

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES  
MOLÉCULAIRES ET ATOMIQUES

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
HUGO TREMBLAY

JUILLET 2012

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



*En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y  
habitue.*

*- John von Neumann*

*Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que  
la mer.*

*- Victor Hugo*





## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur Gilbert Labelle pour avoir cru en moi, pour sa passion, sa disponibilité, son humour et son support (financier et moral). Grâce à toi, Gilbert je vois les mathématiques sous un autre angle. Merci aussi à mon co-directeur, Robert Bédard, pour m'avoir permis d'entreprendre ce beau projet.

Merci aux membres du jury, Srećko Brlek et Franco Saliola de prendre le temps de corriger et de commenter ce mémoire.

Merci à Marie-Philip, ma conjointe sans qui je ne serais pas où je suis maintenant. Merci pour ton amour, ton sourire. En m'acceptant comme je suis, tu me donnes confiance en moi et ça me permet de me dépasser. Merci d'accepter de vivre une relation à distance. Ton «chum» n'est pas souvent là mais il va revenir bientôt! Merci aussi à Hélène et Harold pour leur support et leurs encouragements.

Merci à ma famille pour leur support inconditionnel au fil de ma vie. Merci à mes parents, Francine et Bruno, de m'avoir supporté depuis le jour un. Vos valeurs ont fait de moi l'homme que je suis devenu. Merci pour votre support financier sans lequel je n'aurais pu aller au bout de mes rêves. Merci pour votre support moral et vos conseils. Le fait de savoir que vous êtes toujours derrière moi me permet d'avancer et de me concentrer sur l'avenir. Je vous en suis et serai éternellement reconnaissant. Merci à ma soeur (et coloc) Léa pour ses encouragements et sa tolérance face aux horaires variables d'un étudiant en mathématiques qui ne sait pas trop quand il arrivera le soir. Je sais que tu seras toujours là pour prendre soin de moi. Merci de ta présence et ta complicité.

Merci à tous les membres du LaCIM. Merci à Jérôme Tremblay pour l'aide avec TikZ, la procrastination et l'humour. Merci à François Bergeron, Christophe Hohlweg et Franco Saliola pour avoir, chacun à leur façon, influencé le mathématicien que je suis

devenu. Merci à Srečko Brlek pour son support et pour me forcer à me dépasser. Merci à Sébastien Labbé pour sa quantité incalculable de conseils et son aide incommensurable.

Merci à Alexandre Blondin-Massé de croire en moi et me permettre de continuer mes études à Chicoutimi... près de ma Marie!

Merci à Manon Gauthier pour son aide, son efficacité et sa disponibilité. Tu élimines la notion de problème administratif.

Merci à tous mes amis qui m'encouragent, me font rire et me permettent de penser à autre chose que les mathématiques de temps en temps!

Merci à Lionel et Catherine sans qui mes études de maîtrise n'auraient pas été les mêmes.

Merci à Jean-Benoit Aubin. JB, tu me pousses à me dépasser depuis bientôt 20 ans et je t'en remercie.

Finalement, merci à vous \_\_\_\_\_ (*votre nom ici*), amoureux des mathématiques, pour prendre le temps de lire ce mémoire.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
RÉSUMÉ . . . . .	xiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
ESPÈCES DE STRUCTURES . . . . .	5
1.1 Rappel des notions de base sur la théorie des espèces . . . . .	5
1.1.1 Définitions . . . . .	5
1.1.2 Principales séries associées aux espèces . . . . .	8
1.1.3 Opérations de base . . . . .	10
1.1.4 Séries associées et opérations de base . . . . .	16
1.2 Espèces multisortes et pondérées . . . . .	19
1.2.1 Espèces multisortes . . . . .	19
1.2.2 Espèces pondérées . . . . .	25
1.3 Espèces moléculaires et atomiques . . . . .	26
1.3.1 Espèces moléculaires et atomiques à une sorte . . . . .	27
1.3.2 Espèces moléculaires et atomiques multisortes pondérées . . . . .	31
1.4 Extension aux $\mathbb{C}$ -espèces . . . . .	33
1.4.1 Extension dans le cas unisorte non-pondéré . . . . .	35
1.4.2 Extension dans le cas multisorte pondéré . . . . .	40
CHAPITRE II	
OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES . . . . .	45
2.1 Opérateurs $D$ et $D^n$ . . . . .	45
2.1.1 Définition . . . . .	45
2.1.2 Propriétés et exemples . . . . .	46
2.2 Opérateur $G(D)$ . . . . .	51

2.2.1	Définitions . . . . .	53
2.2.2	Séries associées . . . . .	55
2.2.3	Propriétés et exemples . . . . .	56
2.3	Opérateur $\Omega(X, D)$ . . . . .	57
2.3.1	Définitions . . . . .	58
2.3.2	Séries associées . . . . .	60
2.3.3	$\odot$ -composition . . . . .	61
2.3.4	Propriétés et exemples . . . . .	63
CHAPITRE III		
OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES MOLÉCULAIRES ET		
ATOMIQUES . . . . .		67
3.1	Calculs sur les opérateurs différentiels combinatoires moléculaires . . . . .	67
3.2	Génération exhaustive des opérateurs différentiels combinatoires atomiques	74
3.2.1	Premier algorithme . . . . .	76
3.2.2	Deuxième algorithme . . . . .	79
3.2.3	Résultats et analyse des algorithmes 1 et 2 . . . . .	84
CONCLUSION . . . . .		87
APPENDICE A		
DÉFINITIONS ET NOTATIONS DES PRINCIPALES ESPÈCES DE STRUC-		
TURES . . . . .		89
APPENDICE B		
CODE SOURCE DE L'IMPLÉMENTATION DANS LE LANGAGE PYTHON		
DES ALGORITHMES 1 ET 2 . . . . .		91
B.1	Algorithme 1 . . . . .	91
B.2	Algorithme 2 . . . . .	100
APPENDICE C		
LISTE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES ATOMIQUES		
$\frac{X^m D^n}{H}$ , $H \leq S_{m,n}$ ET $m + n = 8$ . . . . .		109
APPENDICE D		
NOMBRE D'OPÉRATEURS MOLÉCULAIRES ET ATOMIQUES $\frac{X^m D^n}{H}$ , $H \leq$		
$S_{m,n}$ POUR $9 \leq m + n \leq 10$ . . . . .		119
RÉFÉRENCES . . . . .		121

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Structure de graphe orienté sur $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . . . . .	6
1.2 Représentation générale d'une $F$ -structure. . . . .	7
1.3 Représentation générale d'une $(F + G)$ -structure. . . . .	11
1.4 Représentation générale d'une $(F \cdot G)$ -structure. . . . .	12
1.5 Représentation générale d'une $(F \times G)$ -structure. . . . .	13
1.6 Représentation générale d'une $(F \circ G)$ -structure. . . . .	14
1.7 Représentation générale d'une $F^\bullet$ -structure. . . . .	15
1.8 Représentation générale d'une $F'$ -structure. . . . .	16
1.9 $F^\bullet = X \cdot F'$ . . . . .	17
1.10 Représentation générale d'une $F$ -structure à trois sortes d'éléments. . .	21
1.11 Représentation générale d'une $F(X, T) _{T:=1}$ -structure. . . . .	23
1.12 Représentation générale d'une $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure. . . . .	24
1.13 Types d'isomorphie de l'espèce des graphes simples sur $n \leq 4$ points. . .	29
1.14 $\frac{X^3}{\langle (1\ 2\ 3) \rangle} = C_3$ . . . . .	30
1.15 Types d'isomorphie de l'espèce des arborescences sur $n \leq 4$ points, pondérées par $f$ . . . . .	34
1.16 $M \circ G = \sum_{P \in \mathcal{M}} \omega_P P$ . . . . .	35
1.17 $F(3X + 5Y + 100Z) = F(X + Y + Z) \times E(3X + 5Y + 100Z)$ . . . . .	37
2.1 Représentation générale d'une $D^4 F$ -structure. . . . .	46
2.2 $(F \times G)' = F' \times G'$ . . . . .	48
2.3 Représentation générale d'une $\langle F, G \rangle$ -structure. . . . .	50
2.4 $D(T^n \times_T F(X + T) _{T:=1}) = T^{n+1} \times_T F(X + T) _{T:=1}$ . . . . .	52

2.5	Arrangement circulaire de cinq opérateurs différentiels $D$ . . . . .	52
2.6	Représentation générale d'une $\mathcal{C}_7(D)F(X)$ -structure. . . . .	54
2.7	Arrangement circulaire de quatre $X$ et de trois opérateurs différentiels $D$ . . . . .	58
2.8	$\mathcal{A}(X, T)$ -structure sur $(U, V)$ telle que $ U  = 1$ et $ V  \geq N$ pour $N \geq 1$ . . . . .	59
2.9	Représentation générale d'une $\Omega(X, D)F(X)$ -structure. . . . .	60
2.10	Représentation générale d'une $\Lambda(XD)F(X)$ -structure. . . . .	64
3.1	Une $E_2(XD)\mathcal{C}_4(X)$ -structure typique sur $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . . . . .	75

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
3.1 Temps d'exécution de l'implémentation des algorithmes 1 et 2 pour le calcul de diverses listes d'opérateurs atomiques . . . . .	86





## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur la théorie des espèces introduite par André Joyal en 1981. Développée systématiquement par Bergeron, Labelle et Leroux au LaCIM, la théorie donne une élégante présentation de la théorie des séries formelles et possède des applications dans plusieurs disciplines allant de la combinatoire énumérative à la physique statistique. Une opération importante de la théorie consiste en l'opération de dérivation pour laquelle Labelle et Lamathe ont introduit en 2009 une généralisation de l'opérateur différentiel standard  $D$  en donnant une interprétation combinatoire à  $\Omega(X, D)F(X)$ , où  $\Omega(X, T)$  et  $F(X)$  sont des espèces à deux et une sortes d'éléments respectivement. Yeh a montré que de tels opérateurs peuvent être décomposés de façon unique en sommes de produits d'opérateurs plus simples appelés opérateurs différentiels combinatoires atomiques. Dans leur article, Labelle et Lamathe ont présenté une liste des premiers opérateurs différentiels atomiques. Dans ce mémoire, nous apportons une contribution originale à la théorie des espèces. En particulier, nous explicitons plusieurs notions de cette théorie en fournissant notamment une preuve détaillée d'un théorème, dû à Labelle et Lamathe, permettant de calculer l'application d'un opérateur moléculaire sur une espèce donnée. Ensuite, nous donnons deux algorithmes permettant de déterminer si un opérateur différentiel moléculaire donné est atomique. Nous étendons ensuite la liste des opérateurs différentiels donnée dans (Labelle et Lamathe, 2009).

Les résultats de ce travail furent présentés à la conférence GASCom 2012 qui eut lieu à l'université de Bordeaux du 25 au 27 juin 2012.

**Mots clés :** opérateurs différentiels combinatoires, opérateurs moléculaires, opérateurs atomiques, espèces de structures.



## INTRODUCTION

Depuis son introduction par Joyal en 1981 (Joyal, 1981), la théorie des espèces de structures a une influence notable dans plusieurs disciplines incluant la combinatoire, la physique théorique, type de données algébriques (Yorgey, 2010), ainsi que pour la génération aléatoire (Claessen et Hughes, 2000; Canou et Darrasse, 2009) ou exhaustive (Runciman, Naylor et Lindblad, 2008) de structures combinatoires. Cette théorie demeure un champ de recherche actif pour lequel le lecteur trouvera un exposé détaillé dans la monographie de Bergeron et al. (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998).

Un des concepts fondamentaux de la théorie des espèces est celui de dérivée d'une espèce. En effet, pour une espèce quelconque  $F$ , l'interprétation combinatoire de  $DF$  est bien connue. De plus, un opérateur différentiel combinatoire plus général a été introduit par Joyal (Joyal, 1986). Il donne, pour toute espèce  $G$ , une interprétation combinatoire à un opérateur différentiel noté  $G(D)$ . Mais, quelle interprétation combinatoire peut on donner à un arrangement circulaire d'opérateurs  $D$  et  $X$ , où  $X$  est l'opérateur de multiplication par l'espèce  $X$ , défini par  $F \mapsto X \cdot F$ ?

Labelle et Lamathe ont répondu à cette question dans (Labelle et Lamathe, 2009) (voir aussi (Sney-Lacasse, 2007)) en introduisant une généralisation de l'opérateur différentiel  $G(D)$ . Pour une espèce à deux sortes  $\Omega(X, T)$ , ils ont défini un opérateur  $\Omega(X, D)$ , appelé opérateur différentiel combinatoire généralisé. Toute comme pour les espèces ordinaires, un tel opérateur peut être décomposé en une somme de produits d'opérateurs  $X^m D^k / K$  appelés opérateurs différentiels combinatoires atomiques, où  $K$  est un sous-groupe de  $S_{m,k}$ . Ici,  $S_{m,k}$  est le sous-groupe de  $S_{m+k}$  permutant indépendamment les ensembles  $\{1, 2, \dots, m\}$  et  $\{m+1, m+2, \dots, m+n\}$ . Ils ont donné une liste partielle de ces opérateurs pour  $m+k \leq 7$  (voir aussi (Chiricota, 1993) pour les espèces moléculaires). L'un des buts de ce mémoire est de développer un algorithme permettant de déterminer

si un opérateur différentiel moléculaire donné est atomique. Nous utiliserons ensuite cet algorithme pour étendre la liste afin d'y inclure tous les opérateurs pour  $m + k \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ce mémoire constitue une contribution substantielle au texte original de Labelle et Lamathe ainsi qu'au mémoire de maîtrise de Sney-Lacasse.

Ce travail est divisé en trois chapitres. Le premier contient un rappel des notions de base de la théorie des espèces, telles que présentées dans le livre de Bergeron, Labelle et Leroux (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994). Plus précisément, nous y rappelons les notions d'espèces de structures et des principales séries associées à celle-ci. Nous définissons ensuite les opérations combinatoires de base de cette théorie. Puis, nous nous attardons à l'étude des espèces pondérées et multisortes. Nous décrivons ensuite les espèces moléculaires et atomiques, deux concepts centraux de ce mémoire. Nous terminons en étendant le concept d'espèces multisortes pondérées à celui de  $\mathbb{C}$ -espèces multisortes pondérées, tout en complétant certains aspects inédits de cette extension.

Au deuxième chapitre, nous tournons notre attention vers l'étude des opérateurs différentiels combinatoires. Nous étudions d'abord l'opérateur différentiel ordinaire  $D$ . Ensuite, nous généralisons cet opérateur en introduisant la notion d'opérateurs différentiels combinatoires purs. Enfin, à la manière de poupées russes, nous généralisons ces opérateurs en introduisant la notion d'opérateurs différentiels combinatoires généralisés. Au fil du chapitre, nous tentons de lier ces trois types d'opérateurs en présentant plusieurs résultats ayant des interprétations combinatoires similaires lorsqu'on passe d'un contexte à l'autre.

Enfin, le troisième chapitre porte sur le sujet d'étude principal de ce mémoire, soit les opérateurs différentiels combinatoires moléculaires et atomiques. Après un bref rappel des notions de base, nous donnons une démonstration complète d'un théorème fondamental, introduit dans (Labelle et Lamathe, 2009), permettant de calculer le résultat de l'application d'un opérateurs différentiel combinatoire moléculaire à une espèce quelconque. Ensuite, nous fournissons un premier algorithme, de type «force brute», permettant de déterminer si un tel opérateur est atomique. Puis, nous généralisons aux

cas des espèces à deux sortes certains résultats présentés dans (Chiricota, 1993), afin de donner un algorithme non-trivial fournissant un critère d'atomicité d'un opérateur différentiel moléculaire. Nous terminons par une brève analyse comparative de ces deux algorithmes.

Finalement, le lecteur trouvera en annexe une table de définitions des principales espèces de structures (Appendice A), le code source en Python des implémentations des deux algorithmes (Appendice B), une liste exhaustive des opérateurs différentiels combinatoires atomiques  $X^m D^n / H$ ,  $H \leq S_{m,n}$  pour  $m + n = 8$  (Appendice C) et un tableau donnant le nombre d'opérateurs différentiels moléculaires et atomiques pour  $9 \leq m + n \leq 10$  (Appendice D). Notons que des tables complètes pour  $9 \leq m + n \leq 10$  sont disponibles sur demande.



## CHAPITRE I

### ESPÈCES DE STRUCTURES

#### 1.1 Rappel des notions de base sur la théorie des espèces

Cette section contient un bref rappel des notions de base sur la théorie des espèces. Le lecteur est invité à consulter (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) pour des définitions plus détaillées et des exemples supplémentaires.

##### 1.1.1 Définitions

De façon informelle, on peut définir une structure  $s$  comme étant un couple  $(\gamma, U)$  où  $\gamma$  est une construction faite sur un ensemble sous-jacent  $U$ .

**Exemple 1.1.1.** Pour  $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  et

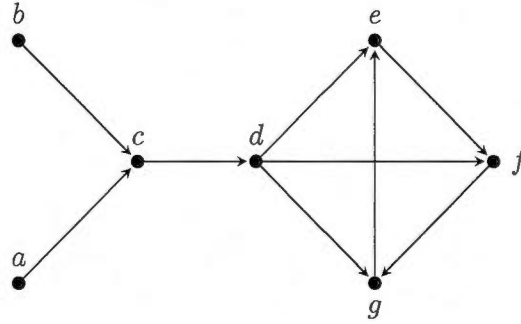
$\gamma = \{(a, c), (b, c), (c, d), (d, e), (d, f), (d, g), (e, f), (f, g), (g, e)\}$ ,  $s = (\gamma, U)$  décrit une structure de graphe orienté simple où le couple  $(i, j)$  représente une flèche allant de  $i$  vers  $j$ . Ce graphe est représenté à la figure 1.1.

De façon formelle, nous avons la définition suivante d'une espèce de structures :

**Définition 1.1.2.** Une *espèce de structures* est une règle  $F$  qui associe

1. à chaque ensemble fini  $U$ , un ensemble fini  $F[U]$  ;
2. à chaque bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , une fonction  $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$ , telle que chaque fonction satisfasse aux propriétés de fonctorialité suivantes :





**Figure 1.1** Structure de graphe orienté sur  $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ .

- (a) pour toutes bijections  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$ , l'égalité  $F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$  est vérifiée ;
- (b) pour la bijection identité  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ , l'égalité  $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}$  est vérifiée.

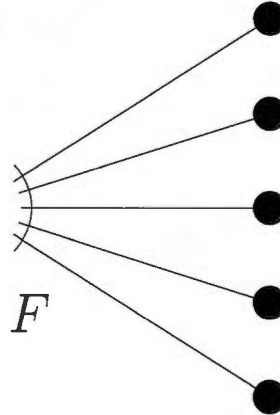
Conformément à la terminologie usuelle de la théorie des espèces, une  $F$ -structure (ou structure d'espèce) sur  $U$  est un élément  $s$  de  $F[U]$ . De plus, on appelle *transport des  $F$ -structures le long de  $\sigma$*  la fonction  $F[\sigma]$ . Finalement, notons que nous emploierons le terme *espèce* au lieu d'*espèce de structures* afin d'alléger le texte.

**Exemple 1.1.3.** Considérons  $\mathcal{C}$  l'espèce des cycles, qui associe à tout ensemble fini  $U$ , l'ensemble  $\mathcal{C}[U]$  des cycles d'éléments de  $U$ . Posons  $U = \{1, 2, 3\}$ . Alors,

$$\mathcal{C}[U] = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cycle } (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \\ \text{Cycle } (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}.$$

De plus, considérons la bijection

$$\begin{array}{rcl} \sigma : U & \longrightarrow & \{a, b, c\} \\ 1 & \mapsto & a \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & c \end{array}$$



**Figure 1.2** Représentation générale d'une  $F$ -structure.

Alors, on a le transport  $C[\sigma] : C[U] \longrightarrow C[\{a, b, c\}]$  obtenu en réétiquetant les points des  $C$ -structures sur  $U$  selon  $\sigma$ . On montre alors facilement que les propriétés de fonctorialités sont vérifiées.

Le lecteur trouvera une liste des définitions des principales espèces de structures dans l'appendice A. La figure 1.2 donne la représentation générale d'une structure appartenant à une espèce  $F$ .

Maintenant, nous établissons le concept d'égalité entre deux espèces. Rigoureusement, deux espèces  $F$  et  $G$  sont égales si et seulement si  $F[U] = G[U]$  et  $F[\sigma] = G[\sigma]$  pour tout ensemble fini  $U$  et pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ . Cependant, ce concept d'égalité est beaucoup trop restrictif. Afin de définir une égalité plus pratique, définissons d'abord ce qu'est un isomorphisme d'espèces.

**Définition 1.1.4.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces.  $F$  est **isomorphe** à  $G$  s'il existe une famille de bijections  $\alpha_U : F[U] \longrightarrow G[U]$  telle que, pour toute bijection entre ensembles finis  $\sigma : U \longrightarrow V$ , on ait  $G[\sigma] \circ \alpha_U = \alpha_V \circ F[\sigma]$ .

Cette dernière définition nous permet d'énoncer ce qu'on entend par égalité entre deux espèces. Par convention, on dit que deux espèces  $F$  et  $G$  sont *égales* (combinatoirement)

si et seulement si  $F$  est isomorphe à  $G$ . On écrit alors  $F = G$ .

La définition suivante sera essentielle lorsque nous aborderons les principales séries d'une espèce.

**Définition 1.1.5.** Soient  $U$  et  $V$  deux ensembles et  $s_1 \in F[U]$ ,  $s_2 \in F[V]$ . On dit que  $s_1$  et  $s_2$  ont le même **type d'isomorphie** s'il existe une bijection

$$\sigma : U \longrightarrow V$$

telle que  $F[\sigma](s_1) = s_2$ .

### 1.1.2 Principales séries associées aux espèces

L'un des principaux intérêts de la théorie des espèces est le dénombrement des  $F$ -structures pour une espèce donnée  $F$ . Pour ce faire, nous introduisons trois séries formelles associées aux espèces. Mais d'abord, rappelons la définition du type cyclique d'une permutation.

**Définition 1.1.6.** Soit  $\sigma$  une permutation d'un ensemble fini  $U$ . On appelle **type cyclique de  $\sigma$**  la suite  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ , où, pour tout  $i \geq 1$ ,  $\sigma_i$  est le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la décomposition de  $\sigma$  en cycles disjoints.

Par exemple, le type cyclique de  $\sigma = (2)(4)(1\ 3)(5\ 6)(7\ 8\ 9)$ , une permutation de  $U = [9]$ , est  $(2, 2, 1, 0, 0, \dots)$ .

Nous pouvons maintenant définir trois séries formelles associées aux espèces.

**Définition 1.1.7.** Soit  $F$  une espèce donnée.

1. La **série génératrice** de  $F$ , notée  $F(x)$ , est la série formelle définie par

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$$

où  $f_n = |F[n]|$  est le nombre de  $F$ -structures pouvant être construites sur un ensemble donné de  $n$  éléments.

2. La *série génératrice des types d'isomorphie* de  $F$ , notée  $\tilde{F}(x)$ , est la série formelle définie par

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n$$

où  $\tilde{f}_n$  est le nombre de types d'isomorphie de  $F$ -structures sur  $n$  éléments.

3. La *série indicatrice des cycles* de  $F$ , notée  $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , est la série formelle définie par

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right)$$

où la suite  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$  est le type cyclique de la permutation  $\sigma \in S_n$  et  $\text{fix } F[\sigma]$  est le nombre de  $F$ -structures sur  $n$  points laissées fixes par  $F[\sigma]$ ; c'est-à-dire, le nombre de  $F$ -structures dont  $\sigma$  est un automorphisme.

**Remarque.** En groupant les permutations par leur types cyclique, on peut réécrire la série indicatrice des cycles comme

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots < \infty} \text{fix } F[n_1, n_2, n_3, \dots] \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots}$$

(pour une preuve détaillée, voir (Sney-Lacasse, 2007)).

On peut alors simplifier cette notation en posant  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ ,  $\mathbf{x}^{\mathbf{n}} = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots$  et  $\text{aut}(\mathbf{n}) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots$ . Avec ces notations, on peut réécrire la série comme

$$Z_F(\mathbf{x}) = \sum_{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots < \infty} \text{fix } F[\mathbf{n}] \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})}.$$

**Exemple 1.1.8.** Soit  $L$ ,  $S$  et  $C$ , les espèces des listes d'éléments, des permutations et des cycles respectivement. On a (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) pour les détails) :

$$1. L(x) = \frac{1}{1-x}, \tilde{L}(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } Z_L(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{1-x_1};$$

$$2. S(x) = \frac{1}{1-x}, \tilde{S}(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} \text{ et } Z_S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x_k};$$

$$3. \mathcal{C}(x) = -\log(1-x), \tilde{\mathcal{C}}(x) = \frac{x}{1-x} \text{ et } Z_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, x_3, \dots) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(k)}{k} \log(1-x_k).$$

En terminant, la proposition suivante lie les séries génératrices et génératrices des types d'isomorphie à la série indicatrice des cycles. Une démonstration est donnée, entre autre, dans (Sney-Lacasse, 2007).

**Proposition 1.1.9.** *Pour toute espèce  $F$ , on a*

- $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots)$ , et
- $\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots)$ .

### 1.1.3 Opérations de base

Il existe plusieurs opérations combinatoires s'appliquant aux espèces. Dans cette sous-section, nous présentons les principales opérations sur les espèces qui sont utilisées au fil de ce mémoire ; soit l'addition, la multiplication, le produit cartésien, la substitution, le pointage et la dérivation. Notons toutefois qu'il en existe davantage, comme par exemple la composition fonctorielle.

Dans les définitions suivantes,  $U$  et  $V$  sont des ensembles finis.

**Définition 1.1.10.** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces données. On note  $F + G$  la somme de  $F$  et  $G$  définie de la façon suivante*

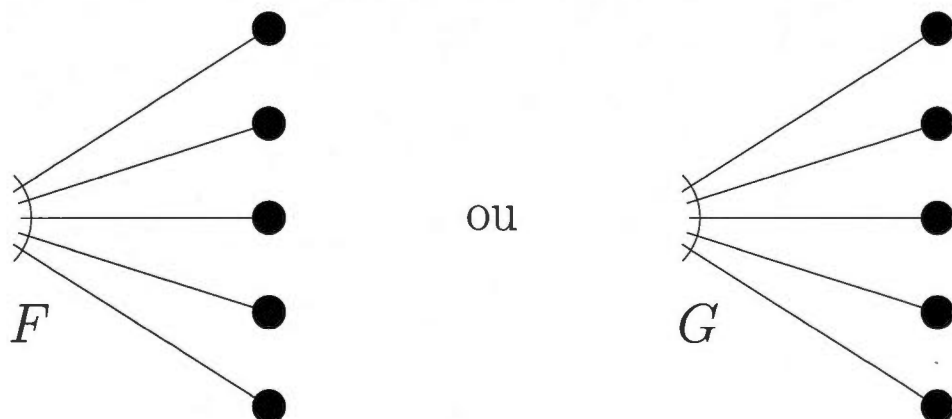
$$(F + G)[U] = F[U] + G[U] \text{ (somme disjointe ensembliste).}$$

*Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  est défini par :*

$$(F + G)[\sigma](s) = \begin{cases} F[\sigma](s) & \text{si } s \in F[U], \\ G[\sigma](s) & \text{si } s \in G[U]. \end{cases}$$

En d'autres termes, une  $(F + G)$ -structure sur  $U$  est soit une  $F$ -structure, soit une  $G$ -structure sur  $U$ .

**Remarque.** *Rigoureusement, on a que  $(F + G)[U] = (F[U] \times \{1\}) \cup (G[U] \times \{2\})$ .*



**Figure 1.3** Représentation générale d'une  $(F + G)$ -structure.

La figure 1.3 donne la représentation générale d'une  $(F + G)$ -structure.

