UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA MANIÈRE D'UNE MODALITÉ :

UNE ANALYSE LOGIQUE ET PHILOSOPHIQUE

DE LA

MODALITÉ D'ORDRE SUPÉRIEUR

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN PHILOSOPHIE

PAR
NEIL KENNEDY

FÉVRIER 2011

À mes parents,

Agathe Girard

et

Keith Kennedy

Avant-propos

Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans le concours de nombreuses personnes et institutions. J'aimerais tout d'abord remercier la Chaire de recherche du Canada en philosophie de la logique et des mathématiques (UQAM) et l'Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques (IHPST – Paris 1) pour l'aide financière et logistique qu'ils ont pu m'apporter, en plus d'avoir constitué – et de constituer encore – des lieux féconds pour la recherche en philosophie. Par ailleurs, je tiens à remercier le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (le CRSH) pour le financement académique qui a rendu, dans une très grande mesure, cette thèse possible.

Merci à Luc Bélair, François Lepage et Jean-Pierre Marquis, à qui j'ai présenté certaines des idées de cette thèse dans le cadre du Séminaire interuniversitaire de logique, et à mes collègues de l'IHPST, tout particulièrement Carlo Proietti, pour les commentaires qu'ils ont pu donner sur ce travail.

Merci à mes directeurs de cotutelle, Mathieu Marion et Jacques Dubucs, pour les conseils et l'encadrement scientifiques qui ont permis à cette thèse de prendre forme, et pour le soutien dont ils ont fait preuve jusqu'à sa réalisation.

Reconnaissance infinie à mes parents, lesquels ont toujours su m'encourager dans la poursuite interminable de mes études.

Merci Anouk, pour tout.

Table des matières

Index des notations

APPENDICE

Résumé

La thèse porte sur la notion de modalité d'ordre supérieur. La modalité d'ordre supérieur peut être caractérisée comme une modalité agissant sur une proposition dans laquelle figure déjà une modalité, un aspect de la modalité qui, étonnamment, a été très peu étudié. Une analyse de ce phénomène est proposée et je présente certains problèmes philosophiques où ce phénomène se manifeste. Je considère, entre autres, le problème de la transparence épistémique (l'idée qu'un agent sait qu'il sait lorsqu'il sait) et j'applique l'analyse générale de la modalité d'ordre supérieur à la résolution de celui-ci. De même, une solution du paradoxe de Fitch est proposée, qui s'appuie essentiellement sur l'idée que certaines des notions modales impliquées dans ce paradoxe sont d'ordre supérieur et que celles-ci sont mal représentées dans un langage modal conventionnel. La discussion de ces problèmes sert de point départ à l'articulation d'une généralisation de la sémantique des mondes possibles. J'introduis un nouveau type de langage modal et montre comment il est interprété dans cette sémantique. Une étude des propriétés formelles de ce langage est donnée (axiomatisation, complétude, calcul de tableaux, etc.). Comme application subséquente de ces idées, je montre comment la modalité d'ordre supérieur est sous-jacente à deux analyses célèbres en logique philosophique : tout d'abord, dans la conception « ockhamiste » de Prior du temps et de la possibilité, et, par la suite, dans l'analyse des conditionnelles contrefactuelles de Stalnaker-Lewis.

Chapitre 1
En guise d'introduction

Une modalité précise une façon ou une manière. En un sens, elle ressemble à un adverbe. Dans ses manifestations les plus élémentaires, un adverbe agit sur la relation entre un sujet et un prédicat, il spécifie une manière dont la copule s'applique au sujet. Dans l'énoncé

(1) Pierre est déçu

l'individu Pierre reçoit la propriété « être déçu », mais dans les énoncés

(1.1) Pierre est très déçu

(1.2) Pierre est peu déçu

il instancie cette propriété d'une certaine manière. Les termes « très » et « peu » dans (1.1) et (1.2) modifient la manière dont Pierre est déçu. Une modalité agit d'une façon similaire, mais au lieu de qualifier une relation sujet-prédicat, elle qualifie des propositions. Nous pouvons caractériser une modalité (*de dicto*) comme une sorte de qualité ou propriété propositionnelle. Ainsi, dans les énoncés :

(2.1) Il est possible qu'il pleuve demain,

(2.2) Je sais qu'il pleuvra demain, et

(2.3) Nous souhaitons qu'il pleuve demain, nous pouvons concevoir les locutions « Il est possible que », « Je sais que » et « Nous souhaitons que » comme des modalités car elles attribuent une qualité ou une propriété à la proposition[1]

(2) Il pleuvra demain

Par ailleurs, nous pouvons définir une modalité *d'ordre supérieur* comme une modalité qui attribue une propriété à une proposition dans laquelle figure déjà une modalité, comme c'est notamment le cas pour :

(3) Je sais que je sais qu'il pleuvra demain

(4) Il est possible que je sache qu'il pleuvra demain

(5) Je sais que nous souhaitons qu'il pleuve demain

Les locutions modales « Je sais que je sais que », « Il est possible que je sache que » et « Je sais que nous souhaitons que » dans (3)-(5) attribuent en quelque sorte une qualité de qualité à la proposition (2), d'où l'appellation « ordre supérieur ». La notion de modalité d'ordre supérieur, comme ces exemples le démontrent, n'est pas le propre d'une interprétation particulière de la modalité mais jouit d'une certaine ubiquité.

Le thème fédérateur de cette thèse est la modalité et, plus précisément, un certain phénomène d'ordre supérieur que la modalité exhibe, qu'elle soit épistémique, métaphysique, temporelle ou autre. L'objectif principal de cette thèse est d'analyser ce phénomène dans certaines de ses manifestations les plus récurrentes et de proposer un formalisme permettant de mieux le représenter. L'objectif présuppose donc que la sémantique conventionnelle pour les modalités, celle des mondes possibles, ne suffit pas à la tâche, ce que les trois prochains chapitres cherchent, entre autres choses, à montrer. Étant donné que ces chapitres examinent également d'autres questions, qui sont propres

[1] En théorie, les termes « proposition » et « énoncé » ont des significations bien distinctes. Selon la plupart des conceptions, la proposition est l'entité sémantique que détermine ou dénote l'entité syntaxique qu'est l'énoncé. Mais il m'arrivera parfois, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, d'employer ces termes de manière interchangeable.

aux problèmes respectifs qu'ils traitent, il serait bon de donner ici un aperçu plus général, plus condensé, des considérations qui concernent plus spécifiquement la modalité d'ordre supérieur pour faire ressortir le thème qui sera dominant à partir du chapitre 5.

1.1 La modalité d'ordre supérieur : un condensé

Illustrons le problème de la modalité d'ordre supérieur à l'aide d'un exemple tiré de la physique.

On considère en général que les lois de la nature ne concerne pas uniquement le monde actuel, mais qu'elles s'appliquent uniformément aux situations qui auraient pu se produire et qui ne se produiront pas. Si j'avais porté une chemise différente ce matin ou si McCain avait été élu à la place d'Obama, les corps subiraient toujours la même force d'attraction gravitationnelle entre eux, la constante d'Avogadro resterait inchangée et on ne pourrait pas transformer davantage le plomb en or (par des réactions chimiques du moins). Les lois de la physique déterminent donc une certaine notion de nécessité, qu'on appelle communément la nécessité physique. Malgré leur caractère inviolable, il y a des raisons de penser toutefois que ces lois sont des lois *actuelles*, qu'elles auraient pu être différentes qu'elles ne le sont actuellement. On croit en effet que les premiers instants suivant le Big Bang auraient déterminé les valeurs des constantes fondamentales de la physique. Par conséquent, si les événements suivant le Big Bang s'étaient déroulés autrement, ces valeurs et donc les lois qui en dépendent auraient pu être différentes. Supposons, pour les besoins de l'exposition, que la constante gravitationnelle soit déterminée par ces premiers instants et qu'elle ait pu être différente, il est donc *possible* que la constante de la gravitation ait été différente, et par conséquent il est donc *possible* que les lois de la physique aient été différentes. Cette possibilité constitue une authentique possibilité d'ordre supérieur, mais pouvons-nous la représenter aisément dans la sémantique des mondes possibles?

L'idiome des mondes possibles comprend la modalité comme une certaine quantification sur les mondes possibles (cf. Kripke 1963). Une proposition est considérée possible (au monde actuel) s'il existe un monde possible (accessible depuis le monde actuel) où la proposition est vraie. Ainsi,

(6) Il est (physiquement) possible qu'il y ait eu de la vie extra-terrestre sur Mars

est compris comme l'existence d'un monde physiquement possible (c.-à-d. d'un monde compatible avec les lois de la physique) où il y a (a eu) de la vie extra-terrestre sur Mars. Analysons maintenant l'énoncé d'ordre supérieur suivant :

(7) La constante de la gravitation aurait pu être différente,

qui peut se traduire formellement par :

(7.1) $\Box p \wedge \Diamond\Box\neg p$,

où 'p' est la proposition « La constante de la gravitation vaut G ».[2] Les considérations informelles du paragraphe précédent suggèrent que (7) est vrai. Mais il se trouve que (7.1) est incompatible avec une propriété communément attribuée à la nécessité (méta)physique, la factivité :

(T) $\Box\varphi \to \varphi$

Cette propriété stipule tout simplement qu'une vérité nécessaire est vraie. En termes de la sémantique des mondes possibles, ceci revient à dire que tout monde est (méta)physiquement accessible depuis lui-même; donc, en particulier, que le monde actuel est un monde possible. Une contradiction peut être démontrée à partir de (T) et (7.1) en utilisant les validités (de la logique modale normale) suivantes :

---

[2] $G = 6.67300 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} selon les lois *actuelles*. Je suppose que la dénotation de 'G' est rigide mais que celle de « La constante de la gravitation » varie d'une ensemble lois à l'autre.

(*) $\Box\varphi, \Diamond\psi \vdash \Diamond(\varphi \wedge \psi)$

(**) $\Diamond(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \vdash \Diamond\psi$

(***) $\vdash \neg\Diamond\bot$

L'argument procède ainsi :

1.	$\Box p$	$\wedge$-E, (7.1)	(7.1)
2.	$\Diamond\Box\neg p$	$\wedge$-E, (7.1)	(7.1)
3.	$\Box\neg p \to \neg p$	(T)	
4.	$\Box(\Box\neg p \to \neg p)$	(Nec), 3	
5.	$\Diamond(\Box\neg p \wedge (\Box\neg p \to \neg p))$	(*), 2 & 4	(7.1)
6.	$\Diamond\neg p$	(**), 5	(7.1)
7.	$\Diamond(p \wedge \neg p)$	(*), 1 & 6	(7.1)
8.	$\bot$	(***), 7	(7.1)

Même si l'on rejette (T), une contradiction peut être dérivée si la notion de nécessité métaphysique satisfait à la place

(*5*) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$,

ou, de manière alternative, si elle satisfait conjointement

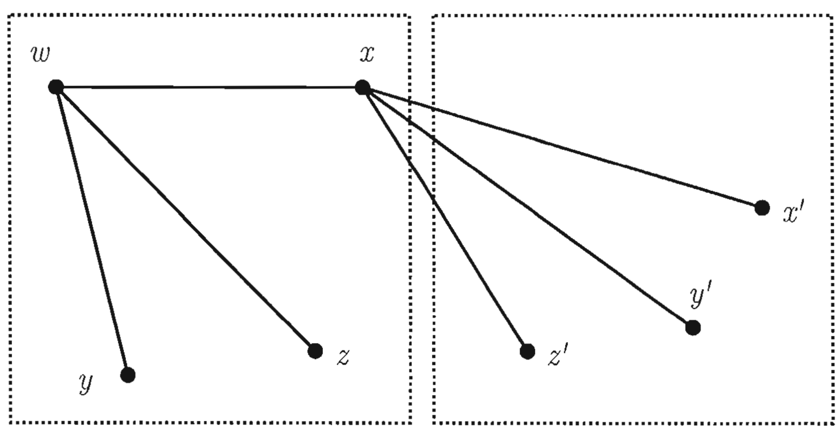
(D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$, et

(*4*) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Une conception de la possibilité métaphysique qui ne satisfait aucun de ces principes sera au mieux pathologique.[3] L'on pourrait réagir en réécrivant (7.1), mais je trouve qu'une telle démarche ne ferait que retarder une réforme sémantique inévitable, nécessaire à l'expression des notions modales d'ordre supérieur.

[3] L'argument ici ne tient pas à une conception précise de la possibilité physique. Même si l'on avançait de bonnes raisons de croire que la relation d'accessibilité de la possibilité physique ne devrait pas satisfaire ces conditions, l'on ne pourra pas faire valoir ces mêmes arguments dans d'autres situations modales (épistémique ou temporelle) où le même phénomène (ou un phénomène très similaire) se produit.

