simeq\mathcal{S}^3(\mathcal{V})$$

où $\mathcal{S}^3(\mathcal{V})$ est la composante homogène de degré 3 de l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathcal{V})$. En outre, $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_3}$ et $\mathcal{S}^3(\mathcal{V})$ sont respectivement le $\mathfrak{S}_3$-module simple et le $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module simple associés au partage (3) de 3

Finalement, si on suppose que $\mathcal{W}$ est la représentation $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$ de $\mathfrak{S}_3$ par un hyperplan de $\mathbb{C}^3$, on vérifie que

$$\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}(\mathcal{V})\simeq\bigwedge\nolimits^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$$

où

$$\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}(\mathcal{V})=\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_3}\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$$

est le $\mathfrak{S}_3$-module simple associé au partage $(2,1)$ et $\bigwedge^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ est le $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial simple également associé à ce dernier. L'isomorphisme entre ces deux structures est donné par la bijection

$$\begin{aligned}(z_1-z_2)\otimes(v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes v_{i_3}) &\longmapsto (v_{i_1}\wedge v_{i_2})\otimes v_{i_3}\\ (z_1-z_3)\otimes(v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes v_{i_3}) &\longmapsto (v_{i_1}\wedge v_{i_3})\otimes v_{i_2}\end{aligned}$$

où $\{z_1-z_2,z_1-z_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbf{geo}}$.

En général, le théorème de Schur énonce que lorsque $\mathcal{W}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module simple, $\mathcal{W}(\mathcal{V})$

est isomorphe à un $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial simple V_λ, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{V}) \simeq V_\lambda.$$

En outre, la transformée de Frobenius du caractère de $\mathcal{S}_\lambda$ est $\mathrm{frob}(\mathcal{S}_\lambda) = s_\lambda$, ce qui correspond au caractère formel de $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{V})$. Donc, la correspondance entre la catégorie des $\mathfrak{S}_n$-modules et la catégorie des GL_m-modules polynomiaux est déterminée par la fonctorialité de la construction d'un GL_m-module polynomial $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ à partir d'un $\mathfrak{S}_n$-module $\mathcal{W}$, et par le fait que cette construction préserve les sommes directes et les isomorphismes. En termes de la théorie des catégories, il est démontré que le foncteur $\mathcal{W}$ de la catégorie des $\mathfrak{S}_n$-modules vers la catégorie des GL_m-modules polynomiaux possède un adjoint à droite. Le passage à la transformée de Frobenius du caractère de $\mathcal{W}$ permet d'obtenir le caractère de $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. En bref, si $\mathcal{W}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module, alors on a vu que

$$\mathcal{W} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda \mathcal{S}_\lambda.$$

On peut lui associer le GL_m-module $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. Par la dualité de Schur-Weyl, lorsqu'on décompose $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ en sommes directes d'irréductibles, les multiplicités des GL_m-modules simples v^λ sont égales aux multiplicités de $\mathcal{S}_\lambda$ dans la décomposition en irréductibles de $\mathcal{W}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{W}(\mathcal{V}) \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda V_\lambda.$$

4.5 Restriction au groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$

Soit $(\mathcal{W}, \theta)$ une représentation polynomiale de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ avec

$$\theta : \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{W})\,.$$

Si $\mathcal{V}$ est de dimension m et $\mathcal{W}$ est de dimension r, alors

$$\theta : \mathrm{GL}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_r\,.$$

GL_m est le groupe des matrices inversibles de format $m \times m$. On sait que les matrices de permutations sont inversibles. Le sous-groupe de GL_m des matrices de permutations est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ des permutations d'un ensemble à m éléments. Ceci permet de considérer la restriction d'un GL_m-module polynomial à un $\mathfrak{S}_m$-module.

Pour ce faire, on se sert du caractère formel $\Phi_{\mathcal{W}}$ d'une représentation polynomiale $\mathcal{W}$ de GL_m. On sait que $\Phi_{\mathcal{W}}$ est une fonction symétrique des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Pour connaître $\mathcal{W}$ en tant que $\mathfrak{S}_m$-module, il est suffisant de connaître son caractère $\chi_{\mathcal{W}}$. Or, il a été mentionné que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres d'une matrice g, alors

$$\Phi_{\mathcal{W}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \chi_{\mathcal{W}}(g).$$

Donc, on obtient une description de $\mathcal{W}$ en tant que $\mathfrak{S}_m$-module à condition de connaître les valeurs propres des matrices de permutations. C'est ainsi qu'on définit la restriction de GL_m à $\mathfrak{S}_m$ d'une représentation polynomiale.

Supposons que M_σ est la matrice de permutation correspondant à la permutation σ dans $\mathfrak{S}_m$. On sait que les matrices de permutation sont diagonalisables avec les valeurs propres sur la diagonale sauf qu'il s'avère difficile de le faire concrètement. Pour contourner cet obstacle, on utilise le fait que le caractère formel est une fonction symétrique. En particulier, le caractère formel de $\mathcal{W}$ peut être écrit en terme des fonctions symétriques somme de puissances. Alors,

$$\chi_{\mathcal{W}}(\sigma) = \Phi_{\mathcal{W}}(\theta(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_m))) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k p_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de M_σ. Pour calculer $\chi_{\mathcal{W}}(\sigma)$, il faut donc calculer

$$p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_m^k$$

À priori, on ne connait pas les valeurs propres de M_σ. Par contre, on sait que

$$\mathrm{tr}(M_\sigma^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_m^k.$$

Or, la trace de M_σ^k est le nombre $\mathrm{fix}(\sigma^k)$ de points fixes de la permutation σ^k. On remarque que

$$\mathrm{fix}(\sigma^k) = \sum_{\mu_i | k} \mu_i$$

où les μ_i sont les longueurs des cycles dans la décomposition cyclique de σ. Donc,

$$p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_m^k = \sum_{\mu_i | k} \mu_i. \tag{4.1}$$

On obtient donc le caractère $\chi_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ en substituant p_k par $\mathrm{fix}(\sigma^k)$ dans $\Phi_{\mathcal{W}}$.

CHAPITRE V

THÉORIE DES ESPÈCES

5.1 Espèces de structures

Depuis l'origine de la conscience, on peut s'imaginer que les vivants sont régulièrement confrontés d'une manière ou d'une autre au problème cérébral constistant à dénombrer les objets ou les phénomènes qui interviennent dans leur environnement. Intuitivement, l'objectif de la jeune discipline que constitue la combinatoire énumérative peut être percu comme étant la formalisation des procédés intellectuels visant à compter efficacement les éléments d'un ensemble quelconque possiblement infini. Le désir obsessif d'énumérer, par exemple, les différents constituants des structures algébriques a forcé un nombre considérable de mathématiciens contemporains à orienter leur recherche vers la branche mathématique du dénombrement. C'est ainsi qu'en 1980, André Joyal présente à la communauté scientifique son ingénieuse notion d'espèce de structures accompagnée de series formelles aux coefficients révélateurs dans l'article «Une théorie combinatoire des séries formelles». En marchant sur les traces du fondateur, ce chapitre offre une brève introduction à la théorie des espèces et sa progéniture.

Une ***espèce de structures*** $\mathbf{F}$ est un foncteur

$$\mathbf{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

où $\mathbb{B}$ désigne la catégorie où les objets sont des ensembles finis et les flèches sont des bijections. Si A est un ensemble fini, alors $\mathbf{F}[A]$ est l'ensemble de toutes les structures d'espèce $\mathbf{F}$ sur A. On dit de façon équivalente que les éléments de $\mathbf{F}[A]$ sont des $\mathbf{F}$-structures sur A. On peut percevoir une espèce $\mathbf{F}$ comme un mécanisme permettant de construire des $\mathbf{F}$-structures à partir d'une matière A. Aussi, si $f : A \to B$ est une bijection, alors $\mathbf{F}[f] : \mathbf{F}[A] \to \mathbf{F}[B]$ est une bijection qui associe à toute $\mathbf{F}$-structure sur A une unique $\mathbf{F}$-structure sur B en remplaçant les éléments de A par ceux de B suivant la bijection f. On dit que $\mathbf{F}[f]$ est le transport de $\mathbf{F}$-structure par rapport à f.

