

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MODÈLES STOCHASTIQUES POUR
L'INTERACTION PRÉDATEUR-PROIE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

VASILE VANCIU

JUIN 2011

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de mémoire Sorana Froda et mon directeur de mémoire René Ferland, pour m'avoir accordé la confiance, pour leur soutien et encouragement pendant mes études, puis tout au long de ce travail de recherche.

Je remercie tous les enseignants du Département de mathématiques de l'UQAM pour la qualité de leurs cours et pour leur grande disponibilité afin d'aider les étudiants.

Je remercie ma famille pour leur présence permanente, pour leur soutien, pour leur amour.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	v
TABLE DES FIGURES	vi
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
LE SYSTÈME DÉTERMINISTE PRÉDATEUR PROIE DE LOTKA-VOLTERRA	3
1.1 Introduction	3
1.2 La solution du système Lotka-Volterra	5
1.3 L'approximation de la solution du système Lotka-Volterra au voisinage d'un point d'équilibre	6
1.4 Propriétés utiles pour l'estimation des paramètres du système Lotka-Volterra	12
CHAPITRE II	
PROCESSUS DE NAISSANCE ET MORT NON HOMOGENES : DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES	17
2.1 Processus de Poisson non homogènes	17
2.1.1 Définitions et propriétés	18
2.1.2 Temps d'attente d'un processus de Poisson non homogène	27
2.2 Processus de naissance et mort non homogènes	31
CHAPITRE III	
MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE L'INTERACTION PRÉDATEUR-PROIE	47
3.1 Aperçu de la littérature sur la modélisation stochastique de type Lotka-Volterra	47
3.2 Modélisation stochastique bivariée du système Lotka-Volterra par deux processus de naissance et mort non homogènes indépendants	50
3.2.1 Motivation et description du modèle	50
3.2.2 La probabilité d'extinction	51
3.2.3 Âge à l'extinction	56

3.3	Modélisation stochastique du système Lotka-Volterra par des processus de Poisson non homogènes indépendants	60
CHAPITRE IV		
	ESTIMATION DES PARAMÈTRES	63
4.1	Contexte d'application	63
4.2	Estimation	65
4.2.1	Estimation ponctuelle α/γ et δ/γ	65
4.2.2	Estimation de α, γ, δ	67
4.3	Intervalle de confiance	68
4.4	Simulations numériques et analyse de données	72
	CONCLUSION	77
ANNEXE A		
	THÉORÈME D'UNICITÉ CAUCHY-LIPSCHITZ	79
	BIBLIOGRAPHIE	81

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Estimation ponctuelle des paramètres	74
4.2	Probabilité empirique de couverture	74

TABLE DES FIGURES

4.1 Oscillations des populations de rat musqué et vison pendant 64 années (1848-1911)	76
----------------------------------------------------------------------------------------------------	----

RÉSUMÉ

Dans cette étude, nous nous penchons sur le modèle Lotka-Volterra, qui est un des premiers modèles prédateur-proie basés sur des principes mathématiques. Le mémoire s'inscrit dans le cadre de la modélisation stochastique du système Lotka-Volterra, c'est-à-dire notre modèle prend en considération que les tailles des populations de proies et de prédateurs sont des variables aléatoires. L'objectif principal est de faire de l'inférence statistique et de la simulation numérique à partir des modèles construits. Nous nous intéressons également à analyser la probabilité d'extinction pour chaque population. Nos modèles sont basés sur certaines propriétés du système déterministe Lotka-Volterra, ainsi que des propriétés des processus de Poisson non homogènes et des processus de naissance et mort non homogènes. Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'estimation de paramètres et son étude à partir de simulations numériques.

MOTS-CLÉS : système Lotka-Volterra, processus de Poisson non homogène, processus de naissance et mort non homogène, modélisation stochastique, estimation de paramètres, interaction prédateur-proie.

INTRODUCTION

Le but principal de cette étude est de présenter de nouveaux modèles stochastiques en interaction prédateur-proie, modèles basés sur certaines propriétés du modèle déterministe classique, ainsi que sur les propriétés des processus de Poisson et de naissance et mort non homogènes.

Un des premiers modèles décrivant l'interaction entre les espèces a été développé dans les années 1920, indépendamment par l'Américain Alfred Lotka (1880-1949) et l'Italien Vito Volterra (1860-1940), et est connu sous le nom de modèle de Lotka-Volterra ou de modèle prédateur-proie.

Le modèle de Lotka-Volterra est à la base d'une vaste littérature. Il reste le point de départ de plusieurs modèles proposés actuellement. Généralement, un modèle déterministe est représenté par un système d'équations différentielles. Si on connaît l'état d'un tel système à un instant initial, on peut calculer son état à tout autre instant. Une modélisation stochastique qui correspond à ce système est une où on utilise des variables aléatoires, indexées par le temps, dans la définition du système. La sortie d'un tel modèle n'est alors pas une seule valeur mais une distribution de valeurs. C'est à ce type de modélisation qu'on s'intéresse dans ce travail. Le but final de notre modélisation est de proposer une méthode d'estimation qui permet de retrouver les paramètres du système déterministe.

Le premier chapitre débute par une description des paramètres du système déterministe de Lotka-Volterra et quelques résultats fondamentaux concernant sa solution. Ensuite,

on met en évidence les propriétés qui seront directement utilisées dans l'inférence statistique.

Le second chapitre se concentre sur les résultats théoriques relatifs aux processus de Poisson non homogènes et aux processus de naissance et de mort non homogènes. La fonction génératrice de probabilités est l'outil principal qu'on utilise dans nos démonstrations. Dans la deuxième section on va se placer dans le cadre plus précis de processus de naissance et de mort non homogènes linéaires, c'est-à-dire ceux dont les taux de naissance et mort sont, respectivement, de la forme :

$$\lambda_n(t) = n \cdot \lambda(t) \text{ (naissance)}, \quad \mu_n(t) = n \cdot \mu(t) \text{ (mort)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont des fonctions positives. Dans ce cas particulier, on peut trouver des formules pour les probabilités de transition, ainsi que l'espérance et la variance du processus. De plus, on donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'extinction de chacune des populations.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de différents modèles stochastiques pour l'interaction prédateur-proie. On commence par quelques commentaires concernant des modèles bivariés homogènes de la littérature (Swift, Renshaw, Hitchcock), et ensuite nous proposons et étudions deux nouveaux modèles du point de vue de leurs propriétés intéressantes en inférence statistique. On retient le deuxième modèle et on explique notre choix car on propose une méthode d'estimation basée sur ce modèle.

Finalement, dans le quatrième chapitre, on décrit la méthodologie appliquée pour l'estimation des paramètres. On applique cette méthode à des données simulées et un ensemble de données réelles, bien connues dans la littérature. On présente les résultats obtenus et on discute les limites d'applicabilité de ce modèle.

CHAPITRE I

LE SYSTÈME DÉTERMINISTE PRÉDATEUR PROIE DE LOTKA-VOLTERRA

1.1 Introduction

Le modèle qui est au centre de notre étude a été proposé, indépendamment, par V. Volterra en 1926 et A. J. Lotka en 1925, d'où le nom Lotka-Volterra. Il joue un rôle important dans l'étude de la dynamique des populations et il a été introduit pour décrire l'interaction entre deux types d'espèces : les prédateurs et les proies. Avant de décrire ce système, on donne une interprétation des paramètres de ce système Lotka-Volterra.

Soit $x(t)$ et $y(t)$ le nombre de proies et de prédateurs au temps t . On peut définir deux fonctions :

$$x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto x(t),$$

$$y : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t),$$

qu'on suppose de classe C^1 pour tout $t > 0$.

Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- en absence de prédateurs, les proies auraient une croissance exponentielle, c'est-à-dire, on aurait

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t),$$

où $x(t) > 0$ et $\alpha > 0$ est le taux de naissance.

- en absence de proies, les prédateurs auraient une décroissance exponentielle, faute de

nourriture, et donc on aurait

$$\frac{dy(t)}{dt} = \delta y(t),$$

où $y(t) > 0$ et $\delta > 0$ est le taux de mort.

Si les deux espèces sont présentes, on suppose que :

- le taux de prédation (capture) des proies est proportionnel au nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies, représenté par

$$\beta x(t)y(t); \beta > 0$$

- le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel au nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies, représenté par

$$\gamma x(t)y(t), \gamma > 0.$$

Du point de vue mathématique, ces suppositions conduisent au système non linéaire de deux équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \delta y(t), \\ x(0) > 0, y(0) > 0, \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce système est appelé système de Lotka-Volterra.

Observons que le système (1.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d(\ln x(t))}{dt} = \alpha - \beta y(t), \\ \frac{d(\ln y(t))}{dt} = \gamma x(t) - \delta, \\ x(0) > 0, y(0) > 0, \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans la section suivante nous rappelons, sans démonstration, quelques propriétés fondamentales de l'étude des équations différentielles ordinaires (EDO), qui ne seront pas

utilisées directement dans la suite du mémoire. Ensuite, nous prouvons des propriétés que nous considérons essentielles dans les analyses statistiques du chapitre 4.

1.2 La solution du système Lotka-Volterra

La solution du système (1.1) ne peut pas s'écrire de façon analytique, mais elle a été étudiée de manière qualitative. Selon les résultats classiques concernant l'existence et l'unicité des solutions d'un système EDO qui passe par une valeur initiale donnée, (x_0, y_0) , l'existence locale et l'unicité de la solution du système Lotka-Volterra est assurée (théorème de Cauchy-Lipschitz). On peut trouver une preuve de ce résultat fondamental dans Hirsch et Smale (1974, chapitre 15). On remarque qu'il y a un façon élémentaire (intuitive) de prouver l'unicité de la solution du système Lotka-Volterra. La preuve repose sur un résultat de Lax, Burstein and Anneli (1976, exercice 2.4) et nous la présentons dans l'annexe A de ce mémoire.

Pour l'existence globale de la solution du système (1.1), on a le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit la fonction $H : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :*

$$H(x, y) = \gamma x - \delta \ln x + \beta y - \alpha \ln y. \quad (1.3)$$

Si $(x(t), y(t))$ est une solution du système (1.1) alors, pour tout t :

$$H(x(t), y(t)) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

L'équation $H(x, y) = c$ représente une famille des courbes fermées qui sont les *trajectoires* ou orbites du système. Le choix du point de départ $(x(0), y(0))$ détermine la valeur de la constante c .

Preuve

Il suffit de montrer que :

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = 0,$$

où $(x(t), y(t))$ est une solution du système (1.1). On dérive par rapport à t la fonction composée $H(x(t), y(t))$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{dH(x(t), y(t))}{dt} &= \gamma \frac{dx(t)}{dt} - \frac{\delta}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + \beta \frac{dy(t)}{dt} - \frac{\alpha}{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} \\
 &= \left[\gamma - \frac{\delta}{x(t)} \right] \frac{dx(t)}{dt} + \left[\beta - \frac{\alpha}{y(t)} \right] \frac{dy(t)}{dt} \\
 &= \left[\gamma - \frac{\delta}{x(t)} \right] [\alpha x(t) - \beta x(t)y(t)] + \left[\beta - \frac{\alpha}{y(t)} \right] [\gamma x(t)y(t) - \delta y(t)] \\
 &= \alpha \gamma x(t) - \alpha \delta - \beta \gamma x(t)y(t) + \beta \delta y(t) \\
 &+ \beta \gamma x(t)y(t) - \alpha \gamma x(t) - \beta \delta y(t) + \alpha \delta \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$



1.3 L'approximation de la solution du système Lotka-Volterra au voisinage d'un point d'équilibre

Si on considère un système EDO de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = g(x(t), y(t)), \\ t \geq 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est appelée *isocline verticale* et la courbe d'équation $g(x, y) = 0$ est appelée *isocline horizontale*.

Dans notre cas, les droites d'équations :

$$x = 0, \quad x = \delta/\gamma,$$

sont les isoclines verticales et les droites d'équations :

$$y = 0, \quad y = \alpha/\beta,$$

sont les isoclines horizontales.

Les points d'intersection des isoclines sont les points d'équilibre du système, c'est-à-dire

les points où la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout $t \geq 0$.

On observe que le système (1.1) admet deux points d'équilibre :

$$(0, 0), (\delta/\gamma, \alpha/\beta).$$

Hirsch et Smale (1974, chapitre 12) font l'analyse qualitative du système (1.1). Ils prouvent que le point d'équilibre $w^* = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ est un *centre*, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs initiales (x_0, y_0) , $x_0 > 0, y_0 > 0$, la solution est périodique et le couple $(x(t), y(t))$ décrit une courbe fermée dans le plan. Nous allons donner une preuve intuitive, élémentaire, de ce fait, qui est crucial pour nos analyses statistiques. Cette preuve élémentaire suit Lax, Burstein and Anneli (1976).

Propriété 1.1 *Les solutions du système (1.1) sont périodiques.*

Preuve

Les droites isoclines $x = \delta/\gamma$, $y = \alpha/\beta$ divisent le quadrant $\Pi = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ en quatre régions, notées $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont strictement monotones. Donc, on a :

$$\Pi_1 = \{(x, y) \in \Pi \mid dx(t)/dt > 0, dy(t)/dt < 0\}.$$

$$\Pi_2 = \{(x, y) \in \Pi \mid dx(t)/dt > 0, dy(t)/dt > 0\},$$

$$\Pi_3 = \{(x, y) \in \Pi \mid dx(t)/dt < 0, dy(t)/dt > 0\},$$

$$\Pi_4 = \{(x, y) \in \Pi \mid dx(t)/dt < 0, dy(t)/dt < 0\}.$$

On suppose, sans restreindre la généralité, que le point initial $(x(0), y(0))$ est situé dans la zone Π_1 .

Puisque les fonctions x et y sont monotones et bornées, on peut affirmer que :

- il existe un temps $t_1 > 0$ à partir duquel $(x(t), y(t)) \in \Pi_2$,
- il existe un temps $t_2 > t_1$ à partir duquel $(x(t), y(t)) \in \Pi_3$,
- il existe un temps $t_3 > t_2$ à partir duquel $(x(t), y(t)) \in \Pi_4$,

- il existe un temps $t_4 > t_3$ à partir duquel $(x(t), y(t)) \in \Pi_1$,
- il existe un temps $t_5 > t_4$ à partir duquel $(x(t), y(t)) \in \Pi_2$.

On peut conclure que la solution traverse les quatre régions successivement. De plus, notons que la région Π_2 est bornée à gauche par la droite verticale $x = \delta/\gamma$ et en haut par la droite horizontale $y = \alpha/\beta$.

D'après le théorème 1.1, on sait que la trajectoire est une courbe fermée d'équation

$$H(x, y) = \gamma x - \delta \ln x + \beta y - \alpha \ln y = c,$$

et donc $H(x(t_1), y(t_1)) = H(x(t_5), y(t_5))$. Cela implique :

$$\gamma x(t_1) - \delta \ln x(t_1) + \beta y(t_1) - \alpha \ln y(t_1) = \gamma x(t_5) - \delta \ln x(t_5) + \beta y(t_5) - \alpha \ln y(t_5)$$

Mais, par la définition de t_1 et t_5 on a :

$$x(t_1) = x(t_5) = \delta/\gamma$$

et donc :

$$\beta y(t_1) - \alpha \ln y(t_1) = \beta y(t_5) - \alpha \ln y(t_5). \quad (1.5)$$

On va montrer que $y(t_1) = y(t_5)$.

Soit la fonction $h : (0, \frac{\alpha}{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(y) = \beta y - \alpha \ln y$. La dérivée de h est égale à :

$$\frac{dh(y)}{dy} = \beta - \frac{\alpha}{y} < 0, \quad \forall y \in (0, \frac{\alpha}{\beta}).$$

donc la fonction h est strictement monotone. L'équation (1.5) s'écrit sous la forme $h(y(t_1)) = h(y(t_5))$ ce qui implique, en utilisant la propriété de stricte monotonie pour la fonction h , que $y(t_1) = y(t_5)$. On conclut que les points $(x(t_1), y(t_1))$ et $(x(t_5), y(t_5))$ coïncident.

On va montrer que la période commune de $x(t)$ et $y(t)$ est égale à $T = t_5 - t_1$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ arbitraire, les couples

$$(x(t + t_1), y(t + t_1)), (x(t + t_5), y(t + t_5))$$

sont des solutions pour le système (1.1) et vérifient la même condition initiale, car on a, par définition, $x(t_1) = x(t_5) = \delta/\gamma$ et on a prouvé que $y(t_1) = y(t_5)$. Donc, d'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz les deux solutions doivent être égales :

$$\begin{cases} x(t + t_1) = x(t + t_5), \\ y(t + t_1) = y(t + t_5). \end{cases} \quad (1.6)$$

Si on remplace t par $t - t_1$ dans les relations (1.6), on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = x(t + t_5 - t_1), \\ y(t) = y(t + t_5 - t_1), \end{cases} \quad (1.7)$$

ce qui prouve que la période commune est égale à $t_5 - t_1$.



