UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COHOMOLOGIE SYMPLECTIQUE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SAMUEL BOUCHER

OCTOBRE 2012

REMERCIEMENTS

Je voudrais, avant tout, remercier mon directeur de recherche Monsieur Vestislav Apostolov. J'ai apprécié sa patience à mon endroit, ses conseils judicieux, ainsi que son soutien financier qui m'a permis de poursuivre des études supérieures. Un merci tout spécial à Kime et à ma famille.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Le sujet principal de ce mémoire est la théorie de Hodge symplectique que Tseng et Yau ont développée pour des variétés symplectiques.

Nous commençons par un rappel d'algèbre linéaire et de géométrie avant de résumer les concepts introduits par Tseng et Yau. Nous présentons des résultats classiques comme le théorème de Moser et celui de Darboux. Nous démontrons aussi l'existence d'une métrique compatible pour chaque variété symplectique. Nous citons aussi la décomposition de Hodge.

Nous allons, par la suite, résumer les idées de base de la théorie de Hodge symplectique, qui est inspirée de la décomposition de Hodge riemanienne, en appliquant ses résultats aux variétés presque-kählériennes. Pour ce faire, nous rappelons les résultats de Merkulov et de Mathieu à propos de la propriété forte de Lefschetz. Nous présentons les formes primitives et la représentation $sl(2, \mathbb{C})$ de celles-ci. Nous allons présenter la démonstration de Lejmi d'une proposition de McDuff à propos des zéros de champs de Killing sur une variété compact prèsque-kählérienne. Par la suite, nous allons présenter les travaux de Tseng et Yau en débutant par les différentes cohomologies qu'ils ont définies et nous présentons différents résultats qu'ils ont obtenus.

Après un bref rappel de l'algèbre de Lie, nous présentons 2 exemples de variétés que nous allons pouvoir classifier à partir de cette théorie. Nous allons présenter un exemple de 4-variété non-kälhérienne où nous utilisons le résultat de McDuff et Lejmi pour y parvenir et nous reprenons l'exemple de Tseng et Yau d'une 6-variété qui ne possède pas la propriété forte de Lefschetz en utilisant les outils présentés le long de ce mémoire.

Mots clés : Variété prèsque-complexes ; géométrie symplectique ; théorie de hodge.

INTRODUCTION

La théorie de Hodge est connue depuis longtemps. Sur une variété riemannienne compacte, on peut décomposer les k-formes en une partie harmonique et un reste, relatif au Laplacien construit à partir de la métrique. Cette décomposition induit un isomorphisme entre l'espace des k-formes harmoniques et la cohomologie de De Rham avec coefficients réels. Lorsqu'on a une variété symplectique compacte, il existe toujours des structures compatibles riemanniennes, dites presque-kählériennes. D'autre part, sur les variétés symplectiques, il est possible de créer d'autres cohomologies qui ne sont pas nécessairement isomorphes à la cohomologie de De Rham et dans ce cas, il est possible de définir une décomposition de Hodge dite symplectique, à partir d'une structure presque-kählérienne.

Dans ce contexte, les travaux de Tseng-Yau (Tseng et Yau, 2009) montrent qu'il y a un lien entre la propriété forte de Lefschetz et la décomposition de Hodge symplectique de formes. Une conséquence de cette décomposition est la création d'outils pour trouver des variétés compactes qui ne sont pas kählériennes tout en étant symplectiques. Les variétés compactes qui possèdent la propriété forte de Lefchetz, qu'il serait très tentant d'appeler variétés de Lefschetz, sont indistinguables des variétés kähleriennes dans certaines cohomologies. Il faudra donc introduire de nouvelles cohomologies à partir des formes primitives $\mathcal{P}^k(M)$ et étudier plus en détail l'espace $\mathcal{L}^{r,s}(M)$ qui généralise les formes primitives. Ces nouveaux espaces, construits à partir de la forme symplectique, auront des propriétés plus spécifiques qui vont permettre de mieux comprendre la propriété forte de Lefschetz. Par exemple, certaines cohomologies symplectiques possèderont toujours une décomposition en formes primitives à la différence de la cohomologie de De Rham sur une variété riemannienne.

CHAPITRE I

ESPACES VECTORIELS

1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Ce chapitre résume des résultats d'algèbre linéaire qui sont utilisés en géométrie symplectique.

Définition 1.1. Un espace vectoriel symplectique (V, ω) est la donnée d'un espace vectoriel réel V de dimension finie et d'une forme bilinéaire, anti-symétrique et non-dégénérée ω sur V.

Remarque 1.2. Puisque ω est anti-symétrique et non-dégénérée alors, $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$.

Définition 1.3 (Sous-espace symplectique)**.** Un sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) est dit symplectique si $\omega|_W$ est une forme symplectique sur W.

Définition 1.4. Soient (V, ω) un espace symplectique et $W \subset V$, le complément symplectique W^ω de W est définie par,

$$W^\omega = \{v \in V | \omega(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Lemme 1.5. *Pour un sous-espace $W \subset V$,*

$$\begin{aligned} &dim_{\mathbb{R}}\ W + dim_{\mathbb{R}}\ W^\omega = dim_{\mathbb{R}}\ V, \\ &(W^\omega)^\omega = W. \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons l'opérateur $\sharp_\omega$ défini par :

$$\begin{aligned}\sharp_\omega &: V \to V^* \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot).\end{aligned}$$

Comme la 2-forme ω est non-dégénérée, $\ker \sharp_\omega$ est trivial et donc, l'opérateur $\sharp_\omega$ est un isomorphisme.

Soient l'injection $\iota_W : W \to V$ et $\iota_W^* V^* \to W^*$, la projection duale.

Définissons $\sharp_{\omega_{|W}} = \iota_W^* \circ \sharp_\omega$ de sorte que $W^\omega = \ker \sharp_\omega|_W$ alors,

$$dim_{\mathbb{R}} V = dim_{\mathbb{R}} W^* + dim_{\mathbb{R}} \ker \sharp_\omega|_W$$

ce qui complète la preuve. □

Lemme 1.6. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace. Alors, W est symplectique par rapport à $\omega_{|W}$ ssi*

$$V = W \oplus W^\omega. \tag{1.1}$$

Démonstration. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que $W \cap W^\omega = 0$. Or,

$$W \cap W^\omega = \{v \in W |\ \omega(v, w) = 0\ \forall w \in W\} = \{0\}, \tag{1.2}$$

car, ω est non dégénéré sur W. □

Définition 1.7. Soit $W \subset V$, alors :

1. W est isotrope si $W \subset W^\omega \iff \omega_{|W} = 0$;
2. W est coisotrope si $W^\omega \subset W$;
3. W est lagrangien si $W = W^\omega \neq \{0\} \iff \omega_{|W} = 0$ et $dim_{\mathbb{R}} W = \frac{1}{2} dim_{\mathbb{R}} V$.

Lemme 1.8 (Espace vectoriel symplectique de dimension 2)**.** *Soit (V, ω) et $dim_{\mathbb{R}}\ V = 2$. Alors, il existe une base $\{e_1, e_2\}$ telle que $\omega((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.*

Démonstration. Comme ω est non-dégénérée, il existe u, v tels que $\omega(u,v) \neq 0$. De plus, ω est bilinéaire, ainsi on peut supposer que $\omega(u,v) = 1$. Les vecteurs $\{u,v\}$ sont linéairement indépendants, sinon $u = cv$ et on obtiendrait $\omega(cv,v) = 0$. On a trouvé une base $\{u,v\}$ de V telle que :

$$\begin{aligned}\omega(s_1u + s_2v, t_1u + t_2v) &= s_1t_1\omega(u,u) + s_1t_2\omega(u,v) + s_2t_1\omega(v,u) + s_2t_2\omega(v,v)\\ &= s_1t_2 - t_1s_2.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.9. *Soit un espace vectoriel symplectique (V, ω). Alors,*

1. *$dim_{\mathbb{R}} V = 2n$;*
2. *Il existe une base $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n\}$ telle que :*

$$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}, \ \ et\ \omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0.$$

Démonstration. On va démontrer que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ où les V_i sont de dimension 2. Supposons que $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$. Comme ω est non-dégénérée, il existe une paire de vecteurs $v_1, v_2 \in V$ tel que $\omega(v_1, v_2) = 1$. L'espace engendré par v_1, v_2 est un sous-espace V_1. Par le lemme 1.6, on obtient $V = V_1 \oplus V_1^{\omega}$ où V_1 et V_1^{ω} sont symplectiques. Par l'hypothèse de récurence, $V_1^{\omega} = V_2 \oplus V_3 \oplus \cdots \oplus V_n$ ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.10. *Une 2-forme ω est non-dégénérée ssi $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$.*

Démonstration. La première implication est triviale par le théorème 1.9. Démontrons la deuxième implication par l'absurde. Si $\omega^n \neq 0$ et ω est dégénérée, il existe $u \neq 0$ tel que $\omega(u,v) = 0, \forall v \in V$, alors $\iota_u \omega^n = 0$, ce qui est une contradiction. □

Définition 1.11. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Une transformation linéaire Φ de V est dite symplectique si :

$$\Phi^* \omega = \omega,$$

où $(\Phi^*\omega)(u,v) := \omega(\Phi u, \Phi v)$ pour tout $u, v \in V$.

Corollaire 1.12. *Soit ω_t une famille de formes symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$. Il existe une famille de transformations linéaires Φ_t, telle que $\Phi_t^* \omega_t = \omega_0$.*

Démonstration. Il suffit de prendre des bases $\{v_0^t, v_1^t, \ldots, v_n^t, u_1^t, \ldots, u_n^t,\}$ comme au théorème 1.9 relativement à ω_t et Φ_t est la transformation linéaire qui prend la base standard et l'envoie sur $\{v_0^t, v_1^t, \ldots, v_n^t, u_1^t, \ldots, u_n^t\}$. □

Définition 1.13. Le groupe symplectique $Sp(V, \omega)$ d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) est l'ensemble des transformations linéaires symplectiques de (V, ω).

Exemple. Le groupe symplectique de l'espace $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est

$$Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) = \{\Psi \in GL(\mathbb{R}^{2n}) : \Psi^T J_0 \Psi = J_0\},$$

où

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 1.14. *Il existe un isomorphisme entre les groupes $Sp(V, \omega)$ et $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Corollaire 1.15. *Si $\Psi \in Sp(V, \omega)$ alors,* $\det(\Psi) = 1$. *C'est-à-dire $Sp(V, \omega)$ est un sous-groupe de $SL(V)$.*

Démonstration. Par le définition, il est facile de voir que $\det(\Psi) = \pm 1$. De plus, les espaces symplectiques sont orientables par le corollaire 1.10, donc $\det(\Psi) > 0$. □

Lemme 1.16. *$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n)$ où $GL(n, \mathbb{C})$ est vu comme un sous groupe de $GL(2n, \mathbb{R})$ en associant $A + \sqrt{-1}B$ à la matrice :*

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

$$\Psi \in GL(n,\mathbb{C}) \iff \Psi J_0 = J_0 \Psi \tag{1.3}$$

$$\Psi \in Sp(2n)) \iff \Psi^T J_0 \Psi = J_0 \tag{1.4}$$

$$\Psi \in O(2n) \iff \Psi^T \Psi = \mathbb{1} \tag{1.5}$$

On peut facilement voir que si deux des trois propriétés sont vérifiées, la troisième sera aussi vérifiée.

Pour montrer que les intersections donnent $U(n)$, prenons $\Psi \in O(2n) \cap GL(n,\mathbb{C})$. Alors,

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

avec les propriétés suivantes :

$$A^T B = B^T A, \tag{1.6}$$

$$A^T A + B^T B = I_n. \tag{1.7}$$

Ce sont exactement les conditions pour une matrice $\Psi = A + \sqrt{-1}B$ d'être unitaire. □

1.2 Structures complexes

Définition 1.17 (Structures complexes.). Une structure complexe sur un espace vectoriel V est un automorphisme linéaire J tel que $J^2 = -\mathbb{1}$.

On peut construire à partir de (V, J) en espace vectoriel complexe $V_\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times V &\to V \\ (s + it, v) &\mapsto sv + tJv. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ainsi, (V, J) est de dimension paire, $\dim_\mathbb{R} V = 2 \dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}$

Définition 1.18. Notons $\mathcal{J}(V)$ l'espace des structures complexes sur V.

Proposition 1.19. *Soit (V^{2n}, J) un espace vectoriel réel de dimension $2n$ muni d'une structure complexe J. Alors, il existe une base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, Jv_1, Jv_2, \ldots, Jv_n\}$.*

Démonstration. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur V^{2n}, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle J\cdot, J\cdot \rangle$ est un nouveau produit scalaire invariant à sous l'action de J. Prenons v_1, Jv_1, alors $\langle v_1, Jv_1 \rangle_J = \langle v_1, Jv_1 \rangle + \langle Jv_1, J^2 v_1 \rangle = 0$. Ainsi, $V = \operatorname{span}\{v_1, Jv_1\} \oplus V_1^{\perp}$ où $V_1^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de dimension $2(n-1)$ complémentaire au $\operatorname{span}\{v_1, Jv_1\}$ par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$. Par récurrence, on termine la preuve comme le cas $n = 1$ a été démontré implicitement. □

Définition 1.20 (Complexification d'un espace vectoriel). Soit V un espace vectoriel réel. Sa complexification est donnée par :

$$V^c := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus V \tag{1.9}$$

où

$$\begin{aligned} J_{V^c} : V^c &\to V^c \\ (u, v) &\mapsto (v, -u). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Proposition 1.21. *Soit (V, J) un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe J. Considérons aussi l'espace vectoriel $V^c \simeq V \oplus V$ avec la structure J^c qui agit par : $J^c(u, v) = (Ju, Jv)$.*

On peut décomposer V^c de la manière suivante : $V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ où

$$V^{1,0} = \{v \in V^c | Jv = iv\}, \tag{1.11}$$

$$V^{0,1} = \{v \in V^c | Jv = -iv\}. \tag{1.12}$$

Proposition 1.22. *Soit (V^{2n}, J) un espace vectoriel réel de dimension $2n$. $V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ est sa complexification. Alors,*

$$V^{1,0} = \{v - iJv | v \in V\} \text{ et } V^{0,1} = \{v + iJv | v \in V\}.$$

De plus, la conjugaison est un isomorphisme allant de :

$$\begin{aligned} V^{1,0} &\to V^{0,1} \\ v - iJv &\mapsto v + iJv. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Théorème 1.23. *Tout espace vectoriel complexe est isomorphe à :*

$$(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$$

où J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbb{R}^{2n}$:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathbb{1}$ est l'identité sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.24. Il suffit de montrer que pour un espace vectoriel V muni d'une structure complexe J, il existe un isomorphisme Φ tel que :

$$\Phi J_0 = J\Phi.$$

Démonstration. Soit $\{p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n\}$ une base de $\mathbb{R}^{2n}$ munie de la structure complexe standard :

$$J_0 p_i = q_i, \; J_0 q_i = -p_i.$$

Soit, $\{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \ldots, u_n + iv_n\}$ une base de $V^{1,0}$. Alors,

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

est une base de V et donc, la structure complexe peut être décrite de la manière suivante :

$$Ju_i = -v_i, \; Jv_i = u_i.$$

Il ne reste plus qu'à définir notre isomorphisme par son action sur les bases de $\mathbb{R}^{2n}$ et V.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2n} &\to V \\ \{p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n\} &\mapsto \{u_1, -v_1, \ldots, u_n, -v_n\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Un simple calcul confirme le résultat. □

La structure J sur un espace vectoriel V peut induire une action sur son dual V^*.

Définition 1.25. L'action de J^* sur V^*, où J est une structure complexe sur V, est définie par :

$$J^*\alpha(X) = \alpha(J^{-1}X) = \alpha(-JX) = -\alpha(JX), \tag{1.15}$$

$$\forall X \in V, \forall \alpha \in V^*.$$

Lemme 1.26. *L'action de J^* sur une k-forme $\alpha \in \bigwedge^k(V^*)$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} J^*\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) &= \alpha(J^{-1}v_1, J^{-1}v_2, \dots, J^{-1}v_k) \\ &= (-1)^k \alpha(Jv_1, Jv_2, \dots, Jv_k), \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$.

Définition 1.27. Soit un espace vectoriel V de dimension réel paire, ainsi qu'une structure complexe J sur cet espace. On note par V^{c*} le dual du complexifié V^c.

Proposition 1.28. *Soit (V^{2n}, J) un espace vectoriel de dimension paire munie d'une structure complexe J. Alors le complexifié de son dual se décompose : $V^{*c} = V^*_{1,0} \oplus V^*_{0,1}$. De plus,*

$$V^*_{0,1} = \{\alpha \in V^{*c} | J^*\alpha = -i\alpha\}, \; V^*_{1,0} = \{\alpha \in V^{*c} | J^*\alpha = i\alpha\}.$$

Remarque 1.29. D'après notre convention, $\bigwedge^{1,0}(V^*) = V^{*c}_{0,1}$.