Exemple 5.1.1. *Soit une application $\mathcal{L}$, qui associe à tout ensemble A, l'ensemble $\mathcal{L}[A]$ de toutes les listes ordonnées sans répétition de tous les éléments de A. Un élément de $\mathcal{L}[A]$ est entièrement déterminé par la donnée d'une ordre total sur les éléments de A. Par exemple, si*

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

il est équivalent d'écrire la liste ordonnée

$$(d, e, a, c, b)$$

et d'écrire l'ordre total

$$d > e > a > c > b.$$

On vérifie facilement que l'application $\mathcal{L}$ est un foncteur en démontrant qu'elle respecte les propriétés fonctorielles. On peut donc affirmer que

$$\mathcal{L} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

est une espèce de structures, soit l'espèce des ordres totaux. Une structure d'espèce $\mathcal{L}$ sur A est un ordre total sur les éléments de A.

Pour toute espèce de structures $\mathbf{F}$ et pour tout ensemble A, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_A$

agit sur l'ensemble des $\mathbf{F}$-structures sur A. Cette action de groupe est défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_A \times \mathbf{F}[A] &\longrightarrow \mathbf{F}[A] \\ (\sigma, t) &\longmapsto \sigma \cdot t := \mathbf{F}[\sigma](t) \end{aligned}$$

où $\mathbf{F}[\sigma]$ est le transport de $\mathbf{F}$-structures sur A selon la permutation σ. En résumé, une espèce de structures $\mathbf{F}$ est équivalente à la donnée d'une famille d'actions de $\mathfrak{S}_A$

$$\{\mathfrak{S}_A \times \mathbf{F}[A] \to \mathbf{F}[A]\}_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}}.$$

Exemple 5.1.2. *Si (d, e, a, c, b) est une $\mathcal{L}$-structure sur $A = \{a, b, c, d, e\}$ et*

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & e & a & d & b \end{pmatrix}$$

est une permutation dans $\mathfrak{S}_A$, alors

$$\sigma \cdot (d, e, a, c, b) = \mathcal{L}[\sigma](d, e, a, c, b) = (d, b, c, a, e)$$

5.2 Séries génératrices

Il existe plusieurs séries formelles associées aux espèces de structures. En unifiant le traitement des problèmes de dénombrement et la notion d'espèce de structures, elles simplifient l'énumération de certaines statistiques sur les espèces. En supposant que A est constitué de n éléments, on note f_n le nombre de $\mathbf{F}$-structures sur A. Il est clair que le nombre d'éléments de $\mathbf{F}[A]$ ne dépend que de la cardinalité de A. On peut alors considérer l'ensemble $\underline{n}$ sans compromettre la généralité de l'approche. On définit la ***série génératrice exponentielle*** associée à $\mathbf{F}$ par

$$\mathbf{F}(\xi) := \sum_{n \geq 0} f_n \frac{\xi^n}{n!}.$$

Exemple 5.2.1. *Considérons l'espèce $\mathcal{L}$ des ordres totaux qui associe à tout ensemble A l'ensemble de tous les ordres totaux des éléments de A. Si la cardinalité d'un ensemble A est n, alors*

$$f_n = \left|\mathcal{L}[A]\right| = \left|\mathcal{L}[\underline{n}]\right| = n!,$$

puisque, pour construire une telle liste, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le deuxième élément, $n-2$ choix pour le troisième élément, etc. Donc, la série génératrice exponentielle de $\mathcal{L}$ est

$$\mathcal{L}(\xi) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{\xi^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n!\frac{\xi^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \xi^n = \frac{1}{1-\xi}$$

Comme une espèce de structures est équivalente à la donnée d'une famille d'actions de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{F}[\underline{n}]$ telle que mentionné dans la section précédente, il est possible de définir une relation d'équivalence sur $\mathbf{F}[\underline{n}]$. On dira que deux $\mathbf{F}$-structures t et s sont équivalente, notée $t \sim s$, s'il existe une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma \cdot t = s$. Dans ce cas, on dit que t et s ont le même type d'isomorphie. Un type d'isomorphie signifie une classe d'équivalence de $\mathbf{F}[\underline{n}]$ sous la relation $\sim$. On note $\mathbf{F}[\underline{n}]/\sim$ l'ensemble des types d'isomorphie de $\mathbf{F}[\underline{n}]$. On fait encore appel aux séries génératrices pour englober l'énumération de types d'isomorphie en une simple formule. La ***série génératrice des types d'isomorphie*** associée à une espèce de structure $\mathbf{F}$ est définie par

$$\tilde{\mathbf{F}}(\xi) := \sum_{n\geq 0} \tilde{f}_n \xi^n$$

où $\tilde{f}_n$ désigne la cardinalité de $\mathbf{F}[\underline{n}]/\sim$.

Exemple 5.2.2. *Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ les éléments de $\mathcal{L}[\underline{n}]$. Par définition, $\ell_i \sim \ell_j$ s'il existe une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma \cdot \ell_i = \ell_j$. Autrement dit, deux listes dans $\mathcal{L}[\underline{n}]$ sont equivalents si on peut obtenir l'un en permutant l'ordre de l'autre. Or, il est clair que, pour chaque liste, il existe des permutations qui la transporte vers toutes les autres listes. Donc,*

$$\tilde{f}_n = \left|\mathcal{L}[\underline{n}]/\sim\right| = 1.$$

La série génératrice des types d'isomorphie de $\mathcal{L}$ est

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) = \sum_{n\geq 0} \tilde{f}_n \xi^n = \sum_{n\geq 0} \xi^n = \frac{1}{1-\xi}$$

5.3 Opérations sur les espèces de structures

On munit l'ensemble des espèces de structures d'une structure algébrique y en introduisant des opérations internes. Soit $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux espèces de structures et A un ensemble, on définit

(1) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})[A] := \mathbf{F}[A] + \mathbf{G}[A]$

(2) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})[A] := \sum_{B+C=A} \mathbf{F}[B] \times \mathbf{G}[C]$

(3) $(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})[A] := \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \mathbf{F}[\pi] \times \prod_{B\in\pi} \mathbf{G}[B]$ avec $\mathbf{G}[\emptyset] = \emptyset$

(4) $\mathbf{F}'[A] := \mathbf{F}[A + *]$.

où les symboles $+$ et $\sum$ à droite dans les équations signifient l'union disjointe d'ensembles.

Par construction, les opérations sur les espèces sont compatibles avec les opérations sur les séries génératrices introduites dans la section précédente. En effet, pour deux espèces de structures $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$, on peut aisément démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} + \mathbf{G})(\xi) &= \mathbf{F}(\xi) + \mathbf{G}(\xi) \\
(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(\xi) &= \mathbf{F}(\xi)\mathbf{G}(\xi) \\
(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\xi) &= \mathbf{F}(\mathbf{G}(\xi)) \\
\mathbf{F}'(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\mathbf{F}(\xi).
\end{aligned}$$

5.4 Espèces tensorielles

La notion d'espèce tensorielle permet de faire un pont entre l'univers combinatoire des espèces de structures et l'univers algébrique des répresentations du groupe symétrique. Une ***espèce tensorielle*** $\mathcal{F}$ est un foncteur

$$\mathcal{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{V}$$

où $\mathbb{V}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle avec transformations linéaires inversibles. Pour tout objet A dans $\mathbb{B}$, $\mathcal{F}(A)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et, pour toute bijection f dans $\mathbb{B}$, $\mathcal{F}(f)$ est une transformation linéaire inversible.