Celui qui est prêt à sacrifier (T) et (*4*) pourra évidemment exprimer ces notions dans le cadre traditionnelle de la sémantique des mondes possibles. Par exemple, il peut toujours concevoir l'univers comme étant constitué de p-mondes d'un côté (des mondes où la constante gravitationnelle vaut G) et de $\neg p$-mondes de l'autre (des mondes où elle n'est pas G). Parmi les p-mondes, il y en a un, le monde x, qui est accessible du monde actuel w, qui n'est pas accessible depuis lui-même, et depuis lequel ne sont accessibles que des $\neg p$-mondes. Cette configuration rendra (7.1) vrai. Dans la figure ci-dessous, la région encadrée à gauche contient l'ensemble des p-mondes et la partie encadrée à droite contient l'ensemble des $\neg p$-mondes. La relation peut être réflexive partout sauf en x, et il n'existe pas de lien directe entre w et les mondes x', y' et z'. Bien que mathématiquement possible, ce modèle donne néanmoins l'impression d'être une construction *ad hoc*.



p-mondes $\neg p$-mondes

La solution qui est proposée dans cette thèse, sous différentes formes et dans différents contextes, consiste à penser que la modalité '$\Diamond$' dans le deuxième conjoint de (7.1) n'est pas de la même nature que la modalité '$\Box$' : la dernière se comprend comme une quantification sur l'ensemble des mondes compatibles avec les lois de la physique, alors que la première se comprend comme une quantification sur les lois de la physique elles-mêmes, autrement dit, comme une quantification sur les relations d'accessibilité de possibilité physique. Pour un ensemble donné de lois physiques, l'ensemble des mondes possibles compatibles avec ces lois est fixe et ne varie pas d'un monde à l'autre (d'où le fait que la relation est transitive), mais cela n'empêche pas que l'ensemble de lois aurait pu être différent et donc que l'ensemble des mondes physiquement possibles aurait pu être différent.

L'idée informelle derrière cette sémantique est qu'il faut élargir la notion de possibilité ou de monde possible pour permettre à des modalités de quantifier sur autre chose que des possibilités élémentaires (du « premier ordre »). D'une certaine manière, un monde possible, pris isolément, détermine seulement la valeur de vérité des propositions élémentaires. C'est sa position relative aux autres mondes, position qui est donnée par la relation d'accessibilité, qui permet de déterminer la valeur de vérité des propositions modales plus complexes. Le monde possible kripkéen ne détermine pas ou ne contient pas comme partie une relation d'accessibilité. Toutefois, pour exprimer la notion modale comprise dans (7.1), il le faudrait. Une première ébauche d'une sémantique pouvant accommoder cette intuition aurait la forme suivante : les « mondes possibles » seraient des paires (w, a) où w est un monde possible dans le sens traditionnel du terme (c'est-à-dire une entité qui détermine la valeur de vérité des propositions élémentaires) et où a tient lieu de paramètre aléthique précisant la nature de la nécessité physique. Ce paramètre aléthique déterminerait la relation d'accessibilité physique, et donc ce qui est physiquement possible ou non. Par exemple, si a est le paramètre aléthique où la constante de la gravitation est G et si b est le paramètre où elle est $G' \neq G$ alors la possibilité physique à (w, a) sera différente de la possibilité physique à (w, b). Le fait que lois physiques auraient pu être différentes s'exprime par l'existence d'une relation d'accessibilité d'ordre supérieur qui relie les paramètres a et b.

Il y a une analogie intéressante à faire ici entre la modalité d'ordre supérieur et une certaine notion de probabilité d'ordre supérieur développée par Gaifman (1988). Il n'est pas difficile de constater la ressemblance entre une structure de Kripke et un espace probabilisé de Kolmogorov (1933/1960)[4] : les deux sont basés sur un ensemble de points qui représentent des possibilités « exhaustives ». Dans le cas des probabilités, ces points servent à définir des événements dont la probabilité est mesurée par une certaine fonction de probabilité. Gaifman a déjà remarqué que cet espace était inadéquat pour exprimer des propositions telles que

(8) On estime à 30% les chances que le service météo fasse une prédiction de 70% de probabilité d'averses pour demain

Le 30% est, ici, une probabilité portant sur la fonction de probabilité du service météorologique, une méta-probabilité pour ainsi dire, ce n'est pas une probabilité portant sur un événement de l'espace probabilisé de base. L'espace probabilisé de base contiendrait, par exemple, l'événement correspondant à

(8.1) Il y aura des averses demain

Par ailleurs, grâce à la fonction de probabilité (du service météorologique), nous pouvons attribuer une valeur de vérité à l'énoncé

(8.2) Il y a 70% de chances qu'il y ait une averse demain

Dans l'évaluation de cet énoncé, la fonction de probabilité, qui est extrinsèque à l'événement comme tel, est utilisée. Or, si nous voulons déterminer la valeur de vérité de (8) de cette façon et de manière qui soit fidèle à sa signification, il faudrait que les événements puissent déterminer différentes fonctions de probabilité (du service météorologique), ce qu'ils ne semblent pas faire a priori (ou par conception). Par conséquent, l'espace probabilisé qui représentera la

[4] Un espace probabilisé est un triplet $< X, \mathbf{E}, P >$, où X est l'espace des événements simples, $\mathbf{E} \subset \wp(X)$ est l'ensemble des événements et P est une fonction de probabilité sur $\mathbf{E}$.

signification de (8) correctement devra inclure des « points » déterminant la fonction de probabilité (du service météorologique), des points qui pourront constituer à leur tour des événements d'ordre supérieur.[5] C'est précisément ce que nous voulons développer pour les modalités.

Nous pouvons illustrer ce phénomène du côté des modalités épistémiques aussi. Soient a et b deux agents, 'K_a' et K_b' leurs modalités épistémiques respectives, et soit 'p' une proposition. Dans la sémantique des mondes possibles, l'énoncé

(9) a sait que b sait que p (ou K_aK_bp)

est vrai à w si et seulement si p à tous les mondes v tels que wR_au et uR_bv pour un certain u. La relation d'accessibilité R_a représente l'ignorance de a et R_b celle de b. Pour chaque monde v, l'ensemble

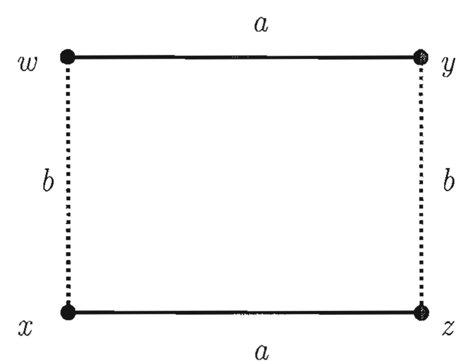
$$R_x[w] = \{v : wR_xv\}$$

est l'ensemble des mondes que l'agent v ne distingue pas de w quand w est le monde actuel. Mais cette même relation est utilisée autant pour évaluer l'énoncé 'K_ap' que l'énoncé 'K_aK_bp' ci-dessus, des énoncés qui encodent potentiellement des propositions d'ordres différents. De la même façon qu'il était préférable de séparer la possibilité physique du premier et du deuxième ordre, il est préférable de séparer la connaissance du premier et du deuxième ordre. Par exemple, si a est daltonien rouge-vert, si b est daltonien bleu-jaune et si p est la proposition « Le parquet est blanc », alors a et b savent que p (car le blanc est une couleur qu'ils distinguent parfaitement). Lorsque a sait que b est daltonien bleu-jaune, alors la sémantique des mondes possibles donne les bon-

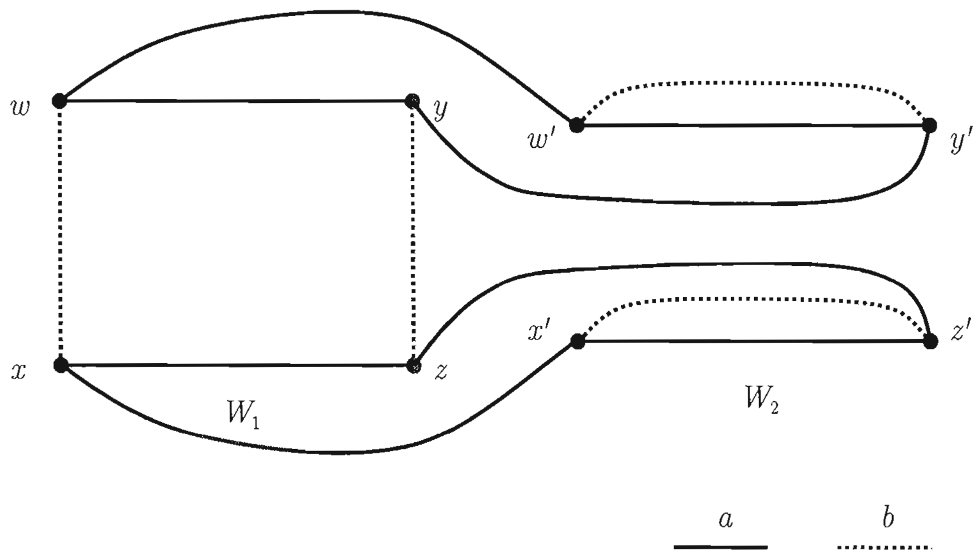
[5] La position de Gaifman ne fait pas l'unanimité. Selon Gaifman, De Finetti aurait considéré la notion de probabilité d'ordre supérieur en premier mais l'aurait rejetée aussitôt sur des bases subjectivistes. Dans le contexte de cet exposé, je me contente seulement de présenter l'analogie sans m'engager plus loin sur la question de savoir s'il faut autoriser ou non de telles probabilités. Bien que ce soit une possibilité, je doute que les critiques subjectivistes de la probabilité d'ordre supérieur soient transposables à la modalité d'ordre supérieur (dans toutes ses applications).

nes conditions de vérité à 'K_aK_bp'. Par contre, si a ne connaît pas le daltonisme de b, qu'il ne sait pas, pour simplifier, si b est daltonien rouge-vert ou s'il est daltonien bleu-jaune, alors la sémantique des mondes possibles ne donne pas nécessairement les bonnes conditions de vérité à des combinaisons modales comme 'K_aK_b'. En effet, supposons que 'q' soit l'énoncé « La chaise est bleue », est-ce que la sémantique des mondes possibles donne les bonnes conditions de vérité à '$\neg K_aK_bq$'? D'un côté, '$\neg K_aK_bq$' est intuitivement faux, car a ignore si b est daltonien bleu-jaune ou daltonien rouge-vert et ne saura pas si b sait qu'une chaise est bleue quand il en voit une. Mais pour faire en sorte que '$\neg K_aK_bq$' aient les bonnes conditions de vérité dans la sémantique des mondes possibles, il faudrait en quelque sorte « dédoubler » l'univers de base. Voyons comment.

Supposons que l'univers des agents a et b comprenne seulement deux objets o_1 et o_2, le premier pouvant être rouge ou vert et le second bleu ou jaune. Les mondes w, x, y et z de cet univers aléthique simplifié se laissent décrire par les quatre couples suivants : w = (r, b), x = (r, j), y = (v, b) et z = (v, j), la première coordonnée représentant la couleur de o_1 et la deuxième la couleur de o_2. La figure ci-contre représente (dans une certaine mesure) les relations d'accessibilité R_a et R_b de a et de b respectivement (R_a est représentée par la ligne solide et R_b par la ligne pointillée). Ce modèle est toutefois insuffisant pour exprimer l'ignorance par a du daltonisme de b (on peut le vérifier aisément). Pour représenter l'ignorance d'ordre supérieur de a, il faut : (i) dédoubler en quelque sorte l'ensemble des mondes possibles de base, ce qui nous donnera les ensembles (univers) W_1 et W_2; (ii) donner à b un profil daltonien rouge-vert sur W_1 et daltonien bleu-



jaune sur W_2; et (iii), pour chaque monde v, faire en sorte que $R_a[v]$ contienne toujours un monde de W_1 et un monde de W_2 pour que a soit ignorant du profil de b à v. Le résultat de cette construction est illustré ci-dessous.



Cette stratégie se trouve en réalité à quantifier sur les relations d'accessibilité potentielles de b sans réellement l'assumer. Par ailleurs, il suffit que b présente une ignorance par b à propos des profils épistémiques de a pour que la complexité de cette solution explose, rendant de plus en plus opaque la signification de la relation d'accessibilité.

Il ne faut pas chercher loin pour trouver des exemples analogues. La notion de connaissance possible, que nous examinons dans le contexte du paradoxe de Fitch au chapitre 4, présente les mêmes propriétés et difficultés. Par exemple, il semble naturel de penser que l'énoncé

(10) Il est métaphysiquement possible que b sache que la chaise est bleue

est vrai si, par exemple, le daltonisme bleu-jaune de b a été causé par un accident cérébral en bas âge. Il serait alors biologiquement possible que b ait eu une vue parfaitement normale, et qu'il ait été en mesure de percevoir le bleu de la chaise. Formellement, (10) se laisse traduire par '$\Diamond K_b q$'. Encore une fois, si nous nous contentons d'adopter R_b comme relation d'accessibilité pour la modalité 'K_b', c'est-à-dire la relation qui ne distingue pas les mondes bleus des mondes jaunes, alors nous rencontrerons les mêmes difficultés qu'auparavant : quelque soit le monde possible, b ne connaîtra pas la couleur de la chaise. Si nous voulons traduire fidèlement la signification de cet énoncé en restant dans le cadre de la sémantique de Kripke, il faudra – comme suggéré plus haut – augmenter notre ensemble de mondes possibles et faire en sorte qu'il y ait une région où, localement, b est daltonien bleu-jaune et une région où, localement, il n'est pas daltonien. Toutefois, comme j'ai pu le souligner, une nuance conceptuelle dans la notion de possibilité semble avoir été négligée, c'est comme si le profil épistémique de l'agent ne faisait pas directement partie d'un monde (épistémiquement) possible.

