UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES SUR LES CONIQUES AVEC UN OUTIL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

MÉMOIRE DE RECHERCHE

PRÉSENTÉ COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA

MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES,

PAR

BENJAMIN RINCON BAHAMON

NOVEMBRE 2011

REMERCIEMENTS

« No llores porque ya se terminó... sonríe, porque sucedió ».
« Ne pleure pas parce quelque chose est terminée, mais souris parce qu'elle a eu lieu ».
Gabriel Garcia Marquez

J'exprime ma reconnaissance en tout premier lieu à mon directeur, Monsieur Fernando Hitt, pour sa disponibilité, sa patience, la rapidité dans les corrections et ses bons conseils, tant sur le plan humain que scientifique.

Je tiens également à remercier Monsieur Denis Tanguay pour l'intérêt et le regard critique qu'il a porté sur ce travail et pour avoir aidé à développer mon intérêt envers le raisonnement argumentatif et démonstratif, par le biais de ses conseils judicieux et de discussions fructueuses.

Je remercie la direction de l'école secondaire Jean-Jacques-Bertrand, à Farnham, de m'avoir permis de réaliser mon expérimentation. Mais surtout, j'exprime ma gratitude à Monsieur Daniel Lussier, directeur du programme International, et à Monsieur Vincent Roy, enseignant titulaire de mathématiques.

Je dédie ce travail à mon épouse, Flor Deissy, et à mes enfants. Ma double reconnaissance est adressée à mon épouse pour toutes ces années de soutien, de patience et de privations. Malgré les problèmes de santé auxquels j'ai eu à faire face, elle a toujours été à mes côtés, m'appuyant et m'encourageant à me dépasser. En fait, je devais m'investir à la fois dans mes études et combattre la maladie ; je lui suis fort reconnaissant de tout ce qu'elle a fait pour moi.

Que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, trouvent ici l'expression de ma gratitude.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

La production de conjectures, de preuves et de démonstrations mathématiques chez les élèves de l'école secondaire est depuis plusieurs années un thème important de la recherche en didactique des mathématiques. La problématique sous-jacente se complexifie quand on considère de surcroît le rôle que peut jouer la technologie dans l'apprentissage de la preuve et de la démonstration, notamment vis-à-vis la production de conjectures, comme préalable au travail sur une preuve donnée. Ces questions sont ici spécifiées aux élèves de 5^e secondaire de l'école québécoise.

Le contenu mathématique que nous avons choisi pour étudier ces questions est celui des coniques, approchées avec un logiciel de géométrie dynamique. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à l'analyse des stratégies et démarches des élèves de 5^e secondaire au moment où ils travaillent une démonstration, dans le contexte du thème choisi, d'abord avec papier-crayon et ensuite, avec technologie. Des activités *ad hoc* ont été élaborées et soumises aux élèves auprès desquels nous avons expérimenté. Les productions qui ont résulté de ces tâches nous ont permis d'analyser les erreurs et obstacles en lien avec la production des conjectures, des preuves et des démonstrations par les élèves.

Les résultats issus de l'expérimentation et de l'analyse des productions montrent les aspects positifs et négatifs du travail avec papier-crayon, et aussi de l'environnement technologique. La comparaison de ces deux milieux de travail, des possibilités qu'ils offrent et des contraintes qu'ils sous-tendent pourront servir de piste pour une éventuelle amélioration de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire.

Mots clefs : Conjecture, preuve, démonstration, travail papier-crayon, géométrie dynamique, coniques.

INTRODUCTION

Depuis la naissance de la didactique des mathématiques, le problème de la démonstration est l'un des thèmes de recherche sur lesquels se sont concentrés de nombreux didacticiens. La didactique des mathématiques n'est pas la seule à essayer de comprendre les processus de démonstration. Par exemple, les historiens des mathématiques sont, depuis longtemps, confrontés à cette problématique (Hitt, 2004). Même si la recherche s'est poursuivie depuis le siècle dernier, le problème continue d'être présent, comme le mentionne Mariotti (2001) : « Nos idées sur la ***démonstration*** ont évolué et s'avèrent toutefois plus incertaines et confuses qu'auparavant ».

À l'heure actuelle, les recherches du côté épistémologique pour caractériser, en mathématique, une démonstration (Duval, 1995; Balacheff, 1987; Tanguay, 2002) et les études sur la relation entre l'argumentation liée à la production d'une conjecture et la construction d'une démonstration (Mariotti, 2001; Balacheff, 1987; Pedemonte, 2005) sont quelques-uns des sujets de recherche qui mobilisent l'intérêt des didacticiens en mathématiques.

Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons au deuxième aspect présenté, plus précisément à l'analyse des comportements et des difficultés des élèves au moment de faire une démonstration. Cet intérêt semble partagé par le MELS (1998), qui souligne l'importance de développer chez les élèves la capacité à démontrer, en prouvant des théorèmes ou des résultats qu'ils viennent de traiter. Les élèves sont appelés à construire des argumentations justes et rigoureuses dans une démarche structurée, au cours de la démonstration de propositions ou de la résolution de problèmes.

Nous avons pris en considération les remarques du MELS et nous avons voulu mettre en pratique, chez les élèves de cinquième secondaire, une approche mathématique sur les coniques visant la démonstration. Pour ce faire, nous allons comparer deux méthodes possibles, soit l'obtention des coniques en termes de lieu géométrique par l'intégration du logiciel Cabri-Géomètre dans une solution possible et la démarche faite par les élèves en contexte papier-crayon. En plus, nous voulons comprendre les différentes stratégies mises en œuvre par les élèves au moment de la résolution de problèmes, autrement dit, la façon dont ils abordent les problèmes avec une approche papier-crayon et la façon dont est utilisé l'outil informatique Cabri-Géomètre dans la résolution.

Notre approche expérimentale a été inspirée du travail de recherche fait par Arcavi et Hadas (2000), où ceux-ci proposent un problème ouvert à discuter et à résoudre à l'aide de la technologie. Les activités 1, 2 et 3 proposées dans cette expérimentation permettront d'aboutir à plusieurs problèmes et peut-être, amèneront les élèves à discuter de ces problèmes.

Dans le premier chapitre, nous présentons la problématique sur l'apprentissage de la démonstration en mathématique, sur laquelle plusieurs didacticiens (Duval, 1991, 1992-93; Balacheff, 1987, 1999; Tanguay, 2002, 2004, 2006; Mariotti, 2001) ont apporté leur point de vue. Les difficultés des élèves y sont considérées selon ces idées : la pertinence et la nécessité d'une démonstration ainsi que la différence avec l'argumentation.

Pour les besoins de cette recherche, notre intérêt n'a porté que sur la cinquième année du secondaire. Nous nous sommes centrés sur la façon dont les élèves abordent un problème lorsqu'une démonstration géométrique est demandée, et sur la manière dont se manifestent les notions de preuve et de démonstration dans les contextes papier-crayon et technologiques.

Dans ce même chapitre sont posées les questions de recherche et ce, en prenant en considération le Programme d'étude de mathématiques au secondaire du Ministère de l'Éducation (1998) de niveau 536[1]. Nous nous penchons sur la théorie de résolution de problèmes ainsi que sur la difficulté qui persiste chez les élèves au moment où ils entreprennent la démonstration d'un énoncé mathématique. Nous leur demandons une preuve[2] et une démonstration par lesquelles il sera possible d'obtenir les coniques en termes de lieu géométrique.

Le chapitre deux, le cadre théorique, commence avec les trois principes directeurs du Programme d'étude de mathématiques de cinquième secondaire (536), qui guident du point de vue de la formation générale, le travail des enseignants et enseignantes auprès des élèves. Ces principes sont : *favoriser la participation active de l'élève dans son apprentissage, favoriser le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage,* et *favoriser l'utilisation de la technologie appropriée dans l'exécution d'une tâche.* Ces trois principes constituent donc l'axe fondamental de notre cadre théorique, non seulement parce que le programme de mathématiques du secondaire leur accorde une place centrale dans l'acquisition des connaissances et des compétences visées par la formation mathématiques en général, mais aussi parce qu'ils vont servir comme principes directeurs pour la conception et la résolution (stratégies utilisées par les élèves dans le processus de résolution de problème) des problèmes de démonstration de la propriété métrique des coniques qui seront proposés aux élèves.

Nous clarifions les différences entre exercices et problèmes en mathématiques, selon les travaux de Hitt (2004, 2007), ainsi que la stratégie de résolution des problèmes

---

[1] Nous ne considérons, dans cette recherche, que l'ancien programme du MEQ et non le nouveau programme du MELS, essentiellement parce que les élèves auprès de qui nous avons expérimenté à l'hiver 2007 étaient sous le régime pédagogique de l'ancien programme et la réforme venait tout juste d'être mise en œuvre dans l'ensemble des écoles secondaires du Québec. Donc, nous avons gardé les exigences à propos de la résolution de problèmes, de l'utilisation des technologies dans la résolution de problèmes et des coniques (en essence le même contenu). Cela ne change rien à notre problématique, au cadre théorique, à la méthodologie non plus qu'à l'analyse.

[2] Dans notre recherche, nous faisons une distinction entre preuve, argumentation et démonstration.

d'un point de vue didactique, Cazzaro(2001). Nous faisons allusion aux travaux, entre autres, de Duval (1991, 1992-93), Tanguay (2002, 2004, 2006) et Balacheff (1987, 1999) sur l'argumentation et la démonstration, et sur la possibilité de voir l'argumentation en tant que processus qui peut aider à la construction de la démonstration. Finalement, nous abordons la résolution de problèmes par les outils technologiques; nous invoquerons des éléments des travaux d'Arcavi et Hadas (2000) et Mariotti (2001), dans lesquels il est question de problèmes ouverts à discuter et à résoudre dans un environnement technologique à l'intérieur duquel la visualisation, l'expérimentation, la surprise, la rétroaction et la nécessité de démontrer et d'argumenter jouent un rôle décisif.

Dans le troisième chapitre, nous exposons la méthodologie qui a guidé cette recherche, soit la méthodologie de l'ingénierie didactique proposée par Artigue (1989). Cette méthodologie est basée sur des expérimentations en classe. Son avantage par rapport à d'autres méthodologies de recherche est que la validation y est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori.

Nous avons conçu quatre activités d'expérimentation qui permettront de mettre en évidence certaines difficultés chez les élèves. Une première activité est dédiée à la formation du logiciel Cabri-Géomètre; une deuxième activité est consacrée au savoir-faire sur l'ellipse (avec papier-crayon); une troisième et une quatrième activité sont destinées au savoir-faire sur la Parabole et au savoir-faire sur les Coniques, avec l'aide de Cabri-Géomètre. Nous nous focalisons sur les deux aspects suivants des activités 1 et 3 : la résolution des problèmes et la démonstration mathématique d'une propriété métrique des coniques.

Le quatrième chapitre concerne le compte-rendu de l'expérimentation en classe. Cette expérimentation s'est déroulée à la mi-février 2007, à la polyvalente Jean-Jacques-

Bertrand à Farnham, avec 24 élèves, âgés de 16 à 17 ans, et inscrits au cours Mathématique 536 du programme d'éducation internationale.

Pour l'analyse des résultats, nous avons retenu les productions (cahier de l'équipe) et les verbatims récoltés lors d'entrevues. Pour chaque activité, nous n'analysons que les cas typiques, les cas qui semblent être plus pertinents ainsi que ceux qui semblent pouvoir apporter des réponses à nos questions de recherche.

En conclusion, dans le cinquième chapitre, nous présentons un résumé de notre démarche. Par une discussion, nous apportons les éléments qui contribuent à fournir des réponses à nos questions. Nous avançons quelques éléments qui seraient, selon nous, intéressants pour l'enseignement ou pertinents pour des futures recherches.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Depuis plusieurs années, des chercheurs en didactique des mathématiques, soient Balacheff (1987), Duval (1991), Mariotti (2001), Pluvinage (1989) et Tanguay (2002), entre autres, se sont intéressés à l'étude de l'apprentissage de la démonstration en géométrie, plus précisément, aux difficultés des élèves avec l'idée de démonstration (sa pertinence, sa nécessité) et la différence avec l'argumentation.

Mariotti (*idem*) considère que *« la démonstration et l'aspect théorique des mathématiques ne peuvent être évacués dans la formation mathématique des élèves. On ne peut enseigner et transmettre les savoirs mathématiques en laissant de côté la démonstration »* (p. 438).

Sans avoir la prétention de faire une analyse minutieuse de ce qui cause des difficultés dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de la démonstration en mathématiques, nous voulons en souligner, à travers les travaux de Duval (1991), Tanguay (2002) et Balacheff (1987), quelques éléments qui nous semblent importants.

Dans ses recherches sur les processus d'enseignement, Duval (1991) affirme que :

> *L'apprentissage de la démonstration constitue l'un des obstacles les plus résistants auxquels se heurte l'enseignement des mathématiques. Or quand on regarde ce que recouvre l'activité de démonstration dans les problèmes de géométrie, on s'aperçoit que la pratique du raisonnement déductif en constitue l'une des tâches décisives. La simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de cette pratique* (p. 233).

Dans ses travaux, Duval (*idem*, p. 234) met aussi en évidence les difficultés auxquelles se heurte l'enseignement pour amener les élèves à différencier le raisonnement déductif, le raisonnement argumentatif et la structure qui les distinguent. Il énonce aussi la possibilité que cette difficulté constitue un obstacle pour amener les élèves à comprendre ce qu'est une démonstration.

Selon Duval (1991), ces difficultés ne seront surmontées que lorsque les élèves seront aptes à différencier le fonctionnement du raisonnement déductif de celui de l'argumentation, ainsi que lorsqu'ils sont capables de percevoir les exigences propres de la démonstration en mathématiques (utilisation de définitions, de théorèmes, etc.).

Du côté apprentissage, Tanguay (2002) affirme que :

> *Les élèves ne voient pas la pertinence d'avoir recours à des démonstrations pour des problèmes qui leur paraissent souvent « évidents », ou dont la solution leur est accessible par vérification empirique... Ils peuvent, à l'inverse, considérer qu'une preuve déductive ne s'applique qu'à un cas particulier, celui décrit par la figure d'accompagnement ou encore, ressentir la nécessité de vérifier empiriquement un résultat même après s'être déclarés satisfaits de la preuve... Quant aux écueils liés à la gestion par l'élève du raisonnement au sein des preuves déductives, ils sont nombreux : départager la thèse des hypothèses, différencier une implication de sa réciproque, discerner les rôles et la portée de l'exemple et du contre-exemple...* (p. 2)

Pour Tanguay (2002), la présentation de problèmes qui nécessitent un raisonnement déductif et dont la solution n'est pas visible par simple vérification empirique aiderait les élèves à surmonter ces difficultés.

De son côté, Balacheff (1987) pense que :

> *... les difficultés signalées à l'apprentissage de la démonstration sont d'abord liées au passage d'une mathématique « pratique » caractérisée par l'action et l'observation dans les cours... à une mathématique plus théorique, justement caractérisée par l'introduction de la démonstration. Ce passage apparaît comme une véritable rupture du contrat didactique qui, avant cette introduction, réglait les relations des élèves et du maître à propos de l'activité mathématique.* (p. 147)

Finalement, pour Balacheff (*idem*), ce dépassement peut être recherché dans des situations permettant la dévolution aux élèves de la responsabilité mathématique vis-à-vis ce qu'ils produisent. Pour leur bénéfice, c'est eux qui doivent faire des efforts personnels et autonomes autour de preuves ou de démonstrations.

Pour mieux comprendre comment les élèves de cinquième secondaire entreprennent de tels problèmes de démonstration en géométrie et comment se manifestent les notions de preuve et de démonstration dans des contextes papier-crayon et technologiques, nous avons choisi les coniques. Nous avons décidé de nous concentrer sur ce sujet pour deux raisons fondamentales.

Premièrement, pour son vaste éventail d'applications dans la vie de tous les jours (par exemple, dans les arts, les sciences et les technologies). En effet, l'histoire montre que les coniques ont intéressé et fasciné la communauté mathématique, et ce depuis l'époque de la Grèce antique. Leurs constructions mettent en jeu de nombreuses figures géométriques premières, basées sur des droites et des cercles.

Plusieurs problèmes classiques peuvent être résolus grâce aux coniques :

- Le système solaire de Ptolémée où la Terre était au centre de l'univers et les trajectoires des planètes étaient basés sur un mouvement circulaire.
- En science et astronomie : la première loi de Kepler, où toutes les planètes effectuent un trajet *elliptique* dont le Soleil est un des foyers.
- En art : dans la peinture, on trouve des ombres et des pénombres. Tous les bords circulaires des objets (cylindriques ou sphériques) vont donner lieu à des ombres qui seront des coniques.

Deuxièmement, pour l'accessibilité aux démonstrations portant sur des propriétés métriques qui les caractérisent. En effet, d'après l'étude de Corriveau et Tanguay (2007), les enseignants du secondaire ne prennent pas suffisamment de temps pour initier les élèves à la démonstration en général.

Dans cette étude, les chercheurs s'attardent particulièrement sur la préparation des élèves du secondaire au formalisme et à la démonstration, des éléments significatifs au niveau collégial quant aux possibles difficultés (mathématiques, non organisationnelles) qu'on rencontre chez les élèves au début de leur apprentissage. Les chercheurs ont mis ici en évidence le manque de préparation des élèves en ce qui a trait au formalisme, aux démonstrations et à la rigueur :

> *L'enseignant veut justifier tout ce qu'il fait au tableau, mais les étudiants ne comprennent pas pourquoi ça doit être fait. Faire une preuve, c'est l'enfer! Il faut arriver rapidement à une finalité en disant à quoi ça sert.* [...] *Ils n'ont pas le sens de la preuve : pourquoi raisonner en mathématiques ?* (Propos d'un enseignant du collégial rapportés par Corriveau et Tanguay, 2007, p. 6)

Ceci permet de penser qu'en général, les enseignants du secondaire n'accordent pas assez d'importance à la démonstration. Ce qui nous amène à penser aussi que le potentiel fourni par l'étude des coniques pour l'initiation à la démonstration n'est pas bien exploité par les enseignants du secondaire.

La justification des propriétés des coniques peut s'appuyer sur une variété de connaissances géométriques, comme celles de la géométrie des lieux de points, de la géométrie des transformations (par exemple, les rotations et les translations permettent de transformer l'équation générale d'une conique en une équation réduite) et de la géométrie métrique.

Actuellement, les coniques occupent une place importante dans les mathématiques de cinquième secondaire au Québec. Par exemple, dans le manuel *Réflexion mathématique 536*[3], on retrouve plusieurs questions en lien avec les coniques, telles : « *Déterminez l'équation ou l'inéquation associée à une conique ou à la région limitée par celle-ci* ». De plus, l'objectif terminal de cette section du manuel est :

---

[3] Au Québec, « *le programme Mathématique 536 s'adresse aux élèves de cinquième secondaire qui souhaitent poursuivre leurs études en sciences, en administration ou en formation technique et qui ont réussi le programme de Mathématique 436. Le programme, Mathématique 536 se caractérise par la profondeur et l'étendue de la matière étudiée et par la complexité des situations, des problèmes et des applications qu'on propose* ». Extrait de : http://www.mels.gouv.qc.ca/dfgj/dp/programmes_etudes/secondaire/math536.htm

« *Résoudre des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du premier et du second degré dans le plan cartésien* », ce qui est en lien avec les objectifs décrits par le Programme de mathématiques de cinquième secondaire (536)[4].

Dès 1998, Le Ministère de l'Éducation du Québec a commencé à donner une place importante à la résolution de problèmes en mathématiques dans le Programme d'études de cinquième secondaire.

> *Les solutions aux problèmes posés pourront être diversifiées et exiger l'emploi d'équations, de fonctions, de rapports trigonométriques ou d'autres connaissances. Dans tous les cas, l'élève résoudra les problèmes en organisant sa solution et en justifiant les étapes de son raisonnement. L'initiation à la formalisation ne devra cependant empêcher l'utilisation de la technologie moderne. Celle-ci pourra être d'une grande utilité pour la recherche d'une solution.* (p. 5)

La démonstration des propriétés métriques des coniques est une bonne initiation à la formalisation et également un bon sujet d'étude, car elle permet aux élèves de cinquième secondaire de mettre en pratique leurs habiletés lors de résolution de problèmes en organisant leur solution et en justifiant les étapes de leur raisonnement.

> *Comme en algèbre, démonstrations et preuves devront être constamment présentes. L'élève qui suit le présent cours (math536) poursuivra probablement des études ultérieures; il faut donc lui assurer une préparation appropriée en relevant graduellement le niveau de traitement mathématique. D'ailleurs, l'élève devra traiter un problème à résoudre avec la même rigueur qu'un théorème à démontrer.* (Programme d'études mathématiques 536, 1998, p. 27)

L'utilisation des technologies à des fins éducatives, en particulier les logiciels, est un sujet bien documenté. Pour mieux attaquer cette problématique du point de vue didactique, nous utilisons les potentialités éducatives qu'offre le micromonde Cabri-Géomètre comme médiateur de significations : « *Ce micromonde peut être interprété comme un artefact culturel et son fonctionnement dans le cadre des activités scolaires peut être interprété en termes de médiation sémiotique* » (Mariotti, 2001, p. 447).

---

[4] http://www.mels.gouv.qc.ca/dfgj/dp/programmes_études/secondaire/math536.htm

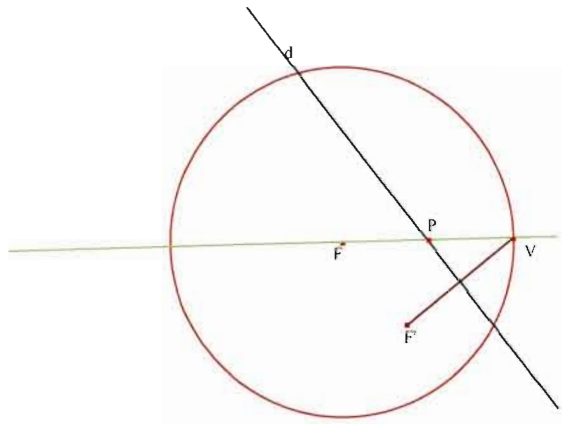
Le cadre théorique instrumental englobe les travaux de Mariotti (2001), qui a fait des recherches sur la démonstration en mathématiques et sur le rôle joué par des artefacts instrumentés dans la pratique scolaire; aussi, les travaux d'Arcavi et Hadas (2000) sur la médiation apportée par les logiciels éducatifs dans le processus d'apprentissage des mathématiques, qui ont permis de mieux comprendre l'importance des instruments, entre autres, en tant que médiateurs lors de la résolution de problèmes mettant en jeu l'élaboration d'une démonstration. Pour ce faire, nous avons élaboré trois exemples d'activités qui pourraient être utilisées dans cette expérimentation et qui pourraient aider à éclaircir l'objectif de recherche. La première activité se situe dans un contexte papier-crayon. Les deux autres activités se situent dans un contexte technologique et font appel au logiciel Cabri-Géomètre.

1.1 Objectif de recherche

Chercher à mieux comprendre comment Cabri-Géomètre peut intervenir dans un contexte où l'on veut démontrer mathématiquement une propriété métrique sur les coniques.

La propriété métrique est présentée sous la forme de la construction d'une conique comme lieu géométrique défini par la propriété. La démonstration attendue des élèves est véhiculée par la justification, demandée explicitement, que le lieu est bien une ellipse :

Soit un cercle de centre F et de rayon arbitraire. Soit F' un point à l'intérieur du cercle et V un point lié au cercle et variable sur ce cercle. On trace le segment $\overline{VF'}$ et la droite *VF*. On construit la médiatrice d de $\overline{VF'}$. Soit P le point d'intersection de *d* et de la droite *VF*. **Quel est le lieu géométrique de *P* lorsque *V* prend toutes les positions possibles sur le cercle ?**



Représentation graphique du problème

1.2. Questions de recherche

Q$_1$. *Dans le contexte de la recherche d'une démonstration sur la propriété métrique des coniques précédemment décrite, comment Cabri-Géomètre favorise chez les élèves un raisonnement argumentatif susceptible d'être investi ensuite dans la construction de la démonstration (la justification) ?*

Q$_2$. *Qu'est-ce qui diffère dans un tel travail avec Cabri, de ce que l'élève ferait pour une tâche équivalente avec papier-crayon ?*

Q$_3$. *Quelles sortes de stratégies sont utilisées par les élèves dans ce processus de résolution de problèmes ?*

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

2.1 Introduction

Le ministère de l'Éducation (MEQ) affirme que « la société québécoise d'aujourd'hui et de demain requiert une école centrée sur les apprentissages fondamentaux et sur le développement intellectuel des élèves. Ces apprentissages portent notamment sur la communication, la résolution de problèmes et la compétence technologique » (1998, p. 2).

Pour mener à bien cet ambitieux objectif, le MEQ (*idem*) propose de mettre l'accent sur trois principes directeurs, qui doivent guider le travail des enseignants et des enseignantes auprès des élèves : favoriser la participation active de l'élève à son apprentissage, favoriser le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage et favoriser l'utilisation de la technologie appropriée dans l'exécution d'une tâche.

C'est à partir de ces trois grands principes directeurs, centrés sur l'apprentissage des mathématiques, que nous entamons le cadre théorique de notre recherche. Chacun de ces principes va être enrichi par des éléments théoriques de la recherche en didactique des mathématiques. Nous recherchons dans ces théories des éléments qui appuient l'importance de la participation active des élèves à leurs apprentissages. Par la suite, nous recherchons les théories qui discutent de l'apport du processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de cet apprentissage. Nous recherchons ensuite les définitions des raisonnements argumentatif et démonstratif dans la perspective de l'apprentissage de la preuve et de la démonstration. Finalement, nous abordons la résolution de problèmes par les outils technologiques.

2.2 Favoriser la participation active de l'élève à son apprentissage

Les élèves disposent, avant qu'on leur enseigne un contenu particulier, de ce que Schoenfeld (1985) appelle un *système de croyances* ou de conceptions bien organisé. Celles-ci sont souvent basées davantage sur l'apparence que sur le sens, et sont relativement résistantes aux modifications que cherche à induire l'apprentissage.

C'est en nous appuyant sur les connaissances et les conceptions (spontanées ou non) de l'élève que nous l'aidons à construire personnellement son apprentissage et à acquérir de nouvelles connaissances. En lui proposant de nouvelles et stimulantes situations, on le plonge à l'intérieur de son propre apprentissage. C'est à nous, enseignants et enseignantes, d'organiser l'enseignement pour faire appel, chez l'élève, à l'observation, à l'exploration et à la construction, entre autres.

2.3 Favoriser le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage

2.3.1 Exercices et problèmes

Avant d'aborder le deuxième principe, nous voulons clarifier deux concepts qui, souvent, créent des confusions entre les enseignants et les élèves : le concept d'exercice et celui de problème. Selon Hitt[5] (2004), un *exercice* est un énoncé mathématique qui fait appel à une procédure déjà bien établie pour celui qui la met en œuvre. Dans le contexte de la théorie des systèmes sémiotiques de représentation (Duval 1993, 1995), Hitt (*idem*) affirme qu'un *problème* est plus complexe qu'un exercice du point de vue cognitif :

> *... si un énoncé ne fait pas appel à une procédure déterminée, et s'il oblige à la construction d'une représentation interne particulière qui fera la liaison entre différentes représentations de ce qui est en jeu, qui va promouvoir l'articulation entre ces différentes représentations et qui va aussi permettre de produire des*

[5] Notes du cours *Initiation à la recherche en didactiques des mathématiques, session automne 2007-hiver 2008* : Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. Fernando Hitt.

représentations sémiotiques particulières liées à l'énoncé en question, alors cet énoncé-là sera pour nous un problème. (p. 354)

Toujours selon cette approche de construction de concepts, Hitt (*idem*, p. 335), en invoquant Duval, affirme qu'un système sémiotique de représentations peut être un registre de représentations si celui-ci permet trois activités cognitives fondamentales, liées à la sémiosis (Figure 1) :

– La formation d'une représentation identifiable…

– Le traitement d'une représentation, soit la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée…

– La conversion d'une représentation, soit la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre, en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale (Hitt, 2004, p. 41).

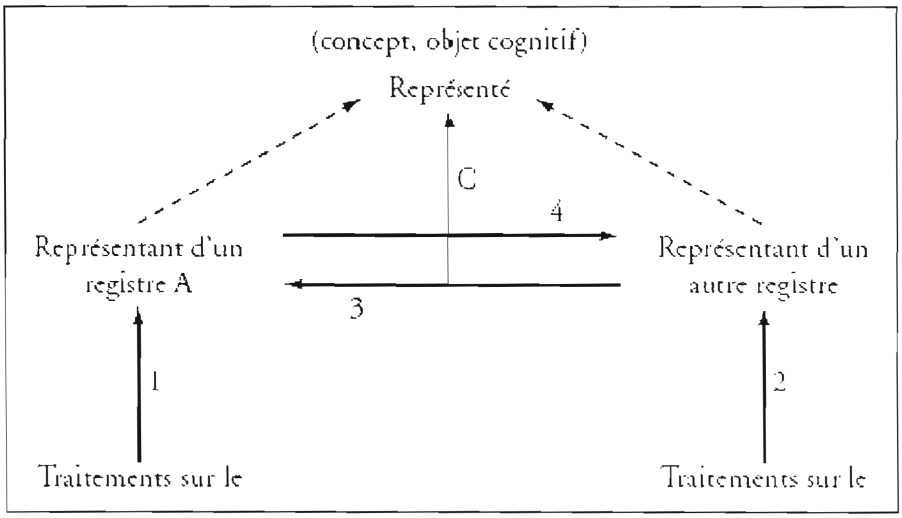


Figure 1 – Coordination entre deux registres

Les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes d'un registre. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions par changement de registre. La flèche C correspond à ce que nous appellerons la

> *compréhension intégrative d'une représentation : elle suppose la coordination de deux registres. Les flèches en pointillé correspondent à la distinction classique entre représentant et représenté. Naturellement, ce schéma envisage le cas le plus simple de la coordination entre deux registres.* (Duval, 1995, y compris la Figure 1, p. 67-68)

Duval (*idem*) affirme que dans la construction des concepts mathématiques, la notion de registre sémiotique de représentation est absolument nécessaire ainsi que la coordination de représentations entre différents registres, puisque chaque représentation en elle-même ne représente que partiellement le concept dont il est question.

Même si notre recherche ne tourne pas autour de la théorie des représentations sémiotiques, nous portons un intérêt particulier à l'utilisation et à la coordination des différents registres de représentations qui pourront être exploités chez les élèves pendant le processus de résolution de la démonstration, autant dans le contexte papier-crayon que dans le contexte informatisé.

À l'intérieur du concept de problèmes se retrouve une catégorie de problèmes appelés « problèmes ouverts ». Le terme « problème ouvert » évoque une classe de problèmes destinés à solliciter, de la part des élèves, une démarche scientifique : faire des essais, conjecturer, prouver et démontrer. Pour un problème de ce type, aucune procédure de résolution spécifique n'a été enseignée auparavant. Cela implique que plusieurs procédures de nature différente sont possibles. Plusieurs caractéristiques sont essentielles afin que l'on puisse qualifier un problème d'« ouvert » :

- L'énoncé est court et ne pose pas de problème de compréhension.
- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution. La solution ne doit pas se réduire à l'application immédiate des derniers résultats présentés en classe.
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ils peuvent prendre possession facilement de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples (Charnay, dans Académie Nantes, 2010).

Après avoir clarifié le concept de problème ouvert qui va nous guider pendant la présente recherche, nous allons continuer avec la résolution de problèmes.

Selon le Programme d'étude de mathématique du secondaire du MEQ (1998), la résolution de problèmes constitue une trame de fond de l'enseignement de plusieurs programmes de formation générale (sciences pures, sciences humaines, etc.) et fait partie intégrante de toute activité mathématique.

Ce même programme stipule que la résolution de problèmes est à la fois une habileté de base à développer chez l'élève, et un moyen à privilégier dans l'enseignement de la mathématique pour développer des connaissances mathématiques, des habiletés intellectuelles et des attitudes socio-affectives de stratégies pour la résolution de problèmes. Celle-ci contribue efficacement à la construction du savoir et du savoir-faire. La qualité des apprentissages repose sur la diversité et le degré de difficulté des problèmes auxquels l'élève doit faire face. Le rôle de l'enseignant est de choisir des problèmes adaptés à la classe et de contrôler l'activité de résolution. Par exemple, donner « un coup de pouce » en cas de blocage persistant, aider les élèves à tirer des conclusions du travail qu'ils ont effectué, élaborer des synthèses avec eux ou établir, si nécessaire, des connexions avec d'autres domaines. Les problèmes servent alors à :

- Appliquer et intégrer des connaissances mathématiques (concepts, propriétés, algorithmes, techniques, procédés, etc.);
- Acquérir des habiletés intellectuelles (organiser, structurer, abstraire, analyser, synthétiser, estimer, généraliser, déduire, justifier, etc.);
- Adopter des attitudes positives (prendre conscience de ses capacités, respecter le point de vue des autres, faire preuve d'imagination, de créativité, de rigueur et de précision, etc.);

- Utiliser différentes stratégies de résolution de problèmes (rechercher une régularité, représenter le problème par une figure ou un graphique, construire un tableau, recourir à un modèle connu, utiliser une formule, construire une équation, travailler à rebours, etc.).

2.3.2 Résolution de problèmes

Cazzaro et al. (2001) dit qu'avant d'amorcer l'étude de la résolution de problèmes, nous devons mettre en évidence un élément qui a une grande importance : il s'agit des *systèmes de croyances* que les élèves ont des mathématiques[6] et la façon dont ils visualisent et abordent les problèmes.

Les systèmes de croyances ont d'abord été étudiés par Schoenfeld (1992). Les systèmes de croyances des élèves sont vastes et nous pouvons citer, par exemple, les quatre catégories proposées par Schoenfeld concernant les croyances des élèves : empirisme et déduction, signification et forme, problèmes et exercices, passivité et activité mathématique. « Ces croyances des élèves peuvent modifier la façon d'attaquer un problème, ainsi que les techniques utilisées ou abandonnées » (Idem, p. 147).