Exemple 5.4.1. *Soit*

$$\varepsilon : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$$

une application telle que, pour tout ensemble A,

$$\varepsilon[A] := \Big\langle \bigwedge_{a\in A}{}^{n} a \Big\rangle_{\mathbb{K}}$$

où $\bigwedge_{a\in A}{}^{n} a = \underbrace{a \wedge b \wedge \cdots \wedge c}_{n \text{ facteurs}}$*, et, pour toute bijection* φ *,*

$$\varepsilon[\varphi]\Big(\bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\Big) := \bigwedge_{a\in A}{}^{n} \varphi(a)$$

où n est la cardinalité de A. Pour vérifier que ε est une espèce tensorielle, il faut démontrer que

$$\varepsilon[1_A] = 1_{\varepsilon[A]}$$

et que

$$\varepsilon[\psi \circ \varphi] = \varepsilon[\psi] \circ \varepsilon[\varphi].$$

Or, par construction de ε,

$$\varepsilon[1_A](\bigwedge_{a\in A}{}^n a) = \bigwedge_{a\in A}{}^n 1_A(a) = \bigwedge_{a\in A}{}^n a.$$

De même, pour deux bijections $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\psi : B \longrightarrow C$,

$$\varepsilon[\psi\circ\varphi](\bigwedge_{a\in A}{}^n a) = \bigwedge_{a\in A}{}^n (\psi\circ\varphi)(a) = \bigwedge_{a\in A}{}^n \psi(\varphi(a)).$$

D'autre part,

$$\varepsilon[\psi]\circ\varepsilon[\varphi](\bigwedge_{a\in A}{}^n a) = \varepsilon[\psi](\bigwedge_{a\in A}{}^n \varphi(a)) = \bigwedge_{a\in A}{}^n \psi(\varphi(a)).$$

Donc, $\varepsilon[1_A] = 1_{\varepsilon[A]}$ et $\varepsilon[\psi\circ\varphi] = \varepsilon[\psi]\circ\varepsilon[\varphi]$. D'où, ε est une espèce tensorielle.

Il est toujours possible de construire une espèce tensorielle à partir d'une espèce de structures $\mathbf{F}$. Il suffit de linéariser $\mathbf{F}$ en la composant avec le foncteur «espace vectoriel libre» $\mathbf{G}$. On obtient une espèce tensorielle

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\circ\mathbf{F} : \quad & \mathbb{B} \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{B} && \xrightarrow{\mathbf{G}} \mathbb{V} \\ & A \mapsto \mathbf{F}[A] && \mapsto \mathbf{G}[\mathbf{F}[A]] \end{aligned}$$

où $\mathbf{G}[\mathbf{F}[A]]$ est l'espace vectoriel librement engendré par les structures d'espèces $\mathbf{F}$ sur A. On note $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ par $\overline{\mathbf{F}}$. Ainsi,

$$\overline{\mathbf{F}}[A] = \left\{ \sum_{a\in\mathbf{F}[A]} \kappa_a a \,\middle|\, \kappa_a \in \mathbb{K} \right\}.$$

Exemple 5.4.2. *Soit $\mathcal{L}$ l'espèce des ordres totaux. On rappelle que $\mathcal{L}[\underline{n}]$ est l'ensemble des listes de n éléments de $\underline{n}$. Alors, lorsqu'on compose le foncteur $\mathcal{L}$ avec $\mathbf{G}$, on obtient une espèce tensorielle qui produit l'espace vectoriel librement engendré par l'ensemble des $\mathcal{L}$-structures sur $\underline{n}$*

$$\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}] = \left\{ \sum_{\ell\in\mathcal{L}[n]} \kappa_\ell \ell \mid \kappa_\ell \in \mathbb{K} \right\}.$$

Donc, la dimension de $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ est exactement le nombre de $\mathcal{L}$-structures sur $\underline{n}$

$$\dim(\overline{\mathcal{L}}[n]) = n!$$

5.4.1 Séries génératrices et opérations

Pour un espace vectoriel, l'information analogue au nombre d'éléments d'un ensemble est le nombre d'éléments d'une base. La série génératrice exponentielle d'une espèce tensorielle aura donc pour coefficients la dimension de l'espace vectoriel en question. On la définit par

$$\mathcal{F}(\xi) := \sum_{n\geq 0} \dim \mathcal{F}[\underline{n}] \frac{\xi^n}{n!}.$$

Exemple 5.4.3. *On a introduit dans la section précédente l'espèce tensorielle ε. Comme il est clair que*

$$\varepsilon[\underline{n}] = \Big\langle \bigwedge_{a\in\underline{n}}{}^{n} i \Big\rangle_{\mathbb{K}}$$

est de dimension 1 pour tout n, on peut facilement calculer que la série génératrice exponentielle associé à ε est

$$\varepsilon(\xi) = \sum_{n\geq 0} \dim \varepsilon[\underline{n}] \frac{\xi^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{\xi^n}{n!} = \exp(\xi).$$

Exemple 5.4.4. *On a vu que la dimension de $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ est $n!$, soit le nombre de façons d'ordonner n éléments. On peut donc calculer la série génératrice associé à $\overline{\mathcal{L}}$,*

$$\overline{\mathcal{L}}(x) = \sum_{n\geq 0} \dim(\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Suivant le modèle de la théorie des espèces de structures, on introduit des opérations sur les espèces tensorielles. Pour que ces opérations soient intéressantes, il faudrait qu'elles soient compatibles avec les séries génératrices d'espèces tensorielles. Par exemple, on voudrait que la série génératrice de la somme de deux espèces tensorielles soit la somme de leur série génératrice et que la série génératrice de leur produit soit le produit de leur série génératrice. À cet égard, on fait appel à la somme directe et au produit tensoriel d'espaces vectoriels. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces tensorielles et A un ensemble, on définit

(1) $(\mathcal{F}+\mathcal{G})[A] := \mathcal{F}[A] \oplus \mathcal{G}[A]$

(2) $(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})[A] := \bigoplus_{B+C=A} \mathcal{F}[B] \otimes \mathcal{G}[C]$

(3) $(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})[A] := \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} \mathcal{F}[\pi] \otimes \bigotimes_{B\in\pi} \mathcal{G}[B]$ avec $\mathcal{G}[\emptyset] = \emptyset$

(4) $\mathcal{F}'[A] := \mathcal{F}[A+*]$.

5.4.2 Lien entre les espèces tensorielles et les représentations du groupe symétrique

Soit σ une permutation de l'ensemble A. On définit une action de $\mathfrak{S}_A$ sur $\mathcal{F}[A]$ de la même façon que pour les espèces de structures ; c'est à dire

$$\sigma \cdot v := \mathcal{F}[\sigma](v)$$

où v est un vecteur de $\mathcal{F}[A]$. Or, comme $\mathcal{F}(\sigma)$ est un opérateur linéaire inversible, cette action induit une représentation linéaire de $\mathfrak{S}_A$ par l'espace vectoriel $\mathcal{F}[A]$

$$\begin{aligned} \rho: \quad \mathfrak{S}_A &\longrightarrow \quad \mathrm{GL}(\mathcal{F}[A]) \\ \sigma &\longmapsto \quad \rho(\sigma) : \mathcal{F}[A] \longrightarrow \mathcal{F}[A]. \end{aligned}$$

En général, une espèce tensorielle $\mathcal{F}$ est donc équivalente à la donnée d'une famille de représentations de $\mathfrak{S}_A$ par $\mathcal{F}[A]$, soit

$$\{\mathfrak{S}_A \times \mathcal{F}[A] \longrightarrow \mathcal{F}[A]\}_{A\in Ob\mathbb{B}}$$

Exemple 5.4.5. *La construction des $\mathfrak{S}_n$-modules simples présentée dans le deuxième* *chapitre est fonctorielle. Soit $\lambda \vdash n$ un diagramme de Young et $\tau : \lambda \longrightarrow \underline{n}$ un tableau bijectif. Il a déjà été remarqué que $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble des tableaux bijectifs de forme λ. On a également défini un polynôme associé à tout tableau bijectif de forme λ*

$$\Delta_\tau := \prod_{i=1}^{\ell} \Big(\prod_{j<k} \big(v_{\tau(i,j)} - v_{\tau(i,k)}\big)\Big).$$

Il est bien connu que $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'espace des polynômes à n variables. Ce qui est intérressant est que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les tableaux bijectifs de forme λ est compatible avec l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les Δ_τ. Autrement dit, pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \cdot \Delta_\tau = \Delta_{\sigma\cdot\tau}.$$

En effet, $\sigma \cdot \tau$ est obtenu en appliquant σ à $\tau(i,j)$ pour toute cellule (i,j) de λ. Donc,

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma\cdot\tau} &= \prod_{i=1}^{\ell} \Big(\prod_{j<k} \big(v_{\sigma(\tau(i,j))} - v_{\sigma(\tau(i,k))}\big)\Big) \\ &= \sigma \cdot \Delta_\tau, \end{aligned}$$

puisque l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{K}[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ consiste à permuter les indices des variables dans les polynômes.