On se propose d'étudier le comportement des solutions au voisinage du point d'équilibre $w^* = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$. Pour une solution, dont la valeur initiale $(x(0), y(0))$ est dans le voisinage du point d'équilibre $w^* = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, on a le résultat suivant qui permet d'obtenir des formules analytiques pour les solutions du système (1.1), voir Pielou (1969, chapitre 6).

Théorème 1.2 *Dans le voisinage du point d'équilibre, $w^* = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, les solutions du système (1.1) sont approximativement égales aux fonctions :*

$$\tilde{x}(t) = \frac{\delta}{\gamma} \left[1 + c_1 \cos(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right], \quad (1.8)$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left[1 + c_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right], \quad (1.9)$$

où c_1 et $c_2 > 0$ sont des constantes d'intégration.

On voit que pour avoir $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ la constante c_1 doit satisfaire le système d'inégalités :

$$\begin{cases} 1 - c_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} > 0, \\ 1 - c_1 > 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

ce qui implique

$$c_1 < \min \left(1, \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \right).$$

Preuve

Soit $(x(t), y(t))$ la solution du système (1.1) et soit $w^* = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, le point d'équilibre d'intérêt. On suppose, de plus, que le point d'équilibre est à l'origine du système de coordonnées.

On pose :

$$(x(t), y(t)) = \left(\epsilon u(t) + \frac{\delta}{\gamma}, \epsilon v(t) + \frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (1.11)$$

Alors, les équations du système (1.1) sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \epsilon \frac{du(t)}{dt} = \alpha \left(\epsilon u(t) + \frac{\delta}{\gamma} \right) - \beta \left(\epsilon v(t) + \frac{\alpha}{\beta} \right) \left(\epsilon v(t) + \frac{\alpha}{\beta} \right) \\ &= \epsilon \alpha u(t) + \alpha \frac{\delta}{\gamma} - \epsilon^2 \beta u(t)v(t) - \epsilon \beta u(t) \frac{\alpha}{\beta} - \epsilon \beta \frac{\delta}{\gamma} v(t) - \beta \frac{\delta}{\gamma} \frac{\alpha}{\beta} \\ &= -\epsilon \frac{\beta \delta}{\gamma} v(t) - \epsilon^2 \beta u(t)v(t); \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \epsilon \frac{dv(t)}{dt} = \gamma \left(\epsilon u(t) + \frac{\delta}{\gamma} \right) \left(\epsilon v(t) + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \delta \left(v(t) + \frac{\alpha}{\beta} \right) \\ &= \epsilon^2 \gamma u(t)v(t) + \epsilon \gamma \frac{\alpha}{\beta} u(t) + \epsilon \frac{\delta}{\gamma} \gamma v(t) + \gamma \frac{\delta}{\gamma} \frac{\alpha}{\beta} - \epsilon \delta v(t) - \frac{\alpha}{\beta} \delta \\ &= \epsilon \frac{\alpha \gamma}{\beta} u(t) + \epsilon^2 \gamma u(t)v(t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dans le voisinage du point d'équilibre, le produit $\epsilon^2 u(t)v(t)$ devient négligeable car $(x(t), y(t))$ est proche de $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, on linéarise le système. Alors, on a la forme réduite des équations (1.12) et (1.13) :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -\frac{\beta \delta}{\gamma} v(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\alpha \gamma}{\beta} u(t), \end{cases} \quad (1.14)$$

où on suppose que $u(t)$ et $v(t)$ sont des tailles des populations.

Le système (1.14) est un système linéaire, facile à résoudre. On remarque que :

$$\frac{\frac{du(t)}{dt}}{\frac{dv(t)}{dt}} = -\frac{v(t) \beta^2 \delta}{u(t) \alpha \gamma^2},$$

et donc :

$$\alpha \gamma^2 u(t) \frac{du(t)}{dt} + \beta^2 \delta v(t) \frac{dv(t)}{dt} = 0. \quad (1.15)$$

Par intégration par rapport à t , on obtient :

$$\alpha \gamma^2 u^2 + \beta^2 \delta v^2 = K, \quad (1.16)$$

où K est une constante réelle. Cela donne, dans le plan, l'équation d'une ellipse centrée en $(0, 0)$. Cela permet d'écrire explicitement $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps. En utilisant les équations (1.14), et (1.16) on a alors le système :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -\frac{\beta \delta}{\gamma} v(t), \\ \alpha \gamma^2 u(t)^2 + \beta^2 \delta v(t)^2 = K. \end{cases} \quad (1.17)$$

En isolant $v(t)$ dans la deuxième équation du système (1.17), c'est-à-dire en prenant :

$$v(t) = \sqrt{\frac{K - \alpha \gamma^2 u^2(t)}{\beta^2 \delta}}$$

la première équation du système (1.17) devient :

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{\beta \delta}{\gamma} \sqrt{\frac{K - \alpha \gamma^2 u^2(t)}{\beta^2 \delta}} \quad (1.18)$$

Pour résoudre l'équation différentielle (1.18) il est suffisant de l'écrire sous la forme :

$$-\frac{du(t)}{\sqrt{\frac{K}{\alpha \gamma^2} - u^2(t)}} = \sqrt{\alpha \delta} dt, \quad (1.19)$$

et d'intégrer par rapport à t . Cela donne la réponse :

$$\arccos \frac{u(t)}{\sqrt{\frac{K}{\alpha \gamma^2}}} = \sqrt{\alpha \delta} t + c_2, \quad (1.20)$$

où $c_2 \in [0, 2\pi)$ est une constante d'intégration.

Finalement, avec la notation $\sqrt{K} = c_1 \delta \sqrt{\alpha}$ on obtient, à partir de (1.11) :

$$\tilde{x}(t) = \frac{\delta}{\gamma} \left[1 + c_1 \cos(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right]. \quad (1.21)$$

De façon analogue, on obtient l'expression de $\tilde{y}(t)$:

$$\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left[1 + c_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right]. \quad (1.22)$$



En tenant compte des expressions analytiques pour $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$, on peut déduire certaines propriétés utiles pour l'estimation.

Corollaire 1.1 *i) Dans le voisinage du point d'équilibre, les solutions du système (1.17) sont des fonctions périodiques, de même période, égale à :*

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\delta}}.$$

On remarque que T dépend seulement des paramètres α et δ .

ii) Les amplitudes des oscillations sont égales à : $\frac{\delta}{\gamma}c_1$ pour les proies et à $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}c_1$ pour les prédateurs. On observe que ces amplitudes dépendent autant des paramètres que de la constante d'intégration c_1 .

1.4 Propriétés utiles pour l'estimation des paramètres du système Lotka-Volterra

Dans le chapitre IV, on va utiliser certaines des propriétés du système (1.1) pour estimer les paramètres. Nous énonçons maintenant ces propriétés.

Propriété 1.2 *Soit $A = \alpha/\gamma$ et $D = \delta/\gamma$, et soit $\xi = \beta/\gamma$. Alors, pour les mêmes valeurs initiales (x_0, y_0) , il y a un système de type Lotka-Volterra où les termes d'interaction sont égaux, et qui admet le même centre (D, A) que le système de paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.*

Preuve

En effet, on pose :

$$\tilde{\alpha} = \alpha/\sqrt{\xi}, \quad \tilde{\delta} = \delta\sqrt{\xi}, \quad \tilde{\beta} = \beta/\sqrt{\xi} = \sqrt{\beta\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma\sqrt{\xi} = \sqrt{\beta\gamma}$$

et on considère le système :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \tilde{\alpha}u(t) - \tilde{\beta}u(t)v(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \tilde{\gamma}u(t)v(t) - \tilde{\delta}v(t), \\ u(0) = x_0 > 0, \quad v(0) = y_0 > 0, \\ \tilde{\alpha} > 0, \quad \tilde{\beta} > 0, \quad \tilde{\gamma} > 0, \quad \tilde{\delta} > 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Par construction, $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$, et on a :

$$A = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D = \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\gamma}} = \frac{\delta}{\gamma},$$

tel que désiré.



Donc, en estimation on ne considère que cette classe de systèmes. Ensuite, nous étudions une reparamétrisation qui n'affecte que la période des solutions, mais pas leurs amplitudes.

Propriété 1.3 *Soit le système de type Lotka-Volterra (1.23), où les termes d'interaction sont égaux. Alors, il y a un système pour lequel la solution passe par $(u(0), v(0))$ et est de période $T^* = \tilde{\gamma}T$, où T est la période commune de $u(t)$ et $v(t)$.*

Preuve

Le système (1.23) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \tilde{\gamma} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}} u(t) - u(t)v(t) \right), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \tilde{\gamma} \left(u(t)v(t) - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\gamma}} v(t) \right), \\ u(0) > 0, \quad v(0) > 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Si on change l'échelle de temps de façon $t \mapsto t/\tilde{\gamma}$, on a le système :

$$\begin{cases} \frac{du(t/\tilde{\gamma})}{dt} = \tilde{\gamma} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}} u(t/\tilde{\gamma}) - u(t/\tilde{\gamma})v(t/\tilde{\gamma}) \right), \\ \frac{dv(t/\tilde{\gamma})}{dt} = \tilde{\gamma} \left(u(t/\tilde{\gamma})v(t/\tilde{\gamma}) - \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\gamma}} v(t/\tilde{\gamma}) \right), \\ u(0) > 0, v(0) > 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

On fait les substitutions :

$$\begin{cases} u(t/\tilde{\gamma}) = u^*(t), \\ v(t/\tilde{\gamma}) = v^*(t), \\ \tilde{A} = \tilde{\alpha}/\tilde{\gamma}, \\ \tilde{D} = \tilde{\delta}/\tilde{\gamma}, \end{cases} \quad (1.26)$$

Finalement, on a le système en u^* et v^* de la forme :

$$\begin{cases} \frac{du^*(t)}{dt} = \tilde{A}u^*(t) - u^*(t)v^*(t), \\ \frac{dv^*(t)}{dt} = u^*(t)v^*(t) - \tilde{D}v^*(t), \\ u^*(0) = u(0), v^*(0) = v(0). \end{cases} \quad (1.27)$$

Chacun des systèmes (1.25) et (1.27) admet une solution unique. Soit T^* la période commune de u^* et v^* , T la période commune de u et v . Par définition $u^*(t+T^*) = u^*(t)$, ce qui est équivalent à :

$$u\left(\frac{t+T^*}{\tilde{\gamma}}\right) = u\left(\frac{t}{\tilde{\gamma}} + \frac{T^*}{\tilde{\gamma}}\right) = u\left(\frac{t}{\tilde{\gamma}}\right),$$

d'où $T = T^*/\tilde{\gamma}$ et donc $T^* = \tilde{\gamma}T$.

♠

Il est remarquable que les moyennes de $x(t)$ et $y(t)$ sur une période T soient constantes pour toutes les solutions du système (1.1). On définit les moyennes sur une période par :

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \\ \bar{y}_c &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt. \end{aligned}$$

Propriété 1.4 Les moyennes de $x(t)$ et $y(t)$ sur une période T sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_c = \frac{\delta}{\tilde{\gamma}}, \\ \bar{y}_c = \frac{\alpha}{\tilde{\beta}}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Preuve

Soit le système (1.1) :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \delta y(t). \end{cases}$$

Le système (1.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha - \beta y(t), \\ \frac{1}{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t) - \delta, \end{cases} \quad (1.29)$$

En intégrant les équations du système (1.29) de 0 à T , on obtient :

$$\begin{cases} \ln x(t) \Big|_0^T = \alpha t \Big|_0^T - \beta \int_0^T y(t) dt, \\ \ln y(t) \Big|_0^T = \gamma \int_0^T x(t) dt - \delta t \Big|_0^T, \end{cases} \quad (1.30)$$

D'après la propriété 1.1, sur la périodicité des solutions, on a $x(T) = x(0)$, $y(T) = y(0)$.

Cela implique :

$$\begin{cases} 0 = \alpha T - \beta \int_0^T y(t) dt, \\ 0 = \gamma \int_0^T x(t) dt - \delta T, \end{cases} \quad (1.31)$$

et donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{\alpha}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{\delta}{\gamma}. \end{cases} \quad (1.32)$$



Avant de conclure, on met en évidence une propriété «isométrique» de la moyenne.

Propriété 1.5 Soit $x(t)$ et $y(t)$ les solutions du système (1.1). Alors, on a :

$$\bar{x} \bar{y}_c = \overline{xy}_c.$$

Preuve

Par intégration entre 0 et T de la première équation du système (1.1), on obtient :

$$x(t) \Big|_0^T = \alpha \int_0^T x(t) dt - \beta \int_0^T x(t)y(t) dt. \quad (1.33)$$

D'après les propriétés 1.4 et 1.1 on a que :

$$\int_0^T x(t) dt = \frac{\delta}{\gamma} T, \quad x(T) = x(0).$$

L'équation (1.33) est équivalente à :

$$0 = \frac{\alpha\delta T}{\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\gamma} \int_0^T x(t)y(t) dt.$$

Donc, on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma},$$

et comme

$$\overline{xy}_c = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt, \quad \bar{x}_c = \frac{\delta}{\gamma}, \quad \bar{y}_c = \frac{\alpha}{\beta},$$

l'égalité $\bar{x}_c \bar{y}_c = \overline{xy}_c$ en résulte immédiatement.



CHAPITRE II

PROCESSUS DE NAISSANCE ET MORT NON HOMOGÈNES : DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

Les chaînes de Markov jouent un rôle central dans la modélisation stochastique. Les processus de naissance et de mort sont des cas particuliers de chaînes de Markov et sont utilisés pour décrire l'évolution du nombre d'individus d'une population, au cours du temps. Nous nous intéressons essentiellement aux processus de naissance et mort non homogènes.

Dans ce chapitre, on présente des processus stochastiques de Poisson et de naissance et mort non homogènes, ainsi que leurs principales propriétés. Plusieurs de ces propriétés sont utilisées dans la modélisation stochastique en prédateur-proie et la méthode d'estimation présentées aux chapitres III et IV respectivement. Dans notre approche on suit Parzen (1962), chapitres 4 et 7.

2.1 Processus de Poisson non homogènes

Dans cette section nous présentons une généralisation des processus de Poisson homogènes par des processus de Poisson non homogènes. Le développement se base principalement sur le chapitre 4 de Parzen (1962). Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés essentielles des processus de Poisson non homogènes. Ensuite, on donne une comparaison entre les lois des temps d'attente et des temps d'attente entre événements

pour les cas homogène et non homogène

On va aussi souligner par un théorème comment et sous quelles conditions on peut construire un processus homogène à partir d'un processus non homogène.

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Un processus stochastique $\{N(t), t \in I\}$ est une suite de variables aléatoires indexées par I à valeurs dans un ensemble S .*

I est l'ensemble des indices et souvent t représente le temps. Si I est un intervalle inclus en \mathbb{R} , le processus est dit à temps continu.

S s'appelle l'ensemble des états du processus. S peut être aussi continu ou discret.

Dans la suite on suppose : $I = [0, \infty)$ et $S = \{0, 1, \dots\}$

Définition 2.2 *Le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'évènements qui se sont produits jusqu'au temps t .*

Définition 2.3 *Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus stochastique. La variable aléatoire :*

$$N(v) - N(u)$$

s'appelle l'accroissement du processus dans l'intervalle $[u, v]$.

On voit que, pour un processus de comptage, l'accroissement compte le nombre d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle de temps $[u, v]$.

Définition 2.4 *Le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants si, quel que soit l'ensemble ordonné et fini $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires*

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

sont indépendantes.

Définition 2.5 *Le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements stationnaires, si quels soient $0 \leq s < t$ et $h > 0$, les variables aléatoires*

$$N(t) - N(s) \text{ et } N(t+h) - N(s+h)$$

sont identiquement distribuées.

On commence par un rappel du concept de processus de Poisson homogène.

Définition 2.6 *Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) $N(0) = 0$;
- ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- iii) $0 < P[N(t) > 0] < 1$;
- iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} = 0$;
- v) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements stationnaires;

On voit que, dans un tel processus, on permet au plus un évènement dans un intervalle de temps de largeur $h \rightarrow 0$. Si on n'exige pas la condition v) nous avons un processus de Poisson non homogène qui se définit comme suit.

Définition 2.7 *Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$, $t \geq 0$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) $N(0) = 0$;
- ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- iii) $0 < P[N(t) > 0] < 1$;
- iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} = 0$;
- v) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h} = \lambda(t)$.

