UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPROPRIATION DES REPRÉSENTATIONS VISUELLES PAR UNE ENSEIGNANTE DANS UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT PORTANT SUR LA FACTORISATION EN ALGÈBRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

PATRICIA SIMON

MARS 2013

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier Mireille Saboya, ma directrice de recherche, sans qui je n'aurais pas pu faire ce travail. Elle a su me donner les bons conseils, encouragements et aides aux bons moments. Sa passion et son enthousiasme face à mon projet ont été déterminants dans mon parcours.

Je veux remercier aussi Stéphane Cyr, co-directeur, pour ses précieux conseils et pour son regard différent sur mon travail.

Ce travail n'aurait pas pu être fait sans la participation de l'enseignante Line que je remercie pour sa disponibilité, pour les échanges que nous avons eus, pour son enthousiasme envers le projet. Je n'aurais pas pu mieux choisir l'enseignante pour mon expérimentation. J'ai beaucoup appris grâce à elle.

Je remercie aussi Gisèle Legault pour sa patience et pour le temps mis à travailler sur la mise en forme du mémoire.

J'ai aussi une pensée pour mon amie Caroline Majeau qui a été présente tout au long du processus en montagne russe qu'a été l'écriture de ce mémoire. Je la remercie pour son écoute, ses réflexions constructives et ses encouragements.

Finalement, merci à mes parents qui m'ont toujours encouragée dans mes études. Merci aussi à Mike pour sa compréhension et sa patience et à Malorie qui a accepté que sa maman travaille de longues heures pendant les deux premières années de sa vie.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Comme enseignante au secondaire, j'ai toujours attaché de l'importance à la compréhension des concepts abstraits et au sens que l'élève peut donner à ce qu'il apprend. J'ai voulu aller explorer la factorisation en algèbre, car elle cause souvent des difficultés chez les élèves. Une avenue intéressante pour l'enseignement de la factorisation est, selon moi, l'utilisation de représentations visuelles, comme la méthode du rectangle. Cette méthode permet de représenter l'expression à factoriser comme des aires de rectangles dont il faut trouver les mesures des côtés. En effet, dans l'Histoire, plusieurs mathématiciens ont utilisé des représentations visuelles pour factoriser des expressions algébriques. Les recherches sur le sujet m'ont amenée à distinguer cinq habiletés à développer autour de la factorisation: l'habileté à savoir reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression algébrique, l'habileté à reconnaître des formes équivalentes, à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas, à représenter visuellement une expression algébrique et à faire le lien entre la démarche algébrique et la représentation visuelle. De plus, ces recherches soulignent l'importance du rôle de l'enseignant. Je fais donc une étude de cas auprès d'une enseignante qui intègre des activités sur la factorisation construites par la chercheure et utilisant les représentations visuelles. Pour mieux comprendre comment l'enseignante s'approprie les représentations et les utilise pour développer des habiletés importantes chez ses élèves, je vais me concentrer pour l'analyse sur quelques composantes de l'intervention éducative : la composante épistémologique, didactique/cognitive et double dimension médiatrice/médiative. Les résultats principaux de cette étude montrent que l'enseignante s'approprie les représentations visuelles dès le premier cours. Elle les utilise à différents moments qui n'étaient pas prévus dans les discussions avec la chercheure, ce qui amène à distinguer trois rôles pour les représentations visuelles : donner du sens, contrer des erreurs et servir de réinvestissement à long terme. Un autre résultat important tourne autour des habiletés liées à la factorisation. L'expérimentation permet de mieux saisir ces habiletés.

Mots clés : Factorisation, représentation visuelle, pratique enseignante

INTRODUCTION

Mon expérience d'enseignante au secondaire est à l'origine de mon questionnement autour de la factorisation en algèbre, concept qui cause des difficultés chez plusieurs élèves. Dans les manuels scolaires est présenté ce qu'ils appellent la méthode du rectangle qui mise d'après moi, sur la compréhension chez les élèves de cette notion mathématique. Dans cette méthode, chaque terme qui compose une expression algébrique (que l'on veut factoriser) est représenté par l'aire d'un rectangle. Il s'agit pour factoriser d'assembler les différents morceaux en un seul rectangle (d'un seul tenant). L'expression factorisée sera alors traduite par le produit des côtés du rectangle obtenu. L'enseignant a un rôle primordial dans la compréhension d'un concept chez les élèves. Dans ce travail, je m'intéresse à la pratique enseignante, plus particulièrement à une enseignante qui n'utilisait pas les représentations visuelles dans son enseignement de la factorisation. Je vais m'attarder à l'appropriation par une enseignante des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation, plus particulièrement à la méthode du rectangle.

Le chapitre I présente l'origine de mon questionnement lié à mon expérience comme enseignante autour de la factorisation et explicite l'importance de ce concept dans le programme de formation de l'école québécoise. Différentes recherches relèvent des difficultés des élèves en lien avec la factorisation et rapportent des résultats autour de deux approches d'enseignement, l'utilisation de la calculatrice symbolique et la manipulation de matériel comme les tuiles algébriques. Je m'intéresse à une approche différente, l'utilisation de représentations visuelles dessinées (la méthode du rectangle). Les recherches soulignent l'importance de l'enseignant pour l'apprentissage de la factorisation par exemple pour faire le lien entre une démarche visuelle et algébrique. Les deux objectifs de l'expérimentation sont d'analyser les pratiques enseignantes autour de l'utilisation de la méthode du rectangle dans l'enseignement de la factorisation dans les classes de mathématiques du secondaire et de dégager la place et le rôle qu'occupent les représentations visuelles dans les pratiques enseignantes portant sur la factorisation

Au chapitre II, le cadre théorique est élaboré d'une part sur le concept de factorisation. Une incursion dans l'histoire montre que la factorisation a souvent été accompagnée de représentations visuelles. Différentes recherches m'ont amené à distinguer cinq habiletés à développer chez les élèves pour travailler le concept de factorisation. D'autre part, un cadre d'analyse est explicité pour permettre d'analyser la pratique enseignante. Différentes composantes de ce que Lenoir (2009) nomme l'intervention éducative ont été plus particulièrement ciblées dans cette étude, la composante épistémologique, la composante didactique (aussi nommée cognitive par Robert et Rogalski, 2002) et la double dimension médiatrice (ou médiative, Robert et Rogalski, 2002).

L'enseignante qui s'est montrée volontaire pour participer à cette recherche a une grande expérience au deuxième cycle du secondaire. Cependant, celle-ci n'utilisait pas les représentations visuelles dans son enseignement. L'objectif a donc été revu en termes d'appropriation par une enseignante des représentations visuelles sur la factorisation. Des situations autour de ce concept et impliquant des représentations visuelles dessinées ont été élaborées. Elles ont été expérimentées avec cette enseignante chez des élèves de la séquence sciences naturelles (SN) en deuxième année du deuxième cycle du secondaire. Dans le chapitre III, la méthodologie privilégiée, l'étude de cas, est explicitée. Les situations impliquant l'utilisation de représentations visuelles ont été bâties selon une ingénierie didactique et leur analyse *a priori* est présentée. Dans ce chapitre sont également décrits les instruments de collecte de données et le cadre d'analyse qui va guider mon étude.

Dans le chapitre IV sont conduites plusieurs analyses, les notes de cours de l'enseignante, deux entrevues menées avec cette dernière (une avant et l'autre après l'expérimentation) et l'analyse de deux séances en classe bien ciblées. Cette analyse tient compte à la fois des composantes épistémologique, didactique/cognitive et double dimension médiatrice/médiative de l'intervention éducative et du cadre de référence élaboré autour des habiletés dans la factorisation. De plus la place, le rôle et l'appropriation des représentations visuelles par l'enseignante sont décrits.

Au dernier chapitre, une lecture transversale de l'analyse menée au chapitre précédent permet de dégager de la pratique de l'enseignante des façons de travailler les habiletés à développer chez les élèves autour de la factorisation et de discuter autour de l'appropriation des représentations visuelles par l'enseignante. Cette analyse permettra ainsi de revenir sur les objectifs de cette recherche.

CHAPITRE I

PROBLEMATIQUE

1.1 Origine de mon questionnement de départ

Comme enseignante au deuxième cycle du secondaire, j'ai pu remarquer que plusieurs élèves ressentent des difficultés quand on leur demande de factoriser, certaines erreurs étant plus reliées à la manipulation algébrique alors que d'autres se situent au niveau de la compréhension même du concept et de son utilité. Factoriser un polynôme exige plusieurs manipulations algébriques qui sont source d'erreurs chez les élèves. Certains élèves ont également de la difficulté à trouver le plus grand facteur commun dans une expression algébrique. Par exemple dans l'expression $12x + 30y$, les élèves identifient parfois 2 comme plus grand facteur commun de 12 et 30, au lieu de 6. Lors de certaines mises en évidence double, des élèves ne reconnaissent pas un binôme comme pouvant être le plus grand facteur commun. Par exemple, si on demande de factoriser $x(2x+3) + 2y(2x+3)$, des élèves ne verront pas que $(2x+3)$ est le facteur commun. De plus, 1 n'est pas toujours perçu comme un carré, ainsi devant l'expression (x^2 -1) les élèves diront ne pas pouvoir factoriser comme suit $(x-1)(x+1)$. Dans le même ordre d'idées, certains élèves ont de la difficulté à percevoir qu'un nombre qui n'est pas un carré parfait peut s'exprimer sous la forme d'un radical. Par exemple, devant l'expression algébrique $4x^2 - 13$, les élèves auront de la difficulté à factoriser comme suit $(2x-\sqrt{13})(2x+\sqrt{13})$, $\sqrt{13}$ n'étant pas un entier naturel. Les élèves ressentent également des difficultés quand il faut ajouter une constante lors de la factorisation d'un trinôme carré parfait. Par exemple, pour pouvoir factoriser le trinôme $x^2 + 6x + 7$ il faut ajouter une constante (qu'on soustrait pour garder l'égalité), ainsi on a : $x^2+6x+9-9+7=(x+3)^2-2=(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$.

Une erreur classique à laquelle je me vois confrontée année après année est la suivante : $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Dans certains guides de l'enseignant, une piste de solution est amenée pour aider les élèves dans la factorisation, ce qu'ils appellent le modèle du rectangle :

> **Conceptions**
>
> Écrire $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ constitue l'une des erreurs les plus courantes et récurrentes chez les élèves en algèbre. Ils ont tendance à transférer d'une façon exclusive la propriété du carré d'un produit $(ab)^2 = a^2b^2$, au carré d'une somme ou au carré d'une différence. Il importe donc d'attirer leur attention sur ce fait. Le modèle du rectangle permet de donner un sens à l'expression $(a+b)^2$ et peut fournir aux élèves une image mentale qui les aidera à se rappeler que $(a+b)^2$ est plus grand que ou égal à a^2+b^2 (les expressions sont égales seulement si $ab=0$). (Boucher et al., guide de l'enseignant, 2010, p.71, c'est moi qui souligne).

La méthode du rectangle consiste à la construction d'un support visuel permettant aux élèves de se créer une image mentale. Ainsi, factoriser revient à trouver les dimensions d'un rectangle, l'aire de ce dernier étant donnée. Par exemple, l'expression algébrique $10x^2+5xy+4x+2y$ représente l'aire de quatre rectangles que l'on dispose comme suit pour obtenir un grand rectangle. L'aire de ce rectangle peut également s'écrire $(2+5x)(2x+y)$, qui est la forme factorisée de l'expression algébrique.

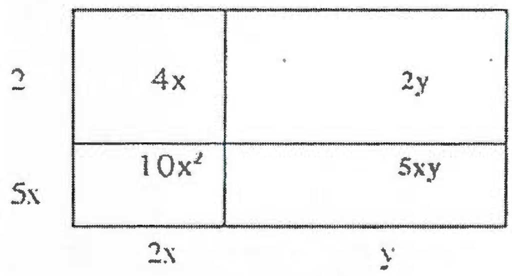


Figure 1.1 Une illustration de la méthode du rectangle.

Cette méthode utilisant la géométrie pour illustrer l'algèbre semble avoir été utilisée dans l'histoire. En effet, plusieurs manuels du secondaire présentent des mathématiciens qui ont utilisé cette visualisation. Ainsi, Al-Khawarizmi est cité dans plusieurs manuels

(Intersection, 2009; Vision, 2009) parce qu'il faisait référence à la complétion de carré et à la résolution d'équation du deuxième degré[1].

De plus, j'ai aussi remarqué que les élèves avaient de la difficulté avec le concept même de factorisation. Ils demandent souvent pourquoi on apprend à factoriser et dans quelles situations cela peut être utile. La question revient souvent chez les élèves : « À quoi va me servir de savoir factoriser un trinôme? Et la complétion de carré? » Comme le relèvent Bednarz et Janvier (1992), les élèves ne voient pas toujours la pertinence de l'algèbre, même s'ils sont capables de l'utiliser hors contexte. Elles partent du constat que l'algèbre est introduite par des manipulations algébriques, ce qui amène de nombreuses difficultés chez les élèves qu'elles ont recensées.

> L'apprentissage y est seulement formel, jamais fonctionnel et la signification, le contrôle, la validation y sont à toutes fins pratiques absents. Cet apprentissage qui consiste à vouloir maîtriser un outil symbolique qui fonctionne à vide conduit, nous l'avons vu, au fait que les élèves s'alignent sur un maniement formel, lui donnant alors toutes sortes d'interprétations. Ils ne voient pas la pertinence de cet outil et ne sont pas à même de l'utiliser lorsque nécessaire (il s'agit pour eux d'un outil non fonctionnel). (Bednarz et Janvier, 1992, p.18)

Comme enseignante au secondaire et connaissant les difficultés des élèves autour de la factorisation, je me questionne sur le rôle et la place des représentations visuelles et sur les interventions possibles de l'enseignant. C'est donc la pratique enseignante qui m'intéresse. Avant d'aller regarder la pratique enseignante de plus près, je me suis intéressée à ce qui a déjà été fait au sujet de la factorisation en algèbre, à ce que demande le programme, et à plusieurs interventions qui ont déjà été faites autour de l'enseignement de la factorisation.

---

[1] Ce point sera traité dans le cadre théorique au point 2.2

1.2 Difficultés autour de la factorisation relevées par la recherche

On peut regrouper les difficultés ressenties par les élèves en factorisation en trois catégories pertinentes pour notre présente recherche. D'abord, il y a des difficultés liées à la manipulation algébrique (Matz, 1982; Bednarz et Janvier, 1992). Il y a ensuite des difficultés reliées au sens accordé au symbolisme (Bednarz et Janvier, 1992) et finalement des difficultés reliées à la non reconnaissance des formes équivalentes (Matz, 1982; Ball, Pierce et Stacey, 2003).

1.2.1 Des difficultés liées à la manipulation algébrique

Les difficultés entourant la manipulation algébrique sont largement documentées (Bednarz et Janvier, 1992; Booth, 1984; Matz, 1982). Pour ne pas alourdir le texte, je ne m'attarderai à expliciter que quelques-unes de ces difficultés, préférant me concentrer sur les difficultés reliées au sens et à la reconnaissance de formes équivalentes.

Matz (1982) relève des erreurs chez les élèves du type $2x + 3y = 5xy$ ou $2y (3y) = 6y$. Connaître les bonnes propriétés algébriques et les comprendre est essentiel ultérieurement à la réussite de problèmes de factorisation. Parfois, les élèves font des erreurs dans la distributivité, ils oublient des termes ou oublient de multiplier certains termes. Par exemple, un élève peut écrire $2(2x +1) = 4x + 1$ au lieu de $4x + 2$. Le signe moins peut amener des erreurs comme dans l'exemple suivant : $-2(x + 4) = -2x + 8$ au lieu de $-2x -8$. Comme mentionné au point 1.1 et aussi constaté par Damboise (2007), les élèves font souvent l'erreur d'écrire $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, ces expressions n'étant pas équivalentes. Les élèves distribuent la puissance à l'intérieur de la parenthèse au lieu de développer l'expression.

1.2.2 Des erreurs reliées au sens accordé au symbolisme

Certains chercheurs (Bednarz et Janvier, 1992; Matz, 1982) ont répertorié des difficultés reliées à la signification accordée aux lettres ou aux notations algébriques. Ainsi, des élèves associent les lettres en algèbre à des objets concrets au lieu de les associer à un nombre (Bednarz et Janvier, 1992). Booth (1984) donne l'exemple d'un élève qui affirme que la variable « y » pourrait être un yacht, un yaourt ou un objet débutant par « y ». Comme le sens accordé au symbolisme est à la base de la compréhension, ces difficultés vont avoir des conséquences tout au long de l'apprentissage de l'algèbre.

De plus, Matz (1982, p. 45) souligne qu'arriver à un résultat numérique est une finalité pour l'élève tandis qu'un résultat algébrique est moins évident à interpréter. Bednarz et Janvier vont dans ce même sens, certains élèves considérant qu'une expression numérique constituée d'au moins deux termes n'est pas terminée :

> Pour beaucoup d'élèves, une expression telle que $x + 4$ en algèbre est considérée comme une expression « non achevée ». Ils trouvent en effet difficile, et ceci en accord avec les conceptions qu'ils ont développées des opérations en arithmétique, de considérer dans cette expression un résultat (Bednarz et Janvier, 1992, p.12).

Finalement, devant un problème arithmétique mis en contexte, la plupart des élèves du deuxième cycle vont être à l'aise. Par contre, si on transforme ce même problème avec des données algébriques, il en est tout autrement. Il peut être difficile pour un élève de faire la transposition entre le mode numérique et le mode algébrique pour résoudre un problème concret. Damboise (2007) donne l'exemple de l'aire d'un rectangle. L'élève sait très bien comment trouver les côtés d'un rectangle si on donne l'aire sous forme numérique, mais si l'aire est représentée par une expression algébrique, ils ne savent pas comment s'y prendre. Il peut être difficile pour l'élève de voir que les symboles algébriques représentent l'aire ou les côtés d'un rectangle.

1.2.3 Des difficultés reliées à la non reconnaissance des formes équivalentes

Matz (1982) souligne que la factorisation est intimement reliée à la distributivité, le signe d'égalité étant un signe de relation bidirectionnelle. En effet, en algèbre, on peut développer une expression algébrique pour trouver son expression équivalente : $2x(3x+4)=6x^2+8x$, le processus inverse étant la factorisation. On cherche alors à décomposer une expression algébrique en facteurs : $x^2 + 5x + 4 = (x+4)\ (x+1)$.

$$5(x + 3) \xrightleftharpoons[\text{Factoriser}]{\text{Développer}} 5x + 15$$

Figure 1.2 La relation bidirectionnelle entre développement et factorisation.

Matz a constaté que les élèves ont de la difficulté à percevoir ce caractère réciproque du développement par rapport à la factorisation de polynômes. En arithmétique, le processus de résolution d'un problème est souvent unidirectionnel contrairement au processus algébrique qui peut aller dans les deux sens. Matz souligne que même si l'égalité est une relation symétrique, l'élève ne perçoit souvent pas cette symétrie.

> This style of reasoning operates backwards from the answer template, relying the bi-directional view of the equals sign to connect the process of factoring with the process of expanding (or multiplying out). The bi-directionality of algebraic process injects a flexibility into algebraic problem-solving which, in the eyes of some students makes the activity more complicated. (Matz, 1982, p.44)

La factorisation est ainsi reliée à la reconnaissance de formes équivalentes d'une expression algébrique, l'une développée et l'autre factorisée, ce qui est une difficulté chez les élèves. À cet effet, Ball, Pierce et Stacey (2003) insistent sur l'importance de reconnaître des expressions équivalentes. C'est une habileté importante en mathématique qui cause des difficultés aux élèves. Ces chercheurs ont bâti une activité avec la calculatrice symbolique pour mesurer l'habileté des élèves à reconnaître des expressions algébriques équivalentes. Les élèves avaient à décider si deux expressions algébriques étaient équivalentes en s'aidant de la calculatrice. Ils explicitent que la calculatrice symbolique s'est avérée un bon outil pour les élèves, car elle permet de transformer des expressions algébriques de la forme factorisée à la forme développée et inversement.

Guin et Trouche (1999) vont dans le même sens. Ils ont eux aussi cherché à voir le potentiel de la calculatrice symbolique dans l'apprentissage de l'algèbre. Ils ont noté des difficultés des élèves à différencier les formes factorisées et développées suite à une mauvaise utilisation des commandes « expand » et « factor » de la calculatrice symbolique. Dans leur étude, ils font remarquer qu'une utilisation correcte nécessite une compréhension conceptuelle de ces fonctions, ce qui n'est pas toujours le cas et peut entraîner des erreurs de manipulation. Certains élèves abandonnaient l'idée de comprendre la commande à employer et utilisaient alors arbitrairement une commande ou transcrivaient le résultat de la calculatrice sans se poser de questions sur l'équivalence des expressions.

Ces chercheurs ont étudié la factorisation et l'équivalence d'expressions auprès des élèves en utilisant la calculatrice symbolique. La calculatrice peut être un outil pour travailler cette habileté des élèves qui est importante. À ce stade de notre réflexion, nous voudrions montrer l'importance de s'attarder à la factorisation en algèbre et à l'équivalence entre des expressions qui causent des difficultés chez les élèves.

1.3 Importance de la factorisation

La factorisation en algèbre est un concept important dans le cheminement d'un élève. La section suivante montre qu'elle occupe une place importante dans le programme de formation et qu'elle est primordial dans le développement de concepts mathématiques.

1.3.1 La factorisation dans le programme de formation

La factorisation de polynômes est une partie importante dans le programme de mathématiques au deuxième cycle du secondaire (MELS, 2007). Elle constitue souvent un chapitre complet dans les manuels scolaires et est une partie qui différencie le programme enrichi du programme régulier. Le programme de formation actuel de l'école québécoise place la multiplication d'expressions algébriques, la division de polynômes et la factorisation de polynômes dans les processus à acquérir, à la deuxième année du deuxième cycle (secondaire 4) dans la voie *Sciences Naturelles* et à la deuxième et troisième année (secondaires 4-5) dans la voie *Tecnico-Sciences*. Auparavant, tous les élèves, à la première année du deuxième cycle (secondaire 3), ont appris la mise en évidence simple en même temps que la multiplication de deux binômes. Des élèves de 15 à 17 ans au secondaire travaillent donc des problèmes de factorisation. On remarque aussi que le développement d'expressions algébriques n'est pas nécessairement vu en même temps que la factorisation. Le tableau 1.1 montre une partie de la progression des apprentissages en algèbre au secondaire et résume bien les années où sont vues la multiplication d'expressions algébriques et la factorisation.

Tableau 1.1 Progression des apprentissages en algèbre (MELS, 2007, p. 138)

			CST		TS		SN	
Algèbre	1re et 2e sec.	3e sec.	4e sec.	5e sec.	4e sec.	5e sec.	4e sec.	5e sec.
Expressions algébriques: addition et soustraction, multiplication et division par une constante, multiplication de monômes	X							
Expressions algébriques : multiplication (degré < 3) et division d'un polynôme par un monôme		X						
Expressions algébriques: multiplication et division d'un polynôme par un binôme (avec ou sans reste) Note : L'expression rationnelle (fraction algébrique) s'ajoute aux expressions algébriques à traiter. En TS, la recherche d'un dénominateur commun dans l'addition de deux expressions rationnelles se limite au cas où le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre.					X		X	
Factorisation de polynômes (mise en évidence simple)		X						
Factorisation de polynômes (mise en évidence double)					X		X	
			CST		TS		SN	
Algèbre (*Suite*)	1re et 2e sec.	3e sec.	4e sec.	5e sec.	4e sec.	5e sec.	4e sec.	5e sec.
Factorisation de trinômes à l'aide des racines : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$						X	X	
Identités algébriques du second degré (trinôme carré parfait et différence de deux carrés)					X		X	
Complétion du carré (factorisation et passage entre différentes formes d'écriture)						X	X	

Dans le tableau ci-dessous le programme spécifie les concepts et processus à acquérir en arithmétique et en algèbre. J'ai souligné les éléments liés à la factorisation :

Sens du nombre réel, des expressions algébriques et des liens de dépendance	
Concepts de la 2e année du cycle	Processus
– Expression algébrique • Identité algébrique (du second degré) • Équation et inéquation du second degré à une variable ou deux variables	– Manipulation d'expressions algébriques • Multiplication d'expressions algébriques • Division de polynômes (avec ou sans reste) • Factorisation de polynômes • Développement, réduction ou substitution d'expressions à l'aide d'identités algébriques remarquables • Résolution d'équations et d'inéquations du premier et du second degré à une ou deux variables, selon le contexte : algébriquement ou graphiquement

Tableau 1.2 Concepts et processus en algèbre (MELS, 2007, p. 104)

1.3.2 La factorisation comme outil au service d'autres concepts

La factorisation est un concept préalable à la résolution d'équations du deuxième degré à une inconnue. En effet, dans le manuel Intersection (Boucher et al., 2009), la dernière partie du chapitre sur la factorisation est consacrée à la résolution d'équations quadratiques[2]. Les auteurs présentent deux façons de résoudre ce type d'équation : par factorisation (produit et somme) ou par complétion de carré. Dans la présentation du manuel, la complétion de carré n'apparaît pas comme une méthode de factorisation, ce qui me questionne. On sent ici que ce sont deux choses différentes alors qu'elles sont en fait reliées.

La factorisation est aussi un préalable à l'étude des fonctions quadratiques. L'élève doit connaître les trois formes de la règle d'une fonction quadratique : la forme générale, la forme canonique et la forme factorisée. Il doit utiliser la factorisation pour passer par

[2] Historiquement la factorisation était utilisée pour résoudre des équations (voir section 2.2)

exemple de la forme générale à la forme factorisée. Cette forme est utile notamment pour connaître les zéros de la fonction. Toujours dans le manuel Intersection (Boucher et al., 2009), on retrouve un tableau expliquant les étapes à suivre pour passer de la forme générale à la forme factorisée.

Tableau 1.3 Passage de la forme générale à la forme factorisée (Boucher et al., 2009, p. 156)

	$f(x) = 2x^2 -4x -30$
	Démarche
1. Mettre le a en évidence	$f(x) = 2(x^2-2x-15)$
2. Factoriser le trinôme afin d'obtenir la règle sous la forme factorisée.	$f(x) = 2(x+3)(x-5)$

La factorisation permet également de simplifier des expressions algébriques, de résoudre des systèmes d'équations semi-linéaires et de trouver des valeurs inconnues dans des problèmes écrits.

Nous venons d'exposer l'ensemble des fonctions attribuées à la factorisation au secondaire. Cet aperçu a permis de constater le rôle fondamental qu'occupe la factorisation comme outil mathématique et comme concept à enseigner au secondaire. Vu l'importance du concept, des recherches ont déjà été faites sur le sujet. Dans ces recherches, deux approches autour de la factorisation peuvent être discernées, l'une reposant sur la calculatrice symbolique et l'autre centrée sur les tuiles algébriques. Ces recherches visent à pallier aux difficultés ressenties par les élèves autour de la factorisation.

1.4 Recherches réalisées autour de la factorisation

1.4.1 Recherches développées autour de l'utilisation de la calculatrice symbolique

Dans son mémoire de maîtrise, Damboise (2007) part d'un constat de difficultés des élèves autour de la compréhension de ce qu'est un facteur en mode algébrique, alors que ce concept est clairement compris dans le mode numérique. Elle y voit un blocage empêchant l'élève de faire la transposition entre ce qu'il voit de façon numérique et ce qui est vu de façon algébrique. Elle relève également des difficultés des élèves au niveau des problèmes écrits liés à la factorisation. Elle donne l'exemple de la recherche des côtés d'un rectangle quand l'aire de celui-ci est donnée. Les élèves réussissent bien dans un mode numérique, mais ne font pas le lien quand vient le temps de faire la même chose en mode algébrique. Elle a mis en place une expérimentation autour de la calculatrice pour pallier à ces difficultés. Elle fait une étude comparative entre deux groupes ayant des difficultés en algèbre, l'un utilisant la calculatrice symbolique et l'autre seulement le papier et le crayon. Dans le groupe utilisant la calculatrice symbolique, elle pouvait par exemple donner l'expression $3x(7x+8)+2(7x+8)$ et demander d'écrire la forme factorisée avec la commande « factor » et la forme développée avec la commande « expand » de la calculatrice. Le groupe n'utilisant pas la calculatrice devait faire ce même travail avec papier-crayon. Ensuite quelques questions étaient posées aux élèves : « Comment peux-tu décrire la forme factorisée d'une expression? » ou « Quelle est la relation qui existe entre la forme factorisée et la forme développée? ». L'analyse des résultats a démontré que le groupe utilisant la calculatrice symbolique s'était plus amélioré que l'autre groupe dans les dimensions technique (utilisation des méthodes de factorisation) et théorique (compréhension des concepts liés à la factorisation). La chercheure souligne que la calculatrice dans ce groupe a ainsi été génératrice de formes exactes, a eu une fonction vérificatrice et a été instigatrice de discussions. Ce sont ces trois fonctions qui, selon l'auteure, ont donné confiance aux élèves en leurs réponses et qui les ont rendus plus efficaces pour factoriser avec papier-crayon (dimension technique), mais qui ont aussi fait émerger des discussions riches, et une sécurité qui a permis une analyse théorique des résultats obtenus (dimension théorique). La calculatrice symbolique semble donc être un bon outil pour l'apprentissage de la factorisation, mais il n'est pas toujours évident pour les enseignants de s'en procurer pour toute la classe. Les élèves n'ont pas habituellement accès à ce type de calculatrice.

Kieran et Drijvers (2006) ont aussi travaillé autour de l'utilisation de la calculatrice symbolique en factorisation. Leur but était de comprendre de quelle façon la pensée algébrique et les techniques se développent chez les élèves travaillant dans un environnement combinant la calculatrice symbolique et le papier-crayon. Ils ont expérimenté auprès d'élèves la factorisation du polynôme $x^n - 1$ à l'aide de la calculatrice. Ils voulaient non seulement faire trouver aux élèves une forme générale pour la factorisation de $x^n - 1$, mais aussi les faire réfléchir sur la factorisation complète des expressions. Les tâches combinaient le travail avec la calculatrice symbolique et le papier-crayon. L'idée était de confronter l'élève au résultat obtenu par papier-crayon versus celui obtenu par la calculatrice. Cette confrontation a fait évoluer les techniques de factorisation et les perceptions des élèves. Les élèves ont aussi pu pousser plus loin leurs conjectures sur les développements de $x^n - 1$. Les allers-retours entre le papier et la calculatrice symbolique ont permis d'approfondir la théorie chez les élèves. Quand les élèves voyaient que leur résultat papier-crayon ne correspondait pas au résultat donné par la calculatrice, ils tentaient de retrouver le résultat de la calculatrice avec une méthode papier-crayon. Ils poussaient alors leur réflexion plus loin et amélioraient leur technique. Par exemple, certains élèves donnaient la factorisation suivante : $x^4 - 1 = (x-1).(x^3 + x^2 + x + 1)$. Le résultat de la calculatrice avec la commande « factor » étant plutôt $(x-1).(x+1).(x^2+1)$, les élèves retournaient alors à leur factorisation pour faire une mise en évidence double avec le deuxième facteur. Cette réflexion n'aurait pas nécessairement été faite sans la calculatrice symbolique. Kieran et Drijvers en arrivent à la conclusion que :

> La technique et la théorie émergent dans une interaction mutuelle. Les observations dans les deux thèmes ont montré comment les techniques ont fait émerger des idées théoriques et dans l'autre sens, comment les réflexions théoriques ont amené les élèves à développer et utiliser des techniques efficaces. (Kieran et Drijvers, 2006, p. 256, ma traduction)

Ainsi la calculatrice symbolique offre des avenues intéressantes pour l'étude de la factorisation. Cependant, il peut paraître difficile pour certains enseignants ou certaines écoles d'intégrer les calculatrices symboliques dans une classe ordinaire. D'autres chercheurs se sont intéressés à exploiter l'enseignement de la factorisation à travers l'utilisation de tuiles algébriques.

1.4.2 Recherches autour des tuiles algébriques en lien avec la factorisation

L'importance des représentations visuelles en lien avec la factorisation est mise de l'avant par Radford (1996) quand il décrit le rôle de la géométrie dans le développement de l'algèbre. Il fait une revue de quelques liens historiques entre la géométrie et l'émergence de l'algèbre. Radford y voit ensuite des implications pour l'enseignement. Il se pose des questions sur le rôle de l'histoire dans l'enseignement de l'algèbre et une de ses questions d'ouverture est :

> Est-il à notre avantage de développer certains éléments de « découpage et reconfiguration géométrique » [...] dans nos classes pour faciliter l'acquisition de concepts algébriques de base? Est-ce que l'enseignement de procédures de « découpage et reconfiguration » peut éveiller les élèves à la pensée analytique requise dans l'apprentissage de l'algèbre? (Radford, 1996, p. 51, ma traduction)

Allant dans ce même sens, Sharp (1995) a comparé deux classes du secondaire dans l'apprentissage de la factorisation, l'une d'elles ayant utilisé l'approche traditionnelle et l'autre les tuiles algébriques. Aucune différence n'a été notée entre les résultats scolaires de ces deux groupes d'élèves. Toutefois, elle a remarqué une évolution dans le comportement des élèves face aux tuiles. Au début de l'expérimentation, les élèves faisaient une distinction claire entre les tuiles et les mathématiques ce qui n'est plus le cas à la fin de la recherche, les élèves utilisant alors les tuiles comme un outil leur permettant de résoudre des problèmes. Les propos des élèves autour des tuiles disparaissent au long de l'étude pour faire face au contenu mathématique, les tuiles servant comme support visuel à la résolution et à la mathématisation.

Dans son mémoire de maîtrise Hosson (1999) a cherché à cerner l'apport de tuiles algébriques comme matériel concret dans l'apprentissage de l'algèbre et plus précisément, la multiplication et la division de polynômes. Dans son cadre théorique, Hosson note la nécessité d'une vision historique pour montrer que le raisonnement géométrique est omniprésent dans l'histoire de l'algèbre. Son cadre conceptuel illustre que des manipulations algébriques peuvent être associées à des manipulations géométriques. Ainsi, on peut illustrer le produit géométrique de $(a + b)^2$ de la façon suivante :

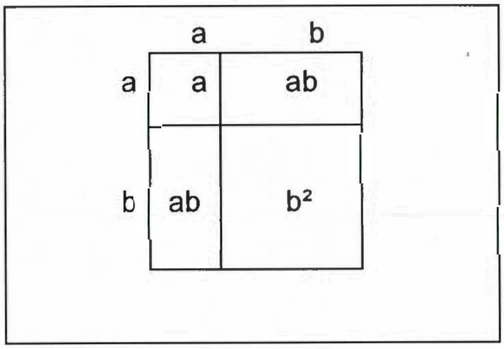


Figure 1.3 Représentation du carré d'un binôme tirée d'Hosson (1999, p. 30)

Dans son expérimentation, Hosson a utilisé les tuiles algébriques présentes dans les manuels scolaires, qui s'apparentent aux représentations utilisées dans l'histoire, pour faire un lien entre la géométrie et l'algèbre.

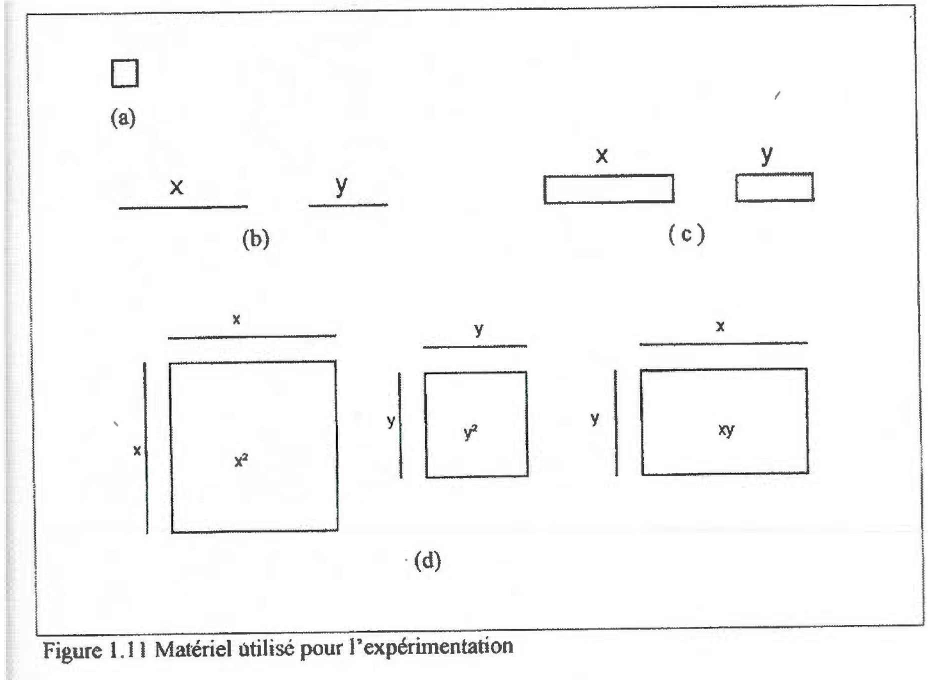


Figure 1.4 Tuiles algébriques tirées d'Hosson (1999, p.32)

L'expérimentation de Hosson a consisté en quatre entrevues d'élèves de troisième secondaire. La première partie de l'expérimentation concernait la multiplication de binômes tandis que la deuxième traitait de la division de polynômes. Les résultats de ces entrevues montrent que les élèves comprennent bien comment construire des rectangles avec les tuiles algébriques quand on a des termes positifs. Par contre, en général, les élèves ne font pas le lien entre les manipulations faites géométriquement et celles produites algébriquement. Ils observent le résultat final mais ne font pas nécessairement attention par eux-mêmes aux étapes de construction qui permettent de donner du sens aux algorithmes de multiplication ou de division de polynômes. Elle observe aussi que les manipulations sont très variées d'un élève à l'autre et que l'on arrive ainsi à des résultats différents et parfois complexes. Ces réponses amènent cependant des discussions très constructives sur l'équivalence d'expressions algébriques. Les élèves placent les tuiles différemment et il n'est pas évident que toutes les réponses sont équivalentes. L'approche par tuiles algébriques semble aussi plus efficace dans le cas de la division que pour la multiplication. En effet, certaines manipulations géométriques dans la division correspondent directement aux manipulations faites algébriquement et aident donc quand vient le temps de diviser de façon algébrique. Les limites de l'approche par les tuiles algébriques se situent surtout dans la soustraction de surfaces ou au niveau des aires négatives dans la multiplication. L'auteure fait donc quelques recommandations quand elle propose d'intégrer les tuiles algébriques à l'enseignement.

> L'utilisation d'une telle approche [...] cesse d'être pertinente quand on propose des cas où il faut soustraire une aire selon les deux dimensions du rectangle. On obtient des expressions trop lourdes et il faut parfois faire plusieurs calculs intermédiaires pour simplifier les expressions. Les élèves sont alors concentrés sur les manipulations géométriques et ils oublient de raisonner. [...] En fait, il faut s'arrêter au moment où l'utilisation des tuiles algébriques devient plus compliquée qu'apprendre les algorithmes de calcul. (Hosson, 1999, p.167)

Hosson propose, à la fin de son mémoire, de déterminer les raisonnements des élèves dans le cas de la factorisation de polynômes. Ainsi, connaissant les avantages et les limites des tuiles algébriques, il serait intéressant d'adapter cet outil pour l'utiliser dans l'apprentissage de la factorisation. Une représentation visuelle est sans aucun doute un ajout positif si elle reste simple et tend à disparaître quand l'élève est plus à l'aise avec le concept et peut travailler davantage algébriquement.

Dans cette étude je m'intéresse à la façon dont l'enseignant utilise les représentations visuelles pour l'enseignement de la factorisation, plus particulièrement à la méthode du rectangle (voir section 1.1.).

1.5 Comparaison entre les tuiles algébriques et la méthode du rectangle

La méthode du rectangle est utilisée en arithmétique pour travailler la multiplication de deux nombres. Englert et Sinicrope (1994) proposent ce modèle pour visualiser la multiplication de deux nombres entre 10 et 100. Comme on peut le voir dans la figure 1.5, les deux nombres représentent les côtés d'un rectangle et leur multiplication correspond à l'aire de ce rectangle. On partage ces côtés pour avoir les unités et les dizaines séparément. Ensuite, on calcule l'aire des quatre rectangles formés. Chacune des aires de ces rectangles peut être liée à une étape de l'algorithme de multiplication que les élèves apprennent au primaire.

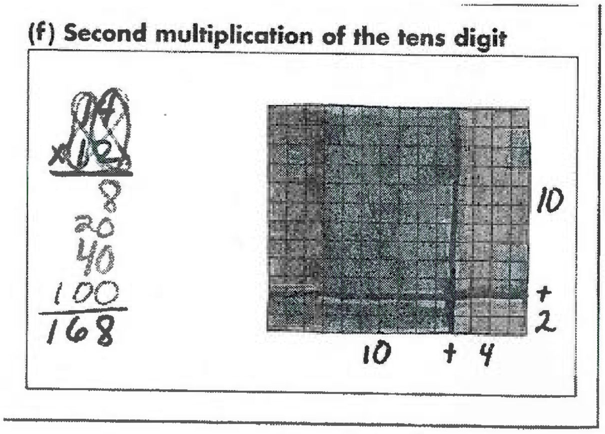


Figure 1.5 Représentation visuelle de la multiplication (Tirée d'Englert et Sinicrope, 1994, p.448)

Les auteurs affirment que le temps investi dans une approche visuelle comme celle-ci en vaut la peine car les élèves sont par la suite capables de donner du sens à l'algorithme de multiplication et ont donc une compréhension plus permanente de ce concept. Ils citent aussi Skemp (1971) qui affirme qu':

> Utiliser des modèles de manipulation est nécessaire pour que les enfants puissent bâtir des structures pour comprendre des concepts plus abstraits, ces structures les rendent capables d'apprendre plus de concepts mathématiques et de résoudre des problèmes. (Englert et Sinicrope, 1994, p. 448, ma traduction)

Les auteurs ajoutent qu'en utilisant le modèle du rectangle pour la multiplication, les élèves se font donc une structure qu'ils pourraient appliquer ensuite pour la multiplication de fractions ou la multiplication de polynômes. C'est cette dernière avenue que j'ai décidé d'explorer. Au lieu d'avoir un côté qui mesure $10 + 2$, ce même côté peut devenir $3x + 2$ par exemple.