Posons une application

$$\begin{aligned} S_\lambda : \ \mathbb{B} &\longrightarrow \ \mathbb{V} \\ A &\longmapsto \ S_\lambda[A] \end{aligned}$$

où

$$S_\lambda[A] := \langle \{\Delta_\tau \mid \tau : \lambda \longrightarrow A, \ \textit{tableau bijectif}\}\rangle = \mathcal{S}_\lambda.$$

Pour tout bijection $\varphi : A \longrightarrow B$, on pose

$$\begin{aligned} S_\lambda[\varphi] : \quad S_\lambda[A] &\longrightarrow \quad S_\lambda[B] \\ \Delta_\tau &\longmapsto \quad \Delta_{\varphi\cdot\tau} \end{aligned}$$

Pour voir que S_λ est une espèce tensorielle, il faut montrer que $S_\lambda[1_A] = 1_{S_\lambda[A]}$ et que $S_\lambda[\psi \circ \varphi] = S_\lambda[\psi] \circ S_\lambda[\varphi]$.

Soit Δ_τ un générateur de $S_\lambda[A]$. On vérifie dans un premier temps que

$$S_\lambda[1_A](\Delta_\tau) \quad = \quad \Delta_{1_A \circ \tau} = \Delta_\tau.$$

Ensuite, si $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\psi : B \longrightarrow C$ sont deux bijections composables, alors

$$\begin{aligned} S_\lambda[\psi \circ \varphi](\Delta_\tau) &= \Delta_{(\psi \circ \varphi) \circ \tau} \\ &= \Delta_{\psi \circ (\varphi \circ \tau)} \\ &= S_\lambda[\psi](\Delta_{\varphi \circ \tau}) \\ &= \big(S_\lambda[\psi] \circ S_\lambda[\varphi]\big)(\Delta_\tau) \end{aligned}$$

Donc, S_λ est une espèce tensorielle.

En général, toute famille $\{\mathcal{V}_n\}_{n\geq 0}$ de représentations des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ induit une espèce tensorielle

$$\mathcal{V} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$$

définie par

$$\mathcal{V}[A] := \sum_{A \in \mathrm{Ob}\, \mathbb{B}} \mathcal{V}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathrm{Bij}(A, \underline{n})$$

où $\mathrm{Bij}(A, \underline{n})$ est l'ensemble de toutes les fonctions bijectives entre A et $\underline{n}$.

Si $f : A \longrightarrow B$ est une bijection entre deux ensembles de cardinalité n, alors

$$\mathcal{V}[f] : \mathcal{V}[A] \longrightarrow \mathcal{V}[B]$$

est une transformation linéaire inversible définie par

$$\mathcal{V}[A](v \otimes \varphi) := v \otimes \varphi \circ f^{-1}.$$

En fait, $\{f : A \longrightarrow B \mid A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}\}$ est une transformation naturelle. Inversement, si $\mathcal{F} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$ est une espèce tensorielle, on peut toujours lui associé l'espace

$$\sum_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}} \mathcal{F}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathrm{Bij}(A, \underline{n}).$$

Notons que $\mathcal{F}$ est un $\mathfrak{S}_n$-module à gauche, et $\mathrm{Bij}(A, \underline{n})$ est un $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n)$-bimodule. En particulier, $\mathrm{Bij}(A, \underline{n})$ est un $\mathfrak{S}_n$-module à droite, ce qui assure que $\mathcal{F}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathrm{Bij}(A, \underline{n})$ est un $\mathfrak{S}_n$-module à gauche.

Soit $\mathbb{T}$ la catégorie des espèces tensorielles dans laquelle les objets sont les espèces tensorielles et les flèches sont les transformations naturelles, et $\mathbb{M}$ la catégorie des $\mathfrak{S}_n$-modules avec $n \geq 0$ avec les morphismes de $\mathfrak{S}_n$-modules comme flèches. Il existe un foncteur inversible entre $\mathbb{T}$ et $\mathbb{M}$

$$H : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{T}$$

défini par

$$H[\{\mathcal{V}_n\}_{n \geq 0}] = \mathcal{V}$$

et

$$H[\theta](v) = \theta(v) \otimes \mathrm{id}\,.$$

L'inverse de H

$$H^{-1} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{M}$$

est défini par

$$H^{-1}[\mathcal{V}] = \{\mathcal{V}_n\}_{n\geq 0}$$

et

$$H^{-1}[\theta](v \otimes \varphi) = \theta(v) \otimes \varphi.$$

Donc, il y a une équivalence de catégories entre $\mathbb{M}$ et $\mathbb{T}$. On introduit alors la notion d'espèces tensorielles irréductibles qu'on définit comme étant les espèces tensorielles $\mathbf{S}_\lambda$ correspondant aux représentations irréductibles $\mathcal{S}_\lambda$ de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, on affirme que toute espèce tensorielle $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique, à isomorphisme près, en une somme d'espèces tensorielles irréductibles

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{n\geq 0} \bigoplus_{\lambda \vdash n} a_\lambda \mathbf{S}_\lambda[\underline{n}]$$

où a_λ est la multiplicité de $\mathcal{S}_\lambda$ dans la décomposition en irréductibles de la représentation $\mathcal{V}$.

5.4.3 Série caractéristique de Frobenius

Comme on associe un caractère à chaque représentation de groupe, on peut ainsi dire qu'une espèce tensorielle est équivalent à la donnée d'une famille de caractères. Inspiré par la transformée de Frobenius qui est une fonction symétrique rassemblant toute l'information concernant le caractère d'un $\mathfrak{S}_n$-module, on introduit la ***série caractéristique de Frobenius***. Celle-ci décrit les caractères correspondant à une espèce tensorielle en termes de fonctions symétriques. Elle est définie par

$$\begin{aligned}\mathrm{Frob}(\mathcal{F}) &:= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{\mathcal{F}[\underline{n}]}(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{n\geq 0} \mathrm{frob}(\mathcal{F}[\underline{n}])\end{aligned}$$

où $\mathrm{frob}(\mathcal{F}[\underline{n}])$ est la transformée de Frobenius du caractère de $\mathcal{F}[\underline{n}]$.

Exemple 5.4.6. *On sait que $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ est un $\mathfrak{S}_n$-module avec l'action de $\mathfrak{S}_n$ définie par*

$$\begin{aligned}\sigma\cdot(i_1,i_2,\ldots,i_n) &:= \mathcal{L}[\sigma](i_1,i_2,\ldots,i_n)\\ &= (\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_n))\end{aligned}$$

où $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ dans $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ et σ dans $\mathfrak{S}_n$. Le caractère d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$ est la trace de la matrice associée à l'action de σ dans $\mathfrak{S}_n$. Dans ce cas, le caractère $\chi_{\overline{\mathcal{L}}[n]}$ associé à $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ est le nombre $\mathrm{fix}\,\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ de $\mathcal{L}$-structures invariantes par rapport à l'action de σ, car l'ensemble $\mathcal{L}[\underline{n}]$ forment une base de $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$. Donc, la transformée de Frobenius de $\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{frob}\left(\overline{\mathcal{L}}[\underline{n}]\right) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi_{\overline{\mathcal{L}}[n]}(\sigma)\,p_{\lambda(\sigma)}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{fix}\,\mathcal{L}[\sigma]p_{\lambda(\sigma)}\\ &= \frac{1}{n!}\left(\mathrm{fix}\,\mathcal{L}[\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}]p_{\lambda(\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n})}\right)\\ &= \frac{1}{n!}n!p_{1^n} = p_1^n\end{aligned}$$

Alors, la série caractéristique de Frobenius de $\overline{\mathcal{L}}$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{Frob}(\overline{\mathcal{L}}) &= \sum_{n\geq 0}\mathrm{Frob}(\overline{\mathcal{L}}[n])\\ &= \sum_{n\geq 0}p_1^n\\ &= \frac{1}{1-p_1}\end{aligned}$$

Remarque 5.4.1. *Si on pose $p_1 = x$ et $p_k = 0$ pour tout $k\geq 2$, on obtient*

$$\mathrm{Frob}(\overline{\mathbf{F}}) = \mathbf{F}(x)$$

où $\mathbf{F}(x)$ *est la serie génératrice de* $\mathbf{F}$. *Par exemple,*

$$\mathrm{Frob}(\overline{\mathcal{L}}) = \frac{1}{1-p_1} = \frac{1}{1-x} = \mathcal{L}(x).$$

De même, si on pose $p_k = x^k$ *pour tout* k,

$$\mathrm{Frob}(\overline{\mathbf{F}}) = \tilde{\mathbf{F}}(x)$$

où $\mathbf{F}(x)$ *est la serie génératrice des types d'isomorphie de* $\mathbf{F}$. *Par exemple,*

$$\mathrm{Frob}(\overline{\mathcal{L}}) = \frac{1}{1-p_1} = \frac{1}{1-x} = \tilde{\mathcal{L}}(x).$$

Donc, la série caractéristique de Frobenius d'une espèce de structures linéarisée contient l'information de l'espèce de structures d'origine.