Plusieurs mathématiciens ont publié des travaux sur la résolution de problèmes en mathématique et ce processus, résoudre un problème, a été divisé par les chercheurs en *phases* ou en *étapes*. Par exemple, pour Pólya (1965), il y a quatre étapes : *comprendre le problème, concevoir un plan, exécuter le plan* et *revenir en arrière*.

Dans son livre *Mathematical Problem Solving*, Schoenfeld (1985) considère insuffisants les éléments d'analyse suggérés par Pólya pour la résolution de problèmes. En effet, Schoenfeld affirme que ce processus implique non seulement les

---

[6] Les élèves peuvent avoir par exemple une vision « catégorique » et restreinte des mathématiques : mathématiques considérées comme infaillibles et mises en œuvre selon un style purement déductiviste; ou une vision des mathématiques considérée comme un défi et une aventure de l'esprit humain (extrait de Camou, 2009).

connaissances préalables sur les mathématiques et les connaissances heuristiques, mais aussi un troisième élément, soit les croyances et les intuitions que les élèves ont des mathématiques. Ainsi, selon Schoenfeld, la résolution de problèmes est un processus plus complexe que celui explicité par Pólya.

2.3.2.1 Résoudre un problème

Il n'existe aucune méthode universelle sur la découverte de la solution de n'importe quel problème, mais il est possible de décrire ce qui se passe au cours de la résolution d'un problème. Selon la Commission pédagogique de la SBPMef (Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française), cette description, évoquée par Cazzaro et al. (2001), peut être réalisée selon trois points de vue :

- un point de vue mathématique;
- un point de vue didactique;
- un point de vue psychologique.

En ce qui concerne cette recherche, nous nous intéressons au point de vue didactique (procédures et concepts utilisés par les élèves). Nous ne traiterons pas les deux autres points de vue car ils sont utilisés dans d'autres contextes. Par exemple, le point de vue mathématique s'applique à des situations problèmes où l'on demande une modélisation mathématique. Le point de vue de la psychologie cognitive, en général, s'applique quand on s'intéresse à la formation d'un concept mathématique.

Le point de vue didactique

Ce principe cherche à rendre compte des comportements observables des élèves. Cazzaro et al. (*idem*) affirme qu'en analysant la résolution de problèmes de ce point de vue, plusieurs auteurs, s'inspirant des travaux de Pólya et Schoenfeld, considèrent que ces résolutions comportent quatre phases principales :

1. l'analyse du problème;
2. l'élaboration d'une stratégie;
3. la vérification et la validation de la stratégie;
4. la communication du résultat.

Cazzaro et al. (*idem*, p. 146) affirme que les travaux de Schoenfeld proposent, en parallèle à ces phases, un découpage plus fin en *épisodes*[7] qui peuvent se répéter au cours de la résolution du problème et que seules les trois premières phases que nous venons d'énumérer sont concernées par ces épisodes. La phase 4, celle de communication, soulève des questions d'une nature toute différente.

Les épisodes en question sont :

- **Lecture.** C'est le temps consacré à la lecture de l'énoncé.
- **Planification.** On tente de structurer la résolution, de la découper en sous-problèmes, de choisir une stratégie.

  Cet épisode peut-être global (il porte alors sur l'ensemble de la résolution et vient assez tôt) ou local (plan d'attaque d'un problème secondaire, qui peut se faire à tout moment).
- **Analyse.** Ce sont des séquences de recherche des propriétés découlant directement des données.

[7] Les *épisodes* sont, pour Schoenfeld (cité par Cazzaro, p. 114), des périodes durant lesquelles celui qui résout se penche sur une tâche précise (ou un ensemble de tâches destinées à atteindre un même but), susceptible d'apparaître et de se répéter au cours de la résolution. À ces types d'épisodes viennent s'ajouter des moments de transition, des joints entre les épisodes. Les décisions de contrôle se prennent à ces moments. Elles peuvent casser ou mener à bien une résolution.

À défaut d'une analyse suffisante, des méthodes alternatives (et souvent incorrectes) peuvent apparaître. Certains élèves cherchent des structures dans ce qui leur est proposé, mais se basent plus sur l'apparence que sur le sens. L'interprétation personnelle peut ainsi se substituer à la compréhension et empêcher le véritable apprentissage.

- **Exploration.** L'élève tente de dégager des résultats en utilisant ses connaissances et les résultats des éventuels épisodes d'analyse.

  La différence entre les épisodes d'analyse et ceux d'exploration est principalement qualitative, puisque les épisodes d'analyse apportent souvent des résultats importants, qu'un peu d'exploration bien menée permet de transformer en réponses. La différence devient aussi quantitative quand on voit à quel point le temps consacré à des épisodes d'analyse peut être court par rapport aux épisodes d'exploration.

- **Prise de nouvelles informations.** Dans ce type d'épisode, généralement très bref et pouvant intervenir à tout moment, une nouvelle information apparaît. Ce peut être l'un des résultats obtenus au terme d'un épisode d'exploration ou d'analyse, ou encore en cours d'épisode. Dans ce dernier cas, l'information apparaît un peu par surprise et elle ne sera généralement utilisée que dans un épisode ultérieur.

- **Vérification.** Il s'agit d'épisodes dans lesquels, avant d'aller plus loin dans son analyse ou son exploration, l'élève tente de vérifier si une information ou une idée, est correcte (ou efficace).

2.3.3 Résolution d'un problème de démonstration

Comme nous l'avons signalé dans notre problématique, cette étude s'intéresse à un problème de démonstration, la démonstration d'une propriété métrique des coniques, et à la manière dont les élèves aboutissent à leurs solutions.

Pour mieux comprendre le contexte général ainsi que la problématique liée à la démonstration, nous clarifions dans un premier temps les concepts : expliquer, raisonner, argumenter, démontrer, prouver, conjecture et hypothèse. Deuxièmement, nous analysons les différences entre *raisonnement argumentatif* et *raisonnement démonstratif* selon plusieurs auteurs, tels que Duval (1992-93) et Balacheff (1999).

2.3.3.1 Clarification des concepts

Pour parler de raisonnement argumentatif et démonstratif, il est nécessaire de clarifier certains concepts.

Expliquer est, pour Duval :

> *... une démarche cognitive qui donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement...). Or ces raisons avancées ont en réalité une fonction quasi descriptive : elles contribuent à présenter le système de relations (mécaniques, théoriques...) au sein duquel la donnée à expliquer se produit ou trouve sa place. Et comme dans toute description, la valeur épistémique*[8] *de raisons énoncées ne joue aucun rôle.* (*Idem* p. 40)

Raisonner est, pour Duval, évoqué par Tanguay (2006) :

> *... d'une façon générale, tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur les « bienfondés » de son affirmation ou de*

---

[8] *« Duval distingue . la* ***valeur épistémique sémantique****, qui est le degré de fiabilité du contenu de la proposition au moment de son énonciation (évident, certain, vraisemblable, possible, peu probable, impossible, absurde...), bien sûr fonction du contenu mais aussi de l'état de connaissances et du milieu socioculturel de l'interlocuteur (émetteur ou récepteur); la* ***valeur épistémique théorique*** *(conventionnel, possible, impossible, nécessaire, authentique...), en principe indépendante de l'interlocuteur, et qui est celle associée au statut de la proposition dans le cadre théorique sous-jacent, quand il y en a un . définition, axiome, conjecture, théorème, hypothèse en mathématiques; principe, loi, règle, convention, article de contrat, etc. dans les autres domaines ».* (Tanguay, 2005, p. 2)

> *son rejet. Autrement dit, les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :*
> *– être orienté vers un énoncé-cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier,*
> *– être centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et non pas sur son contenu.* (Tanguay, *idem*, p. 2)

Argumenter. Tanguay (2006) prête à Duval la caractérisation suivante de l'argumentation :

> *... dans une **argumentation**, on cherche à convaincre un éventuel interlocuteur en invoquant des « arguments », qui sont des propositions qu'on combine entre elles soit pour les renforcer mutuellement, soit pour les opposer les unes aux autres, en fonction de la confrontation de deux points de vue : l'affirmation principale est vraie ou elle est fausse. L'argumentation consiste donc en un **discours**, où les propositions ne sont organisées que par simple cumul, n'obéissent qu'à des critères de pertinence et interviennent essentiellement pour leur contenu.* (p. 3)

Démontrer. Pour Duval, toujours selon Tanguay (2006), la démonstration a la structure plus stricte d'un calcul, dont l'organisation consiste en un enchaînement d'une série de « pas de déduction », ou « inférences ». Le plus souvent, la proposition inférée est « recyclée » comme proposition d'entrée de l'inférence suivante, *« C'est bien pour cela qu'on parle d'un calcul (propositionnel) : on y procède à des substitutions, de la proposition d'entrée avec les conditions d'application de la règle pour que se détache la proposition inférée; et à des enchaînements par transitivité, exactement comme dans le calcul algébrique »* (*Idem*, p. 2).

La preuve. Hitt (2005) affirme que la preuve, l'argumentation et la démonstration ne peuvent pas se distinguer facilement dans une situation de construction des concepts mathématiques et que cette impossibilité de distinguer ces trois processus par les concepteurs de la situation peut être la source d'un obstacle.

Hitt (*idem*) affirme que, dans le contexte de la théorie de la preuve, les preuves purement formelles sont considérées comme des démonstrations et celles qui ne sont pas entièrement formelles sont appelées des « preuves sociales ». Ce sont des preuves qui sont basées sur des affirmations considérées comme exactes, parce qu'elles sont admises par un ensemble de personnes. L'idée est acceptée comme exacte lorsqu'elle fait consensus.

En ce sens, pour les élèves dans cette recherche, prouver consistera donc à mettre en marche les actions effectives ou concrètes à partir des représentations des objets mathématiques, pour établir l'acceptabilité d'une proposition. Dans notre étude, les actions effectives découlent des données contextualisées dans les figures géométriques, ou des propriétés qui se dégagent de celles-ci dans l'environnement papier-crayon ou dans celui qu'offre Cabri-Géomètre, par exemple. Ces constatations peuvent amener à affirmer que l'énoncé fonctionne mais que, au-delà, vers la démonstration proprement dite par exemple, il faut utiliser d'autres outils comme l'heuristique, la formulation et l'organisation des énoncés décontextualisés de la figure pour établir le caractère nécessaire de validité.

Une conjecture est un énoncé que l'on suppose vrai, mais qui n'est pas démontré. Celle-ci peut être vue également comme une hypothèse expérimentale. Si nous vérifions avec Cabri-Géomètre une propriété et nous affirmons par la suite que celle-ci est vraie, cela veut dire que, du point de vue de la pratique, l'énoncé est correct, mais qu'il s'agit d'une conjecture du point de vue de la démonstration, excepté dans le cas où l'énoncé est déclaré comme hypothèse donnée au départ du problème.

Une hypothèse. En termes mathématiques, c'est un énoncé qui est considéré soit comme un point de départ de la démonstration d'un théorème, soit comme une donnée dans un problème.

2.3.3.2 Différences entre raisonnements déductif et argumentatif

Duval (1991) soutient que le fonctionnement discursif du raisonnement ne dépend pas tant du contenu sémantique des propositions en cause que de leurs interactions avec les valeurs logique et épistémique, la fonction première du raisonnement étant de changer la valeur épistémique de l'énoncé-cible. Selon Duval (*idem*, p. 256), c'est cette restriction de la liaison entre valeur logique et valeur épistémique qui est en fait difficilement comprise par les élèves dans un processus de démonstration en mathématiques. Mais il convient selon lui à ce stade de distinguer deux types de raisonnements différents : la démonstration et l'argumentation.

Le raisonnement démonstratif fait référence à un discours s'appuyant sur des définitions et des théorèmes. Comme chez Balacheff (1997), Duval désigne par démonstration les preuves formelles, à savoir ces preuves qui établissent qu'un résultat est vrai en combinant déductivement, selon les règles de la logique propositionnelle, d'autres résultats déjà démontrés ou admis axiomatiquement. « *Une démonstration consiste donc en un enchaînement de pas de déduction ou inférences, chacune de structure ternaire, et où les propositions combinées prennent l'un parmi trois statuts opératoires possibles : propositions d'entrée ou prémisses, règle d'inférence ou énoncé-tiers et proposition inférée ou conclusion* » (Tanguay, 2004, p. 3).

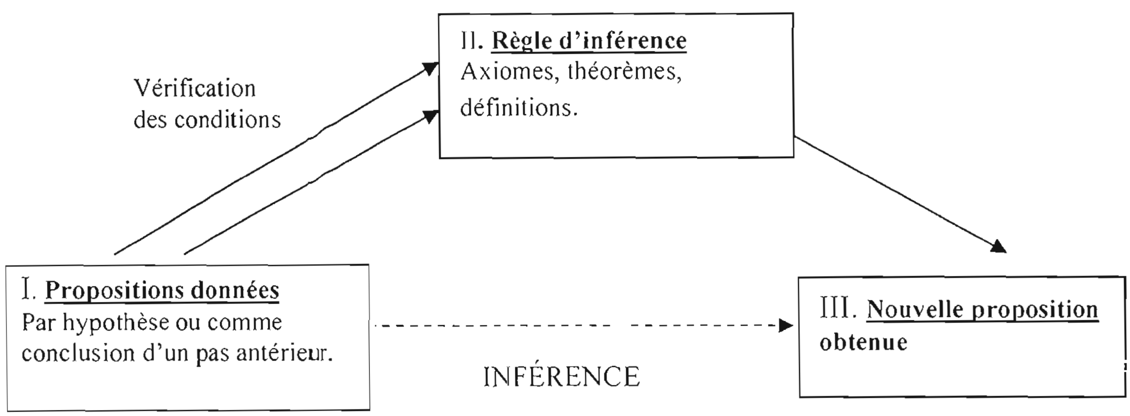


Figure 2 – Diagramme représentant le fonctionnement ternaire d'un Pas de déduction proposé par Duval. (1991, p. 235)

> *Toute démonstration doit fonctionner dans le contexte global d'un cadre théorique. En mathématiques, celui-ci détermine les statuts théoriques d'axiome, de théorème, de définition, d'hypothèse, qui discriminent localement à leur tour les statuts opératoires*

> *des propositions quand elles apparaissent pour la première fois dans la démonstration : axiome, définition ou théorème pour les règles d'inférence, hypothèse pour les prémisses. Les propositions alors inférées acquièrent la valeur épistémique théorique de nécessité et peuvent ensuite être « recyclées », soit comme nouvelle règle d'inférence mais le plus souvent, comme proposition d'entrée d'une inférence ainsi enchaînée à la précédente... La démonstration s'apparente plus à un calcul qu'à un discours. Il en résulte entre autres qu'une proposition prend généralement plus d'un statut opératoire à l'intérieur d'une même démonstration. Celle-ci est complétée quand la dernière proposition inférée coïncide avec l'énoncé-cible, qui acquiert alors la valeur épistémique du nécessaire et la valeur logique vraie.* (Tanguay, 2004, p. 3)

Le second, c'est-à-dire le raisonnement argumentatif, *« a recours à des règles implicites qui relèvent en partie de la structure de la langue, et en partie des représentations des interlocuteurs : le contenu sémantique des propositions y est donc primordial »* (Duval, 1991, p. 235).

Tanguay (*idem*) affirme qu'en argumentation, on ne cherche pas à prouver mais plutôt à convaincre :

> *L'argumentation fonctionne hors contexte théorique et* [...] *les propositions n'ont ni statut théorique, ni statut opératoire préalablement fixé, si bien que le raisonnement s'organisera autour des interactions entre contenus et valeurs épistémiques sémantiques, elles-mêmes fonctions des contenus.* [L'argumentation] *a pour but de modifier la valeur épistémique sémantique qu'attache à l'énoncé-cible celui à qui l'on s'adresse : faire accepter comme plausible ce qu'il estime impossible, faire reconnaître comme peu plausible ce qu'il croit évident, ou comme absurde ce qu'il considère comme vraisemblable ou même comme certain* [...] (p. 3)

Pour mieux comprendre ce qui distingue l'argumentation de la démonstration, nous avons repris de Tanguay (2004) le tableau suivant, qui résume bien cette discussion. Pour plus de détails, nous suggérons de consulter Duval (1995).

Raisonnement argumentatif	Raisonnement déductif
De nature dialogique.	De nature logique.
Aucune autre contrainte d'organisation que celles propres à un discours.	Organisation stricte autour de l'unité structurale qu'est l'inférence, cela apparentant la démonstration à un calcul.
Se développe à partir des relations de contenu entre les propositions, en interaction avec les valeurs épistémiques sémantiques que leur donne l'interlocuteur émetteur. Celles-ci, elles-mêmes fonctions des contenus et de leur appréhension (variable selon l'état des connaissances et le milieu socioculturel de l'émetteur), sont généralement en opposition avec les valeurs que leur donne l'interlocuteur récepteur, cette opposition agissant comme moteur de l'argumentation.	Chaque proposition a l'un des trois statuts opératoires : prémisse, règle d'inférence, proposition inférée. Ce statut est déterminé par l'organisation déductive et non par le contenu, et est en outre discriminé par la valeur épistémique théorique de la proposition, qui doit pour cela « refouler » la valeur épistémique sémantique adjugée par un éventuel interlocuteur.
Structure non hiérarchisée, qui repose sur le cumul d'arguments, dans le respect obligé de la continuité thématique.	Structure en arbre (ou encore modulaire, à plusieurs arbres[9]), où les inférences s'enchaînent par recyclage de la proposition inférée, sans nécessaire continuité thématique.
Cherche à modifier la valeur épistémique sémantique qu'a l'énoncé-cible pour l'un des deux interlocuteurs.	Cherche à modifier la valeur épistémique théorique de l'énoncé-cible.
La conclusion et sa valeur de vérité n'en découlent ni nécessairement, ni uniquement, puisqu'elles y sont défendues par la pertinence du contenu des propositions avancées, et non par la validité des opérations discursives mobilisées; l'argumentation convainc, mais ne prouve pas.	Chaque proposition inférée est uniquement et nécessairement déterminée par l'inférence, dont la validité peut être théoriquement contrôlée. C'est le cas en particulier de l'énoncé-cible, dernière proposition inférée, dont la nécessité prouve alors sa valeur logique de vérité.

[9] Par exemple, une preuve qui fait appel à un ou plusieurs lemmes, dont le ou les résultats sont recyclés non pas comme prémisses, mais comme (nouvelles) règles d'inférence.

Nous pouvons conclure qu'il y a une diversité de marques discursives dans ces deux types de raisonnement et que ces marques discursives ont des fonctionnements cognitifs tout à fait différents et complexes, dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage de la démonstration en mathématiques.

Lorsque s'ouvre la discussion sur le thème de la démonstration en didactique des mathématiques, on se retrouve généralement facc à deux comportements possibles, en opposition, et qui parfois semblent, selon Mariotti (2001), procéder en parallèle sans parvenir à communiquer. Comme exemples classiques de ce type de discussion, on a les travaux de Duval (1991, 1992-93) et ceux de Balacheff (1987).

2.3.3.3 Confrontation de deux points de vue : Duval et Balacheff

Duval (1991), par exemple, tient une position « radicale ». Il focalise l'attention sur un point crucial : la différence entre le plan sémantique, où la valeur épistémique de l'énoncé est fondamentale, et le plan théorique où seulement la validité est en jeu, c'est-à-dire seulement la dépendance logique d'un énoncé par rapport aux axiomes de la théorie, indépendamment des valeurs de vérité que l'on attribue aux propositions en jeu. Duval (*idem*) montre les différences entre une démarche de *raisonnement déductif* et une démarche discursive de *raisonnement argumentatif.*

Cette démarche de « démonstration en mathématiques » est vue par beaucoup d'élèves, selon Duval, comme une démarche inutile, voire dénuée de sens, parce que ceux-ci ne comprennent pas pourquoi il faut démontrer ce qui se voit ou ce qui peut se vérifier sur une figure. La thèse centrale de Duval, évoquée par Tanguay (2004, p. 5), est celle-ci : « ... les *difficultés qu'éprouvent les élèves avec la démonstration mathématique* [sont] *à l'effet que ceux-ci n'en comprennent ni spontanément, ni aisément les exigences propres, parce qu'ils appréhendent et traitent les démonstrations comme des argumentations* ».

Ces élèves, selon Tanguay (*idem*), ont de la difficulté à dissocier et à refouler les deux valeurs des propositions — valeur épistémique sémantique et valeur de vérité — pour donner son plein rôle à la valeur épistémique théorique, celle qui est associée aux statuts d'axiome, de définition, de conjecture, de théorème, d'hypothèse; ce rôle étant de discriminer celles parmi les propositions qui peuvent être utilisées comme prémisses de celles qui peuvent l'être comme règles d'inférences ou comme propositions inférées.

De son côté, Balacheff (1999) considère qu'il y a dans l'argumentation un double mouvement de persuasion et de validation. Il soutient que l'argumentation cherche à emporter l'adhésion d'un interlocuteur et met en scène un objet, la validité d'un énoncé. Mais les sources de la compétence argumentative sont dans la langue naturelle et dans des pratiques dont les règles sont le plus souvent d'une nature profondément différente de celles que requièrent les mathématiques, et qui portent en outre la marque profonde des interlocuteurs et des circonstances.

Pour Duval (1992-93; 1995, p. 305), la distance discursive entre démontrer et argumenter dans une perspective de l'apprentissage des mathématiques n'est pas perçue par les élèves, à cause de la similitude linguistique des deux formes de raisonnement, notamment par le fait qu'elles emploient les mêmes connecteurs, bien qu'ils y aient des fonctions différentes. Cette « similitude », selon Balacheff (1999), ne permettrait pas chez les élèves ni l'identification de la modification du statut et du fonctionnement de la connaissance que requiert le travail mathématique, ni la modification de fonctionnement du discours lui-même.

Duval (1992-93, p. 60) conclut que « *le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas la voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif* » (utilisant ici, à tort selon Balacheff, le raisonnement déductif comme synonyme de démonstration). Duval en conclut que la démonstration requiert un apprentissage « spécifique et indépendant ».

Balacheff (*idem*), par contre, insiste sur l'importance d'une prise en compte de la diversité qu'on peut percevoir des problématiques de l'argumentation et de ses rapports aux mathématiques, notamment à la démonstration. Dans cette approche, la construction d'une rationalité mathématique et l'argumentation sont étroitement liées. Balacheff (*idem*) suggère la possibilité d'une argumentation mathématique à laquelle les élèves accèderaient par la pratique de discussions réglées par des normes socio-mathématiques qui émergeraient des interactions entre l'enseignant et les élèves, le rôle de l'enseignant étant alors celui de représentant de la communauté mathématique.

Balacheff soutient qu'il n'y a pas d'argumentation mathématique, au sens souvent suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques, qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait à certaines des contraintes qui pèsent sur la démonstration (les exigences de forme par exemple). Ceci ne signifie pas que tout discours en mathématique qui vise à établir la validité d'un énoncé ait toujours eu et puisse toujours avoir les caractéristiques d'une démonstration. Ce didacticien affirme que s'il n'y a pas d'argumentation mathématique, il existe pourtant une argumentation *en* mathématiques. Il affirme que la résolution de problèmes est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction d'un discours plus formel et propre aux règles mathématiques. Balacheff (*idem*) attire aussi l'attention sur le fait qu'il ne faut pas confondre ici apprentissage de l'argumentation et apprentissage de la rhétorique. En effet, une des difficultés liées à la reconnaissance qu'il existe une telle chose qu'une « argumentation mathématique » est que celle-ci soit en retour rebelle à toute tentative d'enseignement direct comme dans la résolution de problèmes.

Balacheff (1999) affirme que du point de vue de l'apprentissage, il ne faut être ni en faveur de la continuité, ni en faveur de la rupture cognitive entre argumentation et démonstration, mais que dans une perspective d'apprentissage, l'argumentation peut devenir un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration en mathématiques :

> *Il y aura une erreur de caractère épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet Jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuve mathématique quant ils n'auraient qu'argumenté. C'est-à-dire, le passage d'une rationalité quotidienne à une rationalité mathématique doit être traité comme un obstacle épistémologique.* (op. cit., p. 8)

2.3.3.4 Notre point de vue

Dans ce contexte, où l'on compare ces deux points de vue, soit la continuité ou la rupture de l'argumentation vers la démonstration, nous pensons, tout comme Mariotti (2001, p. 440), que les deux sont plutôt complémentaires et qu'il n'est pas possible d'avoir une vision purement formelle au moment d'une démonstration en mathématiques. La fonction d'explication (interprétation et valeur de vérité des énoncés) reste fondamentale dans ce processus parce qu'elle garantit justement le support nécessaire à la compréhension.

> *Même si du point de vue théorique, une démonstration peut être considérée comme tout à fait indépendante de l'interprétation et donc de la valeur épistémique des propositions en cause, du point de vue cognitif, il est impossible de faire abstraction de cet aspect.* (op. cit., p. 440)

Comme le soutient Mariotti (2001), le problème à résoudre dans le contexte de l'argumentation et de la démonstration en mathématiques est celui de la fonction d'expliquer et de valider, de passer d'un stade flexible en termes de significations des énoncés et de parvenir à un niveau formel de démonstration proprement dite, où il existe une relation de dépendance logique entre les propositions. Dans le même temps, les aspects de **continuité** entre les arguments qui conduisent à l'explication d'une conjecture, et sa démonstration, non seulement ne peuvent être ignorés, mais ils peuvent donner des indications intéressantes du point de vue didactique, concernant certaines difficultés que les élèves rencontreraient lorsqu'ils sont confrontés à la construction d'une démonstration en mathématiques. Donc, nous pensons qu'au lieu de parler d'une distance cognitive entre l'argumentation et la démonstration, on pourrait parler de continuité entre ces deux processus. La continuité entre les processus argumentatif et démonstratif, toujours selon Mariotti, permet de décrire le maintien entre connaissances mobilisées dans les processus argumentatifs d'élaboration de la conjecture et de les comparer avec les théorèmes utilisés dans la démonstration de celle-ci. En effet, si la construction de la conjecture et la démonstration sont construites dans le même cadre théorique, on peut retrouver pendant la construction de la démonstration des mots, des expressions, des phrases utilisées pendant l'argumentation.

Même si l'identification de ces deux phases, production de la conjecture et construction de la démonstration, n'est pas si évidente, nous proposons d'utiliser des activités suffisamment riches, notamment en les plongeant dans des environnements dynamiques, comme pour celles que suggèrent Arcavi et Hadas (2000) ou Mariotti (2001). Nous les détaillerons plus loin. Ceux-ci visent la mise en œuvre, par les élèves, d'un discours plus élaboré les menant plus loin que la simple construction d'une conjecture, vers la nécessité d'une démonstration. Dans le cadre de cette activité, on retrouve la visualisation, l'expérimentation, la surprise, la rétroaction et la nécessité d'argumenter et de démontrer, lesquelles sont travaillées par les élèves dans la démarche analytique du développement de la solution demandée.

2.4 La résolution de problèmes à l'aide de logiciels éducatifs

Du côté du Ministère d'Éducation du Québec, selon le programme d'étude de mathématique 536 en enseignement secondaire (MEQ, 1998), la technologie influe sur la mathématique et son utilisation, et il est nécessaire que l'élève maîtrise les outils électroniques modernes, tels que la calculatrice à affichage graphique, les logiciels de dessin ainsi que les logiciels utilitaires comme le tableur, le traitement de texte, etc. La technologie, elle-même ne garantit pas la réussite en mathématiques, mais son intégration dans l'enseignement des mathématiques constitue une aide et un support pour la connaissance.

Du côté des chercheurs en didactique des mathématiques, Mariotti (2001, p. 447) affirme que la fonction didactique jouée par ces artefacts lorsqu'ils sont introduits dans la pratique scolaire est bien connue : il s'agit de la *médiation sémiotique* ou médiatrice des significations. La chercheuse souligne que les éléments qui font d'un micromonde un instrument de médiation concernent sa nature d'artefact culturel tout autant que son utilisation spécifique dans les activités scolaires.

Dans Trouche (2005), cette pratique ou approche « *instrumentale* » s'est révélée fructueuse pour les études des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans des environnements informatisés. Nous avons aussi constaté, à partir de nos lectures sur ce sujet et notre expérience d'enseignant, que les possibilités de *visualisation* qu'offrent les outils technologiques conduisent souvent à une meilleure compréhension des concepts et constructions telles que ceux des coniques par exemple.

Il est certain qu'il reste beaucoup de chemin à parcourir dans cette théorie instrumentale comme le reconnaît Trouche (*idem*, p. 97-98), lorsque : a) les élèves par exemple, considèrent cette technologie comme un élément extérieur à l'enseignement; b) l'utilisation non contrôlée (dans le cas des calculatrices) peut induire chez les élèves, la construction de connaissances mathématiques très différentes de celles qui sont attendues par le professeur; c) les élèves ont de la difficulté à établir des connexions entre les connaissances construites dans un micromonde et les mathématiques institutionnelles.

Malgré ces questionnements tout à fait pertinents, nous croyons qu'il faut chercher l'équilibre entre les activités papier-crayon et les activités qui utilisent la technologie comme celle apportée par les logiciels à fins éducatives. Le rôle de l'enseignant doit être, entre autres, de trouver des situations et des problèmes qui peuvent promouvoir la construction des concepts, et mettent l'accent sur l'argumentation, la construction de démonstrations et des stratégies en résolution de problèmes.

2.4.1 Pourquoi le logiciel de géométrie dynamique Cabri-Géomètre

Le micromonde Cabri-Géomètre, selon Mariotti (2001, p. 448), intègre une théorie dans sa conception, son fonctionnement et son utilisation, soit la géométrie euclidienne. Les objets informatiques à travers lesquels l'élève interagit avec le micromonde peuvent être conçus comme des signes extérieurs se référant à la théorie en question et à ses éléments (axiomes, définitions, théorèmes); ils peuvent alors devenir des « instruments de médiation sémiotique » utilisés par les enseignants pour réaliser une activité de classe, dans le but d'initier les élèves à une perspective théorique, et les orienter vers un apprentissage de la démonstration. D'un point de vue didactique, toujours selon Mariotti, il est nécessaire d'élaborer le sens de la démonstration comme étant strictement lié à celui de la théorie.

Le logiciel Cabri-Géomètre, qui est utilisé dans cette recherche, a l'avantage selon nous de permettre une multiplicité de représentations; dans une même fenêtre, nous avons par exemple, simultanément *distance et longueur*, *coordonnées, équation* et *calculatrice*. Le problème d'apprentissage est de promouvoir à l'aide de ce micromonde l'articulation entre les représentations. Cabri fait partie des micromondes qui offrent des outils permettant la construction aisée de figures parfois complexes. La construction de ce type de figure peut être difficile, voire impossible dans un environnement habituel papier-crayon :

> *Le fait de pouvoir construire de façon assez précise et, en un temps raisonnable, des figures de qualité est de nature à aider puissamment à la formation de concepts.*

> *notamment en dégageant les propriétés qui justifient les constructions. L'apprentissage de la démonstration ne peut qu'en bénéficier.* (Cazzaro et al., 2001, p. 103)

En ce qui a trait aux coniques, le micromonde Cabri-Géomètre permet de voir plusieurs aspects de leur construction. Premièrement, nous retrouvons l'outil *Conique,* qui permet de créer l'unique conique qui passe par cinq points donnés. Deuxièmement, nous retrouvons l'outil *Lieu*, qui permet de générer des coniques comme lieu de points à partir de différentes caractérisations, de même que de trouver leur équation et d'être aiguillé, avec la commande *Distance ou Longueur,* vers leurs propriétés métriques. De plus, ce logiciel permet une manipulation par l'élève de la conique, une fois construite, à partir de laquelle il peut élaborer un raisonnement.

2.4.2 Notre approche expérimentale avec Cabri-Géomètre[10]

Une des idées fondamentales des chercheurs en didactique des mathématiques, et plus particulièrement de ceux qui étudient les phénomènes liés à la résolution de problème, est de proposer une situation qui amènera les étudiants à discuter de la problématique qui émerge de la situation proposée. Des recherches récentes sur l'utilisation de la technologie dans le cours de mathématiques montrent de nouvelles approches à cet égard. Par exemple, Arcavi et Hadas (2000) proposent un problème ouvert à discuter et à résoudre dans un environnement technologique et dans lequel la visualisation, l'expérimentation et la surprise, entre autres, peuvent amener à des généralisations, avant de se plonger dans un environnement algébrique. Ce problème a été proposé dans un environnement géométrique utilisant le logiciel 'Geometry

---

[10] Notes du cours *Initiation à la recherche en Didactiques de mathématiques*, session automne 2007-hiver 2008. Arcavi Abraham et Hadas Nuri (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. In Fernando Hitt (Editor). Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico. p. 175-197.

inventor'. Dans notre cas, nous proposons deux « activités », l'une avec Cabri-Géomètre[11] et une autre dans un environnement papier-crayon.

Arcavi et Hadas (*idem*, p. 26-28) proposent une réflexion sur les caractéristiques qu'on doit prendre en compte pour choisir un problème et le considérer comme un « *problème ouvert* ». Ils émettent en effet l'hypothèse qu'un problème ouvert doit être suffisamment riche pour promouvoir les activités cognitives suivantes.

Visualisation. Selon ces deux didacticiens, « *la visualisation en général, est en rapport avec l'habileté de représenter, de transformer, de générer, de communiquer, de documenter, et de réfléchir sur l'information visuelle* ». Ils affirment qu'une image visuelle, en vertu de son caractère concret, « *est un facteur qui crée la sensation d'auto-évidence et d'immédiateté.* » Donc, la visualisation « *non seulement organise les données en une structure significative, mais* [...] *est aussi un facteur important qui guide le développement analytique d'une solution* » (*idem*).

Expérimentation. À part la visualisation, le travail dans des environnements informatiques dynamiques permet aux élèves d'apprendre et d'expérimenter, ainsi que « *d'apprécier la facilité de générer beaucoup d'exemples* [...] *pour rechercher les cas extrêmes, des contre-exemples et des cas atypiques* » (*idem*).

Surprise. Le défi, c'est de trouver des situations dans lesquelles ce qui advient est inattendu ou contre-intuitif, de façon à ce que la surprise (ou le mystère) ainsi générée crée une claire disparité avec les prédictions, explicitement avancées ou non.