La fonction $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ s'appelle la moyenne du processus dans le sens où, à chaque temps $t > 0$, $\mathbb{E}[N(t)] = m(t)$. Pour la suite de ce chapitre nous avons besoin d'introduire le concept général de fonction génératrice des probabilités pour les variables aléatoires à valeurs entières et d'énoncer une série de propriétés importantes, dont le calcul des moments d'une variable aléatoire à partir de sa de fonction génératrice des probabilités.

Définition 2.8 *Étant donnée une variable aléatoire X , à valeurs entières, on appelle fonction génératrice des probabilités, l'application $\psi : D_\psi \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)z^k = \mathbb{E}[z^k].$$

où $D_\psi = \{ z \in \mathbb{R} \text{ tel que la série } \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)z^k \text{ converge} \}$ dénote le domaine de définition de la fonction ψ .

Le théorème suivant (Vallois ; 2007) regroupe les principales propriétés élémentaires de la fonction génératrice des probabilités.

Théorème 2.1 *Soit X une variable aléatoire et ψ sa fonction génératrice des probabilités. Alors, on a :*

o) le rayon de convergence de la série définissant ψ est supérieur ou égal à 1 et donc $(-1, 1] \subset D_\psi$. De plus, sur $(-1, 1)$, ψ est indéfiniment dérivable ;

i) $\psi(1) = 1$;

ii) la fonction ψ caractérise la loi de X dans le sens suivant :

$$P(X = n) = \frac{\psi^n(0)}{n!},$$

où $\psi^n(0)$ désigne la dérivée d'ordre n au point $z = 0$;

iii) si pour $n \geq 1$ les moments d'ordre n de X existent ($\mathbb{E}[X^k] < \infty$), alors on a :

$$\psi^n(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)].$$

En particulier l'espérance mathématique est donnée par $\mathbb{E}[X] = \psi'(1)$ et la variance par $\mathbb{V}[X] = \psi''(1) + \psi'(1)(1 - \psi'(1))$;

iv) soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices ψ_1, \dots, ψ_n .

Alors la fonction génératrice de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est définie par :

$$\psi_{S_n}(z) = \prod_{k=1}^n \psi_k(z).$$

En particulier si X_1, \dots, X_n suivent la même loi de fonction génératrice ψ alors :

$$\psi_{S_n}(z) = (\psi(z))^n.$$

Dans ce qui suit on suppose $D_\psi = (-1, 1)$.

On peut prouver le résultat élémentaire, mais important, suivant.

Théorème 2.2 La fonction génératrice des probabilités pour un processus de Poisson non homogène est donnée par :

$$\psi(z, t) = \exp[m(t)(z-1)]. \quad (2.1)$$

Preuve :

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non homogène, de moyenne $m(t)$, supposée continue, et $\psi(z, t)$ la fonction génératrice des probabilités de $N(t)$. On a, par définition :

$$\psi(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P[N(t) = k] = \mathbb{E}[z^{N(t)}].$$

Comme $N(t)$ a des accroissements indépendants, on obtient :

$$\psi(z, t+h) = \mathbb{E}[z^{N(t+h)}] = \mathbb{E}[z^{N(t+h)-N(t)+N(t)}]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[z^{N(t)}] \mathbb{E}[z^{N(t+h)-N(t)}] \\
&= \psi(z, t) \mathbb{E}[z^{N(t+h)-N(t)}] \\
&= \psi(z, t) \sum_{k=0}^{\infty} z^k P[N(t+h) - N(t) = k]. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Afin de trouver la forme (2.1), nous cherchons une équation différentielle satisfaite par la fonction génératrice des probabilités.

En utilisant la définition de dérivée et la formule (2.2), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(z, t+h) - \psi(z, t)}{h} \\
&= \psi(z, t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[z^{N(t+h)-N(t)}] - 1}{h} \\
&= \psi(z, t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 0] - 1}{h} \\
&\quad + \psi(z, t) z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} \\
&\quad + \psi(z, t) \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k P[N(t+h) - N(t) = k]}{h}. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

En utilisant la définition 2.7 *iv*) et *v*) on va montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} = \lambda(t), \tag{2.4}$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} = 0. \tag{2.5}$$

Partons de l'égalité évidente :

$$P[N(t+h) - N(t) = 0] + P[N(t+h) - N(t) = 1] + P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = 1,$$

et écrivons les relations équivalentes :

$$\begin{aligned}
&P[N(t+h) - N(t) = 1] + P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = 1 - P[N(t+h) - N(t) = 0] \\
&\Leftrightarrow \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1] + P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} = \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h} \\
&\Leftrightarrow \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} \left[1 + \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} \right] = \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h}.
\end{aligned}$$

On prend la limite lorsque $h \rightarrow 0$, de part et d'autre de cette dernière égalité :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} \left[1 + \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h} \end{aligned}$$

Mais, en vertu de (iv) et (v) de la définition 2.7, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h} = \lambda(t),$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} = 0,$$

ce qui donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} = \lambda(t).$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) = 1]}{h} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} \frac{1}{\lambda(t)}$$

et finalement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} = 0.$$

Puisque $|z| < 1$ on a :

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k P[N(t+h) - N(t) = k]}{h} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z^k| P[N(t+h) - N(t) = k]}{h}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P[N(t+h) - N(t) = k]}{h} \\
&= \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{h} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

On conclut que dans la somme (2.3) les seuls termes différents de 0 sont : $-\psi(z, t)\lambda(t)$ et $\psi(z, t)\lambda(t)z$ et on déduit l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \psi(z, t)\lambda(t)(z - 1), \quad (2.6)$$

Pour z fixé, l'équation (2.6) est équivalente à :

$$\frac{\psi'(z, t)}{\psi(z, t)} = (z - 1)\lambda(t)$$

et, par intégration entre 0 et t , on a, successivement :

$$\int_0^t \frac{\psi'(z, u)}{\psi(z, u)} du = \int_0^t (z - 1)\lambda(u) du = (z - 1) \int_0^t \lambda(u) du = (z - 1)m(t).$$

Si on tient compte du fait que $\psi(z, 0) = 1$, on obtient :

$$\int_0^t \frac{\psi'(z, u)}{\psi(z, u)} du = \log \psi(z, u) \Big|_0^t = \log \psi(z, t),$$

d'où :

$$\psi(z, t) = \exp[m(t)(z - 1)],$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.2.



Remarque 2.1 Dans le cas du processus de Poisson homogène, on a $\lambda(t) = \lambda$, donc l'intensité est une constante et $m(t) = \lambda t$. La fonction génératrice des probabilités est :

$$\psi(z, t) = \exp[\lambda t(z - 1)].$$

L'objectif du théorème qui suit est de montrer que, dans la cas d'un processus de Poisson non homogène, $N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson. Cette démonstration est basée essentiellement sur la fonction génératrice des probabilités.

Théorème 2.3 *Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$, $t \geq 0$. On a, quels que soient s et $t \geq 0$:*

- i) $P[N(s+t) - N(s) = n] = \exp\{-[m(s+t) - m(s)]\} \frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!}, n \geq 0;$
- ii) $\mathbb{E}[N(s+t) - N(s)] = \mathbb{V}[N(s+t) - N(s)] = m(s+t) - m(s);$
- iii) $\mathbb{C}[N(s+t), N(s)] = \mathbb{V}[N(s)] = m(s).$

Preuve :

i) Fixons s et t et soit $\phi(z, t)$ la fonction génératrice des probabilités de la variable $N(s+t) - N(s)$. D'après le théorème 2.2, on a :

$$\psi(z, t) = \exp[m(t)(z - 1)],$$

ce qui implique :

$$\psi(z, t+s) = \exp[m(s+t)(z - 1)] = \mathbb{E}[z^{N(s+t)}] = \mathbb{E}[z^{N(s+t) - N(s) + N(s) + N(0)}]. \quad (2.7)$$

Comme les accroissements sont indépendants, les variables aléatoires $N(s+t) - N(s)$ et $N(s) - N(0) = N(s)$ sont indépendantes et on a :

$$\mathbb{E}[z^{N(s+t) - N(s) + N(s) + N(0)}] = \mathbb{E}[z^{N(s+t) - N(s)}] \mathbb{E}[z^{N(s)}] = \phi(z, t) \psi(z, s). \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8) on déduit :

$$\phi(z, t) \psi(z, s) = \psi(z, t+s),$$

ce qui donne :

$$\phi(z, t) = \frac{\psi(z, t+s)}{\psi(z, s)} = \exp\{[m(t+s) - m(s)](z - 1)\}.$$

On peut vérifier par induction mathématique que la dérivée d'ordre n de $\phi(z, t)$ par rapport à t est de la forme :

$$\phi^{(n)}(z, t) = [m(t+s) - m(s)]^n \exp[[m(t+s) - m(s)](z-1)].$$

Par conséquent, en appliquant le théorème 2.1, on a que :

$$P[N(s+t) - N(s) = n] = \frac{\phi^n(0, t)}{n!},$$

et donc :

$$\begin{aligned} P[N(t+s) - N(s) = n] &= [m(t+s) - m(s)]^n \frac{\exp\{[m(t+s) - m(s)](0-1)\}}{n!} \\ &= \frac{[m(t+s) - m(s)]^n}{n!} \exp\{-[m(t+s) - m(s)]\}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du point *i*).

En particulier, pour $s = 0$, comme $N(0) = 0$ et $m(0) = 0$ on obtient :

$$P[N(t) = n] = \frac{m(t)^n}{n!} \exp(m(t)).$$

ii) En tenant compte des égalités pour l'espérance et de la variance données au théorème 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t+s) - N(s)] &= \phi'(1, t) \\ &= [m(t+s) - m(s)] \exp[m(t)(1-1)] \\ &= m(t+s) - m(s) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[N(t+s) - N(s)] &= \phi''(1, t) + \phi'(1, t)(1 - \phi'(1, t)) \\ &= [m(t+s) - m(s)]^2 + [m(t+s) - m(s)][1 - [m(t+s) - m(s)]] \\ &= m(t+s) - m(s). \end{aligned}$$

iii) On sait que les variables aléatoires $N(s+t) - N(s)$ et $N(s)$ sont indépendantes, d'où :

$$\mathbb{C}[N(s+t) - N(s), N(s)] = 0.$$

Cela implique :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[N(s+t), N(s)] &= \mathbb{C}[N(s+t) - N(s) + N(s), N(s)] \\ &= \mathbb{C}[N(s+t) - N(s), N(s)] + \mathbb{C}[N(s), N(s)] \\ &= 0 + \mathbb{V}[N(s)] = m(s). \end{aligned}$$

La preuve du théorème 2.3 est complète.



Le théorème 2.3 i) montre que la fonction de masse de $N(s+t) - N(s)$ est celle d'une loi de Poisson de paramètre $m(t+s) - m(s)$. Par conséquent, $N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $m(t)$.

2.1.2 Temps d'attente d'un processus de Poisson non homogène

Le but de cette section est de calculer les lois de temps d'attente entre évènements pour le processus de Poisson non homogène et de comparer ces résultats avec le cas homogène.

Définition 2.9 *Considérons un processus Poisson non homogène et notons par T_1 le temps où se produit le premier évènement, par T_n le temps qui s'écoule entre le $(n - 1)^{\text{ème}}$ et le $n^{\text{ème}}$ évènement. La suite $(T_n)_{n>0}$ s'appelle suite des temps d'attente entre évènements et la somme*

$$W_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

s'appelle le temps d'attente ou le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement.

Remarque 2.2 Il faut remarquer que le $n^{\text{ème}}$ évènement arrive avant ou au temps t si et seulement si le nombre d'évènements au temps t est au moins n , c'est-à-dire :

$$W_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n \quad (2.9)$$

On sait que, dans le cas des processus de Poisson homogènes, on a le théorème suivant (Parzen, 1962, pp. 134-135).

Théorème 2.4 Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène d'intensité λ .

Alors :

- i) Les temps d'attente entre évènements $T_n, n \geq 0$ sont des variables aléatoires indépendantes et même loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$.
- ii) Le temps d'attente $W_n, n \geq 0$ suit une loi Gamma de paramètres n et λ .

Le théorème qui suit réunit les exercices 3G, 3H, 3I, 3J du chapitre 4 de Parzen (1962), et donne une variante analogue du théorème 2.4 pour le cas des processus de Poisson non homogènes.

Théorème 2.5 Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$ et de moyenne $m(t)$, où $m(t)$ est une fonction dérivable. Alors :

- i) $f_{T_1}(t) = \exp(-m(t))\lambda(t)$;
- ii) $F_{T_2|T_1}(t | s) = 1 - \exp(-\int_0^t \lambda(s+u)du)$;
- iii) $f_{T_2|T_1}(t | s) = \exp(-(m(t+s) - m(s)))\lambda(t+s)$;
- iv) $f_{T_2}(t) = \int_0^\infty \exp(-m(t+s))\lambda(t+s)\lambda(s)ds$;
- v) $f_{W_n}(t) = \exp(-m(t)) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t)$.

Preuve

- i) Soit $F_{T_1}(t)$ la fonction de répartition de T_1 . Alors on a que :

$$\begin{aligned}
F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) &= 1 - P(T_1 > t) = 1 - P[N(t) = 0] \\
&= 1 - \exp(-m(t)) \frac{m(t)^0}{0!} = 1 - \exp(-m(t))
\end{aligned}$$

On obtient la fonction de densité $f_{T_1}(t)$ en dérivant cette fonction de répartition $F_{T_1}(t)$:

$$f_{T_1}(t) = \frac{dF_{T_1}(t)}{dt} = \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) = \lambda(t) \exp(-m(t)).$$

ii) On utilise le raisonnement de Grimmet and Stirzaker (1992), section 6.8.

On observe d'abord que :

$$\begin{aligned}
P(T_2 > t \mid T_1 = s) &= P(N(t+s) = 1 \mid N(s) = 1) \\
&= P(N(t+s) - N(s) = 0 \mid N(s) = 1).
\end{aligned}$$

Ensuite on applique l'indépendance des accroissements. On a :

$$\begin{aligned}
F_{T_2|T_1}(t \mid s) &= P(T_2 \leq t \mid T_1 = s) = 1 - P(T_2 > t \mid T_1 = s) \\
&= 1 - P(N(s+t) - N(s) = 0 \mid N(s) = 1) \\
&= 1 - P(N(t+s) - N(s) = 0) \\
&= 1 - \exp(-m(t+s) + m(s)) \\
&= 1 - \exp\left(-\int_s^{s+t} \lambda(v) dv\right).
\end{aligned}$$

Pour arriver au résultat, il suffit de faire le changement de variable :

$$u = v - s, \quad du = dv, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = t.$$

On obtient, finalement :

$$F_{T_2|T_1}(t \mid s) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s+u) du\right), \quad (2.10)$$

tel que désiré.

iii) Il suffit de dériver, par rapport à t , la fonction de répartition $F_{T_2|T_1}(t | s)$:

$$\begin{aligned} f_{T_2|T_1}(t | s) &= \frac{dF_{T_2|T_1}(t | s)}{dt} \\ &= \frac{d(m(t+s) - m(s))}{dt} \exp(-m(t+s) + m(s)) \\ &= [\lambda(t+s) - 0] \exp(-m(t+s) + m(s)). \end{aligned}$$

iv) On peut déterminer la fonction de densité conjointe de T_1 et T_2 en utilisant i) et ii), ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(T_1, T_2) &= f_{T_1}(s) f_{T_2|T_1}(t | s) \\ &= \exp(-m(s)) \lambda(s) \exp(-m(t+s) + m(s)) \lambda(t+s) \\ &= \exp(-m(t+s)) \lambda(t+s) \lambda(s). \end{aligned}$$

Donc, la fonction de densité marginale de T_2 s'obtient par intégration :

$$f_{T_2}(t) = \int_0^{\infty} \exp(-m(t+s)) \lambda(t+s) \lambda(s) ds.$$

v) À partir de la remarque 2.2, on a :

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= P(W_n(t) \leq t) \\ &= P(N(t) \geq n) \\ &= 1 - P(N(t) < n) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-m(t)) \frac{(m(t))^k}{k!} \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t , on obtient une somme télescopique (avec pour terme général, une différence de deux termes consécutifs qui s'annulent). Cela donne :

$$\begin{aligned}
f_{W_n}(t) &= \frac{dF_{W_n}(t)}{dt} = \frac{d \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-m(t)) (m(t))^k / k! \right]}{dt} \\
&= \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) \frac{(m(t))^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) \frac{(m(t))^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(m(t))^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(m(t))^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\
&= \frac{dm(t)}{dt} \exp(-m(t)) \left[1 + \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!} - 1 \right] \\
&= \exp(-m(t)) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t).
\end{aligned}$$



Le théorème 2.5 met en évidence les propriétés suivantes :

- i) Dans le cas des processus de Poisson non homogènes, les temps d'attente ne sont pas nécessairement indépendants.
- ii) De plus, il n'est plus vrai que les lois des temps d'attente T_i et W_n sont des lois exponentielles, respectivement Gamma.
- iii) Finalement, notons qu'on retrouve tous les résultats du théorème 2.4 en mettant $\lambda(t) = \lambda$ dans le théorème 2.5.