Volontairement, cette série est définie de telle sorte qu'elle soit compatible avec les opérations sur les espèces tensorielles :

(1) $\mathrm{Frob}(\mathcal{F}+\mathcal{G}) = \mathrm{Frob}(\mathcal{F}) + \mathrm{Frob}(\mathcal{F})$

(2) $\mathrm{Frob}(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}) = \mathrm{Frob}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{Frob}(\mathcal{F})$

(3) $\mathrm{Frob}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}) = \mathrm{Frob}(\mathcal{F})[\mathrm{Frob}(\mathcal{G})]$

Ceci permet de faire un lien entre les fonctions symétriques, les représentations du groupe symétrique et les espèces tensorielles. Plus précisément, il a été démontré précédemment qu'on peut décrire la construction des $\mathfrak{S}_n$-modules simples en termes d'espèces tensorielles. On peut calculer la série caractéristique de Frobenius de $\mathbf{S}_\lambda$ qui est une fonction symétrique. Il est alors démontrer que la série caractéristique de Frobenius $\mathbf{S}_\lambda$ correspond à la fonction de Schur s_λ,

$$\mathrm{Frob}\,(\mathbf{S}_\lambda) = s_\lambda.$$

Ainsi, on obtient encore une autre description des fameuses fonctions de Schur.

5.5 Foncteurs polynomiaux

La théorie des foncteurs polynomiaux a fait son apparition dans la littérature mathématique de façon formelle avec les travaux de Macdonald dans (Macdonald, 1995). L'étude de tels foncteurs est en relation avec l'étude des algèbres de Lie libres tel que démontré par Joyal (Joyal, 1986). Essentiellement, un foncteur de la catégorie des ensembles vers elle-même est analytique s'il possède un développement en série de Taylor. Lorsque cette série est à support fini, on dit que ce foncteur est polynomial. On peut associer un foncteur analytique à toute espèce de structures. Dans cette section, on étudie, en particulier, le cas des espèces tensorielles associées à ces espèces structures. On remarquera que ce point de vue mariera la notion d'espèces tensorielles aux représentations poynomiales du groupe général linéaire.

On associe à toute espèce tensorielle $\mathcal{F}$ un ***foncteur polynomial***

$$\mathcal{F} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^*$$

défini par

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$$

Ici, $\mathbb{V}^*$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension quelconque avec transformations linéaires inversibles. Pour toute transformation linéaire $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ inversible, on définit

$$\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{W})$$

par

$$\mathcal{F}(\varphi)(\omega \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n})) = \omega \otimes \varphi(v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_{i_n})$$

5.5.1 Bases d'un foncteur polynomial

Étant donné une espèce de structures $\mathbf{F}$ et un ensemble A, l'ensemble des $\mathbf{F}$-structures sur A forme une base de l'espace vectoriel $\overline{\mathbf{F}}(A)$ librement engendré par $\mathbf{F}(A)$. D'autre part, si $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ est une base ordonnée de $\mathcal{V}$, alors l'ensemble des tenseurs simple $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$ avec les v_{i_j} variant dans $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ forme une base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}^{\otimes n}}$ de $\mathcal{V}^{\otimes n}$. Ainsi, pour n fixé, un élément w d'un ensemble de générateurs de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ est de la forme $\alpha_j \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$ où α_j est une $\mathbf{F}$-structures sur A et les v_{i_k} sont des éléments de $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$.

Cette écriture des éléments d'un ensemble de générateurs de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ ne permet pas d'évaluer leur dépendance linéaire puisqu'elle ne fournit aucune information sur l'action de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. On ne peut donc pas en déduire convenablement une base $\mathfrak{B}$ de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$. Pour y remédier, on peut donner une interprétation graphique aux éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ à l'aide des structures d'espèce $\overline{\mathbf{F}}$.

À titre d'illustration, posons $\mathbf{F} = Arb_c$ l'espèce des arbres binaires complets et $n = 5$. Fixons

$$\alpha_j = \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ / & & \backslash & & \\ 2 & & 3 & & \\ & / & & \backslash & \\ & 4 & & 5 & \end{array}$$

et une bijection entre les nombres de $\underline{5}$ et les coordonnées de $\mathcal{V}^{\otimes 5}$ qui associe le nombre i dans $\underline{n}$ à la i^e coordonnée de $\mathcal{V}^{\otimes 5}$. Si $w = \alpha_j \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} \otimes v_{i_4} \otimes v_{i_5}$ est un tenseur simple quelconque de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{5}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_5} \mathcal{V}^{\otimes 5}$, alors on peut lui associer un unique arbre binaire complet construit sur les éléments de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ / & & \backslash & & \\ 2 & & 3 & & \\ & / & & \backslash & \\ & 4 & & 5 & \end{array} \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} \otimes v_{i_4} \otimes v_{i_5} \xleftrightarrow{\text{correspondance}} \begin{array}{ccccc} & v_{i_1} & & & \\ / & & \backslash & & \\ v_{i_2} & & v_{i_3} & & \\ & / & & \backslash & \\ & v_{i_4} & & v_{i_5} & \end{array}$$

Inversement, étant donné α_j, à tout arbre binaire complet sur les éléments de la base $\mathcal{B}_\mathcal{V}$, on fait correspondre un unique $w' \in \overline{\mathbf{F}}[\underline{5}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_5} \mathcal{V}^{\otimes 5}$:

$$\begin{array}{ccc} & v_{i_4} & \\ & / \quad \backslash & \\ v_{i_2} & & v_{i_3} \\ & & / \quad \backslash \\ & & v_{i_1} \quad v_{i_5} \end{array} \quad \xleftrightarrow{\text{correspondance}} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & / \quad \backslash & \\ 2 & & 3 \\ & & / \quad \backslash \\ & & 4 \quad 5 \end{array} \quad \otimes v_{i_4} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_5}$$

où $w' = \alpha_j \otimes v_{i_4} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3} \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_5} \in \overline{\mathbf{F}}[\underline{5}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_5} \mathcal{V}^{\otimes 5}$.

Par exemple, soit $\mathcal{B}_\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$, et deux éléments tirés d'un ensemble de générateurs de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$, soient

$$w \quad = \quad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & / \quad \backslash & \\ 2 & & 1 \\ & & / \quad \backslash \\ & & 4 \quad 5 \end{array} \quad \otimes v_3 \otimes v_4 \otimes v_3 \otimes v_7 \otimes v_2$$

et

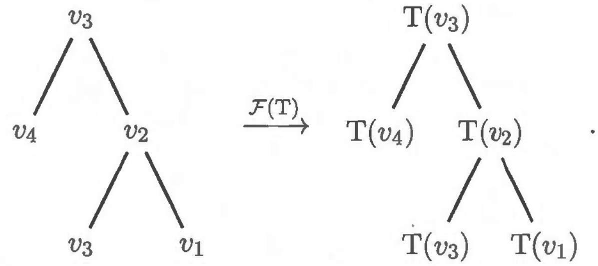
$$w' \quad = \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & / \quad \backslash & \\ 4 & & 3 \\ & & / \quad \backslash \\ & & 2 \quad 5 \end{array} \quad \otimes v_3 \otimes v_7 \otimes v_3 \otimes v_4 \otimes v_2$$

respectivement. Il est à priori difficile de vérifier s'ils sont linéairement indépendants. Cependant, lorsqu'on passe à l'interprétation graphique de ces deux éléments, on obtient que

$$w \quad = \quad \begin{array}{ccc} & v_3 & \\ & / \quad \backslash & \\ v_4 & & v_3 \\ & & / \quad \backslash \\ & & v_7 \quad v_2 \end{array}$$

$$w' \quad = \quad \begin{array}{ccc} & v_3 & \\ & / \quad \backslash & \\ v_4 & & v_3 \\ & & / \quad \backslash \\ & & v_7 \quad v_2 \end{array} \quad .$$

Donc, on peut facilement voir que $w = w'$. Ainsi, lorsqu'on fait agir une transformation linéaire $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ sur un tenseur simple $\overline{\mathbf{F}}[\underline{5}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_5} \mathcal{V}^{\otimes 5}$, on obtient



Puis, on peut étudier la transformation linéaire T en visualisant comment elle transforme les éléments d'une base. Par le biais de cette interpretation graphique, il est possible de visualiser concrètement les éléments de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ en utilisant les structures combinatoires $\mathbf{F}$. On accède de cette manière une plus vaste compréhension du comportement de $\overline{\mathbf{F}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ en tant que représentation polynomiale de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. De plus, si le foncteur polynomial $\mathcal{F}$ correspond à une espèce tensorielle $\overline{\mathbf{F}}$ obtenue par la linéarisation d'une espèce de structures $\mathbf{F}$, au lieu de faire des calculs sur les éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$, on peut opérér sur les $\mathbf{F}$-structures construites sur une base de $\mathcal{V}$. On peut ainsi munir l'ensemble des structures combinatoires correspondant aux éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ d'une structure algébrique.