Définition 1.30 ($\wedge^{p,q}V^{*c}$). Soit une k-forme $\gamma = \alpha_p \wedge \beta_q$ où $p+q=k$ et p, q sont les degrés de α_p et β_q respectivement. Alors, $\gamma \in \wedge^{p,q}V^{*c}$ si $\alpha_p \in \wedge^p V_{1,0}$ et $\beta_q \in \wedge^q V^{0,1}$.

Proposition 1.31 (Décomposition de $\bigwedge V^{*c}$). *Soit V^{*c} le complexifié du dual de V, un espace vectoriel de $dim_{\mathbb{R}} = 2n$ possédant une structure complexe J. L'algèbre extérieure de V^{*c} se décompose de la façon suivante :*

$$\bigwedge V^{*c} = \sum_{r=0}^{n} \wedge^r V^{*c} \tag{1.17}$$

où

$$\wedge^r V^{*c} = \sum_{p+q=r} \wedge^{p,q} V^{*c}. \tag{1.18}$$

1.3 Structures complexes compatibles avec une forme symplectique.

Définition 1.32. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et J une structure complexe sur V. On dit que J est compatible avec ω si la forme est invariante sous l'action de J c'est-à-dire : $J\omega = \omega$ et $\omega(v, Jv) > 0$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$.

Lemme 1.33. *Si J est compatible avec ω, $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive et invariante sous l'action de J.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} J^*g(u, v) &= g(Ju, Jv) = \omega(Ju, J^2v) = \omega(u, Jv) = g(u, v), \\ g(u, v) &= \omega(u, Jv) = \omega(Ju, J^2v) = -\omega(Ju, v) = \omega(v, Ju) = g(v, u), \\ g(u, u) &= \omega(u, Ju) > 0, \end{aligned}$$

si $u \neq 0$. □

Lemme 1.34. *Soit (V, ω) un espace symplectique et J une structure complexe compatible. Alors, il existe une produit hermitienne $H(\cdot, \cdot)$ sur $V_c \subset (V, J)$.*

$$\begin{aligned} H : &V_c \times V_c :\to \mathbb{C} \\ &(u, v) \mapsto \omega(u, Jv) + i\omega(u, v). \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \omega(u, Jv) + i\omega(u, v) = \omega(Ju, J^2v) + i\omega(u, v) \\ &= \omega(v, Ju) - i\omega(v, u) \\ &= \overline{H(v, u)}, \end{aligned}$$

$$H(u, u) = \omega(u, Ju) + i\omega(u, u) = \omega(u, Ju) > 0,$$

si $u \neq 0$.

$$\begin{aligned} H(u, Jv) &= \omega(u, J^2v) + i\omega(u, Jv) \\ &= -\omega(u, v) + i\omega(u, Jv) \\ &= i(i\omega(u, v) + \omega(u, Jv)) \\ &= iH(u, v). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.35. *Tout espace vectoriel symplectique possède une structure complexe compatible.*

Démonstration. Tout espace sympletique est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ avec la forme standard ω_0, alors on peut supposer que $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Ainsi,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

la structure standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ est ω_0-compatible. □

CHAPITRE II

VARIÉTÉS

Ce chapitre traite des variétés, des structures que l'on va étudier plus en profondeur avec les outils que Tseng et Yau ont inventé. On y introduit les notations qui seront utilisées aux chapitres suivants. Nous allons aussi présenter quelques résultats qui nous seront utiles pour les exemples au chapitre 4.

2.1 Variétés symplectiques

Définition 2.1. Une forme symplectique ω sur une variété différentiable lisse M est une 2-forme différentielle fermée non-dégénérée en tout point.

Une variété symplectique (M, ω) est la donnée d'une variété M lisse munie d'une forme symplectique ω.

Remarque 2.2. Une variété symplectique est de dimension paire, voir le théorème 1.9.

Exemple. $\mathbb{R}^{2n}$ munie de $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ est une variété symplectique.

Définition 2.3. Soit $F\colon M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et $X_F\colon M \to TM$ un champ de vecteurs associés à F par l'identité suivante $\iota_{X_F}\omega = dF$. Un tel champs est hamiltonien et F est la fonction hamiltonienne.

Remarque 2.4. Pour tout champ de vecteur hamiltonien, $dF(X_F) = (\iota_{X_F}\omega)(X_F) = \omega(X_F, X_F) = 0$ ce qui équivaut à dire que le champ de vecteur X_F est tangent aux courbes de niveaux de F. De plus, $\mathcal{L}_{X_F}\omega = d(\iota_{X_F}\omega) + \iota_{X_F}(d\omega) = ddF = 0$. Ainsi X_F est symplectique, c'est-à-dire le flot de X_F préserve ω.

Définition 2.5. Un difféomorphisme Φ d'une variété (M, ω) est un symplectomorphisme si

$$\Phi^*\omega(X, Y) = \omega(\Phi_* X, \Phi_* Y) = \omega(X, Y),$$

pour tout champs de vecteurs lisses X, Y sur M.

Lemme 2.6. *Toute variété symplectique est orientable et de plus, lorsque la variété est compacte, sa forme symplectique ω définit une classe non-triviale dans la deuxième cohomologie de De Rham $H^2_{dR}(M)$.*

Démonstration. La forme symplectique ω définit une forme volume v_ω par :

$$v_\omega = \frac{\omega^n}{n!}$$

(voir le corollaire 1.10).

Les propriétés du produit wedge impliquent que si $[v_\omega] = [\frac{\omega^n}{n!}] \neq 0$, alors $[\omega] \neq 0$. □

Définition 2.7 (Isotopie symplectique). Soit (M, ω_t) une famille lisse de formes symplectiques telle que $[\omega_t]_{dR} = [\omega_0]_{dR}$ pour tout t. On dit qu'une telle famille est une isotopie.

Théorème 2.8 (Théorème de Moser). *Soit (M, ω_t) une isotopie pour $t \in [0, 1]$ où M est compacte telle que $\omega_t = \omega_0 + d\alpha_t$ où α_t est une 1-forme sur M. Alors, il existe ϕ_t tel que $\phi_t^*\omega_t = \omega_0$ et $\phi_0 = \mathbb{1}$.*

Démonstration. Soit $\omega_t = \omega_0 + d\alpha_t$, alors il existe un unique champ de vecteur X_t tel que $\iota_{X_t}\omega_t = -\dot{\alpha}_t$ ainsi qu'une famille de difféomorphismes, ϕ_t, telle que $\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t$ et $\phi_0 = \mathbb{1}$.

Alors,

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0$$

ce qui veut aussi dire

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t = \frac{d}{dt}\omega_0 = 0.$$

Étant donné que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t &= \phi_t^*\Big(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\Big)\\ &= \phi_t^*\Big(\frac{d}{dt}(\omega_0 + d\alpha_t) + d\iota_{X_t}\omega_t\Big)\\ &= \phi_t^*\Big(d\big(\frac{d}{dt}\alpha_t + \iota_{X_t}\omega_t\big)\Big) = 0,\end{aligned}$$

on a donc,

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0.$$

□

Corollaire 2.9. *Soient ω_1 et ω_2 deux formes symplectiques compatibles avec la même structure presque-complexe J sur M compacte. Supposons $[\omega_1]_{dR} = [\omega_2]_{dR}$. Alors ω_1 est isotope à ω_2.*

Démonstration. $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ est notre famille de formes. Comme ω_1 et ω_2 sont non dégénérées, leur somme convexe le sera. □

Théorème 2.10 (Théorème de Darboux). *Toute variété symplectique (M, ω) est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Démonstration. Soit $\psi : \mathcal{U} \simeq B_\lambda(0)$ une carte qui envoie x à 0 alors $K = \overline{B_{\lambda/2}(0)} \Subset B_\lambda(0)$. De plus, $\omega_{|_x} = \omega_{0|_x}$ nous prenons l'homotopie suivante $\omega_t = t\omega + (1-t)\omega_0$. Il s'agit bien d'une homotopie, car $\omega_t(x) = \omega_0(x)$. Comme ω_0 et ω sont non-dégénérées, il existe $B_\epsilon(0)$ telle que $\omega_t^n \neq 0$ sur $\overline{B_\epsilon(0)}$. Ainsi, on obient $\omega_t = \omega_0 + d\alpha_t$ et posons $X_t = -\alpha_t^{\sharp\omega_t}$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $\phi_s^{X_t}$ définie pour $|s| < \delta$ car, $\overline{B_\epsilon(0)}$ compacte.

Sans perte de généralité, on peut conclure que par une homothétie il existe $B_\mu(0)$ telle que :

1. ω_t soit une isotopie ;
2. $\phi_s^{X_t}$ est défini pour $t \in [0, 1]$.

Par le théorème de Moser, on obtient le résultat. □

Corollaire 2.11. *Soit une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$. Alors, il existe un atlas $U = \{U_\alpha\}$ de M tel que,*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^{2n}$$
$$\phi_\alpha^* \omega_0 = \omega.$$

où ω_0 est la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2.12 (Dualité symplectique)**.** Soit (M, ω) une variété symplectique et T_xM et T_x^*M l'espace tangent et cotangent au point $x \in M$, on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \flat_\omega : T_x(M) &\to T_x^*(M) \\ X &\mapsto \omega(X, \cdot), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \sharp_\omega : T_x^*(M) &\to T_x(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha^\sharp \end{aligned} \tag{2.2}$$
$$\text{tel que } \omega(\alpha^\sharp, \cdot) = \alpha.$$

Remarque 2.13. Comme ω est non dégénérée, on obtient des isomorphismes.

Définition 2.14. Pour $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \Omega^k(M)$, l'opérateur de Hodge symplectique $*_\omega$ est défini sur (M, ω) de la manière suivante :

$$*_\omega : \Omega^k(M) \to \Omega^{2n-k}(M)$$
$$*_\omega \alpha = \iota_{\alpha^{\sharp_\omega}} v_\omega = \iota_{\alpha_1^{\sharp_\omega}} \circ \iota_{\alpha_2^{\sharp_\omega}} \cdots \circ \iota_{\alpha_k^{\sharp_\omega}} v_\omega$$

où $v_\omega = \frac{\omega^n}{n!}$ est la forme volume associée à ω.

Définition 2.15 (Codifférentielle symplectique)**.** Soit une variété symplectique (M, ω), alors l'action de δ^ω, la codifférentielle symplectique, sur une k-forme est donnée par la formule :

$$\delta^\omega = (-1)^{k+1} *_\omega d *_\omega .$$

Remarque 2.16. $\delta^\omega = d^{*_\omega}$ est l'adjointe formelle symplectique de d.

Définition 2.17. Une k-forme α est dite harmonique symplectique si :

$$d\alpha = \delta^{\omega}\alpha = 0.$$

Note. $\mathcal{H}^k_{\omega}(M,\omega)$ est l'espace des formes harmoniques symplectiques sur (M,ω).

Définition 2.18 (Opérateurs de Lefschetz). On définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} L_{\omega} : \Omega^k(M) &\to \Omega^{k+2}(M) \\ \alpha &\mapsto \omega \wedge \alpha \end{aligned}$$

ainsi que son dual,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\omega} : \Omega^{k+2}(M) &\to \Omega^k(M) \\ \alpha &\mapsto i_{(\omega\#)}\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H^k\colon \Omega^k(M) &\to \Omega^k(M) \\ \alpha &\mapsto (n-k)\alpha \end{aligned}$$

où $i_{(\omega\#)}$ est le produit intérieur par le dual symplectique de la 2-forme ω.

Définition 2.19. Une variété symplectique (M,ω) possède la propriété forte de Lefschetz si l'application suivante est un isomorphisme pour tout $k < n$,

$$\begin{aligned} L^{n-k} : H^k(M,\mathbb{R}) &\to H^{2n-k}(M,\mathbb{R}) \\ [\alpha] &\mapsto [\omega^{n-k}] \wedge [\alpha]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Définition 2.20. Une k-forme α est dite primitive, si de manière équivalente, l'une deux conditions suivante est satisfaite :

1. $\Lambda_{\omega}\alpha = 0$,
2. $L^{n-k+1}\alpha = 0$.

Remarque 2.21. On dénote l'espace des k-formes primitives $\mathcal{P}^k(M)$ où $\mathcal{P}^k(M) \subset \Omega^k(M)$.

Définition 2.22 (Structure de Poisson). Soit l'application :

$$\begin{aligned} \phi : C^{\infty}(M) &\to T(M) \\ f &\mapsto X_f \end{aligned} \tag{2.4}$$

où

$$\iota_{X_f}\omega = df.$$

Soit (M, ω) une variété symplectique. Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g est donné par :

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

En d'autres termes, $\{f, g\} = \iota_{X_f}\omega(X_g) = df(X_g) = X_g \cdot f$.

On dit qu'une variété M possède une structure de Poisson, s'il existe un crochet de Poisson sur $C^{\infty}(M)$ qui engendre une structure d'algèbre de Lie.

Lemme 2.23. *Montrons que* $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

Démonstration. En effet,

$$d\{g, f\} = d\omega(X_g, X_f) = d\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega = \iota_{[X_f, X_g]}\omega.$$

Car, $\iota_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega = (d\iota_X + \iota_X d)\iota_Y\omega - \iota_Y(d\iota_X + \iota_X d)\omega) = d\iota_X\iota_Y\omega$. □

Proposition 2.24. *Soit une variété symplectique* (M, ω) *alors, le crochet de Poisson induit une structure d'algèbre de Lie au niveau des fonctions lisses,* $C^{\infty}(M, \omega)$.

Démonstration. Nous devons montrer que :

$$(\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\}) = 0.$$

Par le lemme précédent et la définition, on sait que :

$$\begin{aligned} X_{f_i} \cdot \omega(X_{f_j}, X_{f_k}) &= X_{f_i} \cdot \{f_j, f_k\} = \{\{f_j, f_k\}, f_i\} \\ &= \omega(X_{\{f_j, f_k\}}, X_{f_i}) = \omega(X_{f_i}, [X_{f_j}, X_{f_k}]) \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ et tous différents.

Comme ω est symplectique,

$$\begin{aligned}
0 = d\omega(X_{f_1}, X_{f_2}, X_{f_3}) &= X_{f_1} \cdot \omega(X_{f_2}, X_{f_3}) - X_{f_2} \cdot \omega(X_{f_1}, X_{f_3}) + X_{f_3} \cdot \omega(X_{f_1}, X_{f_2}) \\
&\quad - \omega([X_{f_1}, X_{f_2}], X_{f_3}) + \omega([X_{f_1}, X_{f_3}], X_{f_2}) - \omega([X_{f_2}, X_{f_3}], X_{f_1}) \\
&= \{\{X_{f_2}, X_{f_3}\}X_{f_1}\} - \{\{X_{f_1}, X_{f_3}\}X_{f_2}\} + \{\{X_{f_1}, X_{f_2}\}X_{f_3}\} \\
&\quad + \{\{X_{f_2}, X_{f_3}\}X_{f_1}\} - \{\{X_{f_1}, X_{f_3}\}X_{f_2}\} + \{\{X_{f_2}, X_{f_3}\}X_{f_1}\} \\
&= 2(\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\}).
\end{aligned}$$

□

Note. Les variétés symplectiques sont des cas particuliers des variétés de Poisson, c'est-à-dire des variétés munies d'un crochet de Poisson qui engendre une structure d'algèbre de Lie sur l'espace des fonctions lisses $C^\infty(M)$ et où $\{f, \cdot\}$ est une dérivation suivant la règle de Leibniz.

2.2 Variétés riemanniennes

Court rappel de géométrie riemannienne. Nous en profitons pour citer la décomposition de Hodge.

Théorème 2.25. *Toute variété possède une infinité de métriques riemanniennes.*

Démonstration. Soit $(\mathbb{R}^n, g_0)$ où $g_0(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ la forme bilinéaire symétrique standard sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute variété M, il existe un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ et une partition de l'unité subordonnée ψ_α à cet atlas. Pour conclure, il suffit de prendre $g_c = \sum_\alpha c\psi_\alpha \phi_\alpha^* g_0$ où $c > 0$. □

Définition 2.26 (Opérateur de Hodge riemannien). Sur une variété riemannienne orientée de forme volume v_g, on note $*_g$ l'opérateur de Hodge riemannien défini par,

$$*_g \alpha \wedge \beta = g(\alpha, \beta) v_g.$$

Lemme 2.27. *Sur une variété riemannienne orientée (M, g) de dimension m on définie l'opérateur $*_g$ sur une p-forme :*

$$*_g\alpha = \alpha^{\sharp_g} \lrcorner v_g$$

où v_g est la forme volume définit par $v_g(e_1, e_2, \ldots, e_m) = 1$ pour toute base orientée positive $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$, où les α_i sont des 1-formes. Alors, $\alpha^\sharp = \alpha_1^\sharp \wedge \alpha_2^\sharp \wedge \cdots \wedge \alpha_p^\sharp$

et

$$\alpha^\sharp \lrcorner v_g(X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_m) = v_g(\alpha_1^\sharp, \alpha_2^\sharp, \ldots, \alpha_p^\sharp, X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_m).$$

Définition 2.28. Une k-forme α est harmonique riemanienne si :

$$d\alpha = \delta^g\alpha = 0 \tag{2.6}$$

où $\delta^g = d^{*_g}$ l'adjointe formel de d par rapport à la métrique g.