2.2 Processus de naissance et mort non homogènes

L'objectif de cette section est de présenter les principaux résultats sur les processus de naissance et mort non homogènes qui sont pertinents pour notre modèles d'application

(modèle prédateur-proie en écologie).

Ces résultats sont ceux énoncés par Kendall (1949), mais nous suivons l'approche de Parzen (1962), chapitre 7, complétée par quelques preuves originales.

Définition 2.10 *Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un chaîne de Markov en temps continu, si pour chaque ensemble ordonné $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ on a :*

$$P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \\ P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}).$$

En d'autres mots, l'évolution au temps futur, connaissant le présent, est indépendante du passé.

Définition 2.11 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un chaîne de Markov. La probabilité conditionnelle*

$$p_{j,k}(s, t) = P(X(t) = k | X(s) = j)$$

s'appelle la probabilité de transition du processus, lorsqu'il passe de l'état j , au temps s à l'état k , au temps t .

Définition 2.12 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un chaîne de Markov. On définit la fonction intensité du passage, étant donné que le chaîne de Markov est à l'état j au temps t , notée $q_j(t)$, par*

$$q_j(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - p_{j,j}(t, t+h)).$$

Définition 2.13 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un chaîne de Markov. On définit la fonction d'intensité de transition vers l'état k , étant donné que le chaîne de Markov est l'état j au temps t , notée $q_{j,k}(t)$, par*

$$q_{j,k}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} p_{j,k}(t, t+h).$$

Le théorème qui suit donne les équations connues sous le nom de Chapman-Kolmogorov.

Théorème 2.6 (Chapman-Kolmogorov) Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un chaîne de Markov et notons par $S = \{0, 1, \dots\}$ l'ensemble des états de cette chaîne de Markov. Alors

$$p_{j,k}(s, t) = \sum_{i \in S} p_{j,i}(s, u) p_{i,k}(u, t)$$

pour tout $t > u > s \geq 0$ et tout $j, k \in S$.

Définition 2.14 Soit $\{\lambda_n(t), n \geq 0\}$ et $\{\mu_n(t), n > 0\}$ deux suites de fonctions positives. Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et mort non homogène, de taux de naissance $\lambda_n(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t)$ si :

i)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n,n+1}(t, t+h)}{h} = \lambda_n(t); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n,n-1}(t, t+h)}{h} = \mu_n(t); \quad n = 1, 2, \dots$$

iii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{n,n}(t, t+h)}{h} = \mu_n(t) + \lambda_n(t); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et que ces limites sont uniformes en n . On prend $\mu_0(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$.

En mots, un processus de naissance et mort non homogène est une chaîne de Markov en temps continu pour laquelle on peut aller seulement de l'état n vers les états $n - 1$ ou $n + 1$ dans un intervalle de temps très petit $(t, t + h)$, $h \rightarrow 0$. Donc, entre deux instants t et $t + h$ la population peut passer aléatoirement de $X(t) = n$ à : $X(t + h) = n + 1$ (cas d'une naissance), $X(t + h) = n - 1$ (cas d'un décès), ou enfin rester constante $X(t + h) = n$.

Définition 2.15 Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et mort homogène si les taux de naissance $\lambda_n(t)$ et de mort $\mu_n(t)$ ne dépendent pas de t ,

$$\lambda_n(t) = \lambda_n, \quad \mu_n(t) = \mu_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Remarque 2.3 *On peut voir que le processus de Poisson est un cas particulier de processus de naissance et de mort pour lequel :*

$$\lambda_n(t) = \lambda(t), \mu_n(t) = 0. \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dans tout de qui suit nous nous intéressons à étudier les processus de naissance et de mort non homogènes de taux de naissance et taux de mort égaux respectivement à :

$$\lambda_n(t) = n\lambda(t), \quad \mu_n(t) = n\mu(t).$$

Ces processus s'appellent linéaires.

En suivant Parzen (1962), afin d'étudier ces processus, on analyse la fonction génératrice des probabilités de transition, qui se définit comme suit. Rappelons que la fonction génératrice des probabilités de transition pour les processus de naissance et mort non homogène est donnée par :

Définition 2.16 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Markov en temps continu. Alors, la fonction génératrice des probabilités de transition est donnée par*

$$\psi_{j,s}(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(s, t) z^k. \quad (2.11)$$

Pour commencer, on développe la théorie en supposant que $X(0) = 1$. Le lemme 2.1 qui suit est une version particulière du théorème 5A de Parzen (1962), chapitre 7.

Lemme 2.1 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$. Alors, pour tous les états j , les temps $s < t$ et $|z| < 1$, la fonction génératrice $\psi_{j,s}(z, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial t} = (z - 1)[z\lambda(t) - \mu(t)] \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial z} \quad (2.12)$$

avec la condition $\psi_{j,s}(z, s) = z^j$ si $P[X(s) = j] = 1$.

Preuve

On s'intéresse à évaluer le rapport suivant, quand t est près de 0 :

$$\frac{\psi_{j,s}(z, t+h) - \psi_{j,s}(z, t)}{h}.$$

On a :

$$\frac{\psi_{j,s}(z, t+h) - \psi_{j,s}(z, t)}{h} = \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} [p_{j,k}(s, t+h) - p_{j,k}(s, t)] z^k. \quad (2.13)$$

D'après le théorème 2.6 on a, dans notre cas :

$$\begin{aligned} p_{j,k}(s, t+h) &= p_{j,k-1}(s, t)p_{k-1,k}(t, t+h) \\ &\quad + p_{j,k}(s, t)p_{k,k}(t, t+h) \\ &\quad + p_{j,k+1}(s, t)p_{k+1,k}(t, t+h) + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (2.13) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{j,s}(z, t+h) - \psi_{j,s}(z, t)}{h} &= \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} p_{j,k-1}(s, t)p_{k-1,k}(t, t+h) z^k \\ &\quad + \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} p_{j,k+1}(s, t)p_{k+1,k}(t, t+h) z^k \\ &\quad + \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} p_{j,k}(s, t) [p_{k,k}(t, t+h) - 1] z^k. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$, on a les limites suivantes (uniformes en k) :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{k-1,k}(t, t+h)}{h} &= \lambda_{k-1}(t) = (k-1)\lambda(t), k \geq 1; \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{k+1,k}(t, t+h)}{h} &= \mu_{k+1}(t) = (k+1)\mu(t), k \geq 0; \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{k,k}(t, t+h)}{h} &= 1 - [\lambda_k(t) + \mu_k(t)] = 1 - k[\lambda(t) + \mu(t)], k \geq 0; \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(t, t+h)}{h} &= 0, |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $h \rightarrow 0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial t} &= \lambda(t) \sum_1^{\infty} (k-1) z^k p_{j,k-1}(s, t) \\ &+ \mu(t) \sum_0^{\infty} (k+1) z^k p_{j,k+1}(s, t) \\ &- [\lambda(t) + \mu(t)] \sum_0^{\infty} k z^k p_{j,k}(s, t). \end{aligned}$$

On met en évidence les dérivées :

$$\frac{\partial z^{k-1}}{\partial z} = (k-1)z^{k-2}, \quad \frac{\partial z^{k+1}}{\partial z} = (k+1)z^k, \quad \frac{\partial z^k}{\partial z} = k z^{k-1},$$

et donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial t} &= z^2 \lambda(t) \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial z} \\ &+ \mu(t) \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial z} \\ &- z[\lambda(t) + \mu(t)] \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que :

$$z^2 \lambda(t) + \mu(t) - z[\lambda(t) + \mu(t)] = (z-1)[z\lambda(t) - \mu(t)],$$

d'où l'égalité (2.12) résulte immédiatement.

♠

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (2.12) on utilise, sans le démontrer, un résultat général de la théorie des équations différentielles du premier ordre (voir Parzen (1962), chapitre 7, théorème 5B).

Il est possible d'en trouver une démonstration dans Syski (1960), p. 696. Ce résultat est résumé dans le lemme suivant.

Lemme 2.2 *i) Supposons que la fonction génératrice des probabilités $\psi_{j,s}(z, t)$ satisfait une équation aux dérivées partielles de la forme :*

$$\frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial t} = a(z, t) \frac{\partial \psi_{j,s}(z, t)}{\partial z}. \quad (2.14)$$

ii) Soit une fonction $u(z, t)$ telle que la solution $z(t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dt} + a(z, t) = 0 \quad (2.15)$$

satisfait la condition $u(z(t), t) = c$ avec c une constante .

iii) Soit la fonction $g_s(z)$ définie par $g_s(z) = u(z, s)$ et soit g_s^{-1} la fonction réciproque de g_s .

Alors, pour tout $j = 0, 1, 2, \dots$, la fonction

$$\psi_{j,s}(z, t) = [g_s^{-1}(u(z, t))]^j$$

est la solution de l'équation aux dérivées partielles (2.14).

À partir des lemmes 2.1 et 2.2, nous sommes en mesure de trouver la fonction génératrice des probabilités de transition pour les processus de naissance et mort non homogène linéaires.

Le résultat qui suit est l'exemple 5B de Parzen (1962), section 7.4.

Théorème 2.7 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$.

Alors, la fonction génératrice des probabilités de transition est donnée par :

$$\psi_{j,s}(z, t) = \left\{ 1 + \left[\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)-\rho(s)} - e^{-\rho(s)} \int_s^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right]^{-1} \right\}^j \quad (2.16)$$

où $\rho(t) = \int_0^t [\mu(\tau) - \lambda(\tau)] d\tau$.

Preuve

On va partir de l'équation différentielle suivante, qui est du type (2.15) :

$$\frac{dz}{dt} + (z-1)(z\lambda(t) - \mu(t)) = 0, \quad (2.17)$$

et chercher une fonction u pour laquelle $u(z(t), t)$ est constante, dans ce cas particulier.

On commence par faire le changement de variable :

$$z = 1 + \frac{1}{v}$$

Alors, on a :

$$z = 1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt}$$

On développe le deuxième terme du membre gauche de l'équation (2.17) qui devient :

$$\begin{aligned} (z-1)(z\lambda(t) - \mu(t)) &= \frac{1}{v} \left[\left(1 + \frac{1}{v}\right)\lambda(t) - \mu(t) \right] \\ &= \frac{1}{v^2} [(v+1)\lambda(t) - v\mu(t)] \\ &= \frac{1}{v^2} [v(\lambda(t) - \mu(t)) + \lambda(t)]. \end{aligned}$$

Ensuite, on réécrit l'équation différentielle (2.17) en fonction de $v(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + (z-1)[z\lambda(t) - \mu(t)] &= 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{v^2} [v(\lambda(t) - \mu(t)) + \lambda(t)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + v[\mu(t) - \lambda(t)] = \lambda(t). \end{aligned}$$

On multiplie cette dernière équation par le facteur intégrant $e^{\rho(t)}$. Cela donne :

$$\frac{dv}{dt} e^{\rho(t)} + (\mu(t) - \lambda(t)) e^{\rho(t)} v(t) = \lambda(t) e^{\rho(t)}$$

et puisque $d\rho/dt = \mu(t) - \lambda(t)$, on a l'équation :

$$\frac{d(v(t)e^{\rho(t)})}{dt} = \frac{d(\int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau)}{dt}.$$

Donc, il existe une constante K telle que :

$$v(t)e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = K.$$

Par conséquent, on peut définir :

$$\begin{aligned} u^*(v(t), t) &= v(t)e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{z(t) - 1} e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

et prendre $u(z(t), t) = u^*(v(t), t)$, dans (2.15). Si on définit $g_s(z) = u(z, s)$ pour s fixé, il reste à calculer g_s^{-1} , la fonction réciproque de g_s .

Par définition, on a :

$$x = u(z, s) \Leftrightarrow z = g_s^{-1}(x)$$

On commence par isoler z :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{z-1} e^{\rho(s)} - \int_0^s \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z-1} &= x e^{-\rho(s)} + e^{-\rho(s)} \int_0^s \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \\ \Leftrightarrow z &= 1 + (x e^{-\rho(s)} + e^{-\rho(s)} \int_0^s \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dans (2.18), on met $u(z, t)$ à la place de x et on obtient :

$$\begin{aligned} g_s^{-1}(u(z, t)) &= 1 + \left[\left(\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \right) e^{-\rho(s)} + e^{-\rho(s)} \int_0^s \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \right]^{-1} \\ &= 1 + \left[\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)-\rho(s)} - e^{-\rho(s)} \left(\int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + \int_s^0 \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \right) \right]^{-1} \\ &= 1 + \left[\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)-\rho(s)} - e^{-\rho(s)} \int_s^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Finalement, d'après le lemme 2.2, on a :

$$\psi_{j,s}(z, t) = [g_s^{-1}(u(z, t))]^j.$$



Notons que pour les processus linéaires, 0 est un état absorbant, c'est-à-dire si $X(t^*) = 0$, alors $X(t) = 0$ pour tout $t \geq t^*$. Dans ce cas on parle de l'extinction de la population $X(t)$.

Définition 2.17 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et mort non homogène.

La probabilité conditionnelle :

$$P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1]$$

s'appelle probabilité d'extinction.

Dans ce qui suit nous présentons un théorème qui exprime qu'il est possible de calculer la probabilité d'extinction dans notre cas particulier. On donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'extinction, dans le cadre d'un processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance de la forme $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et taux de mort de la forme $\mu_n(t) = n\mu(t)$.

Théorème 2.8 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$.

i) La probabilité d'extinction est donnée par :

$$P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = \frac{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}{1 + \int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}$$

ii) Il y a extinction éventuelle si et seulement si l'intégrale $\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau$ est divergente, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau = \infty.$$

Preuve

i) D'après le théorème 2.7 on a :

$$P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = p_{1,0}(0, t) = \psi_{1,0}(0, t) = 1 - \left[e^{\rho(t)} + \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right]^{-1}.$$

Remarquons de plus que

$$\int_0^t (\mu(\tau) - \lambda(\tau)) e^{\rho(\tau)} d\tau = \int_0^t (e^{\rho(\tau)})' d\tau = e^{\rho(t)} - 1.$$

Comme :

$$1 + \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = e^{\rho(t)} + \int_0^t \lambda(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau.$$

on déduit que :

$$P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = 1 - \frac{1}{1 + \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau} = \frac{\int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau}{1 + \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau}.$$

ii) Supposons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = \infty$$

Cela donne le résultat si on utilise la règle de l' Hospital :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{1,0}(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau)'}{(1 + \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau)'} = \frac{\mu(t)e^{\rho(t)}}{\mu(t)e^{\rho(t)}} = 1.$$

Pour l'implication réciproque on raisonne par l'absurde. Supposons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = a < \infty$$

Alors, par hypothèse,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = 1 = \frac{a}{a+1} \Rightarrow a = a+1.$$

La dernière égalité est impossible et donc le contraire est vrai :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = \infty,$$

ce qui achève la démonstration.



Corollaire 2.1 Dans le cas $X(0) = x_0 > 1$, la probabilité d'extinction devient :

$$P[X(t) = 0 \mid X(0) = x_0] = \left\{ \frac{\int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau}{1 + \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau} \right\}^{x_0}$$

Remarquons que, dans ce cas, l'expression pour la probabilité de transition donnée par le théorème 2.8 est élevée à la puissance x_0 .

Preuve :

Par le théorème 2.7, on a

$$\psi_{x_0,0}(0, t) = [\psi_{1,0}(0, t)]^{x_0},$$

et donc

$$\begin{aligned} P[X(t) = 0 \mid X(0) = x_0] &= \psi_{x_0,0}(0, t) = [\psi_{1,0}(0, t)]^{x_0} \\ &= \{P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1]\}^{x_0} \\ &= \left\{ \frac{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}{1 + \int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau} \right\}^{x_0} \end{aligned}$$



Nous sommes à présent en mesure de calculer les probabilités de transition $p_{1,n}(0, t)$ ainsi que l'espérance et la variance du processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$.

Ces formules sont données, sans preuve, à la fois dans Parzen (1962), Exercice 5.3 et Kendall (1948). Nous présentons ici des preuves originales de ces résultats. On commence par rappeler que, par le théorème 2.7 dans le cas particulier $(j, s) = (1, 0)$, la fonction génératrice des probabilités est égale à :

$$\psi_{1,0}(z, t) = 1 + \left[\frac{e^{\rho(t)}}{z-1} - \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right]^{-1}$$

Ensuite, on introduit le lemme calculatoire suivant.