Rétroaction. Les surprises, comme celles que nous venons de décrire, surgissent de la disparité entre ce qui est attendu après une action et le résultat de cette action. La rétroaction est fournie par l'environnement lui-même.

[11] Nous avons choisi Cabri-Géomètre car c'est un micromonde qui permet de travailler la géométrie et que nous connaissions bien.

Nécessité de démontrer et d'argumenter. À partir de la surprise, beaucoup d'étudiants peuvent ressentir la nécessité d'une démonstration. Peut-être non explicitement, mais ils demandent à leurs collègues ou à eux-mêmes une réponse liée aux « pourquoi » ou « pourquoi pas ».

Nous suggérons donc, dans cette recherche, des activités mathématiques intéressantes (selon notre point de vue) et qui demandent aux élèves la nécessité de justifier avec l'intention de donner une validation à l'intérieur d'un système théorique. Ces deux aspects sont cruciaux, selon Mariotti (2001), pour comprendre ce que signifie « démontrer ».

CHAPITRE III

MÉTHODE

Pour les caractéristiques de la recherche, nous avons retenu la méthodologie de recherche dite de « l'ingénierie didactique », proposée par Artigue (1990) : « ... *l'ingénierie didactique qui se situe* [...] *dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori* » (Artigue, 1996, p. 248).

Cette méthodologie se caractérise par un découpage du processus expérimental en quatre phases : la phase I des analyses préalables, la phase II de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie, la phase III de l'expérimentation en classe et la phase IV, constituée de l'analyse a posteriori et de l'évaluation du processus. Notre recherche suit ce découpage.

3.1 Phase I : Analyses préalables

Dans cette phase, nous avons jugé important d'étudier les principaux contenus mathématiques qui font partie de la construction géométrique des coniques en général dans un environnement papier-crayon. Pour ce faire, nous avons cru pertinent de nous attarder sur trois aspects. Le **premier aspect :** étudier (hors contexte de la classe) la construction de l'ellipse par le cercle directeur, les contenus mathématiques qui y interviennent et la construction de l'ellipse en contextes papier-crayon et technologique. Le **deuxième aspect** : le traitement en classe de la définition de médiatrice, des exercices qui demandent l'utilisation des propriétés de la médiatrice, la présence de la médiatrice dans le cercle et la médiatrice d'une corde. Aussi, nous avons cru important de travailler en classe la définition de la tangente à un cercle, la définition des lieux de points et des exercices où l'on demande la figure correspondant à un lieu géométrique.

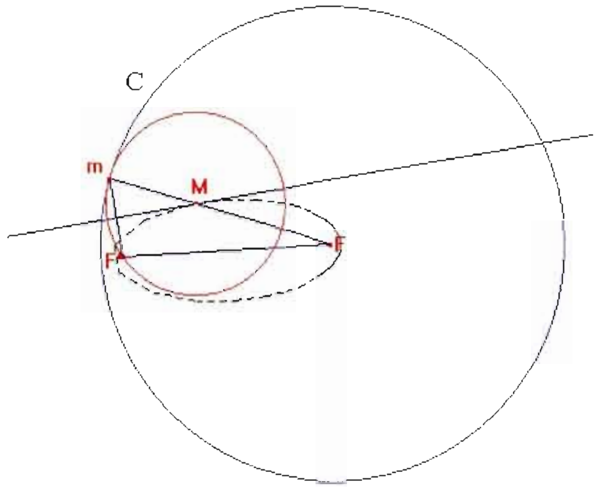
Finalement, **le troisième aspect** traité dans cette phase fait référence à d'autres sujets enseignés en classe par l'enseignant titulaire du cours de mathématiques avant la recherche, tels la démonstration (le raisonnement déductif, la démonstration directe, la démonstration indirecte ou par l'absurde), les « étapes » de la démonstration (quelques démonstrations à faire en classe sur des triangles isocèles, les relations métriques dans des triangles rectangles, l'étude de la démonstration du théorème de Pythagore, etc.) et le traitement du sujet des coniques en général.

3.1.1 Construction de l'ellipse par le cercle directeur

Cette manière de traiter et d'enseigner les coniques comme « lieux géométriques » favorise l'étude des problèmes de construction des coniques à partir des foyers; par exemple, la caractérisation « lieux des centres » permet de construire d'une manière très efficace une conique à partir de ses foyers. Les problèmes liés à l'étude des propriétés métriques des coniques, comme celles des tangentes à la courbe ou comme celles de notre étude, concernant les propriétés métriques de l'ellipse, peuvent être mieux développés à partir de cette définition.

Construction : soient F et F' deux points distincts, (C) un cercle de centre F et de rayon $2a$, avec $2a > m\overline{FF'}$. On appelle ellipse de cercle directeur (C) et de foyer F' l'ensemble des centres des cercles tangents à (C) et passant par F.

Pour construire le point M, centre du cercle tangent à (C) en m, on trace la médiatrice du segment $\overline{F'm}$. Elle rencontre le rayon Fm en M.



3.2 Phase II : La conception et l'analyse a priori

3.2.1 Introduction

Les activités d'expérimentation ont été conçues en prenant en considération trois aspects qui nous semblent importants. Le premier aspect concerne le volet 'résolution de problèmes', où nous voulons observer les stratégies utilisées par les élèves dans la résolution du problème proposé. Le deuxième aspect fait référence à la géométrie de l'observation, dans un environnement papier-crayon ou technologique. Selon cet aspect, nous proposons la construction des coniques en général et nous nous concentrons sur celle de l'ellipse par le cercle directeur dans les deux environnements. Ce problème permettra probablement une interaction forte entre les élèves de chaque équipe au moment de la construction géométrique et entre les élèves et l'environnement qu'offre la géométrie dynamique. Finalement, le troisième aspect fait référence à la **démonstration mathématique**. Nous considérons que le problème en question est ouvert et convenablement choisi. Le problème proposé devra être résolu avec les connaissances dont les élèves disposent. Ce problème demandera probablement aux élèves la construction d'une conjecture, l'utilisation de l'argumentation et la construction d'une démonstration.

3.2.2 Activité 0 (Appendices 1 et 2) : Formation sur le logiciel Cabri

Objectif de l'activité : montrer aux élèves des aspects généraux sur l'utilisation et l'application du logiciel de géométrie dynamique Cabri-Géomètre.

Maîtriser les outils de base pour les intérêts de notre recherche.

Activité 01 : déplacement.
Activité 02 : médiatrice et circonférence.
Activité 03 : médiatrice d'un segment.
Activité 04 : des médiatrices et des cordes.
Activité 05 : triangles semblables.
Activité 06 : trace.
Activité 07 : le plan cartésien, la circonférence et son équation.
Activité 08 : les lieux de points.

3.2.3 Activité 1 (Appendice 3) : l'ellipse avec papier-crayon[12]

Objectifs de l'activité : Démontrer mathématiquement (de façon formelle) que la construction faite dans le contexte papier-crayon est une ellipse en trouvant et en appliquant la propriété métrique de l'ellipse.

– Utiliser des constructions géométriques auxiliaires.

Pour la démonstration sollicitée dans cette activité avec papier-crayon, nous avons voulu présenter cette situation en utilisant les résultats trouvés lors de nos recherches sur les coniques : la définition bifocale de l'ellipse et les différentes constructions dont la *construction par le cercle directeur*. Pour cette recherche, nous n'utilisons pas les constructions *« des cercles tangents »,* car cela n'est pas nécessaire, sans dire que ce n'est pas important. Ce n'est qu'un surplus d'informations pour cette activité qui pourrait distraire l'attention des élèves (voir figures 3 et 4).

---

[12] Activité prise de Wikipédia (2011), mais que nous avons adaptée selon nos besoins.

Dans le cas de l'ellipse dans l'environnement papier-crayon, combien de points sont nécessaires pour obtenir le lieu appelé ellipse ? Mathématiquement, on sait qu'une conique est uniquement déterminée quand on connaît cinq de ses points. Mais compte tenu du niveau des élèves avec lesquels nous travaillions (5[e] secondaire), nous avons jugé que cinq points seraient probablement insuffisants d'une part, pour que les élèves reconnaissent l'ellipse à partir du profil de la courbe suggéré par ces points, d'autre part pour que la courbe complétée à partir des points soit suffisamment précise. Nous avons évalué qu'au moins sept points équidistants, joints aux deux foyers *F* et *F'* donnés, seraient suffisants pour répondre aux deux critères (reconnaissance et précision) de construction dans nos activités. Un troisième critère a été pris en considération : tout en laissant la possibilité aux élèves de placer plus de points, nous ne l'avons pas suggéré parce que pour la majorité des équipes, il en aurait résulté une figure trop chargée et embrouillée.

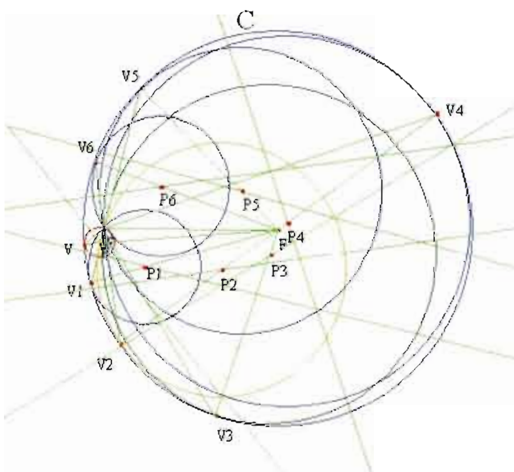


Figure 3

Si nous relions tous les points, nous obtenons comme solution que le lieu des points est une ellipse :

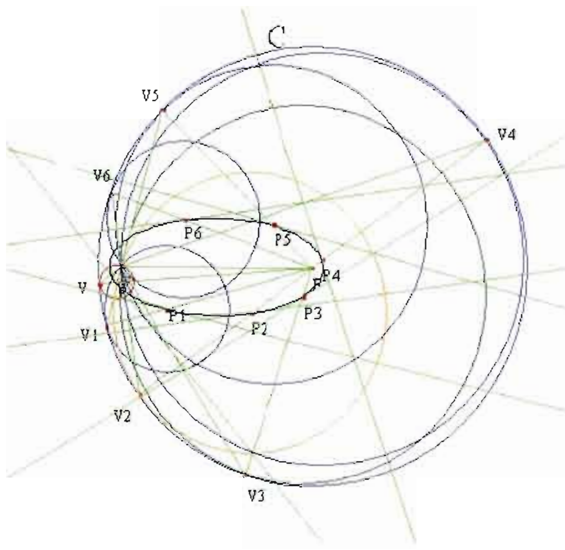


Figure 4

À partir de cette construction, nous avons rédigé l'énoncé mathématique théorique à démontrer en espérant, entre autres, chez les élèves, une appropriation de la démonstration comme résultat d'une multiplicité d'appropriations différentes : comprendre la construction de l'ellipse en contexte papier-crayon (registre figural), produire des conjectures et les prouver à partir des visualisations, des mesures, de constructions successives de traces, de l'application de la propriété métrique, etc.

Finalement, nous nous attendons à ce que les élèves produisent une rédaction consciente et judicieuse de la démonstration demandée (hypothèses, déductions, conclusions…) à partir de l'imitation de raisonnements - modèles appris dans le cours de mathématiques présent ou dans des cours précédents. Nous nous attendons aussi à d'autres types de raisonnements pas nécessairement « formels ».

L'énoncé adopté à été le suivant :

Soient F et F' deux points distincts, (C) un cercle de centre F et de rayon r, avec $r > m\overline{FF'}$.

Soit V un point lié au cercle et variable sur le cercle. On trace le segment $F'V$ et on construit sa médiatrice d. Elle rencontre le rayon $\overline{FV}$ en P.

Construire sur papier au moins sept points P avec l'aide du crayon, du compas, de la règle à mesurer, etc.

Quel est le lieu géométrique de P lorsque vous reliez tous les points P trouvés ?

3.2.3.1 Analyse de l'activité : L'ellipse avec papier-crayon[13]

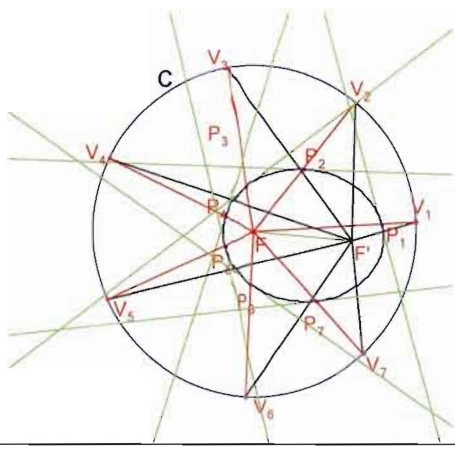
Soient F et F' deux points distincts, (C) un cercle de centre F et de rayon r, avec $r > m\overline{FF'}$.

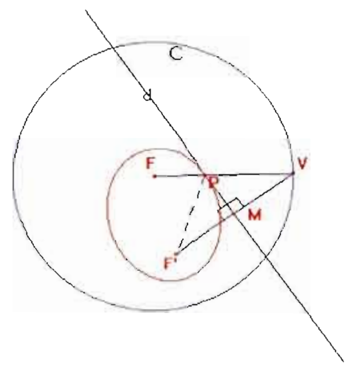
Soit V un point lié au cercle et variable sur le cercle. On trace le segment $F'V$ et on construit sa médiatrice d. Elle rencontre le rayon $\overline{FV}$ en P.

Construire sur papier au moins sept points P avec l'aide du crayon, du compas, de la règle à mesurer, etc.

Quel est le lieu géométrique de P lorsque vous reliez tous les points P trouvés ?

[13] Activité prise et adaptée de Wikipédia (2011).

CONSTRUCTION	**SAVOIR-FAIRE**
1. On trace un segment d'extrémités *F* et *F'*.	1. Construction d'un segment d'extrémités *F* et *F'* à l'aide d'une règle.
2. On construit un cercle de centre *F* et de rayon arbitraire, plus grand que d(*F*, *F'*).	2. Construction d'un cercle de centre *F* et de rayon plus grand que d(*F*, *F'*) à l'aide du compas.
3. On construit un point V_1 sur le cercle.	3. Construction d'un point sur un objet.
4. On trace $\overline{V_1 F'}$.	4. Construction d'un segment, ses extrémités étant données.
5. On construit la médiatrice *d* de $\overline{V_1 F'}$.	5. Construction, à la règle et au compas, de la médiatrice d'un segment donné.
6. On trace le rayon $\overline{VF}$.	6. Construction d'un segment, ses extrémités étant données.
7. On appelle P_1 l'intersection de la médiatrice *d* et du rayon $\overline{VF}$.	7. Repérer une intersection. Nommer un point.
8. On répète les étapes 3 à 7 pour les autres points V_i demandés.	8. Répéter les étapes 3 à 7. Identifier les points ainsi créés par des indices.
	

QUESTION	SAVOIR-FAIRE
1. Montrez le lieu géométrique des différents points *P* lorsque *V* varie en prenant différentes positions sur le cercle.	• Utilisation d'un curvigraphe[14] (ou tracé à la main) pour la courbe générée par les points *P*.
2. Une fois le lieu géométrique de *P* trouvé, que faut-il faire pour s'assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est bien celle d'une ellipse ?	• Reconnaitre que *F* et *F'* représentent les foyers d'une ellipse. • Mesurer les segments $\overline{FP}$ et $\overline{F'P}$ à l'aide de la règle, et vérifier que la somme d(*P*, *F*) + d(*P*, *F'*) est constante (rayon du cercle (C)).
3. Démontrez que cette figure correspond bien à une ellipse.	Construire deux triangles rectangles Δ*PF'M* et Δ*PMV*, comme dans la figure ci-dessous, et déduire que la somme d(*P*, *F*) + d(*P*, *F'*) est constante (rayon du cercle) : voir les détails ci-dessous. 

[14] **Curvigraphe**. Instrument mathématique qui facilite le tracé de toute espèce de lignes courbes, inventé par M. Hannapier (1811). Le curvigraphe est non seulement utile aux géographes pour suivre et évaluer les divers degrés de longitude et de latitude qui se voient sur les cartes, mais il peut aussi servir aux architectes, aux graveurs, aux menuisiers, aux serruriers, aux charpentiers et aux tailleurs de pierre.

Le processus de démonstration
Conjecture. La somme des distances d'un point P variable aux deux points fixes F et F' est constante, c'est-à-dire que P décrit une ellipse.

Hypothèse. (C) est un cercle de centre F, F' est un point quelconque à l'intérieur du cercle, V est un point sur le cercle, d est la médiatrice de $\overline{VF'}$ (la droite perpendiculaire à $\overline{VF'}$, et qui coupe $\overline{VF'}$ en son milieu). P désigne l'intersection de d et du rayon $\overline{VF}$.

Conclusion : d(P, F) + d(P, F') = constante.

Démonstration
Nous envisageons essentiellement deux démonstrations possibles, une directe, qui s'appuie sur le résultat que *la médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistants de ses extrémités*. L'autre consiste en quelque sorte à redémontrer une des implications de ce résultat (si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant de ses extrémités), en considérant deux triangles rectangles isométriques.

Démonstration 1
a) d(F, P) + d(P, V) = $m\overline{FV}$ = rayon du cercle, car les points sont alignés.
b) d(P, V) = d(P, F') car P est sur la médiatrice de $\overline{VF'}$, et est donc équidistant des extrémités V et F'.
c) Remplaçant le membre de droite de b) dans a), on obtient d(F, P) + d(P, F') = $m\overline{FV}$. On a alors d(F, P) + d(P, F') = rayon du cercle, une constante, comme il fallait le démontrer.

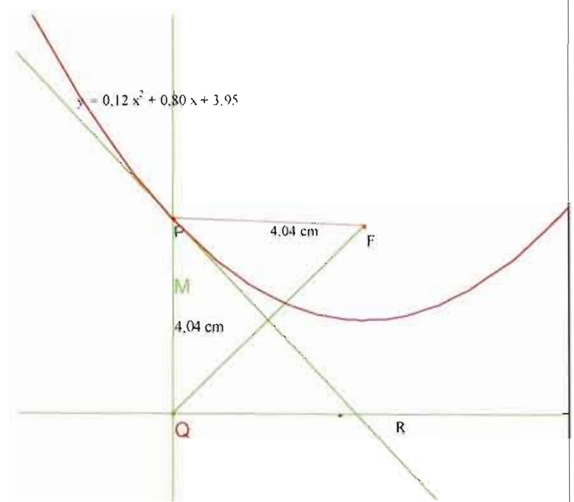
Démonstration 2
a) Comme d est la médiatrice de $\overline{VF'}$ par hypothèse, d croise $\overline{VF'}$ à angle droit en M, milieu de $\overline{VF'}$, ce qui implique que $\overline{F'M} \cong \overline{MV}$.
b) Mais alors, les deux triangles $\Delta PMF'$ et ΔPMV sont isométriques, par le critère CAC ($\overline{F'M} \cong \overline{MV}$, $m\angle PMV = 90° = m\angle PMF'$ et $\overline{PM}$ est côté commun).
c) On en conclut que $\overline{PF'} \cong \overline{PV}$ et la conclusion suit comme dans la démonstration 1.

3.2.4 Activité 2 (Appendice 4) : La parabole avec Cabri-Géomètre

L'objectif de cette activité : Visualiser à l'aide de Cabri-Géomètre la construction du lieu géométrique nommé ***la parabole*** et utiliser Cabri-Géomètre pour prouver et démontrer la propriété métrique d(F, P) = d(P, Q), qui permet la définition de base de la parabole. Vérifier si, avec l'aide de Cabri-Géomètre, les élèves peuvent construire des conjectures, des propriétés, des raisonnements logiques et argumentatifs dans un processus de preuve et de démonstration, similaire au travail déductif qu'ils ont fait dans un environnement papier-crayon.

3.2.4.1 Analyse de l'activité : La parabole avec l'aide de Cabri-Géomètre

CONSTRUCTION	**SAVOIR-FAIRE**
1. Trace une ligne droite R.	1. Construction d'une droite.
2. Place un point F à l'extérieur de R.	2. Construction d'un point extérieur à une droite.
3. Place un point Q sur R.	3. Construction d'un point sur une droite.
4. Obtiens la médiatrice du segment FQ.	4. Construction d'un segment avec l'outil « Segment », à partir de deux points donnés, et de sa médiatrice avec l'outil « Médiatrice ».
5. Trace une droite M perpendiculaire à la droite R, et passant par Q.	5. Construction d'une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, avec l'outil *« Droite perpendiculaire »*.
6. Appelle P le point d'intersection entre la droite M et la médiatrice.	6. Nommer un point désigné avec l'outil *« Point sur deux objets »*.
QUESTION	**SAVOIR-FAIRE**
1. Montrez le lieu géométrique de P lorsque Q se déplace sur la droite R.	1. Utilisation de l'outil *« Lieu »* pour générer la courbe.

2. Une fois que tu as trouvé le lieu géométrique, que faire pour s'assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une parabole ?	Utilisation de la commande *« Coordonnées ou équation »* pour obtenir une équation et traitement pour arriver à la reconnaissance de l'expression générale d'une parabole.  Formulation de la propriété métrique caractéristique de la parabole d(F, P) = d(P, Q) et traitement avec la commande « Distance ou longueur » pour prouver cette propriété.
3. Déplacez le foyer de la parabole vers le haut et vers le bas. Qu'est-ce qui a changé ?	En haut, la formule de la parabole est positive tandis qu'en bas elle devient négative. Lorsque F s'approche de la droite R, la parabole a tendance à se fermer vers le haut, autrement dit, ses branches tendent vers une droite qui sera perpendiculaire à R au moment où le foyer F touche R. La médiatrice de $\overline{QF}$ devient parallèle à la directrice M. Lorsque le foyer F s'éloigne de la droite R vers le bas, la parabole a tendance à s'ouvrir vers le bas.

4. Si l'on fait coïncider le foyer F avec le point Q, vers quoi va tendre le lieu de P ? Que devient la parabole ?	4. La médiatrice du segment $\overline{FQ}$ devient parallèle à la droite R. La directrice M ne change pas. Le point d'intersection P de la droite M et de la médiatrice de $\overline{FQ}$ devient Q. Le lieu de P est donc un point. Autrement dit, la conique générée correspondant à un seul point.
5. Dans le cas où le foyer est placé au-dessous de la ligne droite R, comment devient la concavité de la parabole ?	5. La parabole devient concave vers la direction du demi-axe des y négatifs ($y < 0$).

3.2.5 Activité 3 (Appendice 5) : Les coniques avec l'aide de Cabri-Géomètre

Cette activité est similaire à la première, elle concerne les coniques en général, et l'ellipse en particulier. La différence entre ces deux activités réside dans les moyens utilisés. En premier, nous avions utilisé l'outil papier-crayon alors qu'ici, nous demandons l'utilisation de l'outil technologique.

Objectifs de l'activité : Visualisation de la variation d'un des foyers (le point F') dans le cercle directeur ainsi que la génération d'autres coniques.

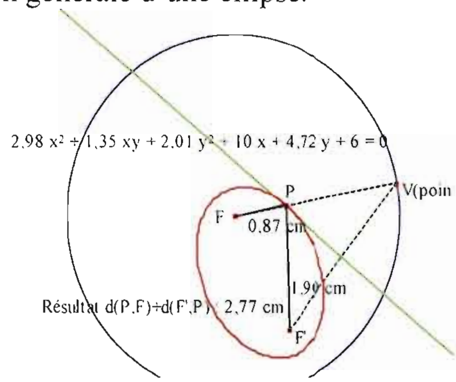
Favoriser chez les élèves l'utilisation d'un discours à caractère argumentatif et démonstratif, utiliser des propriétés métriques des coniques, trouver les équations des lieux correspondants, lancer des conjectures et les prouver expérimentalement et, peut-être, aller plus loin jusqu'à la nécessité de produire des démonstrations, au sens de Mariotti (2001).

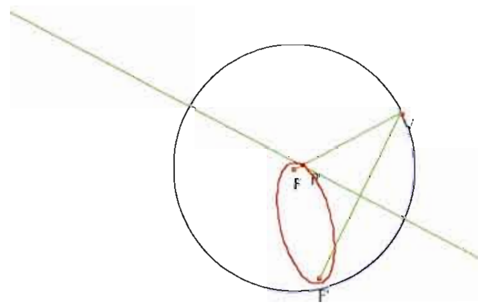
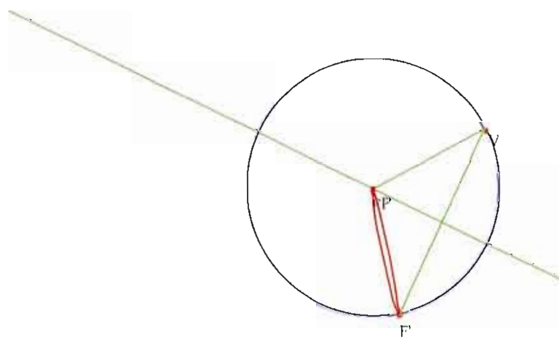
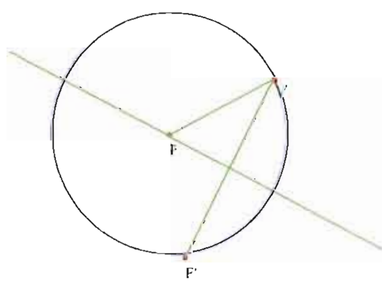
L'objectif de la tâche : Étant donné un énoncé, trouver les lieux du point P qui est relié par des segments à trois autres points F, F' et V. Le point V peut être déplacé sur le cercle.

3.2.5.1 Analyse de l'activité : Les coniques avec l'aide de Cabri-Géomètre

Étant donné un cercle de centre *F* et de rayon arbitraire, soit *F'* un point à l'intérieur du cercle et *V* un point lié au cercle et variable sur ce cercle. On trace le segment *VF'* et la droite *VF*. On construit la médiatrice *d* de $\overline{VF'}$. Soit *P* le point d'intersection de $\overline{VF'}$ et de la droite *VF*. Quel est le lieu géométrique de *P* lorsque *V* varie en se déplaçant sur le cercle ?

CONSTRUCTION	SAVOIR-FAIRE
1. On trace un cercle de centre *F* et de rayon arbitraire, et un second point *F'* à l'intérieur du cercle.	1. Construction d'un cercle avec Cabri, à l'aide de l'outil « Cercle ».
2. On ajoute un point *V* lié au cercle et variable sur ce cercle.	2. Construction d'un point sur un objet.
3. On trace $\overline{VF'}$ et la droite *VF*.	3. Construction d'un segment et d'une droite avec les outils « Segment » et « Droite », à partir de deux points donnés.
4. On construit la médiatrice *d* de $\overline{VF'}$.	4. Construction de la médiatrice d'un segment donné avec l'outil « Médiatrice ».
5. On appelle *P* l'intersection de la médiatrice *d* et de la droite *VF*.	5. Nommer un point avec l'outil *« Point sur deux objets »*.
QUESTION	**SAVOIR-FAIRE**
1.a Si on laisse fixe le point *F'* et on fait varier le point *V*, déterminez quel est le lieu géométrique de *P* lorsque *V* parcourt le cercle.	1.a Utilisation de la commande « Trace » pour générer la courbe.
1.b Une fois trouvé le lieu de points, déterminez trois positions de *P* pour trois positions de *V* choisies par vous sur le cercle.	1.b Sur la conique générée, création de trois positions lorsque *V* parcourt le cercle (on suit les mêmes procédures à partir de l'étape 2 jusqu'à l'étape 5).

2. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une ellipse ?	Utilisation de la commande « Coord. ou équation » pour obtenir une équation et traitement pour arriver à la reconnaissance de l'expression générale d'une ellipse.  Reconnaître que F et F' représentent les foyers d'une ellipse. Mesurer avec la commande « Distance », les segments $\overline{FP}$ et $\overline{F'P}$, et à l'aide de la calculatrice, vérifier que d(P, F) + d(P, F') est constante pour les trois lieux trouvés dans la première question.
3. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse.	**Conjecture** : La somme des distances d'un point P variable aux deux points fixes F et F' est constante, c'est-à-dire que P décrit une ellipse. **Hypothèse :** Soit un cercle de centre F, F' un point quelconque à l'intérieur du cercle, V un point variable sur le cercle, d la médiatrice de $\overline{VF'}$. P est l'intersection de d et de la droite VF. **Conclusion :** d(P, F) + d(P, F') = constante = rayon du cercle. **Démonstration :** mêmes démonstrations qu'en § 3.2.3.1.

4. Si l'on rapproche *F'* du cercle, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?	En rapprochant le point *F'* du cercle, l'ellipse est de plus en plus écrasée et, à la limite, se réduit à un point, soit *F*.    a. Le segment $\overline{VF'}$ devient une corde du cercle. b. Or, la médiatrice *d* d'une corde passe par le centre *F* du cercle. c. L'intersection de *d* avec la droite *FV* sera donc le point *F* lui-même, quelle que soit la position de *V* sur le cercle, sauf dans le cas où *V* est confondu avec *F'*, qu'on ne considère pas parce qu'on ne peut alors parler de la médiatrice de $\overline{VF'}$.

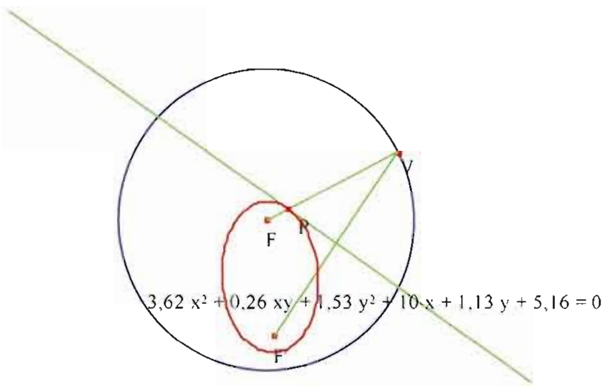
<table>
<tr>
<td>

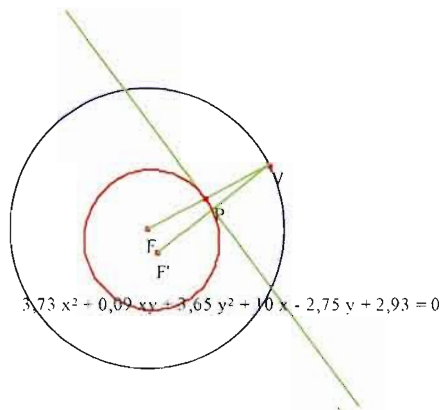
5. Si F' s'approche indéfiniment de F, vers quoi va tendre le lieu de P ?

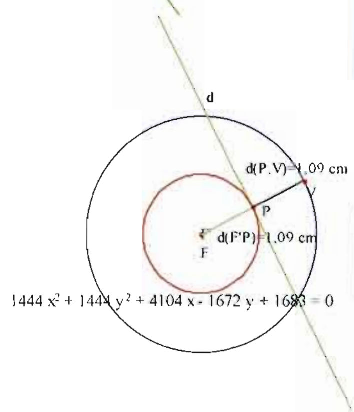
Qu'arrive-t-il à l'équation de l'ellipse ?

</td>
<td>

En rapprochant le point F' de F, l'ellipse s'approche progressivement d'un cercle.

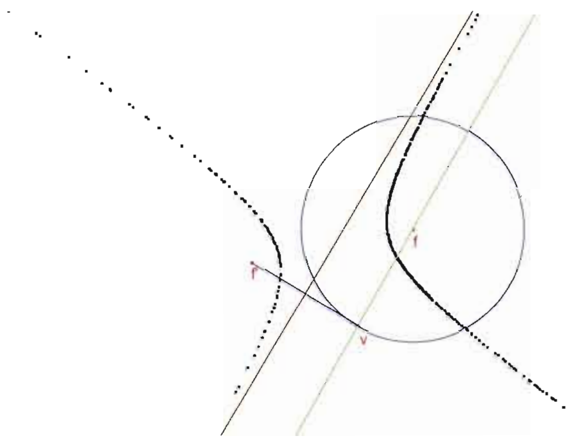






Lorsque $F' = F$, P est le milieu de $\overline{FV}$ et sa distance à F est constante, égale à la moitié du rayon du cercle directeur. Le lieu de P est donc le cercle de centre F, deux fois plus petit que (C). Ainsi, lorsque F' tend vers F, l'ellipse

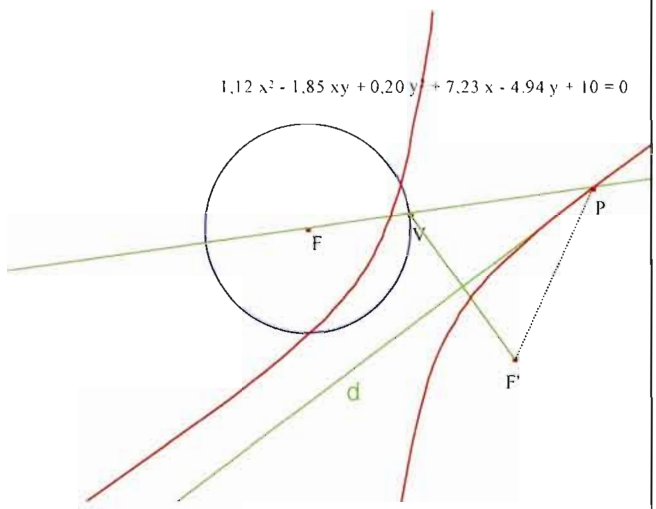
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>s'arrondit peu à peu pour devenir un cercle. L'équation de l'ellipse devient donc l'équation d'un cercle.</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Si l'on déplace F' en dehors du cercle, explique ce que devient le lieu de P lors du déplacement de V sur le cercle. Observe plusieurs écrans saisis à différents moments.</td>
<td>

Le lieu de P devient une hyperbole.
Au fur et à mesure que V se déplace, les droites d et FV tendent à devenir parallèles et le point P s'éloigne; au moment où $\overline{F'V}$ est perpendiculaire à FV, $d \,//\, FV$ et l'on dit que le point P est à l'infini.
P est l'intersection de la médiatrice d de $\overline{F'V}$ et de la droite FV. Dans ces figures, on constate que P suit la branche droite de l'hyperbole de haut en bas, pour disparaître en bas et réapparaître ensuite dans le haut de la branche gauche.
Lorsque le segment $F'V$ est perpendiculaire à FV, $d \,//\, FV$ et l'on peut dire que le point P est à l'infini.
Si l'on continue à déplacer V sur le cercle, les droites se rencontrent à nouveau mais, cette fois, en haut de la figure.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>7. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d’une hyperbole ?</td>
<td>Utilisation de la commande « Coord. ou équation » pour obtenir une équation et traitement pour arriver à la reconnaissance de l’expression générale d’une hyperbole.