Définissons maintenant le produit d'espèces.

**Définition 1.1.11.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces données. On note  $F \cdot G$  le **produit de  $F$  et  $G$**  défini de la façon suivante

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{(U_1, U_2)} F[U_1] \times G[U_2],$$

où  $U_1 \cup U_2 = U$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

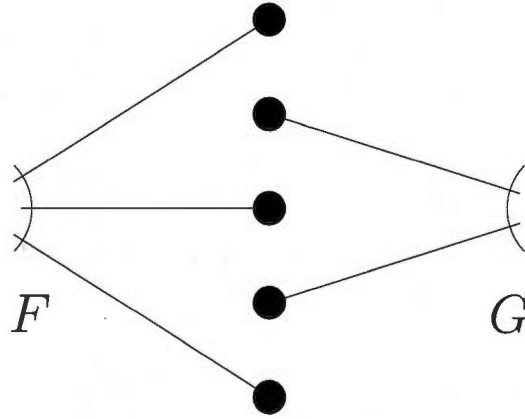
Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  est défini, pour toute  $(F \cdot G)$ -structure  $s = (f, g)$ , par

$$(F \cdot G)[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g)),$$

où  $\sigma_i = \sigma|_{U_i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

En d'autres termes, une  $(F \cdot G)$ -structure sur  $U$  est une  $F$ -structure sur une partie de  $U$  et une  $G$ -structure sur une autre partie (disjointe de la première) de  $U$ .

La figure 1.4 donne la représentation générale d'une  $(F \cdot G)$ -structure.



**Figure 1.4** Représentation générale d'une  $(F \cdot G)$ -structure.

À présent, nous définissons un autre type de multiplication, soit le produit cartésien d'espèces.

**Définition 1.1.12.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces données. On note  $F \times G$  le **produit cartésien de  $F$  et  $G$**  défini de la façon suivante,

$$(F \times G)[U] = F[U] \times G[U].$$

Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  est défini, pour toute  $(F \times G)$ -structure  $s = (f, g)$ , par

$$(F \times G)[\sigma](s) = (F[\sigma](f), G[\sigma](g)).$$

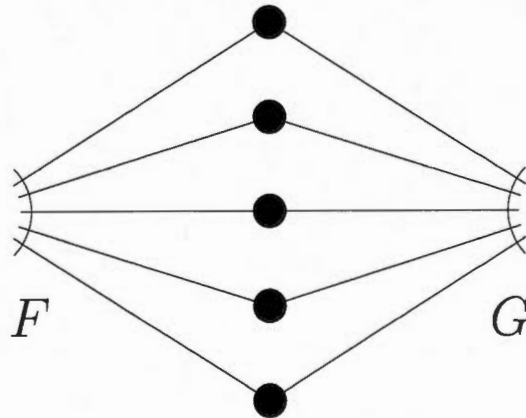
En d'autres termes, une  $(F \times G)$ -structure sur  $U$  est un couple formé d'une  $F$ -structure sur  $U$  et d'une  $G$ -structure sur  $U$ . Contrairement, au produit d'espèces, la  $F$ -structure et la  $G$ -structure sont définies sur tout l'ensemble  $U$ .

La figure 1.5 donne la représentation générale d'une  $(F \times G)$ -structure.

Nous pouvons maintenant définir la substitution d'espèces.

**Définition 1.1.13.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces données telles que  $G[\emptyset] = \emptyset$ . On note





**Figure 1.5** Représentation générale d'une  $(F \times G)$ -structure.

$F \circ G$  la composée (partitionnelle) de  $G$  dans  $F$  définie de la façon suivante,

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition } U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p]$$

où  $\pi$  parcourt toutes les partitions de  $U$  et  $p$  parcourt les classes de  $\pi$ .

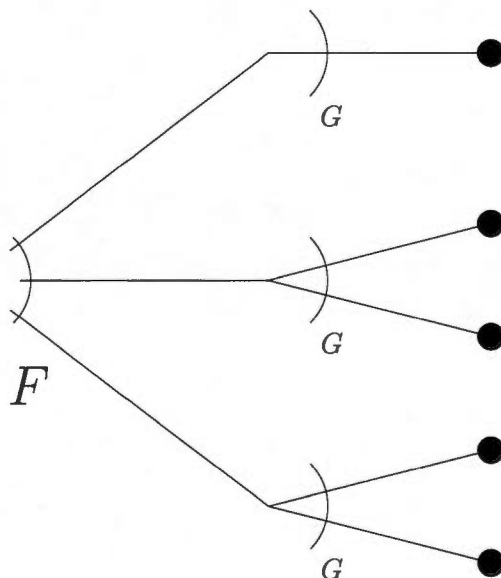
Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \longrightarrow V$  est défini, pour toute  $(F \circ G)$ -structure  $s = (\varphi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$ , par

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\varphi}, (\bar{\gamma}_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}})$$

où

- $\bar{\pi}$  est la partition de  $V$  obtenue par le transport de  $\pi$  le long de  $\sigma$ ,
- pour chaque  $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$ , la structure  $\bar{\gamma}_{\bar{p}}$  est obtenue de la structure  $\gamma_p$  par  $G$ -transport le long de  $\sigma|_p$ ,
- la structure  $\bar{\varphi}$  est obtenue de la structure  $\varphi$  par  $F$ -transport le long de la bijection  $\bar{\sigma}$  induite sur  $\pi$  par  $\sigma$ .





**Figure 1.6** Représentation générale d'une  $(F \circ G)$ -structure.

De façon imagée, une  $(F \circ G)$ -structure sur  $U$  est une  $F$ -structure dont les éléments sous-jacents sont des  $G$ -structures placées sur les classes d'une partition de  $U$ .

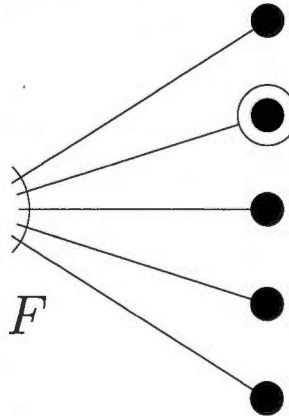
La figure 1.6 donne la représentation générale d'une  $(F \circ G)$ -structure.

Il est maintenant temps de définir deux opérations fondamentales pour l'étude des opérateurs différentiels combinatoires, soit le pointage et la dérivation. S'il semble naturel de considérer cette dernière, le pointage, par contre, paraît moins important. Pourtant, cette opération intervient dans de nombreux résultats étudiés plus loin dans le texte.

**Définition 1.1.14.** Soit  $F$  une espèce donnée. On note  $F^\bullet$  le *pointage* de l'espèce  $F$  défini de la façon suivante,

$$F^\bullet[U] = F[U] \times U.$$

Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  est défini, pour toute



**Figure 1.7** Représentation générale d'une  $F^*$ -structure.

$F$ -structure pointée  $s = (f, u)$ , par

$$F^*[\sigma](s) = (F[\sigma](f), \sigma(u)).$$

En d'autres termes, une  $F$ -structure pointée sur  $U$  est une  $F$ -structure sur  $U$  dans laquelle un élément de l'ensemble sous-jacent a été distingué.

La figure 1.7 donne la représentation générale d'une  $F^*$ -structure.

Nous terminons cette sous-section par la définition de la dérivation d'espèces.

**Définition 1.1.15.** Soit  $F$  une espèce donnée. On note  $F'$  (aussi notée  $\frac{d}{dX}F$ , ou encore  $DF$ ) la *dérivée de l'espèce  $F$*  définie de la façon suivante,

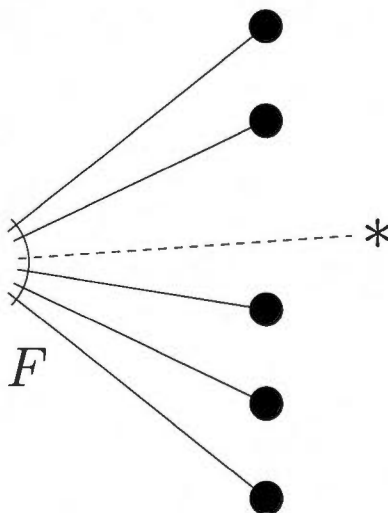
$$F'[U] = F[U^+],$$

où  $U^+ = U \cup \{*\}$  et où  $*$  est un point choisi à l'extérieur de  $U$ .

Le transport des structures le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  est défini par

$$F'[\sigma](s) = F[\sigma^+](s),$$

où  $\sigma^+ : U \cup \{*\} \rightarrow V \cup \{*\}$  est l'extension canonique de  $\sigma$  définie par  $\sigma^+(u) = \sigma(u)$  si  $u \in U$  et  $\sigma^+(* ) = *$ .



**Figure 1.8** Représentation générale d'une  $F'$ -structure.

En d'autres termes, une  $F'$ -structure  $U$  est une  $F$ -structure sur l'ensemble  $U$  augmenté d'un élément extérieur.

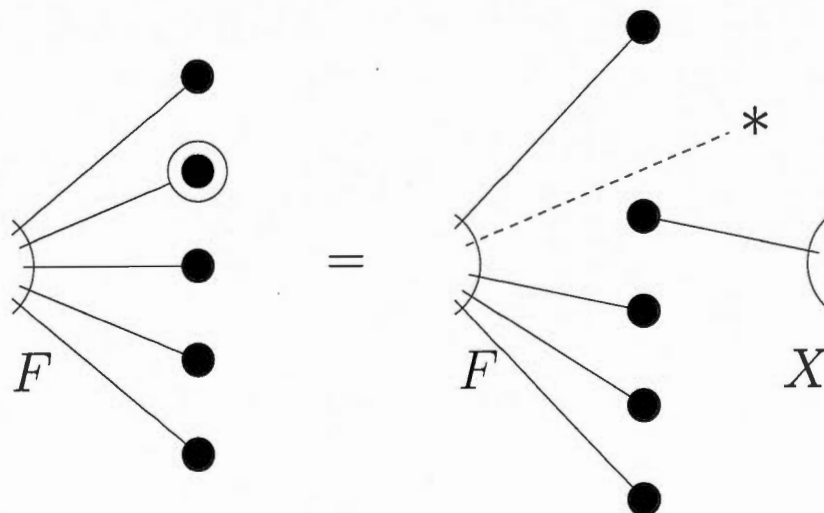
La figure 1.9 donne la représentation générale d'une  $F'$ -structure.

Il est intéressant de remarquer que le pointage et la dérivation sont liés par l'équation combinatoire  $F^\bullet = X \cdot F'$ . Une observation attentive de la figure 1.9 permet de s'en convaincre.

**Remarque.** *Il existe une façon systématique de choisir un point extérieur à tout ensemble fini  $U$ . Il suffit de prendre  $* = U$ , et alors  $U^+ = U \cup \{U\}$  est le successeur de  $U$ . Ceci nous donne bien que  $U \notin U$  pour tout ensemble fini  $U$ .*

#### 1.1.4 Séries associées et opérations de base

Afin de clore cette section, nous énonçons plusieurs résultats permettant de connaître l'effet qu'ont les opérations combinatoires de base sur les séries associées. Pour les preuves de ces propositions, le lecteur est invité à consulter (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) ainsi que (Sney-Lacasse, 2007).

Figure 1.9  $F^\bullet = X \cdot F'$ 

Tout d'abord, la proposition suivante décrit l'effet de la somme sur les séries associées.

**Proposition 1.1.16.** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Alors, les séries associées à l'espèce  $F + G$  satisfont aux égalités suivantes,*

- (i)  $(F + G)(x) = F(x) + G(x),$
- (ii)  $(\widetilde{F + G})(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x),$
- (iii)  $Z_{F+G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) + Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).$

De façon similaire, on a, pour le produit, la proposition suivante :

**Proposition 1.1.17.** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Alors, les séries associées à l'espèce  $F \cdot G$  satisfont aux égalités suivantes,*

- (i)  $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x),$
- (ii)  $(\widetilde{F \cdot G})(x) = \widetilde{F}(x)\widetilde{G}(x),$
- (iii)  $Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).$

Avant de pouvoir énoncer la prochaine propriété, il faut d'abord rappeler la notion de produit de Hadamard de deux séries.

**Définition 1.1.18.** Le *produit de Hadamard de deux séries*, noté  $\times$ , est le produit coefficient à coefficient défini, pour les séries génératrices et indicatrices, de la façon suivante :

1. Soient  $f(x) = \left( \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \right)$  et  $g(x) = \left( \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} \right)$  deux séries exponentielles, alors

$$f(x) \times g(x) = \sum_{n \geq 0} f_n g_n \frac{x^n}{n!}$$

2. Soient  $f(\mathbf{x}) = \sum f_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})}$  et  $g(\mathbf{x}) = \sum g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})}$  deux séries indicatrices. Alors

$$f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{x}) = \sum f_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})}$$

Ces définitions nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

**Proposition 1.1.19.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Alors, les séries associées à l'espèce  $F \times G$  satisfont aux égalités suivantes,

- (i)  $(F \times G)(x) = F(x) \times G(x),$
- (ii)  $(\widetilde{F \times G})(x) = (Z_F \times Z_G)(x, x^2, x^3, \dots),$
- (iii)  $Z_{F \times G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \times Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).$

La prochaine proposition décrit l'effet de la substitution sur les séries associées.

**Proposition 1.1.20.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces telles que  $G[\emptyset] = \emptyset$ . Alors, les séries associées à l'espèce  $F \circ G$  satisfont aux égalités suivantes,

- (i)  $(F \circ G)(x) = F(G(x)),$
- (ii)  $(\widetilde{F \circ G})(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \dots),$
- (iii)  $Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, \dots), Z_G(x_2, x_4, \dots), Z_G(x_3, x_6, \dots), \dots).$

Passons maintenant au pointage et à la dérivation.

**Proposition 1.1.21.** Soit  $F$  une espèce. Alors, les séries associées à l'espèce  $F^\bullet$  satisfont aux égalités suivantes,

- (i)  $F^\bullet(x) = x \frac{d}{dx} F(x),$
- (ii)  $\widetilde{F^\bullet}(x) = x \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x, x^2, x^3, \dots),$
- (iii)  $Z_{F^\bullet}(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x_1, x_2, x_3, \dots).$

**Proposition 1.1.22.** *Soit  $F$  une espèce. Alors, les séries associées à l'espèce  $F'$  satisfont aux égalités suivantes,*

- (i)  $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x),$
- (ii)  $\widetilde{F'}(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x, x^2, x^3, \dots),$
- (iii)  $Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x_1, x_2, x_3, \dots).$

On remarque encore une fois que le lien unissant le pointage et la dérivation se reflète lors du passage aux séries.

## 1.2 Espèces multisortes et pondérées

Le but de cette section est de généraliser les concepts et résultats précédents aux espèces définies sur plus d'une sorte d'éléments et dont les structures ont un poids associé.

### 1.2.1 Espèces multisortes

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des espèces définies sur un seul ensemble sous-jacent. Or, il est possible d'étendre les notions de la précédente section aux espèces définies sur des ensembles ayant plus d'une sorte d'éléments. C'est ce qu'on appelle des espèces multisortes. Cependant, avant de définir ce type d'espèces, nous définissons ce qu'on entend par multiensemble.

**Définition 1.2.1.** *Soit  $k \geq 1$ . Un **multiensemble**  $U$  (à  $k$  sortes) est un  $k$ -uplet d'ensembles  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ . Un élément  $u \in U_i$  est appelé **élément de  $U$  de sorte  $i$** . Soient  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$  et  $V = (V_1, V_2, \dots, V_k)$  deux multiensembles. Une **multifonction**  $\sigma : U \rightarrow V$  est une famille  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$  de fonctions  $\sigma_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

De façon naturelle, il est possible d'étendre la définition d'espèce (à une sorte) à celle d'espèce multisorte.

**Définition 1.2.2.** *Une espèce sur  $k$  sortes est une règle  $F$  qui associe*

1. à chaque multiensemble fini  $U$  un ensemble fini  $F[U_1, U_2, \dots, U_k]$ ;
2. à chaque multifonction bijective  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) : U \rightarrow V$  entre multissembles, une fonction,

$$F[\sigma] = F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k] : F[U_1, U_2, \dots, U_k] \rightarrow F[V_1, V_2, \dots, V_k],$$

*telle que ces fonctions satisfont aux propriétés de fonctorialité suivantes*

- (a) *pour toutes multifonctions bijectives  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) : U \rightarrow V$  et  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) : V \rightarrow W$ , l'égalité  $F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$  est vérifiée;*
- (b) *pour la multifonction identité  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ , l'égalité  $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}$  est vérifiée.*

La figure 1.10 donne la représentation générale d'une structure appartenant à une espèce multisorte  $F$ .

Il est possible d'associer une espèce de singleton à chaque sorte  $i$  d'éléments.

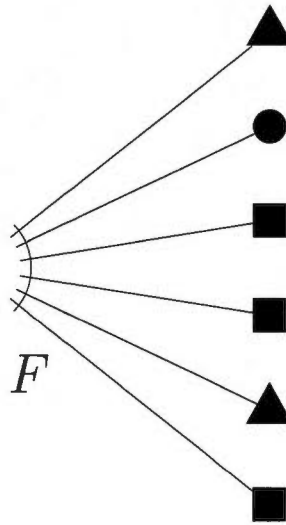
**Définition 1.2.3.** *Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on définit l'espèce (sur  $k$  sortes)  $X_i$  des singletons de sorte  $i$  par*

$$X_i[U] = \begin{cases} U, & \text{si } |U_i| = 1 \text{ et } U_j = \emptyset \text{ pour tout } j \neq i, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

À partir de cette définition, on peut écrire l'espèce à  $k$  sortes  $F$  comme  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ .

De plus, cette écriture est compatible avec l'opération de substitution.

Remarquons que dans le cas où  $k = 1$ , on se retrouve avec une espèce définie sur une seule sorte d'éléments. Les espèces multisortes sont donc bien une généralisation des espèces à une sorte.



**Figure 1.10** Représentation générale d'une  $F$ -structure à trois sortes d'éléments.

Les opérations d'addition, de multiplication, de substitution, de dérivation et de pointage s'étendent toutes au contexte multisorte. Le lecteur est invité à consulter (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) pour une étude plus détaillée de ces opérations sur les espèces, ainsi que des exemples additionnels. Cependant, étant donné son importance dans le présent mémoire, l'opération de dérivation dans le cas multisorte mérite une attention particulière.

Soit l'espèce à  $k$  sortes  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Alors, il existe  $k$  dérivées (partielles) de  $F$ . L'opérateur de dérivation par rapport à la sorte  $i$  pour  $1 \leq i \leq k$  est noté par  $\frac{\partial}{\partial X_i}$ . Analoguement à la définition de la dérivée dans le cas à une sorte, on définit la dérivée de  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$  par rapport à la sorte  $i$  par

$$\left( \frac{\partial}{\partial X_i} F \right) [U_1, U_2, \dots, U_k] = F[U_1, U_2, \dots, U_i + \{*_i\}, \dots, U_k].$$

Il est intéressant de remarquer que l'égalité combinatoire  $F^\bullet = X \cdot F'$  peut s'exprimer, pour le cas des espèces à plusieurs sortes d'éléments, par

$$F^{\bullet i} = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} F,$$



où une  $F^{\bullet i}$ -structure est une  $F$ -structure dans laquelle on a pointé un élément de l'ensemble sous-jacent de sorte  $i$ . Mentionnons que les règles usuelles du calcul différentiel demeurent valides dans ce cas.

Maintenant, nous introduisons deux concepts importants liés aux espèces multisortes qui sont très utiles pour la suite de ce mémoire.

**Définition 1.2.4.** (Classe d'isomorphie selon une sorte) *Soit  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$  une espèce à  $k$  sortes d'éléments. Pour  $1 \leq i \leq k$  donné, on considère l'espèce à  $k - 1$  sortes  $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k$ , notée  $F(X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_k)$  ou encore  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)|_{X_i:=1}$  dont les structures sont les classes d'équivalences de structures selon la relation suivante : pour deux  $F$ -structures  $s$  et  $t$ , on a  $s \sim t$  si et seulement si il existe une bijection  $\sigma_i : U_i \rightarrow U_i$  telle que*

$$F[\text{Id}, \dots, \text{Id}, \sigma_i, \text{Id}, \dots, \text{Id}](s) = t.$$

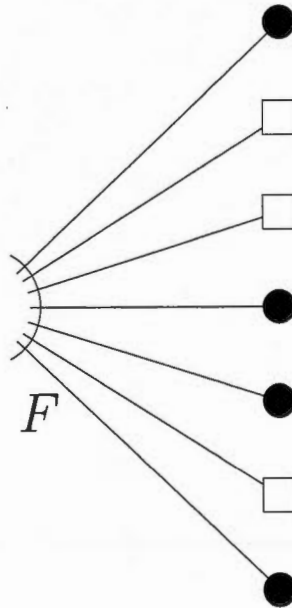
**Remarque.** Géométriquement, la définition 1.2.4 correspond à oublier la nature des éléments de sorte  $i$ . Par convention, les points noirs (●, ■, ▲, etc.) représentent des éléments d'ensemble sous-jacent (aussi appelés éléments étiquetés) alors que les points blancs (○, □, △, etc.) représentent des éléments dont on a oublié la nature, mais dont la sorte est conservée (aussi appelés éléments désétiquetés, voir figure 1.11). Pour une définition plus complète, le lecteur est invité à consulter (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994).

Nous définissons maintenant une nouvelle opération généralisant le produit et le produit cartésien.

**Définition 1.2.5.** Soient  $F(X, T)$  et  $G(X, T)$  deux espèces à deux sortes d'éléments. On définit le **produit cartésien partiel selon la sorte  $T$  de  $F$  et  $G$** , noté  $F(X, T) \times_T G(X, T)$ , par

$$F(X, T) \times_T G(X, T)[(U, V)] := \{(f, g) \mid f \in F[U_1, V] \text{ et } g \in G[U_2, V]\}$$

où  $U_1 \cup U_2 = U$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Le transport des structures est défini, pour toute



**Figure 1.11** Représentation générale d'une  $F(X, T)|_{T=1}$ -structure.

bijection  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  telle que  $\alpha_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} U_1$ ,  $\alpha_2 : U_2 \xrightarrow{\sim} U_2$  et  $\alpha_3 : V \xrightarrow{\sim} V$ , par

$$\alpha(f, g) = (F[\alpha_1, \alpha_3]f, G[\alpha_2, \alpha_3]g).$$

La figure 1.12 donne la représentation typique d'une  $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure.

**Remarque.** En posant  $F(X, T) = F(X)$  et  $G(X, T) = G(X)$  dans la définition 1.2.5, on obtient

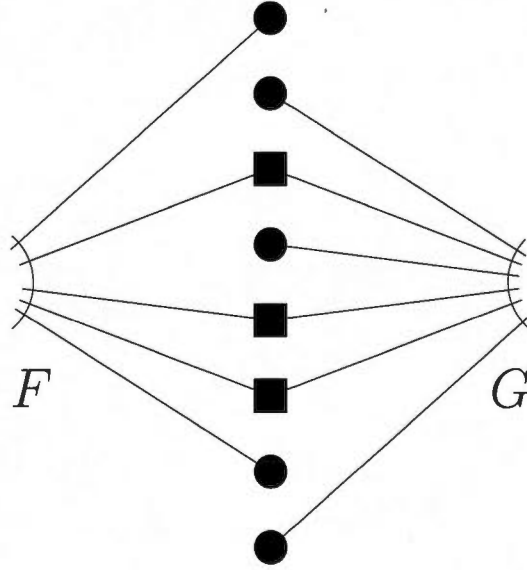
$$F(X, T) \times_T G(X, T) = F(X) \cdot G(X).$$

De même, en posant  $F(X, T) = F(T)$  et  $G(X, T) = G(T)$ , on obtient

$$F(X, T) \times_T G(X, T) = F(T) \times G(T).$$

Le produit cartésien partiel est donc une généralisation du produit et du produit cartésien.

En terminant, nous étudions la série indicatrice des cycles de  $F(X, T) \times_T G(X, T)$ , les autres séries étant obtenues en généralisant la proposition 1.1.9 au cas multisorte. Notons qu'une analyse plus poussée du sujet est disponible dans (Sney-Lacasse, 2007).



**Figure 1.12** Représentation générale d'une  $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure.

Notons d'abord que la série indicatrice d'une espèce  $F(X, T)$  peut s'écrire sous la forme

$$Z_{F(X, T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots,$$

où

$$f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$$

(voir (Sney-Lacasse, 2007) pour les détails). Ceci nous permet de définir le produit cartésien de deux séries indicatrices.

**Définition 1.2.6.** Soient

$$f = f(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

et

$$g = g(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

deux séries indicatrices. Le produit cartésien partiel de  $f$  et  $g$ , noté  $f \times_t g$ , est la série

indicatrice définie par

$$f \times_t g = (f \times_t g)(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_\tau(x_1, x_2, \dots) g_\tau(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

De la définition 1.2.6 découle la proposition suivante, définissant la série indicatrice du produit cartésien partiel de deux espèces à deux sortes par rapport à la sorte  $T$ .

**Proposition 1.2.7.** *Soient  $F(X, T)$  et  $G(X, T)$  deux espèces à deux sortes d'éléments. La série indicatrice des cycles de  $F(X, T) \times_T G(X, T)$  est donnée par*

$$Z_{F(X, T) \times_T G(X, T)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = Z_{F(X, T)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times_t Z_{G(X, T)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}),$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  et  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ .

### 1.2.2 Espèces pondérées

Maintenant, rappelons ce que sont les espèces pondérées, c'est-à-dire les espèces pour lesquelles on a attaché un poids à chaque structure. Ce type d'espèces est très utile car il permet un dénombrement plus raffiné des structures. Mais d'abord, définissons ce qu'on entend par un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré.

**Définition 1.2.8.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de polynômes ou de séries formelles en une ou plusieurs variables à coefficients dans un sous-anneau  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ . Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré est un couple  $(A, w)$ , où  $A$  est un ensemble et  $w : A \rightarrow \mathbb{A}$  est une fonction qui associe un poids  $w(\alpha) \in \mathbb{A}$  à chaque  $\alpha \in A$ .*

À partir de la notion d'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré, on peut définir la notion d'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée.

**Définition 1.2.9.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de polynômes ou de séries formelles en une ou plusieurs variables à coefficients dans un sous-anneau  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ . Une **espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée** est une règle  $F$  qui associe,*

1. à chaque ensemble fini  $U$  un ensemble fini  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(F[U], w_U)$ ;

2. à chaque bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  une fonction  $F[\sigma] : (F[U], w_U) \rightarrow (F[V], w_V)$  préservant les poids telle que chaque fonction satisfasse aux propriétés de fonctorialité suivantes

(a) pour toutes bijections  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$ , l'égalité  $F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$  est vérifiée;

(b) pour la bijection identité  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ , l'égalité  $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}$  est vérifiée.

Afin d'illustrer l'utilité de ce type d'espèces, considérons l'exemple suivant :

**Exemple 1.2.10.** Soit  $S$  l'espèce des permutations. On assigne un poids à chaque élément  $\sigma$  de  $S[U]$  de la façon suivante :

$$w(\sigma) = t^{f_k(\sigma)}$$

où  $f_k(\sigma)$  est le nombre de cycles de longueur  $k \leq |U|$  de  $\sigma$ . Cette espèce pondérée permet alors de compter le nombre de permutations de  $U$  ayant  $l$  cycles de longueur  $k$ .

En terminant, mentionnons qu'il est possible de redéfinir les notions d'addition, de multiplication, de substitution de pointage et de dérivation en termes d'espèces multi-sortes pondérées. Ces redéfinitions font en sorte que les espèces conservent les propriétés énoncées précédemment au niveau des séries formelles.