J'ai choisi d'utiliser la méthode du rectangle pour différentes raisons. Tout d'abord, les tuiles algébriques impliquent une grande quantité de matériel à amener en classe. Pour que les élèves apprennent en manipulant, il faut plusieurs ensembles de tuiles, au moins un par équipe de deux ou trois élèves. L'enseignant pourrait avoir seulement son ensemble et montrer aux élèves comment procéder, mais on perd l'avantage premier des tuiles, qui est de faire une manipulation par soi-même pour faire un lien avec la démarche algébrique. De plus, on ne peut utiliser les tuiles pour factoriser des polynômes avec des termes qui ont de grands coefficients, à cause de la limite de matériel. Même un cas assez simple comme $10x^2 + 5xy + 4x + 2y$ requiert 21 tuiles. On peut ajouter à cela que l'utilisation des tuiles devient très laborieuse pour des expressions négatives ou avec des expressions plus complexes. Finalement, Hosson (1999) souligne qu'avec les tuiles algébriques, les élèves sont souvent trop concentrés sur les manipulations géométriques au détriment des manipulations algébriques.

Voyons comment on procèderait avec ces deux outils pour l'exemple suivant : $10x^2 + 5xy + 4x + 2y$. Tout d'abord, on présente chacun des termes de cette somme, soit par des tuiles algébriques, soit avec des représentations dessinées. Il s'agit ensuite de les assembler pour former un grand rectangle.

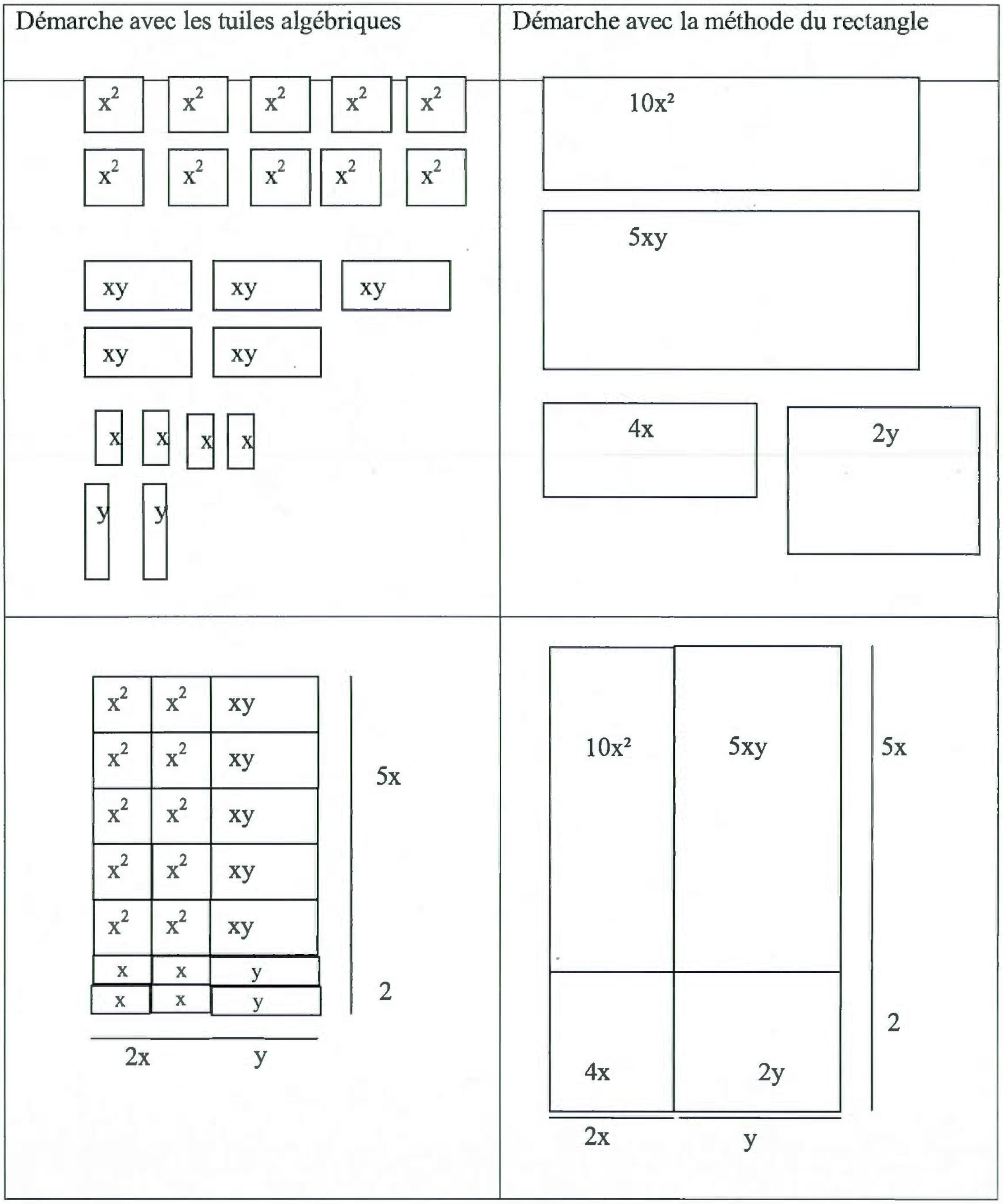


Figure 1.6 Comparaison d'une démarche avec tuiles et de la méthode du rectangle

Comme on peut le remarquer, la méthode du rectangle implique moins de manipulations, on a moins de morceaux, donc moins de possibilités de les placer pour former un rectangle. De plus, on est plus proche de la démarche algébrique. Cependant, je n'ai pas trouvé d'étude portant sur cette représentation visuelle dans l'enseignement de la factorisation.

Les recherches autour de la factorisation ont beaucoup porté sur l'élève et son apprentissage, à travers l'élaboration de séquences d'enseignement. Peu de chercheurs ont essayé de comprendre ce qui se passe en classe au moment de l'enseignement de la factorisation et de s'attarder sur la place et le rôle des représentations visuelles. Pourtant, Robert (2001) souligne que l'enseignant intervient largement sur les apprentissages des élèves, même s'il n'est pas le seul facteur. D'ailleurs, plusieurs chercheurs (Hosson, 1999; Pierce, 2002; Shama et Dreyfus, 1994) mettent de l'avant le rôle essentiel de l'enseignant dans l'enseignement de la factorisation en lien avec des représentations visuelles.

1.6 Le rôle de l'enseignant dans l'enseignement de la factorisation

Hosson (1999) souligne l'importance des interventions de l'enseignant(e) qui doit prendre en compte la diversité des raisonnements et doit porter une attention particulière à faire le lien entre la démarche géométrique et algébrique, reliant chaque étape de calcul avec la manipulation géométrique. Pierce (2002) ajoute que le rôle de l'enseignant est primordial pour aider les élèves dans la tâche de reconnaissance des formes équivalentes. En effet, selon lui, la discussion sur les expressions prend peu de temps et aide les élèves à prévoir un résultat algébrique. Ainsi, comme font remarquer Shama et Dreyfus (1994) la combinaison de la méthode algébrique et visuelle peut être bénéfique seulement si on comprend bien le lien entre les deux. Le rôle de l'enseignant(e) est de favoriser ce lien étroit et raisonné entre les modes visuel et algébrique.

Comme présenté, plusieurs recherches se sont intéressées à étudier l'apport de différentes outils (calculatrice symbolique, tuiles algébriques) pour pallier aux difficultés que les élèves ressentent face à factorisation. Toutefois Shama et Dreyfus (1994) et Hosson (1999) soulignent l'importance du rôle de l'enseignant pour accompagner les élèves pour faire le lien entre ce que l'outil présente et l'écriture algébrique qui en découle. Je n'ai cependant pas trouvé de recherche qui s'intéresse aux pratiques d'enseignement élaborées à partir de la factorisation. Dans cette recherche, je souhaite ainsi étudier la pratique effective des enseignants autour de l'utilisation des représentations visuelles dans une séquence d'enseignement de la factorisation.

1.7 Objectifs de recherche

Mon questionnement tourne autour de l'utilisation des représentations visuelles, plus particulièrement la méthode du rectangle. Celles-ci visent à donner du sens à la factorisation pour les élèves du secondaire. Je m'intéresse également au rôle de l'enseignant dans cette construction de sens. À quels moments les représentations visuelles sont-elles introduites (place des représentations visuelles dans la séquence d'enseignement) et à quelles fins (rôles de ces représentations)? Les objectifs de la recherche peuvent s'énoncer comme suit :

- Analyser les pratiques enseignantes autour de l'utilisation de la méthode du rectangle dans l'enseignement de la factorisation dans les classes de mathématiques du secondaire.

- Dégager la place et le rôle qu'occupent les représentations visuelles dans les pratiques enseignantes portant sur la factorisation.

CHAPITRE II

CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans la problématique, il a été question de plusieurs difficultés liées à la factorisation et de l'importance que cette notion a dans le programme scolaire du secondaire au Québec ainsi que certaines initiatives de recherche pour contrer ces difficultés. Dans le cadre théorique, je vais m'intéresser au concept de factorisation sur un plan théorique. Certaines recherches citées dans la précédente section m'aideront d'abord à définir le concept de factorisation. Ensuite, une incursion dans l'histoire permettra de voir l'importance qu'ont eues les représentations visuelles dans l'évolution de l'algèbre et plus particulièrement, dans le développement et la factorisation en algèbre. L'importance des représentations visuelles et les défis soulevés par l'utilisation de celles-ci dans un contexte de factorisation dans une classe du secondaire seront étudiés par la suite. Tout cela amènera la construction d'un cadre sur les habiletés à développer en factorisation. Finalement, comme cette recherche s'intéresse également à l'enseignant, il sera aussi nécessaire d'avoir recours à un cadre sur les pratiques enseignantes.

2.1 Les différentes formes de factorisation

Comme mentionné dans la problématique, on ne peut parler de factorisation sans parler de développement et de distributivité. En effet, en algèbre, on peut développer une expression algébrique pour trouver son expression équivalente : $2x\ (3x + 4) = 6x^2 + 8x$. Le processus inverse est la factorisation, on cherche alors à écrire une expression algébrique en un produit de facteurs : $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)\ (x + 1)$.

Matz (1992) souligne que factoriser veut dire réécrire toute l'expression algébrique comme un produit de facteurs. J'ai déjà mentionné que, selon Matz, la relation réciproque entre le développement et la factorisation peut causer des problèmes chez certains élèves. En arithmétique, le processus de résolution d'un problème est souvent unidirectionnel contrairement au processus algébrique qui peut aller dans les deux sens. La factorisation s'exprime ainsi à travers un produit de facteurs, et est reliée à la distributivité et au développement de polynômes.

Plusieurs manuels scolaires affirment que factoriser, c'est « exprimer des expressions algébriques par une multiplication de facteurs » (Guay, 1996, p. 63; Breton, 1997, p. 169).

Dans le Glossaire Mathématique, la factorisation est liée aux polynômes :

> Décomposer un polynôme en facteurs consiste à chercher des polynômes de degrés inférieurs dont le produit est égal au polynôme donné. Cette opération est appelée une factorisation. (De Champlain, 1994, p. D12-13)

Factoriser, c'est ainsi décomposer un polynôme en facteurs de degrés inférieurs. Le produit des facteurs obtenus est équivalent au polynôme de départ, on peut retrouver le polynôme de départ en développant l'expression factorisée. On peut remarquer que dans l'enseignement secondaire, il n'est présenté aux élèves qu'une seule et unique factorisation possible. Par exemple $8x^2-16x$ sera factorisé à l'école comme suit : $8x(x-2)$ alors qu'il existe une infinité de factorisations possibles dans R (ensemble des réels), comme par exemple $16x(\frac{1}{2}x-1)$. Un survol des manuels du deuxième cycle du secondaire m'a permis de constater que la possibilité de faire au moins deux factorisations n'est pas présentée. De plus, dans les manuels du secondaire, il y a peu de factorisations impliquant des irrationnels. La démarche attendue d'un élève pour la factorisation du polynôme $2x^3 -2x$ est $(x^2 - 1)\ (2x)$. L'élève doit alors reconnaître que (x^2-1) se factorise encore en $(x-1).(x+1)$, la forme attendue est donc $(x-1).(x+1).(2x)$. On pourrait ici s'arrêter à la première forme $(x^2-1).(2x)$ qui est une forme de factorisation correcte car les polynômes qui apparaissent sont de degrés inférieurs au polynôme de départ . On pousse toutefois les élèves à poursuivre la factorisation mais à quelles fins?

Pour certaines expressions algébriques (bien choisies), une représentation visuelle permet d'illustrer la factorisation. Par exemple, pour factoriser l'expression $x^4 + xy + 4x + 4y$, il faut trouver les côtés d'un rectangle dont l'aire est représentée par ce polynôme. En plaçant les termes du polynôme comme des parties du rectangle, on peut trouver que les côtés sont $(x+4)$ et $(x+y)$ et donc, que l'on peut factoriser le polynôme $x^4 + xy + 4x + 4y$ en $(x+4)\ (x+y)$.

On retrouve dans les glossaires mathématiques tout comme dans le programme scolaire québécois plusieurs techniques de factorisation[3]. La première à être vue est souvent la **mise en évidence simple** où l'on recherche un seul facteur commun (le plus grand) comme dans l'exemple suivant : $5x + 15 = 5(x + 3)$. La mise en évidence double est reliée à la mise en évidence simple :

> Lorsqu'on applique la mise en évidence simple plusieurs fois, on parle de mise en évidence répétée. Si elle est appliquée deux fois, on parle de **double mise en évidence.**
> Exemple : $x^3 + 2x + 3x^2 + 6 = x(x^2 + 2) + 3(x^2 + 2) = (x^2 + 2).(x + 3)$
> (De Champlain, 1994, p. D13)

On voit, parmi les principales techniques de factorisation, la **différence de deux carrés**, où l'on peut décomposer, par exemple, $x^2 - 4$ en $(x + 2)\ (x - 2)$. Dans les manuels scolaires, on souligne à l'élève qu'il y a certaines identités algébriques, comme le trinôme carré.

> Un trinôme qui peut s'exprimer comme un binôme élevé au carré s'appelle un **trinôme carré.** Exemple : Le trinôme $x^2 + 6x + 9$ est un trinôme carré, équivalent à $(x+ 3)^2$. (Guay, 2008, p. 54)

Les identités remarquables comme la ***différence de carrés,*** $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$, le ***carré d'une somme*** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et le ***carré d'une différence*** $(a-b)^2 = a^2 -2ab + b^2$ sont également des outils au service de la factorisation.

On voit également la décomposition d'un **trinôme** qui peut se traduire sous la forme d'un produit de deux binômes, comme dans l'exemple suivant : $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$. On montre souvent la technique du produit et somme pour faire la factorisation d'un trinôme. Ainsi, dans l'exemple précédent, il faut trouver deux nombres dont la somme est -5 (le coefficient du terme en x de l'expression) et le produit est 6 (le produit du coefficient en x^2 et du terme constant). Ces deux nombres sont -2 et -3. L'élève peut alors récrire l'expression $x^2 - 5x + 6$ en une expression équivalente : $x^2 - 2x - 3x + 6$ et faire ensuite une double mise et évidence pour obtenir l'expression factorisée : $(x - 2).(x - 3)$.

On aborde notamment dans l'enseignement de la factorisation la **complétion de carré** comme technique pour factoriser un trinôme en ajoutant une certaine valeur à une expression pour obtenir un trinôme carré. Ainsi, si on veut factoriser le trinôme $x^2 + x - ¾$ par complétion de carré, on le transforme successivement en :
$x^2 + x + ¼ - ¾ - ¼ = (x + ½)^2 - 1 = (x + ½ + 1)(x + ½ - 1) = (x + 3/2)(x - ½)$.

Reconnaître les différentes formes reliées à la factorisation est donc une habileté à développer chez l'élève. Dépendamment de l'expression donnée, il faut être habile à reconnaître laquelle de ces formes est la plus adaptée pour factoriser. L'élève doit voir que dans l'expression $12x^2 - 3x$, il doit faire une mise en évidence simple pour obtenir l'expression factorisée $3x.(4x-1)$. L'expression $4x^2-9$ représente une différence de carrés pouvant être factorisée comme suit : $(2x-3).(2x+3)$. Identifier la forme de factorisation à utiliser est essentiel. L'élève possède une boîte à outils (toutes le formes de factorisation) et il doit choisir parmi ces formes celle qu'il doit utiliser et ce, selon l'expression donnée. De plus, l'élève peut être amené à utiliser plus d'une forme de factorisation. Par exemple, si on a l'expression suivante : $27x^2 - 12$, l'élève doit d'abord voir qu'il y a une mise en évidence simple à faire pour obtenir $3.(9x^2-4)$. Ensuite, il doit déceler qu'il peut factoriser encore la différence de carrés pour obtenir la factorisation : $3.(3x-2).(3x+2)$.

Le concept de factorisation est apparu très tôt dans l'histoire et il est accompagné de représentations visuelles.

---

[3] Je vais présenter ces techniques telles qu'elles sont vues au secondaire. Il ne faut toutefois pas oublier

2.2 La factorisation dans l'histoire

Un détour dans l'histoire des mathématiques semble démontrer le rôle important qu'a jouée la géométrie dans l'algèbre. On peut remonter aussi loin que l'époque babylonienne (2000 à 1600 avant Jésus-Christ) pour retrouver des représentations géométriques d'équations algébriques. Cette idée de lier géométrie et résolution de problème à caractère algébrique a été développée tout au long de l'histoire avec notamment les Grecs (3e siècle) et les Arabes (9e siècle). Pour mieux comprendre le raisonnement derrière les représentations utilisées dans l'histoire, je vais présenter les trois civilisations qui ont utilisé la géométrie et les manipulations pour résoudre des problèmes algébriques.

2.2.1 Les Babyloniens

Certaines tablettes babyloniennes, datant de 2000 à 1600 avant Jésus-Christ, proposent des problèmes écrits à résoudre. La résolution est représentée par des mots expliquant les calculs à faire, on fait référence à des carrés et à leur relation avec leurs côtés. Par exemple, pour parler de ce qui serait aujourd'hui x^2, les Babyloniens parlent de « surface » et pour x, ce serait « le côté ». Hoyrup (2007) donne un exemple de ce qu'était un problème et sa résolution sur une tablette babylonienne :

> J'ai ajouté la surface et le côté de mon carré et c'est ¾. Prends 1 comme étant le coefficient du côté de mon carré. Divise 1 en deux parties. ½ x ½ = ¼. Tu l'ajoutes à ¾. 1 est le carré de 1. Tu enlèves ½ que tu as multiplié par lui-même, et ½ est le côté de mon carré. (traduit par Hosson, 1999, p. 8)

Une représentation visuelle de cet algorithme expliqué en mots rend la résolution du problème beaucoup plus claire. Ce problème en particulier peut être représenté géométriquement par la figure suivante :

---

que la factorisation n'est pas unique.

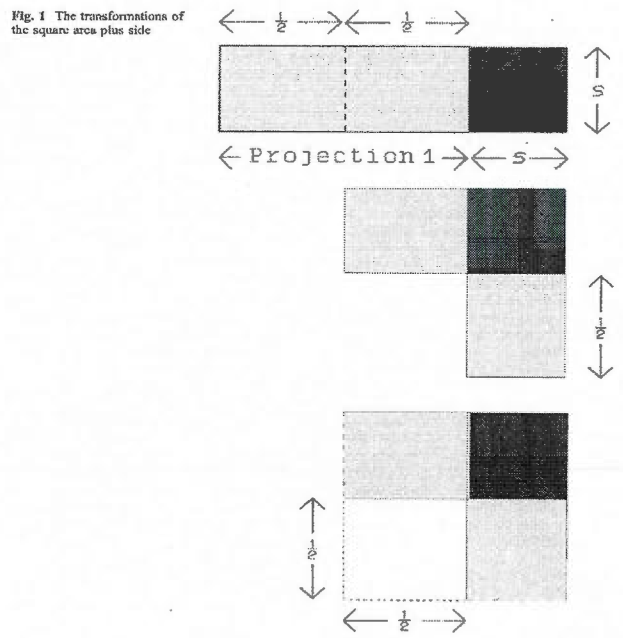


Figure 2.1 Représentation visuelle de la complétion de carrés dans l'histoire (Tirée d'Hoyrup, 2007, p. 267)

La première figure correspond à la représentation visuelle de départ. On a la « surface », x^2, qui correspond au carré, et le « côté » qui est représenté par un rectangle de dimension x par 1. Ensuite, on divise ce rectangle en deux parties pour le repositionner. On a alors ajouté un carré de dimension ½ par ½. Cela correspond à l'action algébrique d'ajouter le carré de la moitié du coefficient du terme en x pour obtenir un trinôme carré. On a ensuite un carré de dimension x par ½. On peut alors trouver la valeur de x. Cette façon de résoudre l'équation correspond à la méthode de complétion de carré telle que vue au secondaire. En effet, selon Hoyrup (2007), la traduction de ces étapes en algèbre serait :

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1x = \tfrac{3}{4} \quad &\leftrightarrow \quad x^2 + 1x + (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{4} + (\tfrac{1}{2})^2 \\
&\leftrightarrow \quad x^2 + 1x + (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 \\
&\leftrightarrow \quad (x + \tfrac{1}{2})^2 = 1 \\
&\leftrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2} = 1 \\
&\leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Figure 2.2 Étapes algébriques de la complétion de carré (tirée d'Hoyrup, 2007, p. 268).

Présentement, la méthode de complétion de carré est surtout enseignée de façon algorithmique. Il peut ainsi être difficile pour un élève du secondaire de donner du sens à ce qu'il fait. En ajoutant une représentation visuelle à la méthode de factorisation, comme le faisaient les Babyloniens, il est plus facile de voir les étapes du raisonnement derrière la façon de faire, tout en donnant du sens à la technique.

2.2.2 Les Arabes

Un peu de la même façon que les Babyloniens, les Arabes ont tenté de résoudre des problèmes algébriques en représentant des valeurs inconnues par des côtés de rectangles. Au début du neuvième siècle, le mathématicien arabe Al-Khwarizmi a répertorié six types d'équations du deuxième degré et a bâti des algorithmes de résolution pour chacun d'eux. Il illustrait ses façons de faire par des représentations visuelles.

Par exemple, pour trouver la solution d'une équation de type $x^2 + bx = c$, il explique un algorithme qu'on peut relier à une représentation géométrique. Charbonneau (1996) donne l'exemple de l'équation $x^2 + 10x = 39$ résolue par Al-Khwarizmi.

> La partie gauche de l'équation (x^2 +10x) correspond à un rectangle formé par un carré de côté x et par un rectangle de base 10 et de hauteur x. Le côté droit de l'équation nous dit que l'aire de ce rectangle correspond à 39 unités. [...] Al-Khwarizmi divise le rectangle d'aire 10x en quatre partie d'aire de 10/4x et les place sur les quatre côtés du carré. La nouvelle figure, qui a la forme d'une croix, a toujours une aire de 39. En la complétant en un carré plus grand, on a une nouvelle aire de 39 + $4(10/4)^2$ et les côtés sont de x + 10/2. On obtient alors que $(x + 10/2)^2 - (10/2)^2 = 39$ et donc que $x = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39} - \frac{10}{2}$.

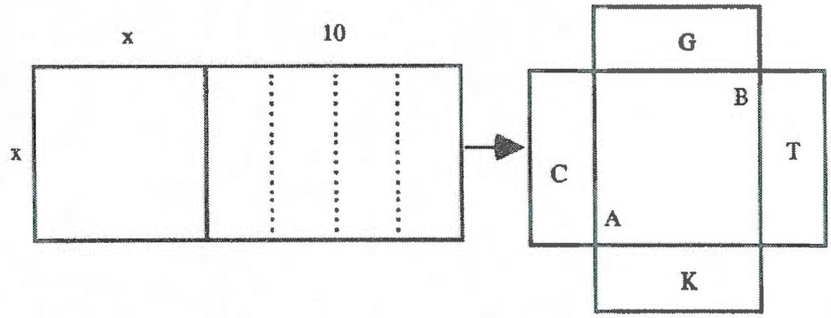


Figure 2.3 Autre représentation visuelle de la complétion de carrés (Tirée de Charbonneau, 1996, p. 27, ma traduction)

Cette autre façon d'utiliser les représentations visuelles pour résoudre un problème algébrique montre la force d'une figure pour la compréhension d'une démarche. Ici encore la représentation visuelle sert d'appui pour donner l'idée de la solution d'un problème.

2.2.3 Les Grecs

On a vu que les Babyloniens et les Arabes ont utilisé chacun à leur manière des représentations visuelles pour résoudre des problèmes algébriques, notamment pour trouver des solutions à des équations quadratiques ou pour factoriser. Les Grecs avaient eux aussi leur façon de faire. Par exemple, Diophante se réfère à des représentations géométriques pour résoudre un tel problème :

> Trouver les deux nombres tels que leur somme est égale à 20 et leur produit égale 96. (Tirée de Radford, 1996, p. 44, ma traduction)

Pour résoudre ce problème, Diophante construit d'abord un carré dont les côtés sont la moitié de la somme des deux nombres. On obtient un carré de 10 unités de côté et de 100 unités carrées d'aire. Il y a donc un excédent de 4 unités carrées d'aire que Diophante représente par un carré de 2 unités par deux unités, à enlever. On peut alors transformer, avec une procédure de découpage et de reconfiguration, la figure en un rectangle de 12 unités par 8 unités, qui sont les deux nombres recherchés.

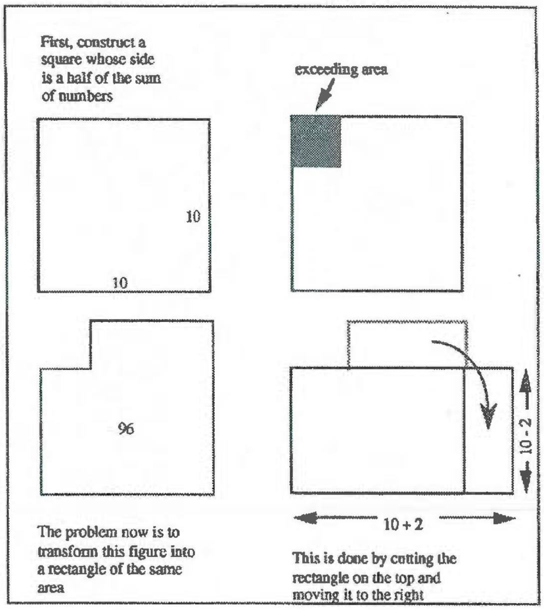


Figure 2.4 Représentation visuelle de la différence de carrés dans l'histoire (Tirée de Radford, 1996, p. 44)

Cette façon de faire rend le processus dynamique. Chaque étape de la résolution du problème peut être représentée par une figure ou par une transformation de celle-ci. Ce qui est doublement intéressant, c'est que même si l'élève n'a pas de notions algébriques, il peut approcher ce problème de façon visuelle en comprenant les propriétés de la figure. Il serait intéressant de faire le lien avec les étapes algébriques qui découlent de cette démarche plus géométrique.

Dans ces trois grandes civilisations, les représentations visuelles sont ainsi omniprésentes dans la résolution de problèmes. Il y a donc un intérêt à se pencher sur ce type de représentation pour supporter les différentes étapes menant à la factorisation.

2.3 Importance des représentations visuelles

Dans plusieurs domaines de la mathématique, on a recours à des représentations visuelles pour ajouter une dimension plus concrète à certains concepts. On représente des probabilités visuellement par des arbres, on trace des esquisses par exemple pour approcher les fonctions. Par représentations visuelles, j'entends une façon de représenter de façon spatiale les éléments d'un problème pour aider à le résoudre. Shama et Dreyfus (1994) expliquent bien ce qu'est une représentation visuelle dans le contexte d'une résolution de problème.

> Le terme « visuel » est utilisé pour référer à la manière par laquelle l'information mathématique est présentée et utilisée durant la résolution de problème. En fait, la représentation « visuelle » n'a pas grand-chose à voir avec la vision comme un des cinq sens. Elle fait plutôt référence à l'utilisation de propriétés spatiales [...]. (Shama et Dreyfus, 1994, p. 45, ma traduction)

Duval (1994) a aussi beaucoup travaillé sur les représentations en mathématiques. Il explique lui aussi l'utilité de figures dans la résolution de problème.

> Permettant ainsi de saisir d'un coup une situation dans son ensemble, les figures sont le moyen le plus direct d'en explorer les différents aspects, d'anticiper les résultats d'une démarche, de sélectionner une solution. Cette rapidité et cette économie d'appréhension d'une situation justifie l'importance que les mathématiciens attachent au rôle des figures dans la solution des problèmes. (Duval, 1994, p. 121)

Duval énonce plusieurs manières d'appréhender une figure dans une démarche de solution de problème. Il peut y avoir une appréhension perceptive d'abord, une appréhension discursive, séquentielle ensuite et finalement, celle qui m'intéresse plus particulièrement, une appréhension opératoire d'une figure. L'appréhension opératoire selon Duval, a une fonction heuristique. On veut utiliser des figures pour « montrer l'idée de la solution d'un problème » (Duval, 1994, p. 126).

> L'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. [...] Ces traitements peuvent être effectués aussi bien mentalement que réalisées matériellement (par des actions de pliage ou de découpage de feuilles, par l'emploi de puzzles de pièces de différentes formes [...]). (Duval, 1994, p. 126)

Pour illustrer ses propos, Duval montre l'exemple de la relation de Pythagore qui a été illustrée avec des figures par plusieurs mathématiciens. On peut mieux comprendre l'appréhension opératoire, quand on voit les transformations qu'on a faites à une figure de départ, pour arriver à voir la relation de Pythagore dans le triangle rectangle. Ainsi, le mathématicien Hindu a formé un puzzle. Le carré de départ a la même aire que celui de la fin, donc on garde des propriétés de la figure. Cependant, en déplaçant des morceaux du puzzle, on peut recréer une certaine égalité. L'aire du premier carré est représentée par quatre triangles et un carré de côté c. L'aire du carré final est aussi composée des mêmes quatre triangles et des deux carrés, respectivement de côté a et b. Donc, on peut en déduire que $c^2 = a^2 + b^2$. Comme présenté, cette technique opératoire peut très bien s'appliquer en factorisation, ayant été utilisée dans l'histoire notamment pour la technique de complétion de carrés.

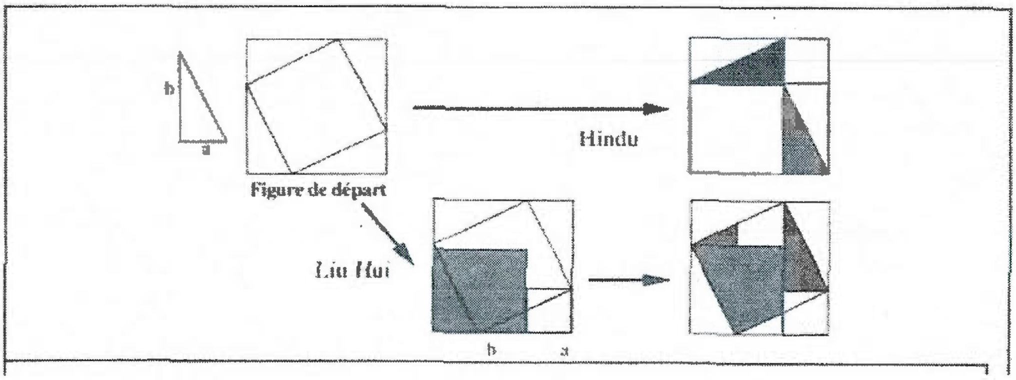


Figure 2.5 Représentation visuelle de la relation de Pythagore (tirée de Duval, 1994, p.132)

Souvent, en algèbre, un problème peut être résolu de différentes façons. Shama et Dreyfus (1994, p.45) soulignent que beaucoup de problèmes peuvent être résolus algébriquement et visuellement et que la combinaison des deux méthodes peut être bénéfique.

> Le mélange des deux stratégies, visuelle et algébrique, combine fréquemment les avantages des deux, mais elles peuvent seulement être utilisées par quelqu'un qui non seulement comprend bien les stratégies, mais aussi fait le lien entre les deux. (Shama et Dreyfus, 1994, p. 45, ma traduction)

On voit donc que les représentations visuelles sont un support intéressant pour l'apprentissage des mathématiques et ici, dans l'apprentissage de la factorisation. Toutefois l'utilisation de représentations visuelles demande une certaine habileté, notamment dans l'ordre des rectangles que l'on place pour faire, par exemple, une mise en évidence double.

2.4 Les défis soulevés par l'utilisation des représentations visuelles en lien avec la factorisation

Dans une analyse conceptuelle rédigée dans le cadre d'un cours au BES (Baccalauréat en enseignement au secondaire) à l'UQAM, Trottier et Janvier (1999) soulignent que la subdivision du rectangle constitue une difficulté importante chez les élèves. En effet, dans la représentation visuelle d'une mise en évidence double, l'élève doit remarquer que chaque secteur a un côté commun avec deux autres secteurs, la façon de placer les rectangles n'est donc pas arbitraire, il doit y avoir un facteur commun horizontalement et un facteur commun verticalement et ce, pour chaque ligne et chaque colonne. Ainsi, une fois que le premier rectangle est placé, on doit placer les autres par rapport à ce premier rectangle. On doit donc développer l'habileté à ***représenter visuellement l'expression à factoriser***. Prenons par exemple l'expression $2x + 2y + 3x + 3y$. L'élève doit d'abord interpréter chacun des termes comme l'aire d'un rectangle. Le terme $2x$ représente ainsi l'aire d'un rectangle dont il faut déterminer la mesure des côtés. On a plusieurs cas possibles : les côtés peuvent mesurer 2 et x ou 1 et $2x$ ou 4 et $\frac{1}{2}x$, etc. Le choix de la longueur des côtés du rectangle se fait en prenant en considération les autres termes de l'expression et en repérant les facteurs communs. On peut ainsi remarquer par exemple que le terme $2y$ et $2x$ ont un facteur en commun 2, on choisira ainsi comme côtés des rectangles d'aires $2y$ et $2x$ les mesures des côtés (2 et x) et (2 et y). Ce raisonnement appliqué à tous les termes de l'expression permet de construire la représentation suivante :

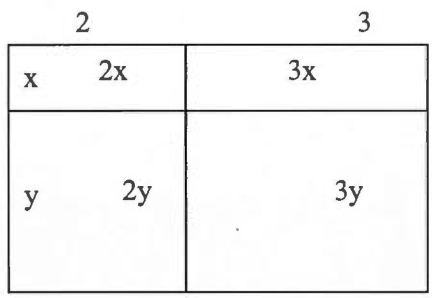


Figure 2.6 Représentation visuelle d'une expression algébrique à factoriser.

Une autre habileté à mettre en place chez les élèves est celle de savoir ***reconnaître les différentes formes de factorisation*** (Trottier et Janvier, 1999), comme vu au point 2.1.

L'élève exerce un engagement réfléchi face à l'expression développée afin de trouver la technique de factorisation la plus adéquate pour factoriser l'expression. Les techniques de factorisation sont la mise en évidence simple ou double, la différence de carré, le carré d'une somme, le carré d'une différence et la complétion de carrés. Il y a ainsi une distinction entre les connaissances, on connaît les différentes techniques de factorisation, et les métaconnaissances (Artigue, 1993) qui portent sur l'utilisation, l'utilité, la gestion de ces techniques, selon l'expression fournie. Ainsi devant l'expression $x^2 + 4x + 3$, l'élève doit être capable de reconnaître parmi toutes les techniques de factorisation (qui sont des connaissances) celle qui va lui permettre de factoriser cette expression. Dans ce cas-ci, c'est la complétion de carrés (ce choix d'une technique de factorisation est ce qu'on appelle une métaconnaissance).

Comme le souligne Hosson (1999), il est plus difficile pour les élèves de visualiser des soustractions d'aires. Des exemples utilisant des négatifs peuvent alors causer des problèmes. De plus, comme les élèves peuvent placer les tuiles différemment ou écrire leurs réponses sous différentes formes, il y a un travail à faire pour vérifier que les réponses sont équivalentes.

Plusieurs chercheurs (Matz, 1984; Guin et Trouche, 1999; Ball, Pierce et Stacey, 2003) soulignent l'importance de ***reconnaître des formes équivalentes*** en algèbre. Certaines recherches ont été menées dans le but de développer cette habileté chez les élèves, mais des difficultés demeurent. Les formes factorisée et développée sont deux formes d'écriture particulières, il existe toutefois d'autres formes d'écritures équivalentes. Par exemple à partir de la représentation visuelle suivante :

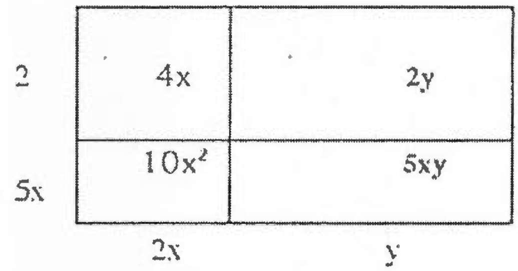


Figure 2.7 Représentation visuelle des formes factorisée et développée d'une expression algébrique.

On peut trouver différentes écritures équivalentes autres que la forme factorisée $(2+5x).(2x+y)$ ou la forme développée $4x+2y+10x^2+5xy$, par exemple les écritures $2.(2x+y)+10x^2+5xy$; $4x+2y+5x.(2x+y)$, etc.

De plus, tel que présenté, Hosson (1999) et Shama et Dreyfus (1994) relèvent l'importance du lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique. L'habileté à ***faire des allers-retours entre le mode visuel et le mode algébrique*** est à la base d'une bonne compréhension des différentes étapes d'une démarche menant à la factorisation. Dans l'exemple ci-dessous, la factorisation du polynôme 6ab +9a +8b +12 repose sur une représentation visuelle qui est modifiée dans l'action pour arriver à construire un grand rectangle avec les différents petits rectangles de départ. Chacune de ces modifications du visuel illustré, sert de support à l'écriture algébrique menant ainsi à la factorisation.

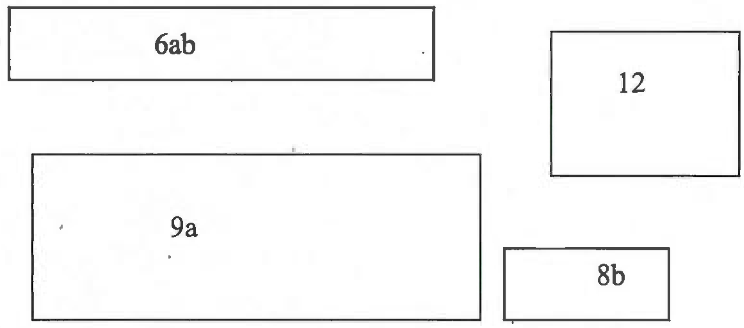
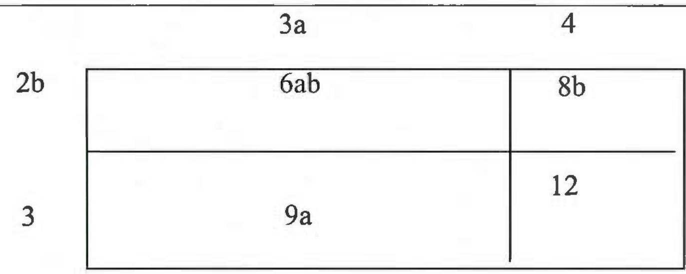
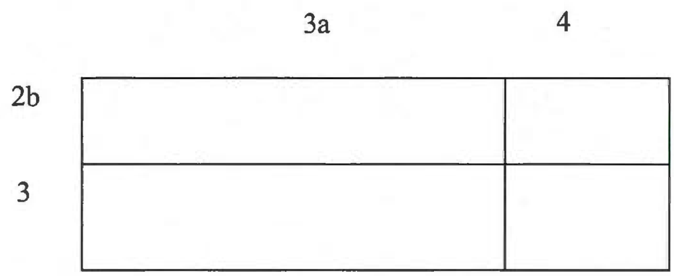
Démarche algébrique	**Démarche visuelle**
6ab +9a +8b +12	
3a(2b+3) +4(2b+3)	
(3a+4)(2b+3)	

Figure 2.8 Un exemple d'allers-retours entre la démarche algébrique et la démarche visuelle.

Finalement, Damboise (2007) souligne la difficulté des élèves à reconnaître des expressions qui ne sont pas factorisables. Par exemple, face à l'expression $a^2 + b^2$ les élèves sont portés à factoriser comme suit $(a+b)(a+b)$. Visuellement, on peut représenter l'expression a^2+b^2 par l'aire de deux carrés, l'un de côté a et l'autre de côté b, alors que l'expression *$(a+b)^2$* représente l'aire d'un côté $a+b$. Une habileté qui en ressort est celle de ***reconnaître des formes qui ne se factorisent pas.***

2.5 Un cadre de référence autour de la factorisation

Le tableau ci-dessous regroupe les cinq habiletés reliées à la factorisation qui se dégagent des études précédentes.