L'idée qu'une modalité puisse quantifier sur autre chose que des mondes possibles[6] n'est pas nouvelle. Prior (1967 : Ch. 7) a esquissée une sémantique pour les modalités temporelles et aléthiques qui se trouve à faire précisément ça. Dans cette sémantique, les modalités temporelles sont interprétées par une quantification sur des instants guidée en cela par un certain ordonnancement linéaire (une histoire), et les modalités aléthiques sont interprétées par une quantification non pas sur les instants mais sur ces ordonnancements linéaires. Dire qu'un certain événement est possible dans le futur, c'est dire qu'il existe un ordonnancement d'instants – une histoire – et qu'il existe un instant ultérieur à l'instant actuel (par rapport à l'ordonnancement, par rapport à cette histoire) où l'événement est vrai. Or, il est clair que l'ordonnancement n'est rien d'autre qu'une relation d'accessibilité sur les instants temporels; par conséquent, la clause pour la modalité aléthique dans la sémantique de Prior est intrinsèquement d'ordre supérieur.

---

[6] Par « monde possible » ici, j'entends de manière générale une entité qui (prise isolément) détermine seulement les valeurs de vérité des propositions élémentaires (un *truthmaker* élémentaire). Encore une fois, j'insiste sur le fait que le monde possible pris en conjonction avec la relation d'accessibilité détermine la valeur de vérité des propositions non-élémentaires.

Nous retrouvons aussi ce type de quantification d'ordre supérieur dans l'analyse que fait Lewis (1973) de la conditionnelle contrefactuelle. La conditionnelle contrefactuelle est comprise par lui comme une sorte de conditionnelle stricte variable, et les conditions de vérité qu'il donne à celle-ci font intervenir deux niveaux de quantification : l'une sur les sphères (qui sont des sous-ensembles de mondes possibles) et l'autre sur les éléments d'une sphère. Une sphère joue le rôle d'une relation d'accessibilité métaphysique (définissant une conditionnelle stricte), donc la quantification sur une sphère peut être conçue comme une quantification sur des relations d'accessibilité.

Nous pouvons voir le but de cette thèse, particulièrement à partir du chapitre 5, comme étant celle de développer une notion de monde possible plus inclusive des faits d'ordre supérieur. Le rôle des faits d'ordre supérieur dans la définition de la négation et de la causalité a été remarqué par Armstrong (cf. 1989; 1997) depuis un moment. En effet, Armstrong considère que la négation dépend de l'existence d'un fait de totalité des faits (de la même manière que le complément ensembliste dépend d'une totalité), et que la causalité dépend de l'existence d'un fait sur la relation entre faits élémentaires. Si notre ontologie est dépourvue de telles entités, nous pourrions nous retrouver à conclure, comme le firent Hume[7] et Wittgenstein[8], que la causalité et la nécessité (non logique) n'existent pas.

Comment faire pour intégrer formellement ces notions d'ordre supérieur dans la sémantique des mondes possibles? La proposition formelle de cette thèse consiste à concevoir une possibilité comme une hiérarchie de mondes d'ordres de plus en plus élevés. À la base, un ensemble W_0 comprend les entités qui déterminent les vérités élémentaires; ce sont en quelque sorte les vérifacteurs (*truthmakers*) des propositions élémentaires de base. Un ensemble W_1 comprend ensuite les entités qui déterminent les profils modaux du premier

[7] Dans sa célèbre critique de la causalité.

[8] Cf. *Tractatus*.

ordre; ce sont les vérifacteurs des faits de rang 1. De manière générale, l'ensemble W_n comprend les entités qui déterminent les profils modaux d'ordre n, et ainsi de suite. Une possibilité $\mathbf{w}$ est une suite $(w_0, w_1, w_2, \ldots)$ d'entités w_n, avec $w_n \in W_n$ pour chaque n. La possibilité $\mathbf{w}$ détermine non seulement la valeur de vérité des propositions élémentaires mais aussi la valeur des relations d'ordre supérieur; il n'y a donc pas de relation d'accessibilité pouvant s'appliquer à $\mathbf{w}$ (ou à ses éléments) qui est extrinsèque à $\mathbf{w}$.

Sur le plan de la généalogie conceptuelle, la nécessité de la modalité d'ordre supérieur m'est d'abord apparue dans l'analyse du paradoxe de Fitch. Ce paradoxe établit l'incompatibilité (logique) entre la thèse dite du vérificationnisme :

(*Ver*) $\forall p(p \to \Diamond Kp)$,

et la thèse de la modestie épistémique :

(*Mod*) $\exists p(p \wedge \neg Kp)$.

Comme plusieurs autres, dont Edgington (1985), Percival (1991), Rabinowicz & Segerberg (1994) et Kvanvig (1995), je suis de l'avis que le paradoxe ne démontre pas tant une limitation structurelle de la connaissance qu'une limitation expressive du langage utilisé pour représenter ces thèses, et plus précisément une limitation dans la capacité d'exprimer une notion de connaissance possible, laquelle est centrale à (*Ver*). Pour combler cette lacune expressive, Rabinowicz & Segerberg (1994) ont développé une sémantique bidimensionnelle ayant pour but de rendre compte d'une notion plus riche de connaissance actuelle, et ce sont des considérations similaires qui ont donné lieu à l'élaboration de ma propre sémantique pluridimensionnelle. Rabinowicz & Segerberg proposent une sémantique basée sur des paires de mondes (w, v), où w est un monde de « perspective » et v est une monde de « référence ». Les deux mondes sont ontologiquement similaires mais jouent des rôles sémantiques distincts : le monde de référence est le monde possible conventionnel, c'est-à-dire celui qui précise le contenu des propositions connues, mais le monde de perspective tient compte de l'actualité épistémique de l'agent. La sémantique que je propose, malgré une ressemblance superficielle, diffère considérablement de celle-ci. Par exemple, dans sa version bidimensionnelle, une possibilité est une paire (w, a), où w est le monde possible (de nature conventionnelle) et a est un profil modal, une entité qui détermine une relation d'accessibilité sur l'ensemble W des mondes possibles.

1.2 Présentation succincte des chapitres

Décrivons sommairement le déroulement chapitres à suivre à présent.

Le chapitre 2 est consacré à l'analyse de la thèse KK, la thèse selon laquelle l'on sait que l'on sait quand on sait. J'examine les arguments pour et contre cette thèse, en particulier ceux de Williamson (2000), et identifie deux interprétations saillantes de la connaissance d'ordre supérieur : une interprétation dite *agrippéenne* et une autre dite *transparentiste*, la première rend la thèse fausse alors que la deuxième la rend vraie. Je défends l'idée que les deux interprétations existent. Un argument provenant de l'action est donné pour défendre une version doxastique de la transparence (sa version épistémique est contestée). Je suggère que l'interprétation agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur ne peut pas être représentée dans la sémantique de Kripke.

Dans le chapitre 3, l'analyse de la thèse KK se poursuit en examinant une certaine énigme impliquant cette thèse et l'épistémologie en termes de mondes possibles de Lewis (1996). L'énigme souligne le problème de la représentation de la connaissance actuelle dans la sémantique des mondes possibles : est-ce que la connaissance d'un certain agent peut laisser non-éliminées des possibilités où il a une connaissance différente de celle qu'il a dans le monde actuelle? Comment devons-nous traduire le fait qu'un agent ne connaisse pas la *manière* dont il connaît et quelles conséquences a cette ignorance sur le plan de la validité de la thèse KK? Encore une fois ici, je démontre l'utilité d'une sémantique d'ordre supérieur pour résoudre l'énigme et clarifier les difficultés entourant la thèse KK.

Le chapitre 4 est une analyse du paradoxe de Fitch assortie d'une proposition de solution. Tel qu'il fut mentionné plus haut, une bonne partie des idées centrales à cette thèse sont issues de considérations entourant ce paradoxe. J'y montre comment traduire les thèses du vérificationnisme et de la modestie dans une sémantique bidimensionnelle, c'est-à-dire dans un langage où la possibilité métaphysique peut être comprise comme une quantification sur les profils épistémiques. Toutefois, cette stratégie est insuffisante à moins d'être accompagnée d'un mécanisme pour distinguer la « portée » d'une modalité : le problème de l'interprétation des descriptions définies lorsqu'elles sont dans la portée d'une modalité (dans la logique modale du premier ordre) trouve sa contrepartie dans l'interprétation des modalités épistémiques lorsqu'elles sont dans la portée de la modalité de possibilité. En effet, considérons l'énoncé suivant :

(11) $\Diamond(Kp \wedge \neg Kp)$

Il existe quatre façons d'interpréter les deux occurrences de 'K' dans (11) : les deux en portée étroite (après l'évaluation de la modalité de la modalité '$\Diamond$'), l'une en portée étroite et l'autre en portée étendue, et les deux en portée étendue. La première et la dernière possibilités font de (11) une contradiction pure et simple, mais les deux autres possibilités, celles où les occurrences de 'K' ont des interprétations différentes, sont parfaitement cohérentes : la première occurrence pourrait représenter la connaissance actuelle (avant l'évaluation de '$\Diamond$') alors que la deuxième pourrait représenter la connaissance possible (après l'évaluation de '$\Diamond$'). Pour résoudre ces difficultés, j'introduis des éléments d'un lambda-calcul adapté aux modalités en m'inspirant de Fitting & Mendelsohn (1998 : Ch. 8).

Les thèses du vérificationnisme et de la modestie épistémique prennent alors la forme suivante :

(Ver_λ) $\forall p(p \rightarrow \Diamond\lambda x.Kxp)$

(Mod_λ) $\exists p(p \wedge \neg Kxp)$

Les structures sémantiques servant à interpréter ces thèses (et le langage dans lequel elles sont formulées) sont de la forme $< W, A, R, \Pi >$, où : W est un ensemble de mondes possibles de base; A est un ensemble de profils épistémiques (chaque profil est associé à une relation d'accessibilité épistémique sur W); R est une relation d'accessibilité sur A; et Π est le domaine de quantification propositionnelle (un ensemble de sous-ensembles de W). Appelons un modèle basé sur une telle structure *vérificationniste* si (Ver_λ) et (Mod_λ) sont valides dans ce modèle. Je démontre un théorème selon lequel : (i) il n'y a pas de modèle vérificationniste tel que Π est $\wp(W)$, (ii) si Π est fermé sous intersection (sous conjonction), alors A et Π sont infinis, et (iii) il existe un modèle vérificationniste tel que Π est fermé sous intersection (et sous d'autres opérations). D'une certaine façon ce théorème établit des limites inférieures et supérieures pour la validité du vérificationnisme.

Le chapitre 5 présente les structures relationnelles d'ordre supérieur de même que la syntaxe et la sémantique du langage L interprété à l'aide de celles-ci. Une structure relationnelle d'ordre supérieur est la formalisation de la sémantique pluridimensionnelle esquissée jusqu'à présent. Je présente deux versions de celle-ci, l'une plus générale que l'autre : la structure (relationnelle d'ordre supérieur) *simple* et la structure (relationnelle d'ordre supérieur) *générale*, et chaque version vient dans une variété de formats. Une telle structure est un couple $< \mathbf{W}, \Phi >$, où $\mathbf{W} = W_0 \times W_1 \times \ldots$ et Φ est une fonction qui attribue à chaque $w \in W_{n+1}$ une relation d'accessibilité sur $\mathbf{W}_n = W_0 \times W_1 \times \ldots \times W_n$. Le langage L est une généralisation d'un langage modal hybride (cf. Blackburn 1993). Il comporte un ensemble Nom_n de nominaux α, un pour chaque rang n, dont les dénotations sont des éléments de W_n. L est doté aussi de modalités '$\Box_n$' variables (une pour chaque $n \geq 1$), de modalités constantes '$\Box_\alpha$' (une pour chaque nominal $\alpha \in \mathrm{Nom} \setminus \mathrm{Nom}_0$) et de modalités d'actualité '$@_\alpha$'

(une pour chaque nominal α). Sur le plan sémantique, ce sont les modalités variables '$\Box_n$' qui sont *variables*, c'est-à-dire interprétées « contextuellement » : la relation d'accessibilité servant à interpréter cette modalité au point $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots)$ est déterminée par w_n et ne dépend (au plus) que des $n-1$ premières coordonnées de $\mathbf{w}$.

Les chapitres 6 et 7 sont consacrés aux propriétés sémantiques des modèles basés sur des structures relationnelles d'ordre supérieur. On y retrouve des résultats de validité, de définissabilité, des notions de bisimulation et des traductions dans le premier ordre. Ces résultats sont des généralisations de résultats analogues pour la logique modale conventionnelle (cf. Blackburn *et al.* 2001).

Les chapitres 8 et 9 présentent des axiomatisations complètes pour les logiques modales d'ordre supérieur. C'est ici que le langage hybride montre son utilité : les nominaux et les modalités d'actualité nous permettent d'extraire un modèle (avec sa structure en produit cartésien) d'un ensemble maximalement consistant de formules, ce que les techniques de Henkin seules ne permettent pas de faire.

Les chapitres 10 et 11 sont des applications du système à la temporalité et aux conditionnelles contrefactuelles. Dans le chapitre 10, nous examinons comment une structure de Kamp (Kamp 1979; Thomason 1984), qui est une formalisation de la sémantique ockhamiste priorienne (1967 : Ch. 7), peut être conçue comme un cas particulier de structure relationnelle d'ordre supérieur. Nous présentons des résultats de définissabilité et de complétude. Dans le chapitre 11, un travail analogue est fait pour le langage des conditionnelles contrefactuelles et la sémantique des sphères de Lewis (1973). Sont présentés aussi des résultats de définissabilité et de complétude pour les structures relationnelles d'ordre supérieur dites *de Lewis*.