### 1.3 Espèces moléculaires et atomiques

Dans cette section, nous étudions la décomposition d'une espèce. Nous savons que tout nombre entier se décompose, de façon unique, en produits de puissances de nombres premiers. De la même façon, nous aimerions trouver une décomposition standard de toute espèce  $F$ . Les espèces moléculaires et atomiques vont nous permettre de faire cette décomposition.

### 1.3.1 Espèces moléculaires et atomiques à une sorte

Dans un premier temps, nous définissons le concept d'espèce moléculaire et atomique dans le cas des espèces à une sorte d'éléments.

**Définition 1.3.1.** *Une espèce  $M$  est dite **moléculaire** s'il n'y a qu'un seul type d'isomorphie de  $M$ -structures.*

On peut aussi montrer qu'une espèce est moléculaire si et seulement si elle est indécomposable (sauf trivialement) sous la somme. En d'autres termes, pour toutes espèces  $P$  et  $Q$ ,  $M = P + Q$  si et seulement si  $P = 0$  ou  $Q = 0$ .

De façon analogue, on a la définition d'une espèce atomique :

**Définition 1.3.2.** *Une espèce  $A$  est dite **atomique** si elle est moléculaire et si elle est indécomposable (sauf trivialement) sous le produit. En d'autres termes, pour toutes espèces  $P$  et  $Q$ ,  $A = PQ$  si et seulement si  $P = 1$  ou  $Q = 1$ .*

**Exemple 1.3.3.** *L'espèce  $X \cdot E_2$  est moléculaire non-atomique alors que l'espèce  $E_2$  est atomique.*

La proposition suivante, due à Yeh dans (Yeh, 1985) et dont la démonstration est assez technique, permet de relier les espèces moléculaires aux espèces atomiques.

**Proposition 1.3.4.** *Toute espèce moléculaire s'écrit comme un produit fini d'espèces atomiques de façon unique à l'ordre des facteurs et à isomorphisme près. En d'autres termes,*

$$M = A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_k^{n_k}$$

*où les  $A_i$  sont des espèces atomiques distinctes.*

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous définissons ce qu'est une sous-espèce.

**Définition 1.3.5.** Soit  $F$  une espèce. On dit que l'espèce  $G$  est une **sous-espèce** de  $F$  si, pour tous les ensembles finis  $U$  et  $V$  et toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , on a :

- $G[U] \subseteq F[U]$ ,
- $G[\sigma] = F[\sigma] \upharpoonright_{G[V]}$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

**Proposition 1.3.6.** Toute espèce  $F$  peut être décomposée (de façon unique) selon la forme standard

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M$$

où  $\mathcal{M}$  est l'ensemble (dénombrable) des espèces moléculaires et  $f_M \in \mathbb{N}$  est le nombre de sous-espèces de  $F$  isomorphes à  $M$ .

Une conséquence de ce résultat est que deux espèces  $F$  et  $G$  sont isomorphes si et seulement si  $f_M = g_M$  pour toute espèce  $M \in \mathcal{M}$ . De plus, les propositions 1.3.4 et 1.3.6 impliquent qu'une espèce se décompose de façon unique par rapport aux espèces atomiques. Plus précisément, toute espèce peut être considérée comme un élément du demi-anneau  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$  où  $\mathcal{A}$  est la liste des espèces atomiques.

**Exemple 1.3.7.** Soit  $\mathcal{G}_{\leq 4}$  l'espèce des graphes simples sur 4 points ou moins. Alors, on a la décomposition moléculaire suivante (voir figure 1.13) :

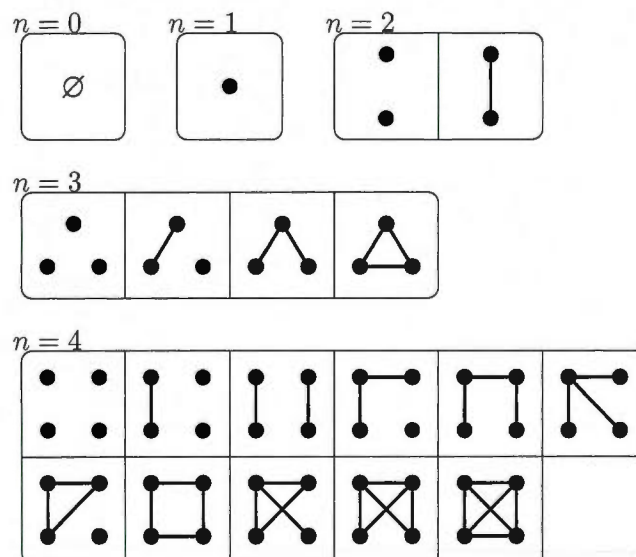
$$\mathcal{G}_{\leq 4} = 1 + X + 2E_2 + 2E_3 + 2X \cdot E_2 + 2E_4 + 2E_2 \cdot E_2 + 2E_2 \circ E_2 + 2X \cdot E_3 + 2X^2 \cdot E_2 + E_2 \circ X^2$$

Maintenant, nous aimerions pouvoir construire l'ensemble  $\mathcal{M}$  des espèces moléculaires. Pour ce faire, on considère un système de représentants  $\text{Conj}(S_n)$  des classes de conjugaisons des sous-groupes de  $S_n$ . Ensuite, on construit, pour chaque sous-groupe  $H \in \text{Conj}(S_n)$ , une espèce moléculaire  $M_H$  correspondant à l'action transitive

$$S_n \times S_n/H \rightarrow S_n/H.$$

Finalement, on pose  $\mathcal{M}_n = \{M_H | H \in \text{Conj}(S_n)\}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1 \cup \dots$ .





**Figure 1.13** Types d'isomorphie de l'espèce des graphes simples sur  $n \leq 4$  points.

Voici une description explicite de l'espèce moléculaire  $M_H$ .

**Définition 1.3.8.** Soient  $n \geq 0$ ,  $H$  un sous-groupe de  $S_n$ . On définit l'espèce moléculaire  $M_H$ , notée  $\frac{X^n}{H}$ , par

$$\frac{X^n}{H}[U] = \{\lambda H \mid \lambda : [n] \rightarrow U, \text{ bijection}\}$$

pour tout ensemble fini  $U$ , où  $\lambda H = \{\lambda \circ h \mid h \in H\}$ . Le transport  $\frac{X^n}{H}[\beta] : \frac{X^n}{H}[U] \rightarrow \frac{X^n}{H}[V]$ , où  $\beta : U \rightarrow V$  est une bijection quelconque, est défini en posant

$$\frac{X^n}{H}[\beta](\lambda H) = (\beta \circ \lambda)H$$

**Remarque.** Intuitivement,  $M_H[U] = \frac{X^n}{H}[U]$  est l'ensemble des mots bijectifs de longueur  $n$  sur  $U$  à permutation dans  $H$  près des lettres.

On peut vérifier que ceci définit bien une espèce moléculaire et que toute espèce moléculaire  $M \in \mathcal{M}$  peut s'écrire sous la forme  $M = \frac{X^n}{H}$  où  $H = \text{Stab}(s)$  et  $s \in M[n]$  est une  $M$ -structure quelconque. De plus, il est démontré, entre autre, dans (Sney-Lacasse, 2007) que deux espèces moléculaires  $\frac{X^n}{H}$  et  $\frac{X^m}{K}$  sont égales si et seulement si  $n = m$  et  $H$  est conjugué à  $K$  dans  $S_n$ .



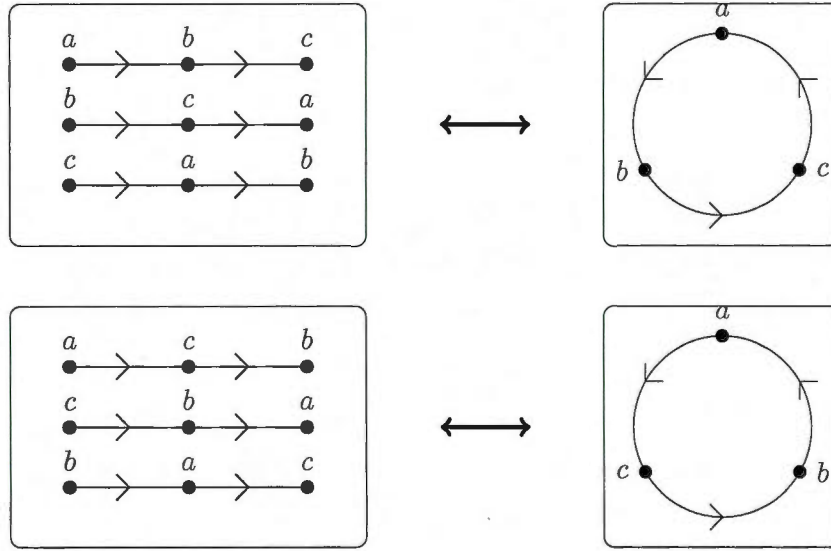


Figure 1.14  $\frac{X^3}{\langle\langle(1\ 2\ 3)\rangle\rangle} = C_3$

**Exemple 1.3.9.** Soit  $n = 3$ ,  $U = \{a, b, c\}$  et  $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$  un sous-groupe cyclique de  $S_3$ . Alors, on calcule par la définition précédente que

$$\frac{X^3}{H}[U] = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

Cet ensemble est isomorphe à  $C_3[U] = \{(a\ b\ c), (a\ c\ b)\}$ , l'ensemble des cycles de longueur 3 sur  $U$ . La figure 1.14 permet de visualiser cet isomorphisme.

Plus généralement, si  $H = \langle\sigma\rangle$  où  $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in S_n$ , alors,  $\frac{X^n}{H} = C_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

Puisque l'espèce  $\frac{X^n}{H}$  est moléculaire, toute espèce (à une sorte)  $F(X)$  peut être écrite, par la proposition 1.3.6 et la remarque précédente, sous la forme standard

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{H \in \text{Conj}(S_n)} f_H \frac{X^n}{H} \quad (1.1)$$

où  $f_H$  est le nombre de  $F$ -structures sur  $[n]$  dont le stabilisateur est conjugué à  $H$ .

**Remarque.** Nous utiliserons la forme compacte  $H \leq G$  pour signifier qu'un groupe  $H$  parcourt un système de représentants des classes de conjugaisons des sous-groupes d'un groupe  $G$ , c'est-à-dire  $H \leq G$  ssi  $H \in \text{Conj}(G)$ . Ainsi, (1.1) prend la forme plus compacte

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{H \leq S_n} f_H \frac{X^n}{H}$$

### 1.3.2 Espèces moléculaires et atomiques multisortes pondérées

Pour terminer cette section, mentionnons qu'il est possible d'étendre le concept d'espèce moléculaire aux cas multisorte et pondéré. Pour ce faire, on considère les groupes  $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_k}$  où  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  parcourt tous les multicaordinaux possibles. Dans ce cas,  $k$  est le nombre de sortes d'éléments des espèces considérées.

De plus, le groupe  $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_k}$  est isomorphe au groupe  $S_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  des permutations de  $[n_1 + n_2 + \cdots + n_k]$  permutant entre eux les  $n_1$  premiers éléments (considérés de sorte  $X_1$ ), puis les  $n_2$  éléments suivants (considérés de sorte  $X_2$ ), etc. À tout sous-groupe  $H$  de  $S_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  correspond une espèce moléculaire à  $k$  sortes dénotée

$$\frac{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}}{H}.$$

Tout comme dans le cas à une sorte, toute espèce à  $k$  sortes  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$  peut être écrite sous la forme standard

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0} \sum_{H \leq S_{n_1, n_2, \dots, n_k}} f_H \frac{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}}{H} \quad (1.2)$$

où  $f_H \in \mathbb{N}$ .

Vu son utilité pour la suite de ce mémoire, nous explicitons ici quelques résultats sur le produit d'espèces à deux sortes.

**Définition 1.3.10.** Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $S_{a_1, b_1}$  et  $S_{a_2, b_2}$  respectivement. Le sous-groupe  $H * K$  de  $S_{a_1+a_2, b_1+b_2}$  est défini par

$$H * K = \{\omega = h * k \mid h \in H \text{ et } k \in K\},$$

avec

$$\begin{aligned} \omega(1) \dots \omega(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) &:= h(1) \dots h(a_1) (a_1 + k(1)) \dots \\ &\dots (a_1 + k(a_2)) (a_2 + h(1 + a_1)) \dots \\ &\dots (a_2 + h(a_1 + b_1)) (a_1 + b_1 + k(1 + a_2)) \dots \\ &\dots (a_1 + b_1 + k(a_2 + b_2)). \end{aligned}$$

**Exemple 1.3.11.** Si  $h = 2 \ 3 \ 1 \ 5 \ 4 \in S_{3,2}$  et  $k = 1 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \ 3 \in S_{2,4}$ , alors

$$h * k = 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 7 \ 6 \ 11 \ 9 \ 10 \ 8 \in S_{5,6}.$$

**Proposition 1.3.12.** (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998) Soient  $X^{a_1}T^{b_1}/H$  et  $X^{a_2}T^{b_2}/K$  deux espèces moléculaires à deux sortes, où  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $S_{a_1, b_1}$  et  $S_{a_2, b_2}$  respectivement. Alors,

$$\frac{X^{a_1}T^{b_1}}{H} \cdot \frac{X^{a_2}T^{b_2}}{K} = \frac{X^{a_1+a_2}T^{b_1+b_2}}{H * K}.$$

Le produit cartésien  $H \times K$  peut être identifié au groupe  $H * K$  grâce à l'isomorphisme  $(h, k) \mapsto h * k$ . De là, nous déduisons le corollaire suivant qui est fondamental pour la construction du groupe  $H * K$  à partir des générateurs de  $H$  et  $K$ .

**Corollaire 1.3.13.** Si  $H$  et  $K$  sont engendrés par les ensembles  $\{h_1, h_2, \dots, h_p\}$  et  $\{k_1, k_2, \dots, k_q\}$  respectivement, alors  $H * K$  est engendré par l'ensemble

$$\{h_1 * \text{Id}_K, h_2 * \text{Id}_K, \dots, h_p * \text{Id}_K, \text{Id}_H * k_1, \text{Id}_H * k_2, \dots, \text{Id}_H * k_q\}.$$

Finalement, pour le cas pondéré, on suppose dorénavant que le poids de chaque structure est un monôme unitaire de  $\mathbb{A}$ . Dans ce cas, on peut écrire toute espèce moléculaire sous

la forme standard  $\mu M$  où  $\mu$  est un monôme unitaire dans  $\mathbb{A} = \mathbb{N}[[s, t, u, \dots]]$  et  $M$  est une espèce moléculaire à  $k$  sortes. On a alors que toute espèce (à  $k$  sortes)  $\mathbb{A}$ -pondérée s'écrit sous la forme standard

$$F_\omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0} \sum_{H \leq S_{n_1, n_2, \dots, n_k}} f_H(s, t, u, \dots) \frac{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}}{H} \quad (1.3)$$

où  $f_H(s, t, u, \dots) \in \mathbb{A}$ .

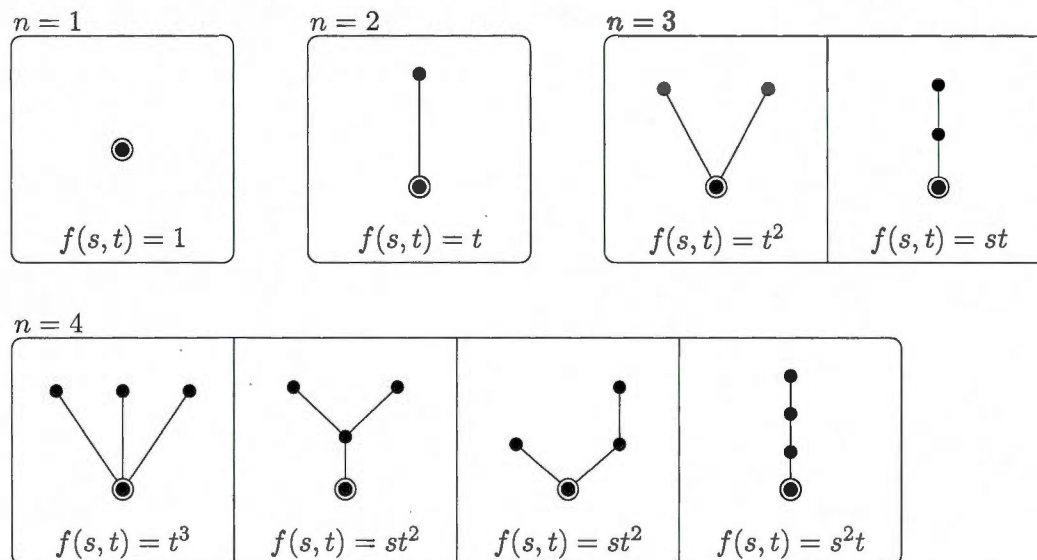
**Exemple 1.3.14.** Soit  $\mathcal{A}_{\leq 4, f}$  l'espèce des arborescence sur 4 points ou moins, pondérée par  $f(s, t) = s^{\omega_1(\alpha)} t^{\omega_2(\alpha)}$  où  $\omega_1(\alpha)$  est le nombre de noeuds intérieurs (sans la racine) de l'arborescence  $\alpha$  et  $\omega_2(\alpha)$  est le nombre de feuilles de  $\alpha$ . Alors, on a la décomposition moléculaire suivante de cette espèce (unisorte) pondérée (voir figure 1.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\leq 4, f} &= X + tX^2 + t^2XE_2 + stX^3 + t^3XE_3 + st^2X^2E_2 + st^2X^4 + s^2tX^4 \\ &= X + tX^2 + t^2XE_2 + stX^3 + t^3XE_3 + st^2X^2E_2 + (st^2 + s^2t)X^4. \end{aligned}$$

**Remarque.** La proposition 1.3.6 n'est pas valide dans le cas pondéré. Par exemple,  $(sX^2) \cdot (tE_3) = stX^2E_3 = (tX^2) \cdot (sE_3)$  représentent trois écritures différentes de l'espèce  $(st)X^2E_3$  comme produit d'espèces atomiques. Pour avoir l'unicité, il suffit, dans un premier temps, de se doter d'un ordre sur l'ensemble des espèces moléculaires. Ensuite, on place systématiquement tous les poids à gauche de  $\frac{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}}{H}$  en conservant l'ordre d'apparition dans l'expression.

#### 1.4 Extension aux $\mathbb{C}$ -espèces

Il est possible d'étendre les décompositions moléculaires (1.1) et (1.3) aux cas où les coefficients  $f_H$  et  $f_H(s, t, u, \dots)$  sont, respectivement, des nombres complexes ( $f_H \in \mathbb{C}$ ) et des séries formelles en les variables  $s, t, u$ , etc. à coefficients complexes ( $f_H(s, t, u, \dots) \in$



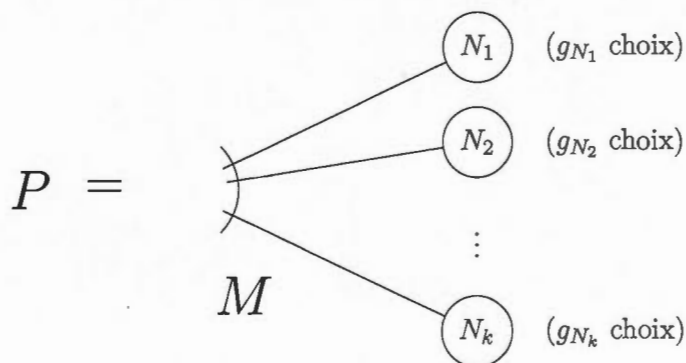
**Figure 1.15** Types d'isomorphie de l'espèce des arborescences sur  $n \leq 4$  points, pondérées par  $f$ .

$\mathbb{C}[[s, t, u, \dots]]$ <sup>1</sup>. Ceci donne lieu au concept de  $\mathbb{C}$ -espèces multisortes pondérées.

Les opérations d'addition, de multiplication, de dérivation et de pointage sont faciles à étendre à ce contexte par linéarité et bilinéarité. La difficulté se situe au niveau de l'opération de substitution.

Le but de cette section est donc d'explicitier le problème d'extension de l'opération de substitution au contexte des  $\mathbb{C}$ -espèces. Dans un premier temps, nous expliquons comment faire dans le cas des espèces à une sorte non-pondérées. Puis, nous nous attaquons au cas multisorte pondéré. Mentionnons cependant que ce problème a été résolu simultanément par Yeh et Joyal (voir (Yeh, 1985) et (Joyal, 1985b)).

1. Plus généralement,  $\mathbb{C}$  peut être remplacé par un demi-anneau binomial ou par un  $\lambda$ -anneau. Voir (Yeh, 1985) et (Joyal, 1985a) pour une étude plus poussée du sujet.



**Figure 1.16**  $M \circ G = \sum_{P \in \mathcal{M}} \omega_P P$

#### 1.4.1 Extension dans le cas unisorte non-pondéré

Dans un premier temps, essayons d'étendre l'opération de substitution au contexte des espèces à une sorte d'éléments et non-pondérées. On remarque d'abord que pour définir  $F \circ G$ , où  $F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M$  et  $G = \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N N$  avec  $G(0) = g_1 = 0$ , il suffit, par linéarité, de définir

$$M \circ G = M \circ \left( \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N N \right)$$

où  $M$  est une espèce moléculaire de degré  $n$  ( $M = \frac{X^n}{H}$ ).

Regardons d'abord le cas où les coefficients  $g_N \in \mathbb{N}$  sont variables. Posons a priori

$$M \circ G = \sum_{P \in \mathcal{M}} \omega_P P.$$

Intuitivement, une  $M \circ G$ -structure moléculaire sur  $[k]$  appartenant à l'espèce  $P$  a la forme indiqué à la figure 1.16,

où  $\deg N_i \leq k$  et  $\sum_i \deg N_i = k$ .

Or, on a  $g_{N_i}$  choix pour  $N_i$ . Donc, on a une contribution de  $\prod_i g_{N_i}$  choix pour cette forme de l'espèce  $P$ .

Mais, il y a un nombre fini de façons d'exprimer une espèce moléculaire  $P$  sous la forme

de la figure 1.16. Donc, en sommant, on trouve que  $\omega_P$  est un polynôme

$$\omega_P = \omega_P \left( (g_N)_{N \in \mathcal{M}_{\leq k}} \right)$$

en un nombre fini de variables  $(g_N)_{N \in \mathcal{M}}$ .

**Remarque.** En fait, nous verrons un peu plus loin que  $\omega_P$  est une combinaison linéaire de coefficients binomiaux  $\binom{g_{N_i}}{k}$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .

Finalement, dans le cas où les  $g_N$  appartiennent au corps  $\mathbb{C}$  des complexes, on prend le même polynôme pour définir  $M \circ P$ .

Bien que ce raisonnement intuitif fournisse une bonne explication de la problématique, il ne constitue cependant pas une preuve formelle. Afin, de démontrer que l'opération de substitution est bien définie dans le cas des  $\mathbb{C}$ -espèces, nous utilisons la méthode de Yeh, développée dans (Yeh, 1985).

D'abord, si  $n_1, n_2, \dots$  sont des entiers positifs ou nuls, alors, pour toute espèce  $F$ ,

$$F(n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots) = F(X_1 + X_2 + \dots) \times E(n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots). \quad (1.4)$$

Une observation attentive de la figure 1.17, illustrant l'équation 1.4 dans le cas de l'espèce pondérée à trois sortes  $F(3X + 5Y + 100Z)$ , permet de s'en convaincre.

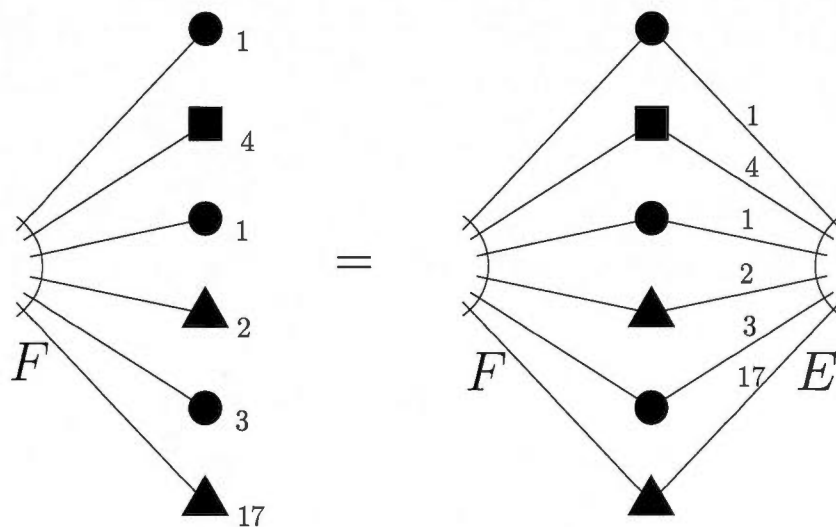
Or,

$$\begin{aligned} E(n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots) &= E(n_1 X_1) \cdot E(n_2 X_2) \dots \\ &= (E(X_1))^{n_1} \cdot (E(X_2))^{n_2} \dots \\ &= (1 + E_+(X_1))^{n_1} \cdot (1 + E_+(X_2))^{n_2} \dots \end{aligned}$$

où  $E_+(X_i)$  désigne l'espèce des ensembles non vides de singletons de sorte  $i$ .

De plus, par le binôme de Newton, nous avons que

$$\begin{aligned} (1 + E_+(X))^{n_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n_1}{k} (E_+(X))^{n_1 k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_1(n_1-1) \cdots (n_1-k+1)}{k!} (E_+(X))^{n_1 k} \end{aligned}$$



**Figure 1.17**  $F(3X + 5Y + 100Z) = F(X + Y + Z) \times E(3X + 5Y + 100Z)$

Remarquons que le terme  $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$  est un polynôme en la variable  $n$  à coefficients rationnels. Ce résultat nous permet d'écrire

$$E(n_1X_1 + n_2X_2 + \dots) = \prod_i \left( \sum_{k_i} \binom{n_i}{k_i} (E_+(X_i))^{k_i} \right) = \sum_{k_1, k_2, \dots} \left( \prod_i \binom{n_i}{k_i} (E_+(X_i))^{k_i} \right)$$

qui est une combinaison linéaire à coefficient polynomiaux en les variables  $n_1, n_2, \dots$  d'espèces moléculaires de la forme de produits de  $E_i(X_j)$ .

Nous pouvons donc écrire l'équation 1.4 comme

$$\begin{aligned} F(n_1X_1 + n_2X_2 + \dots) &= F(X_1 + X_2 + \dots) \times \sum_{k_1, k_2, \dots} \left( \prod_i \binom{n_i}{k_i} (E_+(X_i))^{k_i} \right) \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots} \prod_i \binom{n_i}{k_i} \left( F(X_1 + X_2 + \dots) \times \prod_i (E_+(X_i))^{k_i} \right) \\ &= \sum_j \omega_j(n_1, n_2, \dots) M_j(X_1, X_2, \dots) \end{aligned}$$

où  $\omega_j(n_1, n_2, \dots)$  est un polynôme appartenant à  $\mathbb{C}[n_1, n_2, \dots]$  et où  $M_j(X_1, X_2, \dots)$  est une espèce moléculaire multisorte.



Finalement, en numérotant les espèces moléculaires unisortes  $M_1 = X$ ,  $M_2 = X^2$ ,  $M_3 = E_2$ , etc. nous obtenons la représentation suivante de la substitution de  $\mathbb{C}$ -espèces.

$$F \circ G = F \left( \sum n_i M_i \right) = F \left( \sum n_i X_i \right) \Big|_{X_i := M_i}$$

qui est une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux appartenant à  $\mathbb{Q}[n_1, n_2, \dots]$  d'espèces moléculaires  $M_i = \frac{X^k}{H}$ .