Tableau 2.1 Cadre de référence autour de la factorisation

Habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser Trottier et Janvier (1999)	Une expression algébrique étant donnée, on repère la ou les forme(s) de factorisation à utiliser parmi toutes les formes connues
Habilité à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser Trottier et Janvier (1999)	Un premier rectangle étant placé, il faut par la suite disposer les autres de telle façon à ce que l'assemblage de tous forme un grand rectangle. Pour assembler les différents rectangles, il faut reconnaître des côtés communs.
Habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique Shama et Dreyfus (1994) Hosson, (1999)	Des allers-retours entre la représentation visuelle et les manipulations algébriques sont faits. Chaque transformation de la figure se traduit par une expression algébrique utilisant des propriétés (associativité, mise en facteurs, etc.)
Habileté à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas Damboise (2007)	Dans l'ensemble des réels, certaines expressions ne sont pas factorisables, par exemple a^2+b^2
Habileté à reconnaître des formes équivalentes Matz (1984) Ball, Pierce et Stacey (2003) Guin et Trouche (1999)	Différentes formes existent, comme la forme factorisée, développée et des formes « intermédiaires » entre ces deux formes. Il s'agit de voir qu'elles sont toutes équivalentes.

Dans un contexte de factorisation, les études précédentes laissent penser qu'incorporer des représentations visuelles peut être bénéfique et rendre plus riche ce concept. Il serait important d'introduire la factorisation par des représentations visuelles en faisant le lien entre les manipulations algébriques et cette représentation visuelle. Les figures peuvent ainsi servir d'introduction à la factorisation, comme outil de découverte et de compréhension du concept. Le fait de représenter un problème algébrique par des figures géométriques peut donner l'idée de la démarche à suivre pour solutionner un problème.

Le tableau synthèse précédent va servir de cadre de référence pour analyser les tâches autour de la factorisation dans une séquence d'enseignement. Dans la problématique, le rôle déterminant de l'enseignant dans l'apprentissage de la factorisation a été souligné. Il est donc important de se donner des outils pour appréhender la pratique enseignante.

2.6 Un cadre de référence pour analyser les pratiques

2.6.1 Les pratiques enseignantes

Pour Robert et Rogalski (2002), les pratiques en classe désignent :

> Tout ce que l'enseignant ou l'enseignante met en œuvre avant, pendant et après la classe (conceptions activées au moment de la préparation des séances, connaissances diverses, discours mathématique et non-mathématiques pendant la classe, gestes spécifiques, corrections de productions d'élèves, etc.) (p. 506)

Lenoir (2009) donne une définition de la pratique d'enseignement qui s'approche de celle de Robert et Rogalski :

> Il s'agit d'un ensemble d'activités gestuelles et de discours opératoires singuliers et complexes en situation, ancré dans l'immédiateté du quotidien, qui se traduit dans l'utilisation originale de savoir-faire dans une situation particulière et qui s'actualisent temporellement au sein de trois phases, pré, inter et postactive. (p.12)

D'après Lenoir, pour saisir la complexité de la fonction enseignante, il importe de voir la pratique enseignante à travers trois phases. La phase pré-active d'anticipation qui est l'ensemble des actions de planification, la phase interactive qui est l'actualisation en classe et la phase postactive de rétroaction qui est l'évaluation des deux premières phases. Ainsi, on pourrait s'intéresser à analyser la planification des enseignants à travers ses notes de cours notamment (phase pré-active), de s'attarder aux séances en classe et les rétroactions après chacun des cours (phase interactive) et à une entrevue à la fin de l'expérimentation (phase post-active).

D'après ces chercheurs, la pratique peut ainsi s'appréhender à travers plusieurs éléments comme par exemple les gestes, les discours, les connaissances, les conceptions et ce, avant, pendant et après la classe. Il est également important de cerner le quotidien où l'activité a lieu, c'est-à-dire la situation particulière où elle se déroule.

Lenoir (2009) a construit un système conceptuel qui permet d'accéder à la pratique. Les deux concepts centraux de son cadre sont l'intervention éducative et la médiation. Il s'intéresse plus particulièrement aux modalités d'enseignement adoptées, au « comment enseigner ». Je rejoins l'auteur quand il énonce que l'enseignement n'est pas une application directe de modèles construits.

> « Comment enseigner » requiert dès lors de se pencher non sur le degré d'application par les enseignants de quelque méthode que ce soit, mais sur le rapport social en situation - un rapport social d'objectivation – qui s'établit entre un enseignant et ses élèves à propos des objets d'apprentissage prévus, quels qu'ils soient, à faire acquérir, c'est-à-dire sur l'ensemble des gestes et des paroles qui instaurent ces interactions (p.11)

2.6.2 Intervention éducative et médiation

Comme les pratiques enseignantes sont complexes, à travers la conceptualisation de l'intervention éducative, Lenoir expose les multiples dimensions de l'agir de l'enseignant dans ses rapports aux élèves. Il définit l'intervention éducative comme suit :

> Par intervention éducative, nous entendons dès lors, d'un point de vue opérationnel, l'ensemble des actes et des discours singuliers et complexes, finalisés, motivés et légitimés, tenus par une personne mandatée intervenant dans une perspective de formation, d'autoformation, ou d'enseignement dans un contexte institutionnellement spécifique – ici l'institution scolaire – en vue de poursuivre les objectifs éducatifs socialement déterminés. (p.14)

L'intervention est centrée sur l'action de l'enseignant qui est dans un « processus interactif intentionnel situé temporellement ». Pour caractériser l'intervention éducative, Lenoir utilise des composantes qui permettent d'appréhender la multidimensionnalité de la pratique d'enseignement. Il dégage onze composantes résumées dans le tableau suivant.

Tableau 2.2 Composantes de l'intervention éducative

Composantes	Description
Historique	Rapport à l'évolution et aux transformations qui ont marqué la fonction et la pratique enseignante.
Contextuelle	Rapport au milieu social, culturel, économique, politique, aux attentes sociales, etc.
Curriculaire	Rapport aux finalités éducatives, aux finalités institutionnelles, aux choix des savoirs retenus; à la structuration des savoirs.
Épistémologique	Rapport aux savoirs.
Éthique et morale	Rapport aux principes, aux normes et aux règles qui guident la conduite sociale, à la réflexion critique sur les valeurs sociales qui influencent les pratiques, à la responsabilité sociale de l'enseignement face aux finalités et à ses élèves.
Didactique	Rapport aux savoirs à enseigner à propos de l'apprentissage, aux processus d'enseignement spécifiques aux différentes matières scolaires.
Organisationnelle	Rapport à la gestion du temps, de l'espace de la discipline, des routines, des facteurs externes et internes.
Psychopédagogique	Rapport aux élèves d'ordre relationnel.
Socioaffective	Rapport à l'identité professionnelle, à la formation antérieure, à la motivation, aux options et visées personnelles.
Double dimension médiatrice	Rapport de l'élève au savoir et rapport aux processus médiateurs externes d'ordre pédagogicodidactique.
Temporelle	Rapport au temps.

On retrouve certaines de ces composantes chez Robert (2001) qui précise que les pratiques sont complexes, cohérentes et qu'elles subissent certaines contraintes. Robert constate qu'il faut tenir compte de la complexité des pratiques, de la nécessité d'observer en classe pour analyser les pratiques et l'importance de se centrer sur l'enseignant qui a le monopole de la cohérence de ce qui se déroule en classe. Elle distingue plusieurs contraintes qui sont à prendre en considération :

> (...) des contraintes externes comme les programmes, les horaires, la composition des classes, l'habitus lié à l'institution et des contraintes internes comme les conceptions

> personnelles, les compétences et l'expérience, les habitudes, la recherche de confort, de satisfaction, la nécessité d'une insertion sociale supposant une certaine légitimité. (Robert 2001, p.6)

Les contraintes externes définies par Robert pourraient être associées aux composantes contextuelle, curriculaire et temporelle de Lenoir. Les contraintes internes pourraient être associées aux composantes éthique et morale, psychopédagogique et socioaffective de Lenoir.

L'intervention éducative est indissociable de la médiation. Lenoir distingue deux médiations : la médiation cognitive et la médiation pédagogicodidactique. La médiation cognitive est le lien entre le sujet apprenant et l'objet de savoir. La connaissance résulte d'une intervention active de la part du sujet sur l'objet (l'assimilation), et de la part de l'objet qui agit sur le sujet (l'accommodation), tout ceci dans un espace social. Cette médiation cognitive ne sera pas étudiée dans cette étude. La médiation pédagogicodidactique est le lien entre l'enseignant et la médiation cognitive, c'est elle qui m'intéresse dans cette étude :

> La médiation est alors pédagogicodidactique, en ce qu'elle fait fondamentalement appel à la fois aux dimensions psychopédagogiques (le rapport aux élèves) et aux dimensions didactiques (le rapport au savoir), afin de mettre en œuvre les conditions jugées les plus propices à l'activation par l'élève du processus de médiation cognitive. Ainsi les deux médiations s'interpellent et interagissent. (Lenoir, 2009, p 17).

L'enseignant est vu comme un constructeur de sens, un médiateur dont le rôle est capital dans le processus d'enseignement-apprentissage.

Lenoir ajoute le concept de dispositif qui permet de concrétiser la rencontre entre les deux médiations. Il distingue les dispositifs d'ordre instrumental qui sont des objets externes comme le manuel, l'équipement informatique, l'audiovisuel, des dispositifs d'ordre procédural qui sont fondamentalement relationnels. Un dispositif procédural de type pédagogique, socio-affectif et organisationnel serait les stratégies d'enseignement, les techniques, les méthodes pédagogiques, qui sont indépendantes des contenus disciplinaires. Je porterai une attention particulière aux dispositifs utilisés par les enseignants lors de l'enseignement de la factorisation.

Le schéma ci-dessous reprend les concepts faisant partie des pratiques enseignantes et décrit les relations entre eux.

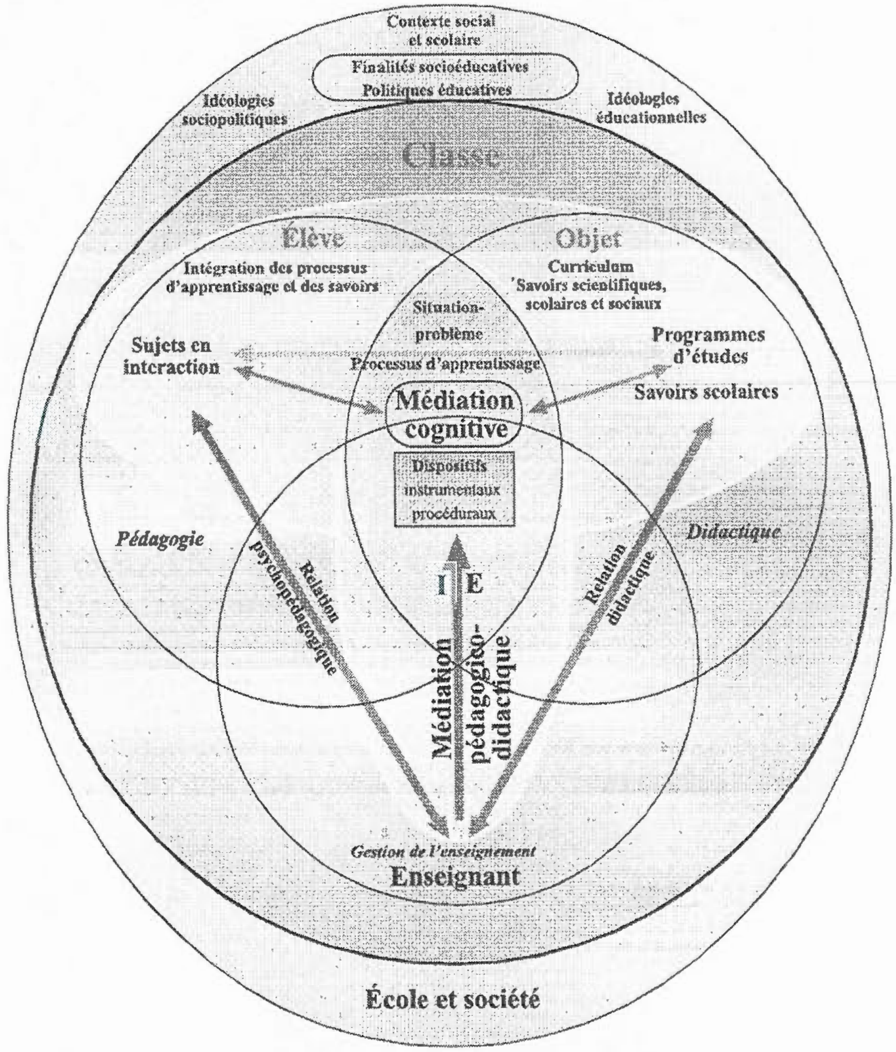


Figure 2.9 Cadre conceptuel de l'intervention éducative (Tirée de Lenoir, 2009, p.25)

2.6.3 La double approche de Robert et Rogalski[4]

Robert et Rogalski (2002) s'intéressent à l'activité de l'enseignant. L'activité désigne ce que fait et dit l'enseignant, ce qu'il pense, va penser après l'action ou a pensé pour le faire. « Il ne s'agit donc pas seulement de l'action mais aussi de ce qui génère, accompagne et contrôle l'action et qui est en partie invisible ». Il s'agit de reconstituer les activités proposées aux élèves, ce qu'elles appellent « l'itinéraire cognitif ». Elles proposent de procéder par un découpage des transcriptions en classe qui correspondent à des épisodes, indexée par une activité potentielle des élèves. Elles distinguent deux composantes, la composante cognitive et la composante médiative. La composante cognitive se rapproche de la composante didactique de Lenoir. Il s'agit d'analyser ce que l'enseignant planifie pour agir sur les connaissances mathématiques des étudiants, quels savoirs seront travaillés et quels itinéraires cognitifs l'enseignant a choisis. La composante médiative se rapproche quant à elle de la double dimension médiatrice de Lenoir. Il s'agit d'analyser les modes d'interaction en classe des différents acteurs, de voir comment l'enseignant organise les médiations entre les élèves et entre lui et les élèves. Les autres composantes de Lenoir se retrouvent également dans Robert et Rogalski à travers les marches de manœuvre, les contraintes sociales et institutionnelles et la composante personnelle. Ces dernières risquent d'apparaître plus ponctuellement.

Le tableau ci-dessous présente les composantes de la pratique enseignante dégagées par les deux chercheurs et auxquelles je vais m'intéresser.

[4] Je reviendrai sur cette double approche dans le chapitre 3.

Tableau 2.3 Composantes de l'intervention éducative retenues dans l'étude

Composante épistémologique (Rapport aux savoirs)
Composante Didactique/cognitive (Rapport aux savoirs à enseigner à propos de l'apprentissage, aux processus d'enseignement spécifiques aux différentes matières scolaires)
Composante Double dimension médiatrice/médiative (Analyser les modes d'interaction en classe des différents acteurs, voir comment l'enseignant organise les médiations entre les élèves et entre lui et les élèves)

2.7 Conclusion

À la lumière de ces considérations, à savoir que la factorisation ne se résume pas seulement à trouver des facteurs et que les représentations visuelles tendent à être très efficaces dans l'approche de concepts mathématiques, je crois qu'intégrer des représentations dans l'introduction à la factorisation semble prometteur. Non seulement, les représentations visuelles peuvent apporter un regard plus riche sur la factorisation mais en plus, elles peuvent potentiellement donner du sens à des manipulations algébriques. Dans l'histoire, on a vu que les représentations visuelles accompagnaient souvent les techniques de factorisation.

Comme dans l'histoire, les représentations visuelles concernaient les cas où les termes sont positifs, je crois qu'il serait plus simple de rester avec des cas positifs en début d'apprentissage, où l'on intègre les représentations visuelles. Cette remarque est renforcée par l'étude de Hosson qui souligne que les cas d'aires négatives compliquent l'intégration des tuiles algébriques dans l'apprentissage. Ainsi, les représentations visuelles seraient utiles en début d'apprentissage et serviraient d'outil de compréhension des techniques de factorisation. Ce support tendrait à disparaître plus on avance dans l'apprentissage de la factorisation, notamment avec des cas où les termes sont négatifs.

Je fais donc l'hypothèse qu'intégrer des représentations visuelles au début de l'apprentissage des techniques de factorisation permettrait de donner du sens à celles-ci et contribuerait à son apprentissage ultérieur. L'élève qui aura donné du sens à une technique pourra peut-être mieux s'en rappeler, mieux l'utiliser et finalement faire moins d'erreurs.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Orientation méthodologique : l'étude de cas

Les objectifs de la présente recherche dégagés de la problématique sont :

- Analyser les pratiques enseignantes autour de l'utilisation de la méthode du rectangle dans l'enseignement de la factorisation dans les classes de mathématiques du secondaire.
- Dégager la place et le rôle qu'occupent les représentations visuelles dans les pratiques enseignantes portant sur la factorisation.

Ainsi, je cherche à mieux comprendre un phénomène, soit les pratiques enseignantes au moment de l'utilisation des représentations visuelles dans la factorisation. Cette recherche est donc qualitative et se situe dans un courant interprétatif. Karsenti et Savoie-Zajc (2004) donnent une définition du courant interprétatif qui confirme ce choix pour ma recherche.

> Ce courant est animé du désir de comprendre le sens de la réalité des individus; il adopte une perspective systémique, interactive, alors que la recherche se déroule dans le milieu naturel des personnes. (p. 126)

On retrouve différents types de recherches qualitatives comme l'étude de cas, la recherche action, la recherche collaborative... La pratique enseignante autour de l'utilisation des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation est au cœur de cette étude. Un intérêt est ainsi porté au point de vue de l'enseignant, à son rationnel dans les choix qu'il fait. À quels moments utilise-t-il les représentations visuelles et à quelles fins?

Ce questionnement m'amène à choisir l'étude de cas définie comme suit :

> L'étude de cas est une technique particulière de cueillette, de mise en forme et de traitement de l'information qui cherche à rendre compte du caractère évolutif et complexe des phénomènes relatifs à un système social qui comporte ses propres dynamiques (Mucchielli, 1996 cité par Karsenti et Demers, 2000, p. 77).

Un seul cas a été choisi car il s'agit d'analyser un phénomène complexe en profondeur. Mucchielli (1996), dans Karsenti et Demers (2000), affirme qu' « un des grands avantages de l'étude de cas est de fournir une situation où l'on peut observer l'interaction d'un grand nombre de facteurs, ce qui permet de saisir la complexité et la richesse des situations sociales » (p.228). Comme il y a en jeu beaucoup de choses à analyser, le rôle de l'enseignant, celui des représentations visuelles, la façon dont les représentations visuelles sont utilisées, où elles le sont et pourquoi; il est préférable d'étudier un seul cas. Le but n'est pas de valider une technique infaillible, mais plutôt de comprendre comment on peut intégrer les représentations visuelles dans une séquence d'enseignement sur la factorisation et le rôle que celles-ci y jouent. Comme Eisenhardt (1989) le mentionne dans Karsenti et Savoie-Zajc (2004)

> La représentativité du cas est secondaire et c'est la qualité même du cas qui devient le souci principal du chercheur. Celui-ci peut alors tirer plus facilement profit de l'étude de cas dans la construction d'une théorie nouvelle, dans l'observation d'un phénomène ou dans la découverte de nouveaux faits. (p. 210)

3.2 Le choix du cas et modalités de fonctionnement

Le choix du cas. La factorisation apparaît comme un concept central dans la séquence *Sciences Naturelles* à la deuxième année du deuxième cycle. Dans la séquence *Technico-Sciences*, la factorisation est vue dans les trois années du deuxième cycle. Il est donc plus facile de faire une expérimentation en *Sciences Naturelles* où toutes les formes de factorisation sont étudiées. Il faut donc un enseignant ayant au moins un groupe dans cette séquence. Comme je cherche à comprendre les choix didactiques dans l'enseignement de la factorisation, il est préférable d'avoir un enseignant ayant enseigné au moins une fois la factorisation. De plus, l'enseignant désigné doit utiliser les représentations visuelles dans l'enseignement de ce concept.

J'ai approché Line, une collègue, qui s'est portée volontaire pour participer à mon projet. Line a 20 ans d'expérience et a enseigné les mathématiques du deuxième cycle, en particulier la factorisation depuis le début de sa carrière. À notre première rencontre, je me suis aperçue que celle-ci n'utilisait pas de représentations visuelles dans son enseignement de la factorisation. J'ai quand même souhaité poursuivre l'étude avec Line qui a montré un intérêt pour cette recherche, curieuse de voir les avantages de l'intégration de cette approche dans une planification, qui je cite, « fonctionne très bien ». Lors de l'entrevue de départ, l'enseignante précise qu'elle a déjà vu dans les manuels la méthode du rectangle, représentation visuelle qu'elle n'a par contre jamais intégrée dans son enseignement.

> Line : Oui, oui, mais je l'ai vu...je l'ai jamais enseigné moi comme ça, mais je l'ai déjà vu c'est ça en troisième secondaire je pense, en deuxième, troisième secondaire, il y avait des choses comme ça (...) C'est une autre façon et peut-être que moi je vais bien aimer ta technique, on verra. (10 mai 2010, lignes 457-458)

Nous convenons toutes les deux pour que je prépare des activités sur la factorisation autour des représentations visuelles. À ce stade de la recherche, ce sont des « Activités Patricia » comme les nomme Line que celle-ci va intégrer dans sa planification. Elle se place alors en spectatrice, ne s'engageant pas dans l'élaboration des activités avec la chercheure, comme le souligne l'emploi des pronoms possessifs « ton, ta » relevés dans son discours.

> Line : D'accord. Toi, quand tu veux venir pour présenter <u>ton activité</u>, est-ce que tu veux que j'aie déjà amorcé l'enseignement de cette notion-là dans ma classe ou est-ce que tu veux que ce soit complètement nouveau pour eux-autres? (10 mai 2010, lignes 93 à 95). (...) Ce serait là que toi on verrait <u>ta première activité</u>. (....) Oui. Ici je vais marquer <u>« activité de Patricia »</u>, d'accord, et on va se prévoir un petit temps pour faire une activité. (10 mai 2010, lignes 159 à 162). (....) Là ici, je vais marquer exercice, bon je vais marquer <u>exercice Patricia</u>. <u>Toi</u> ça va être exercice un. (10 mai 2010, lignes 189-190)

Modalités de l'expérimentation. Line enseigne la factorisation en début d'année scolaire. Elle précise que plusieurs élèves s'inscrivent dans la séquence *Sciences Naturelles* en mathématique sans avoir le niveau nécessaire pour pouvoir suivre. En présentant la factorisation dès le début, chapitre qui est considéré comme assez ardu, plusieurs élèves décident de changer de séquence mathématique après avoir eu de la difficulté. Ce choix ne serait plus possible si l'année était plus avancée. L'expérimentation s'est ainsi déroulée en septembre et octobre 2010, dans un groupe de 25 élèves de la séquence *Sciences naturelles* en deuxième année du deuxième cycle (15-17 ans). Ces élèves avaient été initiés à la mise en évidence simple en première année du deuxième cycle.

Pendant la discussion, nous abordons la place de chacune dans l'expérimentation. Je propose de construire des situations et des exercices impliquant des représentations visuelles mais celles-ci seront présentées en grande partie aux élèves par l'enseignante qui doit être à l'aise avec les tâches que je vais proposer et va ainsi demander une implication de sa part.

3.3 Objectifs et questions de recherche

Suite à la discussion avec Line, mes objectifs de recherche se sont précisés. Le premier objectif de la recherche qui se dégage de la problématique est d'analyser les pratiques d'enseignement autour de l'enseignement de la factorisation dans les classes de mathématiques du secondaire. Comme Line n'utilise pas les représentations visuelles dans son enseignement, le premier objectif doit être revu en termes d'analyse d'appropriation des représentations visuelles par une enseignante, le deuxième objectif n'est pas modifié. Les deux objectifs de la recherche s'énoncent comme suit :

- Analyser l'appropriation par une enseignante des représentations visuelles dans une séquence d'enseignement portant sur la factorisation où plusieurs tâches ont été construites par la chercheure.

- Dégager la place et le rôle qu'occupent les représentations visuelles en factorisation dans la pratique d'une enseignante.

Plusieurs questions de recherches découlent de ces objectifs :

1) Comment s'insèrent les représentations visuelles dans la séquence d'enseignement? Comment l'enseignante utilise ces représentations dans son enseignement (consignes, tâches, rôles et place des représentations visuelles)

2) Comment la vision de l'enseignement de la factorisation chez l'enseignante se modifie suite à l'intégration des représentations visuelles dans sa séquence d'enseignement?

Comme précisé au point 3.2, j'ai été en charge de bâtir des situations et exercices intégrant des représentations visuelles. Celles-ci ont été élaborées selon une ingénierie didactique.

3.4 Ingénierie didactique

L'ingénierie didactique (Artigue, 1996), vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. L'ingénierie didactique se situe dans le registre des études de cas dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori.* Le processus expérimental d'une ingénierie didactique se découpe généralement en quatre phases. La phase 1 des analyses préalables contient entre autres l'analyse épistémologique des contenus visés, l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles. La phase 2 de conception et d'analyse a priori est à concevoir comme une analyse de contrôle du sens qui servira plus tard, en confrontant l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* à valider les hypothèses. Dans cette phase 2,

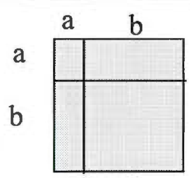
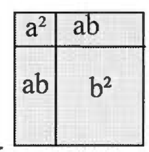
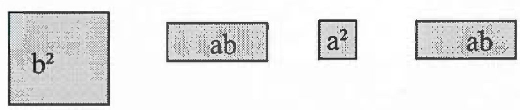
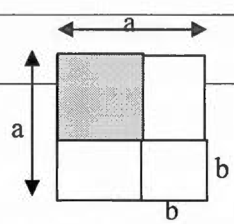
> On décrit les choix effectués au niveau local et les caractéristiques de la situation a-didactique qui en découlent, on analyse quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose, une fois opérée la dévolution, dans un fonctionnement quasi isolé du maître, on prévoit des champs de comportements possibles et on essaie de montrer en quoi l'analyse effectuée permet de contrôler leur sens et d'assurer en particulier que les comportements attendus, s'ils interviennent, résulteront bien de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage. (Artigue, 1996, p. 258-259)

La phase 3 est celle d'expérimentation et la phase 4 englobe celle d'analyse *a posteriori* et de validation qui s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation (observations réalisées des séances d'enseignement, productions des élèves en classe, questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes). La validation se fait alors en confrontant les analyses *a priori* et les analyses *a posteriori*. Comme c'est la pratique enseignante qui m'intéresse, je retiens essentiellement un choix des tâches élaboré par une analyse a priori.

3.5 Description des situations et analyse préalable

Les identités remarquables (carré d'une somme, d'une différence et de la différence de carrés) ont été illustrées par une représentation visuelle. Deux activités ont été conçues pour l'introduction de la mise en évidence double et pour la complétion de carrés.

Représentations visuelles autour du carré d'un binôme. La première situation qui intègre les représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation est la présentation d'un diaporama autour du carré d'un binôme. L'objectif ici est, d'une part, d'associer l'écriture $(a+b)^2$ à l'aire d'un carré de côtés $(a+b)$ et d'autre part de voir que l'on peut écrire cette aire de différentes façons, l'une d'elles étant composée de quatre parties : a^2, ab, ba et b^2, on obtient alors des expressions équivalentes. Algébriquement, il s'agit de voir que l'on fait la double distributivité (illustrée avec des flèches, voir figure 3.1). On travaille ici l'habileté à faire des liens entre le visuel et l'écriture algébrique. Inversement, si on a une expression algébrique de la forme $a^2+2ab+b^2$, on pourra l'écrire comme l'aire d'un carré de côté $(a+b)$. Il s'agit dans le cas de la factorisation d'assembler les deux carrés d'aire a^2 et b^2 et les deux rectangles d'aire ab en un seul rectangle (d'un seul tenant). Cet assemblage est une des habiletés à travailler comme vu dans le cadre théorique. On peut constater que dans le cas du carré d'une différence, la représentation visuelle est moins facile à comprendre. Il faut dans ce cas ajouter un morceau qu'on a enlevé à deux reprises. De plus, pour faire le visuel de l'expression $a^2+2ab+b^2$, on doit partir de deux carrés et deux rectangles, les assembler pour en faire un grand carré (ce qui est aisé). Par contre, pour le carré d'une différence, ce processus devient difficile car dans l'expression développée $a^2-2ab+b^2$, on a deux rectangles d'aire –ab. Dans ce cas, on ne peut raisonner que dans un sens (de la forme factorisée à la forme développée) et on s'appuie sur le caractère bidirectionnel entre les formes factorisée et développée pour conclure. La figure suivante montre à gauche les notes de cours de l'enseignante et à droite la représentation visuelle ajoutée pour illustrer le carré d'un binôme.

Approche algébrique (notes de cours de l'enseignante)	**Approche visuelle (proposée par la chercheure)**
Le carré d'un binôme : $(a+b)^2 = a^2 +2ab +b^2$ (binôme)² = trinôme carré parfait	Représentation visuelle de $(a+b)^2$ Aire : $(a+b)^2$  Représentation visuelle de $(a+b)^2$ Aire : $a^2 +2ab +b^2$.  On a $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2+ab+ba+b^2$ Inversement, on a les 4 morceaux et on les assemble comme ci-dessus pour obtenir un grand rectangle. 
$(a-b)^2 = a^2 -2ab +b^2$ (binôme)² = trinôme carré parfait	Représentation visuelle de $(a-b)^2$ 

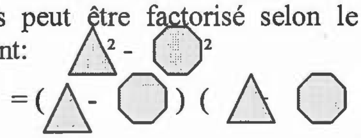
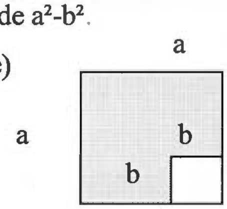
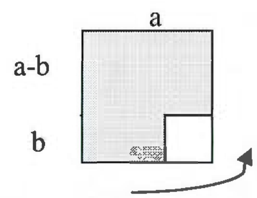
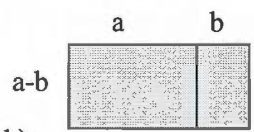
	Aire : $(a-b)^2$ L'aire en gris est équivalente au grand carré a^2 auquel on enlève deux rectangles ab. Cependant, comme on enlève deux fois le carré b^2, on doit l'ajouter, on obtient donc l'expression $a^2-2ab+b^2$

Figure 3.1 Comparaison entre l'approche algébrique et l'approche visuelle dans le cas du carré d'un binôme.

Les représentations visuelles apportent ici un support à l'élève et permettent d'illustrer l'écriture algébrique, de lui donner du sens. Visuellement, l'élève est amené à voir que le développement d'un binôme au carré donne quatre morceaux et pas deux, erreur fréquente chez les élèves comme souligné dans la problématique.

Représentation visuelle autour de la différence de carrés. Dans l'approche de la différence de carrés et d'après les notes de cours de l'enseignante, il y a d'abord une reconnaissance de la forme de cette identité remarquable (voir points 1 et 2 dans le tableau ci-dessous, colonne de gauche). Par la suite, aux points 3 et 4, les notes de cours précisent comment procéder pour trouver la forme factorisée. On peut remarquer que dans le cas de la différence de carrés, l'enseignante part de la forme développée pour arriver à la forme factorisée qui est au cœur même de la factorisation. Dans les notes de cours de l'enseignante, les pictogrammes servent à illustrer une forme générale de la différence de carrés. Je fais l'hypothèse que l'ajout de ces pictogrammes par l'enseignante a comme rôle de contrer la difficulté des élèves à voir que le terme *« a »* peut représenter n'importe quel produit de termes constants et de variables comme $4a^2b^2$. Elle finit par un exemple dans lequel on vérifie, en développant le deuxième membre de l'égalité, que l'expression obtenue est équivalente. Line travaille ainsi (à sa façon) le caractère bi-directionnel de la factorisation.

Les représentations visuelles associées à la différence de carrés utilisées ici sont celles décrites dans l'histoire des mathématiques (voir section 2.2). Elles illustrent pourquoi les deux expressions a^2-b^2 et *(a-b.)(a+b)* sont équivalentes et s'appuient sur une manipulation géométrique de la figure de départ. La figure de départ qui représente l'expression a^2-b^2 est un carré de côté « *a* » auquel on a soustrait un autre carré de côté « *b* » (on suppose que *a* est plus grand que *b*). On doit modifier la figure pour obtenir un rectangle dont on pourra trouver les mesures des côtés. En coupant la figure vis-à-vis le carré de côté « b » (voir figure 3.2) et en déplaçant ce morceau de l'autre côté de la figure, on obtient un rectangle mesurant (a-b) par (a+b). Comme l'aire de la figure reste inchangée, l'expression de départ a^2-b^2 est équivalente à (a+b).(a-b). Cette manipulation a été présentée aux élèves sous la forme d'un diaporama. On travaille dans cette présentation l'habileté à représenter visuellement de deux façons différentes la différence de carrés et on montre aux élèves que ces deux représentations sont des expressions équivalentes.

Approche algébrique **(planifiée par l'enseignante)**	**Approche visuelle** **(apportée par la chercheure)**
La différence de deux carrés: $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ Méthode pour factoriser une différence de deux carrés: 1- Binôme avec un (-) (obligatoire) 2- Les deux termes sont des carrés parfaits 3- Extraire la racine de chaque terme 4-(1ere racine - 2eme racine)(1ere racine +2eme racine) Tout binôme identifiable à une différence de carrés peut être factorisé selon le modèle suivant:  Exemple: $4x^2-9 = (2x-3)(2x+3)$ Vérifions: (2x-3)(2x+3)	Représentation visuelle de a^2-b^2. (aire de la partie ombrée)  Transformation pour obtenir une figure équivalente  La représentation visuelle équivalente à a^2-b^2 est donc (a-b)(a+b)  (aire du rectangle ombré)

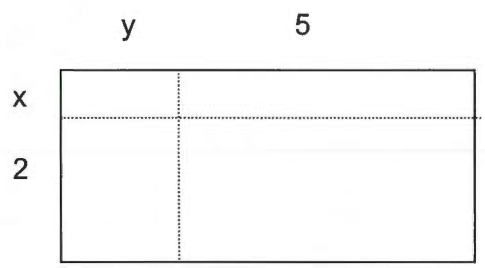
$= 4x^2+6x-6x-9$ $= 4x^2-9$	

Figure 3.2 Comparaison entre l'approche algébrique et l'approche visuelle dans le cas de la différence de carrés

Exercice autour de la mise en évidence double. Dans l'exercice ci-dessous, il s'agit d'abord de faire représenter aux élèves les côtés inconnus d'un rectangle auquel on ajoute une quantité. On travaille ici l'habileté à faire le lien entre le visuel et l'algébrique. L'expression algébrique (x +2) représente une certaine longueur à laquelle on ajoute deux unités. Ensuite, quand l'élève a placé les mesures des côtés, soit (x+2) et (y+5) dans cet exercice, il doit trouver l'aire du nouveau rectangle créé en le divisant en quatre rectangles qui sont alors d'aire xy, 2y, 5x et 10. Ce processus en est un de distributivité qu'ils ont déjà vu à la première année du deuxième cycle du secondaire. La question posée leur demande de faire l'inverse. On donne d'abord les aires des rectangles et l'élève doit trouver les côtés. On travaille ici l'habileté à représenter visuellement une expression à factoriser. L'élève doit comprendre qu'il ne peut pas placer les rectangles de n'importe quelle manière. Cet exercice permet de travailler le caractère bidirectionnel de la relation entre développement et factorisation de polynômes (Matz, 1982) et fait travailler les élèves sur les expressions équivalentes.

Exercice 1

#1. Michel possède un patio rectangulaire dont il ne connait pas les dimensions. Ce patio est représenté par le rectangle de dimensions x et y sur le schéma. Il veut l'agrandir cet été de 2 m d'un côté et de 5 m de l'autre. Quelle seront alors ses dimensions (longueur et largeur) et sa superficie totale?



#2. Le voisin de Michel possède un patio rectangulaire qui a comme surface : xy, 4x, 3y et 12. Représente le patio du voisin de Michel et donne ses dimensions.

#3.Michel mesure son patio et réalise que x vaut 1 m et y vaut 2 m. Lequel des deux patios, celui de Michel ou du voisin est le plus grand?

Figure 3.3 Exercice sur la double mise en évidence

Dans la première question, les dimensions attendues sont (x+2) et (y+5). Pour la superficie totale plusieurs solutions sont possibles : xy + 5x + 2y + 10 ; (y+5).x + (y+5).2 ; y. (x+2) + 5.(x+2) ; x.(y+5) + 2y + 10; etc... La mise en évidence double est ainsi perçue comme la mesure d'une surface que l'on considère sous différents points du vue qui sont tous équivalents. Dans la deuxième question, le passage contraire est demandé, la factorisation :

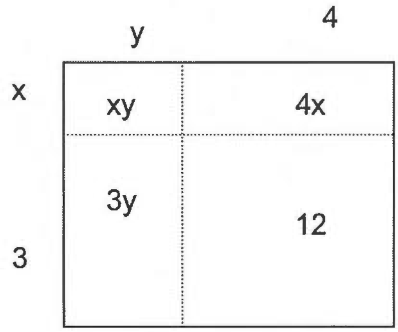


Figure 3.4 Représentation visuelle de la double mise en évidence.

Cet exercice permet de travailler le caractère bidirectionnel de la relation entre développement et factorisation de polynômes tel qu'amené par Matz. Dans la troisième question, un travail numérique est requis :

> Dimensions du patio de Michel : 3 m par 7 m
> Surface du patio de Michel : 21 m²
> Dimensions du patio du voisin de Michel : 4 m par 6 m
> Surface du patio du voisin : 24 m²
> Le patio du voisin de Michel est plus grand que celui de Michel.

Situation autour de la complétion de carrés. Cette situation est tirée du manuel Visions (Cardin et al., 2008, p. 167), la complétion de carrés y est traitée sous l'aspect historique et repose sur des représentations visuelles (voir cadre théorique, section 2.2). Cette activité permet de montrer aux élèves de quelle façon la complétion de carrés a été utilisée dans l'histoire. Une équation du deuxième degré est représentée dans cet exercice visuellement (par des rectangles et un carré). On part d'une équation du second degré $x^2 + 10x = 39$ que l'on cherche à résoudre. On peut remarquer que l'utilité de la factorisation est ici présentée aux élèves, c'est un outil qui permet de résoudre des équations. Dans le cas d'une expression du second degré à une inconnue qui n'est pas un carré parfait, on va pouvoir « compléter le carré ». Les représentations visuelles entrent ici en jeu. x^2 représente l'aire d'un carré de côté x et *10x* l'aire d'un rectangle. L'objectif est de construire un carré avec ces deux figures pour obtenir une expression du type (côté du carré)^2 qui permet par la suite de résoudre l'équation. Le terme en « x » (*10x* dans ce cas-ci) est séparé en deux rectangles que l'on place de chaque côté d'un carré, l'aire de chacun de ces deux rectangles est de *5x*. La raison est simple, on cherche à construire un carré, on va donc rajouter la même figure à droite du carré et en bas du carré. On travaille ici une des habiletés relevées dans notre cadre de référence, celle de représenter convenablement les figures. Le rectangle a comme côtés 5 et x. Il a donc un côté commun avec le carré de départ de côté x. On place ces deux figures en conséquence. Pour obtenir un carré, on complète la figure obtenue par un carré d'aire 25. On obtient alors un carré de côté *(x+5)*. Ainsi $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$ (il ne faut pas oublier d'enlever l'aire 25 dans le deuxième membre de l'égalité). Il y a ici un va-et-vient entre la méthode algébrique et visuelle (une des habiletés de la factorisation). L'élève va faire un lien entre la démarche algébrique et la démarche visuelle pour compléter l'expression et avoir un carré parfait. On donne ainsi du sens à la méthode de la complétion de carrés. L'exercice juxtapose ainsi le registre algébrique avec le registre visuel.

ACTIVITÉ 3 L'algorithme d'Al-Khawarizmi

Au début du IX[e] siècle, le mathématicien arabe Muhamed Ibn Mussa Al-Khawarizmi a écrit un traité dans lequel il explique la façon de résoudre une équation de degré 2. Son algorithme peut être appliqué à toute équation de ce type. Voici comment il pose le problème :

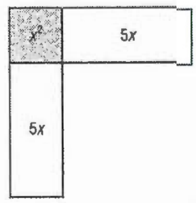
Un algorithme est une suite d'opérations que l'on doit effectuer systématiquement pour résoudre un problème. Le mot *algorithme* vient justement du nom d'Al-Khawarizmi.

« Un carré et dix racines sont égaux à 39 dirhams. »

Le dirham est une ancienne mesure de poids arabe, turque et perse. C'est aujourd'hui l'unité monétaire du Maroc.

En notation algébrique actuelle, cela se traduit par l'équation $x^2 + 10x = 39$.

Pour résoudre cette équation, Al-Khawarizmi construit la figure ci-contre. Il trace d'abord le carré gris dont les côtés mesurent x. Il sépare ensuite le terme $10x$ en deux parties qu'il représente par les rectangles blancs. Selon l'équation, l'aire totale de cette figure est égale à 39.



a. Reproduisez cette figure et, comme le propose Al-Khawarizmi, complétez-la pour former un carré. Quelle est l'aire de la partie que vous avez ajoutée ? Quelle est l'aire du carré ainsi obtenu ? Déduisez-en la valeur de x.

b. Al-Khawarizmi ne tenait compte que des solutions positives. Quelle est la solution négative de cette équation ?

c. Il est possible de représenter cet algorithme à l'aide d'une suite d'équations équivalentes comme il est illustré ci-dessous. Complétez ces équations en expliquant chaque étape.

$$x^2 + 10x + \square = 39 + \square$$
$$(\square + \square)^2 = \square$$
$$\square = \square \text{ ou } \square = \square$$
$$x = \square \text{ ou } x = \square$$

d. Utilisez la même démarche pour résoudre l'équation $x^2 + 8x = 4$.

e. Transformez l'équation $2x^2 - 12x + 10 = 0$ en une équation équivalente qu'on pourrait résoudre en suivant les étapes décrites en c. Résolvez ensuite cette équation.

Figure 3.5 Exercice sur la complétion de carrés (tiré de Cardin et al., 2008, p. 167)

Le tableau ci-dessous fait une synthèse des habiletés qui ont été travaillées dans chacun des exercices élaborés dans l'expérimentation.