Note. $\mathcal{H}_g^k(M, g)$ est l'espace des formes harmoniques riemaniennes ou g-harmoniques.

Théorème 2.29 (Décomposition de Hodge). *Soit (M, g) une variété compacte riemannienne alors, pour chaque entier p, $0 \leq p \leq 2n$ $\mathcal{H}_g^p(M, g)$ est de dimension finie et on peut décomposer $\Omega^p(M, g)$ en somme directe :*

$$\begin{aligned} \Omega^p(M, g) &= \Delta_g(\Omega^p(M, g)) \oplus \mathcal{H}_g^p(M, g) \\ &= d\delta(\Omega^p(M, g) \oplus \delta d(\Omega^p(M, g)) \oplus \mathcal{H}_g^p(M, g) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où Δ_g est le Laplacien riemannien et $\mathcal{H}^p(M, g)$ l'espace des p-formes g-harmoniques.

Démonstration. Voir (Warner, 1983) □

Corollaire 2.30 (Isomorphisme Hodge-de Rham). *Soit (M, g) une variété compacte riemannienne. Alors,*

$$H^k(M^n, \mathbb{R}) \cong \mathcal{H}_g^k(M^n, g).$$

Théorème 2.31 (Dualité de Poincaré). *Soit M^n une variété compacte orientée de dimension n. L'application :*

$$*_g : \mathcal{H}^k(M^n, g) \to \mathcal{H}^{n-k}(M^n, g)$$

est un isomorphisme et donc,

$$H^k(M^n, \mathbb{R}) \cong H^{n-k}(M^n, \mathbb{R}).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser que le Laplacien Δ_g et $*_g$ commutent, et l'isomorphisme de Hodge-de Rham $H^k(M^n, \mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(M^n, g)$. □

2.3 Variétés kählériennes et variétés presque-kählériennes

Nous allons introduire les structures kählériennes et presque-kählériennes. Ces dernières seront utiles pour simplifier des calculs, particulièrement dans le cas symplectique. Le théorème 2.34 de cette section est un résultat clé pour la suite des choses.

Définition 2.32. Une variété (M, J, ω, g) est dite presque-kählérienne si elle possède une structure presque complexe J qui est compatible avec la métrique g et la forme symplectique ω.

Définition 2.33. On dit qu'une structure presque complexe J sur une variété symplectique (M, ω) est compatible si J induit une isométrie pour ω et si $\omega(J\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot)$ est une métrique. On dit que g est une métrique riemannienne compatible.

Théorème 2.34. *Toute variété symplectique possède une infinité de métriques riemanniennes compatibles.*

Démonstration. Pour faire la preuve, nous allons démontrer l'existence de structures presque complexes compatibles sur toute variété symplectique.

Soit (M, ω) une variété symplectique et g une métrique quelconque sur M. Comme ω et g sont tous les deux des formes bilinéaires non-dégénérées, définissons un opérateur :

$$A_x : T_xM \to T_xM, \ \omega_x(X_x, Y_x) = g_x(A_xX_x, Y_x).$$

qui est une section non dégénérée de $T^*M \otimes TM$ non dégénérée pour tout x.

Notons que

$$g(AX, Y) = \omega(X, Y) = -\omega(Y, X) = -g(AY, X) = -g(X, AY),$$

c'est-à-dire que A est anti-symétrique par rapport à g. Par la décomposition polaire, nous pouvons donc décomposer A tel que $A = BJ$ où $B = \sqrt{AA^\perp}$ est symétrique et définie positive. J est orthogonale et A et B commutent. Posons $J = B^{-1}A$. Alors, l'adjointe par rapport à g de J, noté $J^\perp$, est égale à :

$$J^\perp = (B^{-1}A)^\perp = (-A)B^{-1} = -B^{-1}A = -J.$$

De plus, il est évident avec le résultat précédent que J est une structure presque complexe comme $JJ^\perp = \mathbb{1}$. Ainsi, la relation suivante $A^\perp = -A$ nous permet de conclure que : $BJ = JB$. En effet, $A^\perp = (BJ)^\perp = -JB$, mais $A^\perp = -A = -BJ$. Ainsi on obtient $BJ = JB$.

Il est facile de vérifier que J est un endomorphisme symplectique. En effet,

$$\begin{aligned} \omega(JX, JY) &= g(AJX, JY) = g(JAX, J, Y) \\ &= g(AX, Y) = \omega(X, Y). \end{aligned} \tag{2.8}$$

De plus, $\omega(X, JX) = g(AX, B^{-1}AX) > 0$, car $B^{-1} > 0$.

Pour conclure, nous devons revenir sur la variété et montrer que la métrique construite est lisse le long de la variété. Pour ce faire, notons que la fonction qui prend $A \mapsto B = \sqrt{AA^\perp}$ est lisse.

En effet, dans le cas présent, il est suffisant de montrer que le $\log(AA^\perp)$ est une application lisse, car $\sqrt{AA^\perp} = e^{\frac{1}{2}\log(AA^\perp)}$. Il est par ailleurs évident que la fonction exponentielle est lisse. La définition de log est donnée par la série suivante :

$$\begin{aligned} \log(\mathbb{1} - X) &= \mathbb{1} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{X^n}{n}, \\ \Longrightarrow \log(X) &= \mathbb{1} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(\mathbb{1} - X)^n}{n}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $AA_x^\perp$ sont toutes non nulles car, $AA_x^\perp$ est inversible. Si on se restreint sur un compact $K \Subset M$ le minimum des normes sur K existe alors on a trouvé un ϵ tel que $\|AA_x^\perp\| > \epsilon$ existe $\forall x \in K$. Ainsi $\sqrt{AA^\perp}$ est une fonction lisse.

La fonction qui à $A \mapsto J$ est lisse. En effet, la métrique compatible est lisse si A est lisse en fonction de $x \in M$, mais comme ω est lisse en fonction de $x \in M$. Donc, $A = BJ = \sqrt{AA^\perp}J$ est lisse. □

Définition 2.35. Une structure kählérienne compatible avec une variété symplectique (M^{2n}, ω) est une structure presque-kählérienne (g, J) compatible, telle que $\nabla^g\omega = 0$ où ∇^g est la connection de Levi-Civita.

Note. À la différence du cas presque-kählérien, la structure complexe J est nécessairement intégrable. Notons qu'il y a des variétés symplectiques qui n'admettent aucune structure kählérienne compatible (voir l'exemple de Thurston au chapitre 4).

Lemme 2.36. *Soit (M, ω, J, g) une variété symplectique avec une structure complexe compatible J. Alors, $*_g = J*_\omega$.*

où l'action de J sur $\bigwedge^k T^*M$ est donné par, $J(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = (J\alpha_1 \wedge \cdots \wedge J\alpha_k)$

Démonstration. Il suffit d'utiliser que la forme ω est compatible c'est-à-dire, $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$. □

Définition 2.37 (tenseur de Nijenhuis)**.** Sur une variété (M, J), on peut considérer le tenseur N_J de type $(1, 2)$, définit par,

$$N_J(X, Y) = \frac{1}{4}([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y])$$

où $X, Y \in T(M)$ et $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie.

Proposition 2.38. *Le tenseur N_J possède les propriétés suivantes :*

1. $N_J(X, JX) = 0, \forall X \in T(M)$;
2. $N_{J_0} = 0$ *sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *où* J_0 *est la structure presque-complexe standard;*

3. $N_J(X,Y) = -N_J(Y,X)$.

Lemme 2.39. *Soit une variété presque-kählérienne (M,ω,J,g) et ∇^g la connexion de Levi-Civita induite par g. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $N_J = 0$;
2. $\nabla^g J = 0$;
3. $\nabla^g \omega = 0$.

Démonstration. (2) $\iff$ (1)

Comme ∇^g est la connexion de Levi-Civita,

$$\nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X = [X,Y]$$

et

$$\nabla^g_X(JY) = (\nabla^g_X J)Y + J\nabla^g_X Y.$$

Le tenseur de Nijenhuis peut alors s'écrire de la façon suivante,

$$N_J(X,Y) = \frac{1}{4}\left((\nabla^g_{JX}J)Y - J(\nabla^g_X J)Y - (\nabla^g_{JY}J)X + J(\nabla^g_Y J)X\right) = 0$$

et si $\nabla^g J = 0$ il est évident que $N_J(X,Y) = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} g(4N_J(X,Y),Z) &= g\left(\left((\nabla^g_{JX}J)Y - J(\nabla^g_X J)Y - (\nabla^g_{JY}J)X + J(\nabla^g_Y J)X\right), Z\right) \\ &= g(J(\nabla^g_Y J)X + (\nabla^g_{JX})Y, Z) - g(J(\nabla^g_X J)Y + (\nabla^g_{JY})X, Z) \\ &= d\omega(JX,Y,Z) + d\omega(X,JY,Z) - 2g((\nabla^g_Z J)X, JY). \end{aligned}$$

Comme M est presque-kahlérienne, $d\omega = 0$. Alors, $N_J = 0$ ssi $\nabla^g J = 0$.

(2) $\iff$ (3)

$\nabla J = 0$ est équivalent à $\nabla\omega = 0$, car $\nabla g = 0$ et que les structures sont compatibles. $\square$

Définition 2.40 (Opérateurs d^c et δ^c). Soit une variété riemannienne (M,g) et J une structure complexe sur M. On définit d^c et δ^c par,

$$d^c = JdJ^{-1} \tag{2.9}$$

$$\delta^c = J\delta^g J^{-1} \tag{2.10}$$

où $\delta^g = d^{*_g}$ est le dual riemanien de d.

Lemme 2.41. *Les opérateurs différentiels suivants agissent sur une k-forme α par,*

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge \nabla_{e_i}\alpha,$$
$$d^c\alpha = \sum_{i=1}^{n} Je_i^* \wedge \nabla_{e_i}\alpha,$$
$$d^{*_g}\alpha = \delta^g\alpha = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lrcorner \nabla_{e_i}\alpha,$$
$$d^{c*_g}\alpha = d^{*_\omega}\alpha = \delta^\omega\alpha = -\sum_{i=1}^{n} \tilde{e_i} \lrcorner \nabla_{e_i}\alpha,$$

où $\omega(e_i, \tilde{e_j}) = \delta_{ij}$ et ∇ est la connection de Lévi-civita.

Démonstration. La démonstration suivante nous sera utile : $\delta^\omega = -\sum_{i=1}^{n} \tilde{e_i} \lrcorner \nabla_{e_i}$.

Soit α une p-forme et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée.

$$\begin{aligned}
\delta^\omega\alpha &= (-1)^{p+1} *_\omega d *_\omega \alpha \\
&= (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{n} *_\omega(e_i^* \wedge \nabla_{e_i}(*_\omega\alpha)) \\
&= (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{n} *_\omega(e_i^* \wedge *_\omega\nabla_{e_i}(\alpha)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \tilde{e_i} \lrcorner \nabla_{e_i}\alpha.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.42. *Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une structure presque-kählérienne compatible (g, J). Alors, $L^{*_g} = (-1)^k *_g L *_g = *_\omega L *_\omega = \Lambda$.*

Démonstration.

$$\langle L\alpha, \beta\rangle = \int \omega \wedge \alpha \wedge *\beta = \int \alpha \wedge \omega \wedge *\beta = \int \alpha \wedge * *^{-1} \wedge \omega * \beta$$
$$= \int \alpha \wedge *(*^{-1} L * \beta) = \langle \alpha, *^{-1} L * \beta\rangle = \langle \alpha, L^* \beta\rangle$$

La deuxème égalité provient des relations suivantes :

$$J* = *J, J\omega = \omega$$

et

$$(-1)^k * L* = J^2 * \omega \wedge * = J * J(\omega \wedge *) = *_\omega(\omega \wedge J*) = *_\omega L *_\omega .$$

□

Remarque 2.43. Il est intéressant de noter que la relation $\Lambda = *_\omega L *_\omega$ est strictement symplectique.

Lemme 2.44. *L'action de Λ sur une k-forme α est donnée par, $\Lambda\alpha = \iota_{\omega^{\sharp_g}} \alpha = L^{*_g}$.*

Démonstration. On suppose que $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ est écrite en coordonnées de Darboux. Comme on a des opérateurs linéaires, il est suffisant de calculer dans les coordonnées $\{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$.

On doit vérifier que l'action de $*^{-1} dp_i \wedge dq_i \wedge * = -\iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}}$. Il est suffisant de montrer que $*^{-1} dp_i \wedge * = \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}$.

Supposons que $\alpha = dp_i \wedge \alpha_I$ alors,

$$*^{-1} dp_i \wedge *dp_i \wedge \alpha_I = *^{-1} dp_i \wedge \alpha_{I^c \setminus \{i\}} = *^{-1} \alpha_{I^c} = \alpha_I = \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} dp_i \wedge \alpha_i.$$

Donc, $*^{-1} dp_i \wedge * = (-1)^{k+1} * dpi \wedge * = \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}$. □

Lemme 2.45. *Soit (M, ω, J, g) une variété presque-kahlérienne et $\alpha_k \in \Omega^k(M)$ alors,*

$$[\Lambda, L]\alpha_k = H^k \alpha_k.$$

En d'autre terme, les opérateurs H, L, Λ induisent une représentation de $sl(2, \mathbb{C})$.

(Voir Annexe B pour plus de détails.)

Démonstration. Par le lemme précédent, nous avons démontré que l'action de $\Lambda = -\sum_i \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}}$. Ainsi, on peut écrire l'opérateur $[\Lambda, L]$ de cette façon :

$$[\Lambda, L] = \sum_i [\iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}, dp_i \wedge dq_i]$$

Prenons $\alpha_k \in \Omega^k(M)$ telle que $\alpha_k = dp_I \wedge dq_I \wedge dp_A \wedge dq_B$ où $A, B, I \subset \{1, \ldots, n\}$ sont des sous-ensembles disjoints et soit $J = \{1, \ldots, n\} \setminus (A \cup B \cup I)$.

Nous obtenons par la définition de α_k que

$$dp_i \wedge dq_i \wedge \alpha_k = 0,$$

si $i \notin J$ et

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \alpha_k = 0,$$

si $i \notin I$.

D'un autre coté, nous avons que si $i \in I$,

$$dp_i \wedge dq_i \circ \iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \alpha_k = \alpha_k, \tag{2.11}$$

et si $i \in J$,

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \circ dp_i \wedge dq_i \wedge \alpha_k = \alpha_k. \tag{2.12}$$

Ainsi, il suffit de faire la somme suivante :

$$\begin{aligned}
[\Lambda, L]\alpha_k &= \sum_i [\iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}, dp_i \wedge dq_i]\alpha_k && (2.13)\\
&= (|J| - |I|)\alpha_k && (2.14)\\
&= (n - k)\alpha_k && (2.15)\\
&= H^k \alpha_k && (2.16)
\end{aligned}$$

car, $|A| + |B| + 2|I| = k$ et $|J| = n - (|A| + |B| + |I|)$. □

Lemme 2.46. *Soient $*_g$ ou $*_\omega$ et A, B des opérateurs agissant sur des k-formes. Alors,*

$$[A, B]^* = [B^*, A^*]$$

où $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ et $* = *_g$ ou $* = *_\omega$.

Démonstration. Soit α et $\beta \in \Omega^k(M)$. Alors,

$$\begin{aligned}\langle [A,B]\alpha,\beta\rangle = \langle (AB-BA)\alpha,\beta\rangle &= \langle AB\alpha,\beta\rangle - \langle BA\alpha,\beta\rangle\\ &= \langle \alpha, B^*A^*\beta\rangle - \langle \alpha, A^*B^*\beta\rangle\\ &= \langle \alpha,[B^*,A^*]\beta\rangle\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. □

Théorème 2.47 (Action de δ^ω sur une variété presque-kählérienne.). *Soit (M,ω,J,g) une variété presque-kählérienne. Alors $\delta^\omega = -[\Lambda, d]$ sur M.*

Démonstration. En effet, prenons une k-forme α et montrons que $[\delta^\omega, L] = d$:

$$\begin{aligned}[\delta^\omega, L]\alpha &= \delta^\omega(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\delta^\omega\alpha\\ &= \sum_{i=1}^n (-\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\omega\wedge\alpha) + \omega\wedge(\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha)\\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner(\omega\wedge\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha) + \omega\wedge\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha\\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\omega\wedge\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha - \omega\wedge\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha + \omega\wedge\frac{\partial}{\partial q_i}\lrcorner\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha\\ &= \sum_{i=1}^n dp_i\wedge\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}}\alpha\\ &= d\alpha,\end{aligned}$$

en prenant le dual, on obtient le résultat. □

Lemme 2.48. *Soit (M,ω,J,g) une variété presque-kählérienne. (M,ω,J,g) possède les relations suivantes :*

$$\begin{array}{lll}[d,\Lambda] = -\delta^\omega & [d,L]=0 & [d,H]=d\\ [\delta^\omega, L] = d & [\delta^\omega,\Lambda]=0 & [\delta^\omega,H] = -\delta^\omega\\ [d\delta^\omega, L]=0 & [d\delta^\omega,\Lambda]=0 & [d\delta^\omega,H]=0.\end{array}$$

Démonstration. Lorsque l'opérateur H est dans le commutateur, le résultat est trivial comme il s'agit d'une multiplication par une constante.