Reconnaître que F et F' représentent les foyers d’une hyperbole. Avec la commande distance, mesurer les segments $\overline{FP}$ et $\overline{F'P}$ et à l’aide de la calculatrice vérifier que $\mid d(P, F) - d(P, F') \mid$ est constant.</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une hyperbole.</td>
<td>Conjecture : La valeur absolue de la différence des distances d’un point P de l’hyperbole aux deux points fixes F et F' est constante.

Hypothèse : P est sur la médiatrice de $\overline{F'V}$, $d(P, V) = d(P, F')$.

Conclusion : $\mid d(P. F) - d(P, F') \mid$ est constant.

Démonstration
1. Lorsque P est sur la branche de gauche de l’hyperbole, on a $d(P, V) = d(P, F) + d(F, V)$.</td>
</tr>
</table>

	2. En remplaçant d(P, V) par d(P, F') dans cette relation, on obtient d(P, F') = d(P, F) + d(F, V). On obtient par soustraction : d(P, F') – d(P, F) = d(F, V) 3. Lorsque P est sur la branche de droite de l'hyperbole, on a : d(P, F) = d(P, V) + d(F, V). D'où, d(P, F) – d(P, F') = d(F, V). 4. Donc, | d(P, F) – d(P, F') | = d(F,V), le rayon du cercle, qui est constant.

3.3 La phase III : L'expérimentation

L'étape d'expérimentation et de collecte de données s'est déroulée sur dix périodes, étalées sur deux semaines (Hiver 2007), avec 24 élèves. Les séances expérimentales ont eu lieu pendant les heures de classe. Ces élèves se sont portés volontaires et ont suivi le cours Mathématiques 536 du Programme d'Éducation Internationale au Québec.

Nous avons ciblé cette école car nous y avions travaillé et nous y avions trouvé des conditions favorables à notre expérimentation, telle que l'enthousiasme de la direction, des élèves et des enseignants pour cette recherche. Ces élèves, qui faisaient partie du Programme d'Éducation internationale[15], avaient une performance acceptable en mathématiques. Les élèves se sont investis dans les activités désignées :

[15] *« Les programmes d'éducation internationale visent à éveiller les élèves à l'humanisme international... et peuvent enrichir le programme d'enseignement officiel. Ces programmes sont offerts dans des établissements d'enseignement privé et public, qui organisent leurs activités sous l'autorité des commissions scolaires; du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport; du Baccalauréat international; de la Société des écoles du monde du baccalauréat international du Québec et de la francophonie. Ce programme offre des volets optionnels qui tiennent compte des intérêts des jeunes. Ces volets sont : sport; création · arts, science et technologie; langues : espagnol, anglais et français. Les élèves sont également soumis aux épreuves du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport afin d'obtenir un diplôme d'études secondaires. »* (voir MELS, 2007).

la construction d'une démonstration dans un environnement papier-crayon et une autre avec l'aide du logiciel Cabri-Géomètre.

Les élèves ont écrit leurs réponses, démarche formelle de démonstration et leurs constructions géométriques, dans le *cahier de l'équipe*, pour chaque activité proposée (d'autres feuilles ont été fournies sur demande). Les équipes de trois élèves ont été formées librement selon le degré d'amitié et d'affinité entre eux.

Nous avons recommandé d'utiliser un ordinateur par équipe de trois élèves, afin de permettre un meilleur apprentissage « collaboratif », c'est-à-dire une meilleure concentration et communication entre les élèves pour le travail en équipe et les débats en classe.

En ce qui concerne la mise en marche et la discussion en classe, nous avons encouragé les échanges entre les élèves au sein d'une même équipe, les interactions entre les membres d'une équipe à propos de ce qui se produit sur leur écran, les échanges entre le chercheur et les membres de chaque équipe et finalement, la participation de chaque élève à la grande plénière. Comme le dit Balacheff (1999), nous leur octroyions ainsi une responsabilité mathématique sur leurs activités et leurs productions. Ici, le rôle de l'enseignant (chercheur dans notre cas) est celui de guide ou d'animateur de l'apprentissage. Le chercheur a été présent pendant toute la durée de l'expérimentation.

Pour les trois activités proposées et pour s'assurer que toute la classe comprenait bien les consignes, le chercheur a présenté en grand groupe chaque question séparément, avec l'aide d'un projecteur et de transparents. Pour chacun des problèmes présentés, un élève s'est porté volontaire pour expliquer à toute la classe, et avec ses propres mots ce qu'il comprenait du problème demandé. Après cet exercice de compréhension, tous les élèves se mettaient au travail d'équipe.

propriétés métriques de l'ellipse, de la parabole et celle de l'hyperbole a été faite en grand groupe, au tableau. Pour ces démonstrations, des élèves se sont portés volontaires et toute la classe a fait des apports importants à cette construction.

CHAPITRE IV

EXPÉRIMENTATION ET ANALYSE A POSTERIORI

4.1 Introduction

Pour l'analyse, nous avons retenu les productions qui semblaient pertinentes et qui pouvaient apporter des réponses à nos questions de recherche et ce, dans différentes activités de l'expérimentation. Les confrontations entre analyse a priori et analyse a posteriori ont laissé percevoir des différences entre nos suppositions et les productions des élèves.

Ces analyses ont permis, d'une part, de mieux comprendre comment les élèves de cinquième secondaire abordent les problèmes de démonstration en géométrie sur les coniques; d'autre part, de comprendre comment se manifestent les notions de preuve et de démonstration dans des contextes papier-crayon et technologies.

Ces deux aspects ont été traités de la manière suivante : pour la résolution du problème de démonstration d'une propriété métrique sur les coniques, nous avons observé les différentes stratégies utilisées par les groupes d'élèves au moment de résoudre le problème. Nous avons analysé le verbatim et les réponses des élèves (cahier de l'équipe). Nous présentons dans ce qui suit une analyse des résultats par cas.

Pour chaque cas, nous donnons le nombre d'élèves concernés, nous rapportons les productions de ces élèves puis nous analysons ces productions.

4.2 Analyse de l'activité : L'ellipse avec papier-crayon

Problème proposé : Soient F et F' deux points distincts, (C) un cercle de centre F et de rayon $r > m\overline{FF'}$. Soit V un point variable sur le cercle. On trace le segment $F'V$ et on construit sa médiatrice D. Elle rencontre le rayon $\overline{FV}$ en P.

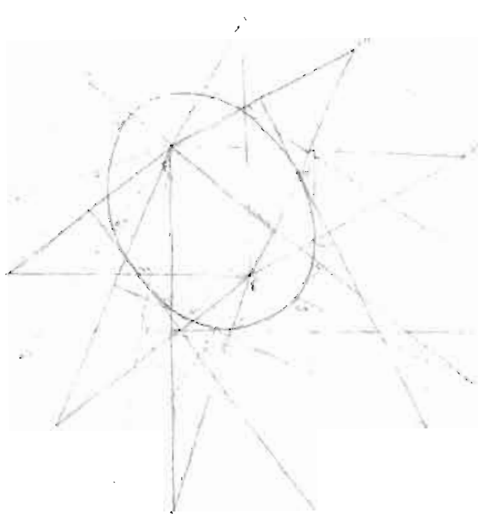
Construire sur papier au moins sept points P avec crayon, compas, règle graduée, etc.

Quel est le lieu géométrique de P lorsque vous reliez tous les points P trouvés ?

Analyse des questions

QUESTION 1 : Montrez le lieu géométrique des différents points P lorsque V varie en prenant différentes positions sur le cercle.

Cas I : C'est le cas où nous considérons que la construction est réussie. L'analyse nous a permis de regrouper dans ce cas seize des élèves.



Parmi ces élèves, trois ont utilisé dix points variables V au lieu de sept, et un rayon approprié (par exemple 10 cm).

La majorité des élèves ont réussi à construire une ellipse. Ils ont utilisé un élastique ou des traits courbes à main levée pour relier les différents points P au lieu d'utiliser le curvigraphe, suggéré par l'enseignant.

La plupart des élèves ont expliqué qu'ils n'étaient pas habitués à utiliser le curvigraphe pour tracer les courbes dans leur cours de mathématiques. C'est pour cette raison qu'ils ont opté pour la construction de l'ellipse en utilisant des traits à main levée ou un élastique pour relier les différents points P.

Nous avons pu remarquer les éléments suivants :

– Les élèves ont bien tracé les différents segments $F'V$, ont construit leur médiatrice et finalement, ont placé les différents points d'intersection P entre les médiatrices et les rayons $\overline{FV}$.

– Par observation et par exploration, les élèves ont trouvé différents points P satisfaisant à la définition du lieu et les ont reliés en trouvant la figure correspondant à une ellipse.

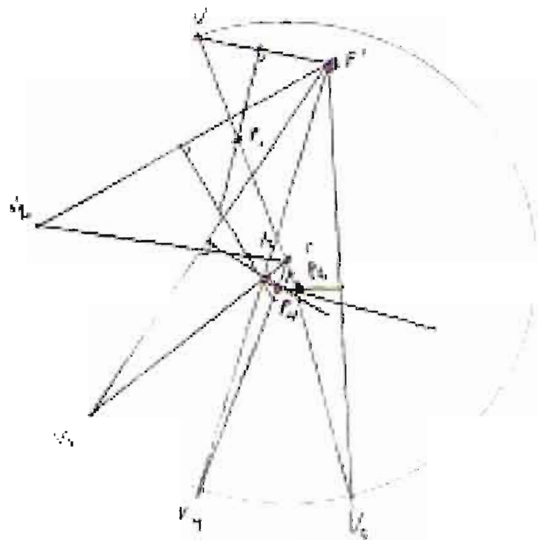
– En général, la plupart des élèves se sont appropriés la tâche et ont réussi la construction de l'ellipse dans l'environnement papier-crayon.

On constate que le processus de dévolution du problème a fonctionné, le problème de construction est pris en charge par l'élève et il ne vient pas juste du professeur. Il y a une responsabilité de construction de la figure et l'élève valide spatialement sa construction.

Cas II : Dans ce cas, la construction est considérée comme non réussie. L'analyse nous a permis de regrouper ici cinq élèves, dans trois équipes différentes. Nous nous attarderons maintenant sur les trois productions de ces élèves.

***Production 1** (un élève qui travaillait d'abord dans une équipe de trois mais qui a ensuite fait la construction seul)*

Les consignes ne sont suivies que partiellement. Cet élève s'est contenté de construire cinq points variables V, malgré la consigne d'en construire au moins sept. Par conséquent, le nombre de points construits n'a pas permis de trouver le lieu géométrique demandé.



L'élève considéré ici a relié les différents points P par des segments, puis il s'est arrêté; nous ne comprenons pas sa stratégie de résolution. Nous pensons que cet élève n'a pas bien compris les consignes.

Nous pensons aussi qu'il n'y a pas eu assez de communication. D'une part, les élèves de l'équipe n'ont posé aucune question au chercheur. D'autre part, nous n'avons observé aucune discussion entre les membres de cette équipe, et c'est sans doute ce qui a motivé l'élève à aller travailler seul sur la construction.

Production 2 *(trois élèves)*

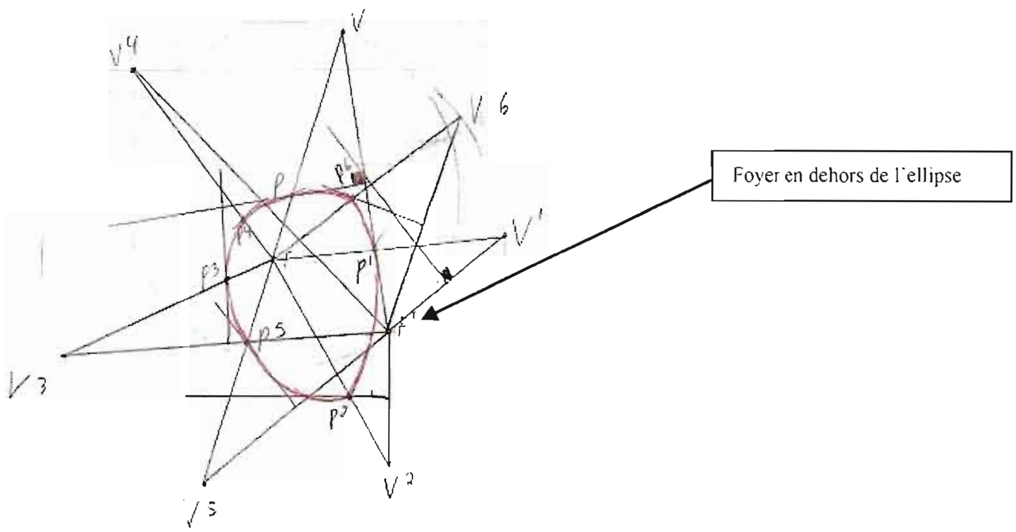


Fig. 1

Peut-être par désir de construire rapidement l'ellipse, comme le restant de la classe, ce groupe a placé un des foyers en dehors de l'ellipse :

Chercheur (Ch) : Comment est-ce que tu sais que cela est une ellipse ?

William : À cause de sa forme d'ovale.

Ch : Je vois plutôt une figure avec la forme d'un œuf. (Le chercheur dessine la figure 2 et la figure 3.).

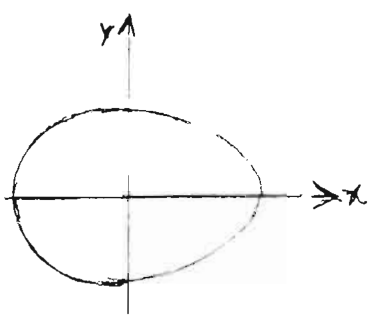


Fig. 2

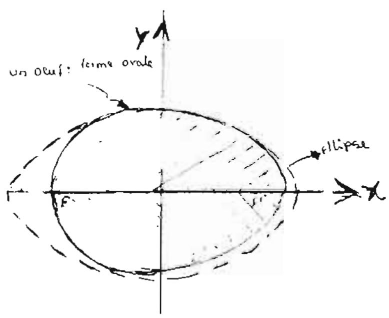


Fig. 3

Équipe : (Rires)

Ch : Est-ce que cet ovale a des axes de symétrie ? (Le chercheur fait référence à la figure 2.)

Renaud : Ouais, il en a deux. (L'élève montre les deux axes de symétrie qui sont perpendiculaires.)

Benoit : Attends, non, je vois un axe de symétrie.

William : Euh je vois deux aussi.

Ch : Lequel ?

Benoit : Celui de l'axe des x.

Renaud : Je le vois pas.

William : Moi non plus.

Benoit : Check ça. (Benoit montre l'axe des x.)

Renaud : Ouais, je le vois.

Ch : Récapitulons; combien d'axes de symétrie a cet ovale ?

William : Il en a juste un.

Ch : Lequel ?

Benoit : Celui de l'axe des x.

Ch : Est-ce que cet ovale est une ellipse ?

Équipe : Non.

Ch : Pourquoi ?

Benoit : Parce que cette ellipse a deux axes de symétries pis cet ovale en a juste un. (L'élève montre la figure 3.)

Ch : Conclusion ?

Renaud : Notre figure n'est pas une ellipse.

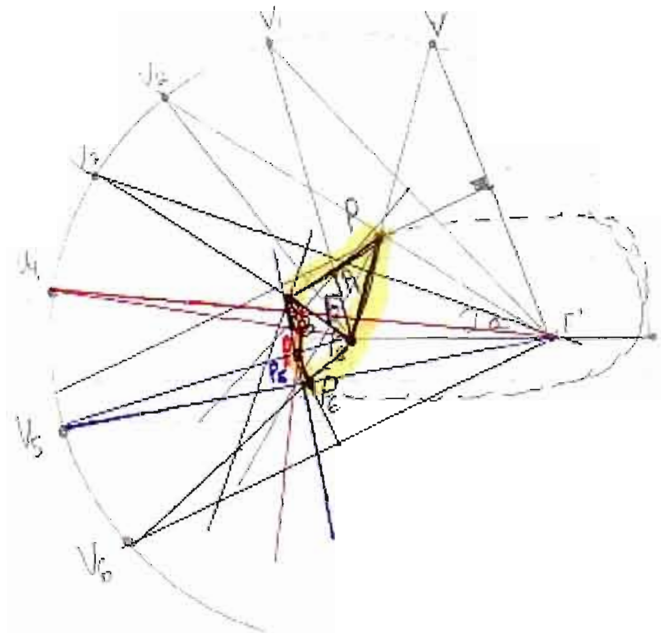
Ch : Tes foyers sont dedans ton ellipse ?

Benoit : Non, ils sont dehors.

Renaud : Ah, je comprends !

Lors de cette discussion, nous avons pu constater que, pour faire la vérification de leur construction, les élèves se sont basés sur la forme de leur dessin plutôt que sur les caractéristiques de l'ellipse. En effet, c'est en travaillant sur une des caractéristiques des ellipses, soit la présence de deux axes de symétrie, que nous avons pu faire prendre conscience aux élèves leur erreur. De plus, la présence d'un des foyers de l'ellipse à l'extérieur de leur dessin n'a fait que renforcer notre conviction selon laquelle les élèves se sont fiés à leur perception immédiate plutôt qu'aux caractéristiques connues de l'ellipse pour faire leur vérification : *« Ces croyances des élèves peuvent modifier la façon d'aborder un problème, ainsi que les techniques utilisées ou abandonnées. Elles font partie du contexte de travail lors d'une résolution du problème »* (Cazzaro et al., 2001, p. 113).

Production 3 *(un élève)*



Ici, l'élève n'a pas bien distribué les points V sur le cercle, ce qui a eu pour conséquence de ne trouver les points P que sur une partie de l'ellipse. Il a commencé par surligner (en jaune) les triangles formés par les points P trouvés et le foyer F. Nous ne savons pas exactement ce qui s'est passé à ce moment-là, mais nous supposons que sa stratégie a été interrompue après avoir vu ce que le groupe à côté a fait. Il a alors tracé en pointillé ce qui semble être une courbe représentative d'une ellipse, et qui passait par les points P trouvés.

Cas III : Dans ce cas, les productions sont classées selon qu'il y a eu réajustement de la construction. L'analyse nous a permis d'y regrouper trois élèves.

Ici, les élèves ont relié les points avec des lignes droites obtenant un polygone. Cette construction a été réajustée quelques minutes après :

Ch : Pourquoi avez-vous relié tous les points *P* avec des segments? (Le chercheur montre la figure 4.)

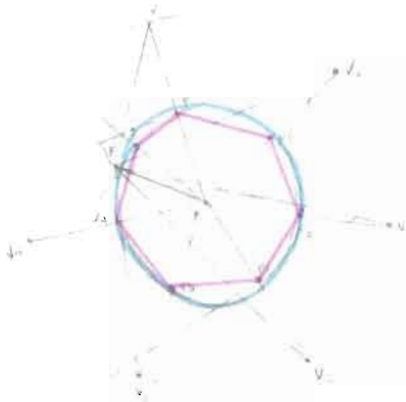


Fig. 4

Lisa : Parce qu'on a pensé que nous avions trouvé un polygone.

Ch : Un polygone ?

Élèves : Ouais, on a utilisé dans les cours de math la règle puis le compas pour faire des polygones réguliers.

Comme les élèves connaissaient déjà l'exercice « standard » de construction d'un polygone régulier, ils se sont laissés tenter par celui-ci, en laissant de côté la véritable compréhension du problème et sans s'attarder sur la véritable définition de **lieu géométrique** où **tous les points jouissent d'une même propriété concernant les distances** : *« Il faut en fait considérer les ressources que l'élève suppose siennes (mais qui peuvent être fausses ou inutilisables en vérité). Certains élèves se contentent d'étudier des procédures "mécaniques" dans des domaines sans les assimiler. Ces procédures et ces concepts "appris" non maîtrisés ne sont pas vraiment utiles et peuvent difficilement être considérés comme des ressources »* Cazzaro et al. (2001, p. 148).

Ch : Qu'est-ce que vous aviez pensé, comme équipe ?

Amélie : Ben, on a pensé que le lieu de points était un polygone régulier.

Ch : Pensez-vous que les côtés sont tous égaux, de même longueur?

Annabelle : Ouais, mais maintenant on pense plus la même chose.

Ch : Pourquoi ?

Annabelle : On s'est trompé, parce qu'on cherchait pas des polygones, on cherchait un lieu.

Probablement après l'activité, ou avant d'initier cet entretien, ou même pendant cette entrevue, les élèves ont réfléchi sur la définition de lieu géométrique et celle de polygone régulier, ce qui les a amenés à affirmer premièrement qu'*« on s'est trompé »* et plus bas, à affirmer avec plus de confiance qu'*« on est sûr que c'est pas la même affaire »*.

Ch : Pourquoi sept côtés; pourquoi avez-vous dessiné sept côtés et non huit ou dix ? Quelle différence y a-t-il entre avoir sept points V variables sur le cercle et avoir dix points ou en avoir vingt, pour le lieu que je veux trouver ? Selon votre dessin, qu'est-ce que cela me donne… peut-être un heptagone, un décagone ou un icosagone ?

Élèves : Non, maintenant c'est différent. On croit que c'est différent.

Ch : Vous le croyez ou vous en êtes certains ?

(Après quelques secondes de réflexion et discussion, et après avoir consulté leurs cahiers et leur manuel de mathématiques, les élèves prennent une décision.)

Lisa : On est sûr que c'est pas la même affaire.

Ch : Bon, expliquez-moi, pour que je puisse bien comprendre.

(Les élèves expliquent comment construire un polygone régulier à n *côtés.)*

Nous pensons que les élèves ont une difficulté cognitive pour se représenter expérimentalement le lieu demandé en correspondance avec le déplacement de V sur le cercle. Cette difficulté peut être due à un problème de coordination, par exemple entre les représentations des registres graphique et conceptuel. Comme ça peut être dû à la *rigidité géométrique*[16] engendrée par l'environnement.

Ch : Maintenant, je vous pose une autre question : est-ce que la figure 4 représente un heptagone ?

Lisa : Je pense pas parce que y a pas la même mesure ici que ici (les élèves font référence à la figure en question).

Amélie: Ah ouais, check, on l'a fait sur le lieu de points; pourquoi on a fait ça ? (Rires des élèves)

Ch : Et le lieu des points; le lieu de points, où devrait-il être placé ?

Lisa : Ben, le lieu des points, on le trouve à l'intérieur du cercle. (Les élèves signalent le grand cercle de la figure 4.)

Ch : Le cercle est un lieu de points ?

Amélie : Non, parce qu'on doit faire varier un point V pour qu'il nous donne le cercle. On a pas de points V.

Ch : Qu'est-ce qu'on pourrait dire sur la définition de cercle; est-ce que le cercle est un lieu de points ?

[16] *« La rigidité géométrique est un phénomène relatif à la visualisation des figures géométriques. Elle arrive quand il y a une incapacité de l'individu à manier mentalement une figure géométrique qui ne se présente pas ou dans certaines positions "standard" ou lorsqu'il ne peut pas l'imaginer quand elle se meut (sous une translation) ou lorsqu'elle change sa forme; c'est-à-dire quand ses côtés changent de position ou ses angles sont modifiés. »* (Larios, 2006, p. 379), notre traduction.

Ch : Annabelle, dessinez-moi un cercle. (L'élève dessine un cercle sur le tableau.)

Annabelle : Ouais, le cercle c'est un lieu de points parce que la distance de tous les points sur le cercle au centre c'est égal.

Ch : Égal à quoi ?

Annabelle : La distance de tous les points sur le cercle au centre c'est égal au rayon du cercle.

Ch : D'accord; je pose encore la même question : le cercle est un lieu de points ?

Élèves : Ouais.

Pour eux, le lieu de points est en relation avec un point *V* qui se déplace sur un cercle et la possibilité de s'interroger sur le lieu que peut parcourir un autre point relié au premier.

Ch : Et le lieu des points; le lieu de points où devrait-il être ? (Le chercheur fait référence à la figure 4).

Élèves : Ici, dans la même place où on a fait le polygone.

Ch : Comment s'appelle-t-il ce lieu ?

Élèves : L'ellipse.

Ch : Bon; maintenant, comment appelle-t-on la distance entre le centre du polygone que vous avez dessiné et chacun des côtés?

Amélie : L'apothème.

Ch : D'accord, l'apothème. Le rayon du polygone régulier est la même chose que l'apothème ?

Lisa : Non; c'est pas la même chose; le rayon du cercle part du centre du cercle jusqu'à là, jusqu'au bord du cercle (signalant le bord du cercle) et l'apothème c'est la ligne qui part du centre du polygone pis qui s'en va jusqu'au bord du polygone en faisant un angle droit.

Ch : D'où part-elle ?

Élèves : Du centre du polygone jusqu'au bord du polygone.

Ch : Comprenez-vous pourquoi ce polygone n'est pas un lieu géométrique ?

Lisa : Ouais, parce que tous les points du polygone sont pas à la même distance du centre du cercle.

Ch : Est-ce que tous sont d'accord avec cette affirmation ?

Élèves : Ouais.

Le chercheur essaie de faire distinguer aux élèves la définition de lieu de points et celle de polygone régulier. On fait face ici à un effet contraire de ce qui est attendu en démonstration : les élèves cherchaient à répondre à la question et à l'intention de l'enseignant plutôt que d'essayer de comprendre le problème.

Ch (insistant sur des questions déjà posées) : Pourquoi sept côtés, pourquoi avez-vous dessiné sept côtés et non huit ou dix ? Quelle est la différence entre avoir sept points *V* variables sur le cercle et en avoir dix, ou en avoir plus pour un lieu que je veux trouver ?

Amélie : Non, on pense que c'est différent. Ça nous donne un lieu de points; pis si on trouve plus de points, par exemple vingt points, on est plus proche, on est plus sûr de trouver le lieu que si on a juste sept points.

Une autre difficulté ressort de cette discussion en général. En effet, nous avons pu constater que les connaissances mises en jeu et leurs cohérences avec la démarche utilisée par ces élèves dans la solution du problème sont inappropriées et ne correspondent pas au contexte. La nécessité de posséder un certain répertoire de connaissances permet à l'élève de résoudre efficacement des problèmes et de traiter d'une façon significative les données du problème soumis et d'élaborer des solutions appropriées.

Les élèves ne sont pas conscients des liens qui relient les différents éléments mathématiques participant à la construction géométrique demandée.

« Du point de vue de Perkins et Simmons (1988), les erreurs que font les étudiants dans les activités mathématiques sont dues à une carence de structures cognitives. Cette carence ne permet pas à l'étudiant de réaliser les connexions nécessaires dans la résolution d'un problème ou d'aller plus loin dans un problème déjà résolu... » Hitt (2004, p. 7).

Dans les cas II et III, les difficultés observées dans le processus de construction géométrique semblent résulter d'une échelle métrique inappropriée (rayon du cercle trop petit), ou l'absence de couleurs, puisqu'on constate que la couleur a très certainement aidé les élèves qui ont réussi la construction à différencier les différents segments *VF'* et leurs médiatrices.

La lecture et l'analyse de l'énoncé du problème sont, pour certaines équipes, insuffisantes. Des élèves se sont basés sur les apparences; l'interprétation a été personnelle, mais attachée à des anciennes connaissances (à savoir celles des polygones). « ... *Certains élèves cherchent des structures dans ce qui leur est proposé mais se basent plus sur les apparences que sur le sens. L'interprétation* *personnelle peut ainsi se substituer à la compréhension et empêcher le véritable apprentissage* » Cazzaro et al. (2001, p. 146).

Des élèves sont allés jusqu'à la fin du problème sans vérifier si l'information dont ils disposaient était correcte. On ne constate pas ici des traces de vérifications permanentes dans le but de contrôler la construction géométrique.

QUESTION 2 : Une fois le lieu géométrique de *P* trouvé, que faut-il faire pour s'assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est bien celle d'une ellipse?

Dans le processus de construction de la preuve, les élèves ont procédé à l'énonciation de la définition de l'ellipse et ensuite, à une explication de sa propriété métrique par rapport à un dessin de la situation.

Tous les 24 élèves[17] ont pris des mesures empiriquement entre les différents points *P* trouvés et les deux points fixes *F'* et *F*. Leurs procédures ont donné :

L'addition des distances FP et F'P devrait donner le même résultat pour tous les segments. Je mesurerai avec la règle.
Segment V1 FP: 2.1 et F'P: 4.3 donc total: 6.4 cm
Segment V2 FP: 5 et F'P: 1.4 donc total: 6.4 cm
Segment V3 FP: 3.8 et F'P: 2.8 donc total: 6.6 cm
Segment V4 FP: 2.7 et F'P: 3.8 donc total: 6.5 cm
Segment V5 : FP: 2 et F'P: 4.5 donc total: 6.5 cm
Segment V6 : FP: 1.7 et F'P: 5 donc total: 6.7 cm
Segment V7 FP: 1.5 et F'P: 5.1 donc total: 6.6 cm
Conclusion → le rayon du cercle est d'environ 6.5 cm

[17] Nous comptons ici les deux élèves du cas II (Production 1 et 3) de la question 1, mais nous ne comprenons pas comment ils ont obtenu leurs calculs numériques sans avoir fait le réajustement de la figure.

La définition suivante de l'ellipse : « *Une ellipse est le lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.* »

Ainsi que la remarque suivante : « *La distance est toujours égale au rayon du grand cercle C de départ.* »

Pour les élèves, la **validation** est aussi une **constatation**. La validation est attachée à la figure en question.

Tout le groupe s'est conformé à énoncer la règle admise sur la propriété métrique qui définit l'ellipse et la constatation de sa validité par des calculs de cas particuliers.

Un élève a été envoyé en avant de la classe pour présenter la ***Preuve*** et montrer que le dessin obtenu était bien celui d'une ellipse. À l'aide des acétates et en utilisant ses propres mots, on a eu le dialogue suivant :

(L'élève dessine un cercle, un point *P* et les deux foyers, elle se base sur l'information donnée par le dessin fait dans le Cahier de l'équipe : voir figure 5.)

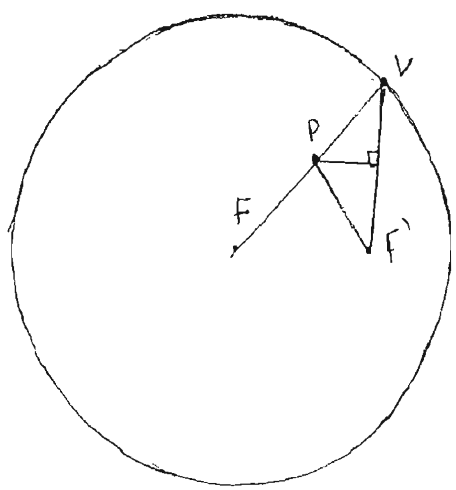


Fig. 5

Ch : Ça c'est ton ellipse ? On ne voit pas grande chose.

À la suite de cette remarque, l'élève reconnaît et obtient la figure sollicitée avec l'aide de l'énoncé du problème et de son propre brouillon. Elle l'a construite en utilisant des acétates devant toute la classe.

Il a fallu l'intervention du chercheur pour que l'élève construise correctement la figure demandée, c'est-à-dire l'ellipse et les éléments qui la caractérisent.

Laurie : Ça ce sont les foyers, les *F*. J'ai pris la distance du point *P* à *F'* pis celle de *P* à *F*, je les ai additionnées. J'ai fait ça pour tous mes points autour du cercle, pis ça donne environ la même distance. (L'élève dessine le lieu demandé : l'ellipse. Elle identifie ses foyers.)

Ch : Bien alors, qu'est-ce que tu vas faire pour prouver que ce lieu de points c'est vraiment une ellipse ? Ça a l'air d'être une ellipse, mais tu dois le prouver.

Encore une fois, le chercheur a dû intervenir afin de guider l'élève à travers la construction de sa preuve.

Laurie : Je vais calculer la distance de *F'* à *P*, là je vais additionner avec celle de la distance de *F* à *P* pis là c'est… je n'ai pas de règle…

Ch : Ça doit donner quoi l'addition de ces [inaudible] ?

Laurie : Ben moi ça me donne environ 10, 10.2, 10.1, ça dépend… (L'élève en question fait référence à son dessin (figure 6) et les mesures des distances trouvées qui sont environ égales à 10 cm, le rayon du grand cercle.)

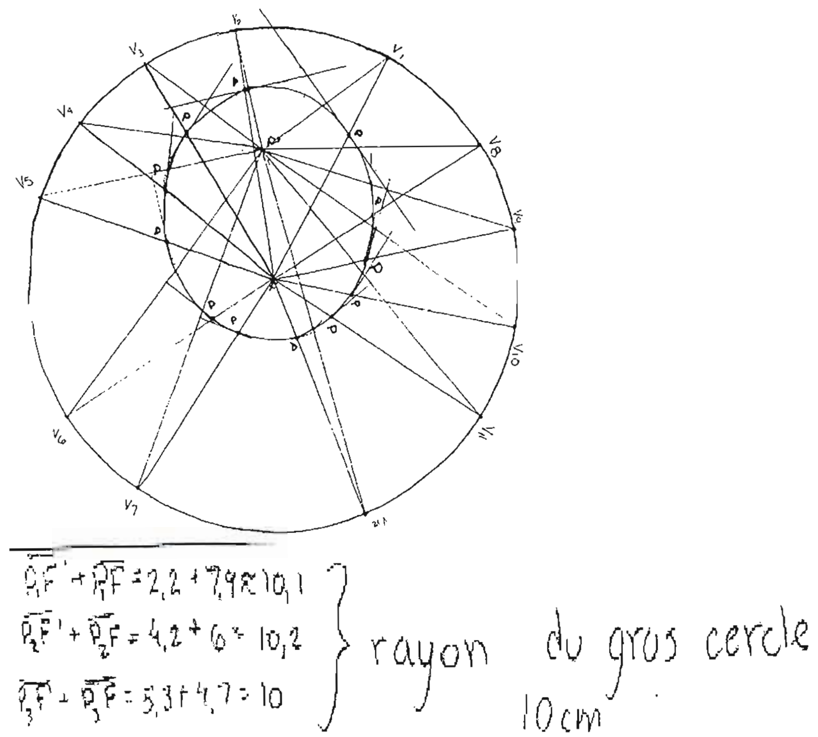


Fig. 6

Ch : Pourquoi dix, c'est quoi dix dans ton graphique ?