Tableau 3.1 Habiletés travaillées dans les exercices

	Carré d'un binôme	**Différence de carrés**	**Mise en évidence double (exercice du patio)**	**Complétion de carrés (résolution d'une équation dans l'histoire)**
Habiletés à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser				
Habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser	X	X	X	X
Habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique	X	X	X	X
Habileté à reconnaître des formes équivalentes	X	X	X	X
Habileté à reconnaître des formes non factorisables				

D'après le tableau, on remarque que les situations construites tournent autour de trois des cinq habiletés : l'habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser, l'habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique et l'habileté à reconnaître des formes équivalentes. L'habileté à représenter visuellement va de pair quand on travaille avec des représentations visuelles avec l'équivalence d'expressions algébriques. Les deux autres habiletés seront travaillées dans un test écrit qu'on a distribué aux élèves avant l'expérimentation (voir section 3.7.3 et Appendice A)

3.6. Intégration des situations dans la séquence d'enseignement

L'expérimentation s'est étalée sur 5 semaines. Le tableau suivant (3.2) fait état de la planification de la séquence d'enseignement de Line durant le chapitre portant sur la factorisation. Mes ajouts concernant les représentations visuelles de la factorisation sont mentionnés dans la colonne de droite. L'ordre de présentation de chacune de ces méthodes de factorisation y est annoté.

Tableau 3.2 Planification de l'enseignante et ajouts de la chercheure

	Planification de Line	**Ajouts de la chercheure**
Cours 10 : 16 septembre	Identités remarquables : Le carré d'un binôme	Présentation de la représentation visuelle du carré d'un binôme
Cours 11 : 17 septembre	Identité remarquable : La différence de carrés	Présentation de la représentation visuelle de la différence de carrés
Cours 12 : 21 septembre	Révision de la mise en évidence simple	Début d'un exercice sur la double mise en évidence avec les représentations visuelles (Exercice du patio)
Cours 13 : 22 septembre	Théorie et exercices sur la double mise en évidence	Fin et correction d'un exercice sur la double mise en évidence avec les représentations visuelles (Exercice du patio)
Cours 14	Factorisation d'un trinôme par produit/somme	

Cours 15 :	Révision et exercices sur toutes les techniques de factorisation	
Cours 16 :	Révision et exercices sur toutes les techniques de factorisation	
Cours 17 :	Réduction d'une expression rationnelle	
Cours 18 :	Résolution d'équations du deuxième degré à une variable Méthode de résolution où on utilise la factorisation et la propriété du produit nul	
Cours 19 : 5 octobre	Résolution d'équations du deuxième degré à une variable Méthode de résolution où on utilise la complétion de carré	Exercice sur la représentation visuelle de la complétion de carré vue par Al-Khawarizmi

On peut remarquer que Line débute l'enseignement de la factorisation par des techniques de factorisation nouvelles pour les élèves, le carré d'un binôme et la différence de carrés. Par la suite, elle revient aux connaissances préalables des élèves avec la mise en évidence simple pour faire le lien vers la mise en évidence double. Ce choix me semble original, ne faisant pas les mêmes comme enseignante. Dans la première entrevue, Line explique la raison de ce choix, elle suit la séquence proposée par le manuel.

> Line : Mais la différence de carré, moi j'y vais comme c'est présenté dans le livre, et la différence de carré je la présente avant la double mise en évidence. [...] Moi j'ai suivi l'ordre du livre, j'ai monté mes notes de cours à partir du nouveau livre.

La complétion de carré apparaît d'après la planification de l'enseignante comme une technique de factorisation à part des autres. Line présente toutes les techniques de factorisation, elle les révise et ensuite termine avec la complétion de carré comme technique de résolution d'équation. Jusqu'au cours 17, la factorisation sert à réduire des expressions algébriques. Au cours 18, Line donne une autre fonction à la factorisation, celle de résoudre des équations. Une équation est donnée, l'élève doit reconnaître quelle technique de factorisation utiliser et ensuite utiliser la propriété du produit nul pour la résoudre. Ainsi, l'élève qui a l'équation suivante : $x^2+5x+4=0$ doit trouver la factorisation par produit et somme du trinôme pour obtenir $(x+1).(x+4)=0$. Pour que ce produit soit nul, il faut qu'au moins un des deux facteurs soit nul. On obtient que $x=-1$ ou $x=-4$. Elle finit sa séquence d'enseignement par la technique de complétion de carré qui est directement liée dans sa planification à la résolution d'équation.

3.7 Instruments de collecte de données

Pour comprendre la pratique enseignante et plus précisément comment s'aménage l'intégration des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation de Line, la collecte de différentes données sont nécessaires. Trois composantes sont ciblées dans cette étude (Robert et Rogalski, 2002; Lenoir, 2009) : la composante épistémologique (rapport aux savoirs), la composante didactique/cognitive (rapport aux savoirs à enseigner à propos de l'apprentissage, aux processus d'enseignement spécifiques aux différentes matières scolaires) et la composante double dimension médiatrice/médiative (les modes d'interaction en classe des différents acteurs, comment l'enseignant organise les médiations entre les élèves et entre lui et les élèves).

Pour avoir accès à la composante épistémologique, qui est le rapport au savoir de Line, je vais analyser ses notes de cours pour faire ressortir l'image du savoir qui s'en dégage. Je vais également avoir recours aux séances en classe et aux entrevues avant et après expérimentation.

Pour la composante didactique/cognitive, plusieurs collectes de données sont nécessaires : les notes de cours, les séances en classe et les entrevues. Je dégagerai les savoirs travaillés, les itinéraires cognitifs planifiés et ceux qui émergent. Cette analyse s'appuiera sur le cadre de référence développé autour des habiletés à développer dans l'utilisation des représentations visuelles pour la factorisation. La composante double dimension médiatrice/médiative est appréhendée à travers les séances en classe puisqu'il s'agit d'analyser les interactions dans l'action entre l'enseignante et les élèves et entre les élèves. Comment s'organisent ces échanges? Le schéma ci-dessous illustre les trois composantes de l'intervention éducative avec les outils de collecte de données utilisés.

Tableau 3.3 Composantes et outils de collecte de données

Composantes (Lenoir, 2009; Robert et Rogalski, 2002)	**Outils de collecte de données**
Épistémologique (Rapport aux savoirs)	• Entrevue avant expérimentation • Notes de cours • Observation de deux séances en classe • Entrevue après expérimentation
Didactique/cognitive (Rapport aux savoirs à enseigner à propos de l'apprentissage, aux processus d'enseignement spécifiques aux différentes matières scolaires)	• Entrevue avant expérimentation • Notes de cours • Observation de deux séances en classe • Mini-entrevues • Entrevue après expérimentation
Double dimension médiatrice/médiative (Modes d'interaction en classe des différents acteurs, comment l'enseignant organise les médiations entre les élèves et entre lui et les élèves).	• Observation de deux séances en classe

3.7.1 Observation en classe

Une observation directe en classe a été réalisée pendant toutes les séances portant sur la factorisation où il y avait des ajouts de la chercheure dans la planification de l'enseignante. J'étais toujours présente, c'est l'enseignante qui prenait la parole avec les élèves sauf à quelques reprises. Pour l'exercice sur la mise en évidence double, j'ai guidé les élèves à la demande de l'enseignante qui n'avait pas eu le temps de regarder l'exercice. Des enregistrements vidéo de chacune des séances en classe ont été produits. Une caméra fixe a été placée à l'arrière de la salle de classe. J'ai fait le choix de faire les transcriptions de deux séances en classe à des fins d'analyse, celle portant sur la différence de carrés et celle sur la complétion de carrés[5]. Ces deux séances sont particulièrement intéressantes et éclairent l'objet de cette recherche.

3.7.2 Entrevues avec l'enseignante

Plusieurs entrevues ont eu lieu avec l'enseignante, au début de l'expérimentation, après l'action (après chaque séance en classe) et à la fin de l'expérimentation. Ces entrevues ne sont pas du même ordre. Les entrevues du début et de la fin sont des entrevues semi structurées tandis que celles faites après les séances sont plus « à chaud ».

Entrevue avant expérimentation. Dans la rencontre avec l'enseignante qui a eu lieu en mai 2010, plusieurs points ont été abordés. Quelques modalités ont été discutées, quelques-unes très techniques comme l'autorisation signée pour enregistrer la rencontre, la demande à la direction d'école, la collection de volumes utilisés. Le fonctionnement de l'expérimentation a été précisé, le nombre de rencontres, le nombre de périodes requises pour l'expérimentation et les sujets ciblés par la recherche. On a également discuté du fonctionnement habituel de Line en classe, sa planification, l'ordre dans lequel elle voit les formes de factorisation, le mode de travail en classe, individuel ou en équipe. Les rôles de chacune sont précisés, c'est Line qui enseignera et je serai là en observatrice.

Je me suis attardée à trois aspects durant l'entrevue. D'abord, je voulais avoir des informations sur l'expérience de l'enseignante et son implication dans le milieu pour décrire plus facilement le contexte de recherche. Ensuite, j'ai voulu comprendre où se situait la factorisation dans sa planification de l'année. En troisième lieu, je me suis penchée sur la

---

[5] Le corpus de données à analyser en profondeur est trop grand pour un mémoire de maîtrise, un choix a été donc fait.

façon dont elle enseigne la factorisation pour comprendre ses choix didactiques dans la séquence d'enseignement avant toute intervention. Les exercices que j'ai élaborés ont été également présentés à l'enseignante.

Au départ je précise que l'objectif de l'expérimentation est de voir ce que peuvent apporter les représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation. Comme il a été mentionné à la section 3.2, Line n'utilisait pas les représentations visuelles dans son enseignement de la factorisation mais elle précise alors qu'elle utilise le tableau blanc interactif, les couleurs et différents repères visuels pour les élèves. On discute aussi de la place des représentations visuelles.

> Line : D'accord. Toi, quand tu veux venir pour présenter ton activité, est-ce que tu veux que j'aie déjà amorcé l'enseignement de cette notion là dans ma classe ou est-ce que tu veux que ce soit complètement nouveau pour eux-autres?
> Interviewer : Je pense que ce serait comme les premières périodes.

Je présente ensuite à Line les trois activités, soient l'activité sur la différence de carré, la double mise en évidence et la complétion de carrés. L'activité portant sur la double mise en évidence (exercice du patio) est soumise tel que vu à la section 3.5. Je montre ensuite à Line une activité dans laquelle l'élève doit trouver lui-même comment transformer un carré d'aire a^2 auquel on a retranché un carré d'aire b^2 en un rectangle. Cela implique du papier, des ciseaux et du travail d'équipe pour trouver de quelle façon découper la figure pour obtenir un nouveau rectangle. C'est une activité qui fait référence au processus de découpage et reconfiguration vu dans l'histoire (voir section 2.2.3). Suite à cette proposition, Line amène de la possibilité de faire cette activité avec un diaporama une fois que les élèves auront trouvé la bonne forme de découpage. Elle semble intéressée à travailler cette activité en classe et propose même de se voir durant l'été pour travailler sur le processus de découpage et de reconfiguration avec traitement de texte ou avec un diaporama. Cette approche est celle finalement privilégiée comme vu à la section 3.5. En septembre, au moment de l'expérimentation, j'ai proposé à Line une présentation par diaporama du processus de découpage et reconfiguration pour la différence de carrés. Nous avons opté pour cette présentation en classe auprès des élèves pour ne pas changer leurs habitudes de classe en début d'année (les élèves n'étant pas habitués à travailler en équipe et avec du matériel).

L'activité sur la complétion de carré a été présentée tel que vu à la section 3.5. J'explique alors à Line que le but de cette activité est de faire comprendre aux élèves le sens derrière la technique. L'enseignante est très à l'aise avec cette technique, elle souligne que pour faire une complétion de carrés, on doit additionner le carré de la moitié du terme en x pour obtenir un trinôme carré parfait. L'activité doit permettre de visualiser cette étape.

À la fin de l'entrevue, Line montre son enthousiasme envers le projet, elle est contente que mes activités s'insèrent bien dans sa planification et croit qu'elles vont apporter quelque chose de plus à son enseignement.

Cette première entrevue m'a permis de comprendre le contexte dans lequel va se dérouler la recherche, les contraintes et routines tel qu'explicité par les chercheurs (Lenoir, 2009; Robert et Rogalski, 2002).

Entrevue après expérimentation. Dans l'entrevue finale, l'objectif est de faire un retour sur l'expérimentation, d'éclairer certains choix, de préciser, s'il y a lieu, les changements qu'elle ferait suite à l'expérimentation dans sa planification, de faire expliciter à l'enseignante les avantages et les limites d'introduire des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation.

Les mini-entrevues. Des mini-entrevues ont été réalisées parfois avant et parfois après les séances en classe. Ces entrevues étaient plutôt informelles. Un retour est fait sur ce qui s'est passé en classe, sur un réaménagement possible des situations et des interventions.

Les transcriptions des deux entrevues et des mini-entrevues ont été effectuées.

3.7.3 Test écrit

Un test écrit a été élaboré destiné aux élèves au tout début de l'expérimentation. Dans cette recherche, je ne m'attarde pas à l'apprentissage effectué par les élèves suite à l'expérimentation. Toutefois, il m'a semblé intéressant de connaître l'état des connaissances des élèves avant enseignement de la factorisation. Ce test visait à révéler le degré d'aisance dans l'utilisation des représentations visuelles en lien avec la mise en évidence simple (que les élèves ont travaillé dans la première année du deuxième cycle du secondaire). Quel sens accordent les élèves aux représentations visuelles?

Il se dégage de l'analyse du test écrit que les élèves n'associent pas facilement l'écriture algébrique à sa représentation visuelle avant enseignement. C'est dans ce passage entre ces deux registres que le rôle de l'enseignant est important comme le soulignent plusieurs chercheurs (Hosson, 1999; Pierce, 2002; Shama et Dreyfus, 1994), celui-ci favorisant un lien entre la méthode algébrique et visuelle donnant ainsi du sens aux différentes étapes menant à la factorisation. L'analyse plus détaillée de ce test écrit est présenté à l'appendice A.

3.8 Cadre d'analyse

Pour analyser les pratiques des enseignants, Robert et Rogalski (2002) distinguent deux types d'analyse : des analyses globales et des analyses locales qui ont lieu à partir du déroulement en classe. Dans cette étude, ces analyses locales vont me permettre de détecter les activités de l'enseignant. Les analyses globales permettent :

> de compléter ces informations en reconstituant les fils conducteurs des choix et des décisions, instantanées ou préparées, c'est-à-dire les invariants ou les déterminants (p.508).

À des fins d'analyse, j'ai découpé les transcriptions des séances en classe en épisodes déterminés par des activités successives. Chaque épisode sera par la suite analysé du point de vue des savoirs, reliés dans notre cas aux habiletés liées à la factorisation et des échanges entre l'enseignante et les élèves. Il s'agit de reconstituer et de recomposer le système complexe et cohérent des pratiques de l'enseignant en les reliant aux différentes composantes issues du cadre de référence autour des pratiques (Lenoir, 2009; Robert et Rogalski, 2002).

Mon objectif étant d'analyser l'appropriation par une enseignante des représentations visuelles dans la factorisation, je m'intéresse plus particulièrement aux trois composantes de Lenoir et Robert et Rogalski vues précédemment soient : la composante épistémologique, la composante didactique/cognitive et la composante double dimension médiatrice/médiative. Je suis consciente que les autres composantes seront aussi présentes et interviendront à certains moments que je préciserai. Pour analyser ces composantes, je reprendrai les trois dimensions d'analyse de Robert et Rogalski. La première dimension est liée aux contenus travaillés en classe et à la répartition des activités prévues entre enseignant et élèves (scénario prévu). On regarde alors les liens entre savoirs anciens et savoirs nouveaux. On décrit aussi la nature des tâches prévues. Cette première dimension s'apparente à la phase pré-active de Lenoir où on s'intéresse à l'action de planification (voir 2.6.1). La seconde dimension concerne les formes de travail des élèves pendant les séances (travail individuel, en groupe), mais aussi les interactions rapides avec l'enseignant, l'écoute d'un élève ou de l'enseignant au tableau, les interactions entre les élèves et le support de l'activité (oral, écrit, tableau). La troisième dimension est liée aux échanges avec l'enseignant ou l'enseignante pendant les séances. Ces aides apportées par l'enseignant dans son discours ou au tableau peuvent être directes (rappel des hypothèses d'un théorème, argumentation) ou indirectes (appel à la mémoire, structuration). Ces deux dimensions se rapprochent de la phase interactive de Lenoir (voir 2.6.1) où on se penche sur l'actualisation en classe. La dernière phase de Lenoir sera également prise en considération, la phase post-active qui concerne l'évaluation des deux premières phases et qui se fera avec l'enseignante.

À travers l'analyse didactique/cognitive, j'irai voir plus précisément comment l'enseignante travaille les habiletés liées à la factorisation dans ses notes de cours et dans les séances en classe.

Le tableau suivant présente le lien entre les composantes ciblées et les outils de collecte de données utilisés tel que présenté dans le tableau 3.3. Le cadre de référence sur les habiletés à développer autour des représentations visuelles en lien avec la factorisation guidera toute l'analyse.

Tableau 3.4 Cadre d'analyse

Composantes (Lenoir, 2009; Robert et Rogalski, 2002)	**Outils de collecte de données**	
Épistémologique (Rapport aux savoirs)	• Entrevue avant expérimentation • Notes de cours • Observation de deux séances en classe • Entrevue après expérimentation	• Habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser (Trottier et Janvier, 1999) • Habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser (Trottier et Janvier, 1999)
Didactique/cognitive (Rapport aux savoirs à enseigner à propos de l'apprentissage, aux processus d'enseignement spécifiques aux différentes matières scolaires)	• Notes de cours • Observation de deux séances en classe • Mini-entrevues • Entrevue avant expérimentation • Entrevue après expérimentation	• Habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique (Shama et Dreyfus, 1994; Hosson, 1999) • Habileté à reconnaître des formes équivalentes (Matz, 1984; Ball, Pierce et Stacey, 2003; Guin et Trouche 1999) • Habileté à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas (Damboise, 2007)

Double dimension médiatrice/médiative (Modes d'interaction en classe des différents acteurs, comment l'enseignant organise les médiations entre les élèves et entre lui et les élèves).	• Observation de deux séances en classe	

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RESULTATS

Pour structurer l'analyse des résultats, je vais prendre en considération les trois phases de Lenoir (2009) : la phase pré-active, interactive et post-active. Dans la première phase, on s'attarde à l'ensemble des tâches de planification, aux contenus prévus qui seront travaillés en classe, à la répartition des activités et à la nature des tâches. Pour analyser cette première phase, je vais m'attarder à l'entrevue menée avec l'enseignante avant l'expérimentation et à une analyse de ses notes de cours touchant plus particulièrement à la différence de carrés et à la complétion de carrés qui sont les deux techniques de factorisation que j'ai décidé d'analyser. Les notes de cours de l'enseignante sont distribuées aux élèves. Dans la phase interactive, on s'intéresse à l'interaction entre élèves et aux échanges entre l'enseignant et les élèves. Pour ce faire, je vais analyser les deux séances en classe sur les contenus spécifiés précédemment. Dans la phase post-active, il s'agit de faire une rétroaction, une évaluation des deux premières phases. L'entrevue finale menée avec l'enseignante sera la collecte de données privilégiée dans cette phase.

Une mini entrevue a été menée avec l'enseignante après la séance sur la différence de carrés (cours 11) et une autre avant la séance sur la complétion de carrés (cours 19). Ces mini-entrevues nous renseignent à la fois sur la planification de l'enseignante (la phase pré-active) et sur la phase post-active dans laquelle nous faisons Line et moi un retour sur l'expérimentation. Pour que le lecteur puisse mieux suivre l'analyse menée, j'ai décidé d'inclure ce qui ressort des mini entrevues avec l'analyse des deux séances en classe.

4.1 Analyse de la première entrevue (avant expérimentation) et des notes de cours de l'enseignante

Comme vu dans la méthodologie, Line a décidé d'enseigner la factorisation en début d'année, car plusieurs élèves font le choix de changer de séquence mathématique après avoir eu de la difficulté avec ce chapitre considéré assez ardu. Ce choix ne serait plus possible si l'année était plus avancée. Dans ses notes de cours[6], elle commence d'abord par quelques notions sur l'équivalence en géométrie. Elle donne les propriétés suivantes : deux figures sont équivalentes si elles ont la même aire et deux solides sont équivalents s'ils ont le même volume. Il y a ensuite quelques exemples et exercices avec des figures ou solides équivalents qui ont des mesures qui sont des nombres. Ensuite Line révise la loi des exposants, l'addition et la soustraction de polynômes ainsi que la multiplication en algèbre. Ensuite elle montre aux élèves à diviser un polynôme par un binôme.

C'est au dixième cours que l'enseignement de la factorisation débute. Line voit dans l'ordre : le carré d'un binôme (trinôme carré parfait), la différence de carrés, la simple et la double mise en évidence, la factorisation d'un trinôme par produit et somme et finalement la factorisation par complétion de carrés (voir tableau 3.2). Ces techniques de factorisation sont structurées de la même façon dans ses notes de cours. D'abord est présentée la forme générale à laquelle elle donne un sens. Line utilise les termes mathématiques exacts pour illustrer chacune des expressions obtenues. Une certaine rigueur mathématique se dégage à travers l'utilisation du vocabulaire mathématique utilisé dans ses notes de cours. Dans la

[6] Les notes de cours complètes de Line se retrouvent à l'Appendice B

méthodologie (figure 3.2), l'exemple des notes de cours autour de la différence de carrés a été explicité. Dans l'extrait suivant issu des notes de cours de Line, la forme générale d'un carré d'un binôme est associée à un trinôme carré parfait.

Le carré d'un binôme :$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(binôme) ^{2} = **trinôme carré parfait**

Figure 4.1 Notes de cours, carré d'un binôme.

Par la suite, l'enseignante donne un exemple dont les termes ont des coefficients différents de un. Mon expérience comme enseignante m'a amené à constater que les élèves ressentent des difficultés à associer la forme générale aux différents exemples associés. La symbolisation pose ici problème. Dans l'exemple suivant, on a que « a » représente le terme « 3x ». Dans ses notes de cours, Line ne développe pas (3x -5) (3x-5) et utilise ensuite la double distributivité pour obtenir une forme équivalente. Elle présente plutôt le résultat final en précisant que le premier terme est le carré de 3x, le deuxième terme et le double du produit des deux termes et le dernier est le carré du deuxième terme du binôme initial. L'approche est ici très procédurale. Des flèches illustrent souvent dans les notes de cours une procédure séquentielle à suivre, donnent une explication ou font des liens entre une forme algébrique et le vocabulaire mathématique qui y est attaché.

Pour accélérer les calculs : $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

Ce terme est le carré de 3x

Ce terme est le double du produit de 3x par -5

Ce terme est le carré de -5

Figure 4.2 Notes de cours, exemple du carré d'un binôme.

À chaque nouvelle forme de factorisation, une méthode pour factoriser pas à pas est présentée avec des étapes procédurales et séquentielles à suivre. Elle désigne chacune des étapes par des numéros.

Méthode pour factoriser un trinôme carré parfait :

1- Calculer la racine du premier et du dernier terme

2- Le signe du deuxième terme du trinôme est le même que le signe du deuxième terme du binôme

Exemple : $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3x & 4y \end{array}$$

Figure 4.3 Notes de cours, méthode pour factoriser un trinôme carré parfait.

Une série d'exercices finalise chaque technique de factorisation. La figure suivante montre les exercices correspondant à la factorisation d'un trinôme carré parfait. On peut remarquer que les numéros présentés sont d'un ordre de complexité croissant. Dans les deux premiers exemples, il s'agit simplement d'appliquer « la méthode » pour factoriser un trinôme carré parfait. Pour les numéros 3, 5 et 6, l'élève doit d'abord faire une mise en évidence simple pour ensuite utiliser la factorisation du trinôme carré parfait. Line travaille ainsi l'habileté à reconnaître la méthode de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser.

Exercices : Factorise les polynômes suivants avec la méthode du **trinôme carré parfait** :

1. $25x^2 - 90xy + 81y^2 =$ 2. $x^2 + 4x + 4 =$

3. $4b^2 - 12b + 9 =$ 4. $x^2 + 10x + 25 =$

5. $12x^3 - 36x^2 + 27x =$ 6. $8x^3 + 24x^2y + 18xy^2 =$

Figure 4.4 Notes de cours, exercices du trinôme carré parfait.

Dans l'exemple qui m'intéresse plus particulièrement ici, la différence de carrés, la première étape décrit comment on reconnaît qu'il s'agit d'une factorisation par la différence de carrés : il doit y avoir un signe négatif dans le binôme et deux termes qui sont des carrés. Line appuie cette idée en inscrivant que c'est « obligatoire ». Cette habileté à pouvoir reconnaître la forme revient dans beaucoup de techniques de factorisation dans les notes de cours de l'enseignante. On sent une grande importance pour Line à déchiffrer l'écriture algébrique pour y déceler des indices qui permettront par la suite son traitement en termes de techniques de factorisation.

La différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Méthode pour factoriser une différence de deux carrés :

1- Binôme avec un (-) (obligatoire)

2- Les 2 termes sont des carrés parfaits

3- Extraire la racine de chaque terme

4- (1ère racine + 2ème racine) (1ère racine - 2ème racine)

Figure 4.5 Notes de cours, méthode pour factoriser une différence de carrés.

Par la suite, il est intéressant de voir qu'elle montre la bi-directionnalité de la factorisation en faisant le processus inverse, du trinôme carré parfait au carré du binôme. Il y a donc un lien, conscient ou non, de l'enseignante entre le développement et la factorisation mis de l'avant par la vérification de la forme obtenue.

ex : $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$ Vérifions : $(2x - 3)(2x + 3) =$

$\downarrow \quad \downarrow$ $\quad 4x^2 + 6x - 6x - 9$

$2x \quad 3$ $\quad 4x^2 - 9$

Figure 4.6 Notes de cours, vérification de la différence de carrés.

Comme pour les autres types de factorisation, Line propose des exercices gradués en ordre de complexité sur la différence de deux carrés. Le premier, $144a^2 - 81b^2$, peut sembler simple, mais comme Line s'attend à ce que l'élève fasse la factorisation « complète », il peut causer des difficultés. L'élève fera probablement d'abord la différence de carrés et obtiendra l'expression (12a-9b).(12a+3b), qui se factorise encore en faisant une mise en évidence simple. On obtient alors la réponse escomptée : 3(4a-3b).(4a+3b). Passer à cette dernière forme peut cependant être difficile pour l'élève et causer des erreurs dans la manipulation algébrique comme par exemple (12a-9b).(12a+3b) = 3.(4a-3b).3.(4a+3b). Les exercices 3 et 5 ont une forme différente des autres numéros, certains élèves peuvent ici être surpris. Dans ces deux exercices, un des carrés dans l'expression est un binôme élevé au carré. On obtient le binôme en faisant la racine carrée. L'exercice 5 peut être plus difficile car on a un signe négatif devant une parenthèse, ce qui peut causer des difficultés chez certains élèves dans la manipulation algébrique de cette expression. Les exercices 4 et 6, en plus de l'exercice 1 renferment une mise en évidence à faire. On sent encore ici le souci de Line de rappeler aux élèves qu'il y a plus d'une forme de factorisation à faire dans certaines expressions et que le plus simple est souvent de commencer par la mise en évidence si cela est possible. Finalement, les exercices 7 et 8 contiennent une difficulté supplémentaire. Les élèves doivent factoriser une première différence de carrés soit : $x^4 - y^4 = (x^2-y^2).(x^2+y^2)$. Cette dernière expression contient elle aussi une différence de carrés. L'élève doit alors reconnaître une autre différence de carrés dans l'expression (x^2-y^2). La factorisation attendue est $(x-y).(x+y).(x^2+y^2)$.

Exercices :

1. $144a^2 - 81b^2 =$	2. $x^2y^2 - 25a^2=$
3. $(x-2)^2 - 121 =$	4. $4b^4 - 36 =$
5. $36 - (y-4)^2 =$	6. $50x^2 - 18a^4 =$
7. $x^4 - y^4 =$	8. $81a^4 - 625b^4 =$

Figure 4.7 Notes de cours, exercices sur la différence de carrés.

Après le cours 14, où Line a introduit toutes les techniques de factorisation sauf la complétion de carrés, un tableau est présenté dans lequel l'enseignante s'attarde explicitement à l'habileté à reconnaître la technique de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser. À travers ses notes de cours, on sent l'importance de reconnaître la forme à factoriser dans ce souci de l'enseignante de donner une méthode pour savoir quelle technique de factorisation utiliser. On voit toujours l'aspect procédural de ce travail. Il serait intéressant de voir si cette procédure est construite avec les élèves ou donnée telle quelle. Line explicite l'ordre dans lequel il faut regarder les méthodes de factorisation, elle précise que l'on doit continuer tant que l'expression contient un facteur pouvant être factorisé et ajoute que l'élève doit se vérifier en développant l'expression obtenue. On retrouve encore là des étapes claires de la démarche à suivre.

1- Effectuer une simple mise en évidence s'il y a lieu.

2- Trouver le cas de facteurs approprié :

Binôme avec (-) $\rightarrow$ Différence de carrés

Produit / somme

Trinôme $\longrightarrow$

Carré parfait

Polynôme à 4 termes $\longrightarrow$ Double mise en évidence

3- Effectuer la factorisation tant qu'il est possible de le faire.

4- Vérifier en effectuant le produit des facteurs.

Figure 4.8 Notes de cours, comment savoir quelle méthode utiliser.

Pour Line, la plus grande difficulté pour les élèves est de savoir quelle forme de factorisation utiliser, comme elle l'explique dans l'extrait issu de l'entrevue avant l'expérimentation.

> Line : Bon, le plus de misère là c'est que quand ils apprennent situation par situation, un par un, ça va. Mais sauf que quand c'est tout mêlé, que là ils ont à choisir, là ils ont de la misère, c'est là qu'ils ont de la misère.
>
> Interviewer : Qu'est-ce que tu fais pour les aider là-dedans?
>
> Line : Ben là pour les aider là-dedans, je reprends toujours leur méthode là, un à la suite de l'autre, oui, je reprends toujours ça.

Cette habileté est importante pour Line car dans l'entrevue elle m'explique comment l'élève sait quelle méthode utiliser. Elle donne des repères algébriques aux élèves dans les expressions.

> Line: Après ça, je leur dis, qu'est-ce que tu fais si tu en a plusieurs, si tu as un binôme avec un moins, c'est une différence de carré, si c'est un trinôme, c'est produit somme ou carré parfait. Si tu as un polynôme à quatre termes, c'est une double mise en évidence. (10 mai 2010, lignes 41 à 44)

Elle m'explique aussi dans la rencontre comment elle procède en classe. Elle utilise un tableau interactif, fait des flèches, met en couleur par exemple les termes à mettre en évidence. De plus, elle précise qu'elle suit l'ordre présenté dans le manuel pour l'enseignement des différentes méthodes de factorisation.

Pour la complétion de carrés, elle utilise une boîte représentant le terme à ajouter pour obtenir un trinôme carré parfait. Dans la démarche suivante, tirée de ses notes de cours, les trois premières étapes servent à transformer l'équation sous la forme $x^2 + bx = c$. Ensuite, la procédure pour trouver le nombre à ajouter pour obtenir un trinôme carré parfait est la suivante : on divise le deuxième terme en deux (représenté par le triangle) pour ensuite mettre ce nombre au carré. Ensuite, on trouve les deux solutions possibles en extrayant la racine. On remarque que chaque étape est d'abord expliquée en mots et ensuite illustrée avec un exemple où chacune des étapes est numérotée.

Méthode de résolution où l'on utilise la **complétion du carré**

Méthode :

1- Écrire l'équation sous la forme $x^2 + bx = c$

(lignes 1,2 et 3 des exemples);

2- Ajouter un terme de chaque côté de l'égalité pour obtenir un trinôme carré parfait du côté gauche ;

3- Déterminer les solutions par extraction des racines carrées.

Exemple$_1$:

1-$2x^2 - 24x + 54 = 0$

2-$x^2 - 12x + 27 = 0$

3-$x^2 - 12x = -27$

4- $\boxed{x^2 - 12x + \boxed{36}} = -27 + \boxed{36}$

/2 ²

trinôme carré parfait

$\boxed{(x - 6)^2} = 9$

$(x - 6) = -3$ ou $(x - 6) = 3$

$x = 3$ ou $x = 9$

Figure 4.9 Notes de cours, complétion de carré.

Les boîtes et les triangles servent d'aide-mémoire pour Line, comme elle l'explique durant l'entrevue.

> Interviewer : Je savais que tu avais une bonne façon d'enseigner et que c'était structuré, je voulais juste ajouter une…
> Line : C'est parfait, parfait. Moi je dis que faut que ça soit un trinôme carré parfait, pas là j'encadre ça pis toute ça, mais là toi…

Interviewer : Ils vont faire le lien avec qu'est-ce qu'ils ont vu avant.

Line : C'est ça, pis tsé là quand il va y avoir ça, on va dire, pensez à votre boîte. (10 mai 2010, lignes 468 à 471)

Line est très à l'aise avec sa planification, elle ne ressent aucun besoin à cette étape de la remettre en question, l'ajout des représentations visuelles apparaît comme un service qu'elle me rend pour que je poursuive mon étude (comme vu dans la méthodologie). En effet, Line aurait très bien pu me laisser faire les activités avec les élèves. Je prenais ainsi les données pour analyser les retombées chez les élèves. Line n'avait pas alors de changements à faire dans sa pratique. À la première entrevue, l'enseignante est plutôt détachée, les activités sont plutôt celles de la chercheure. Elle les insère dans sa planification comme : « Activité Patricia ». De plus, quand je lui parle des représentations visuelles, elle affirme qu'elle les a déjà vues mais qu'elle ne les a jamais intégrées dans son enseignement.

Line : Oui, oui, mais je l'ai jamais vu…je l'ai jamais enseigné moi comme ça, mais je l'ai déjà vu c'est ça en troisième secondaire je pense, en deuxième, troisième secondaire, il y avait des choses comme ça.

[…]

Line : Oui. Ici je vais marquer « activité de Patricia », d'accord, et on va se prévoir un petit temps pour faire une activité. (10 mai 2010, lignes 159 à 162)

[…]

Line : Là ici, je vais marquer exercice, bon je vais marquer exercice Patricia. Toi ça va être exercice un. (10 mai 2010, lignes 189-190)

À ce stade, après la première entrevue, Line est enthousiaste que je vienne essayer « mon projet » dans sa classe, mais en dit peu sur ce qu'elle pense de l'intégration des représentations visuelles en factorisation.

Cette entrevue permet ainsi de dégager les visions des deux partenaires de la recherche. Il ressort de mon discours des éléments du cadre théorique comme l'importance du visuel qui permet de comprendre le concept en jeu, l'importance de développer des habiletés liées à la factorisation comme la bidirectionnalité et de faire un lien avec l'histoire des mathématiques. Dans l'extrait ci-dessous, je décris de plus l'importance de donner du sens à ces techniques de factorisation, d'expliciter le pourquoi.

Interviewer : Factoriser c'est l'inverse de développer qu'ils connaissent déjà. (10 mai 2010, lignes 13)
[...]
Interviewer : C'est un petit peu parce que dans l'histoire c'est de même que ça c'est fait.
Interviewer : a^2-b^2, souvent ils associent ça... c'est pas aussi évident (a+b)(a-b), d'où ça vient, pourquoi, tandis que là s'ils l'ont vu, ils vont peut-être mieux s'en rappeler et se souvenir d'où ça vient. (10 mai 2010, lignes 239 à 243)
[...]
Interviewer : Pis pour la complétion de carrés, pis moi honnêtement, je suis ben bonne en mathématiques, la complétion de carrés, j'ai jamais vraiment compris d'où ça venait et pourquoi on faisait ça. Avec ça, j'ai un peu compris pourquoi. Parce que tsé dans la complétion de carré on dit qu'on additionne le carré de la moitié du deuxième terme, mais pourquoi on fait ça, moi je l'ai jamais su. (10 mai 2010, lignes 300 à 306)

Dans sa réponse à mon commentaire, Line laisse voir sa vision plus rigide des mathématiques reliée à un vocabulaire précis et à l'utilisation de moyens mnémotechniques pour se rappeler des étapes à suivre, comme les boîtes. Les représentations visuelles sont vues par l'enseignante comme une technique différente de la sienne à présenter aux élèves et qui est va être mise à l'épreuve dans l'expérimentation.

Line : Ok, parce qu'on veut avoir un trinôme carré parfait. Non, non mais tsé c'est une autre façon pis peut-être que moi je vais bien aimer ta technique, on verra. Moi je dis que faut que ça soit un trinôme carré parfait, pas là j'encadre ça pis toute ça, mais là toi...

Interviewer : Ils vont faire le lien avec qu'est-ce qu'ils ont vu avant.

Line : C'est ça, pis tsé là quand il va y avoir ça, on va dire, pensez à votre boîte. (10 mai 2010, lignes 468 à 471)

Synthèse de l'analyse de l'entrevue et de ses notes de cours

Ces analyses donnent des indications sur la composante épistémologique, c'est-à-dire le rapport au savoir de Line. Les mathématiques apparaissent comme rigides, on sent une grande rigueur mathématique de la part de Line qui se traduit par l'utilisation d'un vocabulaire précis à travers ses notes de cours et dans son discours. De plus, le savoir mathématique est très séquentiel, des étapes doivent être respectées dans un ordre précis, d'une écriture formelle, à un exemple, à la vérification. Le savoir apparaît comme un savoir à apprendre et par la suite à appliquer. Le « pourquoi » des étapes à suivre n'est pas pris en considération.

Après l'analyse de la première entrevue et des notes de cours de l'enseignante, des éléments autour de la composante didactique/cognitive sont mis de l'avant à travers l'explicitation d'habiletés à développer autour de la factorisation. On voit que Line travaille la bi-directionalité donc l'habileté à reconnaître des formes équivalentes à travers la vérification des expressions factorisées obtenues et ce, dans chacune des techniques de factorisation (ce qui a été relevé dans ses notes de cours). L'habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser est également travaillée par Line, elle explicite que celle-ci cause des difficultés aux élèves, elle consacre donc tout un cours dans lequel des étapes sont présentées pour expliciter la façon de reconnaître la forme à factoriser. La vision séquentielle des mathématiques de Line influence ici sa planification. Il s'agit d'expliciter des repères algébriques dans les expressions (l'élève doit s'attarder sur l'écriture algébrique qui est parlante) et par la suite à y appliquer une technique précise de factorisation. Le pourquoi est évacué de ce travail. Cette habileté ne devrait quant à moi ne pas être présentée telle quelle aux élèves mais devrait être découverte par eux pour favoriser ainsi une meilleure compréhension. Pour aider les élèves dans la reconnaissance des expressions à factoriser, Line a recours à des moyens mnémotechniques comme mettre dans une couleur différente les termes qui seront mis en évidence, représenter par une boite les termes à ajouter dans la complétion de carrés et par des triangles le terme en x dans cette même technique de factorisation.

Line travaille donc à sa manière l'habileté à reconnaître la technique de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser et plus implicitement l'habileté à reconnaître des expressions équivalentes en faisant la vérification de certaines techniques en développant les expressions obtenues avec la factorisation. Selon ses notes de cours et à travers son discours, elle ne semble pas travailler l'habileté à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas. Étant donné qu'elle n'utilise pas les représentations visuelles, il est normal qu'elle ne travaille pas à ce moment-ci les deux dernières habiletés, soient l'habileté à représenter visuellement une expression et l'habileté à faire le lien entre la démarche algébrique et visuelle.

Une autre habileté est mise de l'avant dans les notes de cours de l'enseignante à travers l'analyse des numéros proposés dans les exercices. En effet, dans plusieurs de ces numéros, l'élève est amené à appliquer pour une même expression deux techniques de factorisation. Dans certains exemples la même technique est appliquée deux fois.

Dans l'entrevue avant expérimentation, l'enseignante et moi-même touchons à d'autres composantes de l'intervention éducative relevées par Lenoir (2009). La composante organisationnelle est abordée. Line semble préoccupée par le temps et est soulagée de voir que les activités que j'apporte ne vont pas changer l'ordre de présentation de ses notes de cours ni ajouter trop de cours à sa séquence sur la factorisation.

En ce qui concerne l'appropriation par l'enseignante des représentations visuelles, je peux constater qu'à ce stade de la recherche, Line n'est pas très impliquée par la mise en place de ce qu'elle nomme une nouvelle « technique ». Elle est consciente que les représentations visuelles sont présentées dans les manuels mais elle ne s'y est pas vraiment attardée. De plus, elle ne s'investit pas vraiment dans les activités que je lui propose à part sur celle de la différence de carrés (voir 3.7.2) où la discussion tourne surtout autour du mode de présentation de l'activité (diaporama ou par manipulation avec du matériel). Dans l'entrevue avant l'expérimentation, je lui présente l'importance de travailler certaines habiletés de la factorisation comme la bidirectionnalité, la reconnaissance des différentes formes de factorisation et de suivre une démarche semblable à celle vécue dans l'histoire des mathématiques. Je mise sur l'importance du pourquoi, de la compréhension des étapes à suivre en mettant de l'avant ma propre expérience et mon enthousiasme en découvrant ces explications.

4.2. Analyse de deux séances en classe et des mini-entrevues associées

La séquence d'enseignement sur la factorisation s'étale sur dix cours de 60 minutes qui ont été filmés. J'ai choisi d'analyser deux de ces cours, le deuxième (cours 10, voir tableau 3.2) portant sur la différence de carrés et le dernier (cours 19) autour de la complétion de carrés. Il ressort de ces deux cours des résultats intéressants à analyser du point de vue de l'objet de cette étude. De plus, ces cours se situant au début et à la fin de la séquence d'enseignement, je pourrai relever de possibles indices sur l'évolution de l'appropriation des représentations visuelles par Line. Les autres cours ont été également visionnés mais une analyse moins systématique a été menée. Des éléments relevés de l'analyse de ces autres cours seront rapportés au chapitre V lors de la discussion.