Le résultat suivant,

$$[d, L] = [\delta^\omega, \Lambda] = 0$$

s'obtient car, ω est une forme fermée. $[\delta^\omega, \Lambda] = 0$ est obtenu en prenant le dual symplectique de la première égalité.

Finalement démontrons que,

$$[d\delta^\omega, \Lambda] = [d\delta^\omega, L] = 0.$$

En effet, le résultat est direct :

$$[d\delta^\omega, \Lambda] = [d[d, \Lambda], \Lambda] \tag{2.17}$$

$$= [d(d\Lambda - \Lambda d), \Lambda] \tag{2.18}$$

$$= [-d\Lambda d, \Lambda] \tag{2.19}$$

$$= -d\Lambda d\Lambda + d\Lambda d\Lambda = 0. \tag{2.20}$$

Passant par le dual on obtient la deuxième équation.

L'équation suivante $[d, \Lambda] = \delta^\omega$ est une définition et en passant au dual on obtient,

$$[\delta^\omega, L] = d.$$

□

Corollaire 2.49. *À partir de la définition précédente de δ^ω on déduit,*

$$d\delta^\omega + \delta^\omega d = 0.$$

Démonstration. On a déjà démontrer que $\delta^\omega = [\Lambda, d]$ alors,

$$[\Lambda, d]d + d[\Lambda, d] = -d\Lambda d + d\Lambda d = 0.$$

□

Acceptons sans démonstration le résultat suivant : Voir l'article (Mathieu, 1995)

Théorème 2.50 (Mathieu). *Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La variété (M, ω) possède la propriété forte de Lefschetz*
2. *Le morphisme de complexe $(\Omega^*(M), \delta^\omega) \to (\Omega^*(M)/d\Omega^*(M), \delta^\omega)$ induit un isomorphime au niveau des cohomologies induites par ces complexes.*
3. *Toute classe dans la cohomologie de de Rham possède un représentant harmonique symplectique.*

Théorème 2.51 (Merkulov). *Soit (M, ω) une variété symplectique ayant la propriété forte de Lefschetz. Alors, d et $\delta^\omega \colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ possèdent la propriété suivante :* $\operatorname{im} d\delta^\omega = \operatorname{im} d \cap \ker \delta^\omega = \operatorname{im} \delta^\omega \cap \ker d$.

Démonstration. Par le deuxième point du lemme précédent, on peut conclure que :

$$\operatorname{im} d \cap \ker \delta^\omega = \operatorname{im} d \cap \operatorname{im} \delta^\omega = \operatorname{im} \delta^\omega \cap \ker d.$$

On va démontrer que $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$ telle que $\alpha = d\gamma = \delta^\omega \beta$ où $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ et $\gamma \in \Omega^{k-1}(M)$, il existe $\tau \in \Omega^k(M)$ telle que $\alpha = d\delta^\omega \tau$. Le résultat est vrai pour des $2n$-formes, en effet, $\alpha_{2n} = \delta^\omega \beta_{2n+1}$ or $\beta_{2n+1} \in \Omega^{2n+1} = \{0\}$ donc, $\alpha = 0$.

Montrons que l'on a aussi le résultat vrai pour une $(2n-1)$-forme. Soit $\beta_{2n} \in \Omega^{2n}$, alors $d\beta_{2n} = 0$. Donc, par le théorème précédent, on sait qu'il y a un représentant harmonique : $\beta_{2n} = \beta_{2n}^H + d\tau_{2n-1}$. Comme β_{2n}^H est harmonique symplectique on obtient $\delta^\omega \beta_{2n}^H = 0$ et donc, $\alpha_{2n-1} = d\delta^\omega(-\tau_{2n-1})$.

Supposons le résultat vrai pour des $(k+2)$-formes et montrons que l'on obtient le résultat pour des k-formes. Soit $\alpha_k \in \Omega^k(M)$, telle que $\alpha_k = d\gamma_{k-1} = \delta^\omega \beta_{k+1}$. Posons $\alpha_{k+2} := d\beta_{k+1} \in \ker \delta^\omega$. Par le théorème 2.50, 2, $\alpha_{k+2} = \delta^\omega \gamma_{k+3}$.

Comme α_{k+2} est une $(k+2)$-forme qui satisfait l'hypothèse de récurrence, il existe

$\nu_{k+2} \in \Omega^{k+2}(M)$ telle que :

$$\alpha_{k+2} = d\delta^\omega \nu_{k+2}, \tag{2.21}$$

de plus,

$$d(\beta_{k+1} - \delta^\omega \nu_{k+2}) = 0. \tag{2.22}$$

Et comme tout représentant à une partie harmonique par le théorème de Mathieu, on sait que :

$$\beta_{k+1} = \beta_{k+1}^H + d\tau_k + \delta^\omega \nu_{k+2}, \tag{2.23}$$

$$\alpha_k = \delta^\omega \beta_{k+1} = \delta^\omega(\beta_{k+1}^H + d\tau_k + \delta^\omega \nu_{k+2}) = \delta^\omega d\tau_k. \tag{2.24}$$

Ainsi on obtient $\alpha_k = d\delta^\omega(-\tau_k)$, car β_{k+1}^H est harmonique symplectique. □

Définition 2.52 (Décomposition de Lefschetz). On dit que $\alpha \in \Omega^k(M)$ possède une décomposition de Lefschetz s'il existe des formes primitives β_j telles que :

$$\alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r \beta_{k-2r} \tag{2.25}$$

où $\beta_j \in \mathcal{P}^j(M)$.

Les formes primitives peuvent alors se calculer en fonction de la forme décomposée :

$$\alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r \bar{\alpha}_{k-2r} \tag{2.26}$$

où les $\bar{\alpha}_{k-2r} \in \mathcal{P}^{k-2r}$

$$\bar{\alpha}_{k-2r} = (\sum_{m=0} a_{r,m} \frac{1}{m!} L^m \Lambda^{m+r})\alpha, \tag{2.27}$$

et les $a_{r,m} \in \mathbb{Q}$.

Lemme 2.53 (Action de d, δ^ω et $d\delta^\omega$). *Soit une k-forme $\alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r \beta_{k-2r}$ et $\beta_j \in \mathcal{P}^j(M)$.*

$$d\alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r d\beta_{k-2r} \tag{2.28}$$

$$\delta^\omega \alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r (d\beta_{k-2r-2} + \delta^\omega \beta_{k-2r}) \tag{2.29}$$

$$d\delta^\omega \alpha = \sum \frac{1}{r!} L^r d\delta^\omega \beta_{k-2r} \tag{2.30}$$

Démonstration. L'équation (2.28) s'obtient en utilisant que ω est fermée. L'équation (2.29) s'obtient en utilisant que $[\delta^\omega, L] = d \implies \delta^\omega L = d + L\delta^\omega$ et l'équation (2.30) est une conséquence de : $[d\delta^\omega, L] = 0$. □

Lemme 2.54. *Soient $\beta_k, \hat{\beta}_k, \bar{\beta}_k \in \mathcal{P}^k(M)$, $k \leq n$. Alors, l'action des trois opérateurs différentiels est donnée par :*

$$d\beta_k = \hat{\beta}_{k+1} + L\bar{\beta}_{k-1}$$

si $k < n$.

$$d\beta_k = L\bar{\beta}_{k-1}$$

si $k = n$.

Dans tous les cas,

$$\delta^\omega \beta_k = -H\bar{\beta}_{k-1},$$
$$d\delta^\omega \beta_k = -(H+1)d\bar{\beta}_{k-1}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\Lambda^2 d\beta_k = 0$. En effet,

$$-\Lambda^2 d\beta_k = \Lambda\delta^\omega\beta = \delta^\omega\Lambda\beta_k = 0.$$

Car $[d, \Lambda] = \delta^\omega$. □

Proposition 2.55. *Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$ une k-forme possèdant une décomposition de Lefschetz et $\bar{\alpha}_{k-2r} \in \mathcal{P}^{k-2r}(M)$ les formes primitives correspondantes à sa décompositions de Lefschetz alors,*

$$d\delta^\omega \alpha = 0 \Leftrightarrow d\delta^\omega \bar{\alpha}_{k-2r} = 0 \ \forall\ r,$$
$$d\delta^\omega \alpha = \beta \Leftrightarrow d\delta^\omega \bar{\alpha}_{k-2r} = \bar{\beta}_{k-2r} \ \forall\ r,$$
$$d\alpha = \delta^\omega \alpha = 0 \Leftrightarrow d\bar{\alpha}_{k-2r} = 0 \ \forall\ r.$$

Démonstration. Les deux premières équivalences sont des conséquences des identités :

$$[d\delta^\omega, \Lambda] = [d\delta^\omega, L] = 0. \tag{2.31}$$

□

Proposition 2.56. *Sur toute variété presque-kählérienne on obtient les identités suivantes :*

1. $\delta d^c + d^c\delta = 0$;
2. $\delta^\omega d + d\delta^\omega = 0$.

Démonstration. On a démontré que :

$$[\Lambda, d^c] = \delta \tag{2.32}$$

$$[\Lambda, d] = -\delta^\omega \tag{2.33}$$

ce qui nous permet de conclure que :

$$\delta d^c = [\Lambda, d^c]d^c = -d^c\Lambda d^c; \tag{2.34}$$

$$d^c\delta = d^c[\Lambda, d^c] = d^c\Lambda d^c; \tag{2.35}$$

$$\delta^\omega d = [d, \Lambda]d \quad = d\Lambda d; \tag{2.36}$$

$$d\delta^\omega = d[d, \Lambda] \quad = -d\Lambda d, \tag{2.37}$$

ce qui donne le résultat. □

Définition 2.57 (Décomposition des formes complexes en bidegrée). Considérons l'espace suivant $\bigwedge^1(M) \otimes \mathbb{C} \cong T^*(M) \otimes \mathbb{C}$. Par des résultats précédents sur les espaces vectoriels, on sait qu'il existe une structure presque complexe que l'on note J qui agit sur $T^*(M)$ par :

$$J\alpha(X) = -\alpha(JX).$$

Alors, il existe $\bigwedge^{1,0}(M)$ et $\bigwedge^{0,1}(M)$ qui sont les espaces propres qui correspondent aux valeurs propres $-i$ et i de J. Ces deux espaces donnent la décompositions :

$$\overset{1}{\bigwedge}(M) \otimes \mathbb{C} = \overset{1,0}{\bigwedge}(M) \oplus \overset{0,1}{\bigwedge}(M).$$

Définissons

$$\bigwedge^{p,0}(M) = \wedge^p(\bigwedge^{1,0}(M)) = \wedge^p T^*_{1,0}(M)$$

et

$$\bigwedge^{0,q}(M) = \wedge^q \bigwedge^{0,1}(M) = \wedge^q T^*_{0,1}(M).$$

Alors,

$$\bigwedge^{p,q}(M) = \wedge^p T^*_{1,0}(M) \wedge^q T^*_{0,1}(M).$$

Donc,

$$\bigwedge^{r}(M) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{r=p+q} \bigwedge^{p,q}(M).$$

Définition 2.58. Soit (M, ω, g, J) une variété presque-kählérienne . On peut décomposer $\Omega^r(M) \otimes \mathbb{C} = \sum\limits_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$. On définit $\pi_{p,q} : \Omega^r(M) \otimes \mathbb{C} \to \Omega^{p,q}(M)$ la projection canonique. Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ sont définis sur une (p,q)-forme de la manière suivante :

$$\partial = \pi_{p+1,q} \circ d;$$

$$\bar{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d.$$

Définition 2.59. Soit (M, ω, g, J) une variété kählérienne. Définissons les opérateurs suivants :

$$\square, \bar{\square}$$

$$\square = \partial\partial^* + \partial^*\partial \tag{2.38}$$

$$\bar{\square} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \tag{2.39}$$

où ∂^* et $\bar{\partial}^*$ sont les adjointes formelles de ∂ et $\bar{\partial}$ respectivement par rapport au produit hermitien L_2 induit par le produit suivant : $\langle \alpha, \beta \rangle = \int\limits_M H(\alpha, \beta) \frac{\omega^n}{n!}$ où H est un produit hermitien.

Si J est intégrable, $d = \pi_{p+1,q} \circ d + \pi_{p,q+1} \circ d = \partial + \bar{\partial}$.

Théorème 2.60. *Soit (M, ω, g, J) une variété kählérienne, alors,* *1.*

$$[L, d] = 0,\ [L^*, \delta] = 0,$$
$$[L, \delta] = d^c,\ [L^*, d] = -\delta^\omega.$$

2. Alors Δ_g commute avec $*$, d et L. De plus,

$$\Delta_g = 2\square_g = 2\bar{\square}_g.$$

Démonstration. Voir (Wells, 2008). □

Note. Le résultat précédent nous permet de conclure que $\square_g$ et $\bar{\square}_g$ sont des opérateurs réels.

Théorème 2.61 (Lefschetz). *Toute variété kählérienne compacte possède la propriété de Lefschetz forte. (Voir définition 2.19)*

Démonstration. Comme $\square$ est un opérateur réel pour les variétés kahlériennes alors, $\Delta = 2\square$ préserve le type des k-formes. De plus, $[\Delta, L] = 0$. Donc les formes harmoniques sont envoyées sur des formes harmoniques par l'opérateur L. Dans l'annexe B, sur la représentation $sl(2, \mathbb{C})$, on montre que les formes sont décomposées en formes primitives. Ainsi,

$$\mathcal{H}^r(M, g) = \sum_s L^s P\mathcal{H}^{r-2s}(M, g).$$

□

Corollaire 2.62. *1. L'opérateur L induit un isomorphisme au niveau des cohomologies.*

$$L^{n-p} : H^p(M, g) \cong H^{2n-p}(M, g);$$

2. Les nombres de Betti impairs d'une variété compacte kählérienne connexe sont tous pairs.

Démonstration. Comme l'opérateur $\bar{\Box}$ est un opérateur réel, c'est-à-dire $\bar{\Box} = \Box$. On obtient que $H^{p,q} = \bar{H^{q,p}} = H^{q,p}$. De plus, l'opérateur $\Box$ préserve le type des formes. Donc,

$$H_g^r(M) = \sum_{p+q=r} H_g^{p,q}(M) = \sum_{p+q=r} H_g^{q,p}(M).$$

En particulier, si r est impair :

$$\begin{aligned} H_g^r(M) &= \bigoplus_{p+q=r} H_g^{p,q}(M) \\ &= \bigoplus_{p<q \text{ et } p+q=r} H_g^{p,q}(M) \bigoplus_{q<p \text{ et } p+q=r} H_g^{q,p}(M). \\ &= \bigoplus_{p<q \text{ et } p+q=r} H_g^{p,q}(M) \oplus H_g^{p,q}(M). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.63 (Lejmi). *Soit (M^{2n}, ω, J, g) une variété compacte presque-kählérienne qui possède la condition forte de Lefschetz. Si α est une 1-forme δ^g-exacte et d^c-fermée, alors $\alpha = d^c f$ pour une fonction f.*

Démonstration. Soit $\beta = J\alpha$ et $\alpha = \delta^g \phi$ ou ϕ est une 2-forme. De plus, posons

$$\psi(\cdot,\cdot) = \phi(J\cdot, J\cdot).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \delta^\omega \psi(\cdot,\cdot)) &= J\delta^g J^{-1}\psi \\ &= J\delta^g (J^{-1})^2 \phi \\ &= -J\delta^g \phi \\ &= -J\alpha = -\beta. \end{aligned}$$

On en déduit que β est δ^ω-exact car α est d^c-fermée, nous allons voir que β est fermée :

$$\begin{aligned}
& d^c\alpha = 0 \\
\iff & JdJ^{-1}\alpha = 0 \\
\implies & -JdJ^{-1}J^2\alpha = 0 \\
\implies & -JdJ\alpha = 0 \\
\implies & -Jd\beta = 0 \\
\implies & d\beta = 0.
\end{aligned}$$

Par la proposition 2.51 on sait que β est dans $\operatorname{im} d\delta^\omega$ et donc, $\beta = d\delta^\omega\gamma$ où γ est une 1-forme. Cela nous permet de conclure que $\alpha = -d^c\delta^\omega\gamma$, car $Jdf = JdJ^{-1}f$ si f est une fonction et dans notre cas $\delta^\omega\gamma = J\delta J^{-1}\gamma = \delta J^{-1}\gamma$, car $\delta J^{-1}\gamma$ est une fonction. □

Lemme 2.64. *Si (M, g) est compacte, riemannienne , orientée et X est un champs de Killing alors,*

$$(\phi_X^t)^* : H^k(M, g) \to H^k(M, g)$$

est l'identité .