**Exemple 1.4.1.** Vérifions que la décomposition moléculaire de l'espèce  $C_3(mX)$  est bien une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux en la variable  $m$  d'espèces moléculaires. En appliquant la méthode de Yeh, nous obtenons que

$$\begin{aligned} C_3(mX) &= C_3(X) \times E(mX) \\ &= C_3(X) \times (1 + E_+(X))^m \\ &= C_3(X) \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (E_+(X))^k \\ &= C_3 \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (E_1 + E_2 + E_3 + \dots)^k. \end{aligned}$$

Or, puisque  $C_3(mX)$  est une espèce d'ordre 3, la précédente égalité devient

$$\begin{aligned} C_3(mX) &= C_3 \times \left( \binom{m}{1} E_3 + \binom{m}{2} \cdot 2E_1 E_2 + \binom{m}{3} E_1^3 \right) \\ &= \binom{m}{1} C_3 \times E_3 + 2 \binom{m}{2} C_3 \times E_1 E_2 + \binom{m}{3} C_3 \times E_1^3 \\ &= m(C_3 \times E_3) + m(m-1)(C_3 \times X E_2) + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} (C_3 \times X^3) \\ &= mC_3 + m(m-1)X^3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot 2X^3 \\ &= \frac{m^3 - m}{3} X^3 + mC_3 \end{aligned}$$

qui est bien une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux à coefficients rationnels en la variable  $m$  d'espèces moléculaires.

Mentionnons que cette définition est correcte au sens où les identités usuelles pour l'opération de substitution, telles que  $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H)$  et  $(F \circ G)' =$

$(F' \circ G) \cdot G'$ , sont encore valables en invoquant le principe de prolongement des identités polynomiales, évoqué dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994).

**Proposition 1.4.2.** (Principe de prolongement des identités polynomiales)

Si  $P(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]$  et  $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]$  sont tels que, pour tout  $(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ , on ait  $P(n_1, n_2, \dots, n_m) = Q(n_1, n_2, \dots, n_m)$ , alors  $P = Q$  dans  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ .

*Démonstration.* Considérons le polynôme  $D = P - Q$ . Par hypothèse,

$D(n_1, n_2, \dots, n_m) = 0$  pour tout  $(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ . Nous voulons montrer que  $D = 0$  dans  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ . Pour ce faire, nous procédons par induction sur le nombre  $m$  de variables.

D'abord, si  $m = 1$ , alors  $D(n_1) = 0$  pour tout  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Le polynôme  $D \in \mathbb{C}[x_1]$  possède donc une infinité de racines. Par conséquent,  $D$  est identiquement nul puisque tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.

Maintenant, supposons que le résultat est vrai pour  $m$  et considérons un polynôme  $D \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{m+1}]$  satisfaisant  $D(n_1, n_2, \dots, n_{m+1}) = 0$  pour tout  $(n_1, n_2, \dots, n_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$ . Fixons à présent  $(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ . Étant donné que  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{m+1}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m][x_{m+1}]$ , on a que  $D$  peut s'écrire sous la forme d'un polynôme

$$D(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = p_0(x_1, x_2, \dots, x_m) + p_1(x_1, x_2, \dots, x_m)x_{m+1} \\ + p_2(x_1, x_2, \dots, x_m)x_{m+1}^2 + \dots$$

En particulier, le polynôme en la variable  $x_{m+1}$

$$D(n_1, n_2, \dots, x_{m+1}) = p_0(n_1, n_2, \dots, n_m) + p_1(n_1, n_2, \dots, n_m)x_{m+1} \\ + p_2(n_1, n_2, \dots, n_m)x_{m+1}^2 + \dots$$

s'annule pour une infinité de valeurs de la variable  $x_{m+1}$ . Il est donc identiquement nul.

Ceci signifie que tous les coefficients  $p_i(n_1, n_2, \dots, n_m)$  sont nuls. Comme  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$

est arbitraire, l'hypothèse d'induction nous permet de conclure que chaque  $p_i$  est identiquement nul. Par conséquent,  $D$  est lui aussi identiquement nul, ce qui prouve le résultat. ■

**Remarque.** Il existe une version plus générale de la proposition 1.4.2. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994).

**Exemple 1.4.3.** Vérifions que la relation  $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H)$ , vraie pour les espèces ordinaires, est toujours valide dans le cas où  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont des  $\mathbb{C}$ -espèces.

D'abord, pour le cas des espèces ordinaires, nous avons que  $(F \cdot G) \circ H = \sum_P a_P P$  où  $a_P$  est un polynôme en un nombre fini des variables  $f_M$ ,  $g_N$  et  $h_Q$ . De même,  $(F \circ H) \cdot (G \circ H) = \sum_P b_P P$  où  $b_P$  est un polynôme en un nombre fini des variables  $f_M$ ,  $g_N$  et  $h_Q$ . Or, nous savons que l'égalité  $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H)$  est vraie lorsque  $f_M$ ,  $g_N$  et  $h_Q$  sont des nombres naturels. Par conséquent, on a  $a_P(f_M, g_N, h_Q) = b_P(f_M, g_N, h_Q)$ , pour tout  $f_M$ ,  $g_N$  et  $h_Q \in \mathbb{N}$ . Donc, par le principe de prolongement des identités polynomiales,  $a_P$  est identiquement égal à  $b_P$ . En particulier,  $a_P = b_P$  dans le cas où les coefficients sont complexes.

#### 1.4.2 Extension dans le cas multisorte pondéré

Pour clore ce chapitre, nous étendons le concept de  $\mathbb{C}$ -espèce au cas des espèces multisortes pondérées. Tout comme dans la section précédente, les opérations d'addition, de multiplication, de dérivation et de pointage sont faciles à étendre à ce contexte par linéarité et bilinéarité. Par conséquent, nous montrons comment étendre l'opération de substitution au contexte des  $\mathbb{C}$ -espèces multisortes pondérées. Pour ce faire, nous procédons de façon analogue à la section 1.4.1.

D'abord, observons ce qui se passe dans le cas unisorte pondéré. Pour deux espèces (unisortes pondérées)  $F(X) = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(s, t, \dots)M$  et  $G(X) = \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N(s, t, \dots)N$ ,  $f_M(s, t, \dots), g_N(s, t, \dots) \in \mathbb{N}[[s, t, \dots]]$ , nous avons que  $(F \circ G)(X) = \sum_{P \in \mathcal{M}} \omega_P(s, t, \dots)P$ . Nous voudrions montrer que  $\omega_P(s, t, \dots) \in \mathbb{N}[[s, t, \dots]]$ .

Premièrement, on considère l'égalité suivante,

$$F(\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots) = F(X_1 + X_2 + \dots) \times E(\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots), \quad (1.5)$$

où  $\nu_i = \nu_i(s, t, \dots) \in \mathbb{N}[[s, t, \dots]]$ .

Posons,  $\nu_i = \sum_{\mu \in \text{Mon}} n_{i\mu} \mu$  où  $\mu$  parcourt l'ensemble des monômes unitaires en les  $s, t, \dots$

De plus, nous avons que

$$E(\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots) = E(\nu_1 X_1) \cdot E(\nu_2 X_2) \cdot \dots$$

Or, si  $\nu = \sum_{\mu \in \text{Mon}} n_{\mu} \mu$ , alors

$$\begin{aligned} E(\nu X) &= E\left(\left(\sum_{\mu \in \text{Mon}} n_{\mu} \mu\right) X\right) \\ &= \prod_{\mu} E(n_{\mu} \mu X) \\ &= \prod_{\mu} (E(\mu X))^{n_{\mu}}. \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} E(\mu X) &= E_0(\mu X) + E_1(\mu X) + E_2(\mu X) + E_3(\mu X) + \dots \\ &= 1 + \mu X + \mu^2 E_2(X) + \mu^3 E_3(X) + \dots \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(\nu X) &= \prod_{\mu} (1 + \mu X + \mu^2 E_2(X) + \mu^3 E_3(X) + \dots)^{n_{\mu}} \\ &= \prod_{\mu} (1 + (\mu E_1(X) + \mu^2 E_2(X) + \mu^3 E_3(X) + \dots))^{n_{\mu}} \\ &= \prod_{\mu} \left( \sum_{k \geq 0} \binom{n_{\mu}}{k} (\mu E_1(X) + \mu^2 E_2(X) + \mu^3 E_3(X) + \dots)^k \right) \end{aligned}$$

est une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{C}[[s, t, \dots]]$  de produits d'espèces de la forme  $E_i(X)^{m_i}$ .

Finalement, en substituant le dernier résultat dans (1.5), nous avons

$$\begin{aligned}
 F(\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots) &= F(X_1 + X_2 + \dots) \times [\text{comb. lin. à coeff. dans } \mathbb{C}[[s, t, \dots]] \\
 &\quad \text{de prod. d'esp. de la forme } E_i(X)^{m_{i,j}}] \\
 &= [\text{comb. lin. à coeff. dans } \mathbb{C}[[s, t, \dots]] \\
 &\quad \text{d'éléments de la forme } ] \left( F(X_1 + X_2 + \dots) \times \prod E_i(X)^{m_{i,j}} \right) \\
 &= [\text{comb. lin. à coeff. dans } \mathbb{C}[[s, t, \dots]] \\
 &\quad \text{d'esp. moléculaires } M(X_1, X_2, \dots)].
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $G(X) = \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N(s, t, \dots) N$ , alors  $(M \circ G)(X) = M(\sum \nu_i X_i) \Big|_{\substack{\nu_i := g_{N_i} \\ X_i := N_i}}$  est la bonne définition de l'opération de substitution.

**Exemple 1.4.4.** *Vérifions que la décomposition moléculaire de l'espèce unisorte pondérée  $C_3((2s + s^2t)X)$  est bien une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{C}[[s, t]]$  d'espèces moléculaires. En appliquant la méthode décrite plus haut, tenant compte du fait que  $C_3 \times M = 0$  pour toute espèce moléculaire  $M$  concentrée sur une cardinalité différente de 3 et que  $C_3 \times X^3 = 2X^3$ ,  $C_3 \times XE_2 = X^3$  et  $C_3 \times E_3 = C_3$ , nous obtenons*

$$\begin{aligned}
 C_3((2s + s^2t)X) &= C_3(X) \times E((2s + s^2t)X) \\
 &= C_3(X) \times (E(2sX) \cdot E(s^2tX)) \\
 &= C_3(X) \times ((E(sX))^2 \cdot E(s^2tX)) \\
 &= C_3(X) \times ((1 + sX + s^2E_2(X) + s^3E_3(X) + \dots)^2 \cdot \\
 &\quad (1 + s^2tX + s^4t^2E_2(X) + s^6t^3E_3(X) + \dots)) \\
 &= C_3(X) \times (\dots + (s^6t^3 + 2s^3)E_3(X) + (2s^5t^2 + 2s^4t + 2s^3)XE_2(X) \\
 &\quad + (s^4t)X^3 + \dots) \\
 &= (s^6t^3 + 2s^3)C_3(X) + (2s^5t^2 + 2s^4t + 2s^3)X^3 + (2s^4t)X^3 \\
 &= (2s^5t^2 + 4s^4t + 2s^3)X^3 + (s^6t^3 + 2s^3)C_3(X)
 \end{aligned}$$

*qui est bien une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{C}[[s, t]]$  d'espèces moléculaires.*

En terminant, mentionnons que pour étendre l'opération de substitution au contexte des

C-espèces multisortes, pondérées ou non, on procède de la même manière en utilisant l'équation suivante :

$$F(\nu_{ij}\mathbf{X}_{ij}) = F(\mathbf{X}_{ij}) \times E(\nu_{ij}\mathbf{X}_{ij}),$$

où  $\nu_{ij}\mathbf{X}_{ij} = \nu_{11}X_{11} + \nu_{12}X_{12} + \dots; \nu_{21}X_{21} + \nu_{22}X_{22} + \dots; \dots$  et  $\mathbf{X}_{ij} = X_{11} + X_{12} + \dots; X_{21} + X_{22} + \dots; \dots$



## CHAPITRE II

### OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES

#### 2.1 Opérateurs $D$ et $D^n$

Dans cette section, nous poursuivons l'étude de l'opérateur de dérivation  $D$  amorcée à la section 1.1.3. Rappelons que nous y avons défini les notions de dérivation dans le cas unisorte et multisorte, l'effet de l'opérateur  $D$  lors du passage aux séries, ainsi que le lien combinatoire unissant les opérations de pointage et de dérivation. Les propriétés et exemples introduits ici permettent une meilleure compréhension des notions présentées ultérieurement.

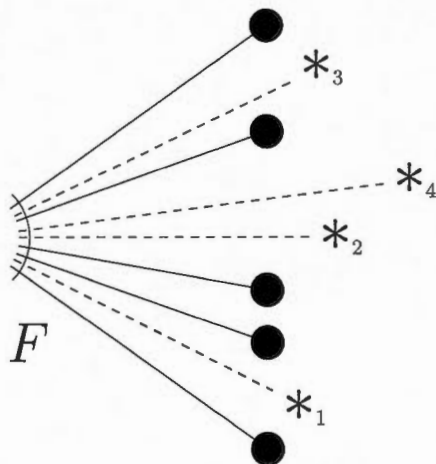
##### 2.1.1 Définition

L'application de l'opérateur de dérivation  $D$  sur une espèce  $F$  permet d'obtenir  $DF$ , l'espèce dérivée de  $F$ . Par conséquent, on peut appliquer à nouveau l'opérateur  $D$  sur celle-ci afin d'obtenir l'espèce  $DDF$ , notée  $D^2F$ . En itérant ce procédé, on obtient, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $D^n$  défini par

$$D^n F = \begin{cases} F & \text{si } n = 0 \\ DD^{n-1}F & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

En d'autres termes, une  $D^n F$ -structure sur un ensemble fini  $U$  est une  $F$ -structure sur l'ensemble sous-jacent  $U \cup \{*_1, *_2, \dots, *_n\}$ , où  $*_1, *_2, \dots, *_n$  est une suite ordonnée de  $n$





**Figure 2.1** Représentation générale d'une  $D^4F$ -structure.

points distincts et extérieurs à  $U$ . La figure 2.1 donne la représentation générale d'une  $D^4F$ -structure.

**Exemple 2.1.1.** Soient  $C$  et  $L$  les espèces des cycles et des listes respectivement. Il est démontré, entre autre dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994), que  $DC = L$  et que  $DL = L^2$ . Par conséquent, on a par définition que

$$D^2C = DDC = DL = L^2.$$

De plus, cette égalité combinatoire se reflète lors du passage aux séries. En effet, on a

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

### 2.1.2 Propriétés et exemples

L'opérateur de dérivation donne lieu à une foule d'identités et de propriétés combinatoires. Nous énonçons ici les principales.

La première proposition est une version combinatoire de la dérivation de somme, de produit et de substitution de fonctions. Le lecteur est invité à consulter (Sney-Lacasse,

2007) pour une démonstration de celle-ci. Rappelons que  $F'$  et  $DF$  sont deux notations équivalentes de la dérivée de  $F$ .

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Alors, nous avons les égalités combinatoires suivantes.*

$$(i) \quad (F + G)' = F' + G',$$

$$(ii) \quad (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G',$$

$$(iii) \quad \text{Si } G[\emptyset] = \emptyset, \text{ alors } (F \circ G)' = (F' \circ G) \cdot G'.$$

**Exemple 2.1.3.** *Montrons, par récurrence sur  $n$ , l'égalité combinatoire  $DX^n = nX^{n-1}$ , où  $X^0 = 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $U$  un ensemble fini. Si  $n = 1$ , alors par définition,*

$$DX[U] = X[U + \{*\}] = \begin{cases} \{U + \{*\}\} & \text{si } |U + \{*\}| = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases},$$

*qui est équivalent à*

$$DX[U] = X[U + \{*\}] = \begin{cases} \{\{*\}\} & \text{si } |U| = 0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$

*On a clairement que  $DX$  est isomorphe à  $1 = X^0$ . Maintenant, supposons que  $DX^n = nX^{n-1}$  pour un certain  $n \geq 1$  et montrons que  $DX^{n+1} = (n+1)X^n$ . Par la proposition 2.1.2 (ii), on a que*

$$\begin{aligned} DX^{n+1} &= (X^n \cdot X)' \\ &= DX^n \cdot X + X^n \cdot DX \\ &= nX^{n-1} \cdot X + X^n \cdot 1 \\ &= nX^n + X^n \\ &= (n+1)X^n. \end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Exemple 2.1.4.** *Montrons, à partir de la proposition 2.1.2, que l'égalité combinatoire  $D(E(G) \cdot F) = E(G) \cdot (F' + G' \cdot F)$  est vraie pour toute espèce  $F$  et  $G$  telle que  $G[\emptyset] = \emptyset$ .*

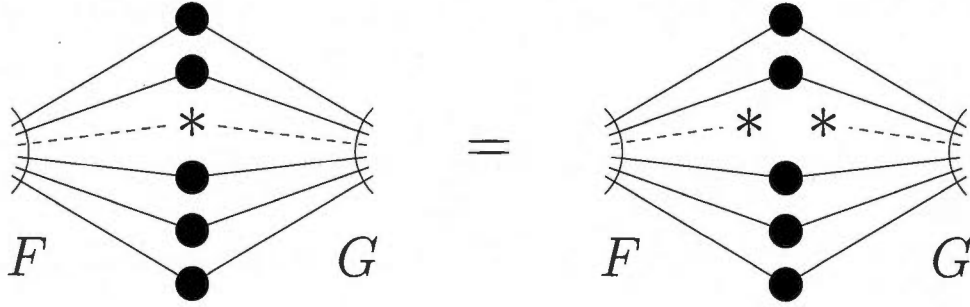


Figure 2.2  $(F \times G)' = F' \times G'$

On a

$$\begin{aligned}
 D(E(G) \cdot F) &= E(G)' \cdot F + E(G) \cdot F' \\
 &= E'(G) \cdot G' \cdot F + E(G) \cdot F' \\
 &= E(G) \cdot G' \cdot F + E(G) \cdot F' \\
 &= E(G)(G' \cdot F + F').
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Remarque.** On a pour le produit cartésien  $(F \times G)' \neq F' \times G + F \times G'$  en général. Par exemple, en prenant  $F = G = E$ , on a  $(F \times G)' = (E \times E)' = E' = E$ , mais  $F' \times G + F \times G' = E' \times E + E \times E' = E \times E + E \times E = E + E = 2E$ . Cependant, la formule suivante est vraie

$$(F \times G)' = F' \times G'$$

comme le démontre la figure 2.2.

Rappelons que pour toute espèce  $F$ , nous avons l'égalité combinatoire  $F^\bullet = X \cdot F'$  (voir figure 1.1.3). En utilisant cette relation en conjonction avec la proposition 2.1.2, nous obtenons la proposition suivante donnant les règles de calcul de l'opération de pointage.

**Proposition 2.1.5.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Alors, nous avons les égalités combinatoires suivantes.

(i)  $(F + G)^\bullet = F^\bullet + G^\bullet,$

$$(ii) (F \cdot G)^{\bullet} = F^{\bullet} \cdot G + F \cdot G^{\bullet},$$

$$(iii) Si G[\emptyset] = \emptyset, alors (F \circ G)^{\bullet} = (F' \circ G) \cdot G^{\bullet}.$$

*Démonstration.*

(i)

$$\begin{aligned} (F + G)^{\bullet} &= X(F + G)' \\ &= X(F' + G') \\ &= X \cdot F' + X \cdot G' \\ &= F^{\bullet} + G^{\bullet}, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (F \cdot G)^{\bullet} &= X(F \cdot G)' \\ &= X(F' \cdot G + F \cdot G') \\ &= X \cdot F' \cdot G + X \cdot F \cdot G' \\ &= X \cdot F' \cdot G + X \cdot G' \cdot F \\ &= F^{\bullet} \cdot G + F \cdot G^{\bullet}, \end{aligned}$$

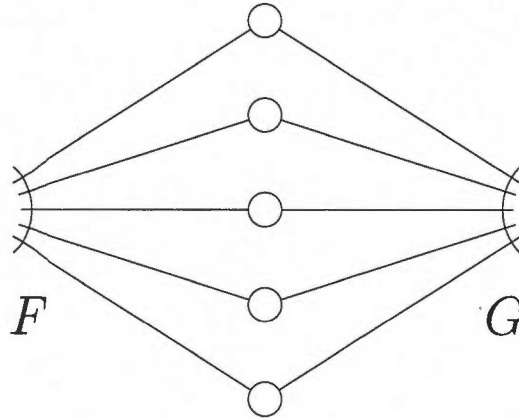
(iii)

$$\begin{aligned} (F \circ G)^{\bullet} &= X(F \circ G)' \\ &= X(F' \circ G) \cdot G' \\ &= (F' \circ G) \cdot X \cdot G' \\ &= (F' \circ G) \cdot G^{\bullet}. \end{aligned}$$



Pour deux espèces  $F$  et  $G$ , il est possible de définir une forme combinatoire bilinéaire  $\langle F, G \rangle$  représentant l'ensemble des types de  $F \times G$ -structures. Cette forme bilinéaire est définie par

$$\langle F, G \rangle = F(X) \times G(X)|_{X:=1}. \quad (2.2)$$



**Figure 2.3** Représentation générale d'une  $\langle F, G \rangle$ -structure.

En fait, une  $\langle F, G \rangle$ -structure est une  $F \times G$ -structure sur laquelle on a oublié la nature des éléments. La figure 2.3 représente une  $\langle F, G \rangle$ -structure typique.

**Remarque.** Si on veut voir  $\langle F, G \rangle$  comme une espèce, il faut, pour tout ensemble fini  $U$ , qu'il y ait un nombre fini de  $\langle F, G \rangle$ -structures sur  $U$ .

Nous n'énoncerons pas ici toutes les propriétés de cette forme bilinéaire. Le lecteur est invité à consulter (Sney-Lacasse, 2007) pour une étude plus détaillée du sujet. Mentionnons toutefois la propriété suivante :

$$\langle DF, G \rangle = \langle F, X \cdot G \rangle .$$

Par analogie avec l'algèbre linéaire, on dira que l'opérateur  $D$ , de dérivation est adjoint à gauche de l'opérateur  $X$ , de multiplication par  $X$ .

Afin de terminer cette section, nous énonçons une proposition qui peut être utilisée comme nouvelle définition de l'opérateur  $D$ . Celle-ci prend un tout autre sens lorsqu'on définit la notion d'opérateur différentiel combinatoire généralisé.

**Proposition 2.1.6.** Soit  $F(X)$  une espèce de structure. Alors, la dérivée de  $F$  peut être exprimée par

$$DF(X) = (E(X) \cdot T) \times F(X + T)|_{T:=1},$$

où  $T$  est une sorte auxiliaire. De façon équivalente, on a que

$$D\hat{F}(X) = T \times_T F(X + T)|_{T:=1}.$$

De la proposition 2.1.6, on déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.7.** *Soit  $F(X)$  une espèce. Alors,*

$$D^n \hat{F}(X) = T^n \times_T F(X + T)|_{T:=1}.$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$  alors

$$D^0 F(X) = T^0 \times_T F(X + T)|_{T:=1} = 1 \times_T F(X + T)|_{T:=1} = F(X).$$

Supposons maintenant la propriété vraie pour  $n$  et montrons que ceci implique qu'elle est aussi vraie pour  $n + 1$ . Par définition,

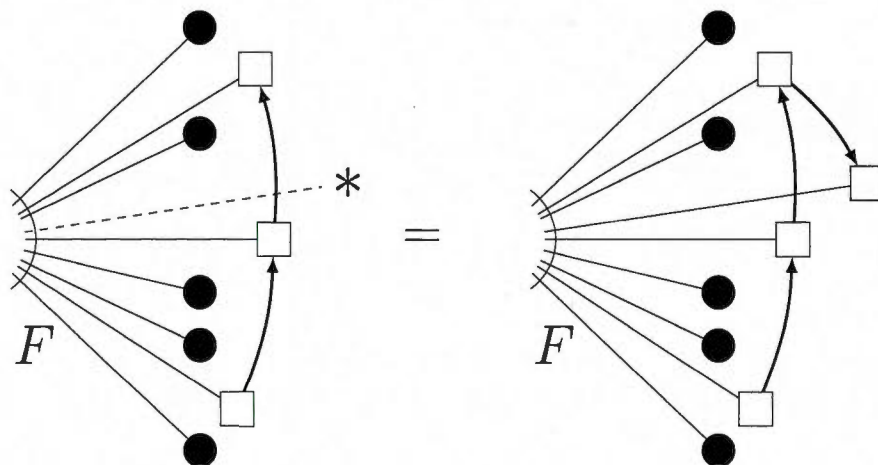
$$D^{n+1} F(X) = DD^n F(X) = D(T^n \times_T F(X + T)|_{T:=1}).$$

Or,  $D(T^n \times_T F(X + T)|_{T:=1}) = T^{n+1} \times_T F(X + T)|_{T:=1}$  (une observation attentive de la figure 2.4 permet de s'en convaincre). On a donc le résultat souhaité. ■

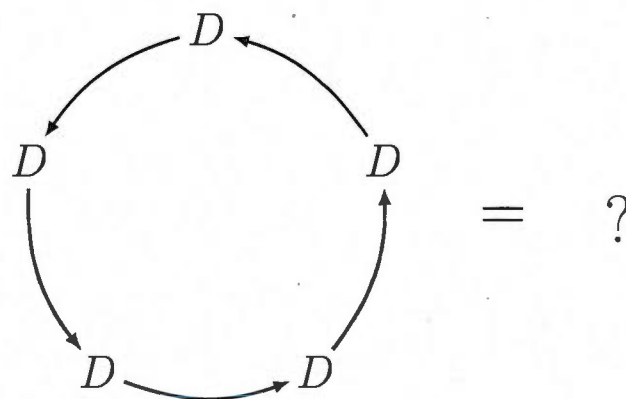
## 2.2 Opérateur $G(D)$

La section précédente donnait un sens combinatoire à une liste d'opérateurs  $D$  en définissant, pour toute espèce  $F$ , l'espèce  $D^n F$ . Ici, nous répondons à la question plus générale suivante : quel sens peut-on donner à un arrangement quelconque d'opérateurs  $D$  ? La figure 2.5 illustre ce problème pour un arrangement circulaire d'opérateurs différentiels.

Joyal a répondu à cette question dans (Joyal, 1986) en introduisant un nouvel opérateur différentiel, défini pour toute espèce unisorte  $G(X)$ , appelé opérateur différentiel pur. On le note  $G(D)$ .



**Figure 2.4**  $D(T^n \times_T F(X + T)|_{T:=1}) = T^{n+1} \times_T F(X + T)|_{T:=1}$ .



**Figure 2.5** Arrangement circulaire de cinq opérateurs différentiels  $D$ .

Après avoir défini ce type d'opérateur et donné les séries génératrices associées, nous donnons quelques propriétés et exemples utiles à la compréhension des opérateurs différentiels plus généraux introduits à la section suivante.

### 2.2.1 Définitions

Avant d'énoncer la définition principale de cette section, nous rappelons la notion d'espèce polynomiale.

**Définition 2.2.1.** Soit  $G(X)$  une espèce se décomposant canoniquement comme

$$G(X) = \sum_{n \geq 0} G_n.$$

On dit que  $G(X)$  est **polynomiale en  $X$**  (ou **finitaire en  $X$** ) si  $\exists N \geq 0$  tel que  $G_n = 0$  pour tout  $n \geq N$ . En d'autres termes,  $\exists N \geq 0$  tel que  $G[U] = \emptyset$  pour tout ensemble fini  $U$  de cardinalité plus grande ou égale à  $N$ .

**Exemple 2.2.2.**  $C(X)$  n'est pas polynomiale en  $X$ . En effet, il n'existe pas de  $n \geq 0$  tel que  $C_n = 0$ .

Nous sommes maintenant prêts à introduire la notion d'opérateur différentiel pur.