Lemme 2.3 *On pose $I = \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau$ et $J = e^{\rho(t)} I^{-1}$. Alors, la dérivée d'ordre $n > 0$ par rapport à z de la fonction génératrice des probabilités $\psi_{1,0}(z, t)$, est donnée par :*

$$\psi_{1,0}^{(n)}(z, t) = \frac{n! J I^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Preuve :

On commence par observer que la fonction $\psi_{1,0}(z, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\psi_{1,0}(z, t) = 1 - I^{-1} + \frac{JI^{-1}}{[J - (z - 1)]} \quad (2.19)$$

En effet, ceci résulte des calculs algébriques élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} \psi_{1,0}(z, t) &= 1 + \left[\frac{e^{\rho(t)}}{z-1} - I \right]^{-1} = 1 + \left[\frac{e^{\rho(t)} - Iz + I}{z-1} \right]^{-1} \\ &= 1 + \frac{z-1}{e^{\rho(t)} - I(z-1)} = 1 + \frac{z-1}{I[e^{\rho(t)}I^{-1} - (z-1)]} \\ &= 1 + \frac{z-1 - e^{\rho(t)}I^{-1} + e^{\rho(t)}I^{-1}}{I[e^{\rho(t)}I^{-1} - (z-1)]} \\ &= 1 + \frac{z-1 - e^{\rho(t)}I^{-1}}{I[e^{\rho(t)}I^{-1} - (z-1)]} + \frac{e^{\rho(t)}I^{-1}}{I[e^{\rho(t)}I^{-1} - (z-1)]} \\ &= 1 - \frac{1}{I} + \frac{e^{\rho(t)}I^{-1}I^{-1}}{e^{\rho(t)}I^{-1} - (z-1)} = 1 - I^{-1} + \frac{JI^{-1}}{[J - (z-1)]}. \end{aligned}$$

On va vérifier par induction mathématique que la dérivée d'ordre $n > 0$ est donnée par :

$$\psi_{1,0}^{(n)}(z, t) = \frac{n!JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+1}}.$$

Nous devons passer par les deux étapes suivantes.

1) On vérifie que la formule est vraie pour $n = 1$. Il faut dériver l'équation (2.19) par rapport à z , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi_{1,0}^{(1)}(z, t) &= \frac{d}{dz} \left(1 - I^{-1} + \frac{JI^{-1}}{[J - (z-1)]} \right) \\ &= \frac{JI^{-1}}{[J - (z-1)]^2} = \frac{1!JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{1+1}}. \end{aligned}$$

2) Supposons que la formule soit vraie jusqu'à l'ordre n , c'est-à-dire que :

$$\psi_{1,0}^{(n)}(z, t) = \frac{n!JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+1}}.$$

Montrons que la formule est vraie pour l'ordre $n + 1$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \psi_{1,0}^{(n+1)}(z, t) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{n!JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+1}} \right) \\ &= \frac{n!(n+1)JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+2}} = \frac{(n+1)!JI^{-1}}{[J - (z-1)]^{n+2}}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour tous les entiers $n = 1, 2, \dots$



Théorème 2.9 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et mort non homogène de taux de naissance $\lambda_n(t) = n\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu_n(t) = n\mu(t)$. Alors :

a) les probabilités de transition pour $p_{1,n}(0, t)$ sont données par :

$$p_{1,n}(0, t) = e^{\rho(t)} [1 - p_{1,0}(0, t)]^2 [1 - e^{\rho(t)} (1 - p_{1,0}(0, t))]^{n-1};$$

b) l'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}[X(t)] = e^{-\rho(t)}; \quad (2.20)$$

c) la variance est donnée par :

$$\mathbb{V}[X(t)] = e^{-\rho(t)} [1 - e^{-\rho(t)} + 2e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau]. \quad (2.21)$$

Preuve

On va montrer que toutes les affirmations sont des conséquences directes du théorème 2.1 et du lemme 2.3.

a) D'une part, en vertu du théorème 2.1 (ii) on a :

$$\begin{aligned} p_{1,n}(0, t) &= \frac{\psi_{1,0}^{(n)}(0, t)}{n!} = \frac{JI^{-1}}{(J+1)^{n+1}} \\ &= \frac{e^{\rho(t)} I^{-2}}{(e^{\rho(t)} I^{-1} + 1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{I}{e^{\rho(t)} + I} \right)^{n-1} \frac{e^{\rho(t)}}{(e^{\rho(t)} + I)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème 2.8, il vient que

$$\begin{aligned} p_{1,0}(0, t) &= \psi_{1,0}(0, t) = 1 - \left(e^{\rho(t)} + \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right)^{-1} \\ &= 1 - (e^{\rho(t)} + I)^{-1}, \end{aligned}$$

et donc

$$(e^{\rho(t)} + I)^{-1} = 1 - p_{1,0}(0, t).$$

De plus, on peut développer $p_{1,n}(0, t)$ en fonction de $(e^{\rho(t)} + I)^{-1}$

$$\begin{aligned} p_{1,n}(0, t) &= \left(1 - \frac{e^{\rho(t)}}{e^{\rho(t)} + I}\right)^{n-1} \frac{e^{\rho(t)}}{(e^{\rho(t)} + I)^2} \\ &= e^{\rho(t)} [e^{\rho(t)} + I]^{-2} [1 - e^{\rho(t)}(e^{\rho(t)} + I)^{-1}]^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$p_{1,n}(0, t) = e^{\rho(t)} [1 - p_{1,0}(0, t)]^2 [1 - e^{\rho(t)}(1 - p_{1,0}(0, t))]^{n-1},$$

tel que désiré.

b) D'après le théorème 2.1 iii) et du lemme 2.3, on a :

$$E[X(t)] = \psi'_{1,0}(1, t) = \frac{JI^{-1}}{J^2} = \frac{1}{IJ} = \frac{1}{e^{\rho(t)}} = e^{-\rho(t)}.$$

c) De manière analogue, en vertu du théorème 2.1(iii) et du lemme 2.3, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X(t)] &= \psi_{1,0}^{(2)}(1, t) + \psi'_{1,0}(1, t) - (\psi'_{1,0}(1, t))^2 \\ &= \frac{2JI^{-1}}{J^3} + e^{-\rho(t)} - e^{-2\rho(t)} = \frac{2I}{(IJ)^2} + e^{-\rho(t)} - e^{-2\rho(t)} \\ &= 2Ie^{-2\rho(t)} + e^{-\rho(t)} - e^{-2\rho(t)} \\ &= e^{-\rho(t)} \left(1 - e^{-\rho(t)} + 2e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau\right). \end{aligned}$$

♠

Corollaire 2.2 *Supposons que $X(0) = x_0 > 1$. Alors, on a les résultats suivants :*

$$\mathbb{E}[X(t)] = x_0 e^{-\rho(t)}$$

$$\mathbb{V}[X(t)] = x_0 e^{-\rho(t)} [1 - e^{-\rho(t)} + 2e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau]$$

Remarquons que, dans ce cas, les formules (2.20) et (2.21) pour l'espérance et la variance sont multipliées par x_0 .

Preuve

Rappelons que, en vertu du théorème 2.7, on a pour $j = x_0$ et $s = 0$,

$$\psi_{x_0,0}(z, t) = [\psi_{1,0}(z, t)]^{x_0}.$$

Alors, la dérivée de $\psi_{x_0,0}(z, t)$ par rapport à z , est égale à :

$$\psi'_{x_0,0}(z, t) = x_0 \psi'_{1,0}(z, t) [\psi_{1,0}(z, t)]^{x_0-1}.$$

On obtient :

$$\mathbb{E}[X(t)] = \psi'_{x_0,0}(1, t) = x_0 \psi'_{1,0}(1, t) [\psi_{1,0}(1, t)]^{x_0-1}$$

et, comme $\psi'_{1,0}(1, t) = e^{-\rho(t)}$ et $\psi_{1,0}(1, t) = 1$, la première égalité du corollaire est prouvée. Pour la deuxième égalité, nous avons besoin de calculer $\psi''_{x_0,0}(1, t)$:

$$\psi''_{x_0,0}(z, t) = x_0 \psi''_{1,0}(z, t) [\psi_{1,0}(z, t)]^{x_0-1} + x_0(x_0 - 1) [\psi'_{1,0}(z, t)]^2 [\psi_{1,0}(z, t)]^{x_0-2}.$$

En posant $z = 1$, on déduit :

$$\psi''_{x_0,0}(1, t) = x_0 \psi''_{1,0}(1, t) + x_0(x_0 - 1) [\psi'_{1,0}(1, t)]^2.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X(t)] &= \psi''_{x_0,0}(1, t) + \psi'_{x_0,0}(1, t) - [\psi'_{x_0,0}(1, t)]^2 \\ &= x_0 \psi''_{1,0}(1, t) + x_0(x_0 - 1) [\psi'_{1,0}(1, t)]^2 + x_0 \psi'_{1,0}(1, t) - x_0^2 [\psi'_{1,0}(1, t)]^2 \\ &= x_0 \left(\psi''_{1,0}(1, t) + \psi'_{1,0}(1, t) - [\psi'_{1,0}(1, t)]^2 \right), \end{aligned}$$

et, finalement, en utilisant le théorème 2.9 c), on obtient l'égalité :

$$\mathbb{V}[X(t)] = x_0 e^{-\rho(t)} \left(1 - e^{-\rho(t)} + 2e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right).$$



Dans le chapitre suivant, certains des résultats prouvés dans ce chapitre permettront d'analyser et comparer des modèles stochastiques qui décrivent l'interaction prédateur-proie.

CHAPITRE III

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE L'INTERACTION PRÉDATEUR PROIE

Dans ce qui suit on suppose que les tailles des populations de proies et de prédateurs, $X(t), Y(t), t > 0$, sont des variables aléatoires. Au départ, nous présentons des modèles stochastiques de la littérature.

3.1 Aperçu de la littérature sur la modélisation stochastique de type Lotka-Volterra

Cette section est axée sur un survol sans preuve de deux résultats importants pour les modèles bivariés par des processus de naissance et mort homogènes. La prise en compte de la dimension aléatoire du phénomène induit un changement qualitatif de son comportement. En particulier, contrairement au cas déterministe, on montre que l'une des deux populations doit s'éteindre. Un des modèles généralement utilisé est le modèle stochastique bivarié qu'on retrouve chez Swift (2000) ou Hitchcock (1986) et qui est présenté dans la monographie de Renshaw (1986). Ce modèle est une généralisation naturelle en deux dimensions du processus de naissance et mort, ainsi que du modèle déterministe de Lotka-Volterra. On suppose qu'on a une chaîne de Markov homogène à temps continu, dont l'ensemble des états S est de la forme : $S = \{(x, y) \mid x, y = 0, 1, 2, \dots\}$. Par analogie avec le cas déterministe, la probabilité de transition de l'état (x, y) vers l'état $(x + 1, y)$ dans un intervalle de temps $(t, t + h]$, avec $h \rightarrow 0$, est égale à $\alpha x h$ et correspond à une naissance de proie; la probabilité de transition de l'état

(x, y) vers l'état $(x - 1, y)$ dans un intervalle de temps $(t, t + h]$, avec $h \rightarrow 0$ est égale à βxyh et correspond à une mort de proie ; la probabilité de transition de l'état (x, y) vers l'état $(x, y + 1)$ dans un intervalle de temps $(t, t + h]$, avec $h \rightarrow 0$ est égale à γxyh et correspond à une naissance de prédateur ; la probabilité de transition de l'état (x, y) vers l'état $(x, y - 1)$ dans un intervalle de temps $(t, t + h]$, avec $h \rightarrow 0$ est égale à δyh et correspond à une mort de prédateur. Donc, les intensités de transition sont données par :

$$q_{i,j} = \begin{cases} \alpha x & \text{si } i = (x, y), j = (x + 1, y), \\ \beta xy & \text{si } i = (x, y), j = (x - 1, y), \\ \gamma xy & \text{si } i = (x, y), j = (x, y + 1), \\ \delta y & \text{si } i = (x, y), j = (x, y - 1). \end{cases}$$

On note ce modèle par (MSBH), ce qui signifie modèle stochastique bivarié homogène. Nous commençons par énoncer le résultat clé obtenu par Swift (2000). Une preuve complète de ce résultat se trouve dans Swift (2000) .

Théorème 3.1 *Les espérances $\mathbb{E}[X(t)]$ et $\mathbb{E}[Y(t)]$ des variables marginales X et Y satisfont le système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{E}[X(t)]}{\partial t} = \alpha \mathbb{E}[X(t)] - \beta \mathbb{E}[X(t)Y(t)], \\ \frac{\partial \mathbb{E}[Y(t)]}{\partial t} = \gamma \mathbb{E}[X(t)Y(t)] - \delta \mathbb{E}[Y(t)]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce système d'équations différentielles sur les espérances des deux populations peut être comparé au système déterministe Lotka-Volterra. On constate que les paramètres du système (3.1) sont les mêmes que ceux du système déterministe (1.1) et s'interprètent de façon semblable. Plus précisément, dans ce modèle, si on prend un intervalle infinitésimal, $(t, t + h]$, on permet la croissance (ou décroissance) de chacune des populations par un, et jamais simultanément. On voit que la décroissance du nombre de proies est proportionnelle aux rencontres (ou produits) $X(t)Y(t)$ et ça se justifie en pratique. Par analogie, la population de prédateurs croît de un, suite au même type de rencontre, $X(t)Y(t)$. Pour cette population, ce type de supposition n'est pas très réaliste. Puisque,

dans ce modèle, les variables aléatoires $X(t)$ et $Y(t), t > 0$ sont dépendantes, il n'y a pas de raison de supposer que :

$$\mathbb{E}[X(t)Y(t)] = \mathbb{E}[X(t)]\mathbb{E}[Y(t)]. \quad (3.2)$$

et donc on ne peut pas affirmer que les espérances $\mathbb{E}[X(t)] = x(t)$, $\mathbb{E}[Y(t)] = y(t)$ satisfont le système déterministe (1.1). Certains auteurs écrivent $\mathbb{E}[XY]$ comme $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \text{Cov}[X, Y]$ pour conclure que le modèle Lotka Volterra ignore la contribution de la covariance qui fait partie de cette modélisation stochastique. Ceci suggère une généralisation possible du système Lotka Volterra avec ajout de paramètres. En utilisant la propriété de périodicité et de déphasage de la solution déterministe du système Lotka-Volterra on ne peut pas déterminer uniquement quel est le signe de la covariance :

$$\text{Cov}[X(t), Y(t)] = \mathbb{E}[X(t)Y(t)] - \mathbb{E}[X(t)]\mathbb{E}[Y(t)].$$

Dans la section suivante, nous proposons un modèle stochastique bivarié non homogène où on peut remplacer $\mathbb{E}[X(t)Y(t)]$ par $\mathbb{E}[X(t)]\mathbb{E}[Y(t)]$ dans (3.1).

Dans l'étude de la dynamique des populations, il est essentiel de posséder des méthodes quantitatives pour prédire le risque d'extinction. Dans son article, Hitchcock (1986) montre que, dans le modèle (MSBH), l'extinction dans un temps fini est certaine, autant pour les prédateurs, que pour les proies. La preuve de ce résultat repose sur le critère de Reuter (1957, 1961). Hitchcock montre que $\alpha = 0$ est la seule situation où on peut calculer exactement la probabilité d'extinction et il propose une approximation de cette probabilité dans le cas général.

3.2 Modélisation stochastique bivariée du système Lotka-Volterra par deux processus de naissance et mort non homogènes indépendants

3.2.1 Motivation et description du modèle

Rappelons que le système déterministe Lotka-Volterra est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y, \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $x(t)$ est la taille de la population des proies et $y(t)$ est la taille de la population des prédateurs. Dans ce qui suit, on suppose que les tailles des populations de proies et de prédateurs $X(t)$ et $Y(t)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Chacune d'entre elles est un processus de naissance et de mort non homogène, de taux de naissance $\lambda_X(t), \lambda_Y(t)$ et de taux de mort respectifs $\mu_X(t), \mu_Y(t)$, donnés par :

$$\begin{cases} \lambda_X(t) = \alpha, \lambda_Y(t) = \gamma x(t), \\ \mu_X(t) = \beta y(t), \mu_Y(t) = \delta. \end{cases} \quad (3.4)$$

On note ce modèle par (MSBNH), ce qui signifie modèle stochastique bivarié non homogène. La proposition suivante permet de justifier la modélisation stochastique du système Lotka-Volterra (3.3) par des processus de naissance et mort non homogènes avec les taux de naissance et mort données par les formules (3.4). Notons que, avec cette modélisation, les résultats du chapitre II s'appliquent à chacun des deux processus $\{X(t), t \geq 0\}$ et $\{Y(t), t \geq 0\}$. Plus précisément, on peut montrer que les espérances des tailles de populations de proies et de prédateurs dans ce cas stochastique sont égales aux tailles des populations de proies et de prédateurs dans le cas déterministe. Ainsi, on améliore le résultat du théorème 3.1 dans le sens que les espérances $\mathbb{E}[X(t)]$ et $\mathbb{E}[Y(t)]$ satisfont un système de type (3.3).