5.5.2 (n,m)-extension-restriction

Regardons quelques exemples de foncteurs polynomiaux.

Exemple 5.5.1.

(1) Soit ε l'espèce tensorielle introduite précédemment. Le foncteur polynomial associé à ε est défini par

$$\varepsilon(\mathcal{V}) = \sum_{n\geq 0} \varepsilon[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}.$$

On sait que $\varepsilon[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ *est engendré par les tenseurs de la forme*

$$\bigwedge_{a\in\underline{n}}{}^{n} a \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$$

où v_{i_j} *éléments d'une base de* $\mathcal{V}$. *En conséquence des propriétés du produit tensoriel sur* $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, *il faut que*

$$\begin{aligned}\left(\sigma\cdot\bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\right)\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_n} &= \bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\otimes\sigma\cdot(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_n})\\ \Longrightarrow\ \operatorname{sgn}(\sigma)\bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_n} &= \bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\otimes v_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(i_n)}.\end{aligned}$$

Il y a donc un isomorphisme évident entre

$$\varepsilon[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$$

et

$$\bigwedge{}^{n}(\mathcal{V}) = \underbrace{\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}}_{n\ fois}$$

construit en faisant correspondre $\bigwedge_{a\in A}{}^{n} a\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_n}$ *et* $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_n}$. *On en déduit que*

$$\varepsilon[\mathcal{V}] = \sum_{n\geq 0}\varepsilon[n]\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n}\mathcal{V}^{\otimes n} \simeq \sum_{n\geq 0}\bigwedge{}^{n}(\mathcal{V}) = \sum_{n\geq 0} V_{1^n}$$

où $\sum_{n\geq 0}\bigwedge^{n}(\mathcal{V})$ *est l'algèbre extérieure. En effet, on avait montré préalablement, en construisant les* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$*-modules polynomiaux simples, que* $\bigwedge^{n}(\mathcal{V})$ *est la composante homogène de degré* n *de l'algèbre extérieure.*

(2) Soit

$$E : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

l'espèce de structures «ensemble» qui associe à tout ensemble A *l'ensemble qui ne contient que le singleton* A. *Par linéarisation, on obtient* $\bar{E}[A]$ *l'espace vectoriel libre* *sur* $E[A] = \{A\}$, *c'est-à-dire*

$$\bar{E}[A] = \langle E[A] \rangle_{\mathbb{K}} = \{\kappa A \mid \kappa \in \mathbb{K}\}.$$

L'action de $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\bar{E}[A]$ *est définie par*

$$\sigma \cdot (\kappa A) = \bar{E}[\sigma](\kappa A) = \kappa \bar{E}[\sigma](A) = \kappa A.$$

On peut alors considérer

$$\bar{E}(\mathcal{V}) = \sum_{n \geq 0} \bar{E}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$$

le foncteur polynomial associé à $\bar{E}$. *Sachant que* $\bar{E}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ *est généré par les tenseurs de la forme*

$$A \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$$

où v_{i_j} *éléments d'une base de* $\mathcal{V}$, *on observe que l'action de* $\mathfrak{S}_n$ *implique que*

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot A) \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} &= A \otimes \sigma \cdot (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) \\ \Longrightarrow A \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} &= A \otimes v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_n)} \end{aligned}$$

Donc, $\bar{E}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ *s'identifie à* $S^n(V) = V_{(n)}$ *où* $V_{(n)}$ *est le* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$*-module polynomial simple correspondant au partage* (n) *de* n. *On en conclut que*

$$\sum_{n \geq 0} \bar{E}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n} \simeq \sum_{n \geq 0} S^n(V)$$

avec $\sum_{n \geq 0} S^n(V)$ *désignant l'algèbre symétrique.*

(3) Considérons $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{V}) = \sum_{n \geq 0} \overline{\mathcal{L}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ *le foncteur polynomial associé à* $\overline{\mathcal{L}}$. *L'espace* $\overline{\mathcal{L}}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ *est engendré par les tenseurs de la forme*

$$\ell \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$$

où v_{i_j} sont des éléments d'une base de $\mathcal{V}$ et ℓ est une $\mathcal{L}$-structure. Si l'action de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *sur $\overline{\mathcal{L}}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ est définie par*

$$\varphi \cdot (\ell \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) = \ell \otimes \varphi(v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_{i_n}),$$

on pourrait construire un morphisme de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$*-module*

$$\theta : \quad \overline{\mathcal{L}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n} \quad \longrightarrow \mathcal{V}^{\otimes n}$$

tel que

$$(\theta \circ \varphi)(w) = (\varphi \circ \theta)(w)$$

pour tout $w \in \overline{\mathcal{L}}[\underline{n}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$. On pourrait alors vérifier que $\overline{\mathcal{L}}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$ est isomorphe à $\mathcal{V}^{\otimes n}$ en tant que représentation de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. *On pourra alors conclure que l'algèbre tensorielle est isomorphe au* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$*-module polynomial obtenu par le foncteur polynomial $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{V})$,*

$$\sum_{n\geq 0} \overline{\mathcal{L}}[n] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n} \simeq \sum_{n\geq 0} \mathcal{V}^{\otimes n}.$$

Ces exemples illustrent le fait que la notion de foncteurs polynomiaux est la traduction de la dualité de Schur-Weyl en termes d'espèces. En effet, la dualité de Schur-Weyl extend un $\mathfrak{S}_n$-module à un $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial où $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension m. Puis, nous avons vu qu'il est possible de restreindre le $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$-module polynomial obtenu à un $\mathfrak{S}_m$-module. Il est possible de décrire le tout en termes d'espèces, car une famille d'espèces de structures correspond à une famille d'espèces tensorielles. On peut alors définir la notion de (n,m)-extension-restriction.

On dit qu'une espèce de structures $\mathbf{F}$ est *homogène* de degré n si et seulement si $\mathbf{F}[A] = \emptyset$ lorsque la cardinalité de A est différente de n. Autrement dit, $\mathbf{F}$ n'admet des structures que sur un ensemble de cardinalité n.

Remarque 5.5.1. *Cette définition est accompagnée de propriétés intéressantes concernant les opérations sur les espèces. Par exemple, on remarque que si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux* *espèces homogènes de degré n, alors $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ l'est aussi. De plus, si $\mathbf{F}$ est homogène de degré k et $\mathbf{F}$ est homogène de degré ℓ, alors $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ est homogène de degré $k+\ell$.*

Une *(n,m)-extension-restriction* est l'application qui transforme une espèce homogène $\mathbf{F}$ de degré n en une espèce homogène $\mathbf{G}$ de degré m. Ici, la linéarisation de $\mathbf{F}$ correspond à un $\mathfrak{S}_n$-module et la linéarisation de $\mathbf{G}$ correspond à un $\mathfrak{S}_m$-module. Une (n,m)-extension-restriction est donc l'application d'une extension à la Schur-Weyl de $\mathbf{F}$ en tant que $\mathfrak{S}_n$-module à un GL_m-module polymomial suivie d'une restriction à $\mathfrak{S}_m$.