**Définition 2.2.3.** Soit  $G(X)$  une espèce. On définit l'opérateur différentiel pur  $G(D)$  en posant, pour toute espèce  $F(X)$ ,

$$G(D)F(X) = (E(X) \cdot G(T)) \times F(X + T)|_{T:=1}$$

ou, de manière équivalente,

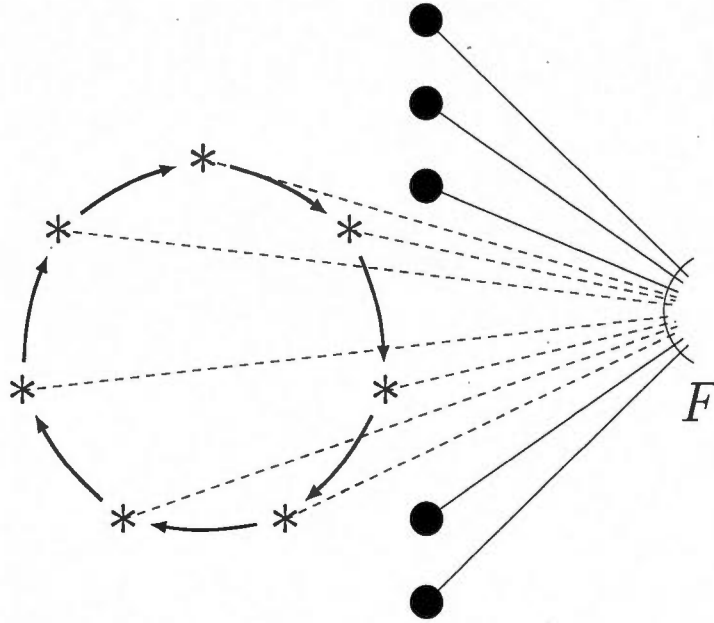
$$G(D)F(X) = G(T) \times_T F(X + T)|_{T:=1}.$$

Le lecteur désirant obtenir plus de détails sur l'équivalence de ces deux définitions est invité à consulter (Sney-Lacasse, 2007).

**Remarque.**

– La définition 2.2.3 est analogue à la proposition 2.1.6.





**Figure 2.6** Représentation générale d'une  $C_7(D)F(X)$ -structure.

- Pour que la définition 2.2.3 ait du sens, il doit y avoir un nombre fini de  $G(D)F(X)$ -structures sur tout ensemble fini sous-jacent. Par contre, si  $G(X)$  est polynomiale (en  $X$ ), alors  $G(D)F(X)$  est toujours définie.

La figure 2.6 illustre une  $C_7(D)F(X)$ -structure typique. Mentionnons que,  $C_7(X)$  étant polynomiale,  $C_7(D)F(X)$  est définie pour toute espèce  $F(X)$ .

**Exemple 2.2.4.** Posons  $G = L_n$ . On a alors, pour toute espèce  $F(X)$ , que  $L_n(D)F(X) = D^n F(X)$ . En effet, puisque  $L_n = X^n$ , on peut montrer par le corollaire 2.1.7 que

$$\begin{aligned} L_n(D)F(X) &= L_n(T) \times_T F(X+T)|_{T:=1} \\ &= T^n \times_T F(X+T)|_{T:=1} \\ &= D^n F(X). \end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat montre que l'opérateur  $D^n$  s'interprète combinatoirement comme l'application d'une liste de  $n$  opérateurs différentiels  $D$  à une espèce quelconque  $F(X)$ .

### 2.2.2 Séries associées

Nous n'étudions ici que la série indicatrice des cycles de  $G(D)F(X)$ , les séries génératrices et génératrices des types d'isomorphie étant obtenues à partir de la proposition suivante, généralisant la proposition 1.1.9. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.1.9.

**Proposition 2.2.5.** *Pour toute espèce à  $n$  sortes  $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , on a*

- (i)  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z_F(x_1, 0, 0, \dots; x_2, 0, 0, \dots; \dots; x_n, 0, 0, \dots)$ , et
- (ii)  $\tilde{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z_F(x_1, x_1^2, x_1^3, \dots; x_2, x_2^2, x_2^3, \dots; \dots; x_n, x_n^2, x_n^3, \dots)$ .

Le théorème suivant décrit comment obtenir la série indicatrice des cycles de  $G(D)F(X)$ . Sa démonstration est conséquence de la proposition 2.3.5 plus bas.

**Théorème 2.2.6.** *Soient deux espèces  $F(X)$  et  $G(X)$ . Alors, la série indicatrice des cycles de  $G(D)F(X)$  est donnée par*

$$Z_{G(D)F(X)}(x_1, x_2, \dots) = Z_{G(X)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, 2 \frac{\partial}{\partial x_2}, 3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right) Z_{F(X)}(x_1, x_2, \dots).$$

**Exemple 2.2.7.**

1. Posons  $G(X) = X$  et vérifions que  $Z_{G(D)F(X)} = Z_{DF(X)}$ . En effet, puisque

$$Z_X(x_1, x_2, \dots) = x_1, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} Z_{G(D)F(X)}(x_1, x_2, \dots) &= Z_X \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, 2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right) Z_{F(X)}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} Z_{F(X)}(x_1, x_2, \dots) \\ &= Z_{DF(X)}(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

2. Posons  $G(X) = C_4(X)$ , alors

$$Z_{C_4(D)F(X)}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 8 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) Z_{F(X)}(x_1, x_2, \dots)$$

$$\text{puisque } Z_{C_4(X)}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4).$$

### 2.2.3 Propriétés et exemples

Nous terminons cette section en énonçant quelques propriétés des opérateurs différentiels purs. La première proposition donne des relations facilitant le calcul de tels opérateurs.

**Proposition 2.2.8.** *Soient  $F(X)$ ,  $G(X)$  et  $H(X)$  des espèces et  $a \in \mathbb{N}$ . On a alors*

- (i)  $(aG)(D)F(X) = a(G(D)F(X)) = G(D)(aF)(X),$
- (ii)  $(G + H)(D)F(X) = G(D)F(X) + H(D)F(X),$
- (iii)  $G(D)(F + H)(X) = G(D)F(X) + G(D)H(X),$
- (iv)  $G(D)(H(D)F(X)) = (G \cdot H)(D)F(X),$
- (v)  $\langle G(D)F(X), H(X) \rangle = \langle F(X), G(X)H(X) \rangle.$

*Démonstration.* (i), (ii) et (iii) sont immédiats par définition et par les propriétés du produit cartésien. (iv) et (v) sont démontrées dans (Sney-Lacasse, 2007). ■

**Remarque.** La proposition 2.2.8 (iv) explicite la manière d'effectuer la composition d'opérateurs différentiels purs. Il s'agit de considérer l'opérateur obtenu par le produit des deux espèces associées aux opérateurs que l'on souhaite composer.

En posant  $G = E$  dans la définition 2.2.3, on obtient un cas particulier d'opérateur différentiel appelé opérateur de translation. On peut alors montrer que

$$E(D)F(X) = F(X + 1). \quad (2.3)$$

Plus généralement, on a que

$$E^n(D)F(X) = F(X + n). \quad (2.4)$$

Remarquons cependant que pour que (2.3) et (2.4) soient vraies, l'espèce  $F(X)$  doit être polynomiale. D'autres relations peuvent également être obtenues en considérant l'opérateur  $E_2(D)$ . Notamment, on a que

$$E_2(D)(F \cdot G) = (E_2(D)F)G + F'G' + FE_2(D)G$$

et

$$E_2(D)(E \circ F) = (E \circ F) \cdot (E_2(D)F + E_2(F')).$$

Finalement, en considérant l'espèce  $\mathcal{B}$  des arborescences binaires, nous obtenons l'opérateur différentiel pur  $\mathcal{B}(D)$  appelé dérivée Catalan. Il est possible d'établir de façon simple une relation permettant de résoudre des équations différentielles de la forme  $\mathcal{B}(D)F(X) = G(X)$ . En effet, en résolvant l'équation quadratique bien connue  $\mathcal{B} = 1 + T\mathcal{B}^2$  (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994)), on obtient la relation d'équivalence suivante :

$$\mathcal{B}(D)F(X) = G(X) \iff F(X) = (1 - D\mathcal{B}(D))G(X). \quad (2.5)$$

Il est aussi possible de généraliser (2.5) en considérant n'importe quelle espèce  $\mathcal{B}(T)$  ayant un terme constant égal à 1. L'équation (2.5) prend alors la forme

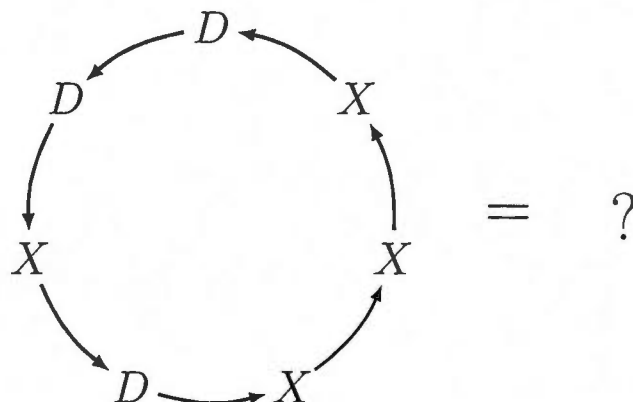
$$\mathcal{B}(D)F(X) = G(X) \iff F(X) = \frac{1}{\mathcal{B}(D)}G(X) \quad (2.6)$$

où  $\frac{1}{\mathcal{B}(T)} = \frac{1}{1+\mathcal{B}_+(T)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mathcal{B}_+(T))^k$ .

### 2.3 Opérateur $\Omega(X, D)$

Nous continuons dans cette section l'étude des opérateurs différentiels combinatoires amorcée aux sections 2.1 et 2.2. Nous considérons ici une classe d'opérateurs différentiels encore plus généraux que ceux introduits précédemment. En procédant de manière analogue aux deux sections précédentes, nous nous posons désormais la question suivante : quel sens peut-on donner à un arrangement quelconque d'opérateurs  $D$  et de  $X$ ? La figure 2.7 illustre ce problème pour un arrangement circulaire de  $D$  et de  $X$ .

Labelle et Lamathe ont répondu à cette question dans (Labelle et Lamathe, 2009) en introduisant une nouvelle classe d'opérateurs différentiels, définis pour toute espèce à deux sortes d'éléments  $\Omega(X, T)$ , généralisant les opérateurs différentiels purs. Ces opérateurs sont appelés opérateurs différentiels combinatoires généralisés et sont notés  $\Omega(X, D)$ .



**Figure 2.7** Arrangement circulaire de quatre  $X$  et de trois opérateurs différentiels  $D$ .

Après avoir défini ces opérateurs ainsi que leurs séries génératrices, nous nous attardons à l'étude de la composition de tels opérateurs. Ensuite, nous fournissons quelques résultats remarquables concernant cette nouvelle classe d'opérateurs différentiels.

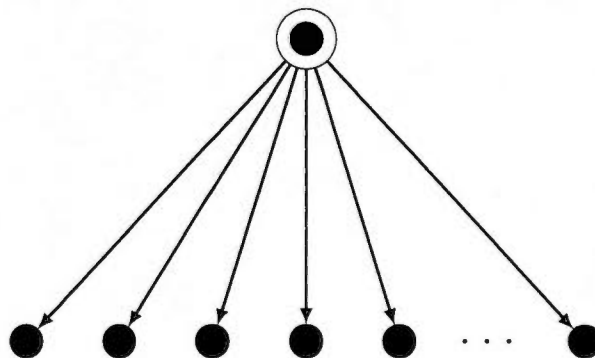
### 2.3.1 Définitions

Avant de donner la définition principale de cette section, nous établissons la notion d'espèce finitaire en une sorte  $T$ .

**Définition 2.3.1.** Soit  $\Omega(X, T)$  une espèce à deux sortes. On dit que  $\Omega(X, T)$  est **finitaire en  $T$**  si, pour tout ensemble fini  $U$  de points de sorte  $X$ , il n'y a pas de  $\Omega$ -structure sur le multiensemble  $(U, V)$  pour tout ensemble fini assez grand  $V$  de points de sorte  $T$ .

**Exemple 2.3.2.** L'espèce  $\mathcal{A}(X, T)$  des arborescences dont les noeuds sont des points de sorte  $X$  et les feuilles des points de sorte  $T$  n'est pas finitaire en  $T$ . En effet, pour toute arborescence ayant seulement un noeud (la racine), il peut y avoir une infinité de feuilles possibles (voir figure 2.8). Donc, pour un ensemble fini  $U$  tel que  $|U| = 1$ , il existe au moins une  $\mathcal{A}$ -structure sur  $(U, V)$  pour tout ensemble  $V$  tel que  $|V| \geq 1$ .

Cependant, l'espèce  $\mathcal{G}(X, T)$  des graphes simples dont les sommets sont de sorte  $X$  et les arêtes de sorte  $T$  est finitaire en  $T$  puisqu'il y a  $\binom{n}{2}$  arêtes possibles sur un ensemble



**Figure 2.8**  $\mathcal{A}(X, T)$ -structure sur  $(U, V)$  telle que  $|U| = 1$  et  $|V| \geq N$  pour  $N \geq 1$ .

de  $n$  sommets.

Nous sommes maintenant prêts à décrire une des notions fondamentales de ce mémoire, soit celle d'opérateur différentiel combinatoire généralisé.

**Définition 2.3.3.** (Opérateur différentiel combinatoire généralisé) Soient  $\Omega(X, T)$  et  $F(X)$  deux espèces à deux et une sortes d'éléments respectivement. Si  $\Omega(X, T)$  est finitaire en  $T$  ou si  $F(X)$  est polynomiale en  $X$ , on définit l'espèce  $\Omega(X, D)F(X)$ , correspondant à l'application de l'opérateur différentiel combinatoire généralisé  $\Omega(X, D)$  à  $F(X)$ , par

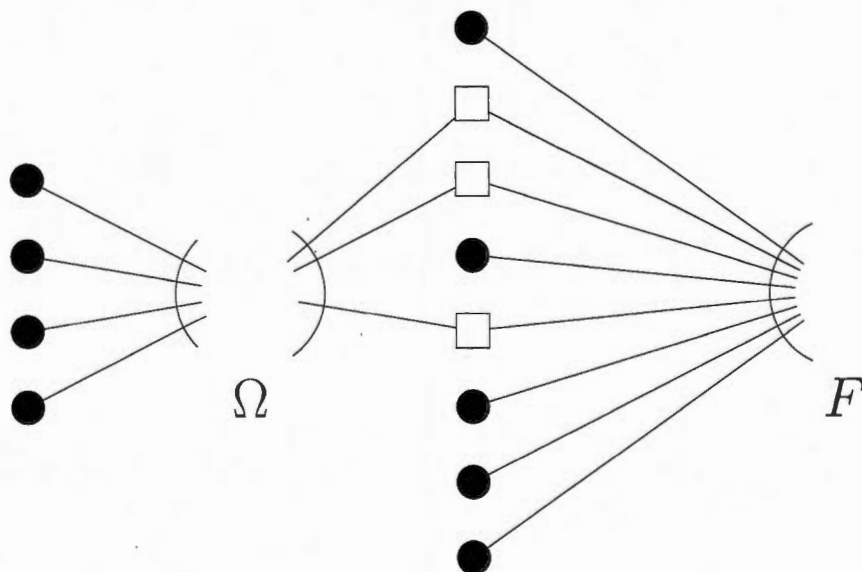
$$\Omega(X, D)F(X) := \Omega(X, T) \times_T F(X + T)|_{T:=1}.$$

**Remarque.** En posant  $\Omega(X, T) = \Omega(T)$  dans la définition 2.3.3, on obtient la définition d'opérateur différentiel pur. Les opérateurs différentiels combinatoires généralisés sont donc bien une généralisation des opérateurs différentiels purs.

La figure 2.9 illustre une  $\Omega(X, D)F(X)$ -structure typique.

**Exemple 2.3.4.**

1. En posant  $\Omega(X, T) = T$ , on obtient l'opérateur  $D$  de dérivation usuel.
2. L'espèce  $\mathcal{A}(X, D)\mathcal{C}_5(X)$  est définie puisque  $\mathcal{C}_5(X)$  est une espèce polynomiale en  $X$ .



**Figure 2.9** Représentation générale d'une  $\Omega(X, D)F(X)$ -structure.

*Par contre,  $\mathcal{A}(X, D)\mathcal{C}(X)$  n'est pas définie puisque  $\mathcal{A}(X, T)$  n'est pas finitaire en  $T$  et  $\mathcal{C}$  n'est pas polynomiale en  $X$ .*

**Remarque.** À partir de maintenant, nous supposons que les conditions de finitude et de polynomialité sont toujours satisfaites afin d'alléger le texte.

### 2.3.2 Séries associées

De manière analogue à la section 2.2.2, nous étudions ici la série indicatrice des cycles associée à  $\Omega(X, D)F(X)$ , les autres séries étant obtenues à partir de la proposition 2.2.5. La démonstration de la proposition suivante est donnée dans (Sney-Lacasse, 2007).

**Proposition 2.3.5.** Soient  $\Omega(X, T)$  et  $F(X)$  deux espèces à deux et une sortes d'éléments respectivement. Alors, la série indicatrice des cycles de  $\Omega(X, D)F(X) = G(X)$  est donnée par

$$Z_G(x_1, x_2, \dots) = Z_\Omega \left( x_1, x_2, \dots; \frac{\partial}{\partial x_1}, 2 \frac{\partial}{\partial x_2}, 3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right) Z_F(x_1, x_2, \dots).$$

Des propositions 2.3.5 et 2.2.5, on tire le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3.6.** *Soit  $\Omega(X, D)F(X) = G(X)$ . Alors, les séries génératrice et génératrice des types d'isomorphie sont données par*

$$(i) \quad G(x) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \omega_{n_1, n_2, \dots}(x, 0, 0, \dots) \left[ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \dots}{n_1! n_2! \dots} Z_F \right] (x, 0, 0, \dots),$$

$$(ii) \quad \tilde{G}(x) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \omega_{n_1, n_2, \dots}(x, x^2, x^3, \dots) \left[ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \dots}{n_1! n_2! \dots} Z_F \right] (x, x^2, x^3, \dots),$$

où  $\omega_{n_1, n_2, \dots}(x_1, x_2, x_3, \dots)$  sont définis par

$$Z_{\Omega(X, T)}(x_1, x_2, x_3, \dots; t_1, t_2, t_3, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots \geq 0} \omega_{n_1, n_2, \dots}(x_1, x_2, x_3, \dots) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}.$$

### 2.3.3 $\odot$ -composition

Nous tournons maintenant notre attention vers la notion de composition d'opérateurs différentiels généralisés. Rappelons que la proposition 2.2.8 (iv) explicitait comment effectuer la composition d'opérateurs différentiels purs ; il s'agissait simplement de considérer l'opérateur associé au produit des espèces associées aux opérateurs devant être composée. La question se pose alors : existe-t-il, pour  $\Omega_1(X, T)$ ,  $\Omega_2(X, T)$  et  $F(X)$  données, une espèce  $\Omega_3(X, T)$  telle qu'on ait

$$\Omega_3(X, D)F(X) = \Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)]?$$

Labelle et Lamathe ont répondu à cette question dans (Labelle et Lamathe, 2009) en introduisant une nouvelle opération appelée  $\odot$ -composition.

**Définition 2.3.7.** *Soient  $\Omega_1(X, T)$  et  $\Omega_2(X, T)$  deux espèces à deux sortes d'éléments. On définit la  $\odot$ -composition de  $\Omega_1(X, T)$  avec  $\Omega_2(X, T)$ , notée  $\Omega_1(X, T) \odot \Omega_2(X, T) = \Omega_3(X, T)$ , par*

$$\Omega_3(X, T) = \Omega_2(X, T + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(X + T_0, T)|_{T_0=1}$$

où  $T_0$  est une sorte auxiliaire.



La proposition suivante, démontrée entre autre dans (Labelle et Lamathe, 2009), montre que l'opérateur différentiel associé à  $\Omega_1(X, T) \odot \Omega_2(X, T)$  correspond exactement à la composition de  $\Omega_1(X, D)$  par  $\Omega_2(X, D)$ .

**Proposition 2.3.8.** *Soit  $\Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T) = \Omega_3(X, T)$ . Alors on a, pour toute espèce  $F(X)$ , que*

$$\Omega_3(X, D)F(X) = \Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)].$$

La proposition 2.3.8 répond donc à la question posée précédemment.

Le calcul de la série indicatrice des cycles de  $\Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T)$  est effectué en utilisant le résultat suivant, démontré dans (Labelle et Lamathe, 2009).

**Théorème 2.3.9.** *Soient  $\Omega_1(X, T)$  et  $\Omega_2(X, T)$  deux espèces à deux sortes. Alors, la série indicatrice des cycles de  $\Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T)$  est donnée par*

$$Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{\left( \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{n_1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_2} \right) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_1} \right)}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}.$$

**Exemple 2.3.10.** *En utilisant le théorème 2.3.9, calculons la série indicatrice des cycles de  $E_2(XT) \odot XG_3(T)$  où  $G_3(T)$  est l'espèce des graphes simples sur 3 points. Nous savons que  $Z_X = x_1$ ,  $Z_{E_2(X)} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$  et  $Z_{G_3(X)} = \frac{2}{3}(2x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3)$ . Ainsi,  $Z_{E_2(XT)} = \frac{1}{2}((x_1t_1)^2 + x_2t_2)$  et  $Z_{XG_3(T)} = \frac{2x_1}{3}(2t_1^3 + 3t_1t_2 + t_3)$ . En utilisant le théorème 2.3.9, on trouve que les seules valeurs de  $n_1, n_2, \dots$  qui fournissent une contribution non nulle de*

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{n_1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{n_2} \dots Z_{E_2(XT)}$$

sont  $n_1 \leq 2$ ,  $n_2 \leq 1$  et  $0 = n_3 = n_4 = \dots$ . De façon semblable, les seules valeurs de  $n_1, n_2, \dots$  qui fournissent une contribution non nulle de

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} \dots Z_{XG_3(T)}$$

sont  $n_1 \leq 1$  et  $0 = n_2 = n_3 = n_4 = \dots$ . Ainsi, les seuls termes qui contribuent au calcul de  $Z_{E_2(XT) \odot XG_3(T)}$  sont ceux qui correspondent aux indices satisfaisant  $n_1 \leq 1$  et

$0 = n_2 = n_3 = n_4 = \dots$ ; c'est-à-dire  $(n_1, n_2, n_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$  et  $(n_1, n_2, n_3, \dots) = (1, 0, 0, \dots)$ . On a donc

$$\begin{aligned} Z_{E_2(XT) \odot XG_3(T)} &= \frac{1}{2}((x_1 t_1)^2 + x_2 t_2) \cdot \frac{2x_1}{3}(2t_1^3 + 3t_1 t_2 + t_3) \\ &\quad + \frac{1}{2}(2x_1^2 t_1) \cdot \frac{2}{3}(2t_1^3 + 3t_1 t_2 + t_3) \\ &= \frac{2}{3}x_1^3 t_1^5 + x_1^3 t_1^3 t_2 + \frac{1}{3}x_1^3 t_1^2 t_3 + \frac{2}{3}x_1 x_2 t_1^3 t_2 + x_1 x_2 t_1 t_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}x_1 x_2 t_2 t_3 + \frac{4}{3}x_1^2 t_1^4 + 2x_1^2 t_1^2 t_2 + \frac{2}{3}x_1^2 t_1 t_3. \end{aligned}$$

Il serait beaucoup plus long de calculer d'abord  $E_2(XT) \odot XG_3(T)$  et d'en déduire ensuite la valeur de la série indicatrice des cycles.

### 2.3.4 Propriétés et exemples

Nous terminons cette section en énonçant brièvement certains concepts liés aux opérateurs différentiels combinatoires généraux. Le lecteur intéressé trouvera une étude plus détaillée dans (Sney-Lacasse, 2007).

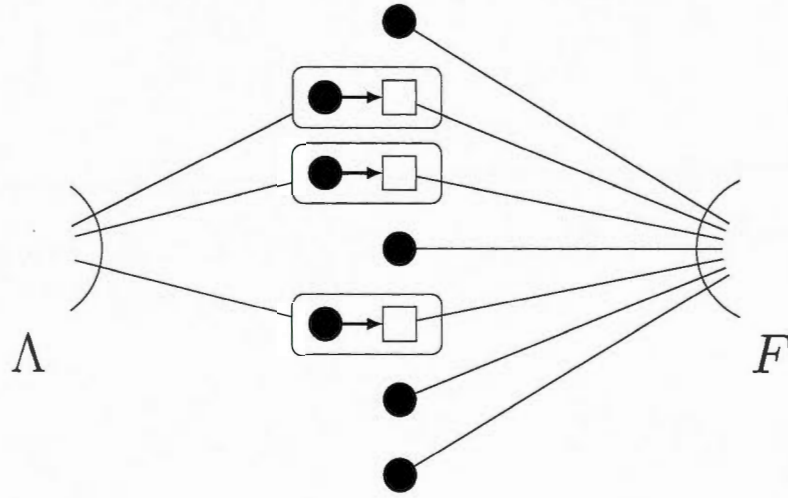
Rappelons d'abord que nous avons introduit à la section 2.2.2 une forme bilinéaire  $\langle F, G \rangle$  telle que la propriété  $\langle DF, G \rangle = \langle F, XG \rangle$  soit vérifiée pour toutes espèces  $F$  et  $G$ . De plus, la proposition 2.2.8 (v) donnait une généralisation de cette dernière dans le cas des opérateurs différentiels purs. Cette propriété de la forme bilinéaire se généralise aussi aux opérateurs différentiels combinatoires généraux de la façon suivante : pour toute espèce à deux sortes  $\Omega(X, T)$  et toutes espèces à une sorte  $F(X)$  et  $G(X)$ , on a

$$\langle \Omega(X, D)F(X), G(X) \rangle = \langle F(X), \Omega(D, X)G(X) \rangle.$$

Maintenant, nous rappelons la définition ainsi que quelques propriétés de l'opérateur adjoint de  $\Omega(X, D)$ . En effet, l'opérateur adjoint d'un opérateur différentiel  $\Omega(X, D)$  est l'opérateur  $(\Omega(X, D))^* = \Omega^*(X, D)$  défini par

$$\Omega^*(X, D) := \Omega(D, X).$$

On peut alors montrer que si  $\Omega_1(X, D)$  et  $\Omega_2(X, D)$  sont deux opérateurs différentiels combinatoires généraux, alors



**Figure 2.10** Représentation générale d'une  $\Lambda(XD)F(X)$ -structure.

$$\begin{aligned}
 (\Omega_2(X, D) \odot \Omega_1(X, D))^* &= \Omega_1^*(X, D) \odot \Omega_2^*(X, D) \\
 &= \Omega_1(D, X) \odot \Omega_2(D, X).
 \end{aligned}$$

On dit qu'un opérateur est *auto-adjoint* si  $\Omega^*(X, D) = \Omega(X, D)$ . De façon équivalente, on dit que l'espèce  $\Omega(X, T)$  est *symétrique* si  $\Omega(X, T) = \Omega(T, X)$ .

Un cas particulier intéressant d'opérateur différentiel auto-adjoint est celui de  $\Lambda$ -pointage. Ce type d'opérateur fournit une généralisation de l'opérateur de pointage ordinaire introduit à la section 1.1.3. L'opérateur de  $\Lambda$ -pointage est défini, pour toute espèce unisorte  $\Lambda(T)$ , par  $\Lambda(XD)$ . En fait, il s'agit de l'opérateur associé à l'espèce  $\Lambda(XT)$ . La figure 2.10 illustre une  $\Lambda(XD)F(X)$ -structure typique.