Le dernier chapitre est consacré à l'exposition d'un calcul de tableaux pour la logique modale d'ordre supérieur. Les méthodes de tableaux sont employées depuis un moment comme systèmes de dérivation efficaces, et ont l'avantage net d'être plus constructifs. En m'inspirant de Fitting (1972), Goré (1999) et de Gabbay (1996), je développe un calcul permettant d'établir un résultat de complétude faible pour une certaine famille de structures, et ce résultat a pour corollaire notable la propriété du modèle fini.

Chapitre 2
Savoir que l'on sait

The one self-knowledge worth having is to know one's own mind.
F. H. Bradley

Socrate affirmait qu'il ne savait qu'une chose et c'était qu'il ne savait rien. Par cette maxime, Socrate affirmait non seulement sa conscience d'ignorer, il rappelait aux autres qu'ils croyaient connaître alors qu'en réalité ils ignoraient ignorer. On n'a pas manqué de souligner le caractère paradoxal de la maxime socratique, toutefois jamais les capacités de connaître ce que l'on ignore ou de connaître ce que l'on connaît, présupposées par celle-ci, n'ont été remises en question. Certes, comme les interlocuteurs de Socrate, il semblerait que l'on puisse parfois ignorer sans le savoir, mais l'idée est que si l'on examine correctement ses raisons de croire, on saura ou non si elles conduisent à la connaissance. L'entreprise de la table rase cartésienne présupposait la même habilité : il est possible d'examiner scrupuleusement son *cogito* afin de déterminer clairement l'inventaire de sa connaissance et de son ignorance.

Jusqu'au milieu vingtième siècle, des philosophes comme Prichard (1950 : 86) prirent cette capacité pour acquise, mais l'apparition de thèses nouvelles sur la connaissance et sur l'esprit ont mis l'existence même d'une telle capacité en péril. Par exemple, l'externalisme et le béhaviorisme sont (à prime abord) moins favorables à – ou compatibles avec – l'idée d'une habilité à percevoir nos états épistémiques. Cette habilité épistémique, chère aux anciens comme aux modernes, est-elle vraiment défendable?

Appelons la thèse KK la thèse que l'on sait que l'on sait lorsque l'on sait, et la thèse K¬K la thèse que l'on sait que l'on ne sait pas lorsque l'on ne sait pas. Autrement dit :

(KK) $K\varphi \rightarrow KK\varphi$

(K¬K) $\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$

Ce chapitre sera consacré à l'analyse des thèses KK et K¬K. Dans un premier temps, nous examinerons certains arguments contre KK, et nous chercherons à montrer que cette thèse n'est pas forcément affectée par ceux-ci, lesquels présupposent pour la plupart que KK est commise à une forme spécifique d'internalisme et à la transparence de nos états épistémiques. Deux interprétations saillantes seront données à cette thèse : l'une dite *transparentiste* et l'autre dite *agrippéenne*. L'interprétation transparentiste stipule que les conditions de vérité de '$K\varphi$' sont identiques à celles de '$KK\varphi$', et l'interprétation agrippéenne que '$KK\varphi$' a des conditions de vérité plus strictes que '$K\varphi$'. La première rend donc la thèse KK vraie alors que la seconde la rend fausse. Nous montrerons que chaque interprétation est légitime et possible, mais qu'il faut introduire certaines modifications dans la sémantique de la modalité 'K' pour capturer l'interprétation agrippéenne. Enfin, concernant la thèse K¬K, nous soutiendrons qu'elle est fausse, mais qu'une version doxastique de celle-ci est défendable.

2.1 La régression à l'infini et la thèse KK

Un argument simple montrerait que la thèse KK mène à une régression à l'infini (cf. Rynin 1967). En effet, supposons que la connaissance d'une proposition 'p' implique la possession (de la part de l'agent bien entendu) de raisons de croire que p ou d'une justification à l'effet que p. L'idée que la justification constitue une condition nécessaire de la connaissance n'est pas particulièrement controversée, mais l'argument pourrait se passer de cette hypothèse.[9] Ainsi, nous supposons que si S sait que p alors S a une justification à l'effet que p, ce qui peut formellement s'énoncer comme :

(KJ) $\quad Kp \to Jp$

où 'J' signifie « S a une justification à l'effet que » ou encore « S a des (bonnes) raisons de croire que ». La thèse KK de son côté affirme que si S sait que p alors que S sait qu'il sait que p, c'est-à-dire

(KK) $\quad Kp \to KKp$

Les deux principes permettent la dérivation suivante :

1.	Kp	Hypothèse
2.	KKp	1, (KK)
3.	KJp	2, (KJ)

que nous pouvons poursuivre avec 'Jp' au lieu de 'p' comme suit :

4.	$KKJp$	3, (KK)
5.	$KJJp$	4, (KJ)

et, par la suite, avec 'JJp' et '$JJJp$' et '$JJJJp$' etc. En bout de ligne, l'hypothèse que l'agent sait que p et les thèses (KK) et (KJ) entraîneront que $KJ^n p$, pour tout n. Par ailleurs, si la connaissance satisfait le principe de factivité :

(T) $\quad Kp \to p,$

alors nous pourrons conclure de la dérivation ci-dessus que

(Reg) $\quad Kp \to J^n p,$ pour tout n.

Autrement dit : si S sait que p, alors S a des raisons de croire qu'il a des raisons de croire ... qu'il a des raisons de croire que p; et de manière équivalente : si S n'a pas de raisons de croire qu'il a des raisons de croire ... qu'il a des raisons de croire que p, alors S ne sait pas que p. Le détracteur de la thèse KK allègue que (Reg) conduit au scepticisme, car forcer un agent à posséder

[9] On remarquera que les contre-exemples de Gettier ne contredisent pas le fait que la justification soit une condition *nécessaire* de la connaissance.

toute la hiérarchie de raisons de croire que p pour savoir que p revient tout simplement à empêcher toute forme de connaissance chez un agent normalement constitué.

Cette réduction à l'absurde de (KK) présuppose (KJ), mais le passage par ce principe n'est pas obligé. Si on est déjà convaincu que les conditions '$K^n p$' sont toutes distinctes et que l'obtention conjointe de toutes ces conditions est impossible chez un agent épistémique normalement constitué, alors l'argument est encore plus simple : nous aurions déjà de quoi montrer que '$KK\varphi$' ne suivrait pas de '$K\varphi$'.

Historiquement, cette régression à l'infini a d'abord été utilisée afin de montrer que la connaissance tout court était impossible, et non pas seulement une thèse spécifique concernant la connaissance d'ordre supérieur. Au temps de la Nouvelle Académie, bien avant que la thèse KK n'ait été débattue, le sceptique Agrippa développa des modes argumentatifs – ou tropes – afin de montrer à celui qui croit connaître qu'il ne connait rien.[10] Il défendit notamment l'idée que toute tentative de justification menait invariablement à trois issues peu enviables sur le plan épistémique : la régression à l'infini, la circularité ou le dogmatisme. Les tropes d'Agrippa exploitent le caractère toujours inachevé d'une justification : puisqu'une justification repose par définition sur des prémisses et des prémisses peuvent en général être contestées, il faut donc une justification pour ces prémisses et ainsi de suite pour les prémisses de la justification des prémisses. La tâche du sceptique est de convaincre son adversaire crédule que les prémisses qu'il avance requièrent toujours des justifications supplémentaires, de créer une discordance (*diaphônia*), ce à quoi servent dans une grande mesure ses tropes. Si le crédule arrête dans sa tâche, sa justification repose ultimement sur des prémisses injustifiées, donc il est dogmatique. S'il continue, deux choses peuvent se produire : il peut réutiliser une prémisse ou il peut produire sans fin de nouvelles prémisses. S'il réutilise des

[10] Cf. *Les sceptiques grecs*, Victor Brochard (1887).

prémisses, son argument est circulaire. La seule issue qu'il lui reste est de produire sans cesse de nouvelles prémisses à chaque étape du processus de justification mais, ce faisant, le sceptique gagne, car son adversaire se voit condamné à accomplir une tâche sans fin, à entrer dans une régression infinie de justifications.

Insistons toutefois sur le fait que la régression à l'infini n'est pas la conséquence d'un principe de connaissance d'ordre supérieur comme la thèse KK, elle est une conséquence de la connaissance tout court, de la connaissance au premier degré. À chaque étape du processus de justification, le sceptique ne semble pas questionner le fait que le crédule puisse savoir qu'il sait s'il sait, il questionne plutôt le fait qu'il puisse savoir, qu'il puisse posséder des éléments d'une justification garantissant un savoir. Les « niveaux » ou les « ordres » dans la régression agrippéenne sont des niveaux de rigueur, non pas des niveaux de connaissance de la connaissance du crédule. L'analogie entre la régression épistémique chez Agrippa et la régression qui cherche à discréditer la thèse KK est donc imparfaite. Si la thèse KK force l'agent à posséder une suite infinie de raisons, c'est que (Reg) en conjonction avec 'Kp' entraînent que

Jp, JJp, $JJJp$, $JJJJp$, ...

Mais ce n'est définitivement pas la nature de la régression chez la victime d'Agrippa. À quoi serviraient les tropes, qui s'appliquent de manière locale et contextuelle, si le sceptique pouvait confondre l'adversaire crédule seulement en questionnant ses états épistémiques d'ordre supérieur et ce, indépendamment de la nature particulière de la proposition 'p' que le crédule prétend connaître?

La régression que produit KK pourrait être rapprochée de celle d'Agrippa en faisant valoir une conséquence que la connaissance d'ordre supérieur aurait sur les raisons qu'un agent doit posséder pour connaître. On considère parfois que la locution d'ordre supérieur « savoir que S sait que » est similaire en fonction à celle de la locution adverbiale « S sait vraiment que ». Ceci est suggéré par de nombreux philosophes, dont font partie Hintikka, Hilpinen et Williamson. Concernant le fait que Prichard prend la thèse KK (voire même la thèse K¬K) pour évidente(s), Williamson affirme que « [f]ew would now claim such powers of discrimination » (2000 : 23). De même, en discutant la validité de KK, Hintikka insiste sur le fait qu'elle est vraie mais seulement parce que '*K*' incarne une notion très forte et idéalisée de la connaissance :

> It has often been said in effect that in order for an item of information to pass as knowledge in the strong sense of the word, one's grounds for accepting it must be *conclusive.* One way of interpreting this requirement is to take it to say that no further information will make any difference to one's acceptance, that 'further inquiry has lost its point'. (Hintikka 1970: 145)

Hilpinen, en discutant la notion de justification (*evidence*), décrit aussi cette condition que doit réaliser la connaissance :

> Complete evidence must, indeed, be 'complete' in the sense that it actually terminates the inquiry concerning p. If a has complete evidence to justify his belief that p, no further inquiry (that is, no additional factual information) is needed to ensure that the evidence is, indeed, complete. (Hilpinen 1970: 113)

Le fait de savoir que l'on sait, selon Hintikka et Hilpinen, est donc entraîné par le fait de savoir seulement dans la mesure où la connaissance possède une justification « complète ». Mais pour une conception plus mondaine de la connaissance, une conception à laquelle fait référence Williamson, la thèse KK revient à exiger de la connaissance une force qu'elle n'a tout simplement pas. Cette exigence peut être caractérisée par l'implication suivante :

Si S sait qu'il sait que φ alors S sait vraiment que φ

Le fait de savoir que l'on sait que φ, selon ce rapprochement, entraînerait que l'on sache *vraiment* que φ, en ce sens que savoir vraiment est plus fort, plus rigoureux que savoir tout court. Cette propriété qui lie KK et la certitude épistémique peut s'écrire formellement comme

(VK) $KKp \to VKp$

où 'V' est un opérateur qui « augmente » le niveau de rigueur associé au savoir que p.[11] La régression agrippéenne s'obtiendrait de la régression KK en exploitant (VK). En effet, si nous appliquons (VK) à chaque élément de la suite

Kp, KKp, $KKKp$, ...,

produite conjointement par la thèse KK et l'hypothèse que S sait que p, alors nous obtenons la suite

Kp, VKp, $VVKp$, $VVVKp$, ...

Mais il s'agit précisément là de la suite du sceptique agrippéen : à chaque étape, il cherche à convaincre son adversaire crédule qu'on ne peut connaître à moins de *vraiment* connaître, que Kp entraîne VKp et $VVKp$ etc.

Nous pouvons comprendre 'V' comme un modificateur de contexte épistémique. Si le contexte dans lequel est fait le premier énoncé épistémique de la suite, c'est-à-dire 'Kp', est c, alors l'opération « vraiment » aurait pour conséquence que l'agent S sache que p non seulement dans c, mais dans d'autres contextes c' avoisinant le contexte c, et l'opération « vraiment vraiment » aurait pour effet que l'agent sache que p non seulement dans contextes épistémiques c' avoisinant c mais aussi dans les contextes épistémiques c'' avoisinant les contextes c'. Le but du sceptique est de transporter progressivement son adversaire crédule vers des contextes épistémiques où les attributions de connaissance se font de plus en plus rares en raison des exigences de plus en plus élevées pour connaître. Savoir que p dans le contexte c est plus facile que *vraiment* savoir que p dans ce même contexte, car *vraiment* savoir

---

[11] Afin de faire des rapprochements avec des questions qui seront abordées plus loin dans la thèse, nous pouvons concevoir 'V' comme une modalité qui affecte la modalité 'K' et non pas la proposition 'Kp', et donc 'V' constituerait une sorte de modalité d'ordre supérieur.

que p dans c c'est savoir que p dans tous les contextes c' avoisinant celui-ci. L'opération 'V' est donc comparable à une sorte de modalité de certitude.[12] Cette interprétation de l'opérateur 'V' reflète l'usage courant de la locution « vraiment savoir que ». Lorsqu'une personne affirme (ou lorsqu'on affirme d'une personne) qu'elle sait que p, le fardeau est moins élevé que si elle affirme (ou que si l'on affirme d'elle) qu'elle sait *vraiment* que p.