Pour les deux cours, *Différence de carrés* et *Complétion de carrés*, des mini-entrevues ont été effectuées avec l'enseignante. Celles-ci viendront compléter les analyses des séances en classe.

4.2.1 Analyse de la séance en classe portant sur la différence de carrés

Pour mener l'analyse des séances en classe, j'ai découpé les transcriptions en épisodes tel que stipulé par Robert et Rogalski (2002, voir 2.6.3). Cinq catégories ont guidé l'analyse : les habiletés sur la factorisation travaillées, les interventions de l'enseignante avec les élèves, l'appropriation des représentations visuelles par l'enseignante, la place et les rôles de représentations visuelles. Chacun des épisodes est structuré en tableau, dans la colonne de gauche, j'ai noté les éléments qui ressortent des séances en lien avec les deux premières catégories, ceux-ci seront exemplifiés par des extraits de *verbatim* annotés dans la colonne de droite. L'analyse des trois autres catégories est présentée à la fin de chacun des tableaux.

Épisode1 : Présentation de la représentation visuelle de la différence de carrés (4 minutes)

Line annonce dès le départ que c'est la différence de carrés qui va être travaillée dans le cours. Elle a le souci de revenir sur ce qui a été vu précédemment : la factorisation d'un trinôme carré parfait et d'expliciter ce que représente la factorisation (la définition) qu'elle illustre avec un exemple numérique.

Tableau 4.1 Épisode 1 de la séance sur la différence de carrés

Habileté	Extrait
Dans cet extrait, on peut remarquer que Line souligne le caractère birectionnel de la factorisation, un trinôme carré parfait donne un binôme au carré car un binôme au carré donne un trinôme carré parfait : $(a \pm b)^2 \Leftrightarrow a^2 \pm 2ab + b^2$. Elle travaille donc l'habileté à reconnaître des expressions équivalentes, même si elle n'utilise pas ce terme.	Factoriser ça veut dire que je trouve les deux facteurs qui multipliés ensemble donne qu'est-ce que j'avais au début. D'accord? C'est comme si je factorise 10, ben je peux dire c'est 2 fois 5. Les deux facteurs, c'est 2 et 5. Alors si j'ai un trinôme carré parfait, factorisé ça me donne deux parenthèses identiques parce qu'un binôme au carré ça donne un trinôme carré parfait.

La présentation de la méthode de la différence de carrés se fait à partir d'un diaporama (voir figure 3.2) où les représentations visuelles sont au premier plan.

Habileté	Extrait
L'enseignante fait un lien entre le visuel et l'écriture algébrique, elle donne du sens à l'écriture algébrique sur la représentation visuelle (on cherche les	On peut représenter a^2-b^2 par la région en bleu suivante. Alors là j'ai, ça c'est a^2, a fois a ça me donne a^2. Moins b^2, alors moins b^2 ça veut dire que je lui enlève b fois b, la petite partie qui est là. Qu'est-ce qui est bleu ici, ça représente a^2-b^2. Ensuite, la différence de

dimensions du rectangle) et précise qu'on est à la recherche d'une expression équivalente :	deux carrés. Transformons cette figure pour obtenir une expression équivalente à $a^2 - b^2$. Alors qu'est-ce que ça va me donner? Si je transforme la figure, on va avoir, ici là j'ai « a », ici j'ai mon « b » qui est ici. (...) C'est quoi les dimensions là du nouveau rectangle?
Intervention	**Extrait**
Line utilise dans cet épisode des images, ce qui nous le verrons caractérise cette enseignante. Ainsi la factorisation d'un trinôme carré parfait est reconnue par deux parenthèses identiques : $(a+b).(a+b)$ ou $(a-b).(a-b)$. Il y ainsi une reconnaissance visuelle sur l'expression algébrique reliée à une des formes de factorisation. Le recours à des métaphores se traduit également quand l'enseignante insiste sur le caractère commutatif, *(a-b)* et *(a+b)* sont appelés des jumeaux non identiques car ils sont quasiment pareils (à un signe près). On remarque que Line explicite le terme mathématique exact, soit les conjugués.	Bon là on peut, on peut échanger les parenthèses, ici là la multiplication c'est commutatif. Qu'est-ce que ça veut dire, ça veut dire que si je mets cette première, cette parenthèse là en premier, ou si je la mets en deuxième, on peut inverser les parenthèses ici, ça va être pareil. En mathématique, ça ici, « a » plus « b » multiplié par « a » moins « b », on nomme ça les conjugués, mais moi je vais vous dire des jumeaux non identiques. (...) Ils sont quasiment pareil sauf le signe est différent ici.
Intervention	**Extrait**
Il y a de la part de l'enseignante un souci de trouver des « trucs » mnémotechniques, elle délaisse le vocabulaire mathématique au profit d'une métaphore qui va permettre aux élèves de retenir l'information, ce qu'elle verbalise ainsi :	Donc là on retient ça, que si on a à factoriser a^2-b^2, ça nous donne « a » plus « b » multiplié par « a » moins « b ».
Intervention	**Extrait**

Intervention	Extrait
Les élèves sont sollicités pour finir des phrases « clés » qui sont répétées depuis plusieurs cours. L'enseignante élabore ainsi un code avec les élèves, ils doivent finir les phrases qu'elle commence.	Line : Alors là regardez, aujourd'hui, on va voir la différence de deux carrés. Ça, la différence de deux carrés là, on va utiliser ça ben souvent. Comme un binôme au carré ça donne un… Tous les élèves : Beau trinôme carré parfait. […] Line : Quand je vais vous dire : qu'est-ce que ça donne une différence de carrés? Ça va être les conjugués, mais c'est des jumeaux non identiques.

Intervention	Extrait
Les questions adressées aux élèves sont dirigées et fermées.	Chercheure : Le côté qui reste, il mesure combien? Élèves : « a » moins « b » Line : Le côté ici, « a » moins « b ». Line : Ok, là ensuite… Chercheure : Ce qu'on va faire c'est qu'on va déplacer la partie bleue en bas sur le côté. Line : Qu'est-ce qu'il y a ici… Élève : « b » Line : …là on va le déplacer ici, ça veut dire que ça va nous donner quoi donc? Élève : « a+b » Line : Ici, ce côté-là c'est « a » moins le « b » qu'il y avait ici, le « a » c'était tout ça, moins le « b » qu'il y avait ici, et celui-là ça va devenir… Élèves : « a » plus « b » Line : « a » plus « b »

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

La chercheure intervient à deux reprises (voir dernier extrait) mais on voit que l'enseignante prend vite la parole voulant gérer la présentation liée aux représentations visuelles ce qui montre que l'enseignante est à l'aise avec ce type de représentations. Elle n'hésite pas, comprend bien la représentation, l'explique clairement aux élèves.

Place des représentations visuelles

Au début du cours, avant que les élèves aient vu la différence de carrés.

Rôles de représentations visuelles

Présenter, illustrer, donner du sens à une technique de factorisation.

Épisode 2 : Présentation d'un exemple de la différence de carrés accompagné de sa représentation visuelle (1 minute)

Line présente à l'aide du diaporama un exemple de différence de carrés : $16x^2$-9. Elle fait le lien entre la représentation visuelle et la démarche algébrique, elle utilise par la suite son truc de mémorisation des jumeaux non identiques.

Tableau 4.2 Épisode 2 de la séance sur la différence de carrés

Habileté	Extrait
Line fait le <u>lien entre ce qu'on recherche visuellement</u> (le côté du carré à partir de son aire) <u>et la manière algébrique</u> de trouver le bon terme (faire la racine carrée).	Line : Vu que j'ai $16x^2$… Élève1 : Ah, ah… Line : Ce serait quoi ça ici (le côté)? Élève2 : 4 Line : 4x Élève2 : -3 Élève3 : Ouin Line : Pis là ici, *4x* là aussi. Moins, là <u>ces côtés là du carré</u> ce serait quoi? Élèves : 3. Line : 3, 3 fois 3, ça donne 9. Élève 2 : Mais c'est moins 9…ok. Line : Regardez, <u>on fait la racine ici</u> ok? La racine de $16x^2$ ça me donne 4x, et la racine de 9 ça me donne 3. Là je sais que <u>mes côtés</u> c'est comme ça.
Intervention	**Extrait**

Line utilise plusieurs fois l'expression des jumeaux non identiques et termine son exemple en posant la question suivante aux élèves dans le but qu'ils retiennent le <u>truc mnémotechnique</u>.	Line : Parfait! Alors là on sait qu'est-ce que ça nous donne donc une différence de carré, qu'est-ce que ça donne si on factorise? Élèves : Des jumeaux non identiques. Line : C'est ça. Alors la parenthèse avec le plus la parenthèse avec le moins.
Intervention	**Extrait**
La plupart des <u>questions posées par Line sont d'ordre algébrique</u> de base, les élèves n'expliquent pas de raisonnement.	Line : Bon, ici est-ce que je peux mettre quelque chose en évidence avant de commencer? Élève : le 4. Line : Le 4, si je mets 4 en évidence ici il me reste? Si je sors 4, qu'est-ce qui va me rester? Élève : 2…$2b^2$….9 Line : b4
Intervention	
Line fait souvent le même <u>geste</u> pour illustrer ses propos, elle fait par exemple des parenthèses avec ses mains en parlant de la différence de carrés.	

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

Line utilise les représentations visuelles dans l'exemple donné, fait bien le lien entre la démarche algébrique et visuelle. Elle revient sur son « truc » mnémotechnique des jumeaux pour conclure ses explications. Elle intègre donc le nouvel outil tout en gardant bien sûr sa façon d'imager la factorisation d'une différence de carrés.

Place des représentations visuelles

Avant de commencer la factorisation d'un exemple donné.

Rôles de représentations visuelles

Illustrer une expression algébrique donnée et illustrer la démarche menant à la factorisation.

Épisode 3 : Notes de cours sur la différence de carrés (6 minutes)

Line demande aux élèves de prendre leurs notes de cours (celles présentées au point 4.1). Dans ces notes, la différence de carrés est représentée seulement algébriquement, il n'y a pas de représentation visuelle. La forme générale $a^2\text{-}b^2 = (a+b).(a\text{-}b)$ est donnée. Dans cet épisode, un événement important survient, Line a recours <u>spontanément</u> aux représentations visuelles quand elle regarde les notes de cours avec les élèves. Elle insère la représentation visuelle de la différence de carrés, rappelle aux élèves la figure vue dans le diaporama. Ses notes de cours sont projetées en avant sur un tableau interactif, elle représente visuellement la différence de carrés dans la première partie de ses notes de cours. Elle redemande alors aux élèves quelles sont les étapes pour découper la figure et la reconfigurer. Elle donne ainsi du sens à la factorisation de la différence de carrés à travers cette manipulation. Par la suite, lors de la présentation du premier exemple, Line s'appuie encore sur la représentation visuelle de cette technique de factorisation.

Tableau 4.3 Épisode 3 de la séance sur la différence de carrés

Habileté	Extrait
Line travaille l'habileté à <u>reconnaître la forme de factorisation à utiliser</u> selon l'expression à factoriser en donnant deux caractéristiques de la différence de carrés : un moins et deux carrés parfaits.	La méthode pour factoriser une différence de carrés, ben on dit c'est un binôme avec un moins obligatoire. Ok, alors ici, c'est obligé, on est obligatoire d'avoir un moins. Les deux termes sont des carrés parfaits.

Habileté	Extrait
Line travaille la bi-directionnalité de la factorisation en vérifiant si le premier exemple des notes de cours redonne le polynôme du départ si on multiplie les deux binômes. Elle voit donc à montrer l'équivalence des deux expressions.	Line : Si nous vérifions, c'est qu'on va faire le calcul, on va les multiplier les deux ensemble, pour voir si c'est vrai que ça donne $4x^2$ moins 9. Donc la première chose que je vais faire c'est 2x fois 2x, qu'est-ce que ça donne? Élèves : $4x^2$ Line : $4x^2$. Ok, c'est celui qui est ici. Ensuite, je vais faire 2x fois 3, ça va me donner? Élèves : 6x. Line : 6x. Là ensuite, je fais moins 3 fois 2x. Élève : Moins 6x. Line : Moins 6x. Voyez-vous? Une fois j'ai plus 6x, après j'ai moins 6x. Qu'est-ce qui arrive avec eux-autres? Élèves : Ils s'annulent. Line : Ils s'annulent. Et à la fin j'ai moins 3 fois plus 3, donc ça donne... Élève : Moins 9. Line : Donc ça donne moins 9. C'est pour ça que c'est une différence de carrés, parce qu'un moins fois un plus ça donne un moins. Les deux du milieu s'annulent.

Intervention	Extrait

Les questions aux élèves sont toujours très dirigées. <u>La seule question plus o</u>uverte est peu exploitée : qu'arrive-t-il avec le morceau qu'on obtient après soustraction? Line vise l'explication du déplacement effectué de ce morceau. Il aurait été intéressant que les élèves refassent cette explication d'eux-mêmes.

Line : Tantôt dans le diaporama qu'on a vu ça c'était « a » au carré. Là on enlevait, qu'est-ce qu'on enlevait?
Élève : Moins « b » au carré.
Line : « b » au carré. Lui on l'enlevait ici. Donc là tantôt on voyait que, qu'est-ce que ça donnait? Ici, on avait…
Élève : « a » moins « b »
Line : Je vais mettre ça ici comme ça… Donc, qu'est-ce qui nous restait ici? C'était…
Élève : « a » moins « b »
Line : « a » moins « b ». Là la partie qui est ici, <u>qu'est-ce qu'on faisait?</u>
Élèves : On la déplaçait
Line : On se disait, elle on va la prendre et on va la mettre ici. Donc, là si je fais ça ici, je vais la chercher ici pis là je la rajoute ici. La partie qui est ici là, c'est elle que je rajoute ici. Donc, le côté qui est là ici va mesurer?
Élèves : « a » plus « b ».

Intervention

On peut remarquer que Line est très précise quand elle fait les représentations visuelles. Elle utilise la fonction du tableau interactif pour faire des rectangles et des carrés parfaits.

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

On voit que Line intègre les représentations visuelles dans ses notes de cours qui étaient préparées avant l'expérimentation. Les représentations visuelles servent de repère aux élèves pour les aider dans la factorisation de la différence de carrés.

Place des représentations visuelles

Les représentations viennent jusqu'à maintenant toujours en début d'explication sur une nouvelle façon de factoriser.

Rôles de représentations visuelles

Illustrer un exemple, donner du sens à une étape algébrique.

Épisode 4 : Exercices et correction (10 minutes)

Les élèves travaillent individuellement pendant environ cinq minutes sur les huit différences de carrés présentées dans leurs notes de cours (voir figure 4.7) pendant que Line écrit le devoir au tableau. L'enseignante procède par la suite à la correction. Beaucoup d'élèves ont bloqué sur certaines différences et ont posé des questions individuellement. La plupart n'ont pas eu le temps de compléter les exercices alors ils les font en même temps que l'enseignante au tableau.

Tableau 4.4 Épisode 4 de la séance sur la différence de carrés

Habileté	Extrait
Line demande à plusieurs reprises aux élèves s'ils peuvent factoriser encore. Au départ, les élèves ne faisaient que la	Line : Oui mais là si je veux, est-ce que je peux factoriser encore plus? Élève : Oui...

différence de carrés. Line insiste donc sur le fait qu'il faut continuer de factoriser si c'est possible. La première différence de carrés ($144a^2$-$81b^2$) demande non seulement de faire une différence de carrés, mais aussi de faire une mise en évidence. Les élèves ont d'abord fait la différence de carrés et ensuite la mise en évidence. Ce n'est pas une erreur, mais ce n'est pas le chemin le plus simple. Faire en effet la différence de carré en premier a causé des difficulté chez certains élèves. Les élèves obtenaient l'expression (12a-9b)(12a+9b), mais ne pensaient pas à factoriser ou faisaient l'erreur suivante (12a-9b)(12a+9b)=3(4a-3b)(4a+3b). Line fait réaliser aux élèves en faisant les deux itinéraires (différence de carrés et mise en évidence ou l'inverse) qu'il est plus simple de toujours vérifier si on peut faire une mise en évidence d'abord. Elle commence à instaurer un schème chez les élèves pour qu'ils sachent dans quel ordre faire les techniques de factorisation et comment les reconnaître. C'est une de ses façons de développer cette habileté.	Line : Oui… qu'est-ce que je ferais pour factoriser encore plus? […] Line : Ici aussi je sors 3. Et là tout ça c'est multiplié ensemble, donc les 3 je les multiplie ensemble, 3 fois 3, ça me donne 9. Je voulais dire aussi, ça me donne 3 à la deux. Et là ma parenthèse avec un moins, ma parenthèse avec un plus. Bon, qu'est-ce qui aurait été plus simple, moins long? Qu'est-ce que j'aurais pu faire au début? Élève 1: Laisser 12a… Élève2 : Non, mais mettre 12. Line : Mettre 9 en évidence au début. Alors quand vous allez avoir à factoriser, commencer toujours par une simple mise en évidence.
Intervention	**Extrait**
Line demande à plusieurs reprises aux élèves s'ils comprennent. Elle s'assure qu'ils suivent de cette manière, mais sans réellement leur demander de réexpliquer à leur façon ou d'exposer leur raisonnement.	Donc là, la ligne suivante je dirais 9(4a-3b) multiplié par (4a+3b). Est-ce que tout le monde comprend? […] Donc là ça me fait, -2-11 ça me fait (x -13) et je vais multiplier par (x-2+11), (x+9). Est-ce que tout le monde comprend? […] Regardez bien ici là j'ai -2-11, -2 +11, c'est pour ça que c'est -13 et +9. Ça va pour tout le monde?

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

Dans cet épisode, Line n'utilise pas les représentations visuelles.

Épisode 5 : Un exercice autour de la somme de carrés (8 minutes)

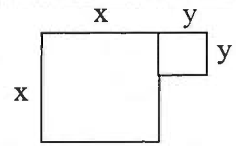
Dans un des exercices on demandait de factoriser la différence entre x^4 et y^4. Plusieurs élèves ont d'abord procédé comme suit : $x^4-y^4 = (x^2-y^2).(x^2+y^2)$. Les élèves étaient portés à factoriser convenablement la première expression (x^2-y^2) en $(x-y).(x+y)$ et à vouloir procéder de la même façon pour la deuxième expression (x^2+y^2). Diverses factorisations étaient proposées pour (x^2+y^2), comme $(x+y)^2$ ou $(x+y)(x-y)$. Dans son intervention, Line s'appuie sur les représentations visuelles pour montrer que cette expression n'est pas factorisable. On a dans cet épisode une exemple de l'intégration des représentations visuelles dans la pratique de Line.

Tableau 4.5 Épisode 5 de la séance sur la différence de carrés

Habileté	Extrait

Line travaille l'habileté à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas en utilisant les représentations visuelles. Elle explique pourquoi une somme de carrés ne se factorise pas en ayant recours à une représentation visuelle qu'elle représente au tableau. Cette possibilité n'avait pas été prévue par la chercheure et est donc une initiative propre de l'enseignante. Elle montre qu'un processus de découpage et reconfiguration ne fonctionne pas dans le cas de la somme de carrés.

Line : Pourquoi il ne peut pas se factoriser? [x^2+y^2] Si je reprends mes carrés qu'on a vu tantôt. Ok, regardez bien. Si je reprends les carrés, je me dis, j'ai « x » au carré, alors ça c'est mon « x » au carré, plus « y » au carré, « y » au carré il est ici. Comprenez-vous? Là ce n'est pas : j'enlève ce qui est là et je le rajoute ici. Ce n'est pas une différence de carrés, c'est une somme de carrés et ça, ça ne se factorise pas.



Habileté

Elle revient aussi sur les formes équivalentes d'écriture d'expressions algébriques. Elle montre au tableau que si on bouge le carré représentant y^2 par rapport à x^2, on obtient une même écriture de l'expression algébrique.

Extrait

Line : Même si, ça c'est « x^2 » plus « y^2 », mais là mon « y » si je le mets ici, ça va faire « x^2 » plus « y^2 ». Ça ne fera pas une autre forme d'écriture. Ok, ça va faire « x^2 » plus « y^2 », c'est la même chose que « y^2 » plus « x^2 ». Donc là je ne peux pas l'écrire autrement, il se factorise pas autrement.

Intervention

Extrait

Quand les élèves essaient de factoriser x^2+y^2 en $(x+y)(x+y)$, Line revient avec ses phrases clés en mettant de l'emphase sur le fait qu'un binôme au carré donne un trinôme carré parfait. Les élèves répètent tous la même chose quand elle demande ce que donne un binôme au carré : un beau trinôme carré parfait.	Élève : Ben « x » plus « y », pis là l'autre parenthèse ça serait « x » plus « y » aussi. Line : « x » plus « y » fois « x » plus « y »? Élèves : Ouin. Line : Oh oh! C'est quoi ça « x » plus « y » fois « x » plus « y »? Élève : Un beau… Line : C'est un binôme au carré. « x » plus « y » fois « x » plus « y » c'est quoi ça? C'est un binôme au carré pis ça donne un? Élèves : Beau trinôme carré parfait! Line : C'est ça! Ça c'est l'autre chose qu'on a appris hier. Un binôme au carré ça donne un trinôme carré parfait. Là ce n'est pas la même chose que somme de carrés là. Pas la même chose!

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

On peut ici affirmer que Line s'est appropriée l'outil des représentations visuelles en l'utilisant dans l'action spontanément pour répondre aux questions des élèves. Cette possibilité n'avait pas été prévue par la chercheure ni discutée avec l'enseignante.

Place des représentations visuelles

À l'intérieur d'exercices algébriques, pour répondre à des questions d'élèves.

Rôles de représentations visuelles

Les représentations visuelles ont servi à expliquer pourquoi la somme de deux carrés ne se factorise pas. En effet, on retrouve souvent cette erreur chez les élèves. La différence de carrés peut se factoriser parce qu'on peut modifier la figure tandis qu'on ne peut pas faire la même chose avec la somme de carrés.

Cette analyse en tableau du cours sur la différence de carrés nous donne des informations sur les trois composantes de l'intervention éducative, sur la façon dont Line travaille les habiletés reliées à la factorisation et son appropriation des représentations visuelles.

Dans cette séance, des indices sur la composante épistémologique, soit la vision des mathématiques de Line, son rapport aux savoirs sont explicités. Comme vu dans l'analyse des notes de cours et de la première entrevue, Line semble avoir une vision des mathématiques comme une série de techniques, de recettes ou de méthodes à retenir.

> Line : Donc là <u>on retient ça</u>, que si on a à factoriser $a^2 - b^2$, ça nous donne « a » plus « b » multiplié par « a » moins « b » (lignes 52-53)

L'utilisation d'un vocabulaire rigoureux est présent tout le long de la séance. Par exemple, Line souligne que (a-b) et (a+b) sont des conjugués et reprend les termes exacts décrivant chacune des expressions algébriques comme par exemple « un trinôme carré parfait », « binôme au carré ».

Plusieurs éléments éclairant la composante didactique/cognitive de l'enseignante sont précisés. Dans cette séance, Line travaille toutes les habiletés de la factorisation relevées dans le cadre théorique. L'habileté à reconnaître des formes équivalentes, à travailler le caractère bidirectionnel de la factorisation et de la distributivité est mise de l'avant dans les épisodes 1, 3 et 5. Dès l'explicitation de la définition de la factorisation (épisode 1), Line s'appuie sur un exemple numérique pour illustrer le caractère bidirectionnel « factoriser-développer ». Dans la présentation de la technique de la différence de carrés (épisode 1), elle précise aux élèves l'équivalence entre les formes d'un binôme au carré et du trinôme carré parfait associé. Les représentations visuelles viennent appuyer cette habileté, Line illustre les expressions équivalentes en transformant la figure géométrique en une autre figure ayant la même aire. Cette habileté est également travaillée dans l'étape Vérification (épisode 3). Line pousse les élèves à vérifier la factorisation obtenue en développant l'expression obtenue. Finalement, dans l'intervention autour de l'expression x^2+y^2 (épisode 5), Line a recours cette fois aux expressions non équivalentes, elle ne peut reconfigurer, découper la figure obtenue avec x^2+y^2 pour obtenir un carré.

Tout ce travail autour des expressions équivalentes est lié à l'habileté à faire le lien entre l'écriture algébrique et les transformations faites sur la figure. Ce même processus de découpage et de reconfiguration permet de travailler l'habileté à représenter visuellement une expression algébrique à factoriser. L'habileté à faire le lien entre le visuel et l'algébrique apparaît indissociable de l'habileté à reconnaître des expressions équivalentes. Travailler avec les représentations visuelles nous amène donc à travailler sur l'équivalence des expressions. Ces habiletés sont sollicitées dans les épisodes 1 et 2. Line précise aux élèves ce que signifie visuellement chaque expression algébrique, « le côté du carré, l'aire du carré » (épisode 1), « on recherche le côté du carré à partir de son aire » (épisode 2).

La quatrième habileté travaillée qui apparaît dans un exercice est celle de reconnaître des formes qui ne factorisent pas (épisode 5). Line est amenée à la travailler avec l'exemple de la somme de carrés qui comme vu dans la problématique cause des difficultés chez les élèves. Les représentations visuelles apparaissent dans cet incident l'outil privilégié par Line pour contrer cette erreur. Visuellement les élèves sont amenés à voir qu'on ne peut construire un nouveau carré à partir de deux carrés.

Finalement, Line travaille l'habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression algébrique (épisode 3). Ce travail se fait sans les représentations visuelles. Line amène les élèves à s'attarder sur l'écriture algébrique, à y repérer des indices leur permettant de détecter la forme de factorisation à utiliser. Dans le cas de la différence de carrés, il s'agit de voir qu'on a un moins qui est obligatoire (l'enseignante insiste là-dessus) et deux carrés. Dans cette séance, cette habileté se précise. Line amène les élèves à voir que pour certaines expressions, on peut appliquer deux techniques de factorisation l'une après l'autre. L'ordre apparaît ici important, l'enseignante fait remarquer aux élèves qu'il est plus aisé de procéder d'abord par la mise en évidence et par la suite par la différence de carrés que de faire l'inverse. Grâce à cette enseignante, on comprend mieux l'habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser. Ce n'est pas seulement savoir quelle expression amène à quelle forme de factorisation, mais aussi dans quel ordre on doit appliquer la factorisation pour être plus efficace.

La composante double dimension médiatrice/médiative m'amène à m'intéresser aux modes d'interaction en classe et voir comment l'enseignante organise les médiations entre les élèves et entre elle et les élèves. Dans cette séance, Line utilise des phrases-clés que les élèves répètent dans le but de servir d'aide-mémoire : « beau trinôme carré ». Elle se sert d'images, de métaphores et de mots-clés : « un trinôme carré parfait ce sont deux parenthèses identiques », « pour la différence de carrés, on obtient deux jumeaux non identiques ». De plus, les gestes viennent appuyer ces métaphores (elle mime les parenthèses avec les mains). Les élèves répondent à des questions précises, fermées. Les questions de Line sont très dirigées et laissent peu de place à des possibles explicitations de la part des élèves. J'ai pu remarquer qu'elle se soucie de la compréhension de ses élèves en leur demandant « est-ce que tout le monde comprend? » à plusieurs reprises.

Cette séance amène des éléments intéressants quant à l'appropriation des représentations visuelles par Line. Dès l'épisode 1, l'enseignante intervient lors de ma présentation auprès des élèves sur la différence de carrés avec des représentations visuelles. Elle prend la parole à deux reprises voulant gérer la discussion ce qui montre une certaine aisance de sa part pour ces représentations. De plus, l'enseignante intègre les représentations dans ses notes de cours (épisode 3), elle les rajoute sur le tableau interactif en reprenant les différentes étapes de manipulation. Dans l'épisode 2, Line utilise les représentations visuelles dans un exemple, elle donne du sens à l'expression algébrique comme l'aire d'un carré à laquelle on soustrait un autre carré. Les représentations visuelles sont ainsi utilisées à la fois dans le cas général et dans les exemples. Finalement, dans l'épisode 5, Line s'appuie sur les représentations visuelles pour contrer une erreur des élèves autour de la factorisation de x^2+y^2 (elle montre que celle-ci ne se factorise pas). Pour contrer cette erreur, elle utilise également sa phrase mnémotechnique « on obtient un beau trinôme carré parfait » pour souligner que x^2+y^2 ne peut être égal à $(x+y)^2$ car ce dernier représente un beau trinôme carré parfait. Ainsi, dans les épisodes 2, 3 et 5 le recours aux représentations visuelles par l'enseignante est totalement spontané.

Dans la séance sur la différence de carrés, les représentations visuelles sont utilisées dans plusieurs des épisodes. Au début du cours, les représentations visuelles servent à présenter, illustrer, donner du sens à la technique de factorisation de la différence de carrés et ce, dans le cas général et dans des exemples. Les représentations visuelles ont également un rôle bien particulier qui est de contrer les erreurs, présenter des arguments pour montrer que certaines expressions ne se factorisent pas.

4.2.2 Analyse de la mini-entrevue associée à la différence de carrés

Au cours suivant, qui a eu lieu quelques jours après celui sur la différence de carrés, Line aborde l'utilisation des représentations visuelles. Elle semble très enthousiaste. Elle avait remplacé une enseignante dans un autre groupe qui avait seulement vu la factorisation de façon algébrique. Dans ce groupe, la même question sur la somme de carrés est revenue. Line m'explique alors qu'elle a fait la représentation visuelle au tableau et que plusieurs élèves ont alors compris pourquoi cette expression ne pouvait pas se factoriser, contrairement à la différence de carrés.

> Line : Là j'ai dit bon, là j'ai fait un carré, là ça c'était « a » au carré, « a » fois « a », le petit « b », « b » fois « b », fac là, tout le monde a allumé! Pis là c'était d'autres qui disaient : « Ah, c'est pour ça! ». J'entendais plein de monde dans la classe qui avaient cette réaction là, oui! Ils ont compris.

Cette expérience a amené l'enseignante à reconsidérer sa planification. Elle annonce clairement qu'une prochaine fois, elle attendra que le questionnement vienne des élèves avant d'utiliser les représentations visuelles. Celles-ci viendront en réponse à un besoin provenant d'eux, et non au début de l'apprentissage d'une nouvelle technique de factorisation.

> Line : Une autre année moi là, je vais le faire comme ça, je vais le faire au début algébrique pis après, après là, ils vont avoir commencé à faire des exercices, là je vais

> le sortir géométrique, pis là ils vont comprendre mieux. Ils vont vraiment comprendre pourquoi, ils vont l'avoir. Je me suis dit en tout cas que c'était intéressant.
> Interviewer : Qu'ils se posent la question. Moi je me demandais, peut-être qu'ils se posent même pas la question.
> Line : Pis si.... de le faire au début, ben là ça a empêché les miens de se poser cette question là.
> [...]
> Mais au début ils n'avaient pas des réactions : « Ah! C'est pour ça! »

Line propose donc de travailler l'habileté à reconnaître certaines expressions qui ne factorisent pas à l'aide de leur représentation visuelle. Elle ajoute qu'elle changerait la place des représentations visuelles qu'elle n'utiliserait pas au tout début pour présenter la technique de factorisation comme nous l'avons fait dans cette expérimentation.

4.2.3 Analyse de la mini-entrevue associée à la complétion de carré

Juste avant le cours sur la complétion de carrés qui a lieu plusieurs cours après celui sur la différence de carrés, Line m'apprend qu'elle a eu le temps d'aborder algébriquement la complétion de carré avec plusieurs élèves. En fait elle a déjà amorcé l'enseignement algébrique de la complétion de carré au dernier cours. Officiellement par contre, le cours théorique sur la complétion de carré se passe cette journée où ils complèteront leurs notes de cours. Quelques élèves ont cependant déjà commencé les exercices.

Line souligne que c'est ainsi qu'elle aimerait procéder l'année prochaine pour sa séquence sur la factorisation, elle explicite clairement un changement dans sa planification :

> Line : L'année prochaine, moi je vais le faire comme ça, je vais le faire un peu algébriquement et après je vais leur montrer avec ça (avec les représentations visuelles).

Ce changement provient de l'épisode décrit dans la section précédente où Line a enseigné à un autre groupe qui n'avait pas vu les représentations visuelles. C'est la réaction des élèves, leur compréhension amenée par les représentations visuelles qui a favorisé ce changement d'attitude.

> Line : En tout cas, tu aurais dû voir leur réaction. Quand ils ont dit « Ah c'est pour ça madame ». Là je me suis dit, il faudrait que Patricia soit là!

Il y a un souci de la part de l'enseignante de garder les représentations visuelles pour les ressortir, les utiliser à des moments clés, quand les élèves se questionnent, ne comprennent plus. Les représentations visuelles favorisent ainsi la compréhension chez les élèves, les indices d'une telle compréhension proviennent de leurs dires, ils l'ont exprimé clairement.

Dans cette mini-entrevue, l'enseignante explicite ce qu'elle va faire dans le cours. Elle m'explique comment elle va faire l'activité que j'avais proposée (voir la méthodologie, figure 3.5). Elle précise qu'elle ne projettera pas à l'écran l'activité comme telle mais va plutôt laisser le temps aux élèves de lire la situation et qu'elle va dessiner la figure au tableau. On sent ici une prise de position de l'enseignante qui adapte l'activité à sa pratique, se l'appropriant. Ce n'est plus « l'activité Patricia » comme elle la décrit dans l'entrevue avant l'expérimentation, il y a un réaménagement de la tâche proposée.

> Line : Bon là ici moi je le mettrai pas sur powerpoint ça parce que je vais le dessiner, je vais le dessiner avec de la couleur comme ça. Je veux préparer cette affaire là et après ça je vais y aller avec ma théorie dans ça (le cahier de notes de cours), mais ça, ça va être la deuxième partie.
> [...]
> Line : Bon là je vais aller faire la figure. Je vais mettre du noir et ensuite de la couleur. Eux autres ils ont fait ça comme ça, là je suis pareil, là je vais en rajouter. Là 10x...
> Patricia : C'est 5, 5.
> Line : Je devrais leur dire que pour lui 10x, c'était un grand qu'il a séparé en deux? Je devrais-tu le faire le rectangle 10x, le séparer en deux... Ils vont le voir, je vais leur dire. Ok, là ici je vais leur dire, ça c'est x, ben c'est x au carré et là eux-autres ils vont le trouver et ça ici c'est 5x, donc c'est x et eux vont me dire ici c'est 5 et ici c'est 5, alors ça c'est quoi? C'est ça! Pas pire hein, wow!

Ce dernier extrait nous informe sur la composante didactique/cognitive. Line a le souci de faire le lien entre la représentation visuelle est la démarche algébrique notamment quand elle parle du rectangle que l'on coupe en deux parties ou quand on cherche les côtés des carrés. Elle veut travailler cette habileté sans que l'on en ait parlé avant. On voit qu'elle se pose elle-même des questions sur comment elle va enseigner à l'aide des représentations visuelles. Elle demande si elle devrait dessiner le rectangle que l'on sépare en deux parties. Elle répond elle-même à cette interrogation. Ce processus nous montre que Line commence à intégrer les représentations visuelles, elle se les approprie. Elle amène des éléments de sa propre pratique, comme mettre de la couleur, à l'aspect visuel de la complétion de carré. Elle a intégré les représentations visuelles dans sa planification de la façon qui lui semble le plus efficace, c'est-à-dire un peu après avoir commencé l'enseignement algébrique de la technique. On sent à travers ce discours que l'enseignante a bien réfléchi sur les représentations visuelles utilisées dans la complétion de carrés et qu'elle est satisfaite de ce qu'elle a fait : « Pas pire hein, wow! ». De plus, dans cet extrait, l'enseignante explicite les interactions qu'elle va avoir avec les élèves. Les questions qu'elle prévoit sont encore fermées « là je vais leur dire ça c'est x, ben c'est x au carré, eux autres ils vont le trouver et ça ici c'est $5x$ ». Les élèves sont guidés dans le raisonnement à produire.

Line explicite que pour procéder à la complétion de carrés, les élèves vont avoir besoin d'un préalable essentiel : le binôme au carré qui donne un trinôme carré parfait.

> Line : Moi là, ce qui me reste à voir avec eux autres, c'est ça, la complétion de carré, mais il y en a qui ont déjà commencé, ça ne sera pas une grosse affaire et ils connaissent là, un binôme au carré, ça donne un trinôme carré parfait et c'est ça le gros de ça. Donc ça, ça ne sera pas un problème pour eux autres.

Line affirme que la complétion de carrés est simple une fois que les élèves ont compris qu'ils devaient utiliser la factorisation d'un trinôme carré parfait qui est une connaissance des élèves. Elle suppose que ce ne sera pas un problème pour les élèves. Sa technique algébrique d'enseignement de la complétion de carré semble donc fonctionner, mais les élèves donnent-ils du sens à ce qu'ils font? Comprennent-ils pourquoi on procède ainsi? Les représentations visuelles vont d'après moi permettre d'asseoir cette compréhension.

4.2.4 Analyse de séance en classe sur la complétion de carré

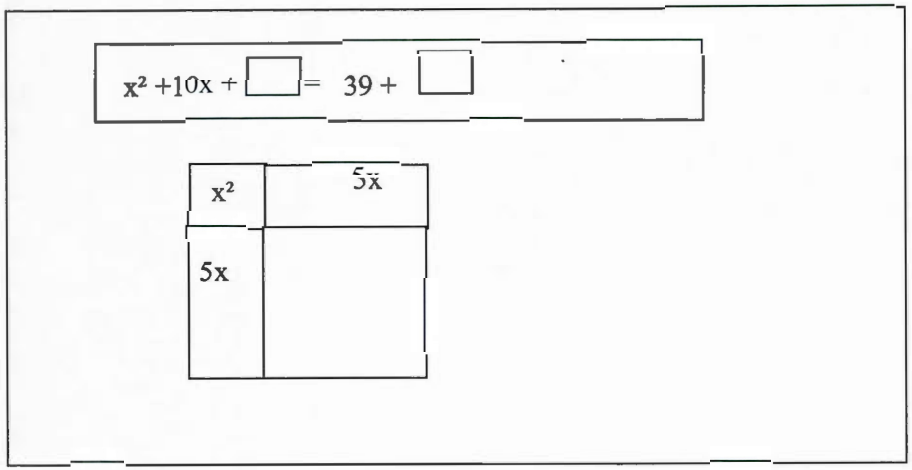
L'analyse de cette séance sera présentée dans le même format que celle sur la différence de carrés, un tableau à deux colonnes.

Épisode1 : Représentation visuelle d'Al-Khawarizmi pour résoudre des équations du deuxième degré par complétion de carré (13 minutes)

Line passe l'activité sur la complétion de carré avec Al-Khawarizmi (voir figure 3.5). Les élèves ont vu la technique algébrique de complétion de carré au dernier cours sans l'attacher à une représentation visuelle. Line demande aux élèves de lire d'abord seuls l'exercice et par la suite, elle le fait avec eux en grand groupe.

Tableau 4.6 Épisode 1 de la séance sur la complétion de carré

[Le dessin suivant est fait au tableau]



Habileté

Line a au départ une question d'un élève concernant les équations équivalentes. Comme les élèves ont commencé à voir la complétion de carré au dernier cours avec les équations du type $x^2+bx+c=0$, ils ne voyaient pas nécessairement au départ qu'on avait le même type d'équation à résoudre ($x^2+10x=39$). Line travaille l'équivalence des équations algébriques. Il est intéressant de voir qu'elle donne du sens à l'écriture algébrique dans ce même registre (c'est un nombre élevé au carré plus 10 fois ce nombre est égal à 39). Il n'y a pas de lien avec les représentations visuelles avec lesquelles il s'agirait plutôt de s'attarder à l'aire d'un carré de côté x à laquelle on ajoute l'aire d'un rectangle d'aire $10x$, la somme des deux aires donne 39.

Extrait

Élève : L'expression algébrique ce ne serait pas $x^2+10x-39$ plutôt?
Line : Là, lui, ça revient au même. Ce sont des équations qui sont équivalentes.
Élève : Oui…
Line : Si on fait, on peut écrire de deux façons, il n'y a pas une façon qui est plus algébrique que l'autre. $x^2+10x-39=0$ c'est une équation qui est équivalente à celle-là.
Élève : Oui, mais je veux dire, normalement, au départ, on a rien fait dedans.
Line : Même si on rien fait dedans, ton équation peut être représentée comme ça : $x^2 +10x =39$ parce que ça peut être, je ne sais pas moi, un nombre élevé au carré plus 10 fois ce nombre là égal 39, c'est ça que tu as à résoudre et tu veux savoir ce qu'il vaut le x. Ok?

Intervention

Line pose ici une question plus ouverte, qui tente d'amener les élèves à comprendre le raisonnement derrière la représentation visuelle d'Al-Khawarizmi, c'est-à-dire qu'il place les rectangles de façon à faire un carré plus tard. Line ne laisse malheureusement pas le temps aux élèves de répondre et de réfléchir à la question et précise celle-ci et donnant de petites questions plus faciles, plus algébriques, pour amener les élèves à la réponse escomptée. Il est aisé pour les élèves de répondre à ces questions, ils ont juste à les lire sur la figure.