Démonstration. (Voir Gauduchon p. 59) □

Corollaire 2.65. *Si (M, g, ω) est une variété presque Kählérienne et X un champs de Killing pour g alors, $\mathcal{L}_X\omega = 0$.*

Démonstration. (Voir Gauduchon p. 59) □

Proposition 2.66 (Lejmi, McDuff). *Soit X un champ de vecteur de Killing c'est-à-dire $\mathcal{L}_X g = 0$ sur une variété compacte presque-kählérienne (M, ω, J, g) satisfaisant la propriété de Lefschetz forte. Alors, X a des zéros $\iff$ X est hamiltonien.*

Démonstration. Soit X un champ de Killing sur (M, ω, J, g), soit $\alpha = X^{\flat_g}$ le dual riemanien du champ X et $v_g = \frac{\omega^n}{n!}$ une forme volume. On a une décomposition de Hodge de $\alpha = \alpha_H + \delta^g\phi$.

Comme $\mathcal{L}_X g = 0 \implies \mathcal{L}_X \alpha_H = 0$, mais on a aussi que $\mathcal{L}_X \alpha_H = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d\alpha_H = d \circ \iota_X \alpha_H = d\alpha(X)$ donc, $\alpha(X)$ est constant. Alors, on peut conclure que $\langle \alpha, \alpha_H \rangle = \langle \alpha_H, \alpha_H \rangle = \int \alpha_H \wedge *\alpha \frac{\omega^n}{n!} = \int g(\alpha^\sharp, \alpha_H^\sharp) \frac{\omega^n}{n!} = \int g((X^\flat)^\sharp, \alpha_H) \frac{\omega^n}{n!} = \int \alpha_H(X) v_g = 0$, car X admet des zéros et $\alpha_H(X)$ est constant. Ce qui nous donne : $\alpha_H = 0$. Donc, $\alpha = \delta^g \phi$. En d'autre terme, α est δ^g-exact.

Remarquons que comme X est de Killing :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \omega &= d\iota_X \omega \\
&= d\omega(X, \cdot) \\
&= dg(X, J\cdot) \\
&= -dJ\alpha.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Lejmi, $\beta = \iota_X \omega = d\delta^c \xi$, donc $dJ\alpha = 0$ et donc X est un champs hamiltonien. $\square$

CHAPITRE III

COHOMOLOGIE SYMPLECTIQUE

Nous utiliserons les notations des sections précédentes. Pour simplifier, lorsqu'une seule forme symplectique est sous-entendue, les opérateurs L_ω et Λ_ω seront notés par L et Λ respectivement.

3.1 Cohomologie symplectique d'après Tseng-Yau

Nous allons commencer à définir des cohomologies qui sont différentes de la cohomologie de de Rham $H^k_{dR}(M)$ en utilisant des opérateurs différentiels que l'on a définis précédement. Rappelons que :

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\ker d \cap \Omega^k(M)}{\operatorname{im} d \cap \Omega^k(M)}$$

De manière analogue, définissons une cohomologie à partir de l'opérateur δ^ω

Définition 3.1 (cohomologie symplectique).

$$H^k_{\delta^\omega}(M) = \frac{\ker \delta^\omega \cap \Omega^k(M)}{\operatorname{im} \delta^\omega \cap \Omega^k(M)}.$$

Cette cohomologie est bien définie, car $\delta^\omega \circ \delta^\omega = 0$. Elle est appelée la cohomologie symplectique.

Posons aussi :

$$H^k_{d+\delta^\omega}(M) = \frac{\ker d + \delta^\omega \cap \Omega^k(M)}{\operatorname{im} d\delta^\omega \cap \Omega^k(M)}$$

et

$$H^k_{d\delta^\omega}(M) = \frac{\ker d\delta^\omega \cap \Omega^k(M)}{(\operatorname{im} d + \operatorname{im} \delta^\omega) \cap \Omega^k(M)}.$$

Pour les mêmes raisons que pour la cohomologie symplectique, ces deux cohomologies sont bien définies, car $d\delta^\omega = -\delta^\omega d$.

Théorème 3.2. *$*_\omega$ est un isomorphisme de $H^k_{dR}(M)$ à $H^{2n-k}_{\delta^\omega}(M)$*

Démonstration. En utilisant la définition

$$\delta^\omega = (-1)^k *_\omega d *_\omega,$$

le résultat découle facilement.

Soit α_k une k-forme d-exacte et α'_{k-1} une $k-1$-forme tel que $\alpha_k = d\alpha_{k-1}$. Ainsi $*_\omega \alpha_k = *_\omega d\alpha'_{k-1} = *_\omega d *_\omega^2 \alpha_k = (-1)^k \delta^\omega \alpha'_{k-1} = \delta^\omega (-1)^k \alpha'_{k-1}$ □

Définition 3.3. Nous allons introduire les opérateurs elliptiques liés à la cohomologie de De Rham et à la cohomologie symplectique :

$$\Delta_d = d^* d + dd^*,$$
$$\Delta_{\delta^\omega} = \delta^{\omega *}\delta^\omega + \delta^\omega \delta^{\omega *}.$$

Pour plus de détails, voir l'annexe A.

Proposition 3.4. *Δ_{δ^ω} est un opérateur elliptique.*

Soit $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \bar\theta_1, \bar\theta_2, \ldots, \bar\theta_n\}$ une base de l'espace cotangent tel que $g = \sum \theta_i \otimes \bar\theta_i + \bar\theta_i \otimes \theta_i$

Comme les symboles sont définis à partir des opérateurs de degré maximal, sachant que

$$[\nabla, J] = N_J,$$

on peut utiliser les identités de Kähler pour le calcul de symboles. En d'autres termes, pour calculer les symboles, on peut supposer que $N_J(X,Y) = 0$. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d &\simeq \partial + \bar\partial \\ d^c &\simeq -i(\partial - \bar\partial) \\ \Longrightarrow \delta^\omega &\simeq i(\partial^* - \bar\partial^*) \end{aligned}$$

où $\simeq$ est l'égalité de symboles.

On peut donc calculer Δ_{δ^ω}. En effet,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\delta^\omega} &= (\delta^\omega)^*\delta^\omega + \delta^\omega(\delta^\omega)^* \\
&\simeq -(\partial^* - \bar{\partial}^*)^*(\partial^* - \bar{\partial}^*) - (\partial^* - \bar{\partial}^*)(\partial^* - \bar{\partial}^*)^* \\
&\simeq (\partial - \bar{\partial})(\partial^* - \bar{\partial}^*) + (\partial^* - \bar{\partial}^*)(\partial - \bar{\partial}) \qquad (3.1) \\
&\simeq \partial\partial^* + \partial^*\partial + \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \\
&\simeq \Delta_d
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que Δ_{δ^ω} est elliptique.

Théorème 3.5 (Décomposition symplectique de Hodge). *Soit (M, ω, J, g) une variété symplectique compacte avec une métrique riemannienne compatible. Alors, il existe une décompo-sition de l'espace des k-formes en fonction de la cohomologie symplectique :*

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_{\delta^\omega}(M) \oplus \delta^\omega\Omega^{k+1}(M) \oplus \delta^{\omega *}\Omega^{k-1}(M).$$

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle de la décomposition de Hodge standard. □

3.1.1 $d + \delta^\omega$-Cohomologie et $d\delta^\omega$-cohomologie

Considérons les complexes exactes suivants :

$$\Omega^k(M) \xrightarrow{d\delta^\omega} \Omega^k(M) \xrightarrow{d+\delta^\omega} \Omega^{k+1}(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \qquad (3.2)$$

$$\Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{\delta^\omega} \Omega^k(M) \xrightarrow{d\delta^\omega} \Omega^k(M) \qquad (3.3)$$

$$\Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d\delta^\omega} \Omega^k(M) \qquad (3.4)$$

Remarque 3.6. Les formes $d\delta^\omega$-exactes sont d-fermées et δ^ω-fermées, donc $(d + \delta^\omega)$-fermées.

Définition 3.7. Définissons les cohomologies suivante $d+\delta^\omega$-cohomologie et $d\delta^\omega$-cohomologie à partir des complexes précédents.

$$H^k_{(d+\delta^\omega)}(M,\omega) = \frac{\ker(d+\delta^\omega)\cap\Omega^k(M,\omega)}{\operatorname{im} d\delta^\omega \cap \Omega^k(M,\omega)} \tag{3.5}$$

$$H^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) = \frac{\ker d\delta^\omega \cap \Omega^k(M,\omega)}{\operatorname{im} d + \operatorname{im}\delta^\omega \cap \Omega^k(M,\omega)} \tag{3.6}$$

Remarque 3.8. On vient de définir des cohomologies qui ne dépendent que de la structure symplectique, d'où la notation.

Définition 3.9. Les Laplaciens associés à ces cohomologies respectivement sont donnés par :

$$\Delta_{d+\delta^\omega} = d\delta^\omega(d\delta^\omega)^{*_g} + \lambda(d^{*_g}d + \delta^{\omega *_g}\delta^\omega) \tag{3.7}$$

$$\Delta_{d\delta^\omega} = (d\delta^\omega)^{*_g}(d\delta^\omega) + \lambda(dd^{*_g} + \delta^\omega\delta^{\omega *_g}) \tag{3.8}$$

où λ est une constante strictement positive.

On appelle une forme α $(d+\delta^\omega)$-harmonique (respectivement $d\delta^\omega$-harmonique) si, $\Delta_{d+\delta^\omega}\alpha = 0$ (respectivement $\Delta_{d\delta^\omega}\alpha = 0$).

Lemme 3.10. *Caractérisation des formes $(d+\delta^\omega)$-harmoniques et $d\delta^\omega$-harmoniques.*

1. $\Delta_{d+\delta^\omega}\alpha = 0$ *ssi* $d\alpha = \delta^\omega\alpha = (d\delta^\omega)^{*_g}\alpha = 0$;
2. $\Delta_{d\delta^\omega}\alpha = 0$ *ssi* $d^{*_g}\alpha = \delta^{\omega *_g}\alpha = (d\delta^\omega)\alpha = 0$.

Remarque 3.11. L'espace des k-formes $(d+\delta^\omega)$-harmoniques est représenté par $\mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega)$. Les k-formes $d\delta^\omega$-harmoniques sont désignées par $\mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega)$.

Les cohomologies définies ont une décomposition similaire à la décomposition de Hodge comme les deux théorèmes suivants le démontre :

Théorème 3.12. *Soit (M,ω,J,g) une variété presque-kählérienne compacte. Alors, nous avons les résultats suivants sur la $(d+\delta^\omega)$-cohomologie.*

1. $\mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M)$ *est de dimension finie ;*
2. $\Omega^k(M,\omega) = \mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega) \oplus d\delta^\omega\Omega^k(M,\omega) \oplus (d^{*_g}\Omega^{k+1} + \delta^{\omega *_g}\Omega^{k-1})$;

3. $\mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega) \cong H^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega)$.

Théorème 3.13. *Soit* (M, ω, J, g) *une variété presque-kählérienne compacte. Alors, nous avons le résultat analogue pour la* $d\delta^\omega$*-cohomologie.*

1. $\mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M)$ *est de dimension fini ;*

2. $\Omega^k(M,\omega) = \mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) \oplus (d\delta^\omega)^{*_g}\Omega^k(M,\omega) \oplus (d\Omega^{k-1} + \delta^\omega\Omega^{k+1})$;

3. $\mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) \cong H^k_{d\delta^\omega}(M,\omega)$.

Lemme 3.14. *Les laplaciens possèdent les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} &[\Delta_{d+\delta^\omega}, H] = 0, && [\Delta_{d\delta^\omega}, H] = 0, \\ &[\Delta_{d+\delta^\omega}, L_\omega] = 0, && [\Delta_{d\delta^\omega}, L_\omega] = 0, \\ &[\Delta_{d+\delta^\omega}, \Lambda_\omega] = 0, && [\Delta_{d\delta^\omega}, \Lambda_\omega] = 0. \end{aligned}$$

Corollaire 3.15. *Soit* (M^{2n}, ω, J, g) *une variété symplectique compcte avec une structure presque-kählérienne compatible. Alors, l'opérateur de Lefschetz induit un isomorphisme au niveau des formes* $(d+\delta^\omega)$*-harmoniques et* $d\delta^\omega$*-harmoniques et donc au niveau des* $(d+\delta^\omega)$*-cohomologies et* $d\delta^\omega$*-cohomologies :*

$$L^{n-k} : \mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega) \cong \mathcal{H}^{2n-k}_{d+\delta^\omega}(M,\omega) \tag{3.9}$$

$$L^{n-k} : \mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) \cong \mathcal{H}^{2n-k}_{d\delta^\omega}(M,\omega) \tag{3.10}$$

sont des isomorphismes.

Théorème 3.16. *Soit* (M, ω) *une variété compacte qui possède la propriété forte de Lefschetz ou, de manière équivalente, le* $d\delta^\omega$*-lemme voir théorème 2.51, si et seulement si les homomorphismes canoniques,*

$$\Phi_{d+\delta^\omega} : H^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega) \to H^k_d(M,g)$$

et

$$\Phi_{d\delta^\omega} : H^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) \to H^k_d(M,g)$$

sont des isomorphismes pour chaque k.

Corollaire 3.17. *Sur une variété compacte qui possède la propriété forte de Lefschetz, ou de manière équivalente le $d\delta^\omega$-lemme, on a :*

$$dim\ H_d^k(M) = dim\ H_{d+\delta}^k(M), \tag{3.11}$$

$$dim\ H_d^k(M) = dim\ H_{d\delta}^k(M). \tag{3.12}$$

Proposition 3.18. *Les laplaciens des cohomologies $H_{d+\delta^\omega}(M,\omega)$ et $H_{d\delta^\omega}(M,\omega)$ sont reliés par la relation suivante :*

$$*\Delta_{d+\delta^\omega} = \Delta_{d\delta^\omega} *$$

Corollaire 3.19. *Sur une variété symplectique compacte (M,ω), les $(d\delta^\omega)$-cohomogies et $(d+\delta^\omega)$-cohomogies sont conjugées c'est-à-dire,*

$$* : H_{d\delta^\omega}^k(M) \to H_{d+\delta^\omega}^{2n-k}(M)$$
$$\alpha \mapsto *\alpha$$

est un isomorphisme. Plus particulièrement,

$$dim\ H_{d\delta^\omega}^k(M) = dim\ H_{d+\delta}^{2n-k}(M).$$

3.1.2 $(d \cap \delta^\omega)$-Cohomologie

Définissons la ($d \cap \delta^\omega$)-cohomologie. Elle est en quelque sorte une combinaison des deux précédentes. Elle possèede essentiellement les mêmes propriétés.

Notons $\bar{\Omega}^k(M)$ l'espace des formes $d\delta^\omega$-fermées. Alors, on peut vérifier que les lignes suivantes sont exactes,

$$\bar{\Omega}^{k+1}(M) \xrightarrow{\delta^\omega} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M),$$
$$\bar{\Omega}^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{\delta^\omega} \Omega^{k-1}(M),$$
$$\bar{\Omega}^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M),$$
$$\bar{\Omega}^{k+1}(M) \xrightarrow{\delta^\omega} \Omega^k(M) \xrightarrow{\delta^\omega} \Omega^{k-1}(M).$$

On peut donc regarder la cohomologie suivante,

$$H^k_{d\cap\delta^\omega}(M) = \frac{\ker(d+\delta^\omega)\cap\Omega(M)}{d\Omega^{k-1}(M)+\delta^\omega\Omega^{k+1}(M)}.$$

Définition 3.20 (Forme $d\cap\delta^\omega$-harmonique)**.** Une k-forme α est dite $d\cap\delta^\omega$-harmonique si

$$\begin{aligned} d\alpha &= \delta^\omega\alpha = 0, \\ d^*\alpha &= \delta^{\omega *}\alpha = 0. \end{aligned}$$

Définition 3.21 (Laplacien de la $d\cap\delta^\omega$-Cohomologie)**.**

$$\begin{aligned} \Delta_{d\cap\delta^\omega} &= \Delta_d + \Delta_{\delta^\omega} \\ &= dd^* + d^*d + \delta^\omega\delta^{\omega *} + \delta^{\omega *}\delta^\omega. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Corollaire 3.22. *Une k-forme est $d\cap\delta^\omega$-harmonique ssi $\Delta_{d\cap\delta^\omega}\alpha = 0$.*

Remarque 3.23. Les k-formes $d\cap\delta^\omega$-harmoniques sont dénotées par $\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$.

Lemme 3.24. $\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega) = \mathcal{H}^k_d(M,\omega)\cap\mathcal{H}^k_{\delta^\omega}(M,\omega) = \mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega)\cap\mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega)$.