Ces remarques devraient nous montrer également qu'un argument contre la thèse (KK) n'a pas à prendre la forme d'une suite régressive. Une telle chose est peut-être nécessaire pour le sceptique afin d'obtenir la réduction à l'absurde recherchée, mais le détracteur de la thèse KK n'a pas à s'engager aussi loin : son seul but est de montrer que certaines conditions de vérité de 'Kp' ne sont pas des conditions de vérité de 'KKp', que certaines situations où 'Kp' est vrai ne sont pas des situations où 'KKp' est vrai. Si le principe (VK) est valide et si l'opérateur 'V' fait effectivement monter les enchères épistémiques, alors le travail qu'aurait à accomplir ce détracteur est simple : trouver une proposition p et un contexte c dans lequel 'Kp' est vrai et 'VKp' est faux, il s'ensuivra alors que 'KKp' est faux dans c par (VK). Étant donnée la facilité (en apparence) que nous avons à trouver des contextes où un agent sait sans *vraiment* savoir, il semblerait que sa tâche soit simple. Seulement, et il faut le souligner, toute cette stratégie repose sur la validité de (VK) et nous avons des raisons de douter du fait que la connaissance d'ordre supérieur mène forcément à un « enrichissement » de la connaissance. Pour le moment, contentons-nous seulement de nommer l'interprétation de la connaissance (d'ordre supérieur) qui rend (VK) vrai l'interprétation *agrippéenne*.

Nous venons de voir que les critiques basées sur les régressions à l'infini ne sont pas nécessairement au cœur de l'échec – si échec il y a – de la thèse KK, car si le détracteur peut montrer la validité de (VK) il n'a pas besoin de

[12] Dans les termes de l'épistémologie modale de Lewis (Lewis 1996), on peut voir 'V' comme agissant sur la clause *sotto voce*; en particulier, elle rappelle la règle d'attention.

brandir une quelconque régression à l'infini pour arriver à ses fins; le simple fait que les locutions « savoir que » et « vraiment savoir que » soient différentes (aient des conditions de vérité suffisamment différentes) suffira. Mais ne pourrions-nous pas argumenter contre cette thèse simplement parce qu'elle implique une quantité infinie de raisons de croire chez l'agent? Est-il vraiment absurde de supposer que les conditions épelées par la suite '$J^n p$' puissent être rencontrées par un agent fini? Si c'est absurde pour la connaissance de certaines propositions, ce n'est pas une absurdité pour toutes. Justifier les énoncés

$1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, \ldots,$

ou encore les énoncés

Il existe au moins un nombre pair

Il existe au moins deux nombres pairs

Il existe au moins trois nombres pairs

...

ne nous place pas dans un embarras infinitaire; la possession par l'agent d'une preuve que $\forall x(x = x)$ ou d'une preuve qu'il existe un nombre infini de nombres pairs garantira sa connaissance de la liste infinie d'énoncés ci-dessus. L'infini ne devient « régressif » que si nous devons fournir une justification différente à chaque étape; en soi, l'infini n'est pas suffisant pour être problématique.

Celui qui prétend que la thèse KK comporte un fardeau infinitaire ne pourra donc pas présupposer, sans argument supplémentaire à l'appui, que l'infini est forcément un fardeau. Par exemple, il n'est pas invraisemblable d'imaginer que KK puisse être défendue à l'aide d'un principe d'identité comme le suivant

($\equiv$) Les conditions de vérité de « S sait que p » sont identiques aux conditions de vérité de « S sait qu'il sait que p »

Corollairement, ($\equiv$) affirme que les conditions de vérités de '$K^n p$', pour tout n, sont identiques. Appelons une interprétation de la connaissance *transparen-*

tiste si elle satisfait ($\equiv$). Si cette interprétation est correcte, il n'y a rien de régressif dans la connaissance d'ordre supérieur, car il n'y a rien de pathologique dans la suite infinie qu'elle produit. Si le principe ($\equiv$) est faux, ce sera pour des raisons que nous constaterons bien avant l'infini.

2.2 La transparence épistémique et la thèse KK

Les détracteurs de la thèse KK font souvent valoir la parenté entre celle-ci et la thèse de la transparence (cognitive ou épistémique). Thèse communément rattachée à Descartes, elle stipule que si un agent S est dans un état mental E (pas forcément un état mental épistémique), alors S sait qu'il est dans l'état E. Mentionnons que Descartes n'a jamais énoncé cette thèse ni cherché à la défendre, et qu'elle n'est pas spécifiquement cartésienne, car elle était admise par tous ses contemporains. Sur le plan historique, c'est plutôt l'opposition à cette thèse qui est l'exception récente, apparaissant seulement au vingtième siècle avec les théories externalistes de la connaissance. Certes, le célèbre argument cartésien présuppose la transparence mais il en va aussi de nombreux arguments de Locke ou de Hume qui, par leur empirisme, sont considérés aux antipodes de Descartes. Par exemple, un des arguments de Locke contre les idées innées consistait à souligner l'absurdité d'une idée que nous posséderions mais dont nous ne serions pas conscients.[13] Chez Descartes, l'esprit a clairement une capacité à « percevoir » ses états internes. Toute l'entreprise de reconstruction décrite dans les *Méditations* requiert non seulement une conscience de nos opinions et idées reçues mais aussi une capacité à percevoir les propriétés « internes » de ces opinions et idées, la clarté notamment. L'œil de l'esprit peut scruter et sonder son inventaire d'idées et déterminer, en particulier, ce qui habite sa conscience et ce qui ne l'habite pas. Chez Locke et chez Hume, l'esprit est conçu avec cette même capacité.

[13] Cf. *Essai sur l'entendement* : Livre I, Chap. II, §5.

Quelle thèse sur la transparence pouvons-nous attribuer à Descartes et est-elle apparentée à la thèse KK? Si connaître est un état mental, la transparence a pour conséquence directe qu'un agent sait s'il sait ou non. Mais la transparence de Descartes était-elle de cette nature? Descartes met beaucoup d'efforts à se (et nous) convaincre que les idées claires et distinctes sont vraies et garantissent la connaissance. Si l'esprit sait quelles idées il entretient, il n'est pas en mesure à prime abord de déterminer si ces idées sont trompeuses ou véridiques. Dieu, ou l'idée de Dieu, dans l'argument de Descartes a précisément pour fonction de garantir que les idées claires et distinctes soient vraies. Si Dieu n'était ni bon ni bienveillant, ces mêmes idées ou états mentaux de clarté n'indiqueraient pas le vrai. La transparence cartésienne est d'abord et avant tout transparence idéelle ou doxastique, et ce n'est que par l'intervention de la garantie divine – le fait que Dieu n'est pas trompeur – que la connaissance est un état mental; c'est une entité *externe* à l'esprit, en l'occurrence Dieu, qui rend l'esprit capable de percevoir *intérieurement* l'idée *vraie* (la connaissance). Formellement, nous pourrions traduire la chose de la manière suivante : supposons que 'B_{CD}' est la locution « S entretient clairement et distinctement l'idée que » ou « S croit clairement et distinctement que », et que 'K' est la modalité de connaissance, nous avons

(TC) $B_{CD}\varphi \rightarrow KB_{CD}\varphi$

(GD) $B_{CD}\varphi \leftrightarrow K\varphi$

La transparence cartésienne (TC) et la garantie divine (GD) ensemble entraînent donc KK, mais chacune correspond à un principe distinct.

Derrière la transparence, il y a donc deux idées : (a) l'idée que la connaissance est un état mental et (b) l'idée que les états mentaux épistémiques nous sont transparents comme états épistémiques. Un état mental d'un agent S est *transparent comme état épistémique pour* S quand (b.1) S sait quand il est ou non dans cet état et (b.2) S sait quand l'état en question est ou non un état de connaissance. De façon générale, (a) est présupposé par toutes les théories internalistes de la connaissance. Les deux aspects (b.1) et (b2) dans (b) sont ceux décrits par (TC) et (GD) respectivement : (b.1) précise que l'agent possède une certaine omniscience sur ses états doxastiques et (b.2) précise qu'il est en mesure de détecter « intérieurement » la propriété caractéristique d'un état épistémique.

Le débat sur notre capacité (ou non) à distinguer les états épistémiques des états mentaux non-épistémiques (c'est-à-dire notre capacité à distinguer les idées vraies des idées fausses) ne date pas d'hier; bien avant Descartes et son critère de clarté, les stoïciens avaient attiré les foudres de la Nouvelle Académie pour avoir fait une supposition similaire. Leur réponse au scepticisme, c'est-à-dire leur preuve que la connaissance était possible, reposait sur l'existence d'un critère interne distinguant la représentation vraie de la représentation fausse.[14] La notion stoïcienne de *représentation compréhensive* (*phantasia katalèptikè*) remplissait précisément cette fonction : une représentation compréhensive est une représentation qui ne peut pas tromper, dont la vérité peut être reconnue. Si la garantie divine est au rendez-vous ou si les représentations compréhensives existent, les thèses KK et K¬K sont plausibles. Mais à défaut de celles-ci, ces thèses sont-elles défendables?

Le fait d'associer les thèses KK (et K¬K) à Descartes joue évidemment en sa défaveur car, à part le plan et le produit, rares sont les choses « cartésiennes » qui sont accueillies favorablement. Ne soyons toutefois pas les victimes de l'affirmation du conséquent en concluant la fausseté de KK. L'implication va bel et bien de (TC) et (GD) à KK et non pas la réciproque; ainsi, de la fausseté de (TC) ou (GD), rien ne peut être tirée quant à KK. En particulier, nous pourrions nous questionner sur la pertinence des états mentaux à la question de la validité de KK. Doit-on forcément comprendre la connaissance d'ordre supérieur en termes d'états mentaux? Si oui, doit-on forcément comprendre les états mentaux à travers le spectre d'une philosophie

[14] Cf. Brochard (1887) et Canto-Sperber (1989 : 525).

de l'esprit qui présuppose la transparence des états mentaux? Il est clair qu'une conception de la connaissance ira souvent de pair avec une conception de l'esprit. Si nous adoptons une conception cartésienne de l'esprit, il est plus que probable que nous aurons une interprétation internaliste de la connaissance, et *a fortiori* une interprétation internaliste la connaissance d'ordre supérieur; mais si nous avons une conception de l'esprit différente, une interprétation internaliste de la connaissance d'ordre supérieur ne sera peut-être pas le candidat de choix. Ceci met en évidence quelque chose de retors dans l'argument contre KK : on interprète la connaissance selon une conception de l'esprit que l'on juge erronée et, par la suite, on souligne que la connaissance ne peut pas avoir la propriété que KK lui attribue parce que la conception de l'esprit en question est fausse. Si la transparence est fausse, qu'on nous présente alors une conception de l'esprit plus appropriée et nous verrons si la thèse KK est vraie lorsqu'elle est interprétée selon cette conception. Par exemple, le béhaviorisme est difficilement compatible avec la transparence épistémique, mais ça ne signifie pas pour autant qu'il ne valide pas la thèse KK quand la connaissance est interprétée de manière béhavioriste.

Ces considérations ne sont pas étrangères à l'externalisme en épistémologie. L'internalisme de la justification est la thèse selon laquelle un agent est conscient des (ou a une saisie cognitive des) justifications de sa connaissance; par opposition, l'externalisme de la justification permet qu'un agent soit justifié sans qu'il en soit conscient ou sans qu'il saisisse toutes les raisons justifiant sa connaissance. La principale motivation pour passer à une notion de justification externaliste était d'éviter de retomber dans le trilemme d'Agrippa : si un agent doit connaître ou saisir les raisons qui justifient une croyance, alors il devra connaître ou saisir les raisons qui justifient cette connaissance d'ordre supérieur, et ainsi de suite. En caractérisant la connaissance de manière externaliste, cette régression à l'infini des justifications est stoppée : si S est justifié dans une perspective externaliste, ce peut être uniquement en vertu d'une relation externe qu'il n'a pas à saisir ou posséder pour être justifié. Nous pourrions donc penser que l'externalisme et la thèse KK ne font pas bon ménage, du fait qu'il est possible de connaître sans en être « conscient ». Mais remarquez que nous commettrions encore une fois la même erreur que plus haut : s'il est vrai que S ne sait pas *au sens internaliste* que sa croyance est justifiée *au sens externaliste*, il se pourrait que la croyance qu'il sait que p soit justifiée *au sens externaliste*. Le fiabilisme, pour prendre un exemple plus concret de conception externaliste de la justification, n'interdit pas qu'il puisse exister un processus fiable de formation de croyances à propos de nos connaissances. En effet, supposons qu'un agent S soit doté d'un processus fiable de formation de croyances π tel que : à chaque croyance de la forme « S croit que p » produite par un processus fiable, peu importe lequel, le processus π produit la croyance

π(« S croit que p ») = « S croit qu'il croit fiablement que p ».