Remarquons qu'en posant  $\Lambda(T) = T$ , on obtient l'opérateur  $\Lambda(XD) = XD$ . Nous avons déjà remarqué la relation  $F^* = XF'$ . Par conséquent, le  $\Lambda$ -pointage est bien une généralisation du pointage ordinaire.

En terminant, considérons l'espèce  $E_+ = E - 1$  des ensembles non vides. On définit

alors l'opérateur de différence finie  $\Delta$  par

$$\Delta = E_+(D).$$

Rappelons que nous avons défini, à la section 2.2.3, l'opérateur de translation  $E(D)$  ayant la propriété  $E(D)F(X) = F(X + 1)$  pour toute espèce  $F$ . De là, il est facile de voir que l'on a, pour toute espèce  $F(X)$ ,

$$\begin{aligned}\Delta F(X) &= E_+(D)F(X) \\ &= (E - 1)(D)F(X) \\ &= E(D)F(X) - 1(D)F(X) \\ &= F(X + 1) - F(X).\end{aligned}$$



## CHAPITRE III

### OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES MOLÉCULAIRES ET ATOMIQUES

#### 3.1 Calculs sur les opérateurs différentiels combinatoires moléculaires

Cette section est consacrée à l'étude d'une classe d'opérateurs différentiels combinatoires particuliers, soit les opérateurs différentiels combinatoires moléculaires. Tout comme dans le cas des espèces moléculaires, ces opérateurs différentiels moléculaires sont constitués d'opérateurs atomiques. Après avoir défini les notions d'opérateurs différentiels combinatoires moléculaires et atomiques, nous présentons un théorème, dû à Labelle et Lamathe, permettant le calcul de l'espèce obtenue par l'application d'un opérateur moléculaire sur une espèce moléculaire.

Les notions d'espèces moléculaires et atomiques peuvent être étendues aux opérateurs différentiels combinatoires. En effet, on dit que l'opérateur  $\Omega(X, D)$  est *moléculaire* (resp. *atomique*) si et seulement si l'espèce  $\Omega(X, T)$  est moléculaire (resp. atomique). Il est donc clair que tout opérateur moléculaire est isomorphe à un opérateur  $X^m D^n / H$  où  $H$  est un sous-groupe de  $S_{m,n}$ .

Nous avons vu à la section 1.3 que toute espèce ordinaire à une sorte  $F(X)$  peut être écrite, de façon unique à isomorphisme près, comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) d'espèces moléculaires à une sorte,

$$F(X) = \sum_{H,n} f_H \frac{X^n}{H},$$

où  $H$  parcourt un système de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_n$ , et où  $f_H \in \mathbb{N}$  est le nombre de sous-espèces de  $F$  isomorphes à  $X^n/H$ . De la même façon, toute espèce à deux sortes  $\Omega(X, T)$  peut être écrite, de façon unique à isomorphisme près, comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) d'espèces moléculaires à deux sortes,

$$\Omega(X, T) = \sum_{K,m,k} \omega_K \frac{X^m T^k}{K},$$

où  $K$  parcourt un système de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,k}$ , et où  $\omega_K \in \mathbb{N}$  est le nombre de sous-espèces de  $\Omega$  isomorphes à  $X^m T^k/K$ . Par conséquent, pour évaluer  $\Omega(X, D)F(X)$ , il est suffisant de connaître le résultat de

$$\frac{X^m D^k}{K} \frac{X^n}{H}. \quad (3.1)$$

Labelle et Lamathe ont énoncé dans (Labelle et Lamathe, 2009) un théorème fondamental permettant le calcul effectif de (3.1). Cependant, leur article contenait seulement une esquisse de la preuve. Étant donné l'importance de ce résultat pour ce mémoire, nous énonçons maintenant une définition et un lemme permettant de donner une preuve détaillée du théorème.

**Définition 3.1.1.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des groupes finis et soient  $\omega_A : A \rightarrow C$  et  $\omega_B : B \rightarrow C$  des homomorphismes de groupes. Le **produit fibré** (pullback en anglais, voir (Awodey, 2006)) de  $A$  par  $B$  sur  $C$  est le sous-groupe de  $A \times B$ , noté  $A \times_C B$ , défini par

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid \omega_A(a) = \omega_B(b)\}.$$

Le lemme suivant montre que, pour calculer le développement moléculaire de toute

espèce  $F$ , il suffit de considérer le stabilisateur de chaque élément de l'ensemble des représentants des  $F$ -structures à isomorphisme près.

**Lemme 3.1.2.** (Développement moléculaire de  $F(X, T)$  (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998)) *Soit  $F(X, T)$  une espèce à deux sortes d'éléments. Le développement moléculaire de  $F(X, T)$  est le suivant :*

$$F(X, T) = \sum_{m, n \geq 0} \left\{ \sum_{s \in F[m, n]/S_{m, n}} \frac{X^m T^n}{\text{Stab}(s)} \right\},$$

où  $s \in F[m, n]/S_{m, n}$  signifie que  $s$  parcourt un ensemble de représentants des structures sur  $[m, n]$  à isomorphisme près.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de cette section.

**Théorème 3.1.3.** (Labelle et Lamathe, 2009) *Pour tout sous-groupe  $H \leq S_n$ ,  $K \leq S_{m, k}$ ,  $A \leq S_{a, k}$  et  $B \leq S_{b, k}$ , nous avons*

- (i)  $\frac{X^m D^k}{K} \frac{X^n}{H} = \frac{X^m T^k}{K} \times_T \frac{(X+T)^n}{H} \Big|_{T:=1},$
- (ii)  $\frac{(X+T)^n}{H} = \sum_{k=0}^n \sum_{\omega \in S_{n-k, k} \backslash S_n / H} \frac{X^{n-k} T^k}{\omega H \omega^{-1} \cap S_{n-k, k}},$
- (iii)  $\frac{X^a T^k}{A} \times_T \frac{X^b T^k}{B} = \sum_{\tau \in (\pi_2 A) \backslash S_k / (\pi_2 B)} \frac{X^{a+b} T^k}{A \times_{S_k} B^\tau},$
- (iv)  $\left[ \frac{X^a T^k}{A} \right]_{T:=1} = \frac{X^a}{\pi_1 A},$

où  $\omega \in S_{n-k, k} \backslash S_n / H$  signifie que  $\omega$  parcourt un système de représentants des classes bilatérales  $H_1 \sigma H_2$ ,  $\sigma \in S_n$ ;  $\pi_i G = \{g_i \in S_{n_i} \mid (g_1, g_2) \in G\}$ ,  $G \leq S_{n_1, n_2}$ ;  $B^\tau = (\text{Id}, \tau) B (\text{Id}, \tau^{-1})$ ;  $A \times_{S_k} B$  est le produit fibré (pullback) de  $A$  par  $B$  sur  $S_k$ .

*Démonstration.*

- (i) Immédiat par la définition 2.3.3.
- (ii) Soit  $H \leq S_n$ . Alors, une  $X^n/H$ -structure  $\omega H$  sur  $[n]$ , où  $\omega \in S_n$ , peut être vue comme une  $(X+T)^n/H$ -structure sur  $n-k$  éléments,  $1, 2, \dots, n-k$ , interprétés comme étant de sorte  $X$  et  $k$  éléments,  $n-k+1, \dots, n$ , interprétés comme étant de sorte  $T$ . Sous cette interprétation, deux telles structures  $\omega H$  et



$\omega'H$  sont isomorphes ssi  $\exists \sigma \in S_{n-k,k}$  telle que  $\sigma\omega H = \omega'H$ . De façon équivalente,  $\exists \sigma \in S_{n-k,k}$  et  $\exists h \in H$  tels que  $\omega' \in \sigma\omega H$ . En d'autres termes,  $\omega$  et  $\omega'$  appartiennent à la même classe bilatérale dans  $S_{n-k,k} \backslash S_n / H$ . Par le lemme 3.1.2, la somme doit être faite sur  $\omega \in S_{n-k,k} \backslash S_n / H$ . Nous concluons en notant que  $\text{Stab}(\omega H) = \{\sigma \in S_{n-k,k} \mid \sigma\omega H = H\} = S_{n-k,k} \cap \omega H \omega^{-1}$ .

(iii) Soient  $A \leq S_{a,k}$  et  $B \leq S_{b,k}$ . Les  $X^a T^k / A \times_T X^b T^k / B$ -structures sont de la forme

$$((\alpha_1, \tau_1)A, (\alpha_2, \tau_2)B).$$

Il y a une action de  $S_{a,b,k}$  sur ces structures : pour  $(\beta_1, \beta_2, \mu) \in S_{a,b,k}$ ,

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \mu)((\alpha_1, \tau_1)A, (\alpha_2, \tau_2)B) &= ((\beta_1, \mu)(\alpha_1, \tau_1)A, (\beta_2, \mu)(\alpha_2, \tau_2)B) \\ &= ((\beta_1 \alpha_1, \mu \tau_1)A, (\beta_2 \alpha_2, \mu \tau_2)B). \end{aligned}$$

Alors,  $((\alpha_1, \tau_1)A, (\alpha_2, \tau_2)B) = (\alpha_1, \alpha_2, \tau_1)(A, (\text{Id}, \tau_1^{-1} \tau_2)B)$ . Cela signifie que  $((\alpha_1, \tau_1)A, (\alpha_2, \tau_2)B) \sim (A, (\text{Id}, \tau)B)$ . De plus,

$$\begin{aligned} (A, (\text{Id}, \tau')B) &= (\alpha_1, \alpha_2, \omega)(A, (\text{Id}, \tau)B) \\ \iff A &= (\alpha_1, \omega)A \text{ et } B = (\alpha_2, (\tau')^{-1} \omega \tau)B \\ \iff (\alpha_1, \omega) &\in A \text{ et } (\alpha_2, (\tau')^{-1} \omega \tau) \in B \end{aligned}$$

Alors,  $\omega \in \pi_2(A)$  et  $\omega \in \tau' \pi_2(B) \tau^{-1}$ . Réciproquement, s'il existe  $\omega \in \pi_2(A) \cap \tau' \pi_2(B) \tau^{-1}$ , alors il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $(\alpha, \omega) \in A$  et  $(\beta, (\tau')^{-1} \omega \tau) \in B$ , d'où

$$(\alpha, \beta, \omega)(A, (\text{Id}, \tau)B) = ((\alpha, \omega)A, (\beta, \omega \tau)B) = (A, (\text{Id}, \tau')B).$$

Finalement, comme  $\tau' = \omega \tau \omega'$  avec  $\omega' \in \pi_2(B)$ , on a que

$$\pi_2(A) \tau' \pi_2(B) = \pi_2(A) \tau \pi_2(B).$$

Donc,  $\tau$  et  $\tau'$  appartiennent à la même classe bilatérale  $(\pi_2 A) \backslash S_k / (\pi_2 B)$ . Par conséquent, en vertu du lemme 3.1.2, la somme doit être effectuée sur  $\tau \in (\pi_2 A) \backslash S_k / (\pi_2 B)$ . Finalement, le stabilisateur  $\text{Stab}((A, (\text{Id}, \tau)B))$  d'une structure est donné par l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{(\sigma_1, \sigma_2, \omega) \in S_{a,b,k} \mid (\sigma_1, \sigma_2, \omega)(A, (\text{Id}, \tau)B) = (A, (\text{Id}, \tau)B)\} \\ &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \omega) \in S_{a,b,k} \mid (\sigma_1, \omega) \in A \text{ and } (\sigma_2, \omega) \in (\text{Id}, \tau)B(\text{Id}, \tau^{-1})\} \end{aligned}$$

qui est canoniquement isomorphe au groupe

$$\{((\sigma_1, \omega_1), (\sigma_2, \omega_2)) \in A \times B^T \mid \omega_1 = \omega_2\} = A \times_{S_k} B^T.$$

- (iv) Soit  $s$  une  $X^a T^k/A$ -structure, où  $A = \text{Stab}(s)$ . Soit  $s_1$  la  $[X^a T^k/A]_{T:=1}$ -structure associée à  $s$ , obtenue en désétiquetant tout ses éléments de sorte  $T$ . Alors,  $\text{Stab}(s_1) = \{\sigma_1 \in S_a \mid \exists \sigma_2 \in S_k, (\sigma_1, \sigma_2)s = s\} = \{\sigma_1 \in S_a \mid \exists \sigma \in A, \pi_1 \sigma = \sigma_1\} = \pi_1 A$ .



**Remarque.**  $\frac{X^a T^k}{A} \times_T \frac{X^b T^j}{B} = 0$  si  $j \neq k$ .

**Exemple 3.1.4.** Vérifions, à l'aide du théorème 3.1.3, l'égalité combinatoire  $DX^2 = 2X$ . Même si cet exemple semble trivial, il donne tout de même une bonne indication de la façon dont le théorème 3.1.3 s'applique pour le calcul de dérivées combinatoires généralisées.

Rappelons d'abord que l'opérateur différentiel ordinaire  $D$  est l'opérateur différentiel combinatoire généralisé associé à l'espèce  $\Omega(X, T) = \frac{X^0 T^1}{S_1} = T$ . De plus, on a  $X = \frac{X^1}{S_1}$  et  $X^2 = L_2 = \frac{X^2}{\langle(1)(2)\rangle}$ .

Par 3.1.3 (i), on a

$$DX^2 = \frac{X^0 D^1}{\langle(1)\rangle} \frac{X^2}{\langle(1)(2)\rangle} = \left[ \frac{X^0 T^1}{\langle(1)\rangle} \times_T \frac{(X+T)^2}{\langle(1)(2)\rangle} \right]_{T:=1}. \quad (3.2)$$

De là, on calcule par 3.1.3 (ii) que

$$\frac{(X+T)^2}{\langle(1)(2)\rangle} = \sum_{k=0}^2 \sum_{\omega \in S_{2-k,k} \setminus S_2 / \langle(1)(2)\rangle} \frac{X^{2-k} T^k}{\omega \langle(1)(2)\rangle \omega^{-1} \cap S_{2-k,k}}. \quad (3.3)$$

Or,

$$\begin{aligned} S_{2-k,k} \setminus S_2 / \langle(1)(2)\rangle &= \{S_{2-k,k} \sigma \langle(1)(2)\rangle \mid \sigma \in S_2\} \\ &= \{S_{2-k,k}(1)(2) \langle(1)(2)\rangle, S_{2-k,k}(1\ 2) \langle(1)(2)\rangle\}. \end{aligned}$$

Donc, pour  $k = 0$ , on a

$$\begin{aligned} S_{2,0} \backslash S_2 / \langle (1)(2) \rangle &= \{S_{2,0}(1)(2)\langle (1)(2) \rangle, S_{2,0}(1)(2)\langle (1\ 2) \rangle\} \\ &= \{\{(1)(2), (1\ 2)\}, \{(1\ 2), (1)(2)\}\} \\ &= \{\{(1)(2), (1\ 2)\}\} = \{S_2\}, \end{aligned}$$

et par conséquent  $\omega \in S_{2,0} \backslash S_2 / \langle (1)(2) \rangle \Rightarrow \omega \in \{(1)(2)\}$ .

De la même façon, on trouve pour  $k = 1$  que

$$S_{1,1} \backslash S_2 / \langle (1)(2) \rangle = \{\{(1)(2)\}, \{(1\ 2)\}\},$$

et par conséquent  $\omega \in S_{1,1} \backslash S_2 / \langle (1)(2) \rangle \Rightarrow \omega \in \{(1)(2), (1\ 2)\}$ .

Finalement, on a pour  $k = 2$  que  $\omega \in S_{0,2} \backslash S_2 / \langle (1)(2) \rangle \Rightarrow \omega \in \{(1)(2)\}$ .

En remplaçant dans (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(X+T)^2}{\langle (1)(2) \rangle} &= \left( \frac{X^2 T^0}{\langle (1)(2) \rangle \cap S_{2,0}} \right) + \left( \frac{X^1 T^1}{\langle (1)(2) \rangle \cap S_{1,1}} + \frac{X^1 T^1}{(1\ 2)\langle (1)(2) \rangle (1\ 2) \cap S_{1,1}} \right) \\ &\quad + \left( \frac{X^0 T^2}{\langle (1)(2) \rangle \cap S_{0,2}} \right) \\ &= \frac{X^2 T^0}{\langle (1)(2) \rangle} + 2 \frac{X^1 T^1}{\langle (1)(2) \rangle} + \frac{X^0 T^2}{\langle (1)(2) \rangle}. \end{aligned}$$

Maintenant, par 3.1.3 (iii), l'équation (3.2) devient

$$\begin{aligned} \left[ \frac{X^0 T^1}{\langle (1) \rangle} \times_T \frac{(X+T)^2}{\langle (1)(2) \rangle} \right]_{T:=1} &= \left[ \frac{X^0 T^1}{\langle (1) \rangle} \times_T \left( \frac{X^2 T^0}{\langle (1)(2) \rangle} + 2 \frac{X^1 T^1}{\langle (1)(2) \rangle} + \frac{X^0 T^2}{\langle (1)(2) \rangle} \right) \right]_{T:=1} \\ &= \left[ 0 + 2 \left( \frac{X^0 T^1}{\langle (1) \rangle} \times_T \frac{X^1 T^1}{\langle (1)(2) \rangle} \right) + 0 \right]_{T:=1} \\ &= \left[ 2 \left( \sum_{\tau \in (\pi_2 \langle (1) \rangle) \backslash S_1 / (\pi_2 \langle (1)(2) \rangle)} \frac{X^1 T^1}{\langle (1) \rangle \times_{S_1} \langle (1)(2) \rangle^\tau} \right) \right]_{T:=1} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Par définition,  $\pi_2 \langle (1) \rangle = \{g_2 \in S_1 \mid (g_1, g_2) \in S_{0,1} = \langle (1) \rangle\} = \{(1)\}$ . De même,  $\pi_2 \langle (1)(2) \rangle = \{(1)\}$ . Donc,  $\tau \in (\pi_2 \langle (1) \rangle) \backslash S_1 / (\pi_2 \langle (1)(2) \rangle) = \{\{(1)\}\}$ . Par conséquent, la somme de (3.4) doit être effectuée sur  $\tau \in \{(1)\}$ .

Ensuite,  $\langle(1)(2)\rangle^\tau = (\text{Id}, \tau)\langle(1)(2)\rangle(\text{Id}, \tau^{-1}) = \{((1), (1))\}$ . Puis,  $\langle(1)\rangle \times_{S_1} \langle(1)(2)\rangle^\tau = \{((1), (1))\} \simeq \{(1)(2)\} = \langle(1)(2)\rangle$ .

Finalement, on a

$$\begin{aligned} DX^2 &= \frac{X^0 D^1}{\langle(1)\rangle} \frac{X^2}{\langle(1)(2)\rangle} \\ &= \left[ 2 \frac{X^1 T^1}{\langle(1)(2)\rangle} \right]_{T:=1} \\ &= 2 \frac{X^1}{\pi_1 \langle(1)(2)\rangle} \\ &= 2 \frac{X^1}{\langle(1)\rangle} \\ &= 2X. \end{aligned}$$

**Exemple 3.1.5.** Calculons, à l'aide du théorème 3.1.3, le résultat de  $E_2(XD)C_4(X)$ .

Rappelons d'abord que  $C_4(X) = \frac{X^4}{\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle}$  et que  $E_2(XT) = \frac{X^2 T^2}{\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle}$ .

Par 3.1.3 (i), on a

$$E_2(XD)C_4(X) = \frac{X^2 D^2}{\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle} \frac{X^4}{\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle} = \left[ \frac{X^2 T^2}{\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle} \times_T \frac{(X+T)^4}{\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle} \right]_{T:=1}. \quad (3.5)$$

De là, on calcule par 3.1.3 (ii) que

$$\frac{(X+T)^4}{\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle} = \sum_{k=0}^4 \sum_{\omega \in S_{4-k,k} \setminus S_4 / \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle} \frac{X^{4-k} T^k}{\omega \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \omega^{-1} \cap S_{4-k,k}}. \quad (3.6)$$

Or, le produit cartésien partiel selon la sorte  $T$  n'est ici défini que si  $k = 2$ . Donc, pour  $k = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in S_{2,2} \setminus S_4 / \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle} \frac{X^2 T^2}{\omega \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \omega^{-1} \cap S_{4-k,k}} &= \sum_{\omega \in \{\text{Id}, (2\ 3)\}} \frac{X^2 T^2}{\omega \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \omega^{-1} \cap S_{2,2}} \\ &= \frac{X^2 T^2}{\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \cap S_{2,2}} \\ &\quad + \frac{X^2 T^2}{(2\ 3) \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle (2\ 3)^{-1} \cap S_{2,2}} \\ &= \frac{X^2 T^2}{\langle \text{Id} \rangle} + \frac{X^2 T^2}{\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle} \end{aligned}$$

Maintenant, par 3.1.3 (iii), l'équation (3.5) devient

$$\left[ \frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \times_T \frac{(X+T)^4}{\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle} \right]_{T:=1} = \left[ \frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \times_T \left( \frac{X^2 T^2}{\langle \text{Id} \rangle} + \frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \right) \right]_{T:=1} \quad (3.7)$$

et on a

$$\frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \times_T \frac{X^2 T^2}{\langle \text{Id} \rangle} = \sum_{\tau \in (\pi_2 \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle) \setminus S_2 / (\pi_2 \langle \text{Id} \rangle)} \frac{X^4 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \times_{S_2} \langle \text{Id} \rangle^\tau} \quad (3.8)$$

Par définition,  $\pi_2 \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle = \{g_2 \in S_2 \mid (g_1, g_2) \in \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle\} = \{\text{Id}, (1\ 2)\}$ .

De même,  $\pi_2 \langle \text{Id} \rangle = \{\text{Id}\}$ . Par conséquent, la somme de (3.8) doit être effectuée sur  $\tau \in \{\text{Id}\}$ .

Ensuite,  $\langle \text{Id} \rangle^\tau = (\text{Id}, \text{Id}) \langle \text{Id} \rangle (\text{Id}, \text{Id}) = \langle \text{Id} \rangle$ . Puis,  $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \times_{S_2} \langle \text{Id} \rangle^\tau = \langle \text{Id} \rangle$ .

De même,

$$\frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \times_T \frac{X^2 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} = \frac{X^4 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle} \quad (3.9)$$

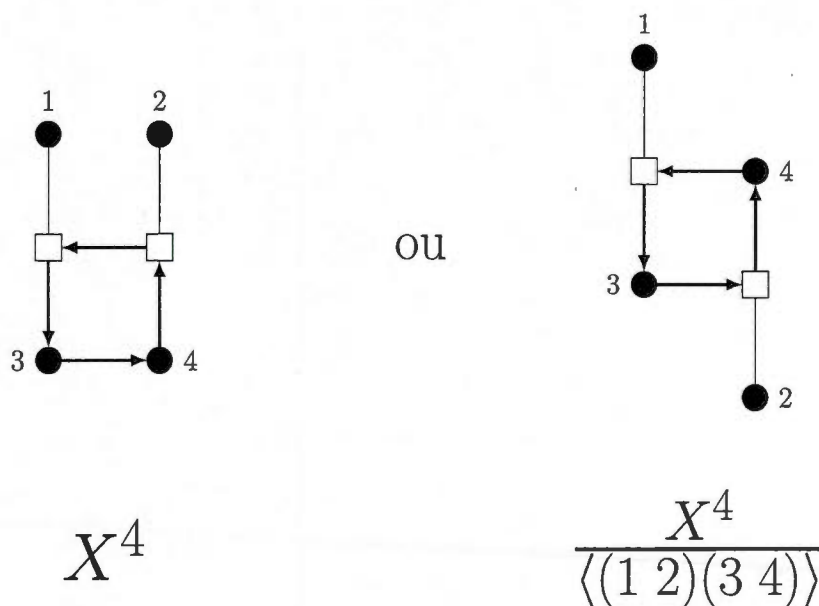
Finalement, en remplaçant (3.8) et (3.9) dans (3.7), on a

$$\begin{aligned} E_2(XD)C_4(X) &= \frac{X^2 D^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \frac{X^4}{\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle} \\ &= \left[ \frac{X^4 T^2}{\langle \text{Id} \rangle} + \frac{X^4 T^2}{\langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle} \right]_{T:=1} \\ &= \frac{X^4}{\pi_1 \langle \text{Id} \rangle} + \frac{X^4}{\pi_1 \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle} \\ &= \frac{X^4}{\langle \text{Id} \rangle} + \frac{X^4}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle} \\ &= X^4 + \frac{X^4}{\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle}. \end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat est conforme à la représentation graphique de la figure 3.1 basée sur la définition même de  $\Omega(X, D)F(X)$ .

### 3.2 Génération exhaustive des opérateurs différentiels combinatoires atomiques

Le théorème 3.1.3 donne le moyen de calculer effectivement, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, le résultat de l'application d'un opérateur différentiel combinatoire moléculaire



**Figure 3.1** Une  $E_2(XD)C_4(X)$ -structure typique sur  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ .

à une espèce. Or, nous savons que toute espèce moléculaire se décompose de façon unique en produits de puissances d'espèces atomiques. Par conséquent, il est suffisant de considérer seulement ceux qui sont atomiques, c'est-à-dire les opérateurs  $\Omega(X, D)$  tels que  $\Omega(X, T)$  est atomique, afin d'étudier l'effet des opérateurs différentiels généraux sur les espèces.

Le but de cette sous-section est d'énoncer deux algorithmes, basés sur la proposition 1.3.12 et le corollaire 1.3.13, permettant de déterminer si un opérateur différentiel donné est atomique. Après une brève analyse de ces algorithmes, nous les utiliserons afin de générer tous les opérateurs différentiels combinatoires  $\frac{X^m D^n}{H}$  où  $H \leq S_{m,n}$  pour  $m + n \leq 10$ , et ainsi étendre la table des opérateurs différentiels données dans (Labelle et Lamathe, 2009).



### 3.2.1 Premier algorithme

Rappelons que nous avons vu à la section 1.3 que toute espèce moléculaire à deux sortes  $M$  est isomorphe à l'espèce

$$\frac{X^m T^n}{H}$$

où  $H \leq S_{m,n}$  est le stabilisateur d'une  $M$ -structure. De plus, l'espèce  $X^m T^n/H$  est équivalente à la donnée d'un représentant d'une classe de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,n}$ . Par conséquent, il est suffisant de considérer les sous-groupes de  $S_{m,n}$  afin de construire un algorithme permettant de déterminer si un opérateur différentiel combinatoire donné est atomique.

L'idée de l'algorithme est la suivante : Considérons un opérateur différentiel moléculaire

$$\frac{X^m D^n}{H}$$

où  $H \leq S_{m,n}$ . On commence par construire la liste de tous les produits d'opérateurs moléculaires tels que

$$\frac{X^{a_1} D^{b_1}}{K_1} \cdot \frac{X^{a_2} D^{b_2}}{K_2} = \frac{X^m D^n}{K}.$$

Ensuite, pour chaque élément  $\frac{X^m D^n}{K}$  de la liste, on vérifie si  $\frac{X^m D^n}{K} = \frac{X^m D^n}{H}$ . Si c'est le cas, alors  $\frac{X^m D^n}{H}$  n'est pas atomique. Par contre, si  $\frac{X^m D^n}{K} \neq \frac{X^m D^n}{H}$  pour tout élément de la liste, alors  $\frac{X^m D^n}{H}$  est atomique.

On obtient alors l'algorithme 1.

Celui-ci a été implémenté dans le langage Python à l'aide du logiciel libre Sage. Le code source est fourni à l'annexe B.1.