Proposition 3.1 *Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ et $\{Y(t), t \geq 0\}$ deux processus de naissance et de mort de taux donnés par les formules (3.4), où $(x(t), y(t))$ représente la solution déter-*

ministe du système Lotka-Volterra (3.3). Alors, on a :

$$(\mathbb{E}[X(t)], \mathbb{E}[Y(t)]) = (x(t), y(t)).$$

Preuve :

Par analogie, il suffit de faire la preuve pour seulement une des deux populations, les proies par exemple. Supposons que $X(t) = x_0$ et appliquons le corollaire 2.2 du chapitre II dans ce cas. Premièrement, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)] &= x_0 \exp(-\rho(t)) \\ &= x_0 \exp \left[- \int_0^t (\mu_X(\tau) - \lambda_X(\tau)) d\tau \right] \\ &= x_0 \exp \left[- \int_0^t (\beta y(\tau) - \alpha) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Deuxièmement, la première équation du système Lotka-Volterra est équivalente à :

$$\frac{dx(t)}{dt} \frac{1}{x(t)} = \alpha - \beta y(t).$$

Par intégration entre 0 et t on a que :

$$\ln[x(t)]|_0^t = - \int_0^t (\beta y(\tau) - \alpha) d\tau,$$

ce qui donne :

$$x(t) = x_0 \exp \left[- \int_0^t (\beta y(\tau) - \alpha) d\tau \right]. \quad (3.6)$$

L'égalité $\mathbb{E}[X(t)] = x(t)$ se déduit immédiatement de (3.5) et (3.6).

♠

3.2.2 La probabilité d'extinction

On commence par montrer que les deux populations s'éteignent, si on utilise l'approximation de la solution du système Lotka-Volterra proposée par Pielou (1969) telle que

présentée au chapitre I. Rappelons que Pielou montre que, dans le voisinage du point d'équilibre, $(\bar{x}_c, \bar{y}_c) = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, les tailles de populations de proies et de prédateurs, $x(t)$ et $y(t)$, sont données par :

$$x(t) = \frac{\delta}{\gamma} \left[1 + c_1 \cos(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right] \quad (3.7)$$

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left[1 + c_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) \right], \quad (3.8)$$

où c_1 et $c_2 > 0$ sont des constantes d'intégration. Pour avoir $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ les constantes c_1 et $c_2 > 0$ doivent satisfaire le système d'inégalités :

$$\begin{cases} 1 - c_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} > 0, \\ 1 - c_1 > 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

ce qui implique

$$c_1 < \min \left(1, \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \right).$$

Cas 1 (proies)

On prend les taux

$$\lambda_X(\tau) = \alpha, \mu_X(\tau) = \beta y(\tau).$$

Par le théorème 2.8 (ii) du chapitre II, il y a une extinction si et seulement si :

$$\int_0^{\infty} \mu_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau = \infty.$$

Évaluons l'intégrale. On a, par définition :

$$\begin{aligned} \mu_X(\tau) &= \beta y(\tau) \\ &= \beta \frac{\alpha}{\beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} c_1 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \right] \\ &= \alpha \left[1 + \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} c_1 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \right] \end{aligned}$$

et

$$\rho_X(t) = \int_0^t [\mu_X(\tau) - \lambda_X(\tau)] d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left[\alpha \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} c_1 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \right) - \alpha \right] d\tau \\
&= \sqrt{\alpha\delta} c_1 \int_0^t \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) d\tau \\
&= -c_1 \cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \Big|_0^t \\
&= -c_1 [\cos(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) - \cos c_2].
\end{aligned}$$

En vertu des inégalités élémentaires :

$$e^{-\cos(u)} \geq e^{-1}, \sin(u) \geq -1$$

et du fait que

$$\alpha - c_1 \sqrt{\delta\alpha} > 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau &= \int_0^\infty [\alpha + \sqrt{\alpha\delta} c_1 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2)] e^{-c_1 [\cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) - \cos(c_2)]} d\tau \\
&\geq \int_0^\infty [\alpha + \sqrt{\alpha\delta} c_1 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2)] e^{-c_1 [1 + \cos(c_2)]} d\tau \\
&\geq \int_0^\infty [\alpha - \sqrt{\alpha\delta} c_1] e^{-c_1 [1 + \cos(c_2)]} d\tau = \infty.
\end{aligned}$$

Cas 2 (prédateurs)

On a les taux :

$$\mu_Y(\tau) = \delta, \lambda_Y(\tau) = \gamma x(\tau).$$

et on veut calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \mu_Y(\tau) e^{\rho_Y(\tau)} d\tau.$$

On a, par définition :

$$\begin{aligned}
\lambda_Y(\tau) &= \gamma x(\tau) \\
&= \gamma \frac{\delta}{\gamma} \left[1 + c_1 \cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \right] \\
&= \delta + c_1 \delta \cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \rho_Y(t) &= \int_0^t (\mu_Y(\tau) - \lambda_Y(\tau)) d\tau \\
 &= \int_0^t [\delta - \delta - c_1 \delta \cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2)] d\tau \\
 &= -c_1 \delta \int_0^t \cos(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) d\tau \\
 &= -\frac{c_1 \delta}{\sqrt{\alpha\delta}} \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \Big|_0^t \\
 &= -\frac{c_1 \delta}{\sqrt{\alpha\delta}} \sin(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) + \frac{c_1 \delta}{\sqrt{\alpha\delta}} \sin c_2 \\
 &= a_2 \sin(\sqrt{\alpha\delta}t + c_2) + b_2
 \end{aligned}$$

où on pose :

$$a_2 = \frac{-c_1 \delta}{\sqrt{\alpha\delta}}, \quad b_2 = \frac{c_1 \delta}{\sqrt{\alpha\delta}} \sin c_2.$$

Comme $a_2 < 0$ et $\sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) \leq 1$, on a que :

$$a_2 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) + b_2 \geq a_2 + b_2$$

d'où le résultat :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \mu_Y(\tau) e^{\rho_Y(\tau)} d\tau &= \int_0^\infty \delta e^{a_2 \sin(\sqrt{\alpha\delta}\tau + c_2) + b_2} d\tau \\
 &\geq \int_0^\infty \delta e^{a_2 + b_2} d\tau = \delta e^{a_2 + b_2} \tau \Big|_0^\infty = \infty.
 \end{aligned}$$



Il est également d'intérêt d'analyser la probabilité d'extinction pour le cas général où $x(t)$ et $y(t)$ n'ont pas nécessairement une forme particulière, mais les taux de naissance et mort sont données par :

$$\begin{cases} \mu_X(t) = \beta y(t), \lambda_X(t) = \alpha, \\ \mu_Y(t) = \delta, \lambda_Y(t) = \gamma x(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $(x(t), y(t))$ la solution du système (1.1). Si on définit les processus de naissance et mort avec les taux données par (3.10), il y a extinction pour chacune des populations, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.2 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ et $\{Y(t), t \geq 0\}$ deux processus de naissance et de mort de taux de naissance $\lambda_X(t), \lambda_Y(t)$, et de taux de mort respectifs $\mu_X(t), \mu_Y(t)$, donnés par (3.10).

Alors, l'extinction pour les deux populations est certaine.

Preuve :

Soit

$$I_X = \int_0^\infty \mu_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau, \quad I_Y = \int_0^\infty \mu_Y(\tau) e^{\rho_Y(\tau)} d\tau.$$

D'après le théorème 2.8 (ii) du chapitre II, pour avoir l'extinction pour chaque population, il suffit de montrer que :

$$I_X = \infty, \quad I_Y = \infty.$$

On commence par établir deux inégalités :

$$\rho_X(\tau) \geq (\beta y_m - \alpha)T, \quad (3.11)$$

$$\rho_Y(\tau) \geq (\delta - \gamma x_M)T, \quad (3.12)$$

où

$$y_m = \min_{0 \leq t < T} y(t), \quad x_M = \max_{0 \leq t < T} x(t)$$

et T est la période commune de $x(t)$ et $y(t)$.

Premièrement, on a :

$$\begin{aligned} \rho_X(\tau) &= \int_0^\tau (\beta y(s) - \alpha) ds \\ &= \int_0^{kT} (\beta y(s) - \alpha) ds + \int_{kT}^\tau (\beta y(s) - \alpha) ds \\ &= -\ln(x(s))|_0^{kT} + \int_{kT}^\tau (\beta y(s) - \alpha) ds. \end{aligned}$$

Puisque x est une fonction périodique, $\ln x(kT) = \ln x(0)$. pour k entier On en déduit :

$$\rho_X(\tau) = \int_{kT}^\tau (\beta y(s) - \alpha) ds.$$

Comme, sur une période, la fonction $\beta y(s) - \alpha$ change de signe on a $\beta y_m - \alpha < 0$. Par conséquent :

$$\rho_X(\tau) = \int_{kT}^\tau (\beta y(s) - \alpha) ds \geq (\beta y_m - \alpha)(\tau - kT) \geq (\beta y_m - \alpha)T.$$

D'une manière analogue, on conclut :

$$\rho_Y(\tau) = \int_{kT}^{\tau} (\delta - \gamma x(s)) ds \geq (\delta - \gamma x_M)(\tau - kT) \geq (\delta - \gamma x_M)T.$$

En utilisant les inégalités (3.11) et la périodicité de $y(t)$, on a :

$$\begin{aligned} I_X &= \int_0^{\infty} \beta y(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau \geq \int_0^{\infty} \beta y(\tau) e^{(\beta y_m - \alpha)T} d\tau \\ &= \beta e^{(\beta y_m - \alpha)T} \int_0^{\infty} y(\tau) d\tau = \beta e^{(\beta y_m - \alpha)T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} y(s) ds \\ &= \beta e^{(\beta y_m - \alpha)T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T y(s) ds = \infty. \end{aligned}$$

De la même façon, on montre que :

$$\begin{aligned} I_Y &= \int_0^{\infty} \delta e^{\rho_Y(\tau)} d\tau \geq \int_0^{\infty} \delta e^{(\delta - \gamma x_M)T} d\tau \\ &= \delta e^{(\delta - \gamma x_M)T} \int_0^{\infty} 1 d\tau = \infty, \end{aligned}$$

tel que désiré.



3.2.3 Âge à l'extinction

Dans le cas où l'extinction est certaine, Kendall (1948) définit la variable «âge à l'extinction» qui représente la période de temps qui s'écoule jusqu'à l'extinction de chacune des populations; notons-les par A_X et A_Y .

Ces variables ont des fonctions de répartition, respectivement égales à :

$$F_{A_X}(t) = P(A_X \leq t) = P(X(t) = 0 | X(0) = 1)$$

$$F_{A_Y}(t) = P(A_Y \leq t) = P(Y(t) = 0 | Y(0) = 1)$$

Ces fonctions de répartition donnent la probabilité que l'extinction survienne au plus tard

Comme les processus sont linéaires le concept d'âge à l'extinction a du sens.

En effet, on voit que F_{A_X} ou F_{A_Y} est une fonction de répartition, car elle satisfait les propriétés caractéristiques suivantes :

1) F_{A_X} et F_{A_Y} sont croissantes et continues à la droite;

2) $F_{A_X}(0) = 0$ et $F_{A_Y}(0) = 0$;

3) $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{A_X}(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{A_Y}(t) = 1$ (en vertu du théorème 3.2)

On rappelle que :

$$P(X(t) = 0 | X(0) = 1) = \frac{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau + 1},$$

où $\rho_X(t) = \int_0^t (\mu(\tau) - \lambda(\tau)) d\tau$.

Dans ce qui suit, nous prouvons que l'âge moyen à l'extinction est infini. Ce résultat fait appel au lemme suivant.

Lemme 3.1 Soit f une fonction périodique de période T et $g(\tau) = \int_0^\tau f(u) du$, $\tau \leq T$.

Alors, g est une fonction périodique de période T si et seulement si :

$$\int_0^T f(u) du = 0. \quad (3.13)$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} g(\tau + T) &= \int_0^{\tau+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du + \int_T^{\tau+T} f(u) du \\ &= \int_0^T f(u) du + \int_0^\tau f(v) dv = \int_0^T f(u) du + g(\tau). \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $v = u - T$. Finalement, on a :

$$g(\tau + T) = g(\tau) \iff \int_0^T f(u) du = 0.$$



Théorème 3.3 *Pour le modèle (MSBH), $\mathbb{E}[A]$ est infinie, où A dénote, indifféremment, l'âge à l'extinction de la population des proies ou des prédateurs.*

Preuve :

Comme l'argument qui suit est le même pour les deux populations on omettra l'indice X ou Y dans les taux de naissance et de mort.

Comme $A > 0$ on applique le résultat général :

$$\mathbb{E}[A] = \int_0^{\infty} (1 - F_A(t)) dt,$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A] &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau + 1}\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} dt. \end{aligned}$$

Notons que, selon Pielou (1969) et la formule (3.7), les taux $\lambda(t)$, $\mu(t)$ sont des fonctions périodiques et donc $\rho(t)$ est une intégrale de fonctions périodiques. Pour montrer que ρ est une fonction périodique de période T on utilise la condition (3.13) du lemme 3.1 et la propriété 1.4. Dans notre cas on peut mettre :

$$f(u) = \gamma x(u) - \delta,$$

$$g(\tau) = \rho_Y(\tau),$$

et

$$f(u) = \beta y(u) - \alpha,$$

$$g(\tau) = \rho_X(\tau).$$

On écrit :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \frac{1}{\int_0^t \mu(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} dt$$

On a, pour tout $t \in [(k-1)T; kT]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau &\leq \int_0^{kT} \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau = k \int_0^T \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau \\ \Leftrightarrow \int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + 1 &\leq k \int_0^T \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} &\geq \frac{1}{k \int_0^T \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \frac{1}{\int_0^t \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau + 1} dt &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \frac{1}{1 + k \int_0^T \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1 + k \int_0^T \mu(\tau)e^{\rho(\tau)} d\tau} \end{aligned}$$

On sait que la série harmonique générale de la forme suivante diverge :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ak + b} = \infty,$$

et par conséquent la série $\mathbb{E}[A] = \infty$.



Suite à ces résultats, on pourrait voir un avantage pratique à utiliser ce modèle pour expliquer ce qu'on observe en pratique, car même si l'extinction est sûr, elle arrive en moyenne à un «âge» infini. Le résultat qui suit établit un lien entre la variance du processus et la propriété de périodicité des taux de naissance et mort pour les deux populations. Il suffit de faire la preuve pour seulement une des deux populations, les proies par exemple.

Corollaire 3.1 *Pour $t = kT$, où T est la période commune de $\mu_X(t)$, $\lambda_X(t)$ la variance du processus a la forme :*

$$\mathbb{V}[X(t)] = k\mathbb{E}[X(t)]^2 \int_0^T e^{\rho_X(\tau)} [\mu_X(\tau) + \lambda_X(\tau)] d\tau$$

Preuve

D'après le théorème 2.9, si $X(0) = 1$, la variance de $X(t)$ est donnée par :

$$\mathbb{V}[X(t)] = e^{-\rho_X(t)} \left[1 - e^{-\rho_X(t)} + 2e^{-\rho_X(t)} \int_0^t \lambda_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau \right]$$

Par la définition de $\rho_X(t)$:

$$\int_0^t (\mu_X(\tau) - \lambda_X(\tau)) e^{\rho_X(\tau)} d\tau = e^{\rho_X(\tau)} \Big|_0^t = e^{\rho_X(t)} - 1 \quad (3.14)$$

On écrit la variance de $X(t)$ sous la forme :

$$\mathbb{V}[X(t)] = e^{-2\rho_X(t)} \left[e^{\rho_X(t)} - 1 + 2 \int_0^t \lambda_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau \right]$$

D'après le formule (3.14), on a :

$$\mathbb{V}[X(t)] = e^{-2\rho_X(t)} \left[\int_0^t (\mu_X(\tau) - \lambda_X(\tau)) e^{\rho_X(\tau)} d\tau + 2 \int_0^t \lambda_X(\tau) e^{\rho_X(\tau)} d\tau \right]$$

et donc

$$\mathbb{V}[X(t)] = e^{-2\rho_X(t)} \int_0^t e^{\rho_X(\tau)} [\mu_X(\tau) + \lambda_X(\tau)] d\tau.$$

Finalement, on compte tenu de la propriété de périodicité de $\mu_X(t)$, du fait que $\lambda_X(t) = \alpha$ et $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-\rho_X(t)}$, on obtient le résultat.