Démonstration. Soit $\alpha\in\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$, par la definition de $\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$, on sait que $\Delta_d\alpha = \Delta_{\delta^\omega}\alpha = 0$. l'inverse est tout aussi direct. (Pour le restant, voir lemme 3.10.) □

Corollaire 3.25. *Soit (M,ω,J,g) une variété presque-kählérienne compacte. Alors,*

1. *$\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$ est de dimension finie ;*
2. *$L^{n-k} : \mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega) \to \mathcal{H}^{2n-k}_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. D'une part, on a déjà montré que $\mathcal{H}^k_d(M,\omega)$ et $\mathcal{H}^k_{\delta^\omega}(M,\omega)$ sont tous deux de dimension finie. D'autre part,

$$\begin{aligned} L^{n-k} &: \mathcal{H}^k_d(M,\omega) \to \mathcal{H}^{2n-k}_d(M,\omega) \\ L^{n-k} &: \mathcal{H}^k_{\delta^\omega}(M,\omega) \to \mathcal{H}^{2n-k}_{\delta^\omega}(M,\omega) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes et donc, en particulier, sur l'intersection ils le seront encore. □

3.1.3 Cohomologie primitive

Définition 3.26 (Cohomologie primitive). Considérons les cohomologies $H^k_{d+\delta^\omega}(M)$, $H^k_{d\delta^\omega}(M)$ et $H^k_{d\cap\delta^\omega}(M)$. Alors, les cohomologies primitives respective sont données par,

$$PH^k_{d+\delta^\omega} = \frac{\ker d \cap P^k(M,\omega)}{\operatorname{im} d\delta^\omega \cap P^k(M,\omega)}, \tag{3.14}$$

$$PH^k_{d\delta^\omega} = \frac{\ker d\delta^\omega \cap P^k(M,\omega)}{\operatorname{im} d + \operatorname{im} \delta^\omega \cap P^k(M,\omega)}, \tag{3.15}$$

$$PH^k_{d\cap\delta^\omega} = \frac{\operatorname{im} d \cap P^k(M,\omega)}{\operatorname{im} d + \operatorname{im} \delta^\omega \cap P^k(M,\omega)}, \tag{3.16}$$

où $PH^k_{d\cap\delta^\omega} = PH^k_{d+\delta^\omega} \cap PH^k_{d\delta^\omega}$.

Théorème 3.27 (Décomposition primitive symplectique.). *Soit (M^{2n},ω) une variété symplectique compacte. Ses cohomologies primitives possèdent la propriété suivante : Il existe une décomposition de Lefschetz pour les cohomologies primitives,*

1. $\mathcal{H}^k_{d+\delta^\omega}(M,\omega) = \bigoplus_r L^r P\mathcal{H}^{k-2r}_{d+\delta^\omega}(M,\omega)$;
2. $\mathcal{H}^k_{d\delta^\omega}(M,\omega) = \bigoplus_r L^r P\mathcal{H}^{k-2r}_{d\delta^\omega}(M,\omega)$;
3. $\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega) = \bigoplus_r L^r P\mathcal{H}^{k-2r}_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega)$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle d'une variété satisfaisant la condition de forte de Lefschetz. □

Corollaire 3.28. *Les $(d \cap \delta^\omega)$-cohomologies des variétés kahlériennes compacte sont toutes isomorphes aux d-cohomologies de même dimension.*

Remarque 3.29. Les cohomologies précédemment définies peuvent être utilisées afin de déterminer si une variété ne possède aucune de structure kählérienne. De plus, $\mathcal{H}^k_{d\cap\delta^\omega}(M,\omega) \cong \mathcal{H}^k_d(M,\omega)$ est équivalent à avoir la condition forte de Lefschetz sur une variété symplectique compacte.

CHAPITRE IV

DÉCOMPOSITION DES COHOMOLOGIES PRIMITIVES

Les cohomologies primitives définie au chapitre précédent peuvent se décomposer plus finement. La décomposition que nous allons présenter est similaire à la décomposition de Hodge des formes en fonction de leur bidegré. Pour ce faire, nous commençons par étudier plus en détail l'action de l'opérateur d sur l'espace des formes primitives.

4.1 Décomposition des formes en terme de $\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$

Sur des formes primitives, l'action de l'opérateur différentiel d est relativement simple à décrire. Soit une k-forme primitive α_k, à partir du lemme 2.54 nous avons que :

$$d\alpha_k = \bar{\alpha}_{k+1} + \omega \wedge \hat{\alpha}_{k-1}.$$

où

$$\bar{\alpha}_{k+1} \text{ et } \hat{\alpha}_{k-1}$$

sont des formes primitives de degré $k+1$ et $k-1$ respectivement, donc

$$d : \mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^{k+1} \oplus \omega \wedge \mathcal{P}^{k-1}. \tag{4.1}$$

D'un autre coté, l'action de d sur une forme $\alpha = \omega \wedge \beta$ est donnée par :

$$d(\omega \wedge \beta) = d\omega \wedge \beta + \omega \wedge d\beta = \omega \wedge d\beta. \tag{4.2}$$

Si β est une forme primitive, on aura une décomposition de la forme $d\beta = \bar{\beta}_{k+1} + \omega\wedge\hat{\beta}_{k-1}$ ce qui implique que $d(\omega\wedge\beta) = \omega\wedge\bar{\beta}_{k+1} + \omega^2\wedge\hat{\beta}_{k-1}$. Les résultats précédents nous incitent à définir l'espace suivant :

$$\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega) = \{\omega^r \wedge \beta_s | \beta_s \in \mathcal{P}^s(M,\omega)\}$$

.

Remarque 4.1. Le degré d'une forme $\alpha \in \mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$ est de degré $2r + s$. De plus, $\mathcal{P}^s(M,\omega) = \mathcal{L}^{0,s}(M,\omega)$.

Définition 4.2 (L'opérateur R agissant sur $\mathcal{L}^{r,s}(M)$). On définit l'action de R sur $l^{r,s} \in \mathcal{L}^{r,s}$ comme suit :

$$Rl^{r,s} = rl^{r,s}.$$

Définition 4.3 (Les opérateurs ∂_+, ∂_-). Avec ce que l'on a fait précédemment, on peut définir implicitement les opérateurs $\partial_\pm$ de la manière suivante :

$$d : \mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^{k+1} \oplus \omega \wedge \mathcal{P}^{k-1}$$
$$\beta_k \mapsto \partial_+\beta_k + \omega \wedge \partial_-\beta_k.$$

Remarque 4.4. De manière plus concise, sur les formes primitives, l'opérateur $d = \partial_+ + \omega \wedge \partial_-$ et donc, d défini une application de $\mathcal{L}^{r,s}$ vers $\mathcal{L}^{r,s+1} \oplus \mathcal{L}^{r+1,s-1}$.

Proposition 4.5 (Action de $\partial_\pm$ sur $\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$).

$$\partial_\pm : \mathcal{L}^{r,s}(M,\omega) \to \mathcal{L}^{r,s\pm1}(M,\omega)$$
$$\partial_+ L^r \beta_k = L^r \bar{\beta}_{k+1}$$
$$\partial_- L^r \beta_k = L^r \bar{\beta}_{k-1}$$

où

$$dL^r\beta_k = L^r d\beta_k = L^r \partial_+\beta_k + \omega \wedge \partial_-\beta_k = L^r\bar{\beta}_{k+1} + L^{r+1}\bar{\beta}_{k-1}.$$

Proposition 4.6. *Soit (M,ω) une variété symplectique. Les opérateurs ∂_+ et ∂_- satisfont les propriétés suivantes :*

1. $(\partial_\pm)^2 = 0$;
2. $(\partial_+\partial_- + \partial_-\partial_+) = 0$;

3. $[\partial_+, L] = 0$;

4. $[L\partial_-, L] = 0$.

Démonstration. Sur des formes primitives, on a $d = \partial_+ + L\partial_-$, donc :

$$d^2 = \partial_+^2 + L(\partial_+\partial_- + \partial_-\partial_+) + L^2\partial_-^2$$

et comme $d^2 : \mathcal{L}^{r,s} \to \mathcal{L}^{r,s+2} \oplus \mathcal{L}^{r+1,s} \oplus \mathcal{L}^{r+2,s-2}$, la proposition est démontrée sachant que $d^2 = 0$.

On sait $[d, L] = 0$ ce qui implique que sur une forme primitive, $[\partial_+ + L\partial_-, L] = 0$. Donc, $[\partial_+, L] + [L\partial_-, L] = 0$. □

4.2 Deux nouvelles cohomologies $PH_{\partial_\pm}(M, \omega)$.

Pour alléger les notations, nous allons poser $\mathcal{L}^{r,s} := \mathcal{L}^{r,s}(M, \omega)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Lemme 4.7 (Le complexe $\partial_\pm$). *Définissions deux nouveaux complexes à partir des opérateurs ∂_+ et ∂_- :*

$$\mathcal{L}^{r,0} \xrightarrow{\partial_+} \mathcal{L}^{r,1} \xrightarrow{\partial_+} \dots \xrightarrow{\partial_+} \mathcal{L}^{r,n-r-1} \xrightarrow{\partial_+} \mathcal{L}^{r,n-r}, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}^{r,0} \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{L}^{r,1} \xleftarrow{\partial_-} \dots \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{L}^{r,n-r-1} \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{L}^{r,n-r}. \tag{4.4}$$

Comme on a déjà vu que $\partial_\pm^2 = 0$, alors ces complexes sont exacts. De plus, lorsque $r = 0$ on a l'égalité suivante : $\mathcal{L}^{0,s} = \mathcal{P}^s$. On obtient ainsi les complexes suivants :

$$\mathcal{P}^0 \xrightarrow{\partial_+} \mathcal{P}^1 \xrightarrow{\partial_+} \dots \xrightarrow{\partial_+} \mathcal{P}^{n-1} \xrightarrow{\partial_+}, \mathcal{P}^n, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{P}^0 \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{P}^1 \xleftarrow{\partial_-} \dots \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{P}^{n-1} \xleftarrow{\partial_-} \mathcal{P}^n. \tag{4.6}$$

À partir de ces complexes exacts, il est possible de définir des cohomologies sur l'espace $\mathcal{L}^{r,s}(M, \omega)$.

Définition 4.8. Soit les complexes de chaîne du lemme 4.3. Définissons deux cohomologies induites par ces complexes :

$$H^{r,s}_{\partial_\pm}(M,\omega) = \frac{\ker \partial_\pm \cap \mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)}{\operatorname{im} \partial_\pm \mathcal{L}^{r,s\mp 1}}. \tag{4.7}$$

Proposition 4.9. *De plus, comme L commute avec $\partial_\pm$ pour r assez petit on a que :*

$$H^{r,s}_{\partial_\pm}(M,\omega) \simeq H^{0,s}_{\partial_\pm}(M,\omega). \tag{4.8}$$

Définition 4.10 ($PH^s_{\partial_\pm}$)**.** Soit (M,ω) une variété symplectique. Définissons une nouvelle cohomologie primitive de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H^{0,s}_{\partial_\pm}(M,\omega) &= \frac{\ker \partial_\pm \cap \mathcal{L}^{0,s}}{\operatorname{im} \partial_\pm \mathcal{L}^{0,s\mp 1}} \\ &= \frac{\ker \partial_\pm \cap \mathcal{P}^{s}}{\operatorname{im} \partial_\pm \mathcal{P}^{s\mp 1}} \\ &= PH^s_{\partial_\pm}(M,\omega). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Définition 4.11 ($\partial^{*g}_\pm$)**.** Soit (M,J,g,ω) une variété symplectique avec une structure presque complexe compatible. On peut définir l'adjointe riemannienne $\partial^{*g}_\pm$ de $\partial_\pm$ à partir du produit suivant :

$$(\beta^1,\beta^2) = \int_M g(\beta^1,\beta^2)v_g.$$

Définition 4.12 (Formes $\partial_\pm$-harmoniques)**.** On dit d'une k-forme primitive β_k qu'elle est $\partial_\pm$-harmonique si :

$$\partial_\pm \beta_k = 0 \quad \text{et} \quad \partial^{*g}_\pm \beta = 0.$$

Remarque 4.13. On note les k-formes $\partial_\pm$-harmonique par $P\mathcal{H}^k_{\partial_\pm}(M)$.

Définition 4.14 ($\Delta_{\partial_\pm}$)**.** Le lapacien associé à ces formes est donné par l'équation suivante :

$$\Delta_{\partial_\pm} = \partial_\pm \partial^{*g}_\pm + \partial^{*g}_\pm \partial_\pm. \tag{4.10}$$

Proposition 4.15. *Les k-formes $\partial_\pm$-harmoniques sont les formes dans le noyau de l'opérateur $\Delta_{\partial_\pm}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}(\beta^1, \Delta_{\partial_\pm}\beta^1) &= \int g(\beta^1, \Delta_{\partial_\pm}\beta^1)v_g \\ &= \int g(\beta^1, \partial_\pm\partial_\pm^{*g} + \partial_\pm^{*g}\partial_\pm\beta^1)v_g \\ &= \int g(\beta^1, \partial_\pm\partial_\pm^{*g}\beta^1)v_g + \int g(\beta^1, \partial_\pm^{*g}\partial_\pm\beta^1)v_g \\ &= \|\partial_\pm\beta^1\|^2 + \|\partial_\pm^*\beta^1\|^2.\end{aligned}$$

Donc, $(\beta^1, \Delta_{\partial_\pm}\beta^1) = 0$ ssi $\partial_\pm\beta^1 = 0$ et $\partial_\pm^*\beta^1 = 0$. □

Remarque 4.16. Nous avons fait cette preuve qu'une seule fois, car la démonstration est similaire quelque soit le laplacien que l'on a défini.

Théorème 4.17. *Soit (M, ω, J, g) une variété symplectique compacte et (g, J) une structure compatible. Alors $\forall k < n$,*

1. *dim $\mathcal{PH}^k_{\partial_\pm}(M)$ est finie ;*
2. *Il existe un isomorphisme canonique tel que : $\mathcal{PH}^k_{\partial_\pm} \cong PH^k_{\partial_\pm}$;*
3. *$\mathcal{P}^k = \mathcal{PH}^k_{\partial_\pm} \oplus \partial_\pm\mathcal{P}^{k\pm1} \oplus \partial_\pm^{*g}\mathcal{P}^{k\mp1}$.*

Démonstration. La preuve est sensiblement la même que pour le théorème de Hodge. □

Proposition 4.18 (Action des opérateurs $\partial_\pm$ et $\partial_+\partial_-$ sur les formes primitives). *Soit une variété symplectique (M, ω) et l'espace des s-formes primitives $\mathcal{P}^s(M)$ sur M. Alors,*

$$\partial_- = H^{-1}\Lambda d = H^{-1}\delta^\omega, \tag{4.11}$$

$$\partial_+ = d - LH^{-1}\Lambda d, \tag{4.12}$$

$$\partial_+\partial_- = (H+1)d\Lambda d. \tag{4.13}$$

Lemme 4.19. *Soit (M,ω) une variété symplectique, alors les opérateurs ∂_+ et ∂_- agissent sur $\mathcal{L}^{r,s}$ de la manière suivante :*

$$\partial_+ = \frac{1}{H+2R+1}((H+R+1)d + L\delta^\omega), \tag{4.14}$$

$$\partial_- = \frac{-1}{H+2R+1}(\delta^\omega - \frac{1}{H+R}\Lambda d). \tag{4.15}$$

Proposition 4.20. *Sur les variétés symplectiques (M,ω) on a les relations suivantes :*

$$L\Lambda = (H+R+1)R, \tag{4.16}$$

$$\Lambda L = (H+R)(R+1). \tag{4.17}$$

Corollaire 4.21 (Action de δ^ω sur $\mathcal{L}^{r,s}$). *L'action de δ^ω sur $\mathcal{L}^{r,s}$ est donnée par les opérateur $\partial_\pm$ de la manière suivante :*

$$\delta^\omega = \frac{1}{H+R}\Lambda\partial_+ - (H+R)\partial_-. \tag{4.18}$$

Démonstration. On a déjà démontré que $\delta^\omega = [d,\Lambda]$ sur une k-forme α. On sait aussi que sur $\mathcal{L}^{r,s}$, l'action de l'opérateur d est donnée par : $d\frac{L^r}{r!}\beta = \frac{L^r}{r!}d\beta$ et $d = \partial_+ + L\partial_-$ sur les formes primitives. Avec le lemme précédent, on peut conclure avec de simples calculs. □

Corollaire 4.22. *L'action de $d\delta^\omega : \mathcal{L}^{r,s}(M) \to \mathcal{L}^{r,s}(M)$ est donnée par,*

$$d\delta^\omega = -(H+2R+1)\partial_+\partial_-.$$

Démonstration. On a déjà défini

$$d : \mathcal{L}^{r,s}(M) \to \mathcal{L}^{r,s}(M),$$

ainsi que

$$\delta^\omega : \mathcal{L}^{r,s}(M) \to \mathcal{L}^{r,s}(M).$$

En combinant les deux équations on obtient,

$$\begin{aligned} d\delta^\omega &= (\partial_+ + L\partial_-)(\frac{1}{H+R}\Lambda\partial_+ - (H+R)\partial_-) \\ &= -\partial_+(H+R)\partial_- + \partial_- L\frac{1}{H+R}\Lambda\partial_+ \\ &= -\partial_+(H+R)\partial_- + \partial_- R\partial_+ \\ &= -(H+2R+1)\partial_+\partial_-. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.23. *Soit (M,ω) une variété symplectique compacte. Alors,* $\forall 0 \leq k < n$ $P\mathcal{H}^k_{\partial_+} \cong P\mathcal{H}^k_{\partial_-}$.