**Exemple 3.2.1.** Soit  $M = \frac{XD^2}{((2\ 3))}$ . Vérifions, à l'aide de l'algorithme 1 que  $M$  n'est pas

---

**Algorithme 1** Critère d'atomicité
 

---

**Entrée:** Opérateur moléculaire  $M = \frac{X^m D^n}{H}$ .

**Sortie:** vrai, si  $M$  est atomique et faux, sinon.

- 1: **Pour** chaque élément de  $\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{N}^4 \mid a_1 + a_2 = m, b_1 + b_2 = n, a_1 + b_1 \neq 0 \text{ et } a_2 + b_2 \neq 0\}$ ,
  - 2:     Construire la liste  $\text{mol\_a}_1\text{b}_1$  de tous les opérateurs moléculaires  $X^{a_1} D^{b_1} / H_1$  ;
  - 3:     Construire la liste  $\text{mol\_a}_2\text{b}_2$  de tous les opérateurs moléculaires  $X^{a_2} D^{b_2} / H_2$  ;
  - 4:     **Pour** chaque élément de  $\text{mol\_a}_1\text{b}_1$ ,
  - 5:         **Pour** chaque élément de  $\text{mol\_a}_2\text{b}_2$ ,
  - 6:             Insérer dans  $\text{liste\_prod}$  le résultat de  $\frac{X^{a_1} D^{b_1}}{H_1} \cdot \frac{X^{a_2} D^{b_2}}{H_2}$  ;
  - 7:         **fin Pour**
  - 8:     **fin Pour**
  - 9: **fin Pour**
  - 10: **Pour** chaque élément  $\frac{X^m D^n}{K}$  de  $\text{liste\_prod}$ ,
  - 11:     **Si**  $\frac{X^m D^n}{K} = \frac{X^m D^n}{H}$ , **alors**
  - 12:         **retourner faux.**
  - 13:     **fin Si**
  - 14: **fin Pour**
  - 15: **retourner vrai.**
-



atomique.

```

1 :       $\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{N}^4 \mid a_1 + a_2 = 1, b_1 + b_2 = 2, a_1 + b_1 \neq 0 \text{ et } a_2 + b_2 \neq 0\}$ 
      =  $\{(0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 0, 2), (1, 0, 1, 1)\}$ 
(0, 1, 1, 1)
2 :       $\text{mol\_01} = \left( \frac{X^0 D^1}{\langle (1) \rangle} \right)$ 
3 :       $\text{mol\_11} = \left( \frac{X^1 D^1}{\langle (1)(2) \rangle} \right)$ 
6 :       $\text{liste\_prod} = \left( \frac{X^1 D^2}{\langle (1)(2)(3) \rangle} \right)$ 
(0, 1, 2, 0)
2 :       $\text{mol\_02} = \left( \frac{X^0 D^2}{\langle (1)(2) \rangle}, \frac{X^0 D^2}{\langle (1\ 2) \rangle} \right)$ 
3 :       $\text{mol\_10} = \left( \frac{X^1 D^0}{\langle (1) \rangle} \right)$ 
6 :       $\text{liste\_prod} = \left( \frac{X^1 D^2}{\langle (1)(2)(3) \rangle}, \frac{X^1 D^2}{\langle (1)(2)(3) \rangle}, \frac{X^1 D^2}{\langle (2\ 3) \rangle} \right)$ 
:      :
10 :      Puisque  $M$  est égal (au sens de la théorie des espèces) au troisième élément
      de liste_prod, on retourne faux.
```

Donc,  $M$  n'est pas atomique.

**Remarque.** La construction des listes d'opérateurs moléculaires (étapes 2 et 3 de l'algorithme 1) n'est pas triviale. En effet, rappelons-nous que, comme mentionné à la section 1.3, toute espèce moléculaire à deux sortes d'éléments est isomorphe à une espèce  $X^m T^n / H$ , où  $H$  est un sous-groupe de  $S_{m,n}$ . Puisque deux telles espèces sont isomorphes si et seulement si leur sous-groupes respectifs sont conjugués dans  $S_{m,n}$ , on doit calculer la liste de toutes les classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,n}$  afin d'obtenir toutes les espèces moléculaires. Par exemple, on peut utiliser la commande `conjugacy_classes_subgroups` de Sage (Stein et al., 2011), qui, via GAP (GAP, 2008), retourne une liste des représentants des classes de conjugaison des sous-groupes d'un groupe donné. D'ailleurs, nous discutons plus amplement de ce problème et nous tentons d'y fournir une solution à la sous-section 3.2.3.

### 3.2.2 Deuxième algorithme

Ici, nous énonçons un deuxième algorithme permettant de déterminer si un opérateur moléculaire donné  $M$  est atomique. Il s'agit d'une généralisation au cas à deux sortes d'un algorithme introduit par Chiricota dans (Chiricota, 1992; Chiricota, 1993). Alors que l'algorithme 1 reposait sur une approche de type «force brute», celui que nous introduirons à cette sous-section repose plutôt sur l'analyse des partitions d'ensembles associées aux générateurs du sous-groupe  $H$  de l'opérateur différentiel  $\frac{X^m D^n}{H}$ . Avant d'énoncer l'algorithme, nous introduisons quelques notions essentielles à son élaboration.

**Définition 3.2.2.** Soit  $(T, \leq_T)$  un ensemble partiellement ordonné (c'est-à-dire un ensemble muni d'une relation d'ordre réflexive, antisymétrique et transitive) et  $x, y, z, w$  des éléments de  $T$ . On dit que  $z$  est une **borne supérieure** de  $x$  et  $y$  si on a  $x \leq_T z$  et  $y \leq_T z$ . De plus, on dit que  $z$  est le **supremum** de  $x$  et  $y$  (noté  $\sup(x, y)$ ) si pour toute borne supérieure  $w$  de  $x$  et  $y$ , on a  $z \leq_T w$ . La notion **infimum** de  $x$  et  $y$  (noté  $\inf(x, y)$ ) est définie de façon duale.

**Remarque.** On peut étendre les notions de supremum et infimum à  $n$  éléments. En effet, soit  $(T, \leq_T)$  un ensemble partiellement ordonné et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$ . Alors,  $\sup(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (resp.  $\inf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) est le plus petit (resp. grand) élément de  $T$  plus grand (resp. petit) que tous les  $x_i$ .

Si toute paire d'éléments de  $T$  a un supremum et un infimum, on dit que  $(T, \leq_T)$  est un **treillis**. De plus, si tout sous-ensemble  $T'$  de  $T$  possède un supremum et un infimum, on dit que  $(T, \leq_T)$  est un **treillis complet**.

**Exemple 3.2.3.** Soit  $(T_n, \leq)$  où  $T_n$  est l'ensemble des partitions ensemblistes de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  et où, pour  $p_1, p_2 \in T_n$ ,  $p_1 \leq p_2$  si et seulement si tout bloc de  $p_1$  est contenu dans un bloc de  $p_2$ . Par exemple, soient  $\pi = \{\{1, 3, 7\}, \{2\}, \{4, 6\}, \{5, 8\}, \{9\}\}$  et  $\sigma = \{\{1, 3, 4, 6, 7\}, \{2, 5, 8, 9\}\}$  deux éléments de  $T_9$ . Alors,  $\pi \leq \sigma$ . On montre facilement que  $(T_n, \leq)$  est un treillis complet dont l'élément minimal est la partition la plus «fine»  $\hat{0} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$  et l'élément maximal est la partition la plus «grossière»  $\hat{1} = \{\{1, 2, \dots, m\}\}$ .

Pour une étude plus détaillée de la notion de treillis ainsi que des exemples supplémentaires, le lecteur est invité à consulter (Stanley, 1986).

Maintenant, on peut associer à chaque permutation  $g \in S_m$  une partition canonique  $\hat{g}$  de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , obtenue en remplaçant chaque cycle  $c = (i_1, i_2, \dots, i_\nu)$  de  $g$  par l'ensemble  $\{i_1, i_2, \dots, i_\nu\}$  (incluant le cas  $\nu = 1$  des permutations ayant un seul cycle). Par exemple, si  $m = 8$  et  $g = (2\ 5)(4\ 6\ 1)(3)(7)(8)$ , alors  $\hat{g} = \{\{2, 5\}, \{4, 6, 1\}, \{3\}, \{7\}, \{8\}\}$ .

Dans (Chiricota, 1993), l'auteur donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une espèce moléculaire  $\frac{X^n}{H}$ ,  $H \leq S_n$  soit non-atomique. Il énonce ensuite un algorithme donnant un critère d'atomicité pour une telle espèce. Après un court rappel des notions présentées dans l'article de Chiricota, nous les généralisons aux espèces moléculaires à deux sortes et nous démontrerons un résultat permettant d'adapter l'algorithme de (Chiricota, 1993) aux espèces moléculaires à deux sortes (et par le fait même aux opérateurs différentiels combinatoires moléculaires).

Considérons  $(H, U)$  un  $H$ -ensemble (c'est-à-dire que le groupe  $H$  agit sur l'ensemble  $U$ ). Soit  $V \subset U$  tel que  $V$  soit stable sous l'action de  $H$  (c'est-à-dire  $HV \subset V$ ). Si  $h \in H$  et  $U \subset W$ , on définit

- (a)  $h_V(u) = h(u)$ ,  $\forall u \in V$  (*restriction de  $h$  à  $V$* ),  
 (b)  $h^W(w) = \begin{cases} h(w) & \text{si } w \in U \\ w & \text{sinon} \end{cases}$  (*extension de  $h$  à  $W$* ),

et on note  $H_V = \{h_V \mid h \in H\}$  et  $H^W = \{h^W \mid h \in H\}$ .

Pour  $H$ ,  $U$  et  $V$  comme ci-dessus, on dit que  $(H_V, V)$  est un *facteur* de  $(H, U)$  si  $(H_V)^U \subset H$ . On peut alors montrer que pour  $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$ ,

$$(H_V)^U \subset H \iff \forall g \in \{g_1, g_2, \dots, g_r\}, (g_V)^U \in H.$$

En particulier, prenons  $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle \leq S_{m,n}$  agissant sur  $[m+n] = \{1, 2, \dots, m+n\}$ . Alors, pour tout  $g \in \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ , on a  $\hat{g} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$  avec  $s_i \subset [m+n]$  pour

tout  $1 \leq i \leq l$ . Évidemment, tout  $s_i$  est stable sous l'action de  $\langle g \rangle$ . On peut donc définir, pour tout  $g \in \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$  et  $s \in \hat{g}$

$$g_s^* := g_s^{[m+n]} = \begin{cases} g_s(x) = g(x) & \text{si } x \in s \\ x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ensuite, il est démontré dans (Yeh, 1985) que l'espèce  $\frac{X^n}{H}$  avec  $H \leq S_n$  est non-atomique s'il existe un sous-ensemble propre  $U$  de  $[n]$  tel que  $HU \subset U$  et  $(H_U)^{[n]} \subset H$ . Ce résultat se généralise facilement aux cas des espèces moléculaires à deux sortes d'éléments. En effet, l'espèce  $\frac{X^n T^k}{H}$  avec  $H \leq S_{n,k}$  est non-atomique s'il existe un sous-ensemble propre  $(U, V)$  de  $([n], [k])$  tel que  $H(U, V) \subset (U, V)$  et  $(H_{(U,V)})^{([n],[k])} \subset H$ .

De plus, Chiricota a montré que si  $(H_U)^{[n]} \subset H$ , alors il existe  $\Theta \subset \mathcal{O}(H)$  tel que

$$U = \bigcup_{Q \in \Theta} Q,$$

où  $\mathcal{O}(H) = \{Hx \mid x \in [n]\}$  est l'ensemble des orbites de  $H$  et  $Hx = \{hx \mid h \in H\}$  est l'orbite de l'élément  $x$  sous l'action de  $H$ .

Le lemme suivant nous permettra d'énoncer le deuxième algorithme.

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle \leq S_{m,n}$ . Alors*

$$\mathcal{O}(H) = \sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_r).$$

*Démonstration.* Rappelons d'abord que  $\mathcal{O}(H)$  (l'ensemble des orbites de  $H$ ) forme une partition de  $U$ . Soit  $Hx \in \mathcal{O}(H)$ . Ici,  $x \in [m+n]$  est un représentant de l'orbite. Prenons  $g \in \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$  et considérons  $\hat{g} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ . Évidemment, il existe un et un seul  $s_i$  tel que  $x \in s_i$ . Appelons  $s$  ce bloc. On a alors  $s \subseteq Hx$ . En effet,  $s$  contient tous les points du cycle de  $g$  contenant  $x$ . Puisque  $g^n x \in Hx$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ , on finit par atteindre tous les points du cycle en appliquant  $g$  successivement. Donc,  $s$  est bien contenu dans  $Hx$ . Puisque le choix d'un représentant de  $Hx$  est arbitraire,  $Hx$  contient tous les blocs  $s_i$  de  $\hat{g}$  tels que  $y \in Hx$  et  $y \in s_i$ . Par conséquent, tout bloc de

$\hat{g}$  est contenu dans un bloc de  $\mathcal{O}(H)$ . Par définition de la relation d'ordre du treillis des partitions de l'ensemble  $[m+n]$ , on a que  $\hat{g} \leq \mathcal{O}(H)$  pour tout  $g \in \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ .

Maintenant, les propriétés fondamentales des suprema et infima dans les treillis (voir (Stanley, 1986)) nous permettent de déduire que

$$\sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_r) \leq \mathcal{O}(H).$$

Supposons maintenant que  $p = \sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_r) < \mathcal{O}(H)$ . Alors, il existe  $s \in p$  tel que  $s \subsetneq Hx$  pour un certain  $x \in s$ . De plus,

$$Hx = \{(g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_r^{n_r})x \mid n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} s \subsetneq Hx &\Rightarrow \exists y \in Hx \text{ tel que } y \notin s \\ &\Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r \text{ tels que } y = (g_1^{a_1} g_2^{a_2} \dots g_r^{a_r})x \notin s. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq r$  et pour  $a_k \in \mathbb{Z}$ ,  $g_k^{a_k}x$  appartient à  $s$  car  $s$  est le plus petit sous-ensemble de  $[m+n]$  contenant tous les blocs des partitions associées aux cycles de  $g_k$  contenant  $x$ . Donc,  $y = (g_1^{a_1} g_2^{a_2} \dots g_r^{a_r})x \in s$  qui est une contradiction. Par conséquent,

$$\mathcal{O}(H) = \sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_r).$$

■

Ces développements donnent lieu à l'algorithme 2.

**Exemple 3.2.5.** Soit  $M = \frac{X^2 D^3}{((1 \ 2), (4 \ 5))}$ . Vérifions, à l'aide de l'algorithme 2 que  $M$  n'est pas atomique.

---

**Algorithme 2** Critère d'atomicité
 

---

**Entrée:** Opérateur moléculaire  $M = \frac{X^m D^n}{H}$ , où  $H$  est engendré par  $\{g_1, g_2, \dots, g_i\}$ .

**Sortie:** vrai, si  $M$  est atomique et faux, sinon.

- 1: Construire la liste des partitions  $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_i$  de  $\{1, 2, \dots, m+n\}$ ;
  - 2: Construire la partition  $p = \sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_i)$ ;
  - 3: **Pour**  $k$  de 1 à  $|p| - 1$ ,
  - 4:   **Pour** chaque  $k$ -sous-ensemble  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\} \subseteq p$ ,
  - 5:        $c = \bigcup_{1 \leq i \leq k} c_i$ ;
  - 6:       **Si**  $\forall g \in \{g_1, g_2, \dots, g_i\}$ ,  $c$  est stable sous  $g$  et  $g_c^* \in H$ , alors
  - 7:           **retourner** faux.
  - 8:       **fin Si**
  - 9:   **fin Pour**
  - 10: **fin Pour**
  - 11: **retourner** vrai.
- 

Ici,  $H = \langle (1\ 2), (4\ 5) \rangle$  est engendré par  $g_1 = (1\ 2)$  et  $g_2 = (4\ 5)$ .

- 1:  $(\hat{g}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, \hat{g}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\})$
- 2:  $p = \sup(\hat{g}_1, \hat{g}_2) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$
- 3:  $k = 1$
- 4:  $\{c_1 = \{1, 2\}\} \subseteq p$
- 5:  $c = c_1$
- 6:  $g_1(c) = c$ ;  $g_{1c}^* = (1\ 2) \in H$   
 $g_2(c) = c$ ;  $g_{2c}^* = (1)(2)(3)(4)(5) \in H$
- 7: On retourne faux.

Donc,  $M$  n'est pas atomique.

**Remarque.** L'algorithme 2 peut être considéré comme étant une implémentation, dans le cas à deux sortes, de la version de Chiricota (Chiricota, 1992; Chiricota, 1993) du critère de Yeh (Yeh, 1985) pour les espèces à une sorte. De plus, la décomposition canonique d'un opérateur moléculaire  $\frac{X^m D^n}{H}$  comme produits d'opérateurs atomiques



*peut être obtenue en analysant plus finement  $p$  et  $c$  dans l'algorithme 2. Ce raffinement pourra être étudié dans des travaux ultérieurs.*

L'algorithme 2 a été implémenté dans le langage Python à l'aide de Sage et de GAP. Nous avons réussi à calculer tous les opérateurs atomiques  $\frac{X^m D^n}{H}$  pour  $m + n \leq 10$ . Le code source se trouve à l'annexe B.2. Nous prévoyons l'inclure très prochainement dans Sage.

### 3.2.3 Résultats et analyse des algorithmes 1 et 2

Suite à l'implémentation des algorithmes 1 et 2 dans le langage Python à l'aide de Sage, nous avons produit une table de tous les opérateurs différentiels combinatoires atomiques  $\frac{X^m D^n}{H}$ , tels que  $m + n = 8$ . Ces résultats se trouvent à l'appendice C. Il s'agit d'une extension de la table donnée dans (Labelle et Lamathe, 2009), qui contenait ces mêmes opérateurs pour  $m + n \leq 7$ . Mentionnons que, bien qu'ils aient été calculés, les cas  $9 \leq m + n \leq 10$  ne se trouvent pas dans la table de l'appendice C en raison du nombre trop élevé d'opérateurs. Par contre, ces résultats sont disponibles sur demande. Nous avons toutefois cru bon d'inclure une table contenant le nombre d'opérateurs moléculaires et atomiques  $\frac{X^m D^n}{H}$  pour  $9 \leq m + n \leq 10$  (voir appendice D). La première colonne décrit le type  $(m, n)$  des opérateurs atomiques. Par exemple,  $(6, 2)$  signifie «opérateurs différentiels moléculaires de type  $\frac{X^6 D^2}{H}$ ». Les seconde et troisième colonnes donnent respectivement le nombre d'opérateurs moléculaires et atomiques de type  $(m, n)$ .

Nous effectuons maintenant une brève analyse des algorithmes 1 et 2. D'abord, les performances de l'algorithme 1 dépendent grandement du nombre d'éléments des listes `mol_a1b1`, `mol_a2b2` et `liste_prod`. De plus, le nombre d'opérateurs moléculaires  $\frac{X^m D^n}{H}$  étant égal au nombre de classes de conjugaison de  $S_{m,n}$ , la taille de `mol_a1b1` et `mol_a2b2` croît de façon importante à mesure que  $m$  et  $n$  augmentent.

Bien que nous n'ayons pas de latitude sur le nombre de classes de conjugaison de  $S_{m,n}$ , trois améliorations de l'algorithme 1 sont possibles lors de sa mise en œuvre.

Premièrement, durant le calcul des produits à l'étape 6, les probabilités d'obtenir deux fois le même produit sont très élevées. Par conséquent, l'introduction d'une méthode permettant d'éliminer les dédoublements de produits contribuerait grandement à réduire la taille de `liste_prod`.

Deuxièmement, le calcul des classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,n}$  est problématique car très coûteux en temps d'exécution. L'établissement d'une base de données contenant toutes ces classes de conjugaison aiderait grandement à augmenter les performances d'une implémentation de l'algorithme, de même que réduire la taille de `mol_a1b1` et `mol_a2b2`.

Finalement, il serait avantageux d'établir une base de données contenant tous les produits d'opérateurs possibles. Du coup, la problématique du dédoublement des produits serait réglée.

Maintenant, les performances de notre implémentation de l'algorithme 2 sont nettement supérieures à celle de notre implémentation de l'algorithme 1. En effet, la tableau 3.1 donne les temps d'exécutions des deux implémentations pour le calcul de différentes listes d'opérateurs atomiques. La première colonne décrit le type  $(m, n)$  des opérateurs atomiques. La seconde et troisième colonne décrivent le temps d'exécution de notre implémentation des algorithmes 1 et 2 pour calculer une liste de tous les opérateurs différentiels combinatoires atomiques de type  $(m, n)$ .

Contrairement, à l'algorithme 1, l'algorithme 2 ne dépend pas du nombre de classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,n}$ . Un autre avantage du second algorithme est que seulement les générateurs du sous-groupes sont nécessaires afin de déterminer si un opérateur différentiel donné est atomique.



$(m, n)$	Temps d'exécution de l'algorithme 1 (s)	Temps d'exécution de l'algorithme 2 (s)
(1, 0)	0,04	0,01
(1, 1)	0,01	0,01
(2, 1)	0,07	0,02
(4, 0)	0,56	0,16
(2, 2)	0,36	0,06
(5, 0)	3,05	0,34
(4, 1)	2,10	0,21
(4, 2)	18,11	0,98
(3, 3)	11,10	0,53
(7, 0)	110,87	3,55
(4, 3)	108,36	2,80
(8, 0)	874,66	15,89
(4, 4)	1341,92	16,89
(8, 1)	2514,74	18,21
(5, 4)	6099,33	32,71
(10, 0)	25057,45	151,14
(6, 4)	54687,79	194,76

**Tableau 3.1** Temps d'exécution de l'implémentation des algorithmes 1 et 2 pour le calcul de diverses listes d'opérateurs atomiques

## CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'analyser les opérateurs différentiels combinatoires introduits par Labelle et Lamathe dans (Labelle et Lamathe, 2009). Plus particulièrement, nous nous intéressons à une classe particulière d'opérateurs différentiels, soit les opérateurs différentiels combinatoires moléculaires. Pour ce faire, nous avons effectué un rappel sur les notions de base de la théorie des espèces (Chapitre 1). Au passage, nous avons explicité comment s'effectue le passage des N-espèces aux C-espèces, en détaillant davantage les démonstrations de résultats énoncés précédemment et en démontrant certains résultats dont la preuve rigoureuse n'avait jamais été effectuée. Ensuite, nous avons énoncé les principales notions de la théorie des opérateurs différentiels purs introduits par Joyal ainsi que celles concernant les opérateurs différentiels combinatoires généralisés (Chapitre 2). Finalement, nous nous sommes attardés aux notions d'opérateur différentiel combinatoire moléculaire et atomique (Chapitre 3). Après avoir défini les concepts de base, nous avons donné deux algorithmes permettant de déterminer si un opérateur différentiel moléculaire donné est atomique. Nous avons ensuite fourni une liste complète de tous les opérateurs différentiels atomiques  $\frac{X^m D^n}{H}$ , pour  $m + n = 8$ . Cette liste est une extension de celle donnée dans (Labelle et Lamathe, 2009).

La théorie des opérateurs différentiels combinatoires est encore très jeune. Par conséquent, plusieurs avenues de recherche ne demandent qu'à être explorées.

Tout d'abord, il serait intéressant d'analyser en profondeur les algorithmes 1 et 2 afin de déterminer asymptotiquement leur temps d'exécution ainsi que leur coût en mémoire. Ainsi, nous pourrions améliorer leur implémentation.

Ensuite, l'implémentation du théorème 3.1.3 dans un logiciel de calcul tel Sage aiderait grandement l'étude de ces opérateurs différentiels. Dans le même ordre d'idées, il serait

aussi intéressant d'implémenter d'autres opérations sur les espèces telle que l'addition, le produit, le produit cartésien, la composition, etc.

Une autre perspective de recherche intéressante serait d'étudier la factorisation canonique complète d'un opérateur moléculaire en opérateurs atomiques. En effet, en raffinant l'algorithme 2, nous pourrions obtenir cette factorisation.

Étant donné une équation différentielle de la forme  $\Omega(X, D)F(X) = G(X)$ , il s'agirait aussi de trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour l'existence ou la non-existence de solutions ; ainsi que de trouver des méthodes pour résoudre de telles équations.

Maintenant, il est connu que les opérateurs combinatoires  $X$  et  $D$  ont une interprétation physique (opérateurs de création et d'annihilation respectivement). Il serait donc intéressant d'étudier les possibles liens entre les opérateurs  $\Omega(X, D)$  et la physique.

Finalement, une extension naturelle de ce mémoire serait de considérer des espèces à  $k$  sortes d'éléments ( $k \in \mathbb{N}$ ) auxquelles correspondent des opérateurs de dérivées partielles combinatoires généralisés de la forme

$$\Omega \left( X_1, X_2, \dots, X_k, \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_k} \right)$$

agissant sur des espèces à  $k$  sortes  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . L'étude de tels opérateurs est un sujet ouvert et permettrait d'accroître notre compréhension d'une foule d'objets combinatoires.

## APPENDICE A

### DÉFINITIONS ET NOTATIONS DES PRINCIPALES ESPÈCES DE STRUCTURES

Tiré de (Sney-Lacasse, 2007).

Espèce	Notation	L'ensemble des structures sur un ensemble fini $U$
Permutations	$S$	$S[U] = \{\sigma : U \rightarrow U, \sigma \text{ bijective}\}$
Ordres linéaires	$L$	$L[U] = \{l : l \text{ est un ordre total sur } U\}$
Ensembles	$E$	$E[U] = \{U\}$
Ens. à $n$ élém.	$E_n$	$E_n[U] = \{U\}$ si $ U  = n$ , $\emptyset$ sinon
Ens. pairs	$E_{pair}$	$E_{pair}[U] = \{U\}$ si $ U $ pair, $\emptyset$ sinon
Ens. impairs	$E_{imp}$	$E_{imp}[U] = \{U\}$ si $ U $ impair, $\emptyset$ sinon
Parties	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}[U] = \{A : A \subseteq U\}$
Scrutins	Scru	$\text{Scru}[U] = \{l : l \text{ est une liste d'ensembles non vides}\}$
Graphes simples	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}[U] = \{g : g \text{ est un graphe simple sur } U\}$
Gra. s. connexes	$\mathcal{G}^c$	$\mathcal{G}^c[U] = \{g : g \text{ est un graphe s. connexe sur } U\}$
Gra. s. disconn.	$\mathcal{G}^d$	$\mathcal{G}^d[U] = \{g : g \text{ est un graphe s. disconnexe sur } U\}$
Graphes orientés	$\mathcal{G}_o$	$\mathcal{G}_o[U] = \{g : g \text{ est un graphe orienté sur } U\}$
Partitions	Par	$\text{Par}[U] = \{\pi : \pi \text{ est une partition de } U\}$
Part. partielles	$\text{Par}_p$	$\text{Par}_p[U] = \{\pi : \pi \text{ est une partition d'une partie } V \text{ de } U\}$
1	1	$1[U] = \{U\}$ si $ U  = 0$ , $\emptyset$ sinon.

Espèce	Notation	L'ensemble des structures sur un ensemble fini $U$
Vide	$0$	$0[U] = \emptyset$ , pour tout $U$ .
Singletons	$X$	$X[U] = \{U\}$ si $ U  = 1$ , $\emptyset$ sinon.
Arbres	$a$	$a[U] = \{g : g \text{ est un graphe s. conn. sans cycles sur } U\}$
Arborescences	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}[U] = \{a : a \text{ est un arbre pointé sur } U\}$
Haies	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}[U] = \{h : h \text{ est une liste d'arbores. disjointes sur } U\}$
Vertébrés	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}[U] = \{v : v \text{ est une arborescence pointée sur } U\}$
Cycles	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}[U] = \{\sigma \in S[U] : \sigma \text{ est une perm. circulaire sur } U\}$
Parties à $k$ élém.	$\mathcal{P}_k$	$\mathcal{P}_k[U] = \{A \subseteq U :  A  = k\}$
Arbores. binaires	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}[U] = \{b : b \text{ est une arborescence binaire sur } U\}$
Cycles de long. $n$	$\mathcal{C}_n$	$\mathcal{C}_n[U] = \{c \in \mathcal{C}[U] : c \text{ est un cycle de longueur } n\}$
Pieuvres	Pieu	$\text{Pieu}[U] = \{p : p \text{ est un cycle de listes non vides sur } U\}$

## APPENDICE B

### CODE SOURCE DE L'IMPLÉMENTATION DANS LE LANGAGE PYTHON DES ALGORITHMES 1 ET 2

Testé sous Sage v4.8, en date du 11 avril 2012.