Extrait

Line : Alors là, il a construit cette figure-là. Il trace d'abord le carré gris, alors le carré gris c'est celui-là, dont les côtés mesurent x. Donc il savait que ce côté-là mesure x et l'autre aussi, c'est ce qu'il a tracé. Il sépare ensuite le terme 10x en deux parties qu'il représente par des rectangles blancs. Alors les rectangles là c'est ces deux-là. Donc il avait *10x* c'était le grand rectangle. Son grand rectangle, il l'a séparé en deux. Il s'est dit là je vais mettre 5x et 5x ici. (….) Bon là ensuite on nous dit, ses rectangles il est venu les juxtaposer ici. Pourquoi il les a placés comme ça ses rectangles? Pourquoi il les a placés ici? Combien il mesure le côté ici?
Élèves : x
Line : et celui-là?
Élèves : 5

	Line : 5. Alors je peux écrire mon 5 ici et celui-là ici? Élèves : ben 5 aussi. Line x et ici? Élèves : 5 Line : 5 aussi.
Habileté	**Extrait**
Line fait ici le lien entre la démarche algébrique apprise et la représentation visuelle. Elle associe ce que les élèves ajoutent dans un petit carré dans leur démarche algébrique (le terme constant d'un trinôme carré parfait) au carré qu'ils complètent sur la figure tracée. **Intervention** L'enseignante donne du sens à la technique de « complétion de carré », on l'appelle ainsi car on complète un carré. Line s'attarde à souligner aux élèves que maintenant ils sont capables de comprendre le pourquoi, le rôle du visuel est ainsi de faciliter la compréhension.	Line : Alors l'aire totale ici est de 39. (...) C'est ça, complétez-la pour former un carré. Alors qu'est-ce que vous allez faire? Ça va être quoi la partie qu'on va ajouter? La partie qu'on va ajouter on va la mettre là dans le carré qui est en rouge, ça va être quoi? Dites-moi ça va être quoi. Élève : Ça va être le genre de carré Élève 2 : Ça va être 25. Line : 25, ça va être là. C'est pour ça que ça s'appelle complétion de carré. Vous venez de comprendre pourquoi hein. Parce que là je complète pour avoir un vrai carré. Élève : Ah. Line : Donc là si j'ai rajouté, vous dites quel nombre que j'ai rajouté? Élèves : 25. Line : Donc ici là j'ai ajouté 25. Si je l'ajoute d'un côté de l'égalité, je l'ajoute de l'autre. Vous comprenez?
Intervention	**Extrait**
Line pose tout au long des explications beaucoup de question fermées, demande des réponses algébriques. Les élèves ont juste à lire les informations sur la figure	Line : Donc ça va faire? (ligne 182) Élèves : 64. (...)

ou sur l'expression algébrique pour répondre aux questions.	Line : qu'est-ce que ça donne -13 fois -13? (ligne 211) Élève : 169 Line : 169 plus 10 fois -13, qu'est-ce que ça donne? -130, alors 169-130 est-ce que ça nous donne 39?
Intervention	**Extrait**
On voit par ces questions de Line qu'elle tente d'organiser la démarche des élèves en étapes séquentielles. D'abord on fait telle chose, ensuite on doit faire telle étape et on finit toujours par telle autre étape. On ajoute une partie d'abord pour compléter le carré, on fait la racine carrée, on résout et finalement, on vérifie. Ce sont les étapes que l'on retrouve dans ses notes de cours.	Alors qu'est-ce que vous allez faire? Ça va être quoi la partie qu'on va ajouter? (ligne 163) Bon là ensuite, rendus là, qu'est-ce qu'on fait pour résoudre? (ligne 185) Pour être sûrs que c'est bon, qu'est-ce qu'on peut faire? (ligne 201)
Intervention	**Extrait**
Line reprend des expressions souvent utilisés dans les cours passés comme phrases-clés : « Qu'est-ce qu'on reconnaît ici? Un beau trinôme carré parfait ».	Line : Alors c'est quoi ça ici c'est? Élève : C'est un carré parfait. Line : Un beau trinôme carré parfait. Il se remplace par quoi mon trinôme carré parfait? Élève : Un binôme au carré. Line : (x+5) au carré, en plein ça.
Intervention	**Extrait**
Line demande souvent au même élève de dire le nom du mathématicien arabe Al-Khawarizmi car elle est peu à l'aise avec la prononciation. Cela crée un lien avec l'élève et toute la classe réagit positivement.	Line : Oui, c'est un arabe le mathématicien. Comme il s'appelle donc? Si on n'est pas sûrs de la prononciation, il va falloir demander à Mme Simon, comment il s'appelle donc? Samuel : Al-Khawarizmi. Line : C'est beau! Tu l'as mieux que moi. Alors on sait que si on veut prononcer son nom,

Cette façon de faire nous en apprend sur la composante psychopédagogique de l'intervention éducative chez Line.	on demande à Samuel. [...] Alors, pour résoudre cette équation, là, le mathématicien en question Monsieur Massicotte si vous voulez le nommer Samuel : Al-Khawarizmi... [...] Reproduisez cette figure et comme le propose notre arabe, comment il s'appelle... Samuel : Al-Khawarizmi,

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

Line lit souvent l'exercice mot à mot, n'est pas très à l'aise avec les termes arabes. Par contre, quand vient le temps de lier la représentation visuelle à la démarche algébrique elle fait très bien le lien sans qu'on en ait réellement parlé ensemble. La représentation visuelle permet de comprendre ce que représente l'expression « complétion de carré », on est en train de compléter un carré. Elle a adapté l'exercice à sa manière et le fait après avoir vu la technique algébrique. C'est à ce moment qu'elle les croit les plus utiles.

Place des représentations visuelles
Après avoir fait un survol de la complétion de carré de manière algébrique.

Rôles de représentations visuelles
Illustrer, donner du sens à une démarche algébrique.

Épisode 2 : Deuxième exemple avec la représentation visuelle (10 minutes)

Line laisse du temps aux élèves pour faire un exercice situé au bas de la page, il ressemble au premier fait par les élèves. Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 + 8x = 9$ (le numéro d). Elle leur demande de le faire de la même manière que le premier, leur laisse du temps et ensuite le fait avec eux. Elle insiste sur le fait qu'ils ne sont pas obligés de faire la représentation visuelle mais que cela peut les aider. La plupart des élèves dessine la représentation.

Tableau 4.7 Épisode 2 de la séance sur la complétion de carré

Habileté	**Extrait**
Dans ce deuxième exemple, Line fait le lien entre les étapes de la résolution algébrique et les étapes visuelles. Dans le cours précédent, elle avait vu avec les élèves qu'il fallait toujours diviser le terme du milieu (le terme en x) par deux. Elle donne maintenant du sens à cette étape de l'algorithme en l'attachant au fait qu'il faut diviser un grand rectangle en deux parties. En travaillant la complétion de carré avec une représentation visuelle, Line travaille l'habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser. Ainsi le rectangle d'aire *4x* a des côtés qui mesurent *x* et 4, celui-ci ne va pas être placé n'importe comment. Le côté de mesure *x* sera accoté à un des côtés du carré qui mesure aussi *x*.	Line : Alors, là qu'est-ce qui se passe avec notre Arabe, il avait x au carré qui était ici, lui il a tracé ce carré là, ça lui donnait x et x, il savait que c'étaient ses côtés. Là il se disait que le 8x ça va être quoi? Élèves : 4x Line : Un grand rectangle que je vais séparer en deux, une partie que je vais mettre là et l'autre partie là. Donc c'est 4x ici et 4x ici. C'est pour ça qu'il faut diviser par deux le terme du milieu, parce qu'il veut faire un carré et un carré, tous les côtés mesurent la même chose. On sépare son 8x en deux parties égales. Donc ici ça mesure x, alors combien va mesurer celui-là? Line : 4, pas le choix. Et celui-là ici? 4 aussi, pas le choix parce qu'ici c'est x alors là c'est 4. Donc là, s'il veut faire un carré parfait, qu'est-ce qu'il va falloir qu'il rajoute ici? Line : Un carré, et l'aire de ce carré va être? Line : 16, ça va être 4 fois 4. Donc lui pour compléter, pour avoir un trinôme carré parfait, pour avoir un beau carré ici, il faut qu'il rajoute 16, 4 fois 4. Donc le 16 on va le rajouter de chaque côté du égal.

Appropriation

Line avait déjà une technique pour montrer la complétion de carré. Elle plaçait des carrés rouges dans l'équation pour montrer qu'il fallait ajouter une terme constant pour former un trinôme carré parfait. Dans cet épisode, elle associe ces carrés au carré qu'Al –Khawarizmi ajoute dans la représentation visuelle.

Place des représentations visuelles

Après avoir fait un survol de la complétion de carré de manière algébrique.

Rôles de représentations visuelles

Line répète plusieurs fois aux élèves que la représentation visuelle leur sert de <u>support</u>. Ils ne sont pas obligés de la prendre mais elle peut les aider. Elle ajoute que la représentation pourra servir plus tard pour se rappeler de la technique de la complétion de carré.

> Line : Là, vous allez toujours vous souvenir en faisant votre support géométrique de ce qui se passe (...) Le support géométrique vous êtes libres de le faire mais si vous vous en souvenez pas, rendu au mois de juin ça va faire longtemps qu'on a vu cette matière là, mai vous pouvez le faire, ça peut vous aider, faîtes-le.

De plus, elle précise également que les représentations visuelles sont importantes au début mais que par la suite il faut pouvoir les dépasser et ne plus les utiliser.

> Line : Quand vous faites vos exercices, vous le ferai à chaque fois le support géométrique mais quand vous allez avancer dans vos problèmes, vous ne le ferez pas à chaque fois.

Épisode 3 : Exercices en grand groupe sur la complétion de carré de type $x^2 + bx + c = 0$ (6 minutes)

Après avoir vu l'exercice sur la complétion de carré avec la représentation visuelle, les élèves vont dans leur module de notes de cours où ils ont 8 complétions de carré à faire. Comme certains élèves ont déjà fait les premières, Line fait les quatre dernières avec eux. Dans cet épisode, elle fait les numéros 5 et 6. Il est intéressant de voir que Line guide les élèves en mettant le nombre de lignes exactes pour la démarche et en mettant déjà le « ou » qui suggère qu'il y a toujours deux réponses possibles.

5. $a^2 - 8a - 9 = 0$ 6. $y^2 - 6y - 16 = 0$

____

____

____

____

________ ou __________________ ou ________

________ ou __________________ ou ________

On peut remarquer ici que les numéros choisis ici sont d'un type différent que les exemples travaillés dans les épisodes précédents. Les deux premières équations sont $x^2 + 10x = 39$ et $x^2 + 8x = 9$, le terme en x est positif, il s'agit ici de rajouter au carré initial d'aire x^2 deux rectangles d'aire $5x$ dans le premier cas et $4x$ dans le deuxième cas. Par la suite, dans les exercices proposés, le terme en x est négatif, il s'agit donc d'enlever de l'aire initiale l'aire de deux rectangles. La représentation visuelle est différente dans ce cas-ci, elle est plus complexe puisqu'il s'agit d'enlever une aire. Line contourne cette difficulté en ne faisant pas la représentation visuelle mais en rappelant les grandes étapes de la résolution, la démarche algébrique prend ici tout son sens. Le support visuel donne du sens à la technique, il donne du sens au raisonnement sous-jacent, c'est la façon de faire que l'on retient et que l'on applique par la suite quel que soit le trinôme que l'on a (la représentation visuelle est limitée, complexe pour certains trinômes). Il serait intéressant de savoir si Line est consciente de cet enjeu quand elle procède ainsi ou si elle le fait simplement parce qu'elle a fait deux représentations visuelles précédemment et qu'elle trouve que c'est suffisant.

Tableau 4.8 Épisode 3 de la séance sur la complétion de carré

Habileté	**Extrait**
Dès le départ du nouvel exercice, même s'il n'y a pas de représentation visuelle, Line revient sur la technique d'Al-Khawarizmi et leur demande ce qu'il faisait. Elle fait alors le <u>lien entre des étapes algébriques et des étapes visuelles.</u>	Line : Bon là ensuite, qu'est-ce qu'on fait? Lui qu'est-ce qu'il faisait l'Arabe? a au carré ça va faire un carré qui mesure a par a. Là il se disait ça va être le début de mon binôme [...] Line : Je le divise par deux, parce que là il séparait en deux parties, donc ça nous donnait 4 ici, 4, parce que l'autre côté de son rectangle c'était a.
Intervention	**Extrait**
Line utilise toujours le même canevas de démarche pour faire une résolution par complétion de carré. Elle trace <u>deux carrés rouges de chaque côté de l'égalité</u> pour y mettre la quantité à ajouter pour former un trinôme carré parfait. Ce petit carré rouge sert de repère visuel pour que les élèves voient la démarche à faire. Ses démarches au tableau sont toujours structurées de la même façon et très claires.	Line : Donc c'est comme si on ajoute une petite case ici et une petite case ici. [...] Line : Je vais ajouter ici une petite case et une autre petite case ici.

Intervention	Extrait
Line explique aux élèves le symbole mathématique pour désigner le « ou » et qu'on utilise en logique. Line fait part ici de son expertise mathématique, c'est une enseignante qui maîtrise sa matière.	Line : N'oubliez pas d'aller écrire votre « ou ». Le « ou », je vous permets de l'écrire en symboles mathématiques comme ça, c'est un « v » un « v » en mathématiques ça veut dire « ou ».

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

Line ne fait pas la représentation visuelle, celle-ci est mentale, elle guide les différentes étapes de résolution.

Rôles de représentations visuelles

Les représentations visuelles sont implicites, accompagnent ici la démarche algébrique et servent à illustrer une démarche.

Épisode 4 : Exercices en grand groupe sur la complétion de carré de type $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ (5 minutes)

Les deux derniers exercices ont un coefficient autre que 1 pour le terme en x^2.

7. $2y^2 - 40y + 128 = 0$	8. $2x^2 - 8x + 6 = 0$
____________	____________
____________	____________
____________	____________
____________	____________
______ ou ______	______ ou ______
______ ou ______	______ ou ______

Tableau 4.9 Épisode 4 de la séance sur la complétion de carré

Habileté	Extrait
Line travaille dans quel ordre faire les techniques de factorisation avec ces deux exemples. Elle fait réaliser aux élèves que l'on doit transformer ces équations pour qu'elles deviennent comme celle résolue par Al-Khawarizmi, c'est-à-dire avec 1 comme coefficient de x^2. Elle fait référence à Al-Khawarizmi mais pas à la représentation visuelle de $2x^2$, ce qui aurait été intéressant.	Line : Bon, les numéros 7 et 8 eux ils sont différents parce qu'en avant de mon y^2, j'ai le coefficient 2. Qu'est-ce que je vais faire pour arranger ça comme l'Arabe, lui il n'en avait pas de 2 en avant. Élève : Diviser par deux. Line : On va tout diviser par deux, parfait!

Intervention

Line utilise toujours les petites cases rouges pour la valeur qu'on ajoute pour compléter le carré. Pour elle, il est important que les élèves voient ces petites cases à jouter, un peu comme ils voient le carré à compléter.

Habileté

Dans ce même extrait, on perçoit l'importance pour Line de s'attarder à des repères visuels pour reconnaître les formes algébriques à traiter : un trinôme carré parfait finit toujours par un plus. Ainsi, il apparaît qu'un trinôme carré parfait s'écrit toujours dans l'ordre suivant $ax^2 \pm bx + c$, il serait intéressant de voir si les élèves reconnaissent un trinôme carré parfait si les termes ne sont pas donnés dans cet ordre là.

Extrait

Line : Dites-moi qu'est-ce que je vais faire après?
Élève1 : Les carrés.
Élève2 : Si on ne les fait pas, c'est grave?
Line : Si tu ne les fais pas, mais toi tu sais qu'ils sont là, dans ta tête tu le sais qu'ils sont là, ça ne me dérange pas, mais par exemple, il faut que tu écrives la valeur que tu vas ajouter. Si tu ne les fais pas les petites cases, ça ne me dérange pas, mais il faut que tu écrives le bon chiffre par exemple. Ici, plus, je l'ajoute tout le temps cette petite case là, tout le temps, parce qu'un trinôme carré parfait ça finit toujours par un plus.

Intervention

Les mêmes questions sont posées par Line aux élèves pour que ceux-ci développent une séquence d'étape à faire pour la résolution d'équation par complétion de carré.

Extrait

Line : Dites-moi la première chose qu'est-ce qu'on fait?
Noémie : On divise par deux.
Line : On divise par deux partout. Très bien. Alors je divise tout par deux, ça va me donner? Ça me donne $x^2-4x+3=0$. Là ensuite qu'est-ce qu'on fait? On prépare le terrain pour faire notre carré parfait et la complétion de carré, et oui je l'envoie... $-4x = -3$. Et là ensuite qu'est-ce que je fais?
Élève : Le carré...
Line : Guillaume continue, qu'est-ce que ça va donner? Ici ça va faire?
Guillaume : $x-2$
Line : Ici $x-2$, le moins...
Guillaume : $(x-2)^2=3$

Line : Ici qu'est-ce que tu vas faire? Ici on va rajouter plus quoi de chaque côté?
Guillaume : Ah, plus 4…
Line : C'est ça, de chaque côté on rajoute 4 pour faire notre complétion de carré. Là on va ajouter plus, plus et là ça va nous donner 4. 2 au carré ça fait 4, on ajoute 4 de chaque côté. Alors qu'est-ce que ça va donner ensuite, moins 3 plus 4.
Élève : 1
Line : donc ça veut dire que *x* égal, ah ici c'est au carré, il ne faut pas oublier d'écrire que c'est au carré sinon c'est une erreur mathématique. Là je fais la racine de un de chaque côté et ça donne.
Élève : -1
Line : -1 ou 1. Là ici ça va faire x=1 ou x =3. Alors notre réponse c'est 1 ou 3. Très bien.

Intervention

Line met l'accent dans cet épisode sur les erreurs mathématiques courantes que font les élèves, elle le met en garde pour qu'ils soient vigilants. Dans la résolution d'équation, les élèves oublient d'ajouter le même terme dans les deux membres de l'égalité et ils oublient d'inscrire le carré pour le *x* avant de faire la racine carrée.

Extrait

Line : (…) il faut écrire +100 des deux côtés sinon c'est une erreur mathématique.

Line : x est égal, c'est au carré, il ne faut pas oublier que c'est au carré sinon c'est une erreur mathématique. Là je fais la racine de chaque côté,…

Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante

Tel qu'annoncé par Line dans l'épisode 2, plus on avance dans les exercices et plus les représentations visuelles ne sont plus à l'avant plan.

Rôles de représentations visuelles

La représentation visuelle d'Al-Khawarizmi sert ici de modèle aux élèves pour voir et comprendre la technique.

Line : je vais diviser par deux, ici, ici et ici pour faire le modèle de l'Arabe, lui il n'en avait pas de chiffre devant.

On voit toujours dans cette séance que pour Line, les mathématiques supposent une suite logique d'étapes à respecter. Il y a des étapes à suivre pour faire une complétion de carré tout comme pour les autres formes de factorisation. Même si Line a encore cette vision séquentielle (composante épistémologique), on voit qu'avec la représentation visuelle, elle intègre un aspect plus dynamique et pose certaines questions qui visent à faire comprendre aux élèves pourquoi certaines étapes de la démarche existent, notamment lorsqu'elle demande pourquoi on place les rectangles d'une telle façon. Cette question vise vraiment à faire comprendre le sens de la démarche à l'élève et n'est pas une question fermée ou une question qui sert de truc mnémotechnique. C'est un apport important des représentations visuelles qui ouvrent la voie vers la compréhension, le sens des techniques de factorisation.

Dans cette séance, Line travaille toujours les trois habiletés (composante didactique/cognitive) qui sont de faire le lien entre la démarche visuelle et algébrique, de reconnaître les formes équivalentes et de représenter visuellement une expression. Dans l'épisode 1, Line s'attarde à expliciter ce que représente l'équation $x^2 + 10x = 39$. Elle le fait de deux façons différentes. D'une part, elle verbalise l'équation en explicitant que c'est un nombre au carré auquel on lui ajoute 10 fois ce même nombre ce qui donne 39. D'autre part, elle donne un sens géométrique, c'est l'aire d'un carré de côté x auquel on lui ajoute l'aire d'un rectangle qui est $10x$, on obtient ainsi 39.

À la différence du cours sur la différence de carré, Line avait déjà montré la technique algébrique de la complétion de carré. Elle fait donc un lien avec la technique algébrique qui a déjà mûri chez les élèves depuis le dernier cours. Les allers-retours entre les deux univers sont très clairs et fluides (épisode 1 et 2). Elle rappelle qu'Al-Khawarizmi divise le terme en « x » en deux rectangles qu'il place aux côtés du carré (visuel), c'est pourquoi on divise toujours le terme en « x » en deux (algébrique). Ensuite Al-Khawarizmi complète le carré en ajoutant une partie (visuel), c'est pourquoi on ajoute le carré de la moitié du terme en « x » pour obtenir un trinôme carré parfait (algébrique). En plus de travailler ces habiletés avec les représentations visuelles, Line voit dans quel ordre faire les techniques de factorisation. Ce travail se fait cependant de manière algébrique, mais Line rappelle toujours aux élèves que pour faire la technique d'Al-Khawarizmi, il faut avoir une certaine forme d'équation. La représentation visuelle est alors en arrière-plan (épisode 3). La représentation visuelle n'est plus produite dans le cas où le terme en x est négatif mais elle guide la démarche à faire. Ceci rejoint mes constats et ceux de certains chercheurs (voir cadre théorique), les représentations visuelles sont limitées à certaines expressions algébriques et elles sont plus difficiles à opérer dans le cas par exemple où on doit enlever une certaine partie d'aire.

Il est intéressant de constater que dans le cours précédent, Line a présenté la complétion de carré avec des équations de la forme $x^2 + bx + c = 0$. Quand elle présente la représentation visuelle, la forme de l'équation est différente $x^2 + bx = -c$, les élèves accrochent sur cette nouvelle forme d'équation et une discussion a lieu pour montrer que ces deux équations sont équivalentes. On peut donc travailler sur une forme ou sur l'autre. Dans les épisodes 3 et 4 où Line présente les exercices à faire, les équations sont de la forme $x^2 + bx + c = 0$, la première étape qu'exige Line est de la transformer en $x^2 + bx = -c$ pour avoir la même forme d'équation que celle d'Al-Khawarizmi. Mais cette étape est-elle vraiment nécessaire pour résoudre l'équation?

Dans cette séance, l'habileté à reconnaître la technique de factorisation à utiliser est également travaillée. Dans l'épisode 4, Line met l'accent sur le fait qu'un trinôme carré parfait finit toujours par un plus (le terme constant est toujours positif). Il y a une reconnaissance sur l'écriture algébrique pour en retirer les informations et les associer à des expressions connues. Dans ce même épisode, Line souligne que pour des expressions de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a différent de 0, il faut mettre le a en facteur pour retrouver la forme d'Al-Khawarizmi.

Même si Line utilise les représentations visuelles, elle a toujours recours aux phrases-clés apprises depuis plusieurs cours, comme le « beau trinôme carré parfait » (épisode 1). Elle continue d'utiliser des cases rouges, pour le terme à ajouter pour avoir un trinôme carré parfait. Ces repères visuels servent à organiser la démarche escomptée. Elle fait cependant maintenant le lien entre les cases rouges et le carré ajouté pour compléter le grand carré du départ.

C'est ce lien que l'enseignante fait entre la technique de Line qui était déjà efficace selon elle et la représentation visuelle, qui montre qu'elle s'est approprié les représentations visuelles. Elle fait facilement un lien entre ce qu'elle faisait avant et ce qu'elle intègre de nouveau. On voit un va-et-vient entre les notes de cours de Line, sa technique algébrique et la représentation visuelle utilisée dans l'histoire. Dans cette séquence d'enseignement, les représentations visuelles apparaissent après qu'un enseignement algébrique de la technique ait eu lieu. Elles permettent de comprendre alors pourquoi on procède ainsi dans cette technique. Line explicite bien que les représentations facilitent la compréhension, elle en fait part aux élèves (épisode 1). À l'épisode 2, Line précise aux élèves qu'ils ne sont pas obligés de faire les représentations visuelles pour chacun des exercices mais que celles-ci peuvent les aider au tout début. Elle souligne que ce support géométrique va permettre de retrouver la technique de factorisation si jamais ils l'ont oubliée à la fin de l'année scolaire. À l'épisode 3, les représentations visuelles deviennent un support auquel réfère l'enseignante, elle ne le représente plus au tableau mais fait appel aux étapes que ces représentations génèrent, ce qui lui permet de ne pas produire le support visuel d'une expression algébrique où le terme en x est négatif. Ainsi, les représentations visuelles donnent un modèle à suivre.

Une autre composante de l'intervention éducative apparaît dans cette séance en classe, la composante psychopédagogique, la relation entre l'enseignante et les élèves. En effet, Line qui n'aime pas trop prononcer le nom d'Al-Khawarizmi, demande toujours au même élève de le dire. Cela crée un lien entre elle et l'élève et la classe apprécie ce geste.

4.3 Analyse de l'entrevue après expérimentation

Dans la phase post-active, Lenoir (2009) propose de faire un retour sur les deux premières phases de l'expérimentation. Ce retour a été fait dans une entrevue quelques jours après l'expérimentation. Le but de cette entrevue était de voir les aspects postifs ou négatifs des activités et de voir s'il y a des changements qui pourraient être apportés.

En reparlant des représentations visuelles de chacune des formes de factorisation travaillées, Line confirme qu'elle changerait la place des représentations visuelles. Au lieu de montrer la représentation visuelle dès le premier cours sur une forme de factorisation, elle montrerait d'abord de façon algébrique et attendrait au cours suivant pour montrer la représentation visuelle. Elle donne l'exemple du carré d'un binôme $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Je faisais l'hypothèse avant l'expérimentation que les représentations visuelles seraient particulièrement efficaces en début d'apprentissage. Line vient infirmer cette hypothèse en affirmant que selon elle, les représentations visuelles sont ont leur place plus tard dans l'apprentissage pour répondre à des questions et donner du sens.

> Line : Bon moi là, regarde, je pense là que, à cause que j'ai eu l'expérience avec d'autres groupes, qui n'avaient pas eu cette façon là a début, je te l'avais dit, ils étaient surpris, le petit gars il disait ah!! Ben moi je pense que je le ferais algébriquement. Là je leur dirais algébriquement pis là que j'ai 2ab parce que là ils s'annulent pas, mais (a+b) (a+b)...Là ils s'annulent pas parce que c'est plus 2ab. Là je le montrerais algébriquement.
> Interviewer : La façon avec les flèches...
> Line : Oui, là après je leur ferais peut-être faire un cours d'exercices algébriques et là en corrigeant ce devoir là, là je le montrerais. Parce que vraiment..
> Interviewer : Tu verrais dans le fond est-ce que les jeunes mettent le $a^2 + b^2$ comme ça...
> Line : Oui, pour qu'ils n'oublient pas qu'est-ce qu'il y a entre les deux. Ok. Pis que là bon ils peuvent développer comme avant (a +b) (a+b), mais c'est long là, ça fait a^2 +ab +ab $+b^2$. Mais là, pour pas qu'ils oublient, pourquoi c'est ab +ab, mais là je leur montrerais. Parce que c'est sûr qu'il y en a dans le devoir ils vont l'avoir mal. Pis là, ils vont comprendre pourquoi ils l'ont eu mal, mais ils vont l'avoir essayé algébriquement pis là ça aura pas fonctionné, pis là ils vont comprendre pourquoi tsé là je trouve que le fait d'avoir travaillé dessus pis après de voir visuellement, ils vont comprendre pourquoi. Quand on montre direct un visuel, y'en a que... ils savent pas à quoi ça sert.
> Interviewer : Ouin, fac peut-être attendre qu'ils fassent l'erreur pour certains
>
> [...]
> Line : Pas pour amorcer, mais après. Parce que je trouve que ça leur permet de faire des liens pis de comprendre pourquoi mais si ils l'essaient avant juste algébriquement, là ils vont voir l'utilité de ça, plus.
> [...]
> Line : Oui parce que y'en a dans le groupe que je le sais qui eux-autres ils ne comprenaient pas pourquoi on faisait ça.
> Interviewer : Peut-être pas au début. La même chose pour la différence de carrés, ils devaient peut-être se demander pourquoi on parlait de ça nous-autres, le carré qu'on enlève, pis déplacer des affaires...
> Line : Tandis que là s'ils le font, ben là ici c'est plus ab ensuite –ab là ils vont s'apercevoir, ça s'annule pis ça donne $a^2 - b^2$ pis là après ça je leur ferais faire un

devoir là-dessus pis là ensuite dans la correction du devoir là y'en a qui vont l'avoir mal, c'est sûr sûr sûr qu'il y en a qui vont l'avoir mal, ben là je montrerais ça.

Nous reparlons ensuite de chacune des activités vécues en classe. Line souligne qu'elle a aimé travailler avec la représentation visuelle de la différence de carrés qu'elle pouvait mettre en parallèle avec la représentation visuelle de la somme de carrés en réponse à des questions des élèves. La première peut être découpée pour obtenir une expression équivalente tandis que la deuxième non.

Line : C'est pour ça que ça se factorise pas ça, là il y avait des affaires comme ça que je leur disais là. Quand c'est une somme de carrés, on n'est pas capables de découper et d'aller le mener à côté là, parce que là ça fonctionnera plus.

Le cas de l'exercice du patio sur la multiplication de binômes et la double mise en évidence est différent. Line aurait gardé l'exercice de la double mise en évidence au début de l'apprentissage de celle-ci car on utilisait dans cet exercice des notions déjà vues en troisième secondaire. Les élèves n'avaient qu'à voir qu'il fallait faire deux mises en évidence.

Interviewer : Ils n'avaient pas vu encore la double mise en évidence.
Line : Non, sauf que bon… ça ils l'avaient pas vu la double mise en évidence mais ils avaient déjà vu la mise en évidence simple, tsé en troisième secondaire. Fac là ça c'était pas, disons pour eux-autres complètement quelque chose de nouveau. Quand on enseignait directement à partir de ça, pour eux c'était plus facile de faire un lien.
Interviewer : Ok, avec la simple mise en évidence, qu'ils faisaient deux fois.
Line : C'est en plein ça.
Interviewer : Tu la garderais?
Line :Moi je la garderais au début ça.

La dernière activité faite en classe, celle de la complétion de carré, a été faite au moment où les élèves avaient déjà amorcé la technique algébrique de la complétion de carré. Line confirme que c'est à ce moment que la représentation visuelle lui semble le plus efficace.

Line : Bon, là c'est ça, j'avais vu un petit bout pis j'ai trouvé que c'était utile pour eux-autres parce qu'ils ont bien compris. D'avoir fait notre activité où on l'a fait, ils

avaient commencé à le voir déjà, pis là ils ont pu, qu'est-ce qu'ils ne comprenaient pas, ils ont pu associer pourquoi ça faisait ça.
[...]
Line : Le faire au début sans, pis après ça quand on va corriger le premier devoir là je vais le faire avec ça. Là je vais commencer mon cours en leur parlant de ça, de cette façon de faire là, pis là je vais leur dire, faut jamais oublier la partie qu'il y a en bas parce qu'on la rajoute, pis pourquoi on la rajoute, pour avoir un carré parfait.

On voit un aspect important de la composante épistémologique dans l'entrevue finale. Line attache de l'importance à l'utilité de la factorisation. Elle affirme qu'avec les représentations visuelles, certains élèves vont mieux comprendre à quoi sert la factorisation. Selon elle, les représentations visuelles ont aidé des élèves à comprendre le sens de ce qu'ils faisaient contrairement à s'ils le faisaient seulement algébriquement.

Line : Ben moi je pense que oui. Que ça a aidé du monde. Y'en a qui sont très visuels pis qui ont plus de misère à comprendre quand c'est juste algébrique, ils ne savent pas à quoi ça sert. Tandis que là ils savent. Moi je trouve que oui, c'est quelque chose d'utile pis que même si ça atteint juste 3 personnes ben ces 3 personnes là, ça les rattache.

Cette importance accordée au sens revient dans l'entrevue quand Line répète que les élèves vont comprendre pourquoi ils font certaines étapes dans une démarche.

Line : pis <u>pourquoi</u> on la rajoute, pour avoir un carré parfait.
Patricia : Ok. Pis pourquoi on le divise en deux...
Line : C'est ça, <u>pourquoi</u> on le divise en deux là, notre 10x, ben là c'est 5x, 5x, parce que je veux avoir deux côtés pour avoir un carré parfait, deux côtés qui vont mesurer la même chose.

Dans cette entrevue, Line m'apprend aussi qu'elle fait des liens avec l'histoire des mathématiques dans son cours habituel. Elle le fait avec humour quand nous reparlons de l'élève qui prononçait toujours Al-Khawarizmi à sa place.

Interviewer : Il restait Al-Khawarizmi. À matin, je repensais à notre petit gars en arrière qui nous le disait!
Line : Ben là, là je lui ai dit que quand on va parler de la parabole, je vais lui amener un poster pis c'est Hypatia. Je lui ai dit je l'aime elle, c'est mon idole...

Dans l'entrevue après expérimentation quelques points de la composante didactiques/cognitive sont touchés. Line reparle surtout de l'habileté à savoir quelle technique de factorisation utiliser selon l'expression. Elle me montre la page de notes de cours qui décrit l'ordre des factorisations à faire (Voir figure 4.8). C'est une méthode par étape que les élèves doivent suivre. Elle travaille donc toujours cette habileté de façon algébrique, en étapes et n'utilise pas les représentations visuelles pour celle-ci.

> Line : Ben là pour les aider là-dedans, je reprends toujours leur méthode là, un à la suite de l'autre, oui, je reprends toujours ça.

Comme il a été dit plus tôt, Line a aimé utiliser les représentations visuelles pour travailler l'habileté à reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas. Elle reparle aussi de l'importance de faire le lien entre la démarche visuelle et algébrique, notamment dans le cas de la complétion de carré pour que les élèves comprennent les étapes de résolution.

> Line : Fac là je leur dit toujours, si ici je veux avoir un beau trinôme carré parfait, qu'est-ce que je vais faire? Là ici ils vont me faire la racine carrée de x^2, ça va être x, ici lui là ils savent que c'est deux fois x fois le terme qui manque ici. Donc c'est pour ça que là il va falloir qu'ils divisent par deux. Par 2x autrement dit. Fac là ça va leur faire 5, pis là pour que ce soit un trinôme carré parfait, ils savent que ici c'est au carré, fac là ça va leur donner 25. Pis là ici ils vont rajouter le 25, de l'autre côté faut que ça reste égal.
> Interviewer : Pis là les racines...
> Line : C'est ça. Je prends lui pis je le divise par 2 pis là ils prennent lui pis ils le mettent au carré ici.
> Interviewer : Je me rappelle tes petites flèches.
> Line : Mais il y en a qui comprennent pas pourquoi c'est divisé par deux. Fac là c'est divisé par deux parce que ici c'était 10x, pis j'ai divisé 5x là, 5x là. Pour avoir un carré, parce que là c'est x, là c'est x. Fac là il faut que ça soit 5x, 5x, la même chose vu que les deux côtés faut qu'ils mesurent la même chose.
> Interviewer : Ah c'est bon. Fac que tu l'aies vu un peu pis qu'ils aient décanté ça pis le lendemain...
> Line : Pis là ceux qui n'ont pas compris ben...parce qu'il y en a toujours qui comprennent pas...ben là eux-autres ils ont associé, pis ils ont vu là pourquoi qu'il fallait diviser par deux.
> [...]
> Pis pourquoi là, si y'en a qui me disent pourquoi là, pourquoi faut diviser par deux, ben là je peux associer là.

L'extrait précédent montre bien que Line s'est approprié les représentations visuelles à sa façon. Elle utilise toujours sa technique par étapes, avec des flèches dans les notes de cours qui montrent le chemin à suivre, mais intègre maintenant un lien avec les étapes visuelles de la démarche pour donner du sens à la technique apprise.

À la fin de l'entrevue nous revenons sur les rôles des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation. Comme il a été vu précédemment, Line croit que les représentations visuelles peuvent donner du sens aux techniques de factorisation et contrer des erreurs fréquentes des élèves. Elle ajoute un troisième rôle intéressant dans une perspective de long terme. Elle affirme que les représentations visuelles aideront les élèves à se souvenir de la technique dans l'avenir. Elle utilise une comparaison avec une vidéo dans leur tête qui les aiderait à se rappeler pourquoi ils faisaient une telle étape.

> Line : Tsé là ceux qui étaient, qui comprenaient déjà, là ça renforcit, pis l'année prochaine quand ils vont avoir à réutiliser ça <u>ils vont avoir le vidéo dans leur tête</u> là, pourquoi que ça faisait ça. Tsé pour eux-autres ça va rester là.

CHAPITRE V

DISCUSSION AUTOUR DES RESULTATS

Différentes analyses ont été conduites dans le précédent chapitre dans les trois phases de la pratique enseignante, phases pré-active, interactive et post-active (Lenoir, 2009). Elles prennent place autour des notes de cours de l'enseignante, des entrevues menées avant et après l'expérimentation, de deux séances en classe (celles portant sur la différence de carrés et sur la complétion de carrés) et des mini-entrevues associées à chacune de ces séances. Certaines des composantes de l'intervention éducative guident cette analyse, la composante épistémologique, la composante didactique/cognitive, la double dimension médiatrice/médiative et la composante psychopédagogique. Le cadre de référence élaboré autour des habiletés à développer chez les élèves en lien avec la factorisation sous-tend le regard mené dans ces analyses. Dans ce chapitre, une lecture transversale de chacune de ces composantes est présentée, celle-ci permettra de relever des façons de faire pour travailler les différentes habiletés autour de la factorisation et de caractériser la pratique de Line. De plus, l'analyse globale permet de comprendre comment l'enseignante s'approprie les représentations visuelles et de dégager leur rôle et leur place dans la séquence d'enseignement.

5.1 Discussion autour de la composante épistémologique

Lenoir distingue dans l'intervention éducative la dimension épistémologique. Celle-ci s'attarde au rapport au savoir de l'enseignant. Dans le tableau suivant une synthèse de ce qui ressort autour de la composante épistémologique dans les différentes données recueillies est présentée.

Tableau 5.1 Composante épistémologique

Entrevue avant expérimentation	- Vision rigide des mathématiques - Utilisation de moyens mnémotechniques
Notes de cours	- Rigueur mathématique, utilisation d'un vocabulaire mathématique précis - Approche procédurale, étapes séquentielles
Séance sur la différence de carrés	- Les mathématiques sont vues comme une série de techniques, de recettes ou de méthodes à retenir
Séance sur la complétion de carré	- Les mathématiques supposent une suite logique d'étapes à respecter - L'ajout des représentations visuelles amène un côté dynamique et force l'enseignante à poser des questions de compréhension qui visent à donner du sens à la technique de factorisation
Entrevue après expérimentation	- L'utilité de la factorisation est mise de l'avant - Comprendre le sens de la technique est important à présenter aux élèves - Étapes séquentielles inévitables pour travailler certains points

Il se dégage de l'analyse des notes de cours, des séances en classe et des entrevues, une vision du savoir de Line assez rigide. Cette vision se traduit par une approche procédurale des techniques de factorisation et par l'enseignement d'étapes séquentielles pour résoudre des tâches. Dans ses notes de cours, les étapes sont bien numérotées et Line précise en entrevue « je reprends la méthode, une à la suite de l'autre ». De plus, le savoir mathématique apparaît rigoureux, elle prend soin d'utiliser un vocabulaire précis, de faire le passage entre le verbal et l'écriture algébrique, « un trinôme carré parfait, un binôme au carré, les conjugués, etc. » On retrouve ainsi chez Line des traces de ce que Thompson (1984) nomme une conception statique des mathématiques. Ce chercheur a examiné les relations pouvant exister entre les conceptions des mathématiques et l'enseignement de cette matière auprès de trois enseignants du secondaire. Il dégage deux types de conceptions chez les enseignants. Une conception statique des mathématiques qui amène une approche procédurale des mathématiques. Dans son étude, deux des trois enseignants voyaient les mathématiques comme un ensemble de règles et de procédures. Au début de l'expérimentation, Line peut être catégorisée dans cette conception. Cela se reflète dans son enseignement qui est directif et qui suit généralement un canevas bien construit où l'élève apprend certaines procédures. Elle précise même en classe (dans la séance autour de la différence de carrés) « on retient ça, si on veut factoriser… ». La deuxième conception des mathématiques chez les enseignants relevée par Thompson est une conception qu'il nomme dynamique, elle amène à une approche des mathématiques plus heuristique. Durant l'expérimentation, même si Line garde son approche par des techniques en étapes séquentielles, elle intègre dans son enseignement un côté dynamique à travers l'utilisation de représentations visuelles. Ces représentations l'amènent à travailler avec les élèves le pourquoi des étapes séquentielles, ce qui n'était pas fait avant. Ce changement de conception est perceptible lors de la mini-entrevue menée avec l'enseignante après la séance sur la différence de carrés. Elle explique que les représentations visuelles ont permis aux élèves de comprendre, c'est leur réaction face au déclic qu'ils ont eu qui fait que Line envisage les mathématiques d'une autre façon. On peut relever dans la séance sur la complétion de carré et dans l'entrevue finale une importance accordée à l'utilité de la factorisation et au sens donné par les élèves à ce qu'ils font. Line pose des questions pour vérifier la compréhension des élèves sur le concept. Elle insiste sur l'explication de chacune des étapes pour produire la complétion de carrés, il y a un pourquoi qui guide l'ordre de la démarche à suivre. Il ne s'agit plus simplement, comme elle le faisait avant l'expérimentation, de représenter les termes par des boites et de débouler les étapes une après l'autre, elle amène les élèves à comprendre l'idée générale de ce qu'on fait. Il y a donc eu un changement dans la conception du savoir de Line explicable à l'utilisation des représentations visuelles qui donnent du sens à chacune des étapes de l'algorithme.

5.2 Discussion autour de la composante didactique/cognitive

Cette dimension de l'intervention éducative de Lenoir (2009) touche au rapport de Line vis-à-vis les savoirs à enseigner ainsi qu'aux processus d'enseignement, dans notre cas, la factorisation. L'analyse a été menée ici en prenant appui sur le cadre de référence élaboré autour des habiletés à développer en factorisation. Dans le cadre théorique, les cinq habiletés relevées apparaissaient comme distinctes les unes des autres, non reliées entre elles. L'analyse des données apporte un résultat nouveau à ce sujet. Après l'expérimentation, je constate qu'il y a trois habiletés qui sont entremêlées, l'habileté à représenter visuellement une expression algébrique, l'habileté à faire le lien entre la démarche visuelle et algébrique et l'habileté à reconnaître des formes équivalentes. Lorsque l'on prend appui sur des représentations visuelles, travailler une de ces habiletés amène à visiter les autres.