Définition 4.24 ($\partial_+\partial_-$-lemme)**.** Soit une variété symplectique (M,ω) et une k-forme $\beta \in P^k(M)$ telle que $d\beta = 0$. Alors, on dit que (M,ω) possède le $\partial_+\partial_-$-lemme si les conditions suivantes sont équivalentes.

1. β est ∂_+-exact ;
2. β est ∂_--exact pour $k < n$;
3. β est $\partial_+\partial_-$-exact.

Remarque 4.25. Il s'agit d'une condition équivalente à la condition forte de Lefschetz, par contre, dans ce cas, on exige la condition au niveau des formes primitives.

Proposition 4.26 (Action de $\partial_\pm^{*\omega}$ sur des formes dans $\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$)**.** *Soit $\partial_\pm^{*\omega}$ agissant sur $\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$. Alors l'action de $\partial_\pm^{*\omega}$ peut se décrire en terme de $\partial_\pm$:*

$$\partial_+^{*\omega} = \frac{1}{H+R}\Lambda\partial_+, \tag{4.19}$$

$$(L\partial_-)^{*\omega} = -(H+R)\partial_-. \tag{4.20}$$

Démonstration. Comme $\delta^{*\omega} = \delta^\omega$ et que $d = \partial_+ + L\partial_-$ sur des formes primitives, alors $d^{*\omega} = (\partial_+ + L\partial_-)^{*\omega}$. On sait par le corollaire 4.21 que $d^{*\omega} = \frac{1}{H+R}\Lambda\partial_+ - (H+R)\partial_-$. Il suffit de regarder le degré de chaque opérateur pour conclure. □

Proposition 4.27 (Action de $\partial_{\pm}^{*g}$ sur des formes dans $\mathcal{L}^{r,s}(M,\omega)$.). *Soit une variété symplectique (M,ω) et g une métrique compatible avec ω. Alors, on peut définir les opérateurs ∂_{+}^{*g} et ∂_{-}^{*g} :*

$$\partial_{+}^{*g} = (d^{*g}(H+R+1) + (\delta^{*\omega})^{*g}\Lambda)\frac{1}{H+2R+1}, \tag{4.21}$$

$$\partial_{-}^{*g} = -\left((\delta^{*\omega})^{*g} - d^{*g}L\frac{1}{H+R}\right)\frac{1}{H+2R+1}. \tag{4.22}$$

Proposition 4.28 (Complexe elliptique associé aux complexes $\partial_{\pm}$). *Le complexe suivant est elliptique :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\partial_+"] & \mathcal{P}^0 \arrow[r, "\partial_+"] & \mathcal{P}^1 \arrow[r, "\partial_+"] & \dots \arrow[r, "\partial_+"] & \mathcal{P}^{n-1} \arrow[r, "\partial_+"] & \mathcal{P}^n \arrow[d, "\partial_+\partial_-"] \\
0 & \mathcal{P}^0 \arrow[l, "\partial_-"'] & \mathcal{P}^1 \arrow[l, "\partial_-"'] & \dots \arrow[l, "\partial_-"'] & \mathcal{P}^{n-1} \arrow[l, "\partial_-"'] & \mathcal{P}^n \arrow[l, "\partial_-"']
\end{tikzcd}$$

Note. Nous acceptons sans démonstration le résultat précédent. Voir les travaux (Tseng et Yau, 2010)

Proposition 4.29. *Soit (M,ω) une variété symplectique compacte. Alors, lorsque $k = 0, 1$, nous avons les égalités suivantes.*

$$PH^k_{\partial_+}(M) = H^k_d(M),\ PH^k_{\partial_-}(M) = H^k_{\delta^\omega}(M).$$

Démonstration. Par la proposition 4.18, les formes ∂_--fermées et δ^ω-fermées sont les mêmes et il en est de même pour le cas des formes exactes. Donc, le résultat pour $PH^k_{\partial_-}(M) = H^k_{\delta^\omega}(M)$ est démontré pour $k = 0$, car $\Omega^k(M) = \mathcal{P}^k(M)$ pour $k = 0, 1$. Pour l'autre cohomologie, il est facile de vérifier que $\partial_+ = d$ sur des fonctions. Alors, le résultat est trivial dans le cas $k = 0$.

Pour $PH^1_{\partial_+}(M)$, montrons que toute forme ∂_+-fermée est d-fermée.

Soit β une 1-forme primitive ∂_+-fermée. Alors, $d\beta = 0 + \omega \wedge \beta_0$, mais $d^2 = 0$ ce qui implique que $d(\omega \wedge \beta_0) = \omega \wedge d\beta_0 = 0$. Comme β_0 est une fonction, on peut dire qu'il s'agit de la fonction constante nulle, sinon ω serait exacte et donc, ω serait un représentant de la classe trivial dans la cohomologie de De Rham.

Et finalement, pour le cas $PH^1_{\partial_-}(M)$ prenons $\beta_1 = \delta^\omega \alpha$ où $\alpha \in \Omega^2(M)$ et $\beta_1 \in \Omega^1(M)$:

$$\delta^\omega \alpha = \delta^\omega(\beta_2 + \omega \wedge \beta_0) \tag{4.23}$$

$$= -H\partial_- \beta_2 + d\beta_0. \tag{4.24}$$

Il suffit de montrer que $d\beta_0$ est ∂_--exacte pour conclure. En effet, on peut supposer que $\int_M \beta_0 = 0$. Donc β_0 est δ^ω-exact comme β_0 est δ^ω-fermée, $\beta_0 = \delta^\omega \beta_1'$ pour $\beta_1' \in \mathcal{P}^1(M)$ et donc $\beta_1 = \partial_-\left(-(n-1)\beta_2 + n\partial_+\beta_1'\right)$. □

Théorème 4.30. *Soit (M, ω) une variété symplectique possèdant le $\partial_+\partial_-$-lemme. Alors, pour $2 \leq k < n$,*

$$PH^k_{\partial_+}(M) = H^k_{dR}(M) \cap \mathcal{P}^k(M), \ PH^k_{\partial_-}(M) = H^k_{\delta^\omega}(M) \cap \mathcal{P}^k(M).$$

Démonstration. Démontrons que $PH^k_{\partial_+}(M) = H^k_{dR} \cap \mathcal{P}^k(M)$. Soit β_k une k-forme ∂_+-fermée. Donc, $d\beta_k = L\beta^1_{k-1}$. Aussi, $d^2 = 0$ ce qui implique que β^1_{k-1} est d-fermée alors, $d\beta^1_{k-1} = 0$. Par l'action de d sur des formes primitives, on sait que $\beta^1_{k-1} = \partial_- \beta_k$. Par le $\partial_+\partial_-$lemme, il existe une $k-1$ forme primitive $\bar{\beta}_{k-1}$ telle que $\beta^1_{k-1} = \partial_+\partial_-\bar{\beta}^1_{k-1}$. Pour conclure, prenons un représentant de la classe trivial : $\beta_k + \partial_+\bar{\beta}_{k_1} \in [0] \in PH^k_{dR}(M)$ et montrons qu'il est d-fermé.

$$d(\beta_k + \partial_+\bar{\beta}_{k-1}) = L\beta^1_{k-1} + L\partial_-\partial_+\bar{\beta}_{k-1} = L(\beta^1_{k-1} + \partial_-\partial_+\bar{\beta}^1_{k-1}) = 0.$$

Soit $\beta_k = \partial_+\beta_{k-1}$ alors β_k est d-fermée et ∂_+-exacte. Alors, par le $\partial_+\partial_-$-lemme, $\beta_k = d\delta^\omega \bar{\beta}_k$ où $\bar{\beta}_k \in \mathcal{P}^k(M)$.

Démontrons que $PH^k_{\partial_-}(M) = H^k_{\delta^\omega}(M) \cap \mathcal{P}^k(M)$. Par des résultats précédent, nous n'avons qu'à montrer qu'une forme δ^ω-exacte implique qu'elle est ∂_-- exacte.

Soit $\beta_k \in \mathcal{P}^k(M)$ telle que $\delta^\omega \bar{\beta}_{k+1} = \beta_k$ et donc β_k est δ^ω-fermée. Alors, il y a deux cas possibles :

1. $d\beta_k = 0$. Alors, par le $\partial_+\partial_-$-lemme on obtient $\beta_k = \partial_-(\partial_+\bar{\beta}_k)$;
2. $d\beta_k = \beta^1_{k+1}$. Alors, $d\beta^1_{k+1} = 0$ et donc, par le même lemme, $\beta^1_{k+1} = \partial_+\partial_-\beta^0_{k+1}$.

On peut créer une forme d-fermée :

$$d(\beta_k - \partial_-\beta^0_{k+1}) = 0.$$

Encore une fois, par le $\partial_+\partial_-$-lemme,

$$\beta_k - \partial_-\beta^0_{k+1} = \partial_-(\partial_+\alpha_k)$$

et donc,

$$\beta_k = \partial_-(\beta^0_{k+1} + \partial_+\alpha_k)$$

où β_k est ∂_--exacte ce qui complète la preuve.

□

4.3 Exemples.

Pour les exemples suivants nous avons besoin de faire un rappel de la théorie des algèbres de Lie nilpotentes. Voir (Humphreys, 1972), (Fino et Grantcharov, 2003) et (Wells, 2008) pour plus de détails.

Définition 4.31 (Algèbre de Lie nilpotente). Une algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{n}^p = \{0\}$ où $\mathfrak{n}^{(k+1)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(k)}]$, $k = 1, 2, \ldots$

Proposition 4.32 (Engel, Lie). *Soit $\mathfrak{n} \subset gl(V)$ une algèbre de Lie nilpotente. Alors, il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V telle que tout $A \in \mathfrak{n}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieur.*

Théorème 4.33 (Ado-Iwasawa). *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente. Alors, il existe une représentation $\psi : \mathfrak{n} \to gl(V)$ et un groupe N est connexe et simplement connexe tel que $exp : \mathfrak{n} \simeq N \subset GL(V)$.*

Théorème 4.34 (Lie). *Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe G (à isomorphisme près) tel que $Lie(G) = \mathfrak{g}$.*

Théorème 4.35 (Malcev). *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente et N sont groupe de Lie connexe et simplement connexe. Alors, il existe un sous groupe discret $\Gamma \subset N$ tel que N/Γ soit compacte et existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathfrak{n}$ telle que $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k$, où $c_{ij}^k \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 4.36 (Grantcharov-Fino). *Soit $M = G/\Gamma$ une variété compacte, où G est un groupe de Lie simplement connexe et connexe, et Γ un sous groupe discret. Supposons, en plus, que Γ est unimodulaire c'est-à-dire qu'il existe une forme volume ad-invariant v_0 sur $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Alors, l'application $P : \Omega^k(M) \to \bigwedge^k(\mathfrak{g}^*)$*

$$\alpha \mapsto \bar{\alpha}(B_1, \dots, B_k) := \int_{m \in M} \alpha_m(B_{1|_m}, \dots, B_{k|_m}) v_0$$

définie un isomorphisme entre $H^k_{dR}(M)$ et $H^k(\mathfrak{g}^*)$ où

la cohomologie d'algèbre de Lie $H^k(\mathfrak{g}^*)$ est définie à partir de l'opérateur d :

$$H^k(\mathfrak{g}^*) = \frac{\ker d}{\operatorname{im} d}$$

où

$$d : \bigwedge^k \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{k+1} \mathfrak{g}^*$$

$$d\alpha(X_0 \dots, X_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_o, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n).$$

Plus particulièrement, $P(d\alpha) = dP(\alpha)$.

Démonstration. Prenons des champs de vecteurs $\{X_0, \dots, X_n\}$ invariants à gauche sur G et une forme différentielle sur M ; nous allons confondre $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ avec les champs de vecteurs projetés sur $M = G/\Gamma$. Alors,

$$d(P(\alpha))(X_0, \ldots, X_n) := \sum_{i<j} (-1)^{i+j} P\alpha([X_i, X_j], X_o, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n)$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_M \alpha([X_i, X_j], X_o, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n) v_0$$

$$= \int_M (d\alpha)(X_0, \ldots, X_n) v_0 - \int_M \sum_i (-1)^i X_j \alpha(X_o, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n) v_0$$

$$= \int_M (d\alpha)(X_0, \ldots, X_n) v_0$$

car v_0 est ad-invariante et donc, $\int_M X \cdot f v_0 = \mathcal{L}_X \int_M f v_0 = 0$ pour tout champs de vecteur invariant à gauche sur M.

Remarque 4.37. La démonstration montre que P commute avec tout opérateur sur $\Omega^*(M)$ qui est invariant à gauche par rapport à G. Notons que $\bigwedge^*(g^*) \subset \Omega^*(M)$ est identifié avec les formes invariantes à gauche par rapport à l'action de G. Ainsi, $\delta^\omega P(\alpha) = P(\delta^\omega \alpha)$ et $\partial_\pm P\alpha = P(\partial_\pm \alpha)$ car, les opérateur précédents sur G sont invariant par multiplication à gauche.

□

4.3.1 4-variétés symplectiques non-kählériennes.

Les variétés symplectiques ne sont pas toutes des variétés kählériennes. En effet, Thurston a donné la description d'une variété symplectique ne possédant aucune structure kählérienne (Salamon et McDuff, 1995). Pour se faire, définissons, le groupe d'Heisenberg :

$$Nil^3 = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) | A = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ où } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

le groupe nilpotent simplement connexe associé à l'algèbre de Lie

$$nil^3 = \text{span}\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \right\},$$

(voir Théorème 4.34).

Soit $M = S^1 \times (Nil^3/\Gamma)$ où $\Gamma = Gl(3,\mathbb{Z}) \cap Nil^3$ est le réseau de matrices à coefficients entiers dans Nil^3. Il est facile de voir que le quotient Nil^3/Γ est compact (voir Théorème 4.35). Alors, les 1-formes suivantes sont invariantes à gauche $dt, dx, dy, dz - xdy$ sur le groupe de Lie $S^1 \times Nil^3$. On peut aussi construire une forme symplectique sur $S^1 \times Nil^3$ invariante à gauche :

$$\omega = (dx \wedge (dz - xdy) - dy \wedge dt), \tag{4.25}$$

$$Jdx = dz - xdy, Jdy = dt, \tag{4.26}$$

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dt \otimes dt + (dz - xdy) \otimes (dz - xdy). \tag{4.27}$$

On peut donc définir une forme symplectique ω sur (M, J) en passant au quotient. Posons $v_0 := v_g = v_\omega$ cette forme volume est ad-invariante (vérification directe).

Par la proposition 2.63, on sait que si la variété était kählérienne, où plus généralement si elle satisfaisait la propriété forte de Lefshetz, alors toute 1-forme α qui est δ^g et d^c-fermée sur M s'écrit $\alpha = d^c f$. Montrons qu'il existe une 1-forme qui ne satisfait pas cette condition. En effet, prenons $\alpha = dt$,

$$\delta^g dt = \delta^g(Jdy) = \delta^\omega dy = (d\Lambda - \Lambda d)dy = 0.$$

De plus,

$$d^c\alpha = Jddy = 0.$$

Or, il n'existe pas une telle fonction f avec $dx = d^c f$, car dx n'est jamais nulle sur M (car dx est une forme invariante à gauche sur $S^1 \times Nil^3$).

Donc, cette variété ne possède aucune structure kählérienne.

Note. Pour la variété $M = (S^1 \times Nil^3/\Gamma, \omega)$ il est aussi possible de démontrer que le premier nombre de Betti est 3. En effet, par le théorème 4.36 de Grantcharov-Fino, $H^1_{dR}(Nil^3/\Gamma) \simeq H^1(nil^3)$. En fait, si $e^1 = dx, e^2 = dy, e^3 = dz$ alors, $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ est une forme volume que l'on peut montrer ad-invariante sur nil^3.

Il en résulte,

$$H^1_{dR}(S^1 \times Nil^3/\Gamma) = H^1_{dR}(S^1) \otimes H^0(nil^3) \oplus H^1(nil^3) \otimes H^0_{dR}(S^1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3.$$

En effet, $H^1(nil^3) = \left\{\alpha \in \bigwedge^1(nil^3) | \alpha([x,y]) = 0, \forall x, y \in nil^3\right\}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} nil^3 &= \left\{A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ telle que } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{span}\left\{e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Il est facile de calculer à partir des générateurs que $e^2([e_1, e_3]) = 1$.

Alors,

$$H^1(nil^3) = \text{span}\left\{e^1, e^3\right\} \cong \mathbb{R}^2.$$

Donc, le nombre de Betti de degré 1 est 3 et la variété n'est pas kählérienne par la décomposition de Hodge (corollaire 2.62).

4.3.2 Variétés symplectiques de dimension supérieure ne possèdant pas la propriété forte de Lefschetz.

L'exemple suivant est tiré des travaux de Tseng et Yau. Soit $\mathfrak{n} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \ldots, e_6\}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = -e_4, \ [e_2, e_3] &&= -e_6, \\ &[e_1, e_4] = -e_5, \ [e_2, e_4] &&= -e_6, \\ &[e_1, e_5] = -e_6. \end{aligned} \tag{4.28}$$

De manière équivalent la base duale $\left\{e^1, \ldots, e^6\right\}$ de $\mathfrak{g}^*$ est définie à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} &de^1 = 0, \ \ de^4 = e^1 \wedge e^2, \\ &de^2 = 0, \ \ de^5 = e^1 \wedge e^4, \\ &de^3 = 0, \ \ de^6 = e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^5. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Soit N^6 le groupe de Lie simplement connexe et connexe qui correspond à $\mathfrak{n}$ par le théorème 4.34.