Selon ce corollaire, il est clair que la variance du processus croît avec le temps car elle est proportionnelle au nombre de périodes parcourues. Donc, cela met en doute l'utilité pratique d'un tel modèle, même si l'âge moyen à l'extinction est infini. Nous avons donc considéré un modèle différent.

3.3 Modélisation stochastique du système Lotka-Volterra par des processus de Poisson non homogènes indépendants

Cette modélisation répond à la dernière objection concernant le modèle de naissance et mort de la section 3.2 et permet aussi de proposer une méthode d'estimation des paramètres du système (3.3). Soit $N_X(t)$ (respectivement $N_Y(t)$) le nombre cumulatif de proies (respectivement de prédateurs) observés à travers le temps dans l'intervalle $(0, t]$. Si $(x(t), y(t))$ est une solution au système (1.1) on peut supposer que :

$$m_X(t) = \mathbb{E}[N_X(t)] = \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

$$m_Y(t) = \mathbb{E}[N_Y(t)] = \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Alors, on pourrait considérer deux processus de Poisson non homogènes indépendants :

$$\{N_X(t), t \geq 0\}, \quad \{N_Y(t), t \geq 0\}$$

dont les taux sont données par les dérivées des moyennes :

$$\nu_X(t) = m'_X(t) = x(t), \quad \nu_Y(t) = m'_Y(t) = y(t).$$

Notons que, dans le cas d'un processus de Poisson, les variables :

$$N_X(t_j) - N_X(t_{j-1}), \quad N_Y(t_j) - N_Y(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, k$$

sont indépendantes, quels que soient les constants $t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

On pourrait considérer qu'on observe des données à une suite de temps τ_m , $m = 1, 2, \dots$

En pratique, on a des données aux trimestrielles ou semestrielles ou annuelles. Ces observations correspondent aux paires :

$$N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), \quad N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Les différences

$$N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), \quad N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres :

$$\nu_X(\tau_j) = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} x(s) ds, \quad \nu_Y(\tau_j) = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} y(s) ds, \quad j = 1, 2, \dots$$

Les accroissements en X, respectivement en Y, ne sont pas identiquement distribués car les intégrales varient à l'intérieur d'une période. De plus, nous travaillons avec des temps équidistants.

En conséquence, on considère des variables de Poisson indépendantes et identiquement distribuées, en sommant les variables $N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1})$ et $N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots$. Donc, on prend :

$$N_X(kT) - N_X((k-1)T) = \sum_{\{j:kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} (N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1})), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$N_Y(kT) - N_Y((k-1)T) = \sum_{\{j:kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} (N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1})), \quad k = 1, 2, \dots,$$

de paramètres :

$$\nu_k^X = \sum_{\{kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} \nu_X(\tau_j), \quad \nu_k^Y = \sum_{\{kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} \nu_Y(\tau_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

CHAPITRE IV

ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Dans ce chapitre, on considère des données de type prédateur-proie, auxquelles on essaie d'ajuster le modèle stochastique proposé à la section 3.4. Ensuite, on étudie et applique une méthode d'estimation des paramètres du modèle, en se basant sur les propriétés énoncées à la section 1.4.

4.1 Contexte d'application

En pratique, afin d'évaluer la taille des populations animales, on recourt souvent à des techniques qui font naturellement appel à des processus de Poisson. En effet, parmi les méthodes d'échantillonnage les plus courantes, on a les décomptes périodiques d'excréments déposés sur un territoire divisé en parcelles, ou les décomptes d'animaux traversant une (ou observés à partir d'une) allée (*transect*) parcourue par un observateur. Il est clair que ces méthodes indiquent le nombre d'animaux présents sur un certain territoire à certains moments de temps, sans pour autant exclure la possibilité que le même individu soit compté plusieurs fois. Pour plus de détails, on peut consulter Bartel, Knowlton et Stoddart (2008). Notons qu'on peut aussi recourir à des pièges, en particulier il y a les données historiques du vison canadien de la Baie de Hudson (*Canadian mink-muskrat data*), portant sur le nombre de fourrures vendues à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle, à partir d'animaux capturés dans des pièges.

Ainsi, soit un intervalle de temps $[0, t]$, et considérons le nombre cumulatif d'animaux ayant été observés sur un territoire donné durant cet intervalle de temps (dans le sens du paragraphe précédent). Ce nombre peut se modéliser par un processus de Poisson dont la moyenne est l'intégrale de la fonction déterministe qui décrit la taille de la population qui traverse ce certain territoire à un instant t . Cette population est directement proportionnelles à la population totale et il existe une vaste littérature sur la façon d'estimer ce coefficient de proportionalité (voir, par exemple, Bartel, Knowlton et Stoddart, 2008). Par contre, plusieurs auteurs (voir Palomares, 2001) ne font pas de distinction entre cette population et la population totale. Donc, pour la suite, nous allons supposer que ce coefficient de proportionalité est 1, ce qui ne change rien à notre méthode (qui s'applique dans le cas où ce coefficient est connu).

Pour la suite, on considère $N_X(t), N_Y(t)$ le nombre cumulatif d'animaux observés dans l'intervalle $[0, t]$ pour chaque population, respectivement. On prend :

$$m_X(t) = \mathbb{E}[N_X(t)] = \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

$$m_Y(t) = \mathbb{E}[N_Y(t)] = \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

et considère les deux processus de Poisson non homogènes indépendants :

$$\{N_X(t), t \geq 0\}, \quad \{N_Y(t), t \geq 0\}.$$

On pourrait considérer qu'on observe des données à une suite prédéterminée de temps équidistants $\tau_m, m = 1, 2, \dots$

En pratique, on a des données trimestrielles, semestrielles ou annuelles. Ces observations correspondent aux paires :

$$N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), \quad N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Les différences

$$N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), \quad N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

sont des variables de Poisson indépendantes, de paramètres :

$$\nu_X(\tau_j) = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} x(s)ds, \quad \nu_Y(\tau_j) = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} y(s)ds, \quad j = 1, 2, \dots$$

Tel que montré précédemment, on peut considérer des paires des variables de Poisson indépendantes et identiquement distribuées, en sommant les variables $N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1})$ et $N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots$, de la façon qui suit. On prend les variables :

$$N_X(kT) - N_X((k-1)T) = \sum_{\{j|kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} (N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1})), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$N_Y(kT) - N_Y((k-1)T) = \sum_{\{j|kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} (N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1})), \quad k = 1, 2, \dots$$

qui sont de Poisson avec paramètres :

$$\nu_k^X = \sum_{\{j|kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} \nu_X(\tau_j), \quad \nu_k^Y = \sum_{\{j|kT < \tau_j \leq (k+1)T\}} \nu_Y(\tau_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

4.2 Estimation

Dans notre approche, on suppose que la période T est connue ou pourrait être estimée à partir d'autres données. Notre estimation se fait en deux étapes. On commence par estimer les rapports α/γ et δ/γ et ensuite, à partir des propriétés du système (1.1), on estime γ , α et δ .

4.2.1 Estimation ponctuelle de α/γ et δ/γ

Pour la simplicité, on introduit les notations suivantes :

$$A = \alpha/\gamma, \quad D = \delta/\gamma.$$

On a vu, en vertu de la propriété 1.2 du chapitre I, qu'on peut supposer $\beta = \gamma$ dans le système (1.1).

Notre méthode de estimation est basée essentiellement sur la propriété 1.4, énoncée dans la section 1.4 du chapitre I, selon laquelle les moyennes de $x(t)$ et $y(t)$ sur une période T sont données par :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{\delta}{\gamma}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Si on observe les populations sur $\ell \geq 1$ périodes au moins, mais pas plus de $\ell + 1$ périodes, on propose les estimateurs de α/γ et δ/γ :

$$\widehat{A} = \widehat{(\alpha/\gamma)} = \frac{\sum_{k=1}^{\ell} [N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)]}{\ell T}, \quad (4.2)$$

$$\widehat{D} = \widehat{(\delta/\gamma)} = \frac{\sum_{k=1}^{\ell} [N_X(kT) - N_X((k-1)T)]}{\ell T}. \quad (4.3)$$

Ces estimateurs sont des moyennes arithmétiques de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Une propriété importante de ces estimateurs est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Soit les estimateurs $\widehat{A} = \widehat{(\alpha/\gamma)}$ et $\widehat{D} = \widehat{(\delta/\gamma)}$ de α/γ et δ/γ définis en (4.2) et (4.3). Alors on a :*

- i) \widehat{A} et \widehat{D} sont sans biais ;
- ii) les variances des estimateurs sont données par

$$\mathbb{V}[\widehat{A}] = \frac{1}{\ell T} \frac{\alpha}{\gamma},$$

$$\mathbb{V}[\widehat{D}] = \frac{1}{\ell T} \frac{\delta}{\gamma}.$$

Preuve

- i) On veut montrer que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\widehat{(\alpha/\gamma)}] = \alpha/\gamma, \\ \mathbb{E}[\widehat{(\delta/\gamma)}] = \delta/\gamma. \end{cases} \quad (4.4)$$

Rappelons que les variables $N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)$ sont des variables de Poisson indépendantes par définition et identiquement distribuées par la périodicité.

On commence par le calcul de $\mathbb{E}[\widehat{(\alpha/\gamma)}]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widehat{(\alpha/\gamma)}] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{k=1}^{\ell}[N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)]}{\ell T}\right] \\ &= \frac{1}{\ell T} \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}[N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)] \\ &= \frac{1}{\ell T} \left(\ell \int_0^T y(t) dt\right) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt\end{aligned}$$

D'après la propriété 1.4, on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{\alpha}{\gamma},$$

car $\beta = \gamma$. Donc :

$$\mathbb{E}[\widehat{(\alpha/\gamma)}] = \alpha/\gamma.$$

Ceci signifie que l'estimateur de α/γ est sans biais.

Un calcul similaire montre que l'estimateur de δ/γ est également sans biais.

ii) Encore une fois, il suffit de faire le calcul pour l'un des estimateurs, par exemple $\widehat{(\alpha/\gamma)}$. Par l'indépendance et le fait que les variables suivent des lois de Poisson on a que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\widehat{(\alpha/\gamma)}] &= \mathbb{V}\left[\frac{\sum_{k=1}^{\ell}[N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)]}{\ell T}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\ell T}\right)^2 \mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{\ell}[N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)]\right] \\ &= \frac{\ell}{(\ell T)^2} \mathbb{V}[N_Y(T) - N_Y(0)] = \frac{1}{\ell T^2} \int_0^T y(t) dt \\ &= \frac{1}{\ell T} \frac{\int_0^T y(t) dt}{T} = \frac{1}{\ell T} \frac{\alpha}{\gamma}.\end{aligned}$$

♠

4.2.2 Estimation de α , γ , δ

Afin de continuer avec l'estimation de γ , α et δ on considère les éléments suivants :

- T_0 , la période du système non linéaire Lotka-Volterra (1.1) de paramètres $\alpha, \gamma, \gamma, \delta$;
on suppose que la période observée est égale à T_0 ;
- T_s , la période du système non linéaire Lotka-Volterra de paramètres $A, 1, 1, D$;
- T_s^l , la période du système linéarisé par l'approximation de Pielou (1969) ;
- \widehat{T}_s , la période du système non linéaire Lotka-Volterra de paramètres $\widehat{A}, 1, 1, \widehat{D}$;
- \widehat{T}_s^l , la période du système linéarisé de paramètres $\widehat{A}, 1, 1, \widehat{D}$.

Autour du point d'équilibre on peut supposer que T_s est proche de T_s^l , donc on remplace T_s par T_s^l et \widehat{T}_s par \widehat{T}_s^l . Pour estimer γ on pourrait se baser sur la relation $\gamma = T_s/T_0$ en vertu de la propriété 1.3 du chapitre I. Si on suppose que $T_s \approx T_s^l$, on peut considérer l'estimateur

$$\widehat{\gamma} = \widehat{T}_s^l/T_0,$$

ce qui donne

$$\widehat{\gamma} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{\sqrt{\widehat{A}\widehat{D}}}, \quad (4.5)$$

en vertu du corollaire 1.1 du chapitre I.

Alors, l'estimateur naturel de α est $\widehat{\alpha} = \widehat{(\alpha/\gamma)} \times \widehat{\gamma}$ et l'estimateur de α est donné par :

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{A}}{\widehat{D}}}. \quad (4.6)$$

De façon analogue, on pose $\widehat{\delta} = \widehat{(\delta/\gamma)} \times \widehat{\gamma}$, et l'estimateur de δ est donné par :

$$\widehat{\delta} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}}. \quad (4.7)$$

4.3 Intervalles de confiance

Reprenons le cadre de l'estimation présentée dans la section précédente. La question naturelle est de chercher à mesurer la qualité de l'estimation fournie par $\widehat{(\alpha/\gamma)}$, $\widehat{(\delta/\gamma)}$,

$\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$. Donc on pourrait déterminer des intervalles de confiance des paramètres α/γ , δ/γ , α , γ et δ et évaluer ensuite la qualité de l'estimation par des simulations numériques. On commence avec les estimateurs $\widehat{(\alpha/\gamma)}$ et $\widehat{(\delta/\gamma)}$. La proposition classique qui suit nous permet de construire un intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Poisson.

Proposition 4.2 *Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une population de loi de Poisson de paramètre θ . Alors :*

$$\left(\bar{X} + \frac{z_{a/2}^2}{2n} - \frac{z_{a/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X} + 1/4n}, \quad \bar{X} + \frac{z_{a/2}^2}{2n} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X} + 1/4n} \right)$$

est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - a$, où $z_{a/2}$ est le quantile d'ordre $a/2$ de la loi normale centrée réduite et \bar{X} est la moyenne échantillonnale.

Preuve

D'après le théorème central limite, \bar{X} est approximativement de loi normale de moyenne θ et de variance θ/n . Alors, on a :

$$P \left(-z_{a/2} \leq \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\theta/n}} \leq z_{a/2} \right) = 1 - a$$

Pour trouver l'intervalle de confiance on résout (en θ) l'inéquation :

$$\left| \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\theta/n}} \right| \leq z_{a/2}. \quad (4.8)$$

On transforme par équivalence l'inégalité (4.8), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\theta/n}} \right| \leq z_{a/2} &\Leftrightarrow (\bar{X} - \theta)^2 \leq z_{a/2}^2 \theta/n \\ &\Leftrightarrow \theta^2 - 2\bar{X}\theta + \bar{X}^2 - z_{a/2}^2 \theta/n \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta^2 - \theta \left(2\bar{X} + z_{a/2}^2/n \right) + \bar{X}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

On obtient les solutions θ_1 et θ_2 de l'équation quadratique :

$$\theta^2 - \theta \left(2\bar{X} + z_{a/2}^2/n \right) + \bar{X}^2 = 0$$

qui sont

$$\theta_1 = \bar{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X} + 1/4n},$$

$$\theta_2 = \bar{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X} + 1/4n}.$$

Finalement, la solution de (4.8) est $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, d'où le résultat désiré.



Remarque 4.1 Lorsque n est grand, on retrouve l'intervalle de confiance asymptotique (habituel) pour θ :

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n} \right)$$

car on peut alors négliger les termes en $1/n$.

Rappelons ce résultat pour estimer la moyenne d'une loi gaussienne.

Remarque 4.2 Soit les variables indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n qui suivent une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 . Alors

$$\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, \alpha/2}, \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, \alpha/2} \right)$$

est un intervalle de confiance pour m de niveau $1 - \alpha$, où $t_{n-1, \alpha/2}$ est le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté et s^2 est la variance échantillonnale.

Par conséquent, si on utilise la remarque 4.1, un intervalle de confiance pour A , lorsque n est grand, est de la forme :

$$\left(\hat{A} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{A}/n}, \hat{A} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{A}/n} \right), \quad (4.9)$$

et un intervalle de confiance pour D , lorsque n est grand, est de la forme :

$$\left(\hat{D} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{D}/n}, \hat{D} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{D}/n} \right). \quad (4.10)$$

Sinon, un autre intervalle de confiance pour A (respectivement D) s'obtient à partir de la remarque 4.2.

On note par \widehat{A}_L et \widehat{A}_U la borne inférieure et la borne supérieure correspondante de l'intervalle de confiance pour A et par \widehat{D}_L et \widehat{D}_U la borne inférieure et la borne supérieure correspondante de l'intervalle de confiance pour D , au niveau de confiance $1 - a$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{A}_L &= \widehat{A} - z_{a/2} \sqrt{\widehat{A}/n}, & \widehat{D}_L &= \widehat{D} - z_{a/2} \sqrt{\widehat{D}/n}, \\ \widehat{A}_U &= \widehat{A} + z_{a/2} \sqrt{\widehat{A}/n}, & \widehat{D}_U &= \widehat{D} + z_{a/2} \sqrt{\widehat{D}/n}.\end{aligned}$$

À partir des bornes $\widehat{A}_L, \widehat{A}_U, \widehat{D}_L, \widehat{D}_U$, on peut trouver les intervalles de confiance pour les paramètres γ , α et δ (en fait, on peut utiliser les bornes de n'importe quel intervalle pour A et D).