Autrement dit, π produirait la croyance '$B(Bp \wedge Jp)$' à partir de 'Bp', si la croyance 'Bp' est produite par un processus fiable. Si nous maintenons la définition traditionnelle de la connaissance, c'est-à-dire

(CVJ) $K\varphi =_{\text{déf.}} \varphi \wedge B\varphi \wedge J\varphi$,

mais où '$J\varphi$' signifie maintenant « la croyance que φ est produite par un processus fiable de formation de connaissances », et si nous supposons que 'B' et 'J' commutent avec la conjonction, c'est-à-dire

(Dist) $B(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (B\varphi \wedge B\psi)$ & $J(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (J\varphi \wedge J\psi)$,

nous pouvons déduire la thèse KK dans un cadre externaliste :

1.	Kp	Hypothèse	
2.	$Kp \leftrightarrow (p \wedge Bp \wedge Jp)$	(CVJ)	
3.	$Bp \wedge Jp$	1, 2	(1)
4.	$B(Bp \wedge Jp) \wedge J(Bp \wedge Jp)$	Par π	(1)
5.	$B(Bp \wedge Jp) \wedge Bp$	3, 4, $\wedge$- élim et $\wedge$-intro	(1)
6.	$J(Bp \wedge Jp) \wedge Jp$	3, 4, $\wedge$- élim et $\wedge$-intro	(1)

7.	$B(Bp \wedge Jp \wedge p)$	5, (Dist)	(1)
8.	$J(Bp \wedge Jp \wedge p)$	6, (Dist)	(1)
9.	BKp	7, (CVJ)	(1)
10.	JKp	8, (CVJ)	(1)
11.	$KK\varphi$	1, 9, 10, (CVJ)	(1)
12.	$K\varphi \rightarrow KK\varphi$	$\rightarrow$-intro	

L'association de l'externalisme à la réfutation de la thèse KK n'est donc pas justifiée, car l'externaliste ne peut pas exclure d'emblée la possibilité d'un tel processus de formation de croyances. À tout le moins, si l'externaliste insiste toujours sur la fausseté de la thèse KK, il devra alors montrer comment de tels processus sont impossibles (ou improbables), il ne pourra pas se contenter d'affirmer qu'un agent épistémique n'est pas « conscient » en général de la fiabilité de ses processus de formation de croyances. Cela donne l'impression que l'externaliste participe toujours, malgré lui, à un certain préjugé introspectif de la connaissance d'ordre supérieur.

Hintikka réfute aussi l'idée que la thèse KK soit une thèse (exclusivement) à connotations psychologiques ou introspectives (1963/2005 : 82), et il défend sa validité par un argument « logique » dépourvu de telles connotations. Pour juger de la validité ou non de cette thèse, comme de la validité ou non d'autres propriétés qu'entretiendrait la connaissance, l'approche de Hintikka consiste à déterminer sous quelles conditions un ensemble d'énoncés épistémiques est consistant ou, dans ses termes, *défendable*. Le qualificatif « défendable » est expliqué à l'aide d'une notion de *système modèle* (*model system* en anglais), qui est en quelque sorte un précurseur d'un modèle de Kripke. Un système modèle est donné par deux choses : un ensemble Ω composé d'ensembles de formules maximalement consistants et une relation binaire ρ sur Ω. Un ensemble de formules maximalement consistant représente en quelque sorte une possibilité épistémique (ou doxastique), et la relation binaire encode une relation d'indiscernabilité entre possibilités épistémiques (ou doxastiques). Selon les conditions que nous imposerons à ces systèmes modèles, notamment aux relations binaires, nous obtiendrons des propriétés logiques différentes pour les modalités épistémiques; en particulier, certaines contraintes posées sur ρ correspondront directement à la validité de certaines formules.

Parmi les conditions les plus importantes que doivent satisfaire ces modèles selon Hintikka, nous retrouvons (en supposant que μ et $\mu^* \in \Omega$) :

(C.P*) Si 'Pq' $\in \mu$, alors il existe une alternative μ^* à μ (c.-à-d. $\mu\rho\mu^*$) telle que 'q' appartient à μ^*.

(C.KK*) Si 'Kp' $\in \mu$, alors 'Kp' $\in \mu^*$, pour toute alternative μ^* à μ.

(C.K) Si 'Kp' $\in \mu$, alors 'p' $\in \mu$.

(L'expression 'Pq' est synonyme de '$\neg K \neg q$' et signifie « Il est épistémiquement possible que q ».) La première condition définit ce qu'est la modalité de possibilité (épistémique, doxastique ou autre); la deuxième condition exprime plus ou moins la thèse KK, la formule '$Kp \rightarrow KKp$' est d'ailleurs une conséquence directe de (C.KK*); et la troisième condition est la factivité, le fait que toute connaissance est connaissance du vrai.

Pour la justification de (C.KK*), on est renvoyé à une partie antérieure de l'essai où Hintikka trace la notion de consistance ou de « défensabilité » pour les formules de ce langage :

(A.PKK*) Si 'Kp_1', 'Kp_2', ..., 'Kp_n' et 'Pq' appartiennent à un ensemble consistant λ alors l'ensemble {'Kp_1', 'Kp_2', ..., 'Kp_n', 'q'} est un ensemble consistant.

Autrement dit : si la possibilité épistémique d'une certaine chose est compatible avec ma connaissance alors cette chose est compatible avec ma connaissance. L'explication qu'il offre pour ce principe est la suivante :

> One answer to this question seems to be as follows. That q is the case can be compatible with everything a certain person – let us assume that he is referred to by a – *knows* only if it cannot be used as an argument to overthrow any true statement of

> the form "*a* knows that *p*". Now this statement can be criticized in two ways. One may either try to show that *p* is not in fact true or else try to show that the person referred to by *a* is not in a position or a condition to know that it is true. In order to be compatible with everything he knows, *q* therefore has to be compatible not only with every *p* which is known to him but also with the truth of all the true statements of the form "*a* knows that *p*." And this is exactly what is required by (A.PKK*). (Hintikka 1962 : 16)

Il n'est pas clair pour moi, cependant, que cette condition soit suffisante pour assurer la validité de (KK). Si, comme la formulation de (A.PKK*) le suggère, « compatible » signifie consistant, alors on peut très bien exiger que l'ensemble {'Kp_1', 'Kp_2', ..., 'Kp_n', 'q'} soit consistant sans pour autant exiger que *toute* alternative μ^* à μ soit une extension maximalement consistante de {'Kp_1', 'Kp_2', ..., 'Kp_n', 'q'}. Seule cette dernière condition assurera la validité de (KK), car être consistant signifie seulement qu'il existe *un* ensemble maximalement consistant qui inclue {'Kp_1', 'Kp_2', ..., 'Kp_n', 'q'}. Hintikka ne semble pas réaliser cette difficulté. Par conséquent, bien que Hintikka revendique (avec raison) la séparation de KK d'avec la transparence épistémique, l'argument qu'il présente pour défendre la validité de KK logiquement (et non pas psychologiquement) n'est pas concluant, comme le lui a reproché d'ailleurs Ginet (1970 : 169-170).

D'autres aussi ont défendu l'idée que KK n'était pas une thèse qui devait être jugée à l'aune de la psychologie, mais au lieu de chercher du côté des principes logiques régissant les énoncés épistémiques ils suggèrent plutôt d'examiner directement les pratiques linguistiques. Arthur C. Danto fit l'observation suivante :

> [...] there are philosophical views that knowledge is a cognitive condition – a state in which the knower is *in* – and that when he is in this state, his being so is transparent to himself. So, when he knows, he knows that he knows in virtue of the reflexive transparency of the cognitive condition. We could not know without knowing that we knew. This could be so; but the original conjunction [*"I know that* s *but I do not*

> *know that I know that* s"] would sound weird to anyone with an ear tuned to correct English, and, since few native speakers are aware of the transparency theory and since fewer still believe it to be true, the weirdness cannot be explained with reference to that theory. (Danto 1967 : 33)

Pour juger de la thèse KK, selon Danto, il faut se fier à l'usage du verbe savoir et à la pratique des attributions d'attitudes épistémiques, des considérations sur la transparence et l'internalisme ne devraient pas dominer notre analyse. Selon cette approche, la thèse KK affirme que les conditions sous lesquelles un locuteur typique attribuera à S l'attitude épistémique « il sait que p » sont des conditions sous lesquelles un locuteur typique attribue à S l'attitude épistémique « il sait qu'il sait que p ». Dans cette interprétation de la thèse, rien n'est présupposé quant à la nature et la capacité introspective de l'esprit.

Radford (1966) et Lemmon (1967) proposent des contre-exemples à la thèse KK qui se situent à mi-chemin entre l'examen des pratiques linguistiques et l'adéquation de la thèse avec la transparence épistémique. Radford donne l'exemple d'une personne à qui l'on demanderait : « En quelle année Élizabeth I est-elle décédée? », et qui répondrait sans conviction : « Je ne sais pas, 1603? ». Il prétend que cette personne connait la réponse à la question, car Élizabeth I est effectivement décédée en 1603, mais qu'elle ne sait pas qu'elle connait la réponse, étant donné le manque de conviction qu'elle affiche. Lemmon (1967) donne l'exemple, similaire en esprit, d'une personne à qui l'on demanderait : « Connaissez-vous la valeur de pi à dix décimales près? », et qui répondrait : « Non », mais quelques instants plus tard dirait : « Oui! Il s'agit de 3,1415926536 ». Lemmon suggère qu'au moment de la première réponse la personne connait la valeur de pi sans savoir qu'elle la connait (encore une fois, étant donnée l'hésitation qu'elle démontre dans sa réponse).

Selon Lehrer (1970), ces exemples ne contredisent pas la thèse KK et ce, pour des raisons similaires à celles qui ont été exposées plus haut. Si l'agent semble savoir que p sans savoir qu'il sait que p, cela tient au fait que, pour la connaissance du premier ordre, c'est-à-dire son savoir que p, l'agent ne doit pas forcément avoir la conviction que p ou l'inclination à affirmer que p, alors que pour la connaissance du deuxième ordre, c'est-à-dire son savoir qu'il sait que p, cette conviction ou inclination à affirmer est nécessaire : dans le premier exemple, l'agent n'est pas convaincu qu'Élizabeth est décédée en 1603 ou n'a pas d'inclination particulière à l'affirmer, mais il sait néanmoins qu'elle est décédée en 1603; et il en va de même pour le deuxième exemple, l'agent n'est pas convaincu que pi $\approx$ 3,1415926536 ou n'a pas d'inclination à affirmer que pi $\approx$ 3,1415926536, mais il sait néanmoins que pi $\approx$ 3,1415926536. Lehrer souligne la disparité entre les critères pour la connaissance du premier ordre et ceux pour la connaissance du deuxième ordre et en vient à la conclusion : soit nous *pouvons* connaître au premier *et* au deuxième ordre sans être convaincus ou fortement inclinés à affirmer, soit nous *devons* être convaincus ou fortement inclinés à affirmer au premier *et* au deuxième ordre afin de pouvoir connaître, mais il semble erroné d'exiger une chose au premier ordre et une autre au deuxième ordre. Par conséquent, si les exigences pour connaître s'appliquent uniformément à tous les ordres, suivant la première option, rien n'empêcherait l'agent de savoir qu'il sait car cette connaissance n'exigerait aucune conviction de sa part; et suivant la deuxième option, l'agent ne saurait pas tout court (au premier ordre) parce qu'il n'est pas conscient de savoir immédiatement.

Tout ceci rappelle une distinction entre la connaissance dispositionnelle et la connaissance épisodique que l'on pourrait faire remonter à Aristote.[15] Aristote parle d'un sens du terme « savoir » selon lequel la connaissance pourrait être attribuée à une personne qui dort : Einstein savait que $E = mc^2$ même s'il n'y pensait pas, même s'il était inconscient ou s'il l'oubliait momentanément. Il s'agit là d'une connaissance dispositionnelle ou potentielle. Par opposition, la connaissance épisodique est la connaissance que l'on entretient cons-

[15] Cf. *Éthique à Nicomaque* 1146b.

ciemment et actuellement. Quand on sait, dans le sens dispositionnel, c'est que l'on *peut* savoir épisodiquement. L'innéisme du Ménon illustre une forme extrême de connaissance dispositionnelle : l'esclave de Ménon ne sait pas comment dupliquer la surface du carré selon le sens épisodique, mais il sait le faire potentiellement (si l'on en croit Socrate). Nous pourrions aussi, dans le même ordre d'idées, parler d'une interprétation synchronique versus une interprétation diachronique des modalités 'K' dans la thèse KK.