Avoir une expression algébrique et la représenter visuellement par l'aire d'un ou de plusieurs rectangles est la première étape concernant l'habileté à représenter visuellement. Cette habileté exige en deuxième lieu d'être capable une fois qu'un premier rectangle est placé, de disposer les autres pour que l'ensemble représente un plus grand rectangle. Une reconnaissance des côtés communs est à la base de cette habileté. Pour le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique, ce sont des allers-retours entre ces deux démarches qui sont au cœur de cette habileté. Chaque transformation de la figure se traduit par une modification de l'expression algébrique. Finalement, l'habileté à reconnaître des formes équivalentes correspond à la capacité de détecter le caractère bidirectionnel entre différentes écritures et principalement les formes développée et factorisée.

Le tableau suivant regroupe ces trois habiletés et leur traitement dans les données recueillies qui proviennent surtout des séances en classe.

Tableau 5.2 Composante didactique/cognitive (3 habiletés)

	Notes de cours	Entrevue avant expérimentation	Séance sur la différence de carrés	Séance sur la complétion de carré	Entrevue après expérimentation
Habileté à représenter visuellement une expression à factoriser			- Explique comment on peut représenter une l'expression a^2-b^2 visuellement par deux carrés un dans l'autre	- Le terme en x peut être représenté par deux rectangles que l'on place stratégiquement aux côtés du carré.	
Habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique			- Donne du sens à la factorisation en montrant que faire la différence de carré, c'est trouver les dimensions d'un rectangle équivalent - Fait le lien entre trouver les côtés du carré (visuel) et faire la racine carrée du terme	- Le lien entre ce qu'il faut ajouter pour avoir un trinôme carré parfait et le carré à ajouter sur la figure est fait - On divise le terme en x en deux parce que l'on place deux rectangles aux côtés du carré	- Souligne l'importance du lien entre le visuel et la démarche algébrique pour comprendre le sens des étapes à faire

			(algébrique)		
Habileté à reconnaître des formes équivalentes / le caractère bidirectionnel	- Vérification des techniques de factorisation (développer l'expression obtenue) - Vocabulaire précis nommant les formes équivalentes (un binôme au carré donne un trinôme carré parfait)		- Le caractère bidirectionnel apparaît dans la présentation de la définition de la factorisation (algébrique) - Précise l'équivalence entre le binôme au carré et le trinôme carré parfait (cours précédent) - Visuel : Line explicite que l'on cherche visuellement à transformer la figure pour obtenir une expression équivalente - Dans l'étape de vérification, on fait le processus inverse de la factorisation	- Habileté travaillée quand les élèves font face à une expression présentée sous une forme différente de celle apprise (travail algébrique)	

L'utilisation de représentations visuelles amène à travailler l'habileté à représenter une expression algébrique. Au moment de l'expérimentation cette habileté est travaillée non seulement dans les deux séances analysées mais aussi dans d'autres séances portant sur la factorisation. Une analyse plus globale des autres séances en classe amène à faire ce constat et ce, dès le premier cours autour du carré d'un binôme. Cette habileté est centrale dans la séance autour de la double mise en évidence. Cette dernière, comme il a été précisé précédemment, a été pilotée par la chercheure. Line ne semblait pas à l'aise avec l'idée que les élèves allaient prendre en charge eux-mêmes l'activité. Il s'agissait de trouver des façons de placer des rectangles dans le but de trouver leurs dimensions. Il était alors intéressant d'aller chercher les raisonnements des élèves, bons ou mauvais pour leur faire comprendre le sens de la double mise en évidence. La gestion de cette activité est différente de celles sur le carré d'un binôme, la différence de carrés ou la complétion de carré. En effet, les démarches des élèves sont sollicitées, il s'agit pour l'enseignant de ramasser les différentes productions et de les gérer par la suite en avant de la classe. On part dans ce cas-ci de ce que proposent les élèves pour construire le concept de la mise en évidence double alors que pour les autres techniques de factorisation, il s'agit de faire une présentation plus magistrale. Dans cette séance, les élèves étaient amenés à découvrir par eux-mêmes comment placer les rectangles et comment trouver les côtés d'un rectangle quand on a l'aire, donc à trouver de quelle façon on peut procéder quand on factorise. Dans cette séance, cette habileté a été travaillée par les élèves alors que dans les autres séances, Line est plus à l'aise à présenter directement la façon de procéder. Elle a utilisé pour ce faire des diaporamas déjà préparés. C'est dans le cours sur la complétion de carré que Line explique aux élèves l'importance de reconnaître des côtés communs dans les différents rectangles construits pour arriver à un seul rectangle composé des autres rectangles. Line a recours à ce raisonnement d'elle-même. Comme elle l'explicite dans la mini-entrevue qui a lieu avant cette séance, elle a bien réfléchi à la façon de présenter son cours et on peut supposer qu'elle perçoit cette habileté reliée aux représentations visuelles mais que celle-ci est sûrement implicite.

L'habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la résolution algébrique est également travaillée pendant les séances en classe. On peut souligner que Line fait ces allers-retours entre ces deux démarches naturellement, sans contrainte de ma part. Au début du cours, Line présente la représentation visuelle. C'est quand elle exploite les notes de cours qu'elle réinvestit les représentations visuelles en les insérant dans ses notes de cours et en liant toutes les étapes algébriques aux étapes visuelles. Chacune des étapes séquentielles qu'elle faisait algébriquement dans les notes de cours est maintenant reliée à une étape géométrique. De plus, elle souligne lors de l'entrevue finale l'importance de cette habileté dans la compréhension des élèves autour des étapes qui mènent à la factorisation. C'est une différence essentielle avec l'habileté précédente, Line est consciente et explicite clairement l'importance de ce lien.

Cette expérimentation m'a fait réaliser qu'un travail avec des représentations visuelles amène à travailler autour des expressions équivalentes puisqu'il s'agit de transformer la figure en une figure ayant la même aire donc en une figure équivalente. Contrairement aux deux premières habiletés qui n'étaient pas travaillées par Line dans sa planification initiale, l'enseignante fait une place à cette habileté de manière algébrique comme identifié dans l'entrevue initiale et dans les séances en classe. Dans ses notes de cours, Line amène les élèves à vérifier chacune des techniques de factorisation en développant l'expression tout en utilisant un vocabulaire mathématique précis pour décrire chacune des deux formes. Ainsi, le caractère bi-directionnel de la factorisation et de la distributivité est présent dans son discours et dans ses notes de cours.

Avec l'introduction des représentations visuelles, l'habileté à reconnaître des formes équivalentes est travaillée autrement. Line met en place un vocabulaire nouveau relié à l'aire d'une surface qui reste inchangée si on modifie la figure avec un processus de découpage et de reconfiguration. Cet ajout est d'autant plus intéressant que les élèves ont vu au départ dans ce chapitre les figures équivalentes en géométrie avec des mesures qui sont des nombres. Les premières pages des notes de cours (Voir Appendice B) étaient consacrées à l'équivalence de figures géométriques et les élèves avaient à trouver différentes mesures dans des figures équivalentes. Lors de l'analyse de la planification initiale de l'enseignante, cette partie des notes de cours de ce chapitre semblait complètement déconnectée de la suite, c'est-à-dire la factorisation. Aucun lien n'était fait dans les notes de cours entre l'équivalence en géométrie, qui fait partie du programme scolaire et la factorisation en algèbre. À travers l'introduction des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation, le lien entre ces deux parties se fait maintenant naturellement, les figures équivalentes géométriquement vue au début du chapitre sont réinvesties dans la factorisation à travers des expressions algébriques équivalentes. Les représentations visuelles permettent ainsi de relier des concepts mathématiques entre eux, ils ne sont pas déconnectés, compartimentés comme pensent plusieurs élèves.

Une quatrième habileté à développer autour de la factorisation et relevée dans le cadre théorique est celle de reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas. Dans l'enseignement, ce type d'expressions n'est pas beaucoup travaillé comme en témoigne un survol rapide des manuels scolaires. Ce qui peut amener les élèves à penser que toutes les expressions algébriques sont factorisables.

Tableau 5.3 Composante didactique/cognitive (habileté à reconaître des formes qui ne se factorisent pas)

	Notes de cours	**Entrevue avant expérimentation**	**Séance sur la différence de carrés**	**Séance sur la complétion de carré**	**Entrevue après expérimentation**
Habilité à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas			- Fait la représentation visuelle de la somme de carrés pour montrer que cette expression ne se factorise pas		- Représentation visuelle de la somme de carrés efficace pour Line

Dans son étude, Damboise (2007) souligne la difficulté qu'ont les élèves à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas. Line a utilisé les représentations visuelles spontanément pour répondre à une question d'un élève sur la somme de carrés lors de la séance sur la différence de carrés. Comme présenté dans la problématique, une erreur fréquente des élèves relevée à la fois par les recherches, soulignée dans les manuels scolaires et constatée dans ma pratique est $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Face à l'expression $a^2 + b^2$, les élèves ont tendance à vouloir factoriser. Confrontée à cette erreur, l'enseignante avait l'habitude de répondre qu'on était face à un facteur premier et qu'il fallait faire attention à ne pas confondre avec une différence de carrés. L'expérimentation autour des représentations visuelles amène Line à intervenir autrement et cet épisode est déterminant dans l'attitude de Line face à l'utilisation des représentations visuelles dans l'enseignement de la factorisation. Pendant la séance, l'enseignante dessine au tableau deux carrés un à côté de l'autre. Le processus de découpage et de reconfiguration n'est pas possible dans ce cas et elle souligne aux élèves que si on déplace les carrés, on obtient toujours la même expression, on ne peut la transformer. On peut donc constater que les représentations visuelles présentent un apport intéressant pour le développement de cette habileté.

La dernière habileté à développer en lien avec la factorisation est celle de reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser. Il s'agit, à partir d'une expression algébrique donnée, de repérer la ou (les) forme(s) de factorisation parmi toutes les formes connues.

Tableau 5.4 Composante didactique/cognitive (habileté à reconnaître la technique de factorisation)

	Notes de cours	**Entrevue avant expérimentation**	**Séance sur la différence de carrés**	**Séance sur la complétion de carré**	**Entrevue après expérimentation**
Habileté à reconnaître la technique de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser	- Exercices gradués dans les notes de cours qui requièrent plus qu'une seule technique de factorisation - Insistance sur des repères visuels algébriques qui donnent des indications sur la technique à utiliser - Méthode en étapes pour savoir quelle technique utiliser (figure 4.8)	- Affirme que cette habileté cause des difficultés chez les élèves - Explique qu'elle donne des repères algébriques pour que l'élève sache quelle technique utiliser, une démarche claire en étapes séquentielles est proposée.	- Donne deux indices algébriques pour reconnaître que c'est une différence de carrés - Line instaure chez les élèves un ordre dans les techniques de factorisation durant les exercices	- Line fait réaliser l'importance de savoir dans quel ordre appliquer les techniques de factorisation en disant qu'il faut d'abord avoir la même forme d'équation qu'Al-Khawarizmi, donc faire une mise en évidence en premier - Line donne des repères visuels dans les expressions algébriques pour savoir quelle méthode utiliser	- Line fait toujours référence aux étapes à faire pour savoir quelle méthode appliquer selon l'expression (figure 4.8)

Le travail sur l'habileté à reconnaître la méthode à utiliser selon l'expression à factoriser apparaît lors de l'entrevue avant expérimentation, dans les notes de cours, dans les deux séances en classe analysées et lors de l'entrevue finale. Ceci montre l'importance accordée par Line à cette habileté. Celle-ci n'est pas au même niveau que les autres quatre habiletés. Il s'agit ici de ce que nous pourrions appeler une « méta-habileté ». Elle est travaillée dans la présentation de chacune des techniques de factorisation à travers des repères visuels. Line amène les élèves à s'arrêter devant l'écriture algébrique pour la décortiquer, pour la faire parler. Par exemple, une différence de carrés doit obligatoirement (mot que l'enseignante utilise) être composée de deux termes qui sont des carrés et qui sont séparés par un signe négatif.

Elle est également travaillée une fois que toutes les techniques de factorisation ont été vues pour repérer celle qu'il convient d'utiliser devant une expression algébrique donnée. Elle donne aux élèves une méthode en étapes pour qu'ils sachent dans quel ordre faire les techniques de factorisation s'il y en a plusieurs à utiliser dans la même expression. Ils vérifient toujours s'ils peuvent faire une mise en évidence, ensuite, si c'est un binôme avec un moins, ils voient s'ils peuvent faire une différence de carrés, s'ils ont un trinôme, ils peuvent factoriser par produit et somme ou par complétion de carré et finalement, s'ils ont un polynôme à quatre termes, ils font une double mise en évidence si c'est possible. Ces étapes à faire sont données telles quelles dans les notes de cours et le processus n'est pas construit avec les élèves. Il aurait été intéressant selon moi de faire ressortir ces étapes par les élèves eux-mêmes. Cette habileté à reconnaître quelle technique utiliser est aussi travaillée dans les notes de cours à travers des exercices gradués en ordre de difficulté, à travers les séances quand Line insiste sur des repères dans les expressions pour savoir de quel type elles sont. Dans l'entrevue finale elle reparle de cette méthode en étapes qui est efficace selon son expérience.

Line met l'accent sur un élément nouveau. L'importance de l'ordre dans lequel on utilise les différentes techniques de factorisation. Elle précise qu'il ne faut pas seulement savoir quelle technique utiliser mais aussi dans quel ordre les faire pour être efficace. L'enseignante fait remarquer aux élèves qu'il est plus facile et efficace (moins long) de procéder toujours en premier par la mise en évidence. L'exemple $144a^2 - 81b^2$ est donné aux élèves. Certains d'entre eux ont procédé à une différence de carrés $(12a-9b).(12a+9b)$ et s'arrêtent ici. D'autre essaient de faire la mise en évidence et font des erreurs de manipulation algébrique. Line intervient alors en précisant aux élèves qu'il faut d'abord faire une mise en évidence simple et après procéder à la différence de carrés. On peut remarquer qu'il n'est pas « moins long » de le faire d'une façon ou d'une autre. Il a été intéressant de confronter les élèves à ces deux façons de procéder, plusieurs chemins peuvent mener à la bonne réponse. En demandant aux élèves de faire la mise en évidence simple en premier, on évite dans ce cas-ci une erreur qui serait d'écrire $(12a-9b).(12a+3b) = 3(4a-3b).3(4a+3b)$.

Line précise, et je la rejoins dans ses propos, que cette habileté est d'une grande difficulté pour les élèves. Pour travailler cette habileté, on n'a pas recours aux représentations visuelles qui ne sont pas à ce stade de la réflexion sur la factorisation d'une grande utilité.

De cette analyse ressort des différences entre les habiletés à développer en lien avec la factorisation. Certaines d'entre elles ne peuvent être travaillées qu'à travers des représentations visuelles comme l'habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser et l'habileté à faire le lien entre la représentation visuelle et la démarche algébrique. D'autres habiletés peuvent être travaillées à la fois algébriquement et visuellement comme l'habileté à reconnaître des formes équivalentes (le caractère bi-directionnel) et l'habileté à reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas. Finalement, l'habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser est d'un autre ordre, c'est une connaissance sur des connaissances. Les représentations visuelles sont ici au second plan. L'élève est rendu ici à un niveau plus symbolique.

5.3 Discussion autour des composantes double dimension médiatrice/médiative et psychopédagogique

Dans la double dimension médiatrice/médiative, on s'intéresse au rapport de l'élève au savoir et le rapport aux processus médiateurs externes d'ordre pédagogicodidactique. La dimension psychopédagogique traite du rapport aux élèves d'ordre relationnel.

Tout au long des entrevues et des séances en classe, il ressort de la dimension médiatrice/médiative que Line utilise fréquemment des moyens mnémotechniques pour que les élèves se souviennent des notions ou des étapes à faire. Elle utilise des phrases-clés que les élèves doivent répéter, des métaphores qui servent d'images pour retenir une notion et même des gestes répétés qui illustrent par exemple la différence de carrés (Line fait les deux parenthèses avec ses mains). Les élèves utilisent ces trucs, connaissent les termes utilisés par Line, par exemple les jumeaux non-identiques qui sont les conjugués dans la différence de carrés. Par contre, ces trucs ne servent pas à comprendre un concept mais plutôt à le retenir. Même l'introduction de la représentation visuelle d'Al-Khawarizmi dans la complétion de carré a été un prétexte pour avoir un autre aide-mémoire. Line rappelait aux élèves la méthode de l'Arabe et demandait ce qu'il faisait en premier pour placer les rectangles.

L'enseignement magistral de Line l'amène à poser des questions fermées, plus algébriques. Les seules questions plus ouvertes qui visent la compréhension arrivent quand on introduit les représentations visuelles où Line demande aux élèves pourquoi telle action est faite, pourquoi on fait certaines transformations sur la figure. Cependant, elle ne laisse pas beaucoup de temps aux élèves pour s'exprimer et précise sa question pour qu'elle devienne plus directe. Line demande souvent aux élèves s'ils comprennent mais ne leur demande pas de reformuler dans leurs mots ou d'expliquer une étape, ce qui aurait été intéressant dans l'introduction des représentations visuelles. Dans ses interventions, Line garde toujours en tête de faire faire aux élèves les mêmes étapes de résolution à chaque nouveau problème. Elle veut que les élèves connaissent la technique. Elle pose toujours les mêmes questions pour que les élèves sachent l'étape suivante. Son approche séquentielle apparaît dans chacune des séances.

Line n'interagit pas beaucoup avec les élèves sauf pour quelques questions assez fermées. Dans un cas précis on en apprend plus sur la composante psychopédagogique de l'intervention éducative. Line crée un lien avec un élève en particulier qui a la tâche de prononcer le nom d'Al-Khawarizmi. L'élève se prête au jeu et le reste de la classe apprécie cette intervention de Line.

5.4 Appropriation des représentations visuelles par l'enseignante, leur place et rôle dans la séquence d'enseignement

J'avais fait l'hypothèse en début d'expérimentation que les représentations visuelles seraient particulièrement utiles en début d'apprentissage d'une nouvelle technique de factorisation pour illustrer les étapes de factorisation et leur donner du sens. C'est donc ce qui a été fait dans les premières séances. Les activités utilisant les représentations visuelles pour le carré d'un binôme, la différence de carrés et la double mise en évidence ont été vues au tout début des cours. Par la suite, Line présentait la partie plus algébrique et faisait un lien avec le visuel.

Cependant, Line a vu les choses différemment. L'élément déclencheur a été son remplacement dans une autre classe. Quand elle a eu à remplacer une enseignante qui montrait la factorisation de façon seulement algébrique, il y a eu plusieurs questions des élèves. Pour répondre à ces questions, elle a montré la représentation visuelle de la différence de carrés et de la somme de carrés. La réponse des élèves a été immédiate, ils ont compris pourquoi on obtenait les conjugués dans le cas de la différence de carrés et pourquoi on ne pouvait pas factoriser une somme de carrés. Devant l'enthousiasme des élèves qui manifestent ouvertement leur compréhension, Line prend position sur la place des représentations visuelles dans la séquence d'enseignement. Celles-ci ne doivent pas nécessairement être présentées en début d'apprentissage mais plutôt après que l'aspect algébrique est été fait.

C'est ce qu'exprime Line dans la mini-entrevue qui suit la séance sur la différence de carrés. Elle a alors, sans m'en parler, décidé de changer un peu la planification prévue pour la dernière séance sur la complétion de carré. Elle a vu la complétion de carré de façon algébrique et au cours suivant, où je venais dans sa classe avec l'exercice sur la représentation visuelle d'Al-Khawarizmi, elle a présenté la méthode plus visuelle pour résoudre par complétion de carré. Elle a donc changé la place des représentations visuelles et, comme elle l'a répété dans l'entrevue finale, a trouvé que c'était le meilleur moment pour le faire. Les élèves ont eu le temps de voir la technique, de la comprendre ou de se poser des questions. La représentation vient donc en soutien à la démarche algébrique, sert à l'illustrer et à donner du sens aux étapes de résolution. Les représentations visuelles ont alors selon elle un rôle explicatif, servent à donner du sens, à contrer des erreurs mais aussi à long terme à se rappeler d'un concept ou d'une technique.

On voit à travers les différentes étapes de l'expérimentation que Line s'approprie les représentations visuelles. Au départ, ce sont mes activités, elle est peu intéressée à les changer, elle participe pour me faire plaisir et ne semble pas particulièrement certaine du potentiel des représentations visuelles. À la première séance sur le binôme au carré, elle montre d'abord la représentation avec le diaporama préparé et est alors peu engagée. Tout de suite à la fin du diaporama, elle remplit ses notes de cours avec les élèves. C'est là qu'elle intègre la représentation visuelle associée. Elle refait le dessin au tableau des quatre parties qui font le binôme au carré et les relie aux termes algébriques dans ses notes. Plus tard, elle fait la même chose avec les autres représentations. À chaque fois, elle les redessine en les rajoutant dans ses propres notes de cours pour faire un lien entre les termes algébriques et leur représentation visuelle. Elle utilise également les représentations visuelles de son propre chef pour intervenir sur une erreur fréquente chez les élèves. Finalement, on sent qu'elle est à l'aise avec les représentations car elle prend totalement en charge le déroulement du cours dans la complétion de carré. Elle utilise la représentation au moment où elle en ressent le besoin.

Line précise dans l'entrevue finale que dans sa planification future les représentations visuelles auront leur place dans l'enseignement de la factorisation.

CONCLUSION

Plusieurs difficultés des élèves en factorisation sont répertoriées dans la recherche. Certaines interventions ont été mises en place pour aider les élèves à mieux comprendre ce concept, notamment la calculatrice symbolique et l'utilisation de matériel concret comme les tuiles algébriques. Dans ces recherches, on ne s'attarde pas essentiellement au rôle de l'enseignant, mais plutôt aux apprentissages des élèves. J'ai voulu explorer une autre piste, celle de la méthode du rectangle. En effet, ces représentations visuelles sont présentes dans les manuels mais les enseignants ne sont pas tous enclins à les utiliser. Je voulais m'attarder sur le rôle de l'enseignant lors de l'utilisation en classe de ces représentations visuelles. Différentes recherches affirment que le rôle de l'enseignant est primordial lors du passage entre le mode algébrique et le mode visuel dans la factorisation.

Un cadre de référence a été construit autour de la factorisation. J'ai dégagé cinq habiletés à travailler dans la factorisation : représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser, faire le lien entre les représentations visuelles et la démarche algébrique, reconnaître les formes équivalentes, reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas et reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser. Pour analyser la pratique enseignante, je me suis basée sur le cadre de Lenoir (2009) et Robert et Rogalski (2002) à travers certaines composantes dont la composante épistémologique, la composante didactique/cognitive et la double dimension médiatrice/médiative.

Une étude de cas a été menée avec Line, une enseignante de secondaire 4, dans un groupe de la séquence Sciences Naturelles où toutes les techniques de factorisation sont étudiées. Cette enseignante n'utilisait pas les représentations visuelles dans son enseignement de la factorisation. J'ai donc construit plusieurs tâches qui font appel à la méthode du rectangle qui ont été insérées dans la sa séquence d'enseignement.

Les objectifs de cette recherche sont :

- Analyser l'appropriation par une enseignante des représentations visuelles dans une séquence d'enseignement portant sur la factorisation où plusieurs tâches ont été construites par la chercheure.

- Dégager la place et le rôle qu'occupent les représentations visuelles en factorisation dans la pratique d'une enseignante.

Différentes questions de recherche ont été soulevées auxquelles je peux répondre après l'étude présentée ici.

Bref aperçu des résultats à travers les questions de recherche

Comment s'insèrent les représentations visuelles dans la séquence d'enseignement? Comment l'enseignante utilise ces représentations dans son enseignement (consignes, tâches, rôles et place des représentations visuelles)

L'enseignante qui a participé à cette étude a été plus à l'aise avec les activités de type plus magistral. Elle a choisi de piloter les activités qui étaient sous forme de diaporama plutôt que de travail en équipe chez les élèves. Elle utilisait les représentations visuelles pour venir appuyer la démarche algébrique de chacune des techniques de factorisation. D'elle-même elle travaillait l'habileté à représenter visuellement une expression, à faire le lien entre la démarche algébrique et visuelle et travaillait l'habileté à reconnaître des expressions équivalentes. Line a insisté sur l'importance d'expliquer aux élèves pourquoi on obtient un certain terme algébrique et à quoi il peut être relié dans une figure géométrique. Après avoir vu la manière algébrique, elle revenait aux représentations visuelles pour donner du sens, celles-ci pouvant servir d'aide-mémoire. Elle a également montré aux élèves pourquoi une expression telle que la somme de carrés ne pouvait être factorisée avec sa représentation visuelle.

Tel que recommandé dans les précédentes recherches portant sur l'étude de tuiles algébriques (Sharp 1995, Hosson 1999), des expressions simples ont été choisies, qui contenaient rarement des termes négatifs. Les représentations visuelles donnent du sens aux expressions positives mais forcent le raisonnement quand celles-ci sont négatives et s'éloignent beaucoup trop de l'intuition. Il faut en effet enlever une aire ce qui devient vite complexe à gérer avec des figures géométriques. Line a utilisé les représentations visuelles au début de sa séquence d'enseignement sur la factorisation mais elle s'en détache à mesure que les exercices avancent et se complexifient. Dans les exercices présentés aux élèves, les représentations visuelles ne sont pas utilisées. Elle y fait toutefois référence pour que les élèves gardent en tête le sens de ce qu'ils faisaient et qu'ils se rappellent des étapes à faire. Le modèle d'Al-Khawarizmi par exemple servait aux élèves d'exemple de démarche à suivre. Dans l'entrevue finale, Line souligne que l'expérimentation vécue va apporter un changement dans sa planification initiale où les représentations visuelles n'avaient pas leur place. Elle prévoit les introduire tout le long de l'enseignement des différentes techniques de factorisation après une présentation algébrique. Le support visuel permet alors de donner du sens, les élèves peuvent alors comprendre ce qui a été présenté précédemment. Line prend une position ferme sur cette place des représentations visuelles qu'elle teste en classe avec la complétion de carré.

Dans les recherches, le rôle explicatif des représentations visuelles est mis de l'avant. Ainsi, les différentes techniques de factorisation sont construites pas à pas en parallèle avec un support visuel tout en faisant un lien entre les démarches algébrique et visuelle. Celui-ci permet de comprendre comment on procède pour factoriser, à donner du sens aux différentes techniques enseignées. L'analyse des séances en classe et des entrevues fait ressortir deux autres rôles des représentations visuelles qui sont intéressants à considérer. Le support visuel est un outil pour contrer les erreurs des élèves, pour intervenir de façon efficace sur leurs difficultés. L'égalité $(a+b)^2=a^2+b^2$ peut être mis en échec en utilisant un support visuel. L'élève voit ainsi que l'aire d'un carré de côté $(a+b)$ n'est pas la même que l'aire de deux carrés. De plus, l'élève peut voir recours à un support visuel quand celui-ci ne se souvient plus de la technique de factorisation. La représentation visuelle permet d'installer dans la mémoire à long terme cette habileté, l'élève pouvant factoriser une expression donnée en se ramenant à un support visuel et faisant ainsi des liens entre la représentation visuelle et la démarche algébrique.

Comment la vision de l'enseignement de la factorisation chez l'enseignante se modifie suite à l'intégration des représentations visuelles dans sa séquence d'enseignement?

Line est une enseignante très structurée, qui a une approche assez magistrale et séquentielle des mathématiques. Suite à l'expérimentation, cette vision est toujours présente. Toutefois, l'analyse amène à constater que Line ajoute dans son enseignement de la factorisation un côté dynamique grâce à l'ajout de représentations visuelles dans sa planification. Avec celles-ci, elle met plus d'emphase sur la compréhension du concept. Il y a toujours des étapes à suivre algébriquement pour résoudre un problème mais celles-ci prennent tout leur sens grâce aux représentations visuelles. Elle pose plus de questions ouvertes, de compréhension et cherche à montrer l'utilité que peut avoir la factorisation. Par exemple, lors de la présentation de la complétion de carré, Line a recours à des boites pour indiquer qu'il y a des termes manquants, ceux-ci sont maintenant accompagnés d'une explication qui repose sur les représentations visuelles.

Retour sur le cadre de référence

La composante didactique/cognitive a été particulièrement analysée dans ce travail. C'est le rapport avec les savoirs à enseigner, dans ce cas-ci, la factorisation. Un cadre de référence a été élaboré sur les habiletés à développer en factorisation. J'en ai dégagé cinq qui sont : l'habileté à représenter visuellement l'expression algébrique à factoriser, faire le lien entre les représentations visuelles et la démarche algébrique, reconnaître les formes équivalentes, reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas et reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser. L'analyse menée permet de porter un regard nouveau sur ces habiletés. En effet il apparaît que trois habiletés sont intimement liées : l'habileté à représenter visuellement une expression algébrique à factoriser, l'habileté à faire des liens entre la représentation visuelle et la démarche algébrique et l'habileté à reconnaître des formes équivalentes. L'habileté à représenter visuellement une expression algébrique exige que l'on puisse disposer des rectangles de façon à ce qu'ils forment un plus grand rectangle. Il faut donc repérer des côtés communs. Dans tout ce travail il y a une reconnaissance des formes équivalentes. De plus, lors du passage à l'écriture algébrique, un lien doit être fait entre les différentes étapes de la démarche visuelle et ses correspondantes dans le mode algébrique. La quatrième habileté, celle de reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas, a joué un rôle déterminant dans l'appropriation par l'enseignante des représentations visuelles. Les élèves face à l'expression a^2+b^2 ont tendance à factoriser en $(a+b)^2$. Line intervient en utilisant les représentations visuelles et elle affirme que cette intervention a aidé les élèves à comprendre cette erreur davantage qu'avec une intervention de type algébrique. La cinquième habileté qui est de reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser est une habileté méta. C'est la plus difficile, qui requiert une bonne compréhension des techniques de factorisation. L'expérimentation amène un point intéressant. Face à des expressions qui nécessitent deux formes de factorisation, l'enseignante met de l'avant l'importance d'être « efficace » en utilisant d'abord la mise en évidence simple ou double. En effet, si l'élève fait l'inverse, il s'expose à des difficultés de manipulation algébrique et peut se retrouver avec une expression qui n'est pas la forme la plus factorisée. Finalement, l'expérimentation permet de voir que les habiletés peuvent être travaillées seulement dans un mode (visuel ou algébrique) ou peuvent être travailles dans les deux modes simultanément comme présenté dans le tableau ci-dessous.

Tableau 6.1 Classement des habiletés selon les modes visuel et algébrique

Habiletés travaillées dans le mode visuel	**Habiletés travaillées dans le mode visuel ou algébrique**	**Habiletés travaillées dans le mode algébrique**
Représenter visuellement l'expression à factoriser.	Reconnaître des formes équivalentes.	Reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon

	Reconnaître des expressions qui ne se factorisent pas. Faire le lien entre la représentation visuelle et la démarche algébrique.	l'expression à factoriser.

Limites de la recherche

Une limite de cette recherche est le manque d'informations sur la séquence d'enseignement sur la factorisation de Line avant l'expérimentation. Il aurait été intéressant d'avoir plus de détails des raisons derrière sa planification, sur ses notes de cours pour mieux comprendre le rationnel de sa pratique. Par exemple, j'ai constaté que les exercices dans les notes de cours sont souvent gradués en ordre de complexité, mais Line en est-elle consciente? Quelles sont les raisons derrière ce choix? Quelles sont les difficultés autour de ces exercices qu'elle a pu constater dans sa pratique? Au moment des entrevues, je ne savais pas l'importance qu'auraient pu avoir ces réponses.

Avant l'expérimentation, Line et moi concevions une activité autour de la différence de carrés dans laquelle les élèves découvrent cette technique de factorisation en manipulant du matériel. Des ciseaux étaient prévus pour permettre le découpage et reconfiguration des figures par les élèves. Après discussion, nous avons finalement abandonné cette idée car cette façon de procéder est différente de celle que les élèves sont habitués à vivre et avons opté par une présentation avec un diaporama où les élèves ne sont pas aussi actifs. Suite à l'expérimentation, je constate qu'il aurait été intéressant de poursuivre avec l'idée de cette activité. Comment Line aurait-elle géré cette situation? Quelles auraient été ses impressions suite à cette expérience avec les élèves.

Retombées et prolongements de la recherche

Cette étude a eu une retombée de formation auprès de l'enseignante. Line a réinvesti les activités expérimentées, introduisant par la suite les représentations visuelles dans sa planification. De plus, l'enseignante est maintenant conseillère pédagogique. Dans ses séances de formation, elle met de l'avant l'importance des représentations visuelles, elle partage ainsi l'expérience vécue dans cette étude amenant d'autres enseignants à considérer l'apport des représentations visuelles.

L'année où l'expérimentation a eu lieu, une question dans les examens de fin d'année du Ministère a posé problème dans la commission scolaire. L'élève devait factoriser un polynôme donné pour trouver les côtés d'un terrain. Une aire est donnée et l'élève doit penser à factoriser pour trouver les côtés. Comme la factorisation n'a pas nécessairement été vue sous un angle géométrique, cette question a posé problème et a même été modifiée par l'équipe d'enseignants pour éviter que les élèves bloquent sur cette question. Après l'expérimentation, dans les formations auprès des enseignants, Line et moi avons insisté sur l'importance de lier factorisation et représentation d'un rectangle et avons mis de l'avant cet exemple de question. De plus l'ajout des représentations visuelles permet de faire un lien entre différents concepts mathématiques, de lier géométrie et algèbre amenant une vision des concepts mathématiques plus homogène.

Comme enseignante au secondaire, j'ai été confrontée à des élèves en difficultés d'apprentissage en individuel à l'automne 2012 et j'ai approché la factorisation, surtout la différence de carrés par le visuel. J'ai constaté que les élèves ont vraiment bien saisi cette technique de factorisation en utilisant des nombres. Souvent, on en reste dans l'aspect algébrique ou dans l'utilisation de représentations visuelles impliquant des expressions algébriques, dans l'abstraction. Avec des nombres, la technique de factorisation est perçue autrement. On présente la différence de carrés comme un carré mesurant 9 par 9 auquel on soustrait un autre carré mesurant 3 par 3. Par la suite, on fait le même processus de découpage et de reconfiguration mais avec ces nombres. On a alors que 9^2-3^2 est équivalent à $(9-3).(9+3)$. Cette façon de procéder a convaincu plusieurs élèves qui ont alors bien compris le lien entre la différence de carrés en algèbre, en géométrie et avec des nombres plus concrets. Il serait donc intéressant de voir dans une expérimentation future l'apport de nombres concrets chez les élèves pour donner du sens et mieux comprendre la factorisation en renforçant l'idée d'équivalence.

Comme prolongement possible, il serait intéressant d'aller analyser différentes pratiques sur la factorisation à partir du cadre de référence qui a été développé suite à cette recherche. Il serait intéressant de faire faire des manipulations concrètes aux élèves, de comparer un groupe témoin et un groupe expérimental l'un qui utilise les représentations visuelles et l'autre sans ce support, de travailler cette technique à l'ordinateur, et de constituer un groupe de réflexion sur cette question avec une équipe d'enseignants.

APPENDICE A

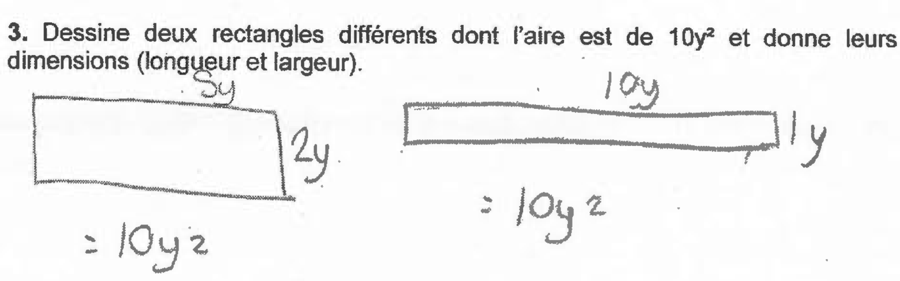
ANALYSE PARTIELLE DU TEST ÉCRIT DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES AVANT EXPÉRIMENTATION

Voici l'analyse de deux questions d'un test destiné aux élèves avant l'expérimentation.

Question 3. Dessine deux rectangles différents dont l'aire est de $10y^2$ et donne leurs dimensions (longueur et largeur).

Cette question a été élaborée pour vérifier l'habileté des élèves à représenter visuellement une expression algébrique et leur habileté à trouver différentes représentations possibles. Plusieurs représentations visuelles sont possibles, par exemple, des rectangles dont les côtés sont $2y$ et $5y$ ou $1y$ et $10y$ ou ½ y et $20y$, etc. Il faut tenir compte ici d'une contrainte reliée au visuel, on ne peut représenter des surfaces dont les côtés sont 1 et $10y^2$ ou 2 et $5y^2$, etc.

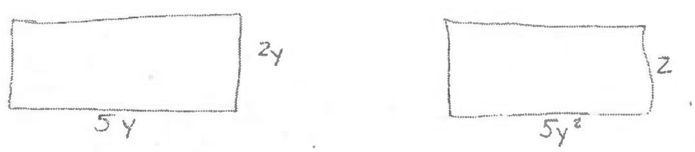
Après analyse des productions, on peut noter que tous les élèves (sauf un) ont donné deux représentations visuelles différentes comme c'était demandé. Toutefois seulement sept élèves (29%) ont représenté de façon correcte les longueurs, comme dans la production ci-dessous :


3. Dessine deux rectangles différents dont l'aire est de $10y^2$ et donne leurs dimensions (longueur et largeur).

Production de l'élève #9

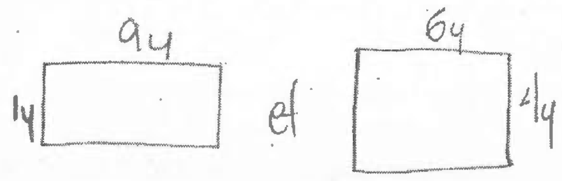
Ces élèves ont utilisé pour déterminer chacun des côtés des rectangles une longueur en fonction de y, ils s'appuient sur le fait que $y \cdot y = y^2$ et décomposent par la suite 10 en facteurs premiers, 10 = 5 x 2 ; 10 = 10 x 1. Ces élèves respectent les dimensions : *10y*, *2y*, *5y* et *1y* étant des longueurs. Ces 7 élèves ont tous utilisé les mêmes décompositions, soit $2y$ et $5y$, et $10y$ et $1y$.

La majorité des élèves (14 sur 24 ou 58% des élèves) ont utilisé y^2 pour représenter un côté du rectangle. On peut donc remarquer que les élèves ne sont pas très familiers avec les représentations visuelles en algèbre car « y^2 » représente une surface carrée. Il est donc moins logique visuellement de l'utiliser pour représenter une longueur. Malgré tout, quand on multipliait les côtés du rectangle, on obtenait bien $10y^2$. Voici un exemple d'une production d'élève :



Question 3 du prétest, production de l'élève #17

Trois élèves (12,5%) ont donné une réponse erronée comme dans l'exemple ci-dessous :



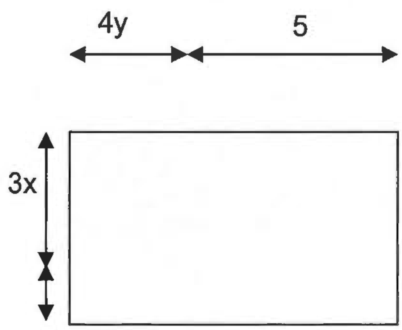
Production de l'élève #8

On peut remarquer que ces élèves présentent plusieurs difficultés. D'une part, le sens accordé à la multiplication sens aire n'est pas compris, les élèves effectuent une addition au lieu d'une multiplication entre les côtés du rectangle. L'expression $10y^2$ est ainsi décomposée de la façon suivante 1y + 9y = $10y^2$ et 6y + 4y = $10y^2$. D'autre part, des difficultés sont présentes autour du sens accordé aux termes semblables et on note des difficultés dans la manipulation algébrique, qui sont des difficultés récurrentes chez les élèves pour qui $y + y = y^2$.

Question 7. Donne les dimensions et l'aire du rectangle suivant. Peux-tu trouver au moins trois façons différentes d'écrire l'aire de ce rectangle?

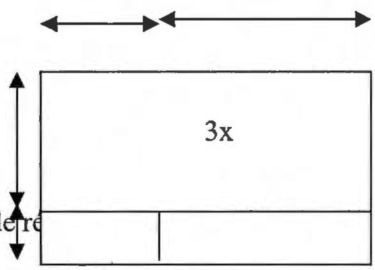
Longueur : ___________

Largeur : ___________



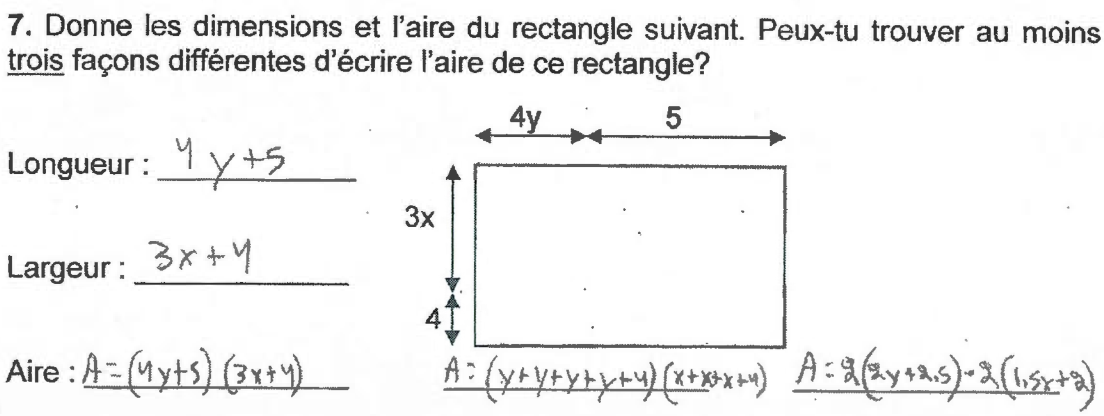
Aire : ______________________________________

Nous avons demandé ici trois façons différentes d'écrire l'aire du rectangle pour pousser les élèves à trouver d'autres écritures que la factorisée $(4y+5)\cdot(3x+4)$ ou la développée $12xy+15x+16y+20$. Plusieurs autres écritures sont possibles comme $4y\cdot(3x+4)+5(3x+4)$. Celles-ci s'appuient sur la représentation visuelle et sont obtenues en considérant l'aire des différents rectangles construits comme dans l'exemple ci-dessous :



Exemple de ré 7 du prétest

Huit élèves ont trouvé les deux formes les plus classiques, les formes factorisée et développée et n'ont pas donné d'autre écriture équivalente. Parmi ces huit élèves, un d'entre eux a tenté de faire une mise en évidence sur la forme développée de l'expression, mais a fait une erreur de manipulation algébrique. Les sept autres élèves ont donné l'une de ces deux formes (deux élèves la forme développée et cinq la forme factorisée). Trois autres élèves sont restés dans le registre algébrique, ils ont trouvé l'expression factorisée et ont fait des manipulations algébriques ou numériques pour obtenir des expressions équivalentes, comme dans l'exemple suivant :


7. Donne les dimensions et l'aire du rectangle suivant. Peux-tu trouver au moins trois façons différentes d'écrire l'aire de ce rectangle?