En effet, on a les estimateurs ponctuels de γ , α et δ :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma} &= \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{\sqrt{\widehat{A}\widehat{D}}} \\ \widehat{\alpha} &= \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{A}}{\widehat{D}}}, \\ \widehat{\delta} &= \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}},\end{aligned}$$

tels que vus à la section précédente. Les intervalles de confiance (4.9) et (4.10) pour A et D se traduisent en les intervalles de confiance pour γ , α et δ de la forme :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_U \widehat{D}_U}}, \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_L \widehat{D}_L}} \right), \\ \left(\frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{A}_L}{\widehat{D}_U}}, \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{A}_U}{\widehat{D}_L}} \right), \\ \left(\frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{D}_L}{\widehat{A}_U}}, \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{\widehat{D}_U}{\widehat{A}_L}} \right).\end{aligned}\tag{4.11}$$

On propose de justifier que ces intervalles sont de niveau au moins $1 - 2a$, si les intervalles pour A et D sont chacun de niveau $1 - a$. Pour cela on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1 *Si M et N sont deux événements, alors on a :*

$$P(M \cap N) \geq P(M) + P(N) - 1.$$

En particulier, si $P(M) = P(N) = 1 - a$, on a $P(M \cap N) \geq 1 - 2a$.

Preuve

On a

$$1 \geq P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N),$$

d'où, en changeant de membre, on obtient l'inégalité cherchée.

♠

On passe maintenant aux intervalles définis en (4.11). Soit l'intervalle de confiance pour γ .

On commence par la relation évidente :

$$\widehat{A}_L \leq A \leq \widehat{A}_U, \widehat{D}_L \leq D \leq \widehat{D}_U \implies \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_U \widehat{D}_U}} \leq \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{AD}} \leq \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_L \widehat{D}_L}}$$

Par conséquent, on a :

$$P\left(\widehat{A}_L \leq A \leq \widehat{A}_U, \widehat{D}_L \leq D \leq \widehat{D}_U\right) \leq P\left(\frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_U \widehat{D}_U}} \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_L \widehat{D}_L}}\right).$$

D'après le lemme 4.1 et le fait que $P\left(\widehat{A}_L \leq A \leq \widehat{A}_U\right) = P\left(\widehat{D}_L \leq D \leq \widehat{D}_U\right) = 1 - a$, on a :

$$P\left(\frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_U \widehat{D}_U}} \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{\frac{1}{\widehat{A}_L \widehat{D}_L}}\right) \geq 1 - 2a,$$

tel que désiré. Les calculs pour les intervalles de α et δ sont semblables.

4.4 Simulations numériques et analyse de données

On applique la méthode d'estimation sur des données simulées. On considère le système déterministe Lotka-Volterra, de paramètres :

$$\alpha = 0.201135;$$

$$\beta = \gamma = 0.0040227;$$

$$\delta = 2.01135,$$

et on prend $x(0) = 546$ et $y(0) = 78$ comme valeurs initiales. Avec ce choix de paramètres, on a une moyenne de $D = \bar{x}_c = 500$ pour les proies, de $A = \bar{y}_c = 50$ pour les prédateurs et une période de 10 ans. On crée une solution numérique de ce système à l'aide du logiciel R, en utilisant le paquetage *odesolve*. En tenant compte du fait qu'en pratique le nombre de données réelles est relativement petit (par exemple, il y a seulement 64 données pour *le Canadian mink-muskrat data*) on a pris 80 couples d'observations en des temps équidistants. Donc, avec une période observée $T_0 = 10$ ans, nous avons un total de $\ell = 8$ périodes.

On utilise la méthode des trapèzes pour le calcul des intégrales définissant $\nu_X(\tau_j), \nu_Y(\tau_j)$ $j = 1, 2, \dots$, les paramètres de la loi de Poisson. La méthode des trapèzes représente un choix efficace pour l'intégration numérique des fonctions périodiques. Ensuite, on simule les différences :

$$\begin{cases} N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), j = 1, \dots, 80, \\ N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), j = 1, \dots, 80, \end{cases} \quad (4.12)$$

et, en sommant, on obtient :

$$\begin{cases} N_X(kT) - N_X((k-1)T), k = 1, \dots, 8, \\ N_Y(kT) - N_Y((k-1)T), k = 1, \dots, 8, \end{cases} \quad (4.13)$$

où $N_X(kT) - N_X((k-1)T)$, respectivement $N_Y(kT) - N_Y((k-1)T)$ sont des variables de Poisson indépendantes et identiquement distribuées. On applique les formules des estimateurs (4.2), (4.3), (4.5), (4.6), (4.7) et on calcule le biais relatif pour chaque estimateur selon la formule :

$$(\theta - \hat{\theta})/\theta,$$

où θ est n'importe lequel des paramètres estimés.

Finalement, on obtient le tableau 4.1 basé sur 1000 de simulations. Les estimateurs \hat{A} et \hat{D} sont des moyennes sur les mille simulations.

TABLE 4.1 Estimation ponctuelle des paramètres

Paramètres	Estimateurs	Biais relatif
$A = 50$	$\hat{A} = 49.9798$	0.0004
$D = 500$	$\hat{D} = 499.7983$	0.0004
$\gamma = 0.0040$	$\hat{\gamma} = 0.0039$	0.025
$\alpha = 0.2011$	$\hat{\alpha} = 0.1986$	0.0124
$\delta = 2.0113$	$\hat{\delta} = 1.9869$	0.0121

On a regardé le comportement pour 1000 et 10000 simulations et on a compté le pourcentage du temps où les vraies valeurs des paramètres se retrouvent dans les intervalles de confiance.

TABLE 4.2 Probabilité empirique de couverture

Nombre de répétitions	A	D	α	γ	δ
1000	94.7	95.6	96.7	97.8	98.6
10000	94.62	94.91	97.08	97.71	97.34

On a pris $a = 5\%$, donc un niveau de confiance de 95% et $z_{a/2} = 1.96$. Dans nos calculs, on s'est basé sur la remarque 4.1 et les formules (4.9) et (4.10). Pour les paramètres A et D , on s'attend à une probabilité de couverture de au plus 95% , tandis que pour les paramètres α , γ et δ on s'attend à une probabilité de couverture d'au moins 90%, selon le lemme 4.1. On observe que les probabilités de couverture obtenues pour A et D sont bonnes, mais elles paraissent trop grandes pour α , γ et δ .

Pour ce qui est du nombre de simulations, il n'influence pas les résultats, car ils ne sont que légèrement meilleurs avec 10000 simulations.

Ensuite, on applique notre méthode d'estimation à l'ensemble de données réelles connues sous le nom de *Canadian mink-muskrat data*, données qui représentent le nombre de fourrures vendues par la Compagnie de la Baie d'Hudson entre les années 1848 et 1911 (voir, par exemple Brockwell and Davis). La proie est le rat musqué et le prédateur est le vison. Nous avons 64 couples d'observations qui correspondent au nombre de proies et prédateurs pris dans des pièges (fourrures vendues) pendant 64 ans consécutifs, mais nous utilisons seulement les 60 premières données. En effet, dans la littérature, on a estimé que la période de ce type de données boréales est de 10 ans.

La figure 4.1 représente l'évolution de la population du vison et celle du rat musqué sur 64 ans. Afin de permettre une comparaison, le rat musqué est exprimé en centaines de milliers et le vison en dizaines de milliers. On remarque que les oscillations sont décalées et que les deux courbes semblent périodiques en temps.

Avec notre approche, on peut supposer que les données correspondent aux différences :

$$\begin{cases} N_X(\tau_j) - N_X(\tau_{j-1}), j = 1, \dots, 60, \\ N_Y(\tau_j) - N_Y(\tau_{j-1}), j = 1, \dots, 60. \end{cases}$$

En appliquant les formules (4.2) à (4.7) pour l'estimation de paramètres, on obtient les résultats numériques suivants :

$$\begin{cases} \hat{A} = 563.02, \\ \hat{D} = 53.42, \\ \hat{\gamma} = 0.00362, \\ \hat{\alpha} = 0.19353, \\ \hat{\delta} = 2.039811. \end{cases}$$

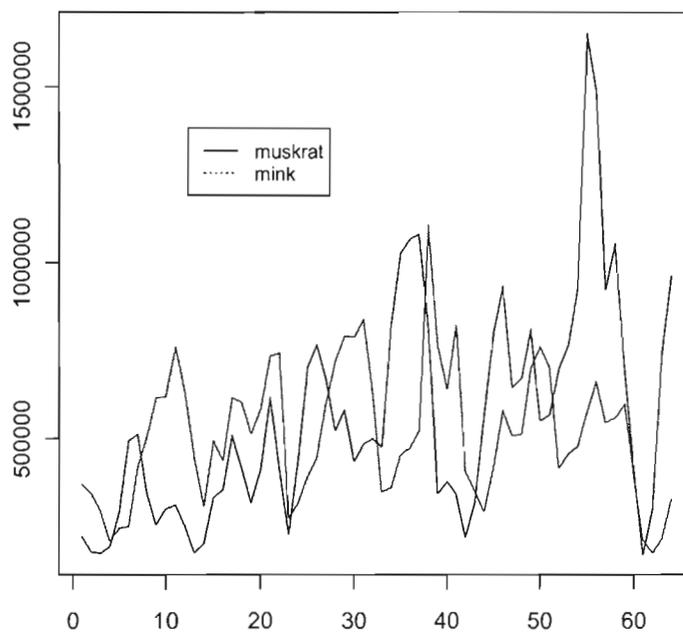


FIGURE 4.1 Oscillations des populations de rat musqué et vison pendant 64 années (1848-1911)

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de présenter de nouveaux modèles stochastiques décrivant l'interaction prédateur-proie. Cette approche reposait sur certaines propriétés du modèle déterministe, ainsi que sur des résultats théoriques des processus de Poisson et de naissance et mort non homogènes.

La contribution originale la plus importante de cette étude fut d'introduire des modèles stochastiques pour l'interaction prédateur proie par l'entremise des processus de Poisson et de naissance et mort non homogènes et de proposer une méthode d'estimation des paramètres basée sur ces modèles. Le point de départ était le système déterministe Lotka-Volterra. On a utilisé aussi la linéarisation du système Lotka-Volterra autour du point d'équilibre, qui nous permet d'étudier le comportement analytique de la solution du système et de l'appliquer à l'estimation des paramètres. Dans le chapitre II, nous avons donné quelques preuves originales de théorèmes et exercices sur les processus de naissance et de mort introduits dans Parzen (1962).

Le premier modèle que nous avons proposé est un modèle bivarié basé sur des processus de naissance et mort non homogènes et sur le fait important que

$$\mathbb{E}[X(t)] = x(t), \quad \mathbb{E}[Y(t)] = y(t),$$

donc, en moyenne, on retrouve les solutions du système déterministe de Lotka-Volterra. Une caractéristique principale de la modélisation stochastique (habituelle) pour le système prédateur-proie est d'avoir l'extinction (Renshaw 1986). On a retrouvé cette propriété dans notre modèle bivarié, mais on a montré que dans notre cas l'âge moyen à l'extinction est infini, ce qui paraît décrire mieux ce qu'on observe en pratique (les po-

pulations persistent et oscillent pour de longues périodes de temps).

Le deuxième modèle est basé sur des processus de Poisson non homogènes et sur la périodicité et la propriété de la moyenne sur une période de la solution du système déterministe. La motivation pratique de ce modèle est la façon dont on évalue en pratique la taille des populations animales. Les techniques utilisées se modélisent bien par des processus de Poisson. Dans un premier temps on peut estimer les paramètres A et D de ce modèle (les coordonnées du centre du système déterministe) en se basant sur les propriétés du système Lotka-Volterra. Après, on estime les paramètres α , γ et δ en supposant que, autour du point d'équilibre, la période du système initial est proche de la période du système linéarisé.

Finalement, on a appliqué la méthode d'estimation à des données simulées et à des données réelles. On peut remarquer que le biais relatif reste faible pour tous les paramètres, donc nos estimateurs ont une bonne performance. L'approximation du système autour du point d'équilibre a permis de proposer des intervalles de confiance. Il serait intéressant, dans l'estimation des paramètres α , γ et δ , de trouver une réponse théorique dans la situation où la distance entre les données et le point d'équilibre est assez grande.

ANNEXE A

THÉORÈME D'UNICITÉ CAUCHY-LIPSCHITZ

Dans cette annexe on énonce les principales théorèmes de la théorie des équations différentielles ordinaires qui permettent de déduire l'existence et l'unicité de la solution du système (1.1).

Soit le système d'équation différentielles :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, Ω ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Théorème A.1 (*Cauchy-Lipschitz*) *Si f est continue et localement lipschitzienne en u (c'est-à-dire pour tout $(t_0, u_0) \in \Omega$, il existe un voisinage U de u_0 , un voisinage I de t_0 et une constante $K > 0$ tels pour tous $u_1, u_2 \in U$ et tout $t \in I$, $\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq K \|u_1 - u_2\|$) alors le système (A.1) admet une unique solution maximale.*

On observe que pour

$$u(t) = (x(t), y(t)), \quad f(u(t)) = (\alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \gamma x(t)y(t) - \delta y(t))$$

on retrouve le système Lotka-Volterra. La fonction f est de classe C^1 , donc localement lipschitzienne et on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Rappelons qu'une solution maximale d'une équation différentielle est une solution que l'on ne peut pas prolonger à une autre solution.

Il existe une façon élémentaire de prouver l'unicité de la solution du système Lotka-Volterra. La preuve repose sur un résultat intermédiaire de Peter Lax (1976), exercice 2.4). Notons que ce lemme est une formulation du théorème d'unicité pour un système d'équations différentielles autonome.

Lemme A.1 *Soit le système d'équations différentielles de type :*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(v), \\ \frac{dv(t)}{dt} = g(u), \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où u, v sont fonctions dérivables par rapport à t et f, g sont fonctions dérivables bornées par rapport à v , respectivement u .

Si on a deux solutions qui coïncident à $t = 0$, alors elles seront égales pour tout $t > 0$



Théorème A.2 *Étant données des valeurs initiales $x(0)$ et $y(0)$, la solution du système (1.1) est uniquement déterminée.*

Preuve

Observons que le système (1.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d(\ln x(t))}{dt} = \alpha - \beta y(t), \\ \frac{d(\ln y(t))}{dt} = \gamma x(t) - \delta, \\ x(0) > 0, y(0) > 0, \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Donc pour arriver au résultat il est suffisant de prendre

$$u(t) = \ln x(t), v(t) = \ln y(t), f(v) = \alpha - \beta \exp(v), g(u) = \gamma \exp(u) - \delta$$

et d'appliquer le lemme A.1.



BIBLIOGRAPHIE

- Bartel, R., Knowlton, F. et Stoddart, L. C. 2008. « Long-term patterns in mammalian abundance in northern portions of the Great Basin », *American Society of Mammalogists*, vol. 89, p. 1170-1183.
- Brockwell, P. J. et Davis, RA. 1991. *Time Series : Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Grimmett, G. R. et Stirzaker D. R. 1992. *Probability and Random Processes*, Oxford Science Publications, New York.
- Hirsch, M. W., Smale, S. et Devaney R. 2004. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*, Academic Press, New York.
- Hitchcock, S. E. 1986. « Extinction probabilities in predator-prey models », *Journal of Applied Probability*, vol. 23, p. 1-13.
- Kendall, D. G. 1948. « On the generalized "Birth-and-Death" Process », *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 19, p. 1-15.
- Khinchin, A. Y., 1956. « On Poisson Sequences of Chance Events », *Theory of Probability and its Applications*, vol. 1, p. 291-297.
- Lax, P., Burstein, S. et Lax, A. 1976. *Calculus with Applications and Computing*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Palomares, F. 2001. « Comparison of 3 Methods to Estimate Rabbit Abundance in a Mediterranean Environment », *Wildlife Society Bulletin*, vol. 29, p. 578-585.
- Parzen, E. 1962. *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco-London.
- Pielou, E. C. 1969. *An introduction to mathematical ecology*, John Wiley, New York.
- Swift, R. J. 2002. « A stochastic predator-prey model », *Irish Math. Soc. Bulletin*, vol. 48, p. 57-63.
- Vallois, P. 2007. *Modélisations stochastiques et simulations*, Ellipses, Paris.