Une forme symplectique invariante à gauche sur N^6 est donnée par :

$$\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4$$

avec une structure presque complexe compatible :

$$J(e_1) = e_6, J(e_2) = e_5, J(e_3) = -e_4$$

et une métrique riemannienne :

$$g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4 + e^5 \otimes e^5 + e^6 \otimes e^6.$$

Par le théorème 4.35 , il existe une variété compacte $M^6 = N^6/\Gamma$ qui est munie d'une structure presque-kählérienne (ω, g, J).

Nous allons démontrer que cette variété ne possède pas le $\partial_-\partial_+$-lemme. On peut vérifier que la forme volume $v_g = \omega^3/3!$ est bi-invariante.

Nous procédons par l'absurde. Nous allons utiliser l'application de moyenne P donnée dans le théorème 4.36 (voir remarque 4.37).

Prenons $e^1 \wedge e^2 = \partial_+ e^4 = \partial_-(e^4 \wedge e^1 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^2 \wedge e^5)$. Selon le $\partial_+\partial_-$-lemme, il devrait exister une 2-forme β telle que $\partial_+\partial_-\beta = e^1 \wedge e^2$. Pour simplifier les calculs, rappelons que le $\partial_+\partial_-$-lemme est équivalent au $d\delta^\omega$-lemme (voir remarque 4.25).

Nous allons démontrer que $e^1 \wedge e^2$ n'est pas $d\delta^\omega$-exact. Comme $e^1 \wedge e^2$ est invariant à gauche, en utilisant l'opérateur P défini au théorème 4.36 et par la remarque 4.37 nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que β est invariante à gauche. Alors, $\beta = \sum_{ij}(f_{ij}) e^i \wedge e^j$ où f_{ij} sont des constantes. Nous calculons à partir de (4.29),

$$d\delta^\omega \beta = d[d, \Lambda]\beta = d\Lambda d\beta = d\left(\sum_{i=1}^{6} a_i e^i\right)$$

où les a_i sont des constantes calculables à partir de :

$$\Lambda d\beta = \sum_{ij}(f_{ij})\Lambda d(e^i \wedge e^j)$$

Cependant, par (4.29) $a_4 = 0$ donc, $d\delta^\omega \beta \neq e^1 \wedge e^2$.

Si nous regardons les cohomologies de De Rham, $H^k_{dR}(M)$, pour $k = 1, 3$ nous pouvons remarquer que l'opérateur L n'est pas un isomorphisme.

En effet,

$$\begin{aligned} H^1_{dR}(M) &= \operatorname{span}\{e^1, e^2, e^3\} && (4.30)\\ H^3_{dR}(M) &= \operatorname{span}\{\omega \wedge e^2, \omega \wedge e^3, (e^{315} + e^{415}), e^{425}, && (4.31)\\ &\quad (e^{534} + e^{623}), (e^{516} + e^{534} + 2e^{263} + e^{624})\} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a pas d'isomorphisme entre $H^1_{dR}(M)$ et $H^3_{dR}(M)$. En particulier, $b_1(M) = 3, b_3(M) = 5$. Ainsi, il est évident que l'on n'a pas d'isomorphisme entre $H^1_{dR}(M)$ et $H^3_{dR}(M)$ par l'action de l'opérateur L. Donc, cette variété n'est pas kählérienne et, en plus, ne possède pas la propriété forte de Lefschetz.

APPENDICE A

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Définition A.1. Soit $\zeta = (V, p, M)$ $\eta = (W, q, M)$ deux fibrés vectoriels de rangs r et s respectivement.

Un opérateur différentiel est un opérateur $\mathbb{K}-$linéaire P tel que :

$$\begin{gathered} P : C^{\infty}(V, \zeta) \to C^{\infty}(W, \zeta) \\ supp(Ps) \subset supp(s) \end{gathered} \tag{A.1}$$

Théorème A.2. *Soient U un ouvert de M et P un opérateur différentiel linéaire de $U \times \mathbb{R}^r$ à $U \times \mathbb{R}^s$. Pour chaque $K \Subset U$, il existe un entier $m \geq 0$ et des applications $\psi_\alpha \in C^\infty$ de K à $End(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ tel que pour tout $x \in K$ et $u \in C^\infty(K, r)$ on a :*

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \psi_\alpha(x)(D^\alpha u)(x)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $D^\alpha(u) = \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots, \frac{\partial^{|\alpha|} u_r}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)$

Définition A.3 (Symbole d'un opérateur différentiel). Soient E_x et F_x des fibres de E et F respectivement au point $x \in M$ et soit $u \in C^\infty(E)$ tel que $u|_x = z$ et $\phi \in C^\infty(M)$ satisfaisant $\phi(x) = 0$ et $d\phi(x) = \xi$ alors,

$$\sigma_\xi(P, x) : E_x \to F_x$$

est défini par :

$$\sigma_\xi(P, x)z = \frac{1}{k!} P(\phi^k u)|_x.$$

Définition A.4 (Opérateur elliptique). On dit qu'un opérateur différentiel

$$P : E \to F$$

de degré k est elliptique si son symbole principal (d'ordre k) est un isomorphisme de E_x à F_x pour tout $\xi \neq 0$. En particulier, le $rang(E) = rang(F)$ pour que P soit elliptique.

Proposition A.5. *Soit L un opérateur différentiel de $E \to F$, alors il existe un opérateur dual noté L^* de $F \to E$. De plus, $\sigma_k(L^*) = \sigma_k(L)^*$.*

Proposition A.6. *Le symbole principal possède les propriétés suivantes :*

1. $\sigma_\xi(A + B, x) = \sigma_\xi(A, x) + \sigma_\xi(B, x)$
2. $\sigma_\xi(AB, x) = \sigma_\xi(A, x)\sigma_\xi(B, x)$

Exemple. Le calcul de symboles de certains opérateurs différentiels.

1. Soit d la dérive extérieure, un opérateur de degré 1,

$$d : T_x^k(M) \to T_x^{k+1}(M)$$

Soit $x \in M, \phi \in C^\infty(M)$ tel que $\phi(x) = 0$ et $d\phi|_x = \xi$ et prenons une 1-forme α. Alors,

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(d)\alpha|_x &= d(\phi\alpha)|_x \\ &= d\phi|_x \wedge \alpha|_x + \phi(x)d\alpha|_x \\ &= \xi \wedge \alpha|_x.\end{aligned} \tag{A.2}$$

2. On peut vérifier que $\delta^g(\phi\alpha) = \phi\delta^g(\alpha) - \iota_{d\phi^\sharp}\alpha$. Donc,

$$\sigma_\xi(\delta^g)(\alpha) = -\iota_{(\xi)}\alpha$$

3. Calculons le symbole du Laplacien $\Delta_g = d\delta^g + \delta^g d$. Par la proposition précédente, ainsi que les calculs précédents, nous avons le résultat comme suivant :

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(d\delta^g + \delta^g d)(\alpha) &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha - \iota_{\xi^\sharp}(\xi \wedge \alpha) \\ &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp} - \iota_{\xi^\sharp}\xi \wedge \alpha + \xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha \\ &= -\|\xi\|^2(\alpha).\end{aligned} \tag{A.3}$$

On peut conclure que le Laplacien Δ_g est un opérateur elliptique.

APPENDICE B

REPRÉSENTATION $SL(2, \mathbb{C})$

Nous allons faire un rappel rapide sur la représentation $sl(2, \mathbb{C})$ dans l'algèbre extérieure sur un espace vectoriel hermitien.

Définition B.1 (Algèbre de Lie). Une algèbre de Lie est la donnée d'un espace vectoriel V de dimension finie, munie d'un produit bi-linéaire anticomutatif appelé crochet de Lie :

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

tel qu'il satisfait l'identité de Jacobi :

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Définition B.2 (Représentation d'algèbre de Lie). Une représentation est un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie

$$\psi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$$

où l'algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ est munie du le crochet suivant :

$$[A, B] = AB - BA,$$

où $A, B \in End(V)$.

Définition B.3 ($sl(2, \mathbb{C})$). On note par $sl(2, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes 2×2 de trace nulle. Cet espace est une algèbre de Lie de dimension complexe 3.

Proposition B.4. *L'algèbre $sl(2,\mathbb{C})$ est générée par les éléments*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfaisant aux relations

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \; [e_3, e_1] = 2e_1, \; [e_3, e_2] = -2e_2.$$

Définition B.5. Une représentation $\psi : \mathfrak{g} \to gl(V)$ est irréductible s'il n'existe aucun sous espace propre $V_0 \subset V$ tel que $\psi(v)(V_0) \subset V_0 \; \forall v \in \mathfrak{g}$. De plus, deux représentations sont équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $\phi : V_1 \to V_2$ tel que pour les représentations ψ_1 et ψ_2 de V_1 et V_2 possèdent la relation suivante :

$$\psi_1 = \phi^{-1}\psi_2\phi.$$

Définition B.6 (représentation réductible)**.** Une représentation est dite réductible si elle est la somme directe de représentation irréductible.

Définition B.7. Une algèbre $\mathfrak{g}$ est semi-simple si dim $\mathfrak{g} \geq 2$ et si elle ne possède aucun idéal abélien non-trivial.

Exemple. $sl(2,\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple, car elle ne possède aucun idéal non-trivial.

Théorème B.8 (Weyl)**.** *Soit $\psi : \mathfrak{g} \to gl(V)$ une représentation d'une algèbre de Lie semisimple. Alors, ψ est completement réductible.*

Corollaire B.9. *Toute représentation de $sl(2,\mathbb{C})$ dans un espace vectoriel complexe V est completement réductible.*

Définition B.10. [Vecteurs primtifs] Soit $\psi : sl(2,\mathbb{C}) \to End(V)$ une représentation et $V_\lambda = \{v \in V | \psi(e_3)v = \lambda v\}$ l'espace propre de $\psi(e_3)$ correspondant à la valeur propre λ. On dit qu'un vecteur $v_0 \in V_\lambda$ est primitif de poids λ si $\psi(e_1)v_0 = 0$.

Lemme B.11. *Pour tout vecteur $v \in V_\lambda$ vecteur propre pour $\psi(e_3)$ relativement à la valeur propre λ , alors $\psi(e_1)v \in V_{\lambda+2}$ et $\psi(e_2)v \in V_{\lambda-2}$.*

Démonstration. $\psi(e_3)\psi(e_1)v = \psi([e_3, e_1])v + \psi(e_1)\psi(e_3)v = (2\psi(e_1)v + \lambda\psi(e_1)v)$. □

Lemme B.12. *Toute représentation ψ de $sl(2, \mathbb{C})$ d'un espace vectoriel complexe possède au moins un vecteur primitif v_0 de poids λ.*

Démonstration. Soit un vecteur v qui est un vecteur propre de $\psi(e_3)$. La suite suivante : $\{v_0, \psi(e_1)^1 v, \psi(e_1)^2 v, \ldots, \psi(e_1)^n v, \ldots\}$ est fini comme chaque élément est un vecteur propre de poids différent (voir le lemme précédent). Comme les espaces propres sont finis, la suite dois se terminer et donc $\psi(e_1)^k v = 0$ et $\psi(e_1)^{k-1} v$ est un vecteur primitif. □

Lemme B.13. *Soit V un espace vectoriel irréductible. Prenons $v_0 \in V_\lambda$ un vecteur primitif et posons $v_{-1} = 0, v_k = (1/k!)\phi(e_2)v_0$ Alors,*

1. $\psi(e_1)v_k = (\lambda - k + 1)v_{k-1}$;
2. $\psi(e_2)v_k = (1 + k)v_k$;
3. $\psi(e_3)v_k = (\lambda - 2k)v_k$.

Corollaire B.14. *Soit V et ψ comme au lemme précédent. Alors, $\psi(e_3)$ est diagonalisable c'est-à-dire $V = \oplus_\lambda V_\lambda$.*

Théorème B.15. *Soit un espace vectoriel complexe de dimension $m + 1 \geq 1$ et soit $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ une base de V. Alors la représentation suivante :*

1. $\psi(e_1)v_n = (m - n + 1)v_{n-1}$;
2. $\psi(e_2)v_n = (n + 1)v_{n+1}$;
3. $\psi(e_3)v_n = (m - 2n)v_n$,

est irréductible et notée par $V(m)$.

Définition B.16. Soit V un espace hermitien de dimension fini et $W = V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. L'espace des formes complexes $\bigwedge W$ possède les opérateurs suivants :

$$L = \omega \wedge \tag{B.1}$$

$$\Lambda = L^* \tag{B.2}$$

$$H = \sum_{p=0}^{2n} (n - p)\pi_p \tag{B.3}$$

On définit une représentation $\rho : sl(2,\mathbb{C}) \to End(\wedge W)$ de la manière suivante :

$$\rho(e_1) = \Lambda, \ \rho(e_2) = L, \ \rho(e_3) = H.$$

On peut vérifier que les opérateurs possèdent les relations suivantes

$$[H, L] = 2L \ , \ [H, \Lambda] = -2\Lambda \ , \ [L, \Lambda] = 2H.$$

Alors,

$$\rho : sl(2,\mathbb{C}) \to \bigwedge W$$

est une représentation.

Remarque B.17. Par les définitions B.10 et B.16, une k-forme α est primitive si $\Lambda\alpha = 0$.

Corollaire B.18 (Corollaire de B.14). *Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension n et $\bigwedge^k W$ défini comme précédemment. Alors, une k-forme α est décomposable en une somme de formes primitives c'est-à-dire :*

$$\alpha = \sum_r L^r \beta_{k-2r} \tag{B.4}$$

où les formes β_{k-2r} sont de degré $k - 2r$.

Théorème B.19. *Soit (M, J, ω, g) une variété kählérienne. M possède la propriété forte de Lefschetz :*

$$\mathcal{H}^k(M) = \sum_r L^r P\mathcal{H}^{k-2r}(M) \tag{B.5}$$

où $\mathcal{H}^k(M)$ est l'espace des k-formes harmoniques et $P\mathcal{H}^k(M)$ est l'espace des k-formes harmoniques primitives.

Démonstration. Comme Δ_g commute avec L et L^* le résultat est direct. En effet, par la proposition 2.56,

$$\begin{aligned}
[\Delta_g, L] &= \Delta_g L - L\Delta_g \\
&= (d\delta + \delta d)L - L(d\delta + \delta d) \\
&= d\delta L + \delta L d - (dL\delta + L\delta d) \\
&= -d[L, \delta] - [L, \delta]d = -dd^c - d^c d = 0,
\end{aligned}$$

car sur une variété kälhérienne, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ et $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$. La preuve est la même pour $[\Delta_g, L^*] = 0$. Alors, la décomposition B.4 implique la décompsition B.5. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

Apostolov, V., et T. Draghici. 2003. « The curvature and the Integrability of Almost-kähler manifolds : A survey ». *American Mathematical Society*, vol. 35, p. 25.

Audin, M. 1991. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Bikhauser.

Fino, A., et G. Grantcharov. 2003. « Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy ». *Science Direct.* En ligne. http ://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2003.10.009.

Gauduchon, P. « Calabi's extremal kähler metrics : An elementary introduction ».

Humphreys, J. E. 1972. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer.

Kobayashi, S., et K. Nomizu. 1963. *Foundations of differential geometry Volume I.* New York Interscience Publishers.

———. 1969. *Foundations of differential geometry Volume II.* New York Interscience Publishers.

Kostrikin, A., et U. I. Manin. 1989. *Linear Algebra and Geometry.* New York Gordon and Breach.

Lejmi, M. 2006. « L'existence de structures presque-kählériennes sur une variété presque-complexe ». Mémoire de maîtrise, UQAM.

———. 2010. « Métriques presque-kählériennes extrémales ». Thèse de Doctorat, UQAM.

Mathieu, O. 1995. « Harmonic cohomology classes of symplectic manifolds ». *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 70, p. 1–9. 10.1007/BF02565997. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02565997>.

Merkulov, S. A. 1998. « Formality of canonical symplectic complexes and Frobenius manifolds ». *ArXiv Mathematics e-prints.* <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998math......5072M>.

Salamon, D., et D. McDuff. 1995. *Introduction to Symplectique Manifold.* Oxford Clarendon Press.

Tseng, L.-S., et S.-T. Yau. 2009. « Cohomology and Hodge Theory on Symplectic Manifolds : I ». *ArXiv e-prints.* <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0909.5418T>.

——. 2010. « Cohomology and Hodge Theory on Symplectic Manifolds : II ». *ArXiv e-prints.* <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1011.1250T>.

Voisin, C. 2002. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Société mathématique de France.

Warner, F. 1983. *Foundations of differentiable manifold and Lie groups.* Springer.

Wells, R. 2008. *Differential analysis on complex manifolds.* Springler.