Mais peut-être que Radford et Lemmon étaient parfaitement conscients de la disparité dont fait part Lehrer et que c'est ainsi qu'ils conçoivent la connaissance d'ordre supérieur. Ceci serait en accord avec l'idée exprimée par le principe (VK) dont nous avons parlé plus haut : la première occurrence de « sait » (à partir de la gauche) agirait comme un modificateur de la deuxième occurrence de « sait ». S'il y a deux sortes de connaissances impliquées dans l'argument, ce n'est pas parce qu'on applique une définition de « savoir » à la connaissance du premier ordre et une autre définition de « savoir » à la connaissance du deuxième ordre, c'est parce que la connaissance d'ordre supérieur tend à modifier la connaissance d'ordre inférieur, que la même connaissance – savoir que p – n'est pas la même lorsqu'elle est dans la portée d'une attribution épistémique d'ordre supérieur; une occurrence de « sait » aurait une signification différente selon qu'elle se trouve avant ou après une autre occurrence de « sait » : le « **sait** » dans « S sait qu'il **sait** que pi $\approx$ 3,1415926536 » n'aurait pas le même sens que le « **sait** » dans « S **sait** qu'il sait que pi $\approx$ 3,1415926536 ». Nous retrouvons donc sous des traits différents l'interprétation agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur où « savoir que l'on sait que p » signifierait « vraiment savoir que p ».

2.3 L'argument contre KK de Williamson

Toujours dans le même esprit de l'association de la thèse KK à la transparence épistémique et, par la suite, de la transparence à unc conception agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur, Williamson (2000 : Chaps. 4 & 5) donne deux versions d'un argument contre KK que je présente et analyse en détail dans cette section.

L'argument présuppose une certaine famille A de situations ou d'états, et exploite le caractère vague ou flou des conditions de vérité de certains énoncés épistémiques, exprimées en fonction des situations de A.[16] Plus précisément, le « vague » est donné par une certaine relation d'accessibilité N sur A : si $\alpha N \beta$, c'est que les situations α et β sont voisines (et pourront éventuellement être confondues). Il contribue à l'argument par l'entremise du principe suivant :

(SK) Pour toute situation α et pour toute[17] proposition p, S sait que s'il sait que p dans α alors S sait que p dans toute situation β telle que $\alpha N \beta$

Nous pourrions nommer ce principe, suivant la discussion qui précède son introduction (Williamson 2000 : 96-97 & 115-116), le principe de *sécurité épistémique* : en gros, vu le caractère vague des conditions de vérité de « savoir que p », lorsque S sait qu'il sait que p dans une certaine situation α, il doit continuer de savoir que p dans des situations β avoisinant α. Autrement dit, savoir que l'on sait que p entraîne que l'on sache sûrement que p. Si nous employons la notation '$\alpha \Vdash \varphi$' pour signifier que 'φ' est vrai dans la situation α, cette condition s'écrit formellement comme

(SK) Si $\alpha \Vdash KKp$ alors $\beta \Vdash Kp$, pour toute situation β telle que $\alpha N \beta$

La parenté entre (SK) et (VK) devient alors manifeste car, si nous définissons 'V' de la manière suivante :

(V) $\alpha \Vdash Vp$ ssi $\beta \Vdash p$, pour toute situation β telle que $\alpha N \beta$,

---

[16] Je présente ces arguments de manière plus générale que ce que fait Williamson.

[17] Au besoin, on pourra restreindre la portée de ce quantificateur pour qu'il quantifie seulement sur une classe appropriée de propositions.

alors (SK) est tout simplement une réécriture particulière de (VK). (D'où l'idée aussi que la critique de Williamson repose sur une conception agripéenne de la connaissance d'ordre supérieur.)

Williamson prend pour acquis que le principe (SK) est intrinsèque à la thèse KK et s'en sert pour démontrer sa fausseté. Considérons l'énoncé « Il fait froid » et un ensemble de situations A telles que : certaines situations de A sont des situations où il fait chaud et où l'agent S sait qu'il fait chaud, c'est-à-dire S sait qu'il ne fait pas froid; certaines des situations de A sont des situations où il fait froid et S sait qu'il fait froid; mais d'autres encore – peut-être la majorité – sont des situations où il fait chaud ou des situations où il fait froid, et S ne sait ni qu'il fait chaud ni qu'il fait froid. Supposons que S sache qu'il fait froid dans la situation α. La thèse KK nous assure alors que S sait qu'il sait qu'il fait froid dans α, et le principe (SK) nous permet de déduire que S sait qu'il fait froid dans des situations β avoisinant α. En répétant indéfiniment cet argument simple, nous arriverons à la conclusion que S sait qu'il fait froid dans toutes les situations qui sont voisines des situations qui sont voisines des situations ... qui sont voisines de α. Pour enfoncer le clou définitivement avec cet argument, il nous faut une hypothèse supplémentaire sur la relation de voisinage N :

(N) Pour toutes situations α et β, il existe une suite de situations α_0, α_1, ..., α_n telles que $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ et $\alpha_i N \alpha_{i+1}$.

En somme, (N) stipule qu'on peut passer d'une situation à n'importe quelle autre via une suite de situations voisines. Dans l'exemple précédent, l'idée est que S peut passer d'une situation où il fait 15°C à une situation où il fait 35°C en passant par une suite de situations avec des températures progressivement plus élevées, chacune étant dans le voisinage de son prédécesseur (chacune étant indiscernable de son voisin).

Transcrivons cette dérivation dans un langage plus rigoureux. Soit 'φ' une certaine proposition connue par S dans la situation α; donc, en particulier, 'φ' est vraie dans α. Nous supposerons qu'il existe une situation β dans laquelle 'φ' n'est pas vraie. D'après l'hypothèse (N), il existe des situations α_0, α_1, ..., α_n telles que $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ et $\alpha_i N \alpha_{i+1}$. L'argument procède alors comme suit :

1.	$\alpha \Vdash K\varphi$	Hypothèse sur α
2.	$\alpha \Vdash KK\varphi$	Thèse KK
3.	$\alpha_1 \Vdash K\varphi$	Par (SK)
4.	$\alpha_2 \Vdash KK\varphi$	Thèse KK
5.	$\alpha_3 \Vdash K\varphi$	Par (SK)
	...	
6.	$\beta \Vdash K\varphi$	
7.	$\beta \Vdash \varphi$	Factivité
8.	$\perp$	Hypothèse sur β

L'autre argument de Williamson repose sur une mouture différente du principe (SK). La sécurité épistémique se formule non pas en termes de situations voisines, mais avec une famille de propositions '$p(\alpha)$' dont les conditions de vérité sont susceptibles de varier continument en fonction d'un paramètre $\alpha \in A$. Le paramètre en question pourrait représenter la température, le poids, la hauteur ou la couleur, auxquels cas la proposition '$p(\alpha)$' signifierait respectivement « Il fait (environ) α degrés », « Il pèse (environ) α kilos », « Il mesure (environ) α mètres » ou « Il est (environ) de la couleur α ».[18,19] Puisque α varie continument, si la proposition '$p(\alpha)$' est vraie, il est très probable (quoique non-nécessaire) que '$p(\beta)$' soit vraie lorsque β est dans le voisinage de α : si la bille de fer pèse environ 1 g, il est très probable qu'elle pèse

---

[18] Le terme « environ » est entre parenthèses ici car sa présence est souvent sous-entendue : lorsqu'on dit d'une personne qu'elle fait un mètre quatre-vingt on ne veut pas dire en général qu'elle mesure *exactement* un mètre quatre-vingt mais un mètre quatre-vingt plus ou moins « epsilon ». Les propositions de cette famille ont donc des conditions de vérité vagues.

[19] On supposera que le « il » a une valeur définie dans le contexte d'évaluation.

environ 1.1 g aussi; et si l'arbre mesure environ 15 m, il est très probable qu'il mesure environ 15.1 m aussi.

La locution « très probable » est nécessaire ici parce la vérité d'une proposition n'entraîne pas la vérité d'une proposition avoisinante. Supposons que la proposition météorologique « Il fait environ T°C » soit vraie à condition qu'il fasse T±1°C, et supposons, par ailleurs, qu'il fasse 15°C dans la situation présente. Les propositions 'p(14°C)', 'p(15°C)', 'p(16°C)', pour n'en mentionner que quelques unes, seraient donc vraies. Mais la proposition 'p(16.1°C)' ne serait pas vraie et ce, en dépit du fait que la proposition avoisinante 'p(16°C)' le soit.

La version du principe de sécurité épistémique utilisée ici stipule que l'agent S sait que si $p(\alpha)$ alors il ne sait pas que non-$p(\beta)$, où β est une valeur voisine de α. Formellement, si nous utilisons la relation N pour traduire la proximité entre deux valeurs, le nouveau principe de sécurité s'énonce comme suit :

(NK) $K(p(\alpha) \rightarrow \neg K \neg p(\beta))$, lorsque $\alpha N \beta$

Ce principe serait en quelque sorte constitutif de notre connaissance des propositions qui ont des conditions de vérité vagues ou des propositions desquelles nous avons une connaissance vague des conditions de vérité. Une façon plus simple de formuler (NK) serait peut-être :

(NK') $K(Kp \rightarrow q)$, si 'q' a des conditions de vérité voisines de celles de 'p'

Comme c'était le cas pour (SK), nous pouvons voir (NK) ou (NK') comme une conséquence de (KK) et de (VK) si la modalité 'V' possède la propriété suivante :

(V') $VKp \rightarrow Kq$, si 'q' a des conditions de vérité voisines de celles de 'p'

Cet argument sera donc de la même nature.

Nous supposerons qu'il existe une proposition vraie '$p(\beta)$' et une proposition fausse '$p(\alpha)$' dont la négation, '$\neg p(\alpha)$', est connue, et nous supposerons également qu'il y a une condition analogue à (N) garantissant l'existence d'une suite de paramètres $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$ voisins (autrement dit, qu'il existe un « chemin » des conditions de vérité de '$p(\alpha)$' à celles de '$p(\beta)$'). Sous ces hypothèses, nous avons

1.	$K\neg p(\alpha)$	Par hypothèse
2.	$KK\neg p(\alpha)$	Thèse KK et MP, 1
3.	$K(K\neg p(\delta) \to \neg p(\gamma))$, lorsque $\gamma N\delta$	Formulation éq. de (NK)
4.	$KK\neg p(\delta) \to K\neg p(\gamma)$, lorsque $\gamma N\delta$	Normalité
5.	$KK\neg p(\alpha) \to K\neg p(\alpha_1)$	Instance de 4
6.	$K\neg p(\alpha_1)$	MP, 1 et 5
7.	$KK\neg p(\alpha_1)$	Thèse KK et MP, 6
8.	$KK\neg p(\alpha_1) \to K\neg p(\alpha_2)$	Instance de 4
9.	$K\neg p(\alpha_2)$	MP, 7 et 8
…		
10.	$K\neg p(\alpha_{n-1})$	
11.	$KK\neg p(\alpha_{n-1})$	Thèse KK et MP, 10
12.	$KK\neg p(\alpha_{n-1}) \to K\neg p(\alpha_n)$	Instance de 4
13.	$K\neg p(\beta)$	MP, 11 et 12
14.	$\neg p(\beta)$	Factivité
15.	$p(\beta)$	Par hypothèse
16.	$\bot$	

La ressemblance entre les deux contre-exemples devrait maintenant ressortir : dans le premier, on fixe la proposition et on considère une famille de situations progressivement différentes dans lesquelles peut se trouver l'agent épistémique; dans le second, on fixe la situation de l'agent et on considère une famille de propositions avec des conditions de vérité progressivement différentes. En fin de compte, c'est blanc bonnet bonnet blanc : ce qui fait fonctionner l'argument est une certaine version du principe (VK) dans le contexte du vague. L'argument de Williamson contre KK est donc parfaitement correct *si* la thèse est interprétée comme impliquant (VK), mais cette interprétation n'épuise pas toutes les possibilités; certes, il existe (possiblement) un sens de KK qui endosse cette interprétation, mais nous insistons sur le fait qu'il existe un sens de la connaissance d'ordre supérieur qui n'implique pas (VK) et qui rend la thèse KK vraie, ce que nous verrons plus loin.

En terminant, nous pourrions nous demander pourquoi Williamson a choisi d'exprimer l'idée de sécurité épistémique par (SK) plutôt que par :

(SK^-) Si $\alpha \Vdash Kp$ alors $\beta \Vdash Kp$, pour toute situation β telle que $\alpha N \beta$

Ce principe, avec KK, implique (SK) mais il n'est pas lui-même une conséquence de (SK). Je prétendrais même que plusieurs – sinon la plupart des – raisons qui justifieraient le choix de (SK) comme formulation adéquate de la sécurité épistémique justifieraient également (SK^-) comme choix adéquat. Les problèmes que nous rencontrons avec (SK^-) sont les mêmes que ceux rencontrés avec (SK) mais sans la thèse KK : l'hypothèse selon laquelle S sait que p dans une certaine situation mène aussitôt, par une dérivation plus simple encore que les précédentes, à la conclusion que S sait que p dans toutes les situations, mêmes celles où 'p' est faux, ce qui est évidemment contradictoire. Pourquoi donc incriminer KK si d'autres formes de la sécurité épistémique produisent la même contradiction sans l'invoquer? Mieux vaudrait peut-être incriminer le paradoxe sorite, qui est le suspect de convenance pour ce type de délit.

2.4 L'introspection négative et la transparence doxastique

S'il y a matière à débat sur la question de la validité ou non de la thèse KK, il ne semble pas que l'on puisse en dire autant de sa contrepartie négative – la thèse de l'introspection négative. Hintikka (1963/2005) présente un argument sans détours contre cette thèse qui repose seulement la propriété de factivité. En effet, nous pouvons prouver que ($K\neg K$) produit une conséquence difficilement acceptable :

1.	$Kp \rightarrow p$	Factivité
2.	$\neg p \rightarrow \neg Kp$	Contraposée de 1
3.	$\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$	Introspection négative
4.	$\neg p \rightarrow K\neg Kp$	2, 3 et logique propositionnelle

La simple fausseté d'une proposition 'p' entraînerait que l'agent sache qu'il ne sait pas que p, et ce, pour toute proposition 'p'. Même pour l'agent idéalisé (et logiquement omniscient) de Hintikka, la propriété que décrit la formule en 4 serait trop forte.