5.6 Exemples de (n,m)-extension-restriction

5.6.1 Espèce des ordres totaux

Soit $\mathcal{L}$ l'espèce qui associe à tout ensemble A l'ensemble de tous les ordres totaux des éléments de A. On a remarqué préalablement que la linéarisation de $\mathcal{L}$ produit l'espèce tensorielle $\overline{\mathcal{L}}$ qui correspond à la représentation du groupe symétrique avec l'action par permutation des coordonnées. Supposons que A est de cardinalité n. Rappelons que les éléments de $\overline{\mathcal{L}}[A]$ sont de la forme

$$\sum_{\ell\in\mathcal{L}[A]} \kappa_\ell\, \ell$$

avec κ_ℓ dans $\mathbb{C}$. Rappelons aussi que pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$ et pour tout $\ell=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ dans $\mathcal{L}[A]$,

$$\sigma\cdot\left(\sum_{\ell\in\mathcal{L}[A]} \kappa_\ell\, \ell\right)=\sum_{\ell\in\mathcal{L}[A]} \kappa_\ell\, \sigma\cdot(\ell) \qquad \text{avec} \qquad \kappa_\ell\in\mathbb{C}$$

Donc, $\overline{\mathcal{L}}[A]$ est le $\mathfrak{S}_n$-module avec l'action par permutation des coordonnées. Comme cela ne dépend que de la cardinalité de A et qu'il est clair dans le contexte qu'on travaille avec la linéarisation de $\mathcal{L}$, on dénotera $\overline{\mathcal{L}}[A]$ par $\mathcal{L}_n$. On a remarqué également que

$$\mathrm{frob}(\mathcal{L}_n)=p_1^n.$$

Par la dualité de Schur-Weyl, si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension m, alors

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{V}) = \mathcal{L}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n}$$

est un GL_m-module polynomial, et en particulier un $\mathfrak{S}_m$-module. On sait aussi que le caractère formel de cette représentation polynomiale est

$$\Phi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}(D) = p_1^n$$

où D est une matrice diagonale avec $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sur la diagonale. Pour calculer le caractère $\chi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}$ de la représentation de $\mathfrak{S}_m$ par $\mathcal{L}_n(\mathcal{V})$, on utilise le résultat suivant :

$$\Phi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}\left(D\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)\right) = p_1^n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \chi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}(\sigma)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de $\mathcal{M}_\sigma$ avec σ dans $\mathfrak{S}_m$. Or, par (4.1),

$$\begin{aligned} p_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= \sum_{\mu_i \mid 1} \mu_i \\ &= \mathrm{fix}(\sigma) \end{aligned}$$

où $\mathrm{fix}(\sigma)$ est le nombre de cycles de longueur 1 dans la décomposition cyclique de σ. Donc, pour tout σ,

$$\chi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}(\sigma) = \mathrm{fix}(\sigma)^n$$

On peut ainsi calculer la transformée de Frobenius du caractère du $\mathfrak{S}_m$-module $\mathcal{L}_n(\mathcal{V})$

$$\begin{aligned}
\operatorname{frob}(\mathcal{L}_n(\mathcal{V})) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\chi_{\mathcal{L}_n(\mathcal{V})}(\sigma)p_{\lambda(\sigma)}\\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}(\operatorname{fix}(\sigma))^n\,p_{\lambda(\sigma)}\\
&= \sum_{\mu\vdash m}(\operatorname{fix}(\mu))^n\,\frac{p_\mu}{z_\mu}\\
&= \sum_{\mu\vdash m} d_1^n\frac{p_\mu}{z_\mu}
\end{aligned}$$

où d_1 est le nombre de parts de longueur 1 dans le partage associé au type cyclique μ. On peut alors développer le résultat obtenu en termes de n'importe quel base de l'anneau des fonctions symétriques. Par exemple, lorsqu'on fixe $m = 4$ et qu'on fait varier n de de 1 à 7, on obtient les résultats suivants :

en termes des fonctions de Schur,

$(1,4) - ER = s_4 + s_{3,1}$

$(2,4) - ER = 2\,s_4 + 3\,s_{3,1} + s_{2,2} + s_{2,1,1}$

$(3,4) - ER = 5\,s_4 + 10\,s_{3,1} + 5\,s_{2,2} + 6\,s_{2,1,1} + s_{1,1,1,1}$

$(4,4) - ER = 15\,s_4 + 36\,s_{3,1} + 21\,s_{2,2} + 28\,s_{2,1,1} + 7\,s_{1,1,1,1}$

$(5,4) - ER = 51\,s_4 + 136\,s_{3,1} + 85\,s_{2,2} + 120\,s_{2,1,1} + 35\,s_{1,1,1,1}$

$(6,4) - ER = 187\,s_4 + 528\,s_{3,1} + 341\,s_{2,2} + 496\,s_{2,1,1} + 155\,s_{1,1,1,1}$

$(7,4) - ER = 715\,s_4 + 2080\,s_{3,1} + 1365\,s_{2,2} + 2016\,s_{2,1,1} + 651\,s_{1,1,1,1}$

en termes des fonctions symétriques homogènes,

$(1,4) - ER = h_1\,h_3$

$(2,4) - ER = {h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

$(3,4) - ER = {h_1}^4 + 3\,{h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

$(4,4) - ER = 7\,{h_1}^4 + 7\,{h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

$(5,4) - ER = 35\,{h_1}^4 + 15\,{h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

$(6,4) - ER = 155\,{h_1}^4 + 31\,{h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

$(7,4) - ER = 651\,{h_1}^4 + 63\,{h_1}^2 h_2 + h_1\,h_3$

et en termes des fonctions symétriques élémentaires

$(1,4)-ER = e_1{}^4 - 2\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(2,4)-ER = 2\,e_1{}^4 - 3\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(3,4)-ER = 5\,e_1{}^4 - 5\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(4,4)-ER = 15\,e_1{}^4 - 9\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(5,4)-ER = 51\,e_1{}^4 - 17\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(6,4)-ER = 187\,e_1{}^4 - 33\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

$(7,4)-ER = 715\,e_1{}^4 - 65\,e_1{}^2e_2 + e_1\,e_3$

où $(n,m)-ER$ dénote une (n,m)-extension-restriction. À l'aide du site internet extrêmement pratique de la fondation OEIS qui permet d'identifier des suites d'entiers connues, on peut trouver des formules explicites pour les coefficients. Dans ce cas-ci, on obtient :

$$\begin{aligned}
(n,4)-ER &= \frac{3\,2^{n-1}+2^{2n-1}+1}{3}s_4 + 2^{n-1}(2^n+1)s_{31} \\
&+ \frac{4^n-1}{3}s_{22} + 2^{n-1}(2^n-1)s_{211} \\
&+ \frac{(1-2^n)(2^{n-1})}{3}s_{1111} \\
&= \frac{(1-2^n)(2^{n-1})}{3}h_1^4 + (2^n-1)h_1^2h_2 + h_1h_3 \\
&= \frac{3\,2^{n-1}+2^{2n-1}+1}{3}e_1^4 - (2^n+1)e_1^2e_2 + e_1e_3
\end{aligned}$$

À ce stade-ci, il serait intéressant de trouver une preuve combinatoire pour les formules des coefficients afin de mieux comprendre les liens qu'une (n,4)-extension-restriction peut avoir avec d'autres notions. Par exemple, le coefficients de $s_{1,1,1,1}$ semblent être les coefficients q-binomiaux lorsque $q=2$; c'est-à-dire les 2-analogues des coefficients binomiaux. Aussi, les coefficients de s_4 semblent compter le nombre de mots symétriques construits à partir de 4 symboles différents ; c'est-à-dire le nombre de structures palindromiques sur un alphabet de 4 éléments différents.