#### B.1 Algorithme 1

Effectue le produit d'éléments des sous-groupes du groupe symétrique pour l'opération de produit des espèces à deux sortes d'éléments.

```
1 def Prod_sg_multi(p1,p2,a1,b1,a2,b2):
2     cpt = 1
3     plxp2 = [1..a1+b1+a2+b2]
4     while (cpt <= a1+b1+a2+b2):
5         if (cpt <= a1):
6             plxp2[cpt-1]=p1[cpt-1]
7         elif (cpt >= a1+1 and cpt <= a1+a2):
8             plxp2[cpt-1]=a1+p2[cpt-(a1+1)]
9         elif (cpt >= a1+a2+1 and cpt <= a1+a2+b1):
10            plxp2[cpt-1]=a2+p1[cpt-(a2+1)]
11        else:
12            plxp2[cpt-1]=(a1+b1)+p2[cpt-(a1+b1+1)]
13        cpt = cpt+1
14        plxp2 = Permutation(plxp2)
```

```
15  return plxp2.cycle_string()
```

Retourne l'élément Id du groupe Grp.

```
1  def Id_grp(Grp):
2      n = len(Permutation(Grp.gens()[0]))
3      Id = [1..n]
4      Id = Permutation(Id)
5      return Id
```

Effectue le produit de deux espèces moléculaires à deux sortes.

```
1  def Prod_esp(a1,b1,H1,a2,b2,H2):
2      for p in range(0,len(H1)):
3          H1[p] = Permutation(H1[p])
4      for p in range(0,len(H2)):
5          H2[p] = Permutation(H2[p])
6      H1 = PermutationGroup(H1)
7      H2 = PermutationGroup(H2)
8      Id_H1 = Id_grp(H1)
9      Id_H2 = Id_grp(H2)
10     gens_K = []
11     cpt = 0
12     while (cpt < len(H1.gens())):
13         gens_K.append(Prod_sg_multi(Permutation(
14             H1.gens()[cpt]),Id_H2,a1,b1,a2,b2))
15         cpt = cpt+1
16     cpt = 0
17     while (cpt < len(H2.gens())):
18         gens_K.append(Prod_sg_multi(Id_H1,
19             Permutation(H2.gens()[cpt]),a1,b1,a2,b2))
```



```

20         cpt = cpt+1
21     K = PermutationGroup(gens_K)
22     return (a1+a2,b1+b2,K)

```

Construit le groupe  $S_{n,m}$ .

```

1  def S(n,m):
2      cpt = 0
3      gen1 = [1..n+m]
4      gen2 = [1..n+m]
5      gen3 = [1..n+m]
6      gen4 = [1..n+m]
7      if (n >= 2):
8          gen1[0] = 2
9          gen1[1] = 1
10         while (cpt < n):
11             if (cpt == n-1):
12                 gen2[cpt] = 1
13             else:
14                 gen2[cpt] = cpt+2
15                 cpt =cpt+1
16             gen2 = Permutation(gen2)
17         gen1 = Permutation(gen1)
18         cpt = n
19         if (m >= 2):
20             gen3[n+0] = n+2
21             gen3[n+1] = n+1
22             while (cpt < n+m):
23                 if (cpt == n+m-1):
24                     gen4[cpt] = n+1

```



```

25         else :
26             gen4[cpt] = cpt+2
27             cpt =cpt+1
28             gen4 = Permutation(gen4)
29             gen3 = Permutation(gen3)
30             Snm = PermutationGroup([gen1,gen2,gen3,gen4])
31             return Snm

```

Vérifie si deux sous-groupes sont conjugués dans  $S_{n,m}$  (Via IsConjugate de GAP).

```

1 def IsEq(Snm,K1,K2):
2     K1_gap = gap(K1)
3     K2_gap = gap(K2)
4     Snm_gap = gap(Snm)
5     if (gap.IsConjugate(Snm_gap,K1_gap,K2_gap)==true):
6         return 1
7     else :
8         return 0

```

Donne la liste des classes de conjugaison des sous-groupes de  $S_{n,m}$  (équivalent à obtenir la liste de toutes les espèces moléculaires).

```

1 def Cl_conj_S(n,m):
2     Snm = S(n,m)
3     cl_conj = Snm.conjugacy_classes_subgroups()
4     cpt = 0
5     while (cpt < len(cl_conj)):
6         print cl_conj[cpt]
7         cpt = cpt+1
8     return cl_conj

```

Même fonction que plus haut mais n'affiche pas la liste.

```

1 def liste_mol_S(n,m):
2     Snm = S(n,m)
3     cl_conj = Snm.conjugacy_classes_subgroups()
4     return cl_conj

```

Effectue un partage de l'entier  $n$  en deux parts.

```

1 def par(n):
2     parts = []
3     for x in range(0,n+1):
4         for y in range(0,n+1):
5             if (x+y == n):
6                 entry = (x,y)
7                 parts.append(entry)
8     return parts

```

Calcul du nombre d'espèces moléculaires à deux sortes pour  $a + b = n$ .

```

1 def nb_mol(n):
2     cpt = 0
3     lg = len(par(n))
4     for cpt in range(0,lg):
5         l = Cl_conj_S(par(n)[cpt][0], par(n)[cpt][1])
6         print 'Nombre de moleculaire de
7 .....type %s = %s' % (par(n)[cpt], len(l))
8     return

```

Donne la liste de tous les produits de moléculaires donnant une espèce de type  $X^n T^m$ .

```

1 def liste_type_mol(n,m):
2     l = []

```

```

3   for cpt1 in range (0,len(par(n))):
4       for cpt2 in range (0,len(par(m))):
5           if (par(n)[cpt1][0]+par(m)[cpt2][0] !=0):
6               if (par(n)[cpt1][1]+par(m)[cpt2][1]!=0):
7                   x1 = par(n)[cpt1][0]
8                   x2 = par(m)[cpt2][0]
9                   x3 = par(n)[cpt1][1]
10                  x4 = par(m)[cpt2][1]
11                  entry = (x1,x2,x3,x4)
12                  l.append(entry)
13   return l

```

Conversion d'une permutation en cycles en une permutation en liste.

```

1   def conv_cycle_perm(p,n):
2       p = p.tuple()
3       perm = [1..n]
4       for x in range (0,len(p)):
5           perm[x] = p[x]
6       return perm

```

Dresse la liste des opérateurs différentiels atomiques de type  $X^n D^m$ .

```

1   def atom(n,m):
2
3       file_name = "/Users/Hugo/Documents/Sage/
4   .....Tables/Table_S-"+str(n)+str(m)+".txt"
5       f = open(file_name , 'r')
6       liste_gen=[]
7       cpt = 0
8       while 1:

```

```

9      gens = f.readline().replace('\n','')
10     if gens=="":
11         break
12     gens = eval(gens)
13     liste_gen.append(gens)
14 f.close()
15
16 liste_type_prod=liste_type_mol(n,m)
17
18 liste_produits=[]
19 for x in range (len(liste_type_prod)):
20
21     file_name = "/Users/Hugo/Documents/Sage/
22     .....Tables/Table_S_"+str(liste_type_prod[x][0])
23     +str(liste_type_prod[x][1])+".txt"
24     f = open(file_name, 'r')
25     liste1=[]
26     cpt = 0
27     while 1:
28         gens = f.readline().replace('\n','')
29         if gens=="":
30             break
31         gens = eval(gens)
32         liste1.append(gens)
33     f.close()
34
35     file_name = "/Users/Hugo/Documents/Sage/
36     .....Tables/Table_S_"+str(liste_type_prod[x][2])
37     +str(liste_type_prod[x][3])+".txt"

```

```

38     f = open(file_name, 'r')
39     liste2 = []
40     cpt = 0
41     while 1:
42         gens = f.readline().replace('\n', '')
43         if gens == "":
44             break
45         gens = eval(gens)
46         liste2.append(gens)
47     f.close()
48
49     for y in range(len(liste1)):
50         for z in range(len(liste2)):
51             K = Prod_esp(liste_type_prod[x][0],
52                           liste_type_prod[x][1], liste1[y],
53                           liste_type_prod[x][2],
54                           liste_type_prod[x][3], liste2[z])
55             liste_produits.append(K)
56
57     atom = []
58     for j in range(0, len(liste_gen)):
59         atom.append(liste_gen[j])
60
61     for cpt1 in range(0, len(liste_gen)):
62         for cpt2 in range(0, len(liste_produits)):
63             if IsEq(S(n, m), PermutationGroup(
64                 liste_gen[cpt1],
65                 liste_produits[cpt2][2]) == 1:
66                 for cpt3 in range(0, len(atom)):

```

```

67         if (atom[cpt3]==liste_gen[cpt1]
68             and len(atom)>0):
69             atom.remove(liste_gen[cpt1])
70             break
71
72     if (len(atom)!=0):
73         for i in range (len(atom)):
74             H = PermutationGroup(atom[i])
75             H = gap(H)
76             print 'X%D%s/<%s>' %(n,m,gap.
77                 GeneratorsSmallest(H))
78             print "\n-----\n"
79             print '%s_operateurs_de_type
80 .....X%D%s' %(len(atom),n,m)
81         else:
82             print "Vide"

```

Construit un fichier nommé Table-S-mn contenant un représentant de chaque classe de conjugaison des sous-groupes de  $S_{m,n}$  (dans cet exemple,  $m = 10$  et  $n = 0$ ).

```

1  n=10
2  m=0
3  f = open(".../ Table_S_"+str(n)+str(m)+".txt", 'r+')
4  l = Cl_conj_S(n,m)
5  for x in range (0,len(l)):
6      liste_gens = []
7      for p in range (0,len(l[x].gens())):
8          p = l[x].gens()[p]
9          p = conv_cycle_perm(p,n+m)
10         liste_gens.append(p)

```

```

11     f.write(str(liste_gens)+'\n')
12     print '%s' % (liste_gens)
13     K = PermutationGroup(liste_gens)
14     print K
15 f.close()

```

## B.2 Algorithme 2

Retourne le produit étoilé (\*) de deux permutations.

```

1 def star_product(p1,p2,a1,b1,a2,b2):
2
3     cpt = 1
4
5     p1 = p1.list()
6     p2 = p2.list()
7
8     if len(p1) != a1+b1:
9         length = len(p1)
10        for x in range(a1+b1-length):
11            p1.append(x+length+1 )
12
13    if len(p2) != a2+b2:
14        length2 = len(p2)
15        for y in range(a2+b2-length2):
16            p2.append(y+length2+1 )
17
18    plxp2 = range(1 ,a1+b1+a2+b2+1 )
19
20    while (cpt <= a1+b1+a2+b2):

```

```

21         if (cpt <= a1):
22             p1xp2[cpt-1 ]=p1[cpt-1 ]
23         elif (cpt >= a1+1 and cpt <= a1+a2):
24             p1xp2[cpt-1 ]=a1+p2[cpt-(a1+1 )]
25         elif (cpt >= a1+a2+1 and cpt <= a1+a2+b1):
26             p1xp2[cpt-1 ]=a2+p1[cpt-(a2+1 )]
27         else:
28             p1xp2[cpt-1 ]=(a1+b1)+p2[cpt-(a1+b1+1 )]
29         cpt = cpt+1
30     return Permutation(p1xp2).to_permutation_group_element()

```

Retourne le supremum d'une liste de partitions d'ensembles  $l$ .

```

1 def multisup(l):
2     return reduce(lambda x, y: \
3         sage.combinat.set_partition.sup(x,y), l)

```

Retourne  $\hat{g}$  pour  $g = \text{perm}$ .

```

1 def convertPermToSetpartition(perm,m,n):
2
3     setpartition = Set([])
4
5     for cyc in perm.cycle_tuples():
6         cyc = list(cyc)
7         setpartition = setpartition.union(Set([Set(cyc)]))
8
9     plist = perm.list()
10
11     if len(plist) != m+n:
12         length = len(plist)

```



```

13     for x in range(m+n-length):
14         plist.append(x+length+1 )
15
16     for y in plist:
17         if y == plist.index(y)+1 :
18             setpartition = setpartition.union(Set([Set([y])]))
19
20     return setpartition

```

Retourne  $p_c^*$ .

```

1 def star_perm(p,m,n,c):
2
3     plist = p.list()
4
5     if len(plist) != m+n:
6         length = len(plist)
7         for x in range(m+n-length):
8             plist.append(x+length+1 )
9
10    for x in range(1 ,len(plist)+1 ):
11        if Set([x]).issubset(c) == False:
12            plist[x-1 ] = x
13
14    return Permutation(plist).to_permutation_group_element()

```

Définit une classe permettant de manipuler les espèces moléculaires à deux sortes. Notons qu'il est nécessaire de charger préalablement les fonctions précédentes.

```

1 class TwoSortMolSpecies:
2

```

```

3  def __init__(self,m=0,n=0,listgens=[]):
4
5      self._m=m
6      self._n=n
7      for g in listgens:
8          g = Permutation(g).to_permutation_group_element()
9          if S(self._m,self._n).has_element(g) == False:
10             raise ValueError, ('%s is not an element of \
11 .....%s' % (g,S(self._m,self._n)))
12         self._conjClassRepr = PermutationGroup(listgens)
13
14     def __repr__(self):
15
16         return 'Two-sort_molecular_species_X^%sT^%s/<%s>' % \
17 (self._m,self._n,self._conjClassRepr.gens())
18
19     def __eq__(self,other):
20
21         Smn = gap(S(self._m,self._n))
22         grpSelf = gap(self._conjClassRepr)
23         grpOther = gap(other._conjClassRepr)
24
25         return (self._m == other._m and self._n == other._n) \
26             and gap.IsConjugate(Smn,grpSelf,grpOther)
27
28     def __mul__(self,other):
29
30         Id = Permutation('(1)').to_permutation_group_element()
31

```

```

32         a1 = self._m
33         b1 = self._n
34         a2 = other._m
35         b2 = other._n
36
37         gen_list = []
38
39         cpt = 0
40
41         while (cpt < len(self._conjClassRepr.gens())):
42             gen_list.append(star_product(\
43                 self._conjClassRepr.gens()[cpt], Id, a1, b1, a2, b2))
44             cpt = cpt+1
45
46         cpt = 0
47
48         while (cpt < len(other._conjClassRepr.gens())):
49             gen_list.append(star_product(\
50                 Id, other._conjClassRepr.gens()[cpt], a1, b1, a2, \
51                 b2))
52             cpt = cpt+1
53
54         return TwoSortMolSpecies(a1+a2, b1+b2, gen_list)
55
56     def is_atomic(self):
57
58         listSetpartition = []
59
60         for g in self._conjClassRepr.gens():

```

```
61         listSetpartition.append(\
62             convertPermToSetpartition(g, self._m, self._n))
63
64     p = multisup(listSetpartition)
65
66     if p.cardinality() == 1 and (self._m+self._n==0):
67         return False
68
69     elif p.cardinality() == 1 and (self._m+self._n>0):
70         return True
71
72     else:
73         for k in range(1,p.cardinality()):
74
75             ksubsets = []
76
77             for subset in p.subsets():
78                 if subset.cardinality() == k:
79                     ksubsets.append(subset)
80
81             for ci in ksubsets:
82
83                 c = Set([])
84
85                 for i in range (1,k+1):
86                     c = c.union(ci[i-1])
87
88                 pas_atomique = 0
89
```

```

90         for g in self._conjClassRepr.gens():
91
92             compSet = Set([])
93
94             for j in c:
95                 compSet = compSet.union(Set([g(j)]))
96
97             if compSet == c and \
98                 self._conjClassRepr.has_element(\
99                     star_perm(g, self._m, self._n, c)):
100                 pas_atomique = pas_atomique+1
101
102             if pas_atomique == len(\
103                 self._conjClassRepr.gens()):
104                 return False
105
106         return True

```

Définit une classe permettant de manipuler les opérateurs différentiels combinatoires généraux moléculaires. Cette classes dépend de la précédente.

```

1 class MolDiffOp:
2
3     def __init__(self, associatedSpecies):
4
5         self._associatedSpecies = associatedSpecies
6
7     def __repr__(self):
8
9         return 'Molecular_differential_operator_X^%sD^%s/<%s>' \

```

```
10         % (self._associatedSpecies._m, self.\
11             _associatedSpecies._n, self._associatedSpecies.\
12             _conjClassRepr.gens())
13
14     def __eq__(self, other):
15
16         return self._associatedSpecies ==\
17             other._associatedSpecies
18
19     def __mul__(self, other):
20
21         return MolDiffOp(self._associatedSpecies*\
22             other._associatedSpecies)
23
24     def is_atomic(self):
25
26         return self._associatedSpecies.is_atomic()
```



## APPENDICE C

### LISTE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS COMBINATOIRES

ATOMIQUES  $\frac{X^m D^n}{H}$ ,  $H \leq S_{m,n}$  ET  $m + n = 8$

$m = 8, n = 0$ (130 opérateurs)
$X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 8)(5\ 7) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7)(5\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 8\ 4\ 7) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8) \rangle$



$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 8)(4\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(6\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8), (3\ 6)(4\ 8)(5\ 7), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(6\ 7), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7)(5\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$

$X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(6\ 7), (1\ 5\ 2\ 8)(3\ 6\ 4\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(6\ 7), (1\ 5)(2\ 8)(3\ 6)(4\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (3\ 4\ 5), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (3\ 4\ 5), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7)(5\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 8)(4\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 6) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (2\ 5)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$

$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7)(5\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7\ 5\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (3\ 4\ 5), (3\ 6)(4\ 7)(5\ 8), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (2\ 3\ 5\ 4\ 7\ 8\ 6), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (2\ 3\ 5\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 6\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (6\ 7), (4\ 5), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 7)(5\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 6)(2\ 7\ 3\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 6)(2\ 7)(3\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 8)(4\ 7) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$   
 $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (2\ 3)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$

$X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(6\ 7), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8), (2\ 3)(4\ 6), (1\ 2)(5\ 6) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (3\ 6\ 8)(4\ 7\ 5), (2\ 3\ 5)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (2\ 3\ 4)(5\ 8\ 7), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (3\ 5\ 7)(4\ 6\ 8), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(6\ 7), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (3\ 5\ 6\ 4\ 8\ 7), (2\ 3)(4\ 6)(5\ 7), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (6\ 7), (5\ 6), (3\ 4), (2\ 3), (1\ 2), (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (4\ 5)(7\ 8), (4\ 7)(5\ 8), (3\ 4)(6\ 8), (2\ 3)(5\ 8), (1\ 2)(5\ 7) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$ $X^8 D^0 / \langle (7\ 8), (6\ 7), (5\ 6), (4\ 5), (3\ 4), (2\ 3), (1\ 2) \rangle$
$m = 7, n = 1$ (aucun opérateur)
Vide
$m = 6, n = 2$ (46 opérateurs)
$X^6 D^2 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$ $X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8) \rangle$ $X^6 D^2 / \langle (3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8) \rangle$ $X^6 D^2 / \langle (3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$



$$\begin{aligned}
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6), (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(2\ 3)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6), (3\ 4), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(4\ 5\ 6), (2\ 3)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(4\ 5\ 6), (1\ 2\ 3), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(4\ 5\ 6), (3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^6D^2/\langle(4\ 5\ 6), (2\ 3)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)(7\ 8)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X^6 D^2 / \langle (4\ 5\ 6), (2\ 3)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (4\ 5\ 6), (2\ 3)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6), (3\ 4), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (3\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6), (4\ 5), (2\ 3), (1\ 2), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (3\ 4)(5\ 6), (3\ 5\ 4\ 6)(7\ 8), (2\ 3)(4\ 6), (1\ 2)(5\ 6) \rangle \\
& X^6 D^2 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle
\end{aligned}$$

$m = 5, n = 3$  (6 opérateurs)

$$\begin{aligned}
& X^5 D^3 / \langle (3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle \\
& X^5 D^3 / \langle (6\ 7\ 8), (3\ 4\ 5), (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8) \rangle \\
& X^5 D^3 / \langle (6\ 7\ 8), (2\ 5)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5)(7\ 8) \rangle \\
& X^5 D^3 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle \\
& X^5 D^3 / \langle (6\ 7\ 8), (2\ 3\ 5\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 5) \rangle \\
& X^5 D^3 / \langle (6\ 7\ 8), (4\ 5)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle
\end{aligned}$$

$m = 4, n = 4$  (89 opérateurs)

$$\begin{aligned}
& X^4 D^4 / \langle (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7)(6\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(7\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (5\ 8)(6\ 7), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)(7\ 8) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \rangle \\
& X^4 D^4 / \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 8)(6\ 7)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 8)(6\ 7)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(7\ 8), (5\ 6), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7)(6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 3)(2\ 4)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X^4D^4/\langle(56)(78), (5768), (12)(34), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(58)(67), (34), (12), (13)(24)(56)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (5768), (34)(78), (12)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(58)(67), (34)(56)(78), (12)(56)(78), (13)(24)(56)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(78), (56), (12)(34), (13)(24)(57)(68)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (57)(68), (12)(34), (1324)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (57)(68), (12)(34)(78), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(57)(68), (12)(57)(68), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (5768), (12)(34), (1324)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(78), (56), (12)(34), (1324)(57)(68)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(78), (12)(78), (13)(24)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(5768), (12)(5768), (13)(24)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(5768), (12)(5768), (13)(24)(5768)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(78), (56), (34)(57)(68), (12)(57)(68)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(78), (12)(78), (13)(24)(57)(68)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (57)(68), (34)(78), (12)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34), (12), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(5768), (12)(5768), (13)(24)(57)(68)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(57)(68), (34)(56)(78), (12)(56)(78), (13)(24)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34), (12), (13)(24)(5768)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(78), (12)(78), (13)(24)(5768)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(57)(68), (12)(57)(68), (13)(24)(5768)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(5768), (12)(5768), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (34)(78), (12)(78), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(678), (56)(78), (14)(23)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(34)(58)(67), (23)(58)(67), (12)(58)(67)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(34)(78), (23)(67), (12)(56)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (5768), (34), (12), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (57)(68), (34), (12), (13)(24)(78)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (57)(68), (34)(78), (12)(78), (13)(24)\rangle \\
&X^4D^4/\langle(56)(78), (5768), (34)(78), (12)(78), (13)(24)\rangle
\end{aligned}$$



$X^4 D^4 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (2\ 3)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(5\ 6)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(5\ 7\ 6\ 8), (2\ 3)(5\ 7\ 6\ 8), (1\ 2)(5\ 7\ 6\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8), (1\ 2)(3\ 4) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(6\ 7), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$
<del><math>X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4) \rangle</math></del>
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4), (1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7)(6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (7\ 8), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (2\ 3)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(5\ 7)(6\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (5\ 6)(7\ 8), (5\ 7\ 6\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$X^4 D^4 / \langle (6\ 7\ 8), (5\ 6)(7\ 8), (3\ 4)(7\ 8), (2\ 3)(7\ 8), (1\ 2)(7\ 8) \rangle$
$m = 3, n = 5$ (6 opérateurs)
Ces opérateurs sont adjoints à ceux de $m = 5, n = 3$ .
$m = 2, n = 6$ (46 opérateurs)
Ces opérateurs sont adjoints à ceux de $m = 6, n = 2$ .
$m = 1, n = 7$ (aucun opérateur)
Vide
$m = 0, n = 8$ (130 opérateurs)
Ces opérateurs sont adjoints à ceux de $m = 8, n = 0$ .

## APPENDICE D

NOMBRE D'OPÉRATEURS MOLÉCULAIRES ET ATOMIQUES  $\frac{X^m D^n}{H}$ ,

$H \leq S_{m,n}$  POUR  $9 \leq m + n \leq 10$

Type ( $m, n$ )	Nombre d'opérateurs moléculaires	Nombre d'opérateurs atomiques	Type ( $m, n$ )	Nombre d'opérateurs moléculaires	Nombre d'opérateurs atomiques
(9, 0)	554	124	(8, 1)	296	0
(7, 2)	345	35	(6, 3)	418	63
(5, 4)	467	51	(4, 5)	467	51
(3, 6)	418	63	(2, 7)	345	35
(1, 8)	296	0	(0, 9)	554	124
(10, 0)	1593	598	(9, 1)	554	0
(8, 2)	1291	389	(7, 3)	754	50
(6, 4)	1856	595	(5, 5)	809	38
(4, 6)	1856	595	(3, 7)	754	50
(2, 8)	1291	389	(1, 9)	554	0
(0, 10)	1593	598			



## RÉFÉRENCES

- Awodey, S. 2006. *Category theory*. T. 49, série *Oxford logic guides*. Oxford university press.
- Bergeron, F., G. Labelle, et P. Leroux. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. T. 19, série *Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique*. Montréal : LaCIM, UQÀM.
- . 1998. *Combinatorial species and tree-like structures*. T. 67, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Canou, B. et A. Darrasse. 2009. « Fast and sound random generation for automated testing and benchmarking in objective caml ». In *Proceedings of the 2009 ACM SIGPLAN workshop on ML*. Coll. « ML '09 », p. 61–70, New York, NY, USA. ACM.
- Chiricota, Y. 1992. « Structures combinatoires et calcul symbolique ». Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal. D189.
- . 1993. « Classification des espèces moléculaires de degré 6 et 7 », *Ann. Sci. Math. Québec*, vol. 17, no. 1, p. 11–17.
- Claessen, K. et J. Hughes. 2000. « Quickcheck : a lightweight tool for random testing of haskell programs ». In *ICFP*, p. 268–279.
- Dummit, D. et R. Foote. 2004. *Abstract algebra*. John Wiley and sons, third édition.
- GAP. 2008. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*. The GAP Group.
- Joyal, A. 1981. « Une théorie combinatoire des séries formelles », *Advances in Mathematics*, vol. 42, p. 1–82.
- . 1985a. «  $\beta$ -anneaux et  $\lambda$ -anneaux », *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, vol. VII, p. 227–232.
- . 1985b. « Règle des signes en algèbre combinatoire », *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, vol. VII, p. 285–290.
- . 1986. « Foncteurs analytiques et espèces de structures ». In *Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, PQ*. T. 1234, série *Lectures notes in mathematics*, p. 126–159. Springer-Verlag, Berlin.

- Labelle, G. et C. Lamathe. 2009. « General combinatorial differential operators », *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, vol. 61A, no. B61Ag, p. 24pp.
- Runciman, C., M. Naylor, et F. Lindblad. 2008. « Smallcheck and lazy smallcheck : automatic exhaustive testing for small values ». In *Proceedings of the first ACM SIGPLAN symposium on Haskell*. Coll. « Haskell '08 », p. 37–48, New York, NY, USA. ACM.
- Sney-Lacasse, N. 2007. « Opérateurs combinatoires différentiels généralisés ». Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal. M9919.
- Stanley, R. P. 1986. *Enumerative combinatorics volume 1*. T. 49, série *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge university press.
- Stein, W. et al. 2011. *Sage Mathematics Software (Version 4.7.1)*. The Sage Development Team. <http://www.sagemath.org>.
- Yeh, Y.-N. 1985. « On the combinatorial species of Joyal ». Thèse de Doctorat, State University of New York at Buffalo.
- Yorgey, B. A. 2010. « Species and functors and types, oh my! ». In *Proceedings of the third ACM Haskell symposium on Haskell*. Coll. « Haskell '10 », p. 147–158, New York, NY, USA. ACM.