Laurie : C'est le rayon du cercle.

Ch : Exactement, ton premier ou ton dernier ?[18]

Laurie : Mon premier cercle, le plus gros.

Ch : Bravo, grande découverte !

[18] N'oublions pas qu'on a changé l'énoncé premier du problème qui demandait la construction de l'ellipse à partir des cercles tangents au grand cercle : « *construction par le cercle directeur* ». Dans le nouvel énoncé du problème, nous évitons d'utiliser ces constructions *« des cercles tangents »,* car nous ne les considérions pas comme nécessaires, sans dire que ce n'est pas important. À notre avis, ce n'était qu'un surplus d'information pour cette activité qui pouvait distraire l'attention des élèves.

Conclusions

Le chercheur a été présent à plusieurs reprises dans le dialogue pour motiver l'argumentation orale de la propriété métrique de l'ellipse par l'élève. Ses interventions étaient nécessaires puisque l'élève n'indiquait pas de quoi elle partait et vers quoi elle s'en allait. À la demande de produire une preuve, l'élève semble constater qu'il y a une régularité dans ses calculs. Par contre, elle semble incapable de formuler la propriété métrique. Avec l'aide du chercheur, elle est finalement arrivée à fournir une preuve pour affirmer que toutes les distances entre les points P et F additionnées avec les distances entre les points P et F' sont égales au rayon du cercle de départ.

Il semble y avoir une compréhension du problème qui se constate; premièrement, par la construction du lieu de points à l'aide de l'énoncé du problème et, deuxièmement, par l'organisation de la présentation des calculs. En effet, les élèves savent qu'ils doivent utiliser les données et faire des calculs, comparer des points et des segments. Par contre, la propriété métrique leur semble peut-être trop évidente pour être énoncée.

Finalement, le chercheur a fait l'institutionnalisation de la preuve de la propriété métrique de l'ellipse en grande plénière afin de préparer les élèves à la prochaine question.

QUESTION 3 : Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse.

Cas I : Dans ce premier cas, nous regroupons neuf des élèves qui n'ont pas réussi leur démonstration à cause d'une mauvaise construction de repère et la non-utilisation des données du problème. (Voir figure 7).

Production 1 (sept élèves dans trois équipes)

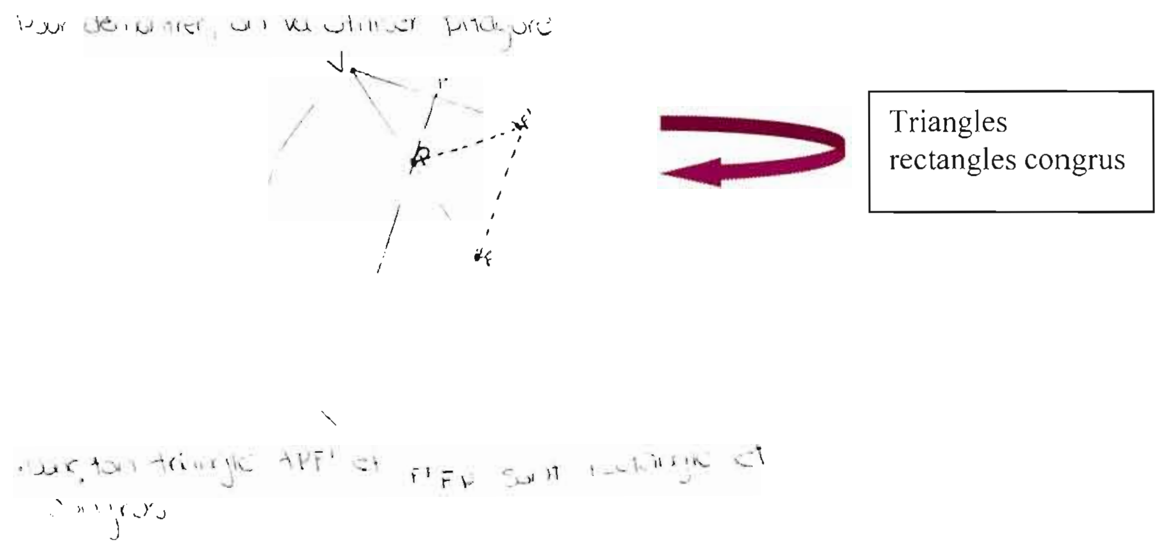


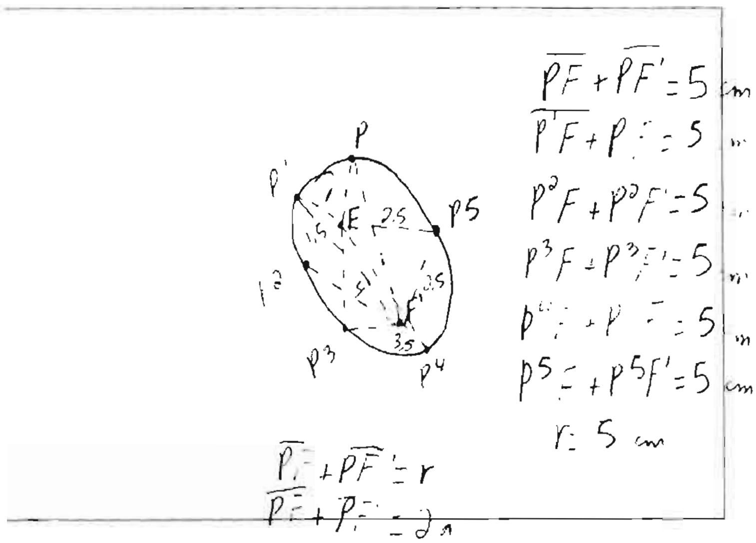
Fig. 7

« Pour démontrer, on va utiliser Pythagore
Donc ton triangle APF' et F'FP sont rectangles et congrus. »

Ces élèves essaient de justifier leur démonstration en s'appuyant sur une construction auxiliaire pour un cas particulier d'un point *V* sur le cercle et le point *P* d'intersection, en affirmant que les deux triangles *APF'* et *F'FP* sont congrus. En ce qui concerne la démonstration comme telle, les élèves tentent d'utiliser la relation de Pythagore puisqu'ils ont déjà construit des triangles rectangles.

On ne voit que quelques essais de démonstrations pour cette question. Des élèves se sont limités à construire le grand cercle directeur et, à l'intérieur de celui-ci, un grand triangle divisé en deux triangles rectangles « isométriques » sans donner les raisons de ces constructions auxiliaires.

Production 2 (deux élèves dans une même équipe)



Ces élèves, **au lieu de démontrer** que la construction faite est bien une ellipse, **se sont limités à prouver** la propriété métrique de l'ellipse en prenant les mesures des segments entre les différents points *P* et les foyers *F* et *F'* et en les additionnant, mais avec l'intention de généraliser $m\overline{PF} + m\overline{PF'} = r = 2a$. On constate que ces élèves ne différencient pas les procédures de construction et les démarches exigées par une preuve et une démonstration.

De plus, nous avons constaté que l'exemplification qui a fait partie de la preuve est aussi utilisée comme une partie de la démonstration. Cela indique que les élèves sont toujours dans le domaine du connu et de la validation empirique. L'exemplification montre une cohérence mathématique en ce qui concerne un calcul numérique. Mais le souci de généralisation n'est pas présent : on n'explique pas pourquoi ça devrait donner 5 cm quelque soit le point *P* choisi. Bref, nous ne voyons pas une conceptualisation du fonctionnement de la démonstration.

Cas II : Dans ce deuxième cas, nous regroupons quatorze élèves qui n'ont pas réussi leur démonstration malgré une bonne construction du repère et une quasi-utilisation des données lors de la démonstration.

a) Figure de repère bien construite et données du problème quasi utilisées (neuf élèves dans quatre équipes)

Voici un exemple représentatif de la production d'une équipe (deux élèves) :

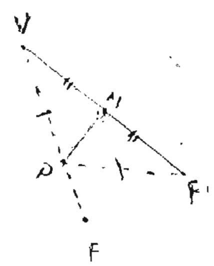


Fig. 8

On y retrouve 2 triangles semblables
(VMP et MPF')
car
M est le point milieu de VF'
VP + PF = le rayon soit VF
Les 2 côtés ont
les mêmes mesures

« On y retrouve 2 triangles semblables (VMP et MPF')

Car M est le point milieu de VF'

$m\overline{VP} + m\overline{PF} =$ le rayon soit VF

Les trois côtés ont les mêmes mesures. »

Ch : Pourquoi vous n'avez pas démontré que le triangle *VMP* et le triangle *MPF'* sont isométriques ? (On fait référence à la figure 8.)

Cindy : C'est pas nécessaire.

Ch : Pourquoi tu dis cela ?

Cindy : Parce qu'on le sait.

Ch : Je ne comprends pas.

Cindy : On l'a dit dans le graphique.

Ch : Dis-moi, avec tes propres mots ce qui pour toi est évident.

Cindy : *M* c'est le point milieu.

Ch : OK. Pourquoi *M* c'est le point milieu ?

Cindy : Parce que $\overline{MP}$ c'est la médiatrice de $\overline{VF'}$.

Ch : Mais pourquoi tu ne l'as pas écrit ?

Alexandra : Il est déjà écrit au début, dans l'énoncé.

Ch : Ok; je comprends. Vous n'avez pas écrit cette information parce qu'elle est déjà dans l'énoncé du problème.

Équipe : Ouais.

Cindy : En plus, elle est aussi dans la figure.

Ch : Avec vos propres mots, dites-moi pourquoi ces deux triangles sont isométriques.

Cindy : On a dit que *M* c'est le point milieu, faque $\overline{VM} = \overline{MF'}$

Ch : Continue.

Alexandra : Le segment *MP* c'est le côté commun.

Ch : Commun à quoi.

Alexandra : Aux deux triangles. (L'élève fait mention des triangles rectangles de la figure 8.)

Ch : Pourquoi *MP* est côté commun ?

Le chercheur veut faire ressortir des arguments mathématiques de la part des élèves pour démontrer que dans la construction faite, on retrouve deux triangles isométriques (*VMP* et *MPF'*).

Cindy : Parce que *MP*, c'est la médiatrice, forme un angle de 90 degrés ici pis là. Cet angle est situé entre ces deux côtés de même longueur. Donc ces deux triangles sont isométriques parce qu'ils ont cet angle de 90 degrés de même mesure situé entre ces deux côtés de même longueur.

Ch : Dis-moi une fois encore ce que tu viens de démontrer ?

Cindy : Deux triangles qui ont un angle congru entre des côtés homologues congrus sont isométriques, par CAC.

À la suite de cette discussion, nous avons pu remarquer que la non-utilisation de définitions comme celle de médiatrice et de point milieu relève déjà d'une difficulté pour la pratique du raisonnement déductif. Comme l'affirme Duval (1991, p. 233) : « [...] *Quand on regarde ce que recouvre l'activité de la démonstration dans les problèmes de géométrie on s'aperçoit que... la simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de cette pratique.* »

b) Réorganisation de la procédure de façon verticale (cinq élèves sur cinq équipes)

Voici un exemple représentatif de la production d'un élève :

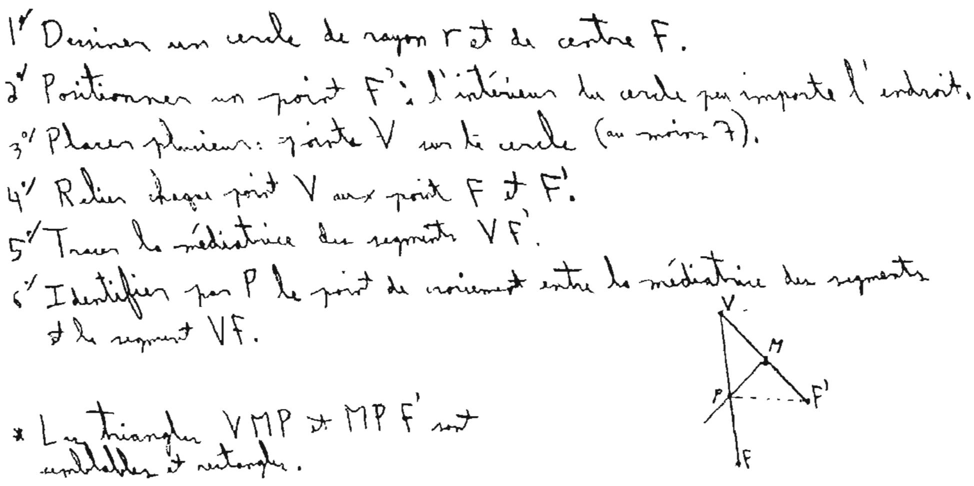


Fig. 9

Dans cette production représentative, cet élève n'a fait qu'écrire l'énoncé du problème et en a fait des hypothèses ou énoncés. On constate un essai de rédaction de démonstration : l'organisation verticale de l'énoncé du problème à la manière des

« hypothèses » et, à la fin, la « conclusion » : *les triangles VMP et MPF' sont semblables et rectangles.*

Les données du problème ne sont utilisées que pour la construction géométrique auxiliaire pour la démonstration (figure 9), mais non pour la démarche de démonstration elle-même.

Cas III : Embryon de démonstration (un élève)

Dans ce troisième cas, nous plaçons un élève qui, malgré qu'il ne soit pas arrivé à une démonstration que nous qualifions de réussie, a quand même produit une amorce de démonstration.

L'élève a bien construit une partie de la démonstration : la compréhension du problème, dont sa construction géométrique, le dessin et la visualisation des deux triangles congrus. Aussi, le langage mathématique utilisé est approprié et correspond avec ce que représente le registre graphique. Un autre aspect positif observé est l'intention de l'élève de suivre une procédure organisatrice déjà acquis sur les démonstrations : organisation verticale des pas à partir des hypothèses. Par contre, les propositions ne sont pas reliées entre elles. L'élève n'a fait que les mentionner symboliquement sans aller plus loin (Voir figure 10).

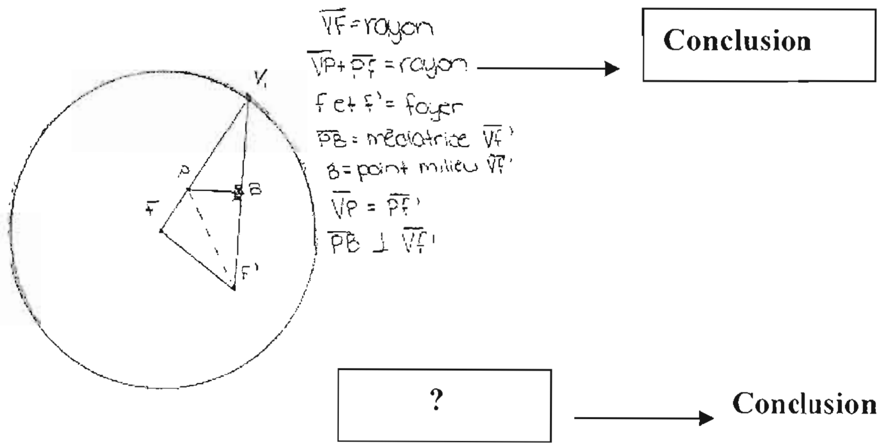


Fig. 10

Cette démarche fait référence à une théorie mathématique sur les triangles rectangles isométriques congrus. Toutefois, la congruence des deux triangles n'est pas démontrée. Aussi, la démarche présente une tentative d'organiser certains éléments ou propositions qui interviennent pendant la démonstration, mais sans expliquer les liens existants entre les données, et sans arriver à la conclusion qu'on voudrait voir, à savoir $d(P, F) + d(P, F') = r$. L'élément important, que $\overline{VP} = \overline{PF'}$, est bien identifié, mais sa justification n'est pas explicitement donnée, et on ne sait pas sur quel résultat l'élève se serait appuyé. « *Une démonstration consiste... en un enchaînement de pas de déduction ou inférences, chacune de structure ternaire, et où les propositions combinées prennent l'un parmi trois statuts opératoires possibles : propositions d'entrée ou prémisses, règle d'inférence ou énoncé-tiers et proposition inférée ou conclusion* [...] *les propositions alors inférées acquièrent la valeur épistémique théorique de nécessité et peuvent ensuite être « recyclées », soit comme nouvelle règle d'inférence* [...] *comme proposition d'entrée d'une inférence ainsi enchaînée à la précédente* » Tanguay (2004, p. 3).

Commentaire général

Nous pouvons constater qu'aucune équipe n'a réussi une démonstration pleinement satisfaisante. Cela est dû, selon nous, premièrement à la non-exploitation des données lors de l'élaboration des étapes qui permettent la construction de cette démonstration et deuxièmement, au fait que dans cet environnement (papier-crayon), les élèves ont trouvé cette partie de l'activité trop rigide, exigeante et inintéressante. Peut-être aurions-nous dû la formuler autrement.

Conclusion de l'activité

On a pu constater que, pour faire la vérification de leur construction géométrique, des élèves se sont basés sur la forme de leur dessin plutôt que sur les caractéristiques de l'ellipse. En effet, c'est en travaillant sur une des caractéristiques des ellipses, soit la présence de deux axes de symétrie, qu'on a pu faire réaliser aux élèves leur erreur. De plus, la présence d'un des foyers de l'ellipse à l'extérieur de leur dessin (équipe de William, Renaud et Benoît) n'a fait que renforcer la conviction selon laquelle les élèves se sont fiés à leur perception immédiate plutôt qu'aux caractéristiques connues de l'ellipse pour faire leurs vérifications.

– Nous avons constaté la présence d'une « rigidité géométrique » comme dans le cas de l'équipe formée par Lisa, Amélie et Annabelle, lorsqu'il leur a été demandé de visualiser et d'identifier la construction du lieu en dehors de certains contextes « standard » déjà travaillés dans la classe de mathématiques. Ce problème de construction et de visualisation a été résolu lorsqu'elles ont trouvé des dessins admissibles et familiers qui harmonisent les aspects de construction et de définition, comme ceux des polygones réguliers à sept côtés.

– On constate chez les élèves des difficultés concernant les connaissances mises en jeu et les démarches utilisées dans la résolution du problème de construction géométrique. Les heuristiques (c'est-à-dire des lectures, des périodes d'analyses et des expérimentations insuffisantes) sont insuffisantes, ou inappropriées au contexte de l'ellipse et à la démonstration de sa propriété métrique.

– Pour la majorité des élèves, la **validation** est synonyme de **constatation**. Nous avons en effet constaté que l'exemplification qui a fait partie de la preuve est utilisée par la majorité des élèves comme une partie de la démonstration. Les élèves sont toujours dans le domaine empirique où les règles et la conceptualisation du fonctionnement de la démonstration sont absentes.

– Malgré qu'une minorité d'élèves a essayé de construire une partie de la démonstration dans le sens de Duval — intention de suivre une démarche « verticale » formelle, utilisation des données, utilisation du symbolisme, etc. — cette minorité n'arrive pas à relier les propositions ni à comprendre la structure de la démonstration.

4.3 Analyse de l'activité : Les coniques avec l'aide de Cabri-Géomètre

Étant donné un cercle de centre F et de rayon arbitraire, soit F' un point à l'intérieur du cercle et V un point variable sur le cercle. On trace le segment $\overline{VF'}$ et la droite VF. On construit la médiatrice d de $\overline{VF'}$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice de $\overline{VF'}$ et de la droite VF. Quel est le lieu géométrique de P lorsque V varie sur le cercle ?

1a. Si on laisse fixe le point F' et qu'on fait varier le point V, déterminez quel est le lieu géométrique de P lorsque V parcourt le cercle.

1b. Une fois trouvé le lieu de points, trouvez trois positions de *P* pour trois positions de *V* sur le cercle.

Analyse des productions d'élèves

Les 24 élèves (la totalité des élèves) ont réussi la construction demandée après s'être vérifiés à l'aide de la question 1b.

Extrait d'une discussion entre une première équipe (trois élèves) et le chercheur

Ch : Est-ce que c'est normal que ça me donne un cercle ? (Le chercheur leur montre le dessin à l'écran, qui ressemble à celui d'un cercle.) Pourquoi ça donne un cercle ? Il faut le prouver !

Flore : C'est peut-être juste une ellipse qui ressemble à un cercle.

Ch : Je vais vous demander : montrez trois lieux de *P* pour trois points *V* que vous allez placer. Trois *P* pour trois *V* lorsqu'il se déplace surs le cercle.

Laura : Non, ça va marcher.

Flore : Je te l'ai dit que ça allait marcher !

Maude : Trois *V*, trois.

Flore : Faut que tu recommences, mais avec un autre point *V*. La droite est de *V* à *F* et le segment de *V* à *F'*.

Laura : Oh mon dieu, ça me donne un point sur mon ellipse. C'est étonnant !

Flore : C'est toujours nice.

Par cette construction, les élèves peuvent observer la notion d'équivalence logique qui caractérise une définition. Si l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, tout point qui satisfait cette propriété appartient à ce même lieu de points. Ensuite, il est possible de constater que ces élèves utilisent les données du problème afin de se vérifier. Finalement, l'expérimentation faite à l'aide du logiciel Cabri-Géomètre a permis une vérification de la part des élèves et une correction rapide de leurs erreurs. En plus, ce problème a généré des surprises chez les élèves à propos du résultat attendu et de leur prédiction.

Discussion d'une deuxième équipe (trois élèves)

Extrait d'une discussion entre les membres d'une équipe portant sur la vérification et la correction d'une erreur.

Vincent : Faque là, y faut que tu fasses ton point meilleur… « Nommer »… (L'élève suggère qu'on nomme le point P à partir de la commande « Nommer ».)

Marc : Ah OK, je comprends, y faut que je le trace avant.

Daniel : Il faut que tu… (mots incompréhensibles). C'est le point P que t'as tracé.

Marc : Ah. OK. Attends.

Marc : Hey pourquoi y bougent pas toutes…

Daniel : Heu non. Ça n'a pas rapport. Ah non; laisse-le là, il faut faire la médiane.

Vincent : La médiatrice du segment VF' ! Pis c'est le coin P, là.

Marc : Attends ! On va faire. Oui.

Vincent : Non.

Daniel : On le voit que ton *P* yé…

Marc : Il y a comme beaucoup de lignes, je trouve.

Marc : Attends, je pense que ce que j'ai fait, c'est une erreur.

Marc : Ça donne une ellipse, si je bouge celui-là, ça fait pas la même ellipse, pis si je bouge l'autre ça fait la même ellipse; ça veut dire que c'est ce coin-là qui est fucké.

Daniel : C'est quoi ton erreur ?

Marc : Je ne sais pas parce qu'il y a trop de lignes.

Vincent : Check Marc, mets les toutes de couleurs différentes.

Marc : Ouais, c'est ce que je me disais !

Vincent : Si tu mets tes points de couleurs différentes en guise de ligne, tu pourras repérer les lignes qui sont à partir de *VF'*.

Vincent : Y a une droite qui part de *V'* jusqu'à *F*, c'est ce qui fallait faire.

Vincent : Ah ! C'est ça que t'as fait, t'as pas fait ton point d'intersection au bon endroit, il aurait fallu que tu le fasses là.

Marc : Cette droite médiatrice-là et ce point-là.

Daniel : T'as peut-être un peu trop de lignes Marc.

Marc : Nommons ce point d'intersection-là. On va le nommer *P* pis là, ça devrait fonctionner. Si je me suis pas trompé, on va faire « Trace ». Là ça fonctionne ! Ça l'a fonctionné là !

Étant donné qu'il y avait deux ellipses au moment d'utiliser la commande « Trace », les élèves ont pu visualiser à l'écran leur erreur. Ils l'ont ensuite corrigée en s'appuyant sur une stratégie partagée par tous (communication et validation tout au long de l'activité). À partir de la visualisation, les élèves ont refait leur construction. Les élèves ont senti la nécessité d'argumenter en utilisant des notions ***mathématiques***. Toujours motivés par ce qu'ils voyaient à l'écran, ils sont finalement arrivés à une conclusion.

Nous avons constaté chez les élèves une rétro-action qui est, selon Hadas et Arcavis (2000, p. 27), induite par le logiciel, qui réagit à mesure : *« ... l'action de l'étudiant sera remise en question; telle une rétro-action... elle est plus efficace que celle induite par un professeur [...] parce qu'elle peut inclure une motivation pour recommencer à vérifier, à réviser la prédiction et peut motiver la nécessité d'une démonstration ».*

Extrait de la discussion d'une troisième équipe

Cette discussion est en lien avec la question 1b. Pour les besoins de cette discussion, nous avons retiré un élève de son groupe pour lui demander d'expliquer la procédure de construction.

Ch : Est-ce que tu peux m'expliquer ce que tu as fait exactement ?

Élève : Donc là au départ, veux-tu que j'explique toute la construction qu'on a faite du début ? Bon faque là. OK, ben on a tracé un cercle en mettant un foyer de nom *F*, après ça avec le foyer qui est ici, on a mis un point *F'* n'importe où dans le cercle qui plus tard va s'avérer être le deuxième foyer de l'ellipse qu'on va tracer. Après ça on a tracé un point *V* n'importe où sur le cercle, on a relié le point *V* au point *F*, on a fait une droite qui relie *V* au point *F*, heu tantôt c'était un segment, c'était *V* à *F'*, et là on a fait une droite de *V* à *F*. Ensuite, on a tracé une médiatrice qui passait dans le segment V à F' et cette médiatrice-là, quand elle passait à l'intersection de la droite VF, on a fait un point P, après ça on a fait bouger le point V comme je le fais ici, et ça a tracé une ellipse.

Heu si j'enlève l'ellipse, vous allez mieux voir, on voit qu'y a des points qui se tracent, ça fait une ellipse. On a répété l'opération trois fois en faisant trois points V différents comme je l'ai expliqué, puisqu'on garde les mêmes foyers avec le même cercle (l'élève fait référence au cercle directeur), ça fait toujours la même ellipse qui se trace peu importe on place où notre point V et notre point P.

Le discours argumentatif trouvé ici est pertinent, car l'élève se questionne et suit les traces des conjectures établies lors de la construction par le groupe. *« La fonction d'explication reste fondamentale pour les démonstrations, parce qu'elle garantit justement le support nécessaire à la compréhension... »* Mariotti (2001, p. 5).

Conclusions liées aux productions sur les coniques avec Cabri

Puisque ce problème appartient à la catégorie des problèmes ouverts, nous espérions observer que les élèves organisent leur démarche, mettent en œuvre une solution originale, pour en mesurer l'efficacité. Aussi, que les élèves argumentent à propos de leur solution ou de celle de leur équipe.

Dans toutes les situations, nous avons constaté que les élèves dominent l'environnement et utilisent une heuristique pour cibler l'erreur de construction (revenir en arrière et utiliser les données du problème, utiliser des couleurs pour les droites, les différents segments et les médiatrices, nommer les points, revenir sur leurs pas, effacer une construction et la refaire, etc.)

Finalement, le logiciel Cabri-Géomètre a permis aux élèves d'énoncer une possible cause du problème de construction de l'ellipse (« élaboration d'une conjecture » de solution), et l'argumentation dans un langage mathématique : la vérification des différents points P entre les droites VF et les médiatrices des différents segments VF'. L'utilisation de Cabri-Géomètre a contribué à la découverte par les élèves des propriétés, des relations et des stratégies lors du processus de résolution de problèmes.

Question 2. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une ellipse ?

Pour la preuve, les élèves regardent la forme du lieu, l'emplacement des foyers, la forme de l'équation trouvée à l'aide de la commande « Coord. ou équation » et la formule $d(P, F) + d(P, F') = 2a = r$.

Cas I : Nous regroupons dans ce cas 21 élèves sur huit groupes.

La distance entre PF et PF' additionnée est toujours la même peut importe l'emplacement de P et cette valeur correspond au rayon du cercle

PF + PF' = rayon

son équation est :

$3,17x^2 - 0,52xy \pm 1,628y^2 \pm 10x - 2,71y - 1,42 = 0$

+ ou −

« La distance entre PF et PF' additionnée est toujours la même, peu importe l'emplacement de P et cette valeur correspond au rayon du cercle. »

Sept équipes sur huit ont vérifié la propriété métrique de l'ellipse (d(P, F) + d(P, F') = $2a$) pour différents points P et ce, en utilisant la commande « Distance ou longueur ». Ils ont constaté, à plusieurs reprises, que le lieu des points trouvés était bien celui d'une ellipse. Quatre de ces équipes, en plus d'avoir vérifié la propriété métrique de l'ellipse pour différents points P, ont trouvé l'équation générale (de la forme : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$) avec la commande « Coord. et équation ».

Ces élèves ont donc pu comparer la forme du lieu obtenu (l'ellipse), les termes A et C (de même signe) de l'équation obtenue à l'aide de Cabri avec l'équation générale.

Extrait d'une discussion entre le chercheur et une équipe (trois élèves)

Ch : Qu'est-ce qu'il faut faire ?

Alex : T'écris l'équation pis tu checkes sa forme, c'est ça, là...

Tommy : J'ai dit que dans le fond ce qui fallait faire pour s'assurer que c'est une ellipse, on peut regarder la forme de l'ellipse pis la forme de l'équation qu'on a trouvée avec Cabri heu, pis on peut regarder avec l'emplacement des foyers aussi. On constate que les coefficients A et C de notre ellipse ont le même signe. Ces deux coefficients peuvent être positifs ou négatifs. Pis là, j'ai écrit qu'on peut vérifier avec la formule en regardant la distance entre les points P et les foyers, si on additionne la distance PF et la distance PF' c'est censé nous donner la même distance que si on prend le point P' par exemple, $P'F$ plus $P'F'$. C'est censé égaler la même chose.

Alex : Regarde si cette équation-là fonctionne. C'est parce qu'on a la forme d'une ellipse.

Ch : D'accord, c'est parfait, continuez.

Alex : C'est un rayon avec un centre F et un point F'. En fait, j'ai fait la même affaire que Marc a fait sur son ordi (en se référant à une autre équipe). Vu que c'est une ellipse, Mathieu, tu peux juste faire le graphique ?

Mathieu : Je prouve en le faisant. Je le fais avec un autre point P, exactement la même chose…

Pour répondre à cette question, ces élèves se basent, premièrement, sur la forme de la figure et l'emplacement des foyers; deuxièmement, ils trouvent l'équation du lieu avec l'aide de Cabri et la comparent avec la formule de base des coniques, où ils constatent que les coefficients A et C sont de même signe. Troisièmement, les élèves appliquent la propriété métrique avec la formule.

Cas II : Nous regroupons dans ce cas une équipe de trois élèves.

Distance F' au cercle = Distance F au cercle
0,78 cm = 0,78cm

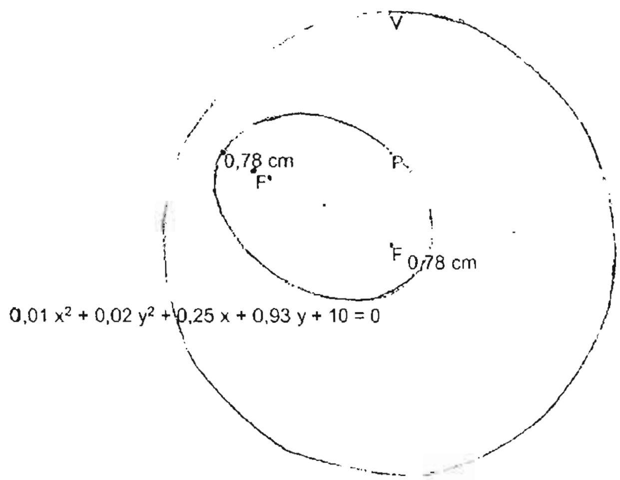


Fig. 11

Ce groupe, en plus de trouver l'équation du lieu, fait référence à la mesure de la distance entre chaque foyer et « *le cercle* » (au lieu de dire cercle, ils voulaient dire distance à l'ellipse, soit la distance de chaque foyer avec le point le plus proche de l'ellipse). Pour ces élèves, la distance des foyers à l'ellipse est toujours la même pour chaque foyer. Ce groupe ne s'intéresse pas à la vérification de la propriété métrique de l'ellipse : $d(P, F) + d(P, F') = 2a$.

Extrait de la discussion entre le chercheur et le groupe mentionné (un élève a été absent lors de cette entrevue)

Ch : Si tu n'avais pas l'équation du lieu, comment est-ce qu'on ferait pour savoir que ce lieu correspond bien à celui d'une ellipse ?

Laurie : Quoi ?

Ch : Admettons que vous ne savez pas que ce lieu correspond à celui d'une ellipse et qu'on n'a pas l'équation de ce lieu, qui m'indique que c'est une ellipse, d'accord ? Prouvez-nous que ce lieu correspond bien à celui d'une ellipse.

Laurie : Avec la commande « Coord. et équation », on peut trouver les coordonnées pour chaque foyer.

Ch : OK, fais-le.

(L'élève trouve les coordonnées pour le point *P* et chaque foyer *F* et *F'*)

Ch : Prouve que ce lieu correspond bien à celui d'une ellipse.

Justine : Avec la propriété métrique ?

Ch : Demande à tes partenaires.

(Les élèves se consultent entre eux).

Justine : On utilise la propriété métrique. On calcule avec la commande « Distance et longueur ».

Ch : Dis-moi ce que tu vas calculer et écris-le.

Ici, le chercheur visait à inciter les élèves à utiliser la propriété métrique de l'ellipse afin de prouver que le lieu construit est bien une ellipse.

Laurie : On va avoir besoin de plus de feuilles.

Justine : Ici, ça peut être dans une feuille à part.

Laurie : Tiens Justine, fais la démarche ici.

Justine : Merci. $d(P, F) + d(P, F') = 2a = r$. L'addition des largeurs des deux distances *PF* et *PF'* ça donne 5,08 cm. Si je prends un autre point *P*, admettons ici, avec Cabri (ce point est P(-2,14; 0,14); l'élève a calculé avec Cabri les distances $d(P, F)$ et $d(P, F')$: voir figure 12), ça donne aussi la même distance égale à 5,08 et ça prouve que c'est une ellipse, peu importe l'emplacement de *P*.