Longueur : 4y+5

Largeur : 3x+4

Aire : A=(4y+5)(3x+4) A=(y+y+y+y+4)(x+x+x+4) A=2(2y+2,5)·2(1,5x+2)

Figure 14. Question 7 du prétest, production de l'élève #7

On voit donc que 75% des élèves sont familiers avec les formes factorisée et développée des expressions algébriques, mais qu'ils ont de la difficulté à trouver d'autres formes équivalentes. Ce résultat concorde avec les résultats des recherches (Matz, 1984; Ball, Pierce et Stacey, 2003; Guin et Trouche, 1999). Le quart des élèves a additionné les termes algébriques au lieu de les multiplier. Ils n'ont pas compris le lien entre l'aire du rectangle et le produit à faire. On peut souligner ici des difficultés dans le sens accordé aux opérations de polynômes.

L'analyse du prétest montre que les élèves n'associent pas facilement l'écriture algébrique à sa représentation visuelle avant enseignement. C'est dans ce passage entre ces deux registres que le rôle de l'enseignant est important comme le soulignent plusieurs chercheurs (Hosson, 1999; Pierce, 2002; Shama et Dreyfus, 1994), celui-ci favorisant un lien entre la méthode algébrique et visuelle donnant ainsi du sens aux différentes étapes menant à la factorisation.

APPENDICE B

NOTES DE COURS DE L'ENSEIGNANTE

Mathématique

4ème secondaire

Séquence : Sciences naturelles

Algèbre

1) Figures et solides équivalents
2) Expressions algébriques équivalentes
3) Expressions rationnelles équivalentes
4) Factorisation
5) Résolution d'équations du 2ème degré à une variable

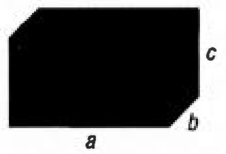
Nom : ______________________________ Groupe : ______

1) figures et solides équivalents

Aire des solides :

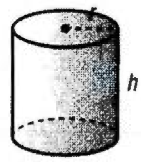
On détermine l'aire totale d'un solide en faisant la somme des aires de toutes ses faces.

Ex. : 1) Prisme droit



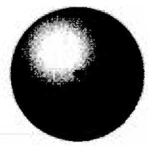
$A = 2ac + 2ab + 2bc$

2) Cylindre droit



$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

3) Sphère

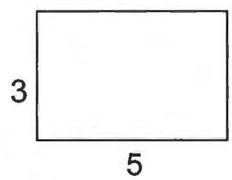


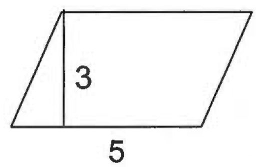
$A = 4\pi r^2$

Figures équivalentes :

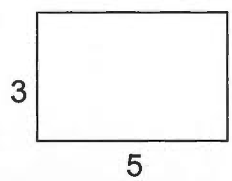
Deux figures planes sont équivalentes si elles ont la même aire.

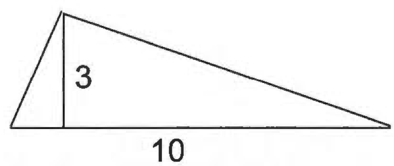
exemple$_1$:



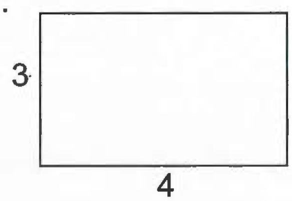


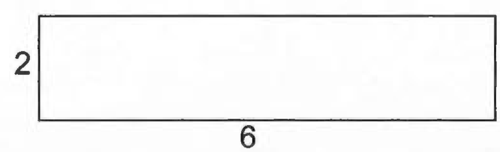
exemple$_2$:





exemple$_3$:



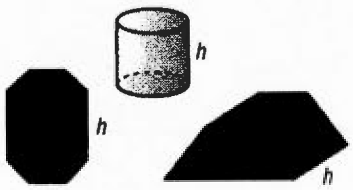


Volume des solides :

Déterminer le volume d'un solide, c'est mesurer l'espace occupé par ce solide.

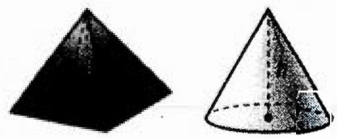
Ex. : V et A_b représentent respectivement le volume du solide et l'aire de sa base.

1) Prismes droits et cylindre droit



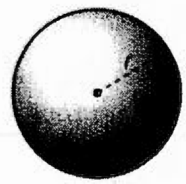
$V = A_b \cdot h$

2) Pyramide droite et cône circulaire droit



$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

3) Boule

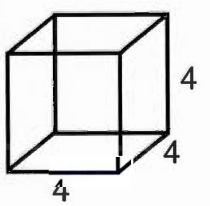


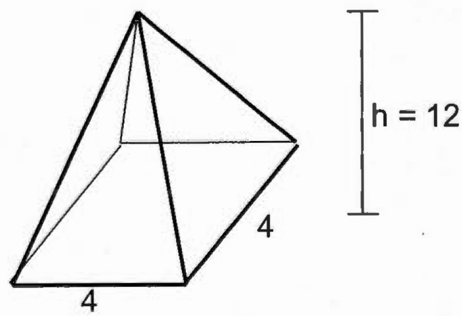
$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

solides équivalents :

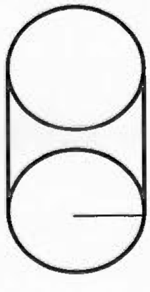
Deux solides sont équivalents s'ils ont le même volume.

exemple$_1$:

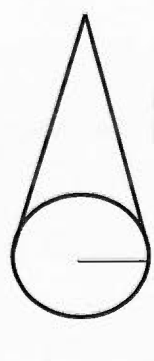




exemple$_2$:



rayon = 5
hauteur = 4



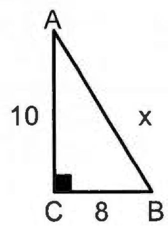
rayon = 5
hauteur = 12

2) Expressions algébriques équivalentes

Relation de Pythagore

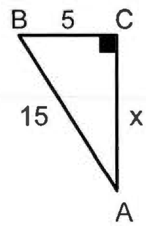
La **relation de Pythagore** nous permet de calculer la longueur d'un côté du triangle rectangle lorsque les longueurs des 2 autres côtés sont connues.

Exemple : Trouve la mesure de l'hypoténuse du triangle rectangle ci- dessous :



réponse :____

Exemple : Trouve la mesure du côté $\overline{AC}$ dans le triangle rectangle ci-dessous :



réponse :____

Lois des exposants :

1. Le produit de bases identiques donne la même base affectée de la somme des exposants.

$$\boxed{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$$

Exemple : $2^3 \bullet 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

2. Le quotient de bases identiques donne la même base affectée de la différence des exposants.

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

Exemple : $2^5 \div 2^4 = 2^{5-4} = 2^1$

3. Un exposant négatif devient positif en changeant la base par son inverse multiplicatif.

$$\boxed{a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}}$$

Exemples : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2^{-3}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3$

Jumelons ces 2 lois pour ne pas avoir d'exposant négatif :

• **m ≥ n**	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**ex. :** $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$
• **m < n**	$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	**ex. :** $\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2}$

4. Toute base affectée de l'exposant 0 donne 1.

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Exemples : $1 = \frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0$ $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $(-10)^0 = 1$

5. Le produit de deux bases différentes affecté d'un exposant revient à multiplier chaque base affectée de l'exposant donné.

$$\boxed{(ab)^m = a^m b^m}$$

Exemple : $(2 \bullet 5)^3 = 2^3 \bullet 5^3$

6. La puissance d'une puissance égale la base affectée du produit des exposants.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \bullet n}}$$

Exemple : $(3^4)^2 = 3^{4 \bullet 2} = 3^8$

7. Une fraction affectée d'un exposant indique que le numérateur et le dénominateur sont affectés par ce même exposant.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$$

Exemple : $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3}$

Pratiquons ces lois à l'aide d'exemples importants.

Note : Dans un même exercice, lorsque plusieurs lois s'appliquent, l'ordre dans lequel nous les appliquons n'a pas d'importance.

Donne tes réponses dans les **plus petites bases** possibles avec des **exposants positifs**.

1. $2^3 \bullet 2^5 =$
2. $(a + x)^2 \bullet (a + x)^3 =$
3. $3^{-2} \bullet 3^{-4} =$
4. $2^3 \bullet 3^4 =$
5. $3^a \bullet 81 =$
6. $15 \bullet 5^n =$
7. $6^{-3} \bullet 6^3 =$
8. $2^4 \bullet 2^{-6} =$
9. $a^{-2} \bullet a^{-3} =$
10. $\left(\frac{1}{c}\right)^{-3} =$
11. $\frac{2^6}{2^5} =$
12. $\frac{3^2}{3^{-3}} =$
13. $a^{-6} \div a^3 =$
14. $3^4 \div (-3)^2 =$
15. $\frac{4^3}{4^{n-1}} =$
16. $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^m} =$
17. $4^{\frac{1}{2}} \bullet 4^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{2}{5}} =$
18. $4^3 \div 3^{-2} =$
19. $(5 \bullet 2)^5 =$
20. $(2^2ac)^m =$
21. $(7x^2y)^3 \bullet 7(x^2y)^4 =$
22. $(8^2 \bullet 2^3)^2 =$
23. $\left(\frac{3}{a^3} \bullet \frac{3}{a^4}\right)^{-3}$
24. $\left(\frac{6a^2b^{-3}}{2a^4b^{-1}}\right)^3 =$
25. $(2^2)^3 =$
26. $(a^5)^2 \bullet (b^2)^3 =$

Effectue les opérations ci-dessous et donne tes réponses dans les plus petites bases possibles avec les exposants positifs.

1. $(8xy)^{-3} \bullet (2x^2y^3) =$

2. $(3^{a+2})^{-3} \bullet (9^{a-3})^{-2} =$

3. $(49x^{-3}y^2)^{-2} \bullet (7x^2y^{-4})^2 =$

4. $((-3)^2)^{-2} =$

5. $(-3x^{-3}y^2)^{-2} \bullet (9x^2y^3)^4 =$

6. $a^3 \bullet a^{\frac{2}{5}} =$

7. $\dfrac{4^{-1}a^3}{(8a^4)^{-2}} =$

8. $a^{\frac{3}{5}} \bullet a^{\frac{-2}{3}} =$

9. $\left(\dfrac{27x^{-3}y^{-2}}{3x^4}\right)^{-2} =$

10. $x^2 \bullet x^{\frac{1}{5}} \bullet x^{\frac{-1}{3}} =$

11. $\left(\dfrac{-x^4y^2}{x^3y}\right)^{-2} =$

12. $(a^{-2})^{\frac{1}{4}} =$

13. $(x^2y^3)^{-2} \bullet \left(\dfrac{x^3}{x^2y}\right)^2 =$

14. $(x^3)^0 \bullet (x^{1/2})^{1/4} =$

15. $(-a^3b^4)^3 \bullet (-a^2b)^2 =$

16. $\left(\dfrac{a^3}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

17. $(-5^2a^3)^3 \bullet \left(\dfrac{a^2}{5a}\right)^{-3} =$

18. $\left(\dfrac{a^3}{a^{1/2}}\right)^{1/2} =$

19. $(-4a^3b^6)^{-3} \div (8ab)^{-1} =$

20. $(8a^2)^{1/2} \bullet (2a)^{1/3} =$

21. $\dfrac{a^{2}}{a^{-2}} =$

22. $a^{-6} =$

23. $\dfrac{x^{-1}y}{xy^{-1}} =$

24. $a^{3} \bullet a^{-2} =$

25. $b^{c}b^{d} =$

26. $4^{a} \div 4^{b} =$ si $a \geq b$

27. $(2a^{2}b)^{2} =$

28. $(3x^{-2}y)^{-3} =$

29. $\left(\dfrac{2a^{-2}bc^{3}}{2^{-1}bc^{2}}\right)^{d} =$

30. $\left(\dfrac{4xy^{-2}}{2x^{-2}}\right)^{-2} =$

31. $\left(\dfrac{3x^{2}y^{2}}{x^{-1}y^{3}}\right)^{-1} \bullet \left(\dfrac{3^{-1}xy^{-2}}{3^{2}x}\right)^{2} =$

32. $\left(6x^{2}y\right)^{-2} \bullet \left(6^{3}x^{-2}y^{-2}\right)^{2} =$

33. $\left(\dfrac{2a^{3}b^{-2}}{6a^{2}b^{-2}}\right)^{-3} =$

34. $\left(-2ab^{-1}\right)^{3} \bullet \left(2a^{2}b\right)^{-1} =$

35. $\dfrac{\left(2a^{-2}b^{-1}\right)^{2}}{\left(2^{2}ab\right)^{-1}} \div \dfrac{\left(2^{-3}a^{2}b\right)^{-1}}{\left(2a^{-3}b^{2}\right)^{-1}} =$

36. $\left(\dfrac{a^{-1}b}{b^{-2}}\right)^{-c} =$

37. $(b+y)^{x} \bullet (b+y)^{z} =$

38. $\dfrac{(a+c)^{m}}{(a+c)^{-n}} =$

39. $\left(\dfrac{2}{x^{3}} \bullet \dfrac{2}{x^{6}}\right)^{-2} =$

40. $\dfrac{b^{3}}{b^{n-2}} =$ si $n \leq 5$

Opérations sur les expressions algébriques :

1. Terme : expression composée d'un produit entre un coefficient numérique et une ou des variables.

   ex : $3x$, $-12a^2b$, $\frac{2y^4}{5}$

   $\frac{4}{x}$: n'est pas un terme (la variable doit apparaître au numérateur), c'est une expression algébrique fractionnaire.

   Un terme contient une partie numérique (coefficient) et une partie littérale (variables affectées des exposants).

   ex : $\frac{-4x^2y^3}{5}$: le coefficient est ________
   la partie littérale est ________

2. Polynôme : expression algébrique composée de plusieurs termes réunis par des opérations d'addition et de soustraction.

   ex :
   $4x^2$: monôme
   $2x + 3y$: binôme
   $2a + 3b^2 - 4c^3$: trinôme
   $3x^2 - 4y + 3z - 5$: polynôme à 4 termes

3. Termes semblables : termes formés des mêmes variables affectées des mêmes exposants.

   ex : $4x^2y^3$ et $-3\,x^2y^3$

4. Degré d'un terme : la somme des exposants des variables.

   ex :
   $5x^3$ est du ____ degré
   $4abc^2$ est du ____ degré
   $-2x^2y$ est du ____ degré
   x est du ____ degré.
   6 est de degré ____.

5. Degré d'un polynôme : parmi les degrés de chaque terme, c'est le plus élevé.

   ex :
   $3x^2 - 4x^3 + x$ est du ____ degré.
   $4x^2y - 5xy^3 - x^2y^2$ est du ____ degré.

6. Polynôme ordonné : les termes sont placés par ordre décroissant de leur degré.

   ex : $3x^2 - 4x^4y^3 + 5$ bien ordonné correspond à ______________________

Addition de polynômes : Nous additionnons les coefficients des termes semblables, la partie littérale demeure identique.

Exercices : Effectuer les additions suivantes : (simplifier)

1. $3x^2 + 7x^2 =$ ____________	2. $4x^3 + 2x^2 + x^3 + 5x^2 =$ ________________
3. $(-4a^2b) + 5a^2b + b^3 =$ ______	4. $3ab + (-5ab) + 2b^2 + (-2b^2) =$ __________
5. $(4x^3 - 2x^2 + x) + (-7x^3 - 4x^2 + 3x) =$ ____________________	6. $7a^2b + 3 =$ ______________________

Soustraction de polynômes : Nous soustrayons les coefficients des termes semblables, la partie littérale demeure identique.

Exercices :

1. Soustraire $4x^2y$ de $7x^2y$ réponse _________________
   attention : le premier terme est après le mot ``**de**``
2. De $4a - 3b$ soustraire $-2a + b$ réponse _________________
3. $(4x^2 - 3y + 2x) - (-2x^2 + 3y - x) =$ réponse _________________
4. Soustrais $-5x^3y^2$ de $4x^3y^2$ réponse _________________
5. De $-4x + 3y - 6$ retranche $-4x + y - 2$ réponse _________________
6. $4x^3y + 2xy^3 - (2x^3y - 4xy^3) =$ réponse _________________
7. $(3a + 3b - c) - (2a - 3b - 2c) + (a + b + c)$ réponse _________________

Multiplication de polynômes :

a) monôme × monôme : Nous multiplions les coefficients et additionnons les exposants des variables identiques.

Exercices : Effectue les opérations suivantes :

1. $3x^2y \bullet 4xy^3 =$ ______________
2. $a^2b^3c \bullet 2ab^2 =$ ______________
3. $-2\,a^2b^3 \bullet 3ab^4 =$ ______________
4. $6 \bullet -3x^2 =$ ______________
5. $-x^2y \bullet -5xy^3 =$ ______________
6. $4x^3yz \bullet -2xy^2 \bullet 3yz^3 =$ __________

b) monôme × polynôme : Nous multiplions chaque terme du polynôme par le monôme.

Exercices : Effectue les opérations suivantes :

1. $3x(4x^2 + 2x - 5) =$ ____________
2. $-1(2a + 3b) =$ ______________
3. $-3a^2b(-4ab^2 + ab - 5ab^3) =$ ______________________
4. $-2x^2y(3x^3 - 4x + 2x^2 - 5) =$ ______________________

c) polynôme × polynôme : Méthode de distributivité : nous multiplions chaque terme du $2^{ème}$ polynôme par le 1^{er} terme du 1^{er} polynôme ainsi de suite.

ex :

$$\begin{aligned}(3x + 2)(2x - 5) &= 3x \bullet 2x + 3x \bullet -5 + 2 \bullet 2x + 2 \bullet -5 \\ &= 6x^2 - 15x + 4x - 10 \\ &= 6x^2 - 11x - 10\end{aligned}$$

Exercices : Effectue les produits suivants :

1. $(3a - 4b)(a + 2b) =$ ______________________ ______________________
2. $(2x - 3)(2x^2 - 5x) =$ ______________________ ______________________
3. $(2x - 1)(3x^2 - 5x + 2) =$ ______________________ ______________________
4. $(-3a^2 + 4b - 1)(-2a + 5) =$ ______________________ ______________________
5. $(2m + 3n)^2 =$ ______________________
6. $(x - 3)^2 =$ ______________________

Division de polynômes

a) monôme ÷ monôme : 1- On respecte la loi des signes
2- On divise les coefficients
3- On soustrait les exposants des variables identiques

Exercices : Effectuer les divisions suivantes :

1.	$12x^3y^4 \div 2xy^2 =$ ______	2.	$-12x^2y^3 \div -2xy =$ ______
3.	$3x^3y^5 \div 6x^2y^3 =$ ______	4.	$15a^2b^3 \div -3 =$ ______
5.	$8a^2b^3 \div 8a^2b^3 =$ ______	6.	$12x^5y^3 \div 18x^2y^6 =$ ______

> Note : Le résultat ne doit pas contenir d'exposant négatif.
> $\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$

b) polynôme ÷ monôme : On divise chaque terme du polynôme par le monôme.

Exercices : Effectue les divisions suivantes :

1. $(8x^3 - 4x^2 + 6x) \div 2x =$ ____________________

2. $(-20a^3b^4 + 15a^2b^5 + 30a^3b^3) \div -5a^2b^2 =$ ____________________

3. $(20x^2y^3 - 15xy^2 - 6x^3y) \div 3x^2y^2 =$ ____________________

c) polynôme ÷ polynôme : 1- Ordonner les deux polynômes en ordre décroissant
2- Diviser les polynômes comme des entiers.

ex :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 3 & \underline{x + 1} \\ -\underline{(x^2 + x)} & x + 2 \\ 2x + 3 & \\ -\underline{(2x + 2)} & \\ 1 & \end{array}$$

donc $(x^2 + 3x + 3) \div (x + 1) = (x + 2) + \dfrac{1}{(x + 1)}$

Exercices : Effectue les divisions suivantes :

1. $x^2 + 5x + 6 \mid x + 3$

2. $x^2 + 7x + 12 \mid x + 3$

3. $6a^2 - 2a - 20 \mid 2a - 4$

4. $4x^2 - 2x - 10 \mid 2x + 3$

5. $35a^2 - 47ab + 6b^2 \mid 5a - 6b$

6. $x^2 - 12x - 15 \mid x - 4$

7. $6x^2 - 7x - 17 \mid 3x + 4$

8. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \mid x - 3$

9. $2x^2 + 13x + 20 \mid x + 5$

10. $2c^2 + 7c + 3 \mid c + 3$

$6x^3 + 13x^2 - 11x + 2 \mid 3x - 1$

12. $6x^3 - 4x^2 + x + 1 \mid 2x^2 - 2x + 1$

$9x^3 - 42x^2 + 76x - 48 \mid 3x^2 - 10x + 12$

14. $2x^3 - 8x + x^4 + 12 - 7x^2 \mid x^2 + 2 - 3x$

$x^3 - 8 \mid x - 2$

16. $a^2 - 1 \mid a - 1$

Expressions rationnelles équivalentes

Expression rationnelle: quotient de deux polynômes

Le **diviseur** doit être **différent de 0** car on ne peut pas diviser par 0

Exemples :

$\frac{1}{x}$ où $x \neq 0$

$\frac{3x+1}{x-1}$ où $x \neq 1$

$\frac{x+y}{2}$

Réduire une expression rationnelle :

factoriser pour avoir un facteur commun

diviser le numérateur et le dénominateur par le facteur commun en supposant qu'il n'est pas égal à 0.

Exemple$_1$:

$$\frac{2x+4}{x^2+2x} = \frac{2(x+2)}{x(x+2)} = \frac{2}{x}$$

où $x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

Exemple$_2$:

$$\frac{18a^2+6a^2b}{9a+3ab} =$$

____

____

____

Opérations sur les expressions rationnelles

Addition ou soustraction : mettre au même dénominateur ;

additionner ou soustraire les numérateurs.

Exemple :

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{2y}{xy}+\frac{1}{xy}=\frac{2y+1}{xy}$$

Multiplication : multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ;

réduire si possible.

Exemple :

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)=$$

____

____

____

Division : Diviser par une fraction rationnelle revient à multiplier par l'inverse de cette expression.

Exemple :

$$\left(\frac{2}{x}\right)\div\left(\frac{x+1}{2x}\right)=$$

____

____

____

Exercices :

1. $\frac{a}{b} + \frac{4d^2}{2b} + \frac{3x^2}{4b^2} \div \frac{3}{2a} =$

2. $\frac{x}{2} + \frac{4y^2}{3a} + \frac{3xy}{2b} \div \frac{2}{b} =$

3. $\frac{2}{x} \div \frac{(x+1)}{2x} =$

Identités algébriques remarquables

Le carré d'un binôme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(binôme)^2 = trinôme carré parfait

Pour accélérer les calculs : $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

Ce terme est le carré de 3x	Ce terme est le double du produit de 3x par -5	Ce terme est le carré de -5

Méthode pour **factoriser** un **trinôme carré parfait** :

1- Calculer la **racine** du premier et du dernier terme
2- Le **signe** du deuxième terme du trinôme est le même que le signe du deuxième terme du binôme

Exemple : $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$

3x 4y

Exercices : Factorise les polynômes suivants avec la méthode du **trinôme carré parfait** :

1. $25x^2 - 90xy + 81y^2 =$ ____________
2. $x^2 + 4x + 4 =$ ____________
3. $4b^2 - 12b + 9 =$ ____________
4. $x^2 + 10x + 25 =$ ____________
5. $12x^3 - 36x^2 + 27x =$ ____________
6. $8x^3 + 24x^2y + 18xy^2 =$ ____________

La différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Méthode pour factoriser une différence de deux carrés :

1- Binôme avec un (-) (obligatoire)
2- Les 2 termes sont des carrés parfaits
3- Extraire la racine de chaque terme
4- ($1^{\text{ère}}$ racine + $2^{\text{ème}}$ racine) ($1^{\text{ère}}$ racine - $2^{\text{ème}}$ racine)

Tout binôme identifiable à une différence de carrés peut être factorisé selon le modèle suivant :

$$\boxed{\Delta^2 - \bigcirc^2 = [\Delta - \bigcirc][\Delta + \bigcirc]}$$

ex : $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

$$\begin{array}{cc} 4x^2 & 9 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2x & 3 \end{array}$$

vérifions : $(2x - 3)(2x + 3) =$
$4x^2 + 6x - 6x - 9$
$4x^2 - 9$

Exercices :

1. $144a^2 - 81b^2 =$ ______________

2. $x^2y^2 - 25a^2 =$ ______________

1. $(x - 2)^2 - 121 =$ ______________

4. $4b^4 - 36 =$ ______________

5. $36 - (y - 4)^2 =$ ______________

6. $50x^2 - 18a^4 =$ ______________

7. $x^4 - y^4 =$ ______________

8. $81a^4 - 625b^4 =$ ______________

4) La factorisation

Cas de facteurs :

a). **Simple mise en évidence** :

Méthode :

1-Trouver le plus grand facteur commun dans chaque terme.

2-Diviser chaque terme par ce facteur.

3-Écrire ce facteur devant le nouveau polynôme.

2 est le plus grand facteur commun

$$\frac{4x+2}{2} = 2x+1$$

Exemple : $4x + 2 = 2(2x+1)$

Exercices : Factorise les polynômes suivants :

$2x^2 + 2x =$ ____________________

2. $4ab + 6b^2 =$ ____________________

$4a^2 + 8ab + 12 =$ ______________

4. $2ac + 6bc + 12c^2 =$ ______________

$5ax^2 - 6a =$ ____________________

6. $25m^2n^2 - 15m - 10n^3 =$ ___________

$x(x + 2) + 2y(2 + x) =$ ____________

8. $2x(y - 3) - 5(y - 3) =$ ____________

$2x(y - 6) + 6(-6 + y) =$ ___________

10. $- 42xy + 7y^2 =$ ________________

Double mise en évidence :

1- Polynôme à 4 termes (obligatoire)
2- Simple mise en évidence, s'il y a lieu.
3- Regrouper les termes 2 par 2 selon leur facteur commun
4- Faire une mise en évidence pour les 2 premiers termes
5- Faire une mise en évidence pour les 2 derniers termes
6- Mettre en évidence le facteur entre parenthèses

ex : $2xy - 6x - 5y + 15$

$$\underline{2xy - 6x} - \underline{5y + 15}$$

$$[2x(y-3) - 5(y-3)]$$

$$(y-3)\,[2x \qquad -5 \qquad]$$

réponse : $(y - 3)(2x - 5)$

Exercices : Factorise les polynômes suivants :

1. $6ab - 4a + 3b - 2 =$ ______________________

2. $x^2 + 4y + 2x + 2xy =$ ______________________

3. $2y^3 - 6y^2 + 3y - 9 =$ ______________________

4. $7abc + 84c + 21bc + 28ac =$ ______________________

c) **Produit / somme** :

1- Trinôme de la forme $\mathbf{x^2 + bx + c}$

2- Trouver 2 nombres : soit m et n dont

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{m \bullet n = c} \\ \mathbf{m + n = b} \end{array}} \begin{array}{l} \text{: produit} \\ \text{: somme} \end{array}$$

3- $\mathbf{(x + m)\ (x + n)}$

ex : $x^2 - 6x + 8 =$ $\boxed{\begin{array}{l} -2 \bullet -4 = 8 \\ -2 + -4 = -6 \end{array}} \begin{array}{l} :p \\ :s \end{array}$

$(x - 2)(x - 4)$

vérifions : $(x - 2)(x - 4) = x^2 - 4x - 2x + 8$
$= x^2 \quad - 6x \quad + 8$

1- Trinôme de la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c}$

2- Trouver 2 nombres : soit m et n dont

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{m \bullet n = a \bullet c} \\ \mathbf{m + n = b} \end{array}} \begin{array}{l} \text{: produit} \\ \text{: somme} \end{array}$$

3- Transformer le trinôme : $ax^2 + \mathbf{bx} + c$
à l'aide de m et n : $ax^2 + \mathbf{mx + nx} +$

4- Faire une **double mise en évidence**

ex : $2x^2 + 7x + 3 =$ $\boxed{\begin{array}{l} 1 \bullet 6 = 6 \\ 1 + 6 = 7 \end{array}}$

$\underline{2x^2 + 1x} + \underline{6x + 3} =$

$x(2x + 1) + 3(2x + 1)$

$(2x + 1)(x + 3)$

Exercices : Factorise les trinômes suivants avec la méthode <u>produit/somme</u> :

1. $x^2 - 3x - 10 =$

2. $x^2 - 4xy - 12y^2 =$

3. $x^2 + 7x + 10 =$

4. $x^2 - 8x + 16 =$

5. $3x^2 + 11x + 6 =$

6. $2c^2 + 5c + 2 =$

Exercices : Factorise les polynômes, en suivant cette méthode :

1- Effectuer une simple mise en évidence s'il y a lieu.

2- Trouver le cas de facteurs approprié :

Binôme avec (-) →	Différence de carrés
Trinôme →	Produit / somme
Trinôme →	Carré parfait
Polynôme à 4 termes →	Double mise en évidence

3- Effectuer la factorisation tant qu'il est possible de le faire.

4- Vérifier en effectuant le produit des facteurs.

1. $a^2 + ab - ab - b^2 =$ ______________________________

2. $2a^2 + 3ab + 2ab + 3b^2 =$ ______________________________

3. $a^2 + 8a + 7 =$ ______________________________

4. $axw^2 - axw - 12ax =$ ______________________________

5. $4b^2 - 25c^2 =$ ______________________________

6. $15x^2 - 77x + 10 =$ ____________________

7. $5 - 6c + c^2 =$ ____________________

8. $14a^3b + 28a^4b^2 + 42a^2b^2 =$ ____________________

9. $36 + 24y + 4y^2 =$ ____________________

10. $8x^2 - 4x - 24 =$ ____________________

11. $17x + 20x^2 - 63 =$ ____________________

12. $64c^2 - 100b^2 =$ ____________________

13. $36b^4 - 49x^2y^8 =$ ____________________

14. $3x^2 + 23x + 30 =$ ____________________

15. $xy - 2x + 2y - 4 =$ ____________________

16. $a^2 + 16a + 64 =$ ____________________

17. $4x^2 - 16y^2 =$ ____________________

18. $2x^2 + 3x + 1 =$ ____________________

19. $y^2 - 3y + 2 =$ ____________________

20. $8x^2 + 28x + 24 =$ ____________________

21. $4a^3b + 5a^2b^3 =$ ____________________

Exercices : Réduis les expressions rationnelles

1. $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{x}{(x+3)}$. pour $x-3 \neq 0$, $x \neq 3$

2. $\dfrac{4a^2-3a+4ab-3b}{12a-9} =$ ______________________

______________________ pour ______

3. $\dfrac{(x-3)^2-16}{x^2-4x-21} =$ ______________________

______________________ pour ______

4. $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4} =$ ______________________ pour ______

5. $\dfrac{64x^2-16x+1}{8x^2+39x-5} =$ ______________________

______________________ pour ______

6. $\dfrac{10x^2-15x-25}{10x^2-20x-30} =$ ______________________

______________________ pour ______

7. $\dfrac{(x-1)^2-(x+8)^2}{2x^2+x-21} =$ ______________________

______________________ pour ______

8. $\dfrac{4ax+5x-24a-30}{x^2-7x+6}=$ ______________________________

______________________________ pour ______

9. $\dfrac{3x^2+8x-35}{6x^2-11x-7}=$ ______________________________

______________________________ pour ______

10. $\dfrac{9x^2-49}{9x^2+42x+49}=$ ______________________________

______________________________ pour ______

11. $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-10x+25}=$ ______________________________

______________________________ pour ______

12. $\dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+8x+7}=$ ______________________________

______________________________ pour ______

5) La résolution d'équations du $2^{ème}$ degré à une variable

a) Méthode de résolution où l'on utilise la **factorisation** et la **propriété du produit nul**

- **Propriété du produit nul** :

$$\boxed{\mathbf{AB = 0}, \text{ si et seulement si } \mathbf{A = 0} \text{ ou } \mathbf{B = 0}}$$

Méthode de résolution :

1- Écrire l'équation sous la forme $p(x) = 0$;

2- Décomposer en facteurs le polynôme $p(x)$;

3- Appliquer la propriété du produit nul et résoudre les équations du 1^{er} degré qui en résultent.

Exemple : $2(x^2 + x) = 20 - x$

____

____

____

____

____

__________ ou __________

ou

Exercices : Résous les équations suivantes en appliquant la propriété du produit nul :

AB = 0, si et seulement si **A = 0** ou **B = 0**

1. $x^2 + 12x = -36$

____

____

____

____

____

___________ ou ___________

___________ ou ___________

2. $(x + 1)^2 = 16$

____

____

____

____

____

___________ ou ___________

___________ ou ___________

3. $25 = (x + 2)^2$

____

____

____

____

____

___________ ou ___________

___________ ou ___________

4. $2x^2 = 5x$

____

____

____

____

____

___________ ou ___________

___________ ou ___________

b) Méthode de résolution où l'on utilise la **complétion du carré**

Méthode : 1- Écrire l'équation sous la forme $x^2 + bx = c$ (lignes 1,2 et 3 des exemples);

2- Ajouter un terme de chaque côté de l'égalité pour obtenir un trinôme carré parfait du côté gauche ;

3- Déterminer les solutions par extraction des racines carrées.

Exemple$_1$:

1- $2x^2 - 24x + 54 = 0$

2- $x^2 - 12x + 27 = 0$

3- $x^2 - 12x = -27$

4- $\boxed{x^2 - 12x + \boxed{36}} = -27 + \boxed{36}$

nôme carré parfait $\div 2$ $\triangle^2$

$\boxed{(x - \triangle 6)^2} = 9$

$(x - 6) = -3$ ou $(x - 6) = 3$

$x = 3$ ou $x = 9$

Exemple$_2$:

1- $-3x^2 + 9x + 12 = 0$

2- ____________________

3- ____________________

4- $\boxed{\qquad \square} = \qquad + \square$

$\div 2$ $\triangle^2$

$\triangle$ ____________________

__________ ou __________

__________ ou __________

Exercices : Résous les équations suivantes par complétion du carré :

1. $2x^2 - 8x + 6 = 0$

ou

ou

2. $2f^2 - 16f - 66 = 0$

ou

ou

3. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ou

ou

4. $x^2 + 12x - 133 = 0$

ou

ou

5. $a^2 - 8a - 9 = 0$

____

____

____

____

____

__________ ou __________

__________ ou __________

6. $y^2 - 6y - 16 = 0$

____

____

____

____

____

__________ ou __________

__________ ou __________

7. $2y^2 - 40y + 128 = 0$

____

____

____

____

____

__________ ou __________

__________ ou __________

8. $2x^2 - 8x + 6 = 0$

____

____

____

____

____

__________ ou __________

__________ ou __________

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, Michèle. 1993. « Connaissances et métaconnaissances, une perspective didactique ». In Baron, M., Robert, A. (eds.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* RR LAFORIA 93/18. p. 29-42. Paris : Institut Blaise Pascal

Artigue, Michèle, Guy Brousseau, Jean Brun, Yves Chevallard, François Conne et Gérard Vergnaud. 1996. *Didactique des mathématiques,* sous la dir. de Jean Brun http://www.kleio.ch/HEP_VS/hepvsvideo/8_INGENIERIE_DIDACTIQUE_ARTIGUE.pdf

Ball, Lynda, Robyn Pierce et Kaye Stacey. 2003 « Recognising equivalent algebraic expressions: an important component of algebraic expectation for working with CAS ». In *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Honolulu, 13-18 juillet 2003), sous la dir. de N. A. Pateman, B. J. Dougherty et J. Zilliox, vol. 4, p. 15-22. Honolulu : PME.

Bednarz, Nadine et Bernadette Dufour-Janvier. 1992. « L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves », In *Didactique des mathématiques et formation des enseignants : Actes du colloque international* (Marrakech, 20 au 22 mai 1992)

Booth, Lesley. 1984. « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire ». *Petit X,* no5, p.5-17.

Boucher, Claude, Michel Coupal, Martine Jacques et Lynn Marotte. 2010. *Intersection Mathématique Sciences Naturelles, Deuxième cycle du secondaire, deuxième année,* Chenelière Éducation, 264 p.

Breton, Guy. et collaborateurs. 1997. *Réflexions mathématiques 436 Tome 1*, Éditions CEC.

Cardin, Jean-François, Jean-Claude Hamel, Antoine Ledoux et Steeve Lemay. 2008. *Vision Mathématique Sciences Naturelles Volume 1*, Éditions CEC, 301 p.

Charbonneau, Louis. 1996 « From Euclid to Descartes : algebra and its relation to geometry» In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching,* Kluwer Academic Publishers, p. 15-37.

Damboise, Caroline. 2007. « Rôle d'un logiciel de manipulation symbolique dans l'apprentissage de l'algèbre au secondaire». Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise en didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal, 154 p.

De Champlain, Denis, Pierre Mathieu, Paul Patenaude et Hélène Tessier. 1994. « Glossaire Mathématique ». *Modulo Éditeur*, 1070 p.

Duval, Raymond. 1994. « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique ». *Reperes- IREM*, p. 121-138.

Eisenhardt, Kathleen M. 1989. «Building theories from Case Study Research», *Academy of Management Review*, Vol. 14. No. 4, p.532-550. Stanford University

Englert, Gail et Rose Sinicrope. 1994. « Making connections with two-digit multiplication » *Arithmetic teacher* vol 41, p. 446-448

Guay, Sylvio, Anabel Van Moorhem et collaborateurs. 2008. Point de Vue mathématique, Séquence Sciences Naturelles, Deuxième cycle, deuxième année, Éditions Grand Duc, 404 p.

Guay, Sylvio, Steeve Lemay et collaborateurs. 1996. *Scénario 436 Tome 1*, Éditions HRW, 344 p.

Guin, Dominique et Luc Trouche. 1999. « The complex process of converting tools into mathematical instruments : the case of calculators ». *International Journal of computers for Mathematical Learning,* vol. 3, p. 195-227

Hosson, Nathalie. 1999. « Raisonnements des élèves lors de l'utilisation d'un matériel de type tuiles algébriques dans la multiplication et la division de polynômes ». Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise en didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal, 175 p.

Hoyrup, Jens. 2007. « The Roles of Mesopotamian Bronze Age Mathematics Tool for State Formation and Administration--Carrier of Teachers' Professional Intellectual Autonomy ». *Educational Studies in Mathematics;* vol. 66 no. 2, p.257-271.

Karsenti, Thierry et Stéphanie Demers. 2000. L'étude de cas. Dans : Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. 2000. *Introduction à la recherche en éducation.* Éditions du CRP, Sherbrooke.

Karsenti, Thierry et Lorraine Savoie-Zajc 2004. *La recherche en éducation: étapes et approches*. Éditions du CRP, Sherbrooke

Kieran, Carolyn et Paul Drijvers. 2006. « The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theorical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra », *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*

Lenoir, Yves. 2009. « L'intervention éducative, un construit théorique pour analyser les pratiques d'enseignement». *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation.* vol. 12 no. 1 p. 9-29.

Matz M. 1982. « Towards a process model for high school algebra errors », In *Intelligent Tutoring Systems,* Academic Press, p. 25-50.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. 2007. «Programme de formation de l'École québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle»

Mucchielli, Alex. 1996. *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales.* Paris : Armand Colin

Pierce, Robyn. 2002. *An exploration of algebraic insight and effective use of computer algebra systems*. Thèse de doctorat, The University of Melbourne.

Radford, Luis. 1996. « The roles of Geometry and arithmetic in the development of algebra : historical remarks from a didactic perspective » In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching,* Kluwer Academic Publishers, p. 39-54.

Robert, Aline. 2001. «Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en didactique des mathématiques*. 21 (1.2), 57-80: La pensée sauvage.

Robert, Aline et Janine Rogalski. 2002. « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche », *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 2, no 4, p.505-528

Shama, Gilli et Tommy Dreyfus. 1996. « Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems ». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 26 p.45-70.

Sharp, Janet M. 1995. « Results of Using Algebra Tiles as Meaningful Representation of Algebra Concepts». ERIC ED398080, 8p.

Skemp, Richard S. 1971. *The psychology of Learning Mathematics*. Hammondswoth, England: Penguin Books.

Thompson, Alba Gonzalez. 1984. The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

Trottier, Louis et Bernadette Janvier. 1999. *Factorisation*. Analyse conceptuelle issue de notes de cours didactique 1 (MAT2024) à l'UQAM.