5.6.2 Espèce des ensembles

Soit E l'espèce des ensembles définie par $E[A] = A$. En linéarisant E, on obtient l'espèce tensorielle $\bar{E}$ qui associe à chaque ensemble A l'espace

$$\bar{E}[A] = \{\kappa A \mid \kappa \in \mathbb{C}\}$$

En particulier, $\bar{E}[A]$ est le $\mathfrak{S}_n$-module simple de dimension 1 avec l'action triviale. On dénotera dorénavant $\bar{E}[A]$ par E_n lorsque A est de cardinalité n. Par la théorie, on peut déjà affirmer que $\mathrm{frob}(E_n) = s_{(n)}$. En effet, pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$,

$$\chi_{E_n}(\sigma) = \mathrm{tr}(\mathcal{M}_\sigma) = 1$$

Donc, la transformée de Frobenius du $\mathfrak{S}_n$-module E_n est

$$\begin{aligned} \mathrm{frob}(E_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{E_n}(\sigma) p_{\lambda(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\lambda(\sigma)} \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{p_\mu}{z_\mu} \\ &= h_n = s_{(n)} \end{aligned}$$

D'autre part, si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel tel que $\dim(\mathcal{V}) = m$, alors

$$E_n(\mathcal{V}) = E_n \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \mathcal{V}^{\otimes n} = V_{(n)}$$

où $V_{(n)}$ désigne le GL_m-module polynomial simple dont le caractère formel est

$$\Phi_{E_n(\mathcal{V})}(D) = s_{(n)}$$

Comme $\mathfrak{S}_m$ s'injecte dans GL_m, on en déduit que $E_n(\mathcal{V})$ est également un $\mathfrak{S}_m$-module dont le caractère se calcule en utilisant (4.1).

$$\begin{aligned}\Phi_{E_n(\mathcal{V})}(D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)) &= \chi_{E_n(\mathcal{V})}(\sigma) = s_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{p_\mu}{z_\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\end{aligned}$$

où $p_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{\mu_i | k} \mu_i$.

On avait remarqué qur $V_{(n)}$ est équivalent à la composante homogène de degré n de l'algèbre des tenseurs symétriques $S^n(\mathcal{V})$. Une base de $S^n(\mathcal{V})$ correspond aux monômes de degré n en m variables. Donc, E_n correspond en fait aux polynômes homogènes de degré n en m variables. On peut calculer que la série caractéristique de Frobenius de $\S^n(\mathcal{V})$ est $h_m\left[\frac{x}{1-q}\right]_{q^n}$ qui fait intervenir la notion de pléthysme. Pour un traitement élaborée de ces résultats, il est conseillé de consulter' (Bergeron, 2009). La matrice suivante présente le résultat exprimé en termes de fonctions symétriques homogènes d'une (n, m)-extension-restriction pour n et m variant de 1 à 5 :

$$\begin{bmatrix} h_1 & {h_1}^2 & h_1h_2 & h_1h_3 & h_1h_4 \\ h_1 & {h_1}^2 + h_2 & 2\,h_1h_2 & h_1h_3 + {h_2}^2 & h_1h_4 + h_2h_3 \\ h_1 & 2\,{h_1}^2 & {h_1}^3 + h_1h_2 + h_3 & h_2{h_1}^2 + 2\,h_1h_3 & {h_1}^2h_3 + h_1h_4 + h_2h_3 \\ h_1 & 2\,{h_1}^2 + h_2 & {h_1}^3 + 3\,h_1h_2 & 2\,h_2{h_1}^2 + h_1h_3 + {h_2}^2 + h_4 & {h_1}^2h_3 + h_1{h_2}^2 + 2\,h_1h_4 + h_2h_3 \\ h_1 & 3\,{h_1}^2 & 2\,{h_1}^3 + 3\,h_1h_2 & 4\,h_2{h_1}^2 + 2\,h_1h_3 & 3\,{h_1}^2h_3 + 2\,h_1{h_2}^2 + h_1h_4 + h_5 \end{bmatrix}.$$

CONCLUSION

On a vu qu'une espèce tensorielle $\mathcal{F}$ est équivalente à la donnée d'une famille $\{\mathcal{F}[n]\}_{n\geq 0}$ de $\mathfrak{S}_n$-modules. Si on considère $\mathcal{F}[n]$ en tant que $\mathfrak{S}_n$-module, alors

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{F}[n](\mathcal{V})$$

où $\mathcal{F}[n](\mathcal{V})$ est le GL($\mathcal{V}$)-module polynomial obtenu par la dualité de Schur-Weyl. Autrement dit, la notion de foncteur polynomial sous-entend la dualité de Schur-Weyl. En effet, le GL($\mathcal{V}$)-module polynomial $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ est la somme des GL($\mathcal{V}$)-modules polynomiaux associés à chaque $\mathfrak{S}_n$-module de la famille $\{\mathcal{F}[n]\}_{n\geq 0}$. Si $\mathcal{V}$ est de dimension m, alors GL($\mathcal{V}$) est isomorphe à GL_m. En adoptant ce point de vue, on peut considérer la restriction de l'action de GL_m à $\mathfrak{S}_m$. En résumé, on débute avec une espèce tensorielle $\mathcal{F}$ qui correspond à une famille de $\mathfrak{S}_n$-modules $\{\mathcal{F}[n]\}_{n\geq 0}$. Le foncteur polynomial associé à $\mathcal{F}$ produit un GL_m-module polynomial $\mathcal{F}(\mathcal{V})$. Enfin, on obtient un $\mathfrak{S}_m$-module en considérant la restriction de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ à $\mathfrak{S}_m$.

Comme tous les procédés qui transforment une structure en une autre de même forme, l'application de ce processus dans des contextes mathématiques particuliers peut entraîner des résultats intrigants. Théoriquement, ce processus est d'un intérêt particulier, puisqu'il consiste à produire une représentation de groupe à partir d'une représentation d'un autre groupe, ce qui sous-entend la présence d'un phénomène dont l'interprétation peut être pertinentes en physique. On peut donc se demander s'il est possible de définir une application qui associerait directement à chaque $\mathfrak{S}_n$-module un $\mathfrak{S}_m$-module sans passer par le labeur de la dualité de Schur-Weyl et la restriction de l'action de GL_m à $\mathfrak{S}_m$. Étant donné m et la série caractéristique de Frobenius d'une espèce homogène de degré n, est-il possible décrire une application qui donne la série caractéristique de

Frobenius associée à l'espèce homogène de degré m. Autrement dit, peut-on trouver des formules explicites pour les coefficients du résultat d'une (n, m)-extension-restriction écrit en termes de n'importe quelle base pour n et m quelconque. La description d'une telle application permettrait de comprendre les liens que la notion de (n, m)-extension-restriction partage avec d'autres branches des mathématiques. Cela nous permettrait de faire un premier pas vers la juste interprétation physique cachée derrière ce processus.

L'utilité de décrire l'application précédente définie sur des constructions algébriques en termes d'espèces de structures repose en partie sur le fait que cette approche permet non seulement d'utiliser des objets combinatoires pour dénombrer les éléments d'une base de la représentation polynomiale obtenue par le foncteur polynomial, mais également de visualiser comment les transformations linéaires agissent sur ceux-ci. On peut se demander s'il est possible d'interpréter graphiquement les éléments d'un foncteur polynomial qui ne provient pas de la linéarisation d'une espèce de structures. Si oui, on aura à notre disposition un nouvel outil dans l'étude des algèbres de Lie libres, puisque celles-ci sont construites par l'évaluation d'un foncteur analytique. Il s'agit là d'une question qui pourrait faire l'objet d'un travail de recherche futur.

BIBLIOGRAPHIE

Armstrong, M. 1988. *Groups and Symmetry.* Springer-Verlag.

Bergeron, F. 2009. *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces.* Canadian Mathematical Society.

Bergeron, F., G. Labelle et P. Leroux. 1994. *Theorie des Especes et Combinatoire des Structures Arborescentes.* LACIM.

Fulton, W., H. J. 1991. *Representation Theory.* Springer-Verlag.

Fulton, W. 1997. *Young Tableaux.* Cambridge University Press.

Green, J. 2007. *Polynomial Representations of GLn.* Springer.

Herrlich, H. 1973. *Category Theory.* Allyn and Bacon, Inc.

James, G. D. 1978. *Representation Theory of the Symmetric Groups.* Springer-Verlag.

Joyal, A. 1986. « Foncteurs analytiques et especes de structures ». *Combinatoire Enumerative*, vol. 1234, p. 126–159.

Macdonald, I. G. 1995. *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Wadsworth and Brooks.

Sagan, B. E. 2000. *The Symmetric Group.* Springer.

Stanley, R. P. 1986. *Enumerative Combinatorics Volume I.* Wadsworth and Brooks.

———. 1999. *Enumerative Combinatorics Volume II.* Wadsworth and Brooks.

Weyl, H. 1946. *The Classical Groups.* Princeton Mathematical Society.

INDEX