Afin de démontrer leur affirmation, les élèves déplacent le point V sur le cercle. On peut alors constater que la mesure de $\overline{PF}$ et celle de $\overline{PF'}$ changent, tandis que la somme de ces deux mesures reste identique (Voir figure 12).

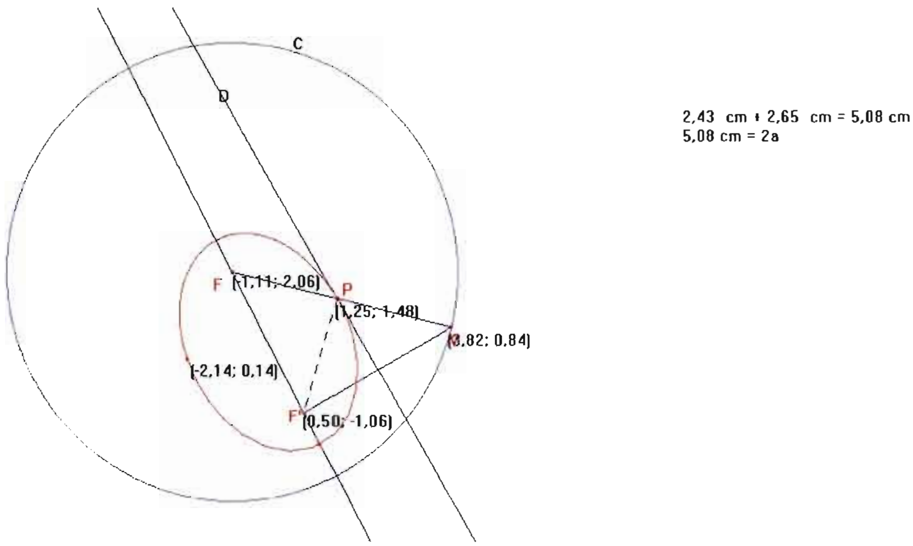


Fig. 12

Ch : Est-ce qu'il y a une autre façon de calculer ces distances-là ?

Élèves : On n'est pas sûres.

Ch : Avec les coordonnées de chaque point, par exemple ?

En posant cette question, on espérait dépasser l'idée intuitive de distance qu'on a travaillé dans l'environnement papier-crayon et qui pourrait perdurer dans cette question, c'est-à-dire l'idée de longueur qui sépare deux points que l'on puisse calculer avec la règle à mesurer ou simplement à l'aide de la commande « Distance ou longueur ». Pour un traitement plus algébrique : étant donné deux points du plan

$P(x_1, y_1)$ et $F(x_2, y_2)$, la distance euclidienne entre ces deux points est donnée par $d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Laurie : Ouais, mais c'est plus long et disons que c'est aussi un peu compliqué.

Ch : Pourquoi c'est plus long et qu'est-ce qu'il y a de compliqué ?

Laurie : Regardez, faut trouver les coordonnées de chaque point, prendre la formule de distance entre deux points, il a des soustractions, il faut après élever au carré et finalement, il y a des racines carrées (l'élève fait référence à la formule).

Laurie : C'est vraiment long.

Ch : Vérifiez-le pour les mêmes points *P*, que vous venez d'utiliser. Écris toute la démarche sur ces feuilles s'il-te-plaît.

Justine : Avec le point *P*, par exemple, $P(1{,}25;\ 1{,}48)$; le point *F*, $F(-1{,}11;\ 2{,}06)$ et le point *F'*, $F'(0{,}50;\ -1{,}06)$ et l'autre point *P* qui vaut $(-2{,}14;\ 0{,}14)$.

$d(P, \mathrm{F}) + d(P, F') = 2a = r$.

Avec la formule de la distance, on a : $d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

a) $d(P, F) = \sqrt{((1{,}25) - (-1{,}11))^2 + ((1{,}48 - 2{,}06))^2}$

$d(P, F) = \sqrt{(2{,}36)^2 + (0{,}34)^2} \rightarrow \sqrt{5{,}57 + 2{,}50} = \sqrt{5{,}91} = 2{,}43$

b) $d(P, F') = \sqrt{((1{,}25) - (0{,}50))^2 + ((1{,}48 - (-1{,}06))^2}$

$d(P, F') = \sqrt{(0{,}75)^2 + (2{,}54)^2}$

$d(P, F') = \sqrt{0,56 + 6,45} = \sqrt{7,01} = 2,65$

$d(P, F) + d(P, F') = 2,43+2,65 = 5,08$ qui est égal à $2a$.

C'est la même réponse en utilisant *distance entre deux points* avec Cabri, mais comme je vous avais dit, c'est moins long et on ne se trompe pas.

Même si les élèves de ce groupe savent calculer la distance entre deux points, ils considèrent que les calculs sont longs à faire et qu'une erreur peut survenir facilement. Ils font plus confiance au logiciel qu'en eux-mêmes. Cette remarque est valable pour tous les élèves de la classe.

Maintenant, on fait la même chose pour l'autre point P(-2,14; 0,14) et on fait les calculs… (les élèves ont fait la démarche sur papier et ils ont fait les calculs avec la calculatrice de Cabri et la leur; il y a eu des corrections et discussions entre eux pour les résultats) et ça donne la même réponse, 5,08.

En géométrie analytique, la distance entre deux points d'une droite (dans un plan) se trouve en faisant : $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Par contre, les élèves ont tendance à se rapporter à une seule dimension en allant mesurer la longueur d'un segment reliant deux points. Selon eux, la distance entre deux points du plan, « c'est **toujours** long à calculer et on peut se tromper ». C'est donc une économie de temps et de calculs que de rester dans une dimension.

Conclusions ayant trait aux productions liées à la question 2

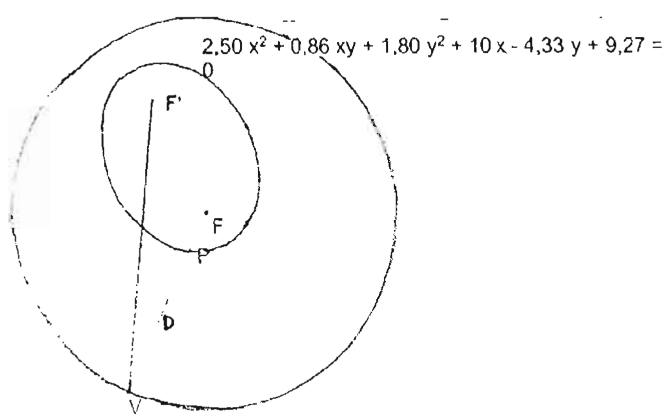
Afin de répondre à cette question, tous les groupes ont utilisé l'outil *Distance entre deux points*. Ce calcul numérique, qui est une part importante du travail, peut rester dans le domaine *« unidimensionnel »* et donner l'impression que les points se trouvent sur un axe plutôt que de se trouver dans un plan cartésien. Ainsi, Cabri-Géomètre pourrait nuire au passage de la géométrie de la mesure directe à celle de la géométrie analytique. C'est donc à l'enseignant de bâtir soigneusement son activité de façon à utiliser le meilleur de Cabri-Géomètre.

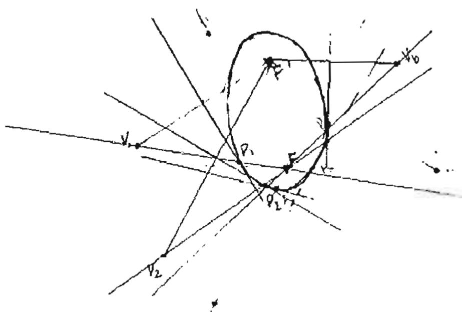
QUESTION 3 : Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse.

Cas I : L'analyse nous a permis de regrouper dans ce cas 18 élèves répartis dans huit équipes. Nous nous attardons maintenant sur les deux productions typiques de ces élèves.

Production 1 (quinze élèves)

Ces élèves ne font qu'imprimer le lieu trouvé, « l'ellipse », avec Cabri-Géomètre et le comparent avec la construction faite avec papier-crayon.



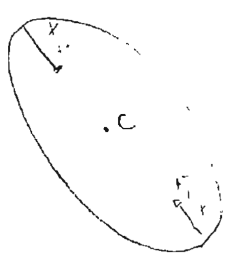


Pour ces élèves, la démonstration est évidente, car ils l'ont déjà constatée dans la question précédente. Ils ne font alors qu'imprimer la construction faite avec Cabri-Géomètre et la comparer avec celle faite avec papier-crayon. Ils savent que la démonstration est une généralisation. C'est pourquoi ils utilisent les lettres *V*, *P*, *F* et *F'*.

Production 2 (trois élèves)

Pour ce groupe, la démonstration consiste à généraliser une « propriété des ellipses » en remplaçant les nombres par des lettres.

la distance des foyers au sommet de l'ellipse est toujours
la même pour chaque foyer



« La distance des foyers au sommet de l'ellipse est toujours la même pour chaque foyer. »

Ch : Dans cette question, la troisième, je vous demande une démonstration, mais j'aimerais savoir pourquoi vous insistez sur la même réponse qu'on a déjà travaillée dans la question 2.

Laurie : Peu importe où *V* se situe, les foyers vont toujours être les mêmes, *F* et *F'*.

Ch : Mais où est notre point *V* avec lequel vous travaillez depuis la première activité et le point *P* qui est l'intersection entre la médiatrice du segment *VF'* et la droite *VF* ?

Justine : On a marqué juste une nouvelle propriété.

Ch : Pourquoi propriété ?

Kloé : La distance des foyers de l'ellipse est toujours à la même distance de ses sommets correspondants.

Ch : Cela est une propriété métrique des ellipses ou une des conditions qui la caractérisent ?

Laurie : Disons que c'est pas une propriété.

Ch : C'est quoi la propriété dont nous parlons ?

Laurie : $d(P, F) + d(P, F') = 2a$.

Ch : C'est quoi a dans cette expression ?

Justine : $2a$ cela veut dire la valeur du rayon du cercle. C'est-à-dire l'addition des deux demi-axes.

Ch : OK, avec tout ce que vous venez d'identifier dans votre ellipse, comment démontrer qu'il s'agit d'une ellipse ?

Laurie : On peut utiliser la propriété métrique que l'on a utilisée dans la première activité, d(P, F) + d(P, F') = $2a$. On n'a qu'à trouver les coordonnés des foyers et un point P sur le lieu.

Ch : Et cela est une démonstration pour vous ?

Élèves : Ouais.

Ch : Mais, si l'on a déjà prouvé depuis l'activité sans Cabri et dans la question 2 de cette activité (on fait référence à l'activité 2) que c'est une ellipse, pourquoi on va le refaire une fois encore ?

Justine : C'est ça qu'on se demandait. Pourquoi démontrer que c'est une ellipse si on l'a déjà prouvé avec Cabri et avec la propriété métrique ? On a fait ces calculs qui étaient longs.

Ch : Donc, ce n'est pas nécessaire de faire la démonstration ?

Élèves : Non.

Puisque les élèves sont convaincus d'avoir déjà démontré que leur construction était bien une ellipse, ils ne savent pas quoi répondre à la question 3. Ils reprennent donc leur construction en changeant les nombres par des lettres. Selon eux, en réutilisant le cas particulier et en y mettant des lettres, cela constitue une démonstration.

Les notions de preuve et de démonstration sont traitées et vues, pour la plupart des élèves, de la même façon. Cela pourrait être intensifié *« ... par la similitude linguistique de ces deux formes de raisonnement, notamment par le fait qu'elles emploient les mêmes connecteurs, malgré qu'ils y aient des fonctions différentes »* Tanguay (2004, p. 6).

Cas II : L'analyse nous a permis de regrouper ici une équipe de trois élèves sur les huit équipes. Ces élèves ont fait quelques affirmations sans toutefois les justifier.

Nous avons découvert que le $\triangle$ VPF' est divisé en 2 Triangles
Rectangle isométriques.
Ainsi, les mesures des segments $\overline{VP}$ et $\overline{PF'}$ sont Toujours congrues et
cela peu importe le lieu de V.

« Nous avons découvert que le ΔVPF' est divisé en 2 triangles rectangles isométriques. Ainsi, les mesures des segments $\overline{VP}$ et $\overline{PF'}$ sont toujours congrues et cela peu importe le lieu de V. »

Comme dans les cas précédents, cette équipe a utilisé un symbolisme mathématique exigé par le processus de démonstration. Par contre, leurs affirmations ne sont pas justifiées et les données du problème n'interviennent pas dans le calcul propositionnel afin d'arriver à la conclusion.

Cas III : L'analyse nous a permis de regrouper ici une équipe de trois élèves sur les huit équipes. Les élèves font, ici, une tentative de démonstration. Par contre, celle-ci est mal structurée.

$PF' = FP + VF$ (Rayon du cercle).

$\overline{VF} = \overline{FP} = \overline{VP} = \overline{PF'}$

VF (Rayon) $= \overline{FP} + \overline{VP}$

$VF = \overline{FP} + \overline{PF'}$

$\triangle VPM = \triangle PMF'$ Parce que : $VM = MF$ M point milieu

$\overline{PM} = PM$: côté commun

$\angle \cong 90° = 90°$

L'équipe fait preuve d'une certaine structure dans sa démonstration. Ce qui démontre une compréhension partielle du problème. En effet, les membres de l'équipe ont été capables de repérer les différentes conjectures essentielles à la construction de la démonstration (Mariotti, 2001).

Extrait d'une discussion entre l'équipe et le chercheur

Ch : Qu'est-ce qu'il faut démontrer dans cette question ?

Flore : On est sûrs que ce lieu est une ellipse; nous l'avons déjà prouvé à plusieurs reprises; donc, on n'a qu'à démontrer que ces deux triangles, qu'on a ici, sont des triangles rectangles congrus. (L'élève fait référence à la figure 13).

Ch : Quels triangles ?

Flore : Les triangles *VMP* et *PMF'*.

On voit ici une première conjecture : les triangles *VMP* et *PMF'* sont des triangles rectangles congrus.

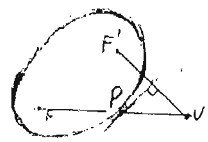


Fig. 13

Ch : Je ne les vois pas.

Flore : Ouais, c'est vrai; mais regardez, ils sont là (l'étudiante les signale, voir figure 13). Bon, puis-je utiliser Cabri ?

Ch : Oui. (Flore utilise les données du problème et trouve le lieu nommé, l'ellipse, et montre les deux triangles, *VMP* et *PMF'*)

Ch : D'accord. Mais pourquoi démontrer que ces deux triangles sont des triangles rectangles congrus; ça va me servir à quoi ?

Maude : Check, si nous démontrons que ces deux triangles-là sont des rectangles congrus, simplement on démontre que la distance de côté $\overline{F'P}$ est égale à ce côté $\overline{PV}$, et on va s'en servir pour affirmer que $\overline{VF} = \overline{FP} + \overline{VP}$.

On voit une deuxième conjecture : si le côté $\overline{PV}$ est congru avec $\overline{F'P}$, alors $r = m\overline{FP} + m\overline{F'P}$, où r est le rayon du cercle. On constate une continuité du point de vue du contenu entre le processus argumentatif de production des deux conjectures et la démonstration de celles-ci, le tout dans l'environnement Cabri-Géomètre.

Ch : D'accord ! Répétez-moi, depuis le début ce que vous voulez démontrer.

Flore : Parle, toi, Laura.

Laura : OK; laissez-moi voir les feuilles (l'élève demande de voir les réponses écrites de son équipe). On voit ici qu'on a écrit $m\overline{FP}$ + $m\overline{PV}$= rayon du cercle. Si l'on remplace $\overline{PV}$ par $\overline{PF'}$, les deux côtés sont tous les deux congrus parce que les deux triangles sont des triangles rectangles congrus (l'élève fait référence au rayon du cercle $\overline{FP}$ + $\overline{VP}$).

Ch : Attends une minute, c'est cela qu'on va démontrer n'est-ce pas ?

Laura : Ouais.

Flore : On l'a écrit ici, regardez !

Ch : Mais expliquez-moi, pour que je puisse comprendre, s'il-vous-plaît.

Flore : Attends, on va démontrer que le rayon du cercle $r = m\overline{FP} + m\overline{PF'}$; autrement dit, on va démontrer que $d(F, P) + d(P, F') = r = 2a$.

Ch : Continue.

Flore : C'est pour cela qu'on a démontré que ces deux triangles-là sont des triangles semblables, parce que les côtés $\overline{PV}$ est égale à $\overline{F'P}$. C'est tout.

Le discours est en relation avec la propriété métrique de l'ellipse. L'objectif du raisonnement est plus clair. Cette équipe sait où elle s'en va. Elle affirme que ce qui est à démontrer est $r = m\overline{FP} + m\overline{PF'}$. Autrement dit, ce qu'ils veulent démontrer est la propriété métrique de l'ellipse, mais ils ne donnent pas d'importance au processus de démonstration dans ses détails car pour elles, il est évident que cette figure est une ellipse.

Ch : Mais, pourquoi cet angle est rectangle ?

Flore : Parce que $\overline{PM}$ est le côté commun… On fait « Mesure d'angle », et voilà, ça vaut 90^0 (l'élève utilise la commande : « Mesure d'angle » avec Cabri).

Maude : Oui, $\overline{PM}$ est la médiatrice du segment $\overline{VF'}$; alors $\overline{PM}$, cela veut dire que $\overline{PM}$ est perpendiculaire à $\overline{VF'}$ et fait avec lui un angle de 90°. Après, on a ici ces côtés $\overline{VM} = \overline{MF'}$ parce que M est le point milieu entre les deux. Donc les triangles sont rectangles semblables; et voilà ce qu'on voulait démontrer.

Initialement, les élèves avaient posé une conjecture (les triangles *VMP* et *PMF'* sont des triangles rectangles congrus). Mais grâce à la médiation de Cabri, il a été possible de constater la construction complète de la démonstration par ces élèves, dans le sens de Mariotti (utilisation de définitions et de théorèmes).

« Ce qui rend Cabri particulièrement intéressant… c'est le fait que le savoir incorporé est en parfaite adéquation avec la théorie géométrique : […] *c'est le savoir géométrique, dans ses assises théoriques, qui est incorporé dans Cabri et, comme tel, fournit un instrument de médiation complexe mais non moins puissant pour la signification de la théorie »* Mariotti (2001, p. 15).

Conclusion ayant trait aux productions liées à la question 3

La majorité des équipes croyant avoir déjà effectué la démonstration de la propriété métrique de l'ellipse et ne voyaient pas la nécessité d'aller plus loin dans le raisonnement. Les résultats leur semblaient évidents, car ils les avaient obtenus par constructions géométriques, que ce soit par l'intermédiaire du papier-crayon ou de Cabri-Géomètre.

Les équipes qui ont réussi la construction de la démonstration ont été obligées tout d'abord de comprendre le problème, ce qui implique un travail de lecture et d'écriture : *« Dans le cas d'une résolution en classe, la dévolution du problème à la classe, c'est-à-dire sa prise ne charge par la classe motivée par la lecture de l'énoncé est un facteur important de réussite »* (Cazzaro et al., 2001, p. 148).

Deuxièmement, un travail de dépassement de ce premier stade de compréhension va se faire. Il s'agit de l'organisation déductive, discriminée par la valeur épistémique théorique, ce que Tanguay (2004, p. 6) explique comme suit :

« ... parce que la structure globale repose sur la variabilité du statut opératoire des propositions. Or, cette variabilité ne sera appréhendée par l'élève que s'il parvient à se décentrer du contenu des propositions, à refouler tantôt la valeur épistémique sémantique, tantôt la valeur de vérité [...] *»*

En plus de la démonstration, les élèves ont dû s'exprimer oralement en utilisant un langage mathématique qui fait référence à des théorèmes, à des propriétés et à des définitions. Ce langage n'est pas si évident car il implique l'utilisation de données (médiatrice d'un segment) qui caractérisent la figure et qui, au début, ne semblaient pas être importantes pour la construction de la démonstration : « *... pour donner son plein rôle à la valeur épistémique théorique, celle qui est associée aux statuts d'axiome, de définition, de conjecture, de théorème, d'hypothèse; ce rôle étant de discriminer celles parmi les propositions qui peuvent être utilisées comme prémisses, de celles qui peuvent l'être comme règles d'inférences ou comme propositions inférées »* Tanguay (2004, p.6).

Plusieurs éléments sont fondamentaux dans la construction de la démonstration. Premièrement, les élèves doivent comprendre qu'afin de démontrer que le lieu trouvé correspond à celui d'une ellipse, ils devront utiliser sa propriété métrique :

$$\mathrm{d}(F, P) + \mathrm{d}(P, F') = r = 2a.$$

Le deuxième élément permettant la construction de la démonstration est la compréhension, par les élèves, de ce qu'ils voient à l'écran et qui est intimement lié à la construction graphique. Par contre, ces derniers, désirant seulement démontrer que les deux triangles sont des triangles congrus, oublient ce que l'on demande depuis la question 1 ainsi que la continuité retrouvée dans l'activité.

ÉNONCÉ	QUELQUES RÉPONSES	JUSTIFICATIONS
4. Si l'on rapproche *F'* du cercle jusqu'à le faire coïncider avec un point du cercle, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?	**24 élèves** 1. L'ellipse s'étire parce que les foyers s'éloignent. 2. Ils vont être des points sur le cercle. 3. L'ellipse disparaît; il n'y a pas de conique. 4. Le lieu de *P* va tendre vers le centre du cercle. Ainsi, l'ellipse disparaît lorsque le second foyer est sur le grand cercle.	Les élèves utilisent Cabri pour affirmer que : « *avec Cabri on voit que si F' tend vers le cercle, l'ellipse s'étire.* »
5a. Si *F'* s'approche indéfiniment de *F*, vers quoi va tendre le lieu de *P*.	**15 élèves** 1. Vers un cercle, parce que les deux foyers sont un par-dessus l'autre. 2. L'ellipse se transforme de plus en plus en cercle, car les foyers sont trop près pour former une belle ellipse.	– Ellipse : $X^2 + Y^2 - XY + X + Y + 1 = 0$ – Équation générale : $AX^2 + CXY + BY^2 + DX + EY + F = 0$. – Cercle : $X^2 + Y^2 + X + Y + 1 = 0 \rightarrow X^2 + Y^2 + AX + BY + C = 0$.
	9 élèves Vers le milieu, cela fait un cercle.	Cela va donner un cercle. Les distances $\overline{PF}$ et $\overline{PF'}$ deviennent toutes deux égales au rayon du cercle.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">5b. Qu'arrive-t-il à l'équation de l'ellipse ?</td>
<td rowspan="3">18 élèves
Elle se transforme en équation du cercle, parce que le lieu de P est rendu un cercle.</td>
<td>– Équation de l'ellipse : $2{,}54x^2 + 0{,}45xy + 0{,}31y^2 + 10x + 20y + 8{,}53 = 0$
– Équation du cercle : $2{,}90x^2 + 2{,}90y^2 + 10x + 6{,}11y + 4{,}54 = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>« La différence est qu'il n'y a pas de XY dans l'équation du cercle (XY = 0). A = B. »</td>
</tr>
<tr>
<td>« La variable XY disparaît, car les deux foyers sont désormais sur le même axe. De plus les coefficients des variables X^2 et Y^2 sont identiques. »</td>
</tr>
<tr>
<td>6 élèves
L'équation change pour celle du cercle.</td>
<td>Il n'y a pas de justification ou d'explication.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">6. Si l'on déplace F' en dehors du cercle, explique ce que devient le lieu de P; lors du déplacement de V sur le cercle. Observe plusieurs écrans saisis à différents moments.</td>
<td rowspan="2">24 élèves
Le lieu des points devient une hyperbole, F et F' deviennent les deux foyers.</td>
<td>22 élèves répondent qu'à un moment donné, les points P disparaissent et se transforment en hyperbole.</td>
</tr>
<tr>
<td>2 élèves affirment que le lieu est une hyperbole, mais il n'y a pas de justification ou explication.</td>
</tr>
</table>

7. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une hyperbole ?	**21 élèves** 1. Dans l'équation, les Y deviennent négatifs et selon la forme de l'équation de base, cela est nécessairement une hyperbole. 2. F' dans le cercle : $0{,}50x^2 + 0{,}26xy + 0{,}37y^2 + 4{,}21x - 0{,}90y + 10 = 0$; F' en dehors du cercle : $0{,}50x^2 - 3{,}89xy - 1{,}24y^2 + 0{,}72x - 6y - 10 = 0$. On peut donc conclure que c'est bien une hyperbole.	– Un groupe (3 élèves) dit que les points F et F' deviennent les deux foyers des paraboles distinctes. – 18 élèves donnent des exemples généraux sur l'équation de l'hyperbole.
	3 élèves *« Le Y^2 et Y dans l'équation deviennent négatifs. Les deux coefficients de X^2 et Y^2 sont de signes contraires. On peut trouver les asymptotes. L'équation du lieu trouvé avec Cabri est celle d'une hyperbole; F et F' sont les foyers de l'hyperbole ».*	Les élèves donnent la définition d'asymptote : *« un asymptote est la droite médiatrice du segment VF' - lorsque celle-ci (la médiatrice) est parallèle à la droite passant par VF, il n'y a donc pas de point P. C'est donc l'asymptote. Les coefficients A et C dans l'équation générale de base sont obligatoirement de signes contraires ».*
8. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une hyperbole.	Pour la démonstration, les élèves construisent à main levée ou avec Cabri une hyperbole. on y voit les deux foyers F et F', et les élèves trouvent son équation.	

Questions 4 et 5 : Effet de *F'* sur l'ellipse lorsqu'il est déplacé à l'intérieur du cercle

4. Si l'on rapproche *F'* du cercle, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?

Premièrement, tous les élèves affirment que l'ellipse s'étire ou s'allonge parce que les foyers s'éloignent. Deuxièmement, ils constatent tous que l'ellipse disparaît (il n'y a pas de conique) lorsque le second foyer *F'* est sur le grand cercle.

Extraits d'une discussion entre le chercheur et une des équipes

Ch : Si l'on approche *F'* du cercle, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?

Karen : Dans le fond c'est assez simple, c'est juste que quand tu rapproches *F'* du cercle, ben l'ellipse elle s'allonge.

Ch : Elle quoi ?

Karen : Parce que dans le fond, il faut tout le temps que ce soit la même distance entre l'ellipse pis les foyers (l'élève fait référence aux différents points *P* de l'ellipse et les foyers *F* et *F'*). Fais que quand tu éloignes les foyers, ben ton ellipse elle s'allonge. Ça fait le rayon, pis quand a sort ça donne une hyperbole.

Noémie : Ben nous quand on a fait ça, ben pour nous l'ellipse est disparue.

Ch : Mais *F'* est arrivé où ?

Karen : Sur le cercle.

Ch : Au niveau mathématique, qu'arrive-t-il ? Comment expliquez-vous cette situation en utilisant un langage plus mathématique, en utilisant par exemple des arguments mathématiques ?

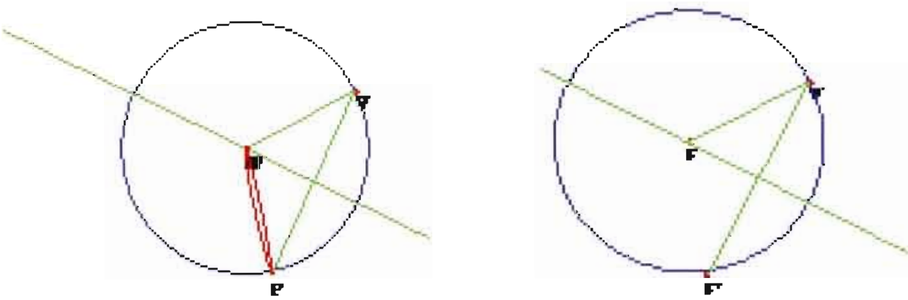
Karen : Dans le fond c'est assez simple, c'est juste que quand tu rapproches F' du cercle... Ben c'est ça, en mettant le foyer sur le cercle, ben ton point P c'est la jonction entre ta médiatrice pis ta droite VF, faque ça, ça donne direct que ça, ça donne que il coïncide avec le point F.

L'élève pose une conjecture : lorsque le point F' est sur le cercle, le point P coïncide avec le point F.

Karen : En mettant le point F' directement sur le cercle [...] la jonction entre la médiatrice et la droite FV arrive directement sur F. P, où est F, c'est ton centre du cercle, faque même si tu fais tourner, P bouge pas, donc c'est normal qu'il y ait rien si P y bouge pas. C'est une figure géométrique stable, c'est un point. Il n'y a pas de conique.

Ce que l'élève tente de dire ici, c'est que lorsqu'on déplace V, l'intersection entre la médiatrice de $F'V$ et le segment VF est toujours le point F, qui est le centre du cercle. Cela implique que le lieu du point P sera le point F. Alors, il n'y a pas de conique.

L'environnement Cabri-Géomètre fait ressortir des arguments mathématiques chez les élèves et les fait réfléchir sur l'existence d'une cohérence entre ces notions et leurs représentations géométriques : *rien n'est arbitraire.* « *Cela signifie que la stabilité d'une construction sous l'effet de l'enchaînement correspond au fait que dans le cadre de la théorie, il existe un Théorème qui valide la construction exécutée. La justification, c'est-à-dire ce qui explique le « pourquoi » d'un phénomène parfaitement reconnaissable sur l'écran, peut être donné en termes de théorie géométrique, celle-là même à laquelle les commandes font référence* » (Mariotti, 2001, p. 16). Par contre, les élèves ont de la difficulté à expliquer pourquoi la construction donnée est stable par déplacement de V : les justifications données, qui devraient être dans une perspective plus théorique, ne sont pas présentes. En effet, les élèves ne voient pas la nécessité de valider leur raisonnement par des théorèmes puisque le résultat est évident pour eux. « *Le problème crucial reste cependant celui d'établir un lien explicite entre un cadre phénoménologique, Cabri et ses figures, et une théorie, la géométrie* » (Mariotti 2001, p. 17).



<u>5a. Si *F'* s'approche indéfiniment de *F*, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?</u>

Tous les élèves répondent que si *F'* s'approche indéfiniment de *F*, le lieu de *P* va tendre vers un cercle. Quinze élèves justifient leur réponse avec l'équation générale de l'ellipse ($AX^2 + CXY + BY^2 + DX + EY + F = 0$) et comparent celle-ci avec celle du cercle, où A= B et C = 0.

D'un autre côté, neuf élèves affirment qu'un cercle a comme foyer un seul point et que plus on rapproche *F* et *F'*, plus on tend vers un seul centre. Donc, les mesures des segments $\overline{PF}$ et $\overline{PF'}$ deviennent tous les deux égales au rayon du cercle.

<u>5b. Qu'arrive-t-il à l'équation de l'ellipse ?</u>

Lorsque nous résumons les réponses données par les élèves, nous constatons que tous ont la bonne réponse, mais exprimées de façon différente : l'équation de l'ellipse va devenir celle du cercle, le terme *XY* disparaît, car les deux foyers sont sur le même axe, *F* et *F'* coïncident avec le centre du cercle, ou les coefficients de X^2 et Y^2 sont identiques. Toutes ces réponses sont accompagnées de l'équation de l'ellipse et de son changement vers celle du cercle.

$$\text{Ellipse : } 2{,}54x^2 + 0{,}45xy + 0{,}31y^2 + 10x + 20y + 8{,}53 = 0$$

$$F' \text{ s'approche du point } F : \; 2{,}90x^2 + 2{,}90y^2 + 10x + 6{,}11y - 4{,}54 = 0$$

Démonstration réussie, selon l'approche de Mariotti

Extrait de discussion entre le chercheur et une équipe

Ch : Qu'est-ce qui arrive au point P quand on rapproche F' de F ?

Noémie : On commence avec notre F' là pis on voit que quand on rapproche F' de F ça devient un cercle. Pour prouver que... hum donc l'équation de notre ellipse est supposée de se changer en équation du cercle quand F' tombe sur F donc ça veut dire que les deux points sont superposés. L'équation de l'ellipse va se transformer dans l'équation d'un cercle.

Ch : Qu'est-ce qui nous indique que c'est réellement l'équation d'un cercle ?

Karen : Il y a plus de xy. Le rayon est pareil partout. Le coefficient devant x^2 et y^2 est le même.

On voit ici une continuité entre les arguments utilisés par les élèves et la théorie mathématique en question. En effet, le logiciel a permis aux élèves de visualiser le passage de l'équation générale de l'ellipse ($\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$) vers l'équation générale du cercle ($x^2 + y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$), lorsqu'on rapproche les deux foyers de l'ellipse jusqu'à les faire coïncider. Puis, les élèves ont pu comparer les deux équations afin de caractériser l'équation générale d'un cercle. Il est aussi possible de constater que les élèves ont suivi un enchaînement dans leur raisonnement qui nous permet d'affirmer qu'ils ont réussi la construction de la démonstration selon l'approche de Mariotti.

« ... en général, la résolution de ce problème s'effectue après une longue recherche; l'élève s'engage dans une activité complexe d'exploration, au cours de laquelle de nombreuses argumentations sont produites, qui soutiennent diversement la recherche de la solution. Ces argumentations forment une base pour la démonstration qui est proposée par la suite. En réalité, dans ce cas-ci, quand la construction est identifiée, les propriétés qui la mettent en relation avec les données du problème sont déjà déterminées, la démonstration consistant simplement à réordonner ces relations » (Mariotti 2001, p. 7).

Ch : Comment sont les deux axes dans l'ellipse ?

Noémie : Différents.

Ch : Oui, la valeur, par exemple; la valeur numérique.

Noémie : Elles ont des différentes valeurs.

Karen : Ouais, admettons qu'ici, dans l'ellipse, on a des valeurs différentes pour les x et les y, regarde.

Ch : Mais on a dit que ce sont le grand axe et le petit axe.

Karen : Oui, les valeurs de la petite axe et de la grande axe sont différentes et si l'on rapproche F' de F, le futur cercle, check, va devenir avec les deux axes de même valeur.

Ch : Ben là, on sait que c'est un cercle à cause de l'équation ?

Karen : À cause aussi de l'égalité des deux axes.

Noémie : Ouais.

Le sens de la justification faite par les élèves s'est développé en devenant plus théorique lorsqu'ils ont discuté des valeurs possibles du petit et du grand axe. On remarque alors que les élèves ont traité ce problème dans différents registres (graphique, algébrique) afin d'arriver à une généralisation du rôle des variables dans l'équation.

Analyse de la forme canonique de l'équation

Extrait d'une discussion entre le chercheur et une équipe :

Ch : Mais si [...] on regarde par contre la forme canonique : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; pour une ellipse centrée à l'origine. Qu'est-ce qui arrive aux paramètres a et b lorsque F' s'approche de F ?

Thomas : Le grand axe a est plus grand que b lorsque F' s'approche au bord du cercle.

Jacob : Lorsque F' s'approche de F, notre a devient de plus en plus égal à notre b; c'est-à-dire que nos axes tendent à devenir égaux pour former un beau cercle.

Ch : Dans la formule cela serait... ?

Jacob : Si $a = b$, alors $x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1$.

Ch : Continuez avec la formule.

Jacob : Euh, $x^2 + y^2 = a^2$.

Cabri permet aussi, à partir de la formule $x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1$, d'évaluer les changements des paramètres de l'équation de l'ellipse lorsque celle-ci tend vers un cercle. De plus, le passage du registre graphique au registre algébrique a permis de donner une signification à l'équation du cercle ($x^2 + y^2 = a^2$). *« Dans cette forme avancée du constructivisme, la connaissance n'est plus une propriété du seul sujet mais celle d'un complexe formé par le sujet, le milieu et leurs interactions »* (Balacheff, évoqué par Mariotti, 2001, p. 14).

Conclusions ayant trait aux productions liées aux questions 4 et 5

On constate que, pour les questions 4 et 5, le logiciel Cabri-Géomètre a permis aux élèves de visualiser d'emblée les différentes coniques générées lorsqu'on déplace le point *F'* à l'intérieur et au bord du cercle. De plus, à l'aide de certains outils, il a été possible de comparer simultanément le registre graphique et le registre algébrique, ce qui a permis aux élèves de faire certaines constatations qui les ont menés à émettre des conjectures, puis à construire une preuve, au sens de Mariotti.

Il faut cependant faire attention car plusieurs élèves ne voient pas la pertinence de valider théoriquement leurs constructions puisque celles-ci semblent évidentes. Les élèves ne considérant pas la construction de l'ellipse et du cercle comme un problème théorique, ils éprouvent plus de difficultés à faire des justifications et à repérer les éléments stables dans la construction.

Questions 6, 7 et 8 : Effet de *F'* sur l'ellipse lorsqu'il est déplacé à l'extérieur du cercle

La réponse donnée par tous les élèves à la question 6 est : si l'on déplace *F'* en dehors du cercle, le lieu de *P* est une hyperbole. De plus, ils affirment que les deux points *F* et *F'* deviennent les deux foyers de la nouvelle conique.

Pour la preuve demandée à la question 7, les élèves ont regardé la forme du lieu trouvé, la place des deux foyers et ont trouvé l'équation du lieu à l'aide du logiciel Cabri-Géomètre. Les élèves connaissant les propriétés de l'équation générale d'une hyperbole, soit que les coefficients de y et y^2 sont de signe négatif, et ils se sont assurés que l'équation trouvée avait bien cette caractéristique.

D'autres élèves donnent un exemple pour illustrer leur réponse :

F' dans le cercle : $0{,}50x^2 + 0{,}26xy + 0{,}37y^2 + 4{,}21x - 0{,}90y + 10 = 0$.

F' en dehors du cercle : $0{,}50x^2 - 3{,}89xy - 1{,}24y^2 + 0{,}72x - 6y - 10 = 0$.

Juste une équipe (trois élèves), en plus de ce qui a été mentionné ci-dessus, a ajouté que les deux coefficients de x^2 et y^2 sont obligatoirement de signes contraires et qu'on peut trouver les asymptotes, dont ils donnent la définition : « *l'asymptote est la droite médiatrice du segment VF' lorsque celle-ci (la médiatrice) est parallèle à la droite passant par VF, il n'y a donc pas de point P.* »

Pour la question 8, on a choisi ce dernier groupe, car il semble fournir une source d'information intéressante, pour la démonstration et la preuve demandée.

Extrait d'une discussion entre le chercheur et les membres de cette équipe

Ch : On va regarder vos réponses à la question 6, 7 et 8; d'accord ? Pour commencer, je veux vous demander pourquoi vous avez répondu que ce lieu est une hyperbole ?

Jacob : Est-ce qu'on peut utiliser Cabri ?

Lucie : … et regarder les réponses dans notre cahier d'équipe aussi ?

Ch : Bien sûr, pas de problème. (Les élèves regardent leur cahier de réponses et font la reconstruction de la situation avec l'aide de Cabri-Géomètre.)

Jacob : Bin. Nous avons conclu que le lieu trouvé, lorsqu'on déplace F' dehors du cercle, est bien une hyperbole. On voit sa forme, la position des deux foyers qu'on a nommés F et F' et évidemment, en utilisant la commande « Coord. et équation », on prouve que... on constate que y^2 et y dans l'équation deviennent négatifs. Cela nous indique aussi que le lieu est une hyperbole.

Cabri-géomètre a permis aux élèves d'analyser la conique générée et d'en ressortir certaines caractéristiques. Ceci constitue la base de leur argumentation.

Thomas : Il y a des asymptotes aussi, Jacob.

Ch : Avant de continuer avec les asymptotes, parlons de l'équation générale. Qu'est-ce qui m'indique vraiment que ce lieu est une hyperbole ? Mon y^2 doit avoir quel signe ? Qu'est-ce que vous en pensez ?

Thomas : À partir des coefficients de y^2 et x^2. On regarde notre équation de base et les deux coefficients doivent être de signes contraires; c'est-à-dire la condition c'est qu'ils doivent être obligatoirement de signes contraires.

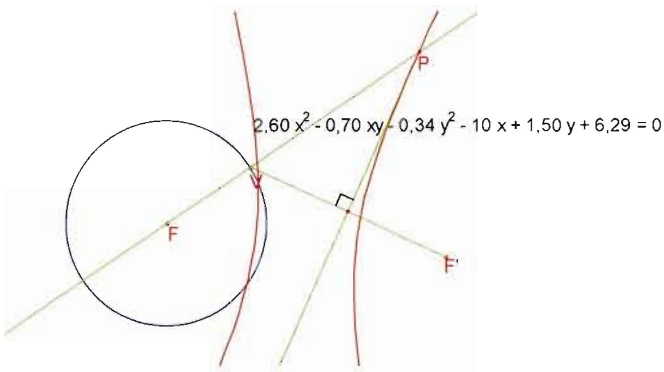
En comparant l'équation trouvée à l'équation générale de l'hyperbole, les élèves repèrent une autre caractéristique, soit que les coefficients A et C doivent être de signes contraires. On peut aussi constater que les justifications utilisées par les élèves commencent à prendre une signification plus théorique grâce à Cabri-Géomètre.

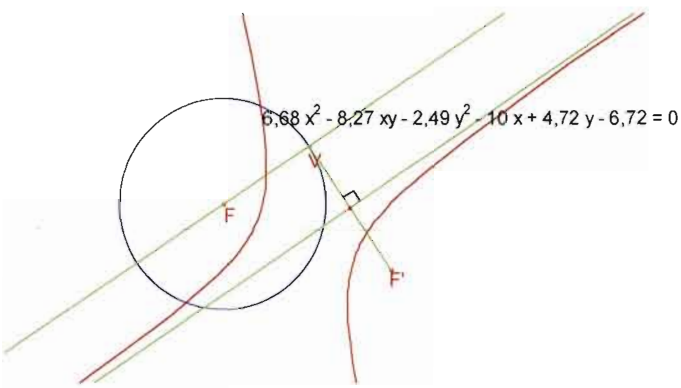
« Cabri... incorpore une partie du savoir [...] une grande partie de la théorie élémentaire de la géométrie. C'est grâce à ce savoir incorporé que Cabri fournit un système d'instruments qui, renvoyant à ce savoir, peuvent fonctionner non seulement « vers l'extérieur » (Vygotsky, 1978), mais produire aussi des dessins particuliers « vers l'intérieur », contribuant ainsi à la construction de significations relatives au savoir incorporé, et à la théorie géométrique en particulier » (Mariotti 2001, p. 15).

Ch : Parlons des asymptotes. Qu'est-ce que tu disais Jacob ? Ou toi, Thomas ?

Jacob : Ouais. Je vais lire ce qu'on a écrit dans notre cahier. On peut y trouver les asymptotes et on a dit qu'un asymptote est la droite médiatrice du segment VF'

lorsque celle-ci (la médiatrice) est parallèle à la droite passant par *VF*. Il n'y a donc pas de point *P*.





Ch : Pourquoi vous dites qu'il n'y a pas de *P*, si je le vois ici ? (Le chercheur fait référence aux deux figures avec Cabri.)

Jacob : Ouais, on dit qu'il n'y a pas de points *P* parce qu'il n'y a pas d'intersection entre la médiatrice du segment *VF'* et le segment *VF* au moment où ceux-ci sont parallèles.

Ch : En mathématiques, on a tendance à parler des asymptotes et de l'infini négatif et de l'infini positif. Dans notre hyperbole, pourquoi parle-t-on des asymptotes ?

Élèves : On voit les branches de l'hyperbole qui tendent vers les asymptotes, ça veut dire que les branches ne la touchent jamais. Voyez-vous cette branche qui veut toucher cet axe-là ? Disons que les asymptotes sont un repère pour affirmer que le lieu est une hyperbole.

Thomas : On ne voit pas d'asymptote dans l'ellipse, par exemple.

Jacob : Et voilà, merci. Cette asymptote est une droite qui tend vers l'infini et cette branche par exemple, tend vers l'asymptote, donc nos branches tendent toutes vers l'infini. C'est un peu compliqué à expliquer.

Ch : Est-ce qu'il y a un autre élément qui change, qui a tendance à changer ?

Élèves : Non.

Les élèves continuent leur argumentation en utilisant certaines propriétés des hyperboles, soit que celles-ci possèdent des asymptotes.

Ch : Et P, cela vous dit quelque chose ?

Élèves : Hum...

Ch : Pourquoi ce point disparaît et apparaît ?

Lucie : Jacob a dit qu'il n'y a pas de P, parce qu'il n'y a pas d'intersection entre la médiatrice de $\overline{VF'}$ et la droite $\overline{VF}$. On constate que la médiatrice et la droite VF sont parallèles, donc il n'y a pas d'intersection entre elles.

Ch : Pour vous, pour l'équipe, cela démontre que le lieu trouvé est une hyperbole ?

Élèves : Ouais.

Jacob : Oui, on a dit que... Est-ce que je peux lire ce que l'on a écrit ?

Ch : Oui.

Jacob : $\overline{VF} \perp \overline{VF'} \rightarrow$ médiatrice de $\overline{VF'}$ est asymptote et $\overline{VF}$ // médiatrice de $\overline{VF'}$.

Ch : Bon, Lucie, tu dis qu'on peut constater que la droite VF et la médiatrice de $\overline{VF'}$ sont toutes les deux parallèles, n'est-ce pas ?

Lucie : Ouais.

Ch : Je sais qu'on le voit dans les différentes constructions que vous venez de faire avec Cabri mais, si à un moment donné, ces deux droites se croisent vers l'infini, comment est-ce que je peux démontrer que ce sont vraiment des droites parallèles ?

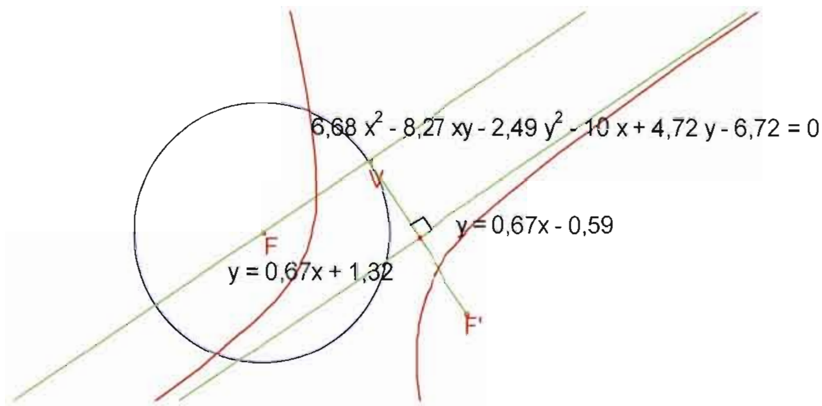
Thomas : Lucie, fais-le avec Cabri.

Lucie : Comment ?

Thomas et Jacob : « Coord. et équation ».

Lucie : OK. J'utilise la commande « Coord. et Équation ». Pour trouver l'équation des deux droites VF et VF', je fais bouger un peu F', et voilà. Elles sont de la même valeur. Regardez-les moi, qui sont de la même valeur, ça démontre que les deux droites sont parallèles (les élèves font référence à la valeur m = 0,67).

Thomas : Hum. Cela veut dire que ces droites-là sont parallèles et on l'a démontré. Je pense qu'avec tout cela qu'on vous a dit, c'est suffisant pour affirmer que le lieu trouvé, c'est une hyperbole.



On peut constater une continuité, selon le point de vue du contenu, entre les explications faites par les élèves dans un langage familier et celles faites dans un langage mathématique pour affirmer que le lieu trouvé est une hyperbole : *«... il ne faut pas oublier le fait* ***qu'il n'y a pas de démonstration sans théorie****, le fait qu'une démonstration ait un sens seulement en référence à une théorie, i.e. des axiomes, des définitions, des théorèmes... »* (Mariotti 2001, p. 13).

Ch : Est-ce qu'il y a une autre façon de le démontrer ?

Jacob : Non, je ne pense pas.

Ch : Et vous, qu'en pensez-vous ?

Élèves : Non.

Ch : Avec des triangles, vous voyez ces triangles ?

Thomas : Ouais, mais ce n'est pas nécessaire. On l'a déjà démontré.

Ch : Et toi, Lucie ?

Lucie : Je pense la même affaire.

Ch : Et si on parle plutôt des distances entre les foyers et un point *P* de l'hyperbole, comme on l'a fait avec l'ellipse ?

Lucie : Non. On sait que le lieu est une hyperbole.

Les élèves ignorent les triangles rectangles congrus avec lesquels ils ont travaillé dans la première et dans la troisième activité. Pour ces élèves, ce n'est pas nécessaire de démontrer la propriété métrique du lieu de l'hyperbole, puisqu'ils ont déjà prouvé que le lieu est une hyperbole. Les données sont alors utilisées pour la construction et la vérification empirique du lieu, mais non pour une démonstration plus formelle.

Conclusions ayant trait aux productions liées aux questions 6, 7 et 8

Les élèves sont en mesure d'identifier le lieu trouvé lorsque *F'* se déplace hors du cercle, ainsi que de le prouver en identifiant sa forme, en cherchant son équation et en comparant cette dernière avec l'équation générale des coniques. La médiation de Cabri-Géomètre a été importante afin de faire évoluer les arguments des élèves vers un sens plus théorique.

Conclusion de l'activité

– L'environnement Cabri-Géomètre a permis à tous les élèves de construire la preuve, c'est-à-dire les calculs numériques des distances, des comparaisons de forme, de grandeur, d'excentricité, etc. Par contre, en ce qui concerne la démonstration de la propriété métrique de l'ellipse, seulement quelques élèves ont réussi à la construire selon l'approche proposée par Mariotti, soit à partir de l'énonciation d'une conjecture qui se base sur la construction des significations et des explications en utilisant un raisonnement argumentatif. Ensuite, le produit final de cette démonstration doit faire référence à la construction du sens, toujours en faisant allusion à un cadre théorique mathématique.

– La notion d'équivalence logique qui caractérise toute définition a pu être constatée par les élèves dans le cas de l'ellipse lors de la construction de celle-ci. En effet, Cabri-Géomètre a permis de construire le lieu, puis de vérifier que P était toujours sur l'ellipse, peu importe le déplacement de V sur le cercle directeur.

– La géométrie incorporée dans Cabri-Géomètre a contribué à la construction des significations relatives aux coniques et à la compréhension de la construction de leurs démonstrations mathématiques selon l'approche de Mariotti. Cela a aussi permis aux élèves de lancer des conjectures et de contrôler leur passage vers un raisonnement logique plus articulé dans un cadre théorique où la maîtrise déductive est fondamentale.

– L'environnement Cabri-Géomètre a permis aux élèves de découvrir des propriétés, des relations et des stratégies pendant le processus de résolution de problème. En effet, Cabri-géomètre a permis, dans le cadre des problèmes de démonstration demandés, la mise en marche de stratégies ou heuristiques différentes.

– Nous constatons, d'une façon générale, les quatre phases suivantes : l'analyse du problème, l'élaboration d'une stratégie, la vérification, la validation de la stratégie et la communication du résultat. Ces phases ont été suivies par des épisodes qui se présentent et qui se répètent tout au long de l'activité, telles que lecture, analyse, exploration, prise de nouvelles informations et vérification.

– Le micromonde a aussi permis l'interaction entre différents registres de représentation (symbolique, graphique, algébrique, arithmétique) et ce, dans un même environnement de travail, ce qui a rendu les élèves plus actifs dans leur apprentissage.

– L'activité permet une visualisation des définitions et de la construction des lieux géométriques nommés *ellipse*, *cercle*, *hyperbole* lors des déplacements successifs du foyer F' vers le foyer F ou vers le bord du cercle directeur ; ils conservent la propriété métrique d(P, F) + d(P, F') = $2a$. Les différentes ellipses ainsi formées présentent des similitudes en ce qui concerne la propriété métrique.

Pour l'ellipse, par exemple, le triangle $F'FV$ est déformable en conservant ses propriétés invariantes. Par exemple, si un côté s'agrandit, les autres le feront. Ce fait permet de ne considérer qu'un triangle pour la démonstration. De plus, ces observations pourraient être utilisées plus tard par l'enseignant afin de montrer aux élèves le lien entre ces différentes coniques, par exemple que le cercle est un cas particulier de l'ellipse où le petit et le grand axe sont de mêmes grandeurs.

CHAPITRE V

CONCLUSION GÉNÉRALE

5.1 Résumé de la démarche

Notre intérêt pour le problème de la démonstration au secondaire nous a menés à nous pencher sur une problématique particulière relative à ce sujet (voir chapitre I). En effet, à la suite de la consultation de plusieurs résultats de recherches antérieures sur le sujet, nous sommes arrivés à penser qu'en général, les enseignants du secondaire, lors de l'étude des coniques, s'appuient davantage sur la géométrie analytique alors qu'il devrait y avoir équilibre avec la géométrie synthétique, où la déduction ne s'exerce pas qu'à partir des simples calculs. En particulier, en ce qui concerne la démonstration de la propriété métrique.

À la suite de la consultation de plusieurs recherches, entre autres faites par Arcavi et Hadas (2000) et Mariotti (2001) (voir chapitre II), sur le rôle joué par des artefacts instrumentés en tant que médiateurs lors de la résolution de problèmes où l'on sollicite une démonstration, nous avons réfléchi sur la façon dont se manifestent les notions de preuve et de démonstration dans les contextes papier-crayon et technologique.

Nous introduisons le logiciel Cabri-Géomètre, non seulement avec l'intention de dynamiser les constructions géométriques, mais aussi pour le rôle qu'il pourrait jouer chez les élèves au moment de la production des conjectures, preuves et démonstrations.

Notre objectif de recherche était : *Comprendre comment Cabri-Géomètre peut intervenir dans un contexte où l'on cherche à démontrer mathématiquement une propriété métrique sur les coniques. La propriété métrique était présentée sous la* *forme de la construction d'une conique comme lieu géométrique défini par la propriété.* La démonstration attendue des élèves est véhiculée par la justification demandée explicitement, que le lieu est bien une ellipse. Nous avons posé exactement les questions suivantes :

Question 1. Dans le contexte de la recherche d'une démonstration sur la propriété métrique des coniques précédemment décrite, *c*omment Cabri-Géomètre favorise chez les élèves un raisonnement argumentatif susceptible d'être investi ensuite dans la construction de la démonstration (la justification) ?

Question 2. Qu'est-ce qui diffère dans un tel travail avec Cabri, de ce que l'élève ferait pour une tâche équivalente avec papier-crayon ?

Question 3. Quelles sortes de stratégies sont utilisées par les élèves dans ce processus de résolution de problèmes ?

Pour répondre aux questions de recherche, nous avons retenu la méthodologie de recherche de « l'ingénierie didactique », proposée par Artigue (1990) (voir chapitre III). La phase I des analyses préalables fait référence aux études des principaux contenus mathématiques qui font partie de la construction géométrique des coniques en général. À la phase II de la conception et de l'analyse a priori, nous avons conçu les activités d'expérimentation en prenant en considération : a) L'aspect de la résolution de problèmes, b) L'aspect de la géométrie du papier-crayon et de la géométrie dynamique et c) L'aspect de la démonstration mathématique.

Nous avons donc élaboré quatre activités qui pourraient nous aider à répondre à nos questions et éclairer notre objectif de recherche. En effet, ces activités sont : 1) **L'activité 0**, qui proposait aux élèves une séquence d'enseignement sur la manipulation des outils de base du logiciel et son importance dans les processus d'apprentissage de la géométrie. 2) **L'activité 1** (centrale), qui demandait la construction de l'ellipse dans le contexte papier-crayon et du même coup, sollicitait la démonstration mathématique (formelle) de la construction faite en appliquant la propriété métrique de l'ellipse. 3) **L'activité 2**, *la parabole avec l'aide de Cabri-Géomètre*, qui cherchait à familiariser les élèves avec l'activité 3 et aux processus de visualisation et de construction de lieux géométriques tels que *la parabole*. Cette activité cherchait aussi à utiliser Cabri-Géomètre pour prouver et démontrer la propriété métrique de la parabole et les habituer à la production des conjectures, des raisonnements logiques et argumentatifs dans le travail de preuve et de démonstration. 4) **L'activité 3** (centrale), qui se situait dans un contexte technologique et concernait les coniques en général, mais l'ellipse en particulier. L'objectif principal de cette activité était de favoriser chez les élèves l'utilisation d'un discours à caractère argumentatif et démonstratif jusqu'à la nécessité de produire des démonstrations dans le sens de Mariotti (2001).

Ensuite, nous avons fait la phase III de l'expérimentation et l'analyse a posteriori correspondante dans la phase IV du projet de mémoire et en accord avec la méthodologie de l'ingénierie didactique. Dans cette dernière phase, nous avons décidé de nous intéresser particulièrement aux productions qui semblaient pertinentes et qui pouvaient apporter des réponses à nos questions de recherche et ce, dans différentes activités de l'expérimentation. Les confrontations entre analyse a priori et analyse a posteriori ont laissé percevoir des différences entre nos suppositions et les productions des élèves.

En effet, inspiré par notre cadre théorique, nous avons analysé les réponses que les élèves ont consignées dans leur « cahier de l'équipe » et les verbatims recueillis lors des différentes entrevues. Nous n'avons considéré que les « cas typiques », qui donnaient des éléments perçus par nous comme signifiants, au regard des différentes stratégies utilisées lors du processus de résolution et des différentes manifestations des notions de preuve et de démonstration ; et ce, dans les deux contextes, papier-crayon et technologique.

5.2 Réponses aux questions de recherche

Comme nous l'avons rappelé à la section précédente, nous avons conçu deux activités d'expérimentation afin de répondre à nos questions de recherche : les activités 1 et 3. La première en employant l'approche papier-crayon, et la deuxième en utilisant l'approche avec le logiciel Cabri-Géomètre.

Les résultats relatifs à notre première question : *Dans le contexte de la recherched'une démonstration sur la propriété métrique des coniques, comment Cabri-Géomètre favorise chez les élèves un raisonnement argumentatif susceptible d'être investi ensuite dans la construction de la démonstration (la justification) ?*

L'analyse des résultats, sous le regard théorique choisi, a permis de constater que les résultats obtenus par constructions géométriques ne permettent pas d'aller plus loin dans la démonstration dans le sens de Duval, car le résultat obtenu semble évident. Par contre, les résultats nous montrent que le micromonde Cabri-Géomètre favorise, chez les élèves, le processus de construction de démonstration et ce, selon l'approche de Mariotti. En effet, dans un premier temps, la signification et l'explication des énoncés ont été fondamentales pour les élèves. Ce fait a garanti le processus de compréhension avant même que les élèves soient plongés dans l'aspect formel de la validité proprement dite. Dans un second temps, nous avons constaté une continuité entre les connaissances mobilisées dans le processus argumentatif d'élaboration de la conjecture et les théorèmes utilisés dans la construction de la démonstration, le tout en lien avec le cadre théorique véhiculé par Cabri (Mariotti, 2001), à savoir celui de la géométrie eulidienne.

La clarté de la construction avec Cabri a permis aux élèves de se concentrer sur les triangles qu'elle faisait apparaître, ce qui a amené une réflexion tant sur les propriétés géométriques qui se conservent lors du déplacement de la figure que sur l'utilisation des théorèmes et des propriétés pour la construction de la démonstration demandée. Cette réflexion a engendré aussi une discussion sur les caractéristiques de l'ellipse construite, ses deux axes de symétrie ainsi que sur la signification donnée à l'équation du cercle.

L'aspect dynamique du logiciel a permis d'amener le processus de l'argumentation qui découle du déplacement d'un des foyers de l'ellipse et a également permis de faire interagir différents registres de représentations dans une seule fenêtre.

<u>Les résultats relatifs à la question 2</u> : *Qu'est-ce qui diffère dans un tel travail avec Cabri, de ce que l'élève ferait pour une tâche équivalente avec papier-crayon ?*

Dans le contexte lié à la notion de propriété métrique des coniques, l'approche technologique avec Cabri-Géomètre prend une place plus importante que l'approche papier-crayon. En effet, le présent rapport montre que lors de la première activité avec papier-crayon, certains élèves ont fait appel à des connaissances antérieures, telles que les notions de « polygone » et de la « forme ovale » de l'ellipse. Ces connaissances ont été mises de côté pour la suite de l'expérimentation. En revanche, c'est grâce à l'environnement papier-crayon que ces difficultés ont pu être repérées, et par la suite abordées et comprises : incompréhension du problème et incompréhension de la définition de « lieu géométrique ».

En plus, cette difficulté a pour nous un intérêt particulier, tant pour les procédures des élèves lors de l'expérimentation que pour l'évaluation de la pertinence de la question dans l'activité d'expérimentation.

Lors de l'activité papier-crayon, on a remarqué que les élèves ressentent le besoin de valider leur construction, par la prise de mesures et par le calcul numérique. Par la suite, la démonstration (au sens de Duval) ne leur semble plus pertinente. Par contre, avec Cabri, étant déchargés de la prise de mesures et des calculs, tâche exécutée par un simple « clic » avec le logiciel, les élèves s'appliquaient plus sur le processus de démonstration, tel que défini par Mariotti.

Lors de l'activité papier-crayon, pour répondre à la question 3 des deux activités — *Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse* — les élèves ont procédé à la démonstration de la propriété métrique en utilisant la théorie des triangles rectangles isométriques congrus et ce, à cause de ce qu'ils voyaient sur la figure produite. Par contre, pour répondre à la même question, lors du travail avec Cabri, ils ont sorti, par simple clic, l'équation générale de l'ellipse et ils ont procédé à la démonstration par conjecture sans utiliser la propriété métrique.

L'étude a révélé que tandis que la construction de l'ellipse avec papier-crayon exige une visualisation plus « rigide » parce que cela requiert la construction de plusieurs points P d'intersection, la visualisation de la même figure dans l'environnement Cabri-géomètre permet une expérimentation de construction plus élargie. En effet, on peut simuler cette même construction avec un seul point P et l'utilisation de la commande « Lieu » ou de la commande « Trace ». Cette construction des coniques avec Cabri-Géomètre permet ainsi une visualisation des définitions telles que celles du cercle, de l'hyperbole ou même du point, vu comme une conique dégénéré; le tout en conservant également leurs relations géométriques de construction et leurs propriétés métriques en général.

En plus, l'approche avec technologie a permis, lors des différents entretiens avec les élèves, d'aborder les coniques de plusieurs façons : comme lieu géométrique, comme courbe algébrique de second degré ou comme transformée d'un cercle.

Cabri-géomètre permet de visualiser les coniques dans une perspective *« analytique »* et d'utiliser non seulement la distance mesurée entre deux points (comme dans l'environnement papier-crayon), mais aussi la distance entre ces deux points calculée algébriquement, à partir de leurs coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Analyse des difficultés autour de la question 2

Même si les élèves connaissent la formule d(A, B) $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ pour calculer la distance entre deux points A : (x_1, y_1) et B : (x_2, y_2), ils considèrent que les calculs sont longs à faire et qu'une erreur peut se glisser facilement. Donc l'approche par le logiciel Cabri ne favorisant pas le processus de calcul mental ni le processus de calcul manuel, il est nécessaire que l'enseignant intervienne pour faciliter le passage de la géométrie de la mesure directe vers la géométrie analytique, parce que les élèves font plus confiance au logiciel qu'à eux-mêmes.

La dynamique incorporée dans Cabri-Géomètre a permis la coordination entre différents registres de représentation, puisque chaque représentation ne représente que partiellement le concept dont il est question. Ces registres de représentation observés sont : le symbolique, le graphique, l'algébrique et l'arithmétique et ce, dans un même environnement de travail. Ce qui a rendu les élèves plus actifs dans le processus de la résolution du problème de construction géométrique et de preuve; pour la démonstration le problème continue de représenter une difficulté majeure.

Résultats relatifs à la question 3 : *Quelles sortes de stratégies sont utilisées par les élèves dans ce processus de résolution de problèmes ?*

Nous pouvons conclure que :

Les deux activités proposées dans cette étude favorisent l'observation des stratégies et croyances utilisées par les élèves dans la résolution du problème proposé. En effet, l'environnement papier-crayon permet dans la plupart des cas la construction géométrique de la conique demandée (l'ellipse) en utilisant des traits à main levée ou un élastique pour relier les différents points *P*. Ce fait demande de la créativité de la part des élèves, qui n'étaient pas habitués à travailler avec des curvigraphes.

Analyse des difficultés autour de la question 3

Le fait de suggérer un minimum de sept points *P* pour trouver le lieu demandé a pu induire les élèves à faire une construction considérée comme ***non réussie*** et obtenir un « polygone régulier ». Il aurait peut-être fallu suggérer le positionnement des points variables *V* tout autour du cercle.

D'un autre côté, l'environnement Cabri-Géomètre permet l'obtention du lieu demandé à partir d'un seul point *V* variable sur le cercle. Par contre, ce fait ne permet pas le contrôle sur le lieu obtenu, donc nous avons été poussés à rédiger une question demandant trois positions de *P* lorsque *V* varie sur le cercle. Le champ d'expérimentation a été plus vaste pour le même problème de construction. En effet, l'expérimentation a permis de vérifier la construction pour ces trois positions de *P* lorsque *V* est variable sur le cercle. La vérification et la correction de leurs erreurs ont été rapides et ont motivé la nécessité d'une explication et compréhension sur ce qui était présenté à l'écran, en utilisant des notions mathématiques.

En plus, ce problème a généré des surprises chez les élèves quant au résultat attendu et sa prédiction, ce qui a rendu possible le développement d'autres heuristiques de construction géométrique (c'est-à-dire la précision des tracés, l'invisibilité temporaire de la conique, travailler à rebours, faire des prédictions, etc.), le tout utilisant toujours les données du problème.

D'une façon générale dans les deux approches utilisées, nous avons également pu repérer les quatre phases de résolution pour le problème soumis : l'analyse du problème, l'élaboration d'une stratégie, la vérification et la validation de la stratégie et la communication du résultat. Les trois premières ont été suivies par des épisodes qui se présentent et qui se répètent tout au long de l'activité, telles que la lecture, l'analyse, l'exploration, la prise de nouvelles informations et la vérification. La phase 4, phase de communication des résultats, a sollicité chez les élèves la mise en œuvre et l'organisation d'un discours argumentatif ayant du sens et faisant référence à un cadre mathématique de repère.

Nous pouvons donc conclure que les élèves ont trouvé différents points P satisfaisant à la définition du lieu, par l'intermédiaire de la commande « Lieu » ou de la commande « Trace », ou en les reliant par des traits à main levée, trouvant ainsi la figure correspondant à une ellipse.

Dans notre étude, c'est au niveau de la géométrie dynamique que les avantages sont les plus marqués : la visualisation, l'expérimentation, la surprise et la nécessité de démontrer et d'argumenter, entre autres, avant d'arriver à une solution proprement formelle du problème. Le nombre considérable d'avantages relevés dans cet environnement dynamique ne veut pas dire que l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre résoudra à lui seul le problème d'apprentissage de la démonstration en question ou de la démonstration en mathématiques en général. Nous avons constaté, du point de vue de la didactique, que chaque tâche à ses particularités et que chacune attire l'attention sur des aspects différents et importants pour la construction des concepts et des stratégies dans sa résolution.

Les tableaux I et II ci-dessous présentent un résumé de notre analyse précédente sur les processus de résolution. Nous comparons ainsi des aspects positifs et négatifs tant pour l'aspect de la résolution de problèmes que pour celui de la preuve et de la démonstration, ces derniers s'étant révélés lorsque nous avions sollicité la démonstration mathématique (formelle).

Tableau I

Comparaison des processus de résolution pour les activités 1 et 3 ASPECTS POSITIFS	
La construction	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Permet de voir l'importance de tous les points impliqués dans la construction d'une ellipse. • Permet l'observation des stratégies et croyances utilisées par les élèves : utilisation des traits à main levée ou d'un élastique pour relier les différents points *P*. • Permet d'identifier les phases dans la résolution du problème demandé : l'analyse du problème, l'élaboration d'une stratégie, la vérification et la validation de la stratégie et la communication du résultat.	• Permet la construction de la figure à partir d'un seul point (*V*) sur le cercle. • Permet d'observer que la propriété de construction reste invariante lorsque *V* se déplace autour de la circonférence. • Permet l'observation des heuristiques de construction géométrique (c'est-à-dire la précision des tracés, l'invisibilité temporaire de la conique, travailler à rebours, faire des prédictions, etc.). • Génère des surprises à partir de la visualisation instantanée du résultat inattendu et possible explication et compréhension, sur ce qui est présent à l'écran. • Les outils permettent de personnaliser la construction et l'argumentation. • Permet d'identifier les phases dans la résolution du problème demandé : l'analyse du problème, l'élaboration d'une stratégie, la vérification et la validation de la stratégie et la communication du résultat.

La preuve	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Permet de construire **la preuve géométriquement** à partir de la forme du dessin et de la définition de la propriété métrique.	Permet la construction de la preuve : • par la forme du dessin et l'emplacement des foyers; • par la particularité des termes A et C de l'équation générale; • par la définition de la propriété métrique. • En plus, permet de dépasser l'idée de distance linéaire vers l'idée de distance dans le plan cartésien.

La démonstration	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Permet de se baser sur une seule figure pour la démonstration. • Permet d'avancer dans les processus de manipulation algébrique.	Permet de : • Se baser sur une seule figure pour la démonstration. • Faire ressortir la nécessité de construction de la démonstration selon l'approche de Mariotti. • Réfléchir et discuter sur les propriétés symétriques de l'ellipse. • Donner une signification à l'équation du cercle ($x^2 + y^2 = a^2$) par le passage du registre graphique au registre algébrique. • Visualiser directement les différentes coniques générées lorsqu'on déplace un des foyers. • Faire interagir différents registres de représentations dans une seule fenêtre.

Tableau II

Comparaison des processus de résolution pour les activités 1 et 3 ASPECTS NÉGATIFS	
La construction	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Trop de répétitions pour arriver à la figure demandée; en plus les points *V* variables doivent être bien placés sur tout le cercle. • La lourdeur des traces de construction ainsi que la quantité de temps investie dans cette construction nuit au processus de prévision ainsi qu'à la motivation des élèves. • La déduction de la forme de la figure est faite à partir de l'aspect de la figure plutôt que sur les caractéristiques connues de l'ellipse. • Suggérer au minimum sept points *P* pour trouver le lieu demandé a pu induire chez les élèves une construction non réussie : celle d'un polygone régulier.	• Ne permet pas le contrôle sur certains points de la construction. • Nécessite l'intervention de l'enseignant pour faciliter le passage de la géométrie de la mesure directe vers la géométrie analytique.

La preuve	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Fait prévaloir l'idée intuitive de distance mesurée sur un axe sur celle calculée entre deux points d'un plan.	• Ne favorise pas le processus de calcul mental ni le processus de calcul manuel.

La démonstration	
Avec papier-crayon	**Avec Cabri-Géomètre**
• Le processus utilisé pour la preuve entrave celui de la démonstration • Ne favorise pas la pensée analytique pour la démonstration. Cette partie rend l'activité trop rigide, exigeante et inintéressante.	• Ne permet pas d'aller plus loin dans la démonstration dans le sens de Duval, car le résultat obtenu semble évident.

5.3 Perspectives pour l'enseignement

À la suite des résultats de notre analyse et de nos observations sur le déroulement de l'expérimentation, nous recommandons aux enseignants de s'inspirer de la combinaison des deux approches proposées en ce qui concerne les facteurs ayant influencé les réponses des élèves (voir chapitre IV). Nous suggérons aux enseignants d'enrichir l'activité 1 avec papier-crayon et l'activité 3 avec Cabri (en prenant en compte l'approche d'Arcavi et Hadas) et de les combiner afin d'en tirer le meilleur bénéfice pour les élèves.

Nous nous référons à quatre aspects qui sont ressortis lors de notre analyse et qui, nous le croyons, pourraient enrichir la pratique enseignante et l'apprentissage.

Un premier aspect fait référence au besoin de s'attarder à comprendre quelques concepts tels que raisonner, expliquer, argumenter, démontrer, prouver, la conjecture et l'hypothèse (voir chapitre II). Ensuite, on peut se plonger dans la démonstration proprement dite. En effet, les mathématiques ont un fonctionnement cognitif particulier et complexe qui se base, selon certaines règles et marques discursives, sur des concepts qu'il faut minimalement maîtriser dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage de la démonstration.

Pour le deuxième aspect, nous suggérons de modifier la question 1 dans l'environnement Cabri-Géomètre (voir Appendice 3) : *Construire sur papier au moins sept points P avec l'aide du crayon...* pour *construire sur papier au moins sept points P,* ***répartis sur tout le cercle mais inégalement espacés,*** afin de favoriser la compréhension et la construction du lieu demandé, et de minimiser la possibilité d'incompréhension chez les élèves, comme dans le cas du « polygone régulier à sept côtés ».

Un troisième aspect est de demander à l'enseignant de bâtir soigneusement son activité de façon à utiliser le meilleur de Cabri-Géomètre en : a) L'évidence dans la figure versus l'importance de la démonstration mathématique, ce que Mariotti (2001, p. 17) appelle « *établir un lien explicite entre un cadre phénoménologique, Cabri et ses figures, et une théorie, la géométrie* »; b) Le traitement direct du contenu et du processus d'apprentissage : dans le cas de la distance entre deux points, qui joue un rôle essentiel dans cette étude (la démonstration d'une propriété métrique) et le passage à un système de coordonnées ; c) L'incitation des élèves à faire des calculs manuels avec papier-crayon et la constatation avec le logiciel.

Pour le dernier aspect, nous recommandons vivement aux enseignants de s'attarder aux questions 4 à 8 dans l'activité 3 avec Cabri-Géomètre, parce qu'il y a des aspects qui interviennent dans la démonstration selon l'approche de Mariotti (2001) telle que la justification. En effet, le sens de la justification peut se développer en devenant plus théorique lorsque les élèves identifient la construction après avoir discuté sur les valeurs possibles du petit et du grand axe dans l'ellipse, la visualisation du passage de l'équation générale de l'ellipse à l'équation générale du cercle, le rapprochement des deux foyers de l'ellipse jusqu'à les faire coïncider et finalement, pour le traitement du problème dans différents registres (graphique, algébrique) afin d'arriver à une généralisation du rôle des variables dans l'équation générale. Nous considérons que l'enseignant doit bâtir aussi son propre questionnaire et promouvoir la discussion en classe pour établir des liens entre la théorie géométrique et les arguments des élèves qui expliquent le *« pourquoi »* de ces phénomènes identifiables sur l'écran.

5.4 Perspectives pour la recherche

Nous considérons que la méthodologie de l'ingénierie didactique utilisée lors de cette recherche a été pertinente pour trois raisons fondamentales : premièrement, parce qu'elle a permis de faire une analyse préalable des contenus mathématiques qui font partie de la construction géométrique des coniques dans les contextes papier-crayon et technologique; deuxièmement, cette méthodologie a permis l'élaboration d'activités d'expérimentation et leur mise en marche avec l'engagement actif des élèves et la participation du personnel de l'école; troisièmement, parce qu'on a pu obtenir un bon nombre de résultats suffisamment significatifs pour donner des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Questions d'ordre didactique

Pendant cette recherche, nous nous sommes posés des questions qui nous semblent pertinentes.

1. Dans l'expérimentation, comment pourrions-nous trouver une « stabilité » entre les nouvelles connaissances et anciennes connaissances des élèves ? (Par exemple dans le cas du polygone à sept côtés, mais qui pourraient être inappropriées ou inutilisables en vérité).

2. Comment pourrions-nous gérer, du point de vue didactique, les difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de problèmes de construction géométrique, et de constructions de démonstrations mathématiques avec l'aide de Cabri-Géomètre, en même temps tirer du profit des avantages qu'offre cette technologie en ce qui a trait à une économie mathématique et à une économie de temps.

Nous espérons que ce travail centré sur la démonstration des propriétés métriques des coniques contribue à faire mieux comprendre les processus de résolution de ces problèmes en géométrie. Que cela va amener des réflexions sur les notions de preuve et démonstration dans des contextes papier-crayon et technologique.

Nous espérons aussi que cette recherche motive d'autres études qui viseraient à comprendre, pour les coniques, la démonstration de telles propriétés métriques, avec l'aide des technologies.

Appendices

APPENDICE 1 Introduction à Cabri-Géomètre

APPENDICE 2 Activités de formation

- ACTIVITÉ 1 : Déplacement
- ACTIVITÉ 2 : Médiatrice et circonférence
- ACTIVITÉ 3 : Médiatrice d'un segment
- ACTIVITÉ 4 : Des médiatrices et des cordes
- ACTIVITÉ 5 : Triangles congrus
- ACTIVITÉ 6 : Idée générale de la démonstration des triangles congrus
- ACTIVITÉ 7 : Trace
- ACTIVITÉ 8 : Le plan cartésien, la circonférence et son équation
- ACTIVITÉ 9 : Les lieux de points

APPENDICE 3 Cahier 1 de l'équipe (L'ellipse avec papier-crayon)

APPENDICE 4 Cahier 2 de l'équipe (La parabole avec l'aide de Cabri-Géomètre)

APPENDICE 5 Cahier 3 de l'équipe (Les coniques avec l'aide de Cabri-Géomètre)

APPENDICE A

INTRODUCTION À CABRI-GÉOMÈTRE

Introduction à Cabri-Géomètre

CABRI : **CA**hier **BR**ouillon **I**nteractif.

Bienvenue dans le monde interactif de Cabri-Géomètre! www.cabri.com

Cabri-Géomètre est un logiciel de géométrie dynamique destiné principalement à l'apprentissage de la géométrie en milieu scolaire.

Cabri-Géomètre II Plus offre des possibilités pour la découverte, l'apprentissage et l'exploration du monde passionnant de la géométrie dynamique.

Né à la fin des années 80 à l'IMAG, un laboratoire de recherche associé au CNRS (Centre National de la Recherche scientifique) et à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, Cabri-Géomètre compte aujourd'hui plus de quinze millions d'utilisateurs, sur ordinateurs et calculatrices graphiques Texas Instruments, à travers le monde. Cabri-Géomètre est maintenant développé et distribué par la société Cabrilog, fondée en mars 2000 par Jean-Marie Laborde, directeur de recherche au CNRS et père spirituel de Cabri-Géomètre.

La construction sur ordinateur de figures géométriques apporte une nouvelle dimension par rapport aux constructions classiques utilisant papier, crayon, règle et compas.

Cabri-Géomètre II Plus possède un grand nombre de fonctionnalités, puissantes et faciles à utiliser. Les figures, des plus simples aux plus compliquées peuvent être manipulées librement. À n'importe quel moment, on peut tester la construction d'une figure, émettre des conjectures, mesurer, calculer, effacer, cacher/montrer des objets, mettre des couleurs, des pointillés, du texte, ou bien tout recommencer. Cabri-Géomètre II Plus est à la pointe des logiciels pour l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie. Il s'adresse aux enseignants ainsi qu'aux étudiants, et peut être utilisé de l'école primaire à l'université.

APPENDICE B

ACTIVITÉS DE FORMATION

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

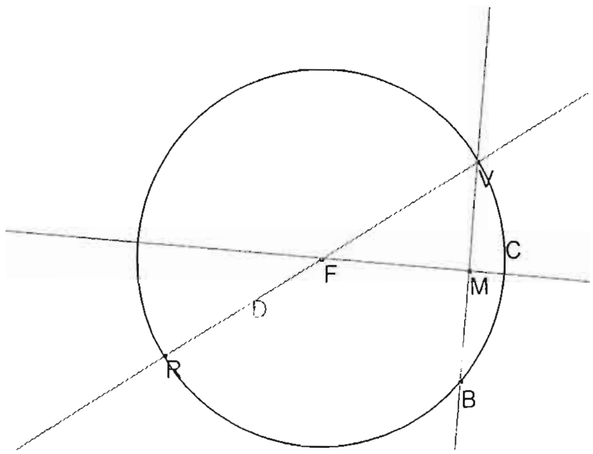
MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

Adaptation du livre Cabri-classe, *Apprendre la géométrie avec un logiciel*, Bernard Capponi et Colette Laborde, 1994.

ACTIVITÉ 01 : DÉPLACEMENT

- ✓ Ouvrez Cabri-Géomètre et dans le menu Fichier, **cliquez** en Nouveau. Appelez ce fichier : déplacement.
- ✓ Construisez deux points quelconques. (**L'outil Points/Point**, en sélectionnant un emplacement vide de la feuille.)
- ✓ Nommez F et B ces deux points (à partir de l'outil **Texte et Symboles/Nommer**).
- ✓ Construisez un cercle de centre F et qui passe par le point B avec l'outil **Courbes/Cercle**. Nommez (C) ce cercle.
- ✓ Construisez une droite qui passe par le centre du cercle et qui ne passe pas par B. Utilisez l'outil **Lignes/Droite.** Nommez (D) cette droite.
- ✓ En utilisant l'outil **Manipulation/Pointer.** Déplacez F, puis déplacez B et regardez si la droite (D) passe toujours par le centre du cercle. Sinon il faut refaire la figure.
- ✓ La droite (D) coupe le cercle en deux points R et V. Nommez ces deux points.
- ✓ Construisez la droite (BV) avec l'outil **Lignes/Droite** et le milieu du segment (BV). Avec l'outil **Construction/Milieu** on construit le milieu de deux points BV (il faut marquer avant le segment ou les deux points). Appelez M ce milieu.
- ✓ En utilisant l'outil **Construction/Droite Perpendiculaire,** construisez une droite qui passe par M et qui est perpendiculaire à (BV).



- ✓ Avec le **Pointer** déplacez F, B; et tout de suite, déplacez tous les points que vous pouvez déplacer.
- ✓ Notez dans le cadre ce qui vous semble important à observer sur la figure quand vous déplacez les points.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

Adaptation du livre Cabri-classe, *Apprendre la géométrie avec un logiciel*, Bernard Capponi et Collette Laborde, 1994.

ACTIVITÉ 02 : MÉDIATRICE ET CIRCONFÉRENCE

✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : médiatrice et circonférence

✓ Construisez un segment FA.

✓ Construisez un cercle de centre F passant par A.

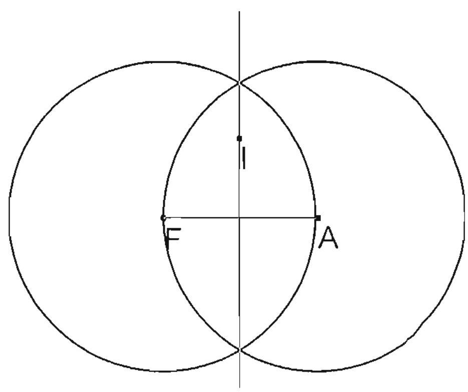
✓ Construisez un cercle de centre A passant par F.

✓ Construisez une droite D qui passe par les intersections des deux cercles.

✓ Vérifiez que cette droite est la médiatrice du segment FA. Pour cela, placez un point sur D (avec l'outil **Points/Point**).

✓ Nommez I ce point.

✓ Mesurez la distance de I à F et tout de suite sa distance à A (à l'aide de l'outil **Distance ou longueur**).



Cette droite est la médiatrice du segment FA.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

Adaptation du livre Cabri-classe, *Apprendre la géométrie avec un logiciel*, Bernard Capponi et Collette Laborde, 1994.

ACTIVITÉ 03 : MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

- ✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : médiatrice d'un segment.

1. Construisez un segment *CD* et sélectionnez-le avec le **Pointer**.

Construisez la médiatrice de ce segment en utilisant l'outil Médiatrice.

2. Construisez un segment *CD*.

Construisez le milieu *M* du segment *CD* à l'aide de l'outil **Milieu.**

Construisez la perpendiculaire à *CD* qui passe par *M*.

- ✓ Vérifiez que cette droite est la médiatrice du segment *CD*.

Mesurez et comparez les distances de *C* à *M* et de *M* à *D* à l'aide de l'outil **DISTANCE OU LONGUEUR**

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

Adaptation du livre Cabri-classe, *Apprendre la géométrie avec un logiciel*, Bernard Capponi et Collette Laborde, 1994.

ACTIVITÉ 04 : DES MÉDIATRICES ET DES CORDES

✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le « Th des cordes ».

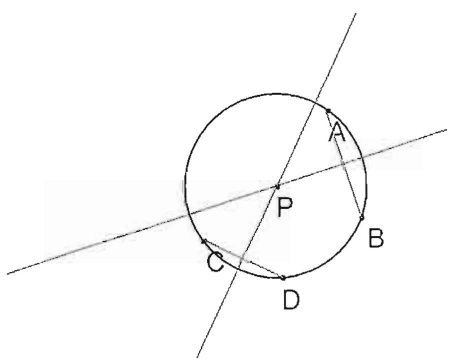
✓ Construisez un cercle de centre P (nommez-le point P).

✓ Construisez une corde d'extrémités A et B, deux points choisis sur le cercle.

✓ Construisez la médiatrice de cette corde $\overline{AB}$.

✓ Que se passe-t-il, par rapport au centre du cercle ?

✓ Vérifiez ce résultat en construisant la médiatrice d'une autre corde d'extrémités C et D sur le cercle, ou encore en déplaçant les points A et B sur le cercle.



✓ À quel théorème géométrique fait-on référence ?

____

____

✓ Construisez et nommez P le point d'intersection des médiatrices des cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$. Que constatez-vous ? Expliquez.

- ✓ À l’aide de l’outil **Distance et longueur**, mesurez la valeur des quatre rayons formés et en utilisant l’outil **Calculatrice,** calculez la mesure de chacun des deux diamètres intersectés.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

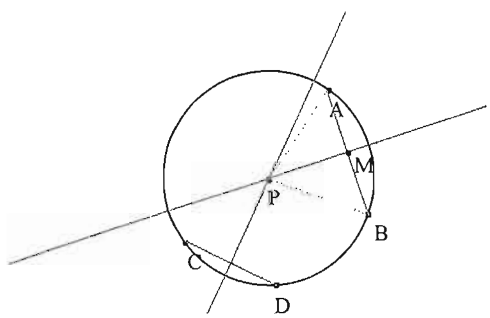
MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

ACTIVITÉ 05 : TRIANGLES CONGRUS

- ✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : triangles congrus.

Étant donné la figure suivante, comparez les deux triangles ΔAPM et ΔMPB, où M désigne le point milieu du segment AB.



- ✓ Pouvons-nous dire que ces deux triangles, ΔAPM et ΔBPM, sont des triangles congrus ?

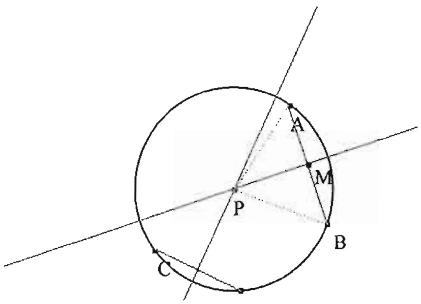
- ✓ Prouvez, avec l'aide des Outils **Distance ou longueur**, la relation entre les côtés de ces triangles.

- ✓ Démontrez (avec papier-crayon), de façon formelle ou mathématique, votre conjecture.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

ACTIVITÉ 06 : IDÉE GENÉRALE DE LA DÉMONSTRATION DES TRIANGLES CONGRUS[19]



- ✓ Pouvons-nous dire que les triangles ΔAPM et ΔBPM sont congrus ?
- ✓ Démontrez (avec papier-crayon), de façon formelle ou mathématique votre conjecture.

Hypothèse : Soit un cercle de centre P.

M est le point milieu de $\overline{AB}$, donc $m\overline{AM} = m\overline{MB}$.

Conclusion : Les triangles rectangles ΔAPM et ΔBPM sont congrus.

Idée générale de la démonstration[20]:

En reliant les extrémités de la corde au centre du cercle, on forme deux triangles rectangles. On mesure les rayons $\overline{AP}$ et $\overline{BP}$ avec la commande Distance ou longueur du menu Outil.

Démonstration : $m\overline{AP} = m\overline{BP}$, puisque $\overline{AP}$ et $\overline{BP}$ sont des rayons du cercle.

$m\overline{AM} = m\overline{MB}$ par hypothèse.

La droite MP passe par le centre du cercle et est perpendiculaire à $\overline{AB}$, car c'est la médiatrice de $\overline{AB}$. On a la congruence $\Delta APM \cong \Delta BPM$, par CCC.

---

[19] Démonstration prise de Réflexions mathématiques 536, tome 1, Breton et al. (1999). Montréal. Les Éditions CEC Inc.

[20] Dans le problème original était proposé ***preuve*** mais nous l'avons changé pour ***démonstration***, afin de ne pas mêler les élèves avec les deux concepts.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

Adaptation du livre Cabri-classe, *Apprendre la géométrie avec un logiciel*, Bernard Capponi et Collette Laborde, 1994.

ACTIVITÉ 07 : TRACE

Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : Trace.

Construisez un triangle ABC quelconque et mesurez l'angle BAC. Utilisez l'outil **Mesure d'angle** et pointez ensuite les points B, A, C.

Cliquez sur l'outil **Pointer** et après déplacez A en essayant de garder l'angle BAC égal à 90°.

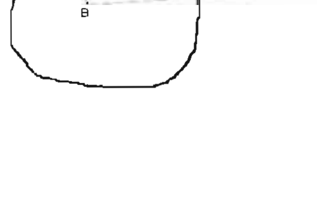
Pour garder la trace des positions de A où l'angle BAC reste égal à 90°, vous allez utiliser l'article « Trace » du menu **Construction**.

Pour cela :

- Cliquez sur le point A.
- Sélectionnez de nouveau le point A et **sans lâcher la souris**, déplacez A en gardant un angle égal à 90° : vous voyez la trace se dessiner.

Vous pouvez faire plusieurs essais mais à chaque fois il faut effacer le lieu pour recommencer.

Où se déplace le point A pour que l'angle BAC reste égal à 90° ? Montrez votre trace au professeur.



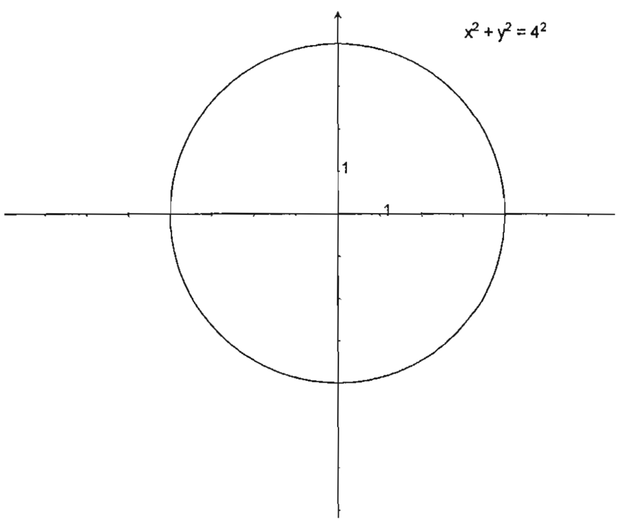
ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

ACTIVITÉ 08 : LE PLAN CARTESIEN, LA CIRCONFÉRENCE ET SON ÉQUATION

- ✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : équation de la circonférence.
- ✓ Construisez une plan cartésien avec l'outil **Montrez les axes.**
- ✓ Construisez une circonférence de centre (0,0) et rayon 4.
- ✓ Avec l'aide de l'outil **Coord. ou équation** trouvez l'équation de la circonférence (placez le curseur sur la circonférence).



- ✓ Effacez le système d'axes à l'aide de l'outil Cacher les axes.

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CABRI-GÉOMÈTRE : ACTIVITÉS DE FORMATION

ACTIVITÉ 09 : LIEU DE POINTS[21]

- ✓ Ouvrez un nouveau fichier et nommez-le : lieux de points.
- ✓ Construisez un cercle de centre O.
- ✓ Soit P un point en dehors de ce cercle.
- ✓ On relie P à un point V variable sur le cercle, ce qui fait varier d(P, V).
- ✓ On considère le point M milieu de $\overline{PV}$.

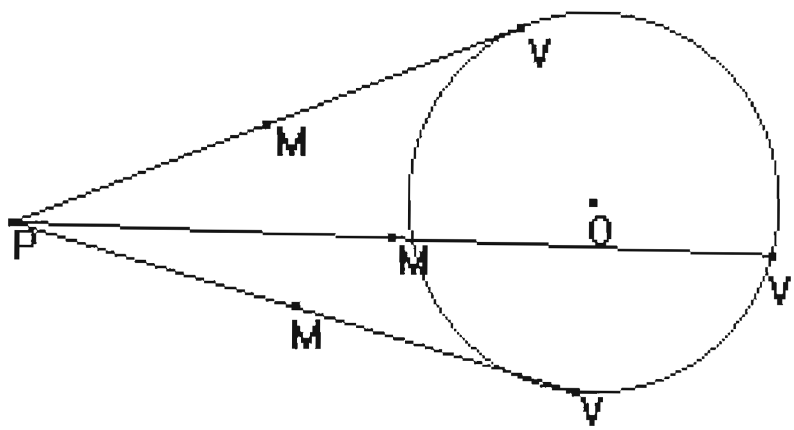
Quel est le lieu du point M lorsque V varie sur le cercle et parcourt un tour complet ?

____

Quelle propriété métrique pouvez-vous identifier dans la figure obtenue ?

____

[21] Idées prises de Breton, Guy et al. (1999). Réflexions mathématiques. Montréal. Les Éditions CEC Inc; http://fr.wikipedia.org/wiki/Lieu_géométrique



Note : La notion de lieu géométrique peut s'étendre à des lieux définis en fonction de toutes sortes de variations. Par exemple, on peut faire varier la position d'un point sur un cercle ou sur une droite et s'interroger sur le lieu que peut parcourir un autre point relié au premier. **La médiatrice** d'un segment, par exemple, est le lieu des points du plan à égale distance des extrémités de ce segment. Les sections coniques peuvent être définies comme des lieux : **Une ellipse** est le lieu des points pour lesquels la somme des distances aux foyers est une valeur donnée. **Une parabole** est le lieu des points pour lesquels les distances au foyer et à la droite directrice sont égales.

APPENDICE C

CAHIER 1 DE L'ÉQUIPE: L'ELLIPSE AVEC PAPIER-CRAYON

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

<u>CAHIER 1 DE L'ÉQUIPE</u>

NOMS DES MEMBRES DE L'ÉQUIPE :

____

____

____

____

____

Soient F et F' deux points distincts, (C) un cercle de centre F et de rayon r, $r > m\overline{FF'}$.

Soit V un point variable sur le cercle. On trace le segment $\overline{F'V}$ et on construit sa médiatrice d. Elle rencontre le rayon $\overline{FV}$ en P.

Construire sur papier au moins sept points P avec crayon, compas, règle à mesurer, etc.

Quel est le lieu géométrique de P lorsque vous reliez tous les points P trouvés ?

QUESTIONS

1. Montrez le lieu géométrique des différents points *P* demandés lorsque *V* prend différentes positions sur le cercle.

Esquisse du graphique (joignez votre graphique comme annexe)

2. Une fois le lieu géométrique de *P* trouvé, que faut-il faire pour s'assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est bien celle d'une ellipse ?

3. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse.

APPENDICE D

CAHIER 2 DE L'ÉQUIPE: LA PARABOLE AVEC CABRI-GÉOMÈTRE

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

CAHIER 2 DE L'ÉQUIPE

NOMS DES MEMBRES DE L'ÉQUIPE :

____

____

____

____

____

Trace une ligne droite R et place un point F fixe à l'extérieur de celle-ci. On construit un point Q variable sur R. Trace la médiatrice de $\overline{FQ}$. Trace une droite M perpendiculaire à la droite R et passant par Q. Appelle P le point d'intersection entre la droite M et la médiatrice.

Quel est le lieu géométrique de P lorsque Q se déplace sur la droite R ?

QUESTIONS

1. Montrez le lieu géométrique de *P* lorsque *Q* se déplace sur la droite *R*.

Esquisse du graphique (de ce que vous avez eu comme résultat)

2. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour s'assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une parabole ?

3. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une parabole.

4. Déplacez le foyer de la parabole en haut et en bas. Qu'est-ce qui change ?

5. Si l'on fait coïncider le foyer F avec le point Q, vers quoi va tendre le lieu de P ? Comment reste la parabole ?

6. Dans le cas où le foyer est placé au-dessous de la ligne droite R, comment reste la concavité de la parabole ?

APPENDICE E

CAHIER 3 DE L'ÉQUIPE: LES CONIQUES AVEC CABRI-GÉOMÈTRE

ÉCOLE JEAN-JACQUES-BERTRAND

MATHÉMATIQUES 536

<u>CAHIER 3 DE L'ÉQUIPE</u>

NOMS DES MEMBRES DE L'ÉQUIPE :

____

____

____

____

____

Étant donné un cercle de centre F et rayon arbitraire, soit F' un point à l'intérieur du cercle et V un point lié au cercle et variable sur ce cercle. On trace le segment $\overline{VF'}$ et la droite VF. On construit la médiatrice d de $\overline{VF'}$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice de $\overline{VF'}$ et de la droite VF.
Quel est le lieu géométrique de P lorsque V varie sur le cercle ?

1a. Si on laisse fixe le point F' et qu'on fait varier le point V, déterminez quel est le lieu géométrique de P lorsque V parcourt le cercle.

Esquisse d'un graphique

1b. Une fois trouvé le lieu de points, déterminez trois positions de *P* pour trois positions de *V* choisie sur le cercle.

Montrez-le à l'enseignant.

2. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une ellipse ?

3. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une ellipse.

4. Si l'on rapproche F' du cercle jusqu'à le faire coïncider avec un point du cercle, vers quoi va tendre le lieu de P ?

5a. Si *F'* se rapproche indéfiniment de *F*, vers quoi va tendre le lieu de *P* ?

5b. Qu'arrive-t-il alors à l'équation de l'ellipse ?

6. Si l'on déplace *F'* en dehors du cercle, explique ce que devient le lieu de *P*, lors du déplacement de *V* sur le cercle. Observe plusieurs écrans saisis à différents moments.

7. Une fois que vous avez trouvé le lieu géométrique, que faire pour vous assurer que la représentation graphique ainsi obtenue est celle d'une hyperbole ?

8. Démontrez (avec papier-crayon) que cette figure correspond bien à une hyperbole.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Académie Nantes. Espace Pédagogique : problèmes ouverts. [En ligne]. http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/72773953/0/fiche___ressourcepedagogique/ &RH=1176644266171. Consulté le 4 mars 2010.

Arcavi, A. et Hadas, N. 2000. Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* vol. 5, p. 25-45.

Artigue, M. 1996. Ingénierie didactique. In *Didactique des mathématiques*, sous la dir. de J. Brun, p. 243-274. Delachaux et Niestlé, Lausanne, Suisse.

Balacheff, N. 1999. Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Mai-Juin.

Breton, G., Côté, B., Delisle, C., Deschênes, A. et Leduc, A. 1999. *Réflexions mathématiques*. Les Éditions CEC Inc., Montréal.

Buekenhout, F. 1999. « Mathématiques et Pédagogie. Les démonstrations : une vision génétique et en spirale ». *Université libre de Bruxelles*, n°124, p. 15-43.

Camou B. 2009. Les mathématiques: Faillibles ou infailibles. http://www.pedagopsy.eu/maths_bernardo.htm

Capponi, B. et Laborde, C. (eds). 1994. *Actes de l'université d'été : Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : utilisation du logiciel Cabri-Géomètre, de l'ordinateur à la calculatrice. Des nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie*. IREM de Grenoble, France.

Cazzaro, J-P., Noël, G., Pourbaix, F. et Tilleul, P. (2001). *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*. De Boeck, Bruxelles, Belgique.

Corriveau, C. et Tanguay, D. 2007. Formalisme accru du secondaire au collégial : Les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin AMQ*, vol. 47, n°1, p. 6-25.

Duval, R. 1995. *Sémiosis et pensée humaine.* Coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

Duval, R. 1993. « Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». Annales de didactique et de sciences cognitives, n°5, p. 37-65. IREM de Strasbourg.

Duval, R. 1992-93. Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n°31, p. 37-67.

Duval, R. 1991. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, n°3, p. 233-261.

Hannapier (1811). Curvigraphe. En Dictoinnaire chronologique et raisonné des découvertes (1789-1820), page 333.
Dictionnaire chronologique et raisonné des découvertes (1789-1820). Recherche Google Livres.

Hitt, F. 2006. L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? Une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf (1713). In D. Tanguay (éd.), Actes du colloque GDM-2005, *Raisonnement mathématique et formation citoyenne*, pp. 135-146. UQAM.

Hitt, F. 2004. Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, vol 30, n°2, p. 329-354.

Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. 2000. *Introduction à la recherche en éducation.* Éditions du CRP, Sherbrooke.

Larios, V. 2006. La rigidité géométrique et la préférence de propriétés géométriques dans un environnement de géométrie dynamique dans le niveau moyen de la secondaire. *Relime*, vol. 9, n°3, p. 361-382.

Mariotti, M. A. 2001. La preuve en mathématiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 1, n°4, p. 437-458.

Pluvinage, F. 1989. Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 2, p. 5-24, IREM de Strabourg.

Pólya, G. 1965. *Comment poser et résoudre un problème*. 2e édition, Dunod, Paris.

Québec, ministère de l'Éducation. 1998. *Programme d'études, mathématiques 536.* Québec : Les Publications du Québec.

Québec, ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. 2003-2006. *Programme d'informations de l'école québécoise secondaire, 2e cycle. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie.* www.documents.educationquebec.qc.ca/programmes et http://www.formulaire.gouv.qc.ca/cgi/affiche_doc.cgi?dossier=874&table=0 (Consulté en septembre 2008).

Schoenfeld, A. 1985. *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York.

Tanguay, D. 2006. Comprendre la structure déductive en démonstration. *Envol*, n°134, p. 9-17.

Tanguay, D. 2004. La complexité du raisonnement déductif en géométrie. In F. Caron (éd.), Actes du congrès GDM 2004, *Affronter la complexité : Nouvel enjeu de l'enseignement des mathématiques ?*, pp. 73-84. Université de Montréal.

Tanguay, D. 2002. Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et de la technologie*, vol. 2, n°3, p. 371-396.

Tessière, G. 1993. *Pratiques de recherche en Éducation : Les outils du chercheur débutant*. Presses universitaires de Rennes 2, France.

Trouche, L. 2005. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 25, n°1, p. 91-138.

Wikipédia. 2011. Ellipse. http://fr.wikipedia.org/wiki/Ellipse_%28math%C3%A9matiques%29#D.C3.A9finition_bifocale_de_l.27ellipse