Williamson concocte, dans *Knowledge and its Limits*, un contre-exemple à l'introspection négative qui exploite la même idée.[20] Supposons que Pline sache que la ville de Pompéi avait une population d'environ vingt mille habitants, y ayant résidé une partie de l'année précédente. À son insu, le Mont Vésuve est en éruption depuis quelques jours et la ville de Pompéi est complètement ensevelie sous les cendres et la lave, la majorité des habitants sont morts et les survivants ont fuit, mais Pline continue de penser qu'elle a vingt-mille habitants. La ville de Pompéi n'ayant plus vingt mille habitants, il s'ensuivrait que Pline ne sait pas que Pompéi a une population de vingt mille habitants, la connaissance étant factive. Cependant, il est difficile d'imaginer que Pline sache qu'il ne sait pas que la population de Pompéi est de vingt mille habitants, car il ignore complètement l'éruption récente (et continue de penser que la ville est telle qu'il se la représente).

Il est facile de générer ce type de contre-exemples, il suffit (a) de choisir une certaine proposition 'p' que l'agent connaît dans la plupart des situations où elle est vraie, et (b) de choisir une situation où la proposition 'p' est fausse mais dans laquelle l'agent croit toujours qu'elle est vraie. En somme, il suffit de trouver des situations où les attentes épistémiques de l'agent par rapport à une certaine proposition dépassent les conditions de vérité de cette proposi-

[20] Cf. Williamson 2000 : Chap. 1. Je modifie seulement les personnages et la situation de l'exemple.

tion. Mais pourquoi cet agent ne saurait-il pas qu'il ne connaît pas cette proposition, pourquoi la conséquence 4 est-elle inacceptable? Pour bien comprendre le fonctionnement du contre-exemple, nous devons élucider certaines hypothèses relatives à la connaissance et la croyance et qui sont sous-jacentes au contre-exemple. Soit 'B_J' une modalité qui traduit la locution modale « S croit et a des bonnes raisons de croire que » (autrement dit, nous pourrions comprendre 'B_J' comme '$B\varphi \wedge J\varphi$'). Nous prétendons que l'hypothèse principale nous permettant de déduire une contradiction (de ce contre-exemple) est

(BK) $B_J\varphi \rightarrow B_JK\varphi$

Ce principe traduit l'idée que, si nous avons des bonnes raisons de croire que φ, nous avons de bonnes raisons de croire que nous savons que φ. Une autre manière de comprendre (BK) est par la notion d'attente épistémique : la croyance justifiée produit chez l'agent une attente (justifiée) de connaissance. À ce principe, s'ajoutent deux autres principes sur 'B_J' qui complètent le portrait :

(K→B) $K\varphi \rightarrow B_J\varphi$

(D) $B_J\varphi \rightarrow \neg B_J\neg\varphi$ ou, de manière équivalente, $\neg(B_J\varphi \wedge B_J\neg\varphi)$

Le premier stipule que la croyance (accompagnée de raison) est une condition préalable à la connaissance, et la deuxième stipule (ou est équivalente à la stipulation) qu'un agent ne peut croire (de manière justifiée) une chose et son contraire (ce qui ne l'empêche pas de croire des faussetés pour autant). Supposons enfin que notre agent S soit dans une situation σ telle que décrite par (a) et (b), nous pouvons déduire une antinomie de σ de la manière suivante :

1.	$\neg\varphi$	Constitutif de σ
2.	$\neg K\varphi$	Factivité
3.	$K\neg K\varphi$	(K¬K), 2
4.	$B_J\neg K\varphi$	(K→B), 3
5.	$B_J\varphi$	Constitutif de σ
6.	$B_JK\varphi$	(BK), 5

7. $B_JK\varphi \wedge B_J\neg K\varphi$ 4, 6
8. $\perp$ (D), 7

Nous prétendons donc que celui qui réfute la thèse K¬K doit présupposer minimalement (BK) pour faire ressortir l'antinomie à laquelle la thèse de l'introspection négative nous mène. Par conséquent, Williamson serait commis à ce principe d'introspection doxastique. Or, il y a précisément une conséquence de (BK) qu'il nous faut examiner à présent. Si la connaissance que traduit 'K' est de type « platonicienne », en ce sens qu'elle satisferait :

(PL) $K\varphi \leftrightarrow B_J\varphi \wedge \varphi$,

nous pouvons démontrer que la thèse KK est valide. En effet :

1.	$K\varphi$	Hypothèse	
2.	$B_J\varphi$	(PL), 1	(1)
3.	$B_JK\varphi$	(BK), 2	(1)
4.	$B_JK\varphi \wedge K\varphi$	1, 3	(1)
5.	$KK\varphi$	(PL), 4	(1)
6.	$K\varphi \rightarrow KK\varphi$	1-5, $\rightarrow$-intro	

Williamson, ou tout autre critique de la thèse KK, pourra toujours s'attaquer à l'idée que la connaissance est une croyance vraie justifiée. En effet, Williamson se débarrasse de la notion de croyance (justifiée) dans sa caractérisation de la connaissance et suggère que la notion de croyance devrait plutôt être définie en termes de connaissance (2000 : Chap. 1), mais pourra-t-il garantir que la notion de croyance qu'il développera ne satisfera pas elle-aussi (PL)? Sinon, il finira par défendre KK malgré lui.[21]

---

[21] Il ne faut pas nécessairement définir la connaissance comme croyance vraie justifiée pour que (PL) tienne nécessairement entre 'K' et 'B_J'. Par exemple, '5 + 7 = 12' est une vérité nécessaire, mais on ne considère pas que '5' soit défini en termes de '7' et '12', '7' en termes de '5' et '12' ou '12' en termes de '5' et '7'. De la même manière, une notion de connaissance 'K' peut être primitive et satisfaire l'équivalence (PL).

Nous terminons cette section avec un prix de consolation pour le partisan de la transparence, à la fois positive et/ou négative. L'argument précédent nous a montré clairement que la thèse K¬K est définitivement à proscrire, mais sa forme doxastique n'est pas interdite :

$\neg B_J\varphi \to B_J\neg B_J\varphi$

Ce principe ne traduit pas une thèse aux résonnances introspectives excessives, il stipule simplement que l'on croit de manière justifiée que l'on ne croit pas (de manière justifiée) que φ quand on ne croit pas (de manière justifiée) que φ. Il pourrait même être renforcé de la manière suivante :

(K¬B) $\neg B_J\varphi \to K\neg B_J\varphi$,

sans que l'on retrouve l'antinomie précédente. Ce principe est la deuxième moitié d'une thèse, dont la première (moitié) est

(KB) $B_J\varphi \to KB_J\varphi$,

et que l'on pourrait nommer la *transparence doxastique*, l'idée que nous connaissons ce que nous croyons (de manière justifiée) ou pas. La transparence doxastique, par opposition à la transparence épistémique, ne requiert pas que nous puissions reconnaître les états mentaux (doxastiques) qui sont des états proprement épistémiques. Or, c'était cette condition supplémentaire qui exigeait, chez Descartes, l'intervention de la garantie divine et, chez les stoïciens, l'existence de représentations compréhensives. Rien de tel n'est nécessaire pour défendre la transparence doxastique.

2.5 L'argument de l'action

J'aimerais montrer à présent comment la transparence doxastique, autant positive que négative, est présupposée dans une grande variété de situations. Nous chercherons à montrer qu'un agent (responsable) dans ces situations doit être conscient des croyances qu'il entretient afin d'agir. L'idée que la transparence est nécessaire à l'action n'est pas forcément nouvelle, mais nous verrons comment cette nécessité s'articule dans les détails.

D'abord, pourquoi Archimède a-t-il crié « Eurêka! »? L'histoire raconte que le roi Hiéron avait donné une certaine quantité d'or massif à un orfèvre pour qu'il lui confectionne une couronne. Ayant des doutes finalement quant à l'honnêteté de l'orfèvre et soupçonnant ce dernier de l'avoir dupé en substituant l'or massif par un alliage d'or et d'argent (gardant ainsi une partie de l'or pour lui-même), il fit venir Archimède et lui demanda de trouver un moyen de déterminer si la couronne était en or massif ou fait d'un alliage, et ce, sans la faire fondre ni l'abimer. L'anecdote veut qu'Archimède vînt à découvrir comment résoudre ce problème dans son bain, criât « Eurêka », et traversât la ville nu jusqu'à la cour du roi. Anecdote mise à part, la question demeure : pourquoi Archimède a-t-il crié « Eurêka! »? Parce qu'il savait désormais comment déterminer si la couronne était faite d'or pur ou d'un alliage. Et pourquoi a-t-il couru jusqu'à la cour du roi? Parce que s'il savait comment résoudre le problème du roi, il devait impérativement lui en faire part. Nous voulons connaître les hypothèses sous-jacentes à la situation d'Archimède, c'est-à-dire les hypothèses nécessaires (et suffisantes) pour déduire le fait qu'Archimède se rend à la cour du Roi Hiéron, et nous prétendons que parmi celles-ci se trouve une instance de la transparence doxastique positive.

Soit 'p' l'énoncé « Il existe une méthode pour déterminer la nature de la couronne sans l'endommager », soit 'q' l'énoncé « Archimède se rend à la cour du roi », et supposons que '$\bigcirc$' traduise la notion modale d'obligation. Nous permettrons à la fois des expressions de la forme '$\bigcirc\psi$' et de la forme '$\bigcirc(\psi, \varphi)$' qui ont les significations intuitives suivantes :

$\bigcirc\psi$ = Il est obligatoire que φ

$\bigcirc(\psi, \varphi)$ = Si φ, alors il est obligatoire que ψ[22]

La première forme d'obligation est l'obligation tout court, tandis que la deuxième est une obligation conditionnelle. De l'obligation conditionnelle, je ne supposerai que la propriété suivante :

(FD) $\varphi \wedge \bigcirc(\psi, \varphi) \rightarrow \bigcirc\psi$,

c'est-à-dire que, si φ et s'il est obligatoire que ψ lorsque φ, il est obligatoire que ψ (principe surnommé *factual detachment* en anglais, d'où le « FD »). Les deux prémisses explicites énoncées ci-dessus (celles qui suivent les « parce que » dans le paragraphe précédent) peuvent se traduire par :

(K1) Kp

(K2) $\bigcirc(q, Kp)$

À l'instar de notre discussion sur la connaissance plus haut, il serait plus approprié et plus général de représenter ces deux énoncés par

(B1) $B_J p$ (ou « Archimède croit de manière justifiée que p »)

(B2) $\bigcirc(q, B_J p)$ (ou « il est obligatoire que q, si $B_J p$ »)

Une simple application de (FD) à ces deux énoncés entraîne l'*obligation* qu'Archimède a de se rendre à la cour, '$\bigcirc q$', mais pas le *fait* qu'Archimède se rend à la cour, ce que nous voulons. Il manque un principe qui ferait le pont entre '$\bigcirc q$' et 'q'.

Une première idée serait de prendre l'implication '$\bigcirc\psi \rightarrow \psi$' comme une propriété d'un agent *responsable* : un agent responsable serait un agent qui accomplit les actions obligatoires. Toutefois, dans un cadre épistémique, il y a matière à contexter la nature simpliste de cette formalisation de la responsabilité car elle laisse entendre que l'obligation tiendrait à un impératif indépendant de la connaissance de l'agent, que l'obligation serait remplie sans que l'agent soit conscient de son caractère obligatoire. Or, l'action susceptible

---

[22] Le lecteur pourra remplacer '$\bigcirc(\psi, \varphi)$' par '$\varphi \rightarrow \bigcirc\psi$' afin de comprendre à quoi peut ressembler une obligation conditionnelle de cette sorte. Il faut retenir toutefois que je n'endosse pas cette interprétation particulière de l'obligation conditionnelle (cf. Carmo & Jones 2002).

d'obligation est une action décidée ou délibérée, et on n'accomplit pas une action délibérée sans savoir qu'elle est obligatoire. Cette relation entre la connaissance, l'obligation et l'action est inscrite notamment dans le principe légal *nemo censetur ignorare legem*, le principe selon lequel nul n'est censé ignorer la loi.[23] Si nul ne peut ignorer la loi, c'est qu'il est sous-entendu que, sans connaissance de la loi, l'agent pourrait être excusé de ne pas avoir agi selon la loi, qu'on ne pourrait pas l'accuser de faillir à cette obligation. Tel est le rôle de *nemo censetur ignorare legem* : faire en sorte que l'agent soit censé connaître les obligations qu'il doit accomplir. Pour cette raison, nous choisissons de caractériser un agent responsable comme un agent tel que

(AR) $K\bigcirc\psi \rightarrow \psi$.

Par ailleurs, pour des raisons similaires aux précédentes, nous supposerons que l'agent responsable connaît la « mécanique » de l'obligation; en particulier, nous supposerons qu'il connaît (FD) et que l'implication suivante découle de cette connaissance de (FD) :

(AFD) $K\varphi \wedge K\bigcirc(\psi, \varphi) \rightarrow K\bigcirc\psi$.

Par conséquent, en combinant (AR) et (AFD), l'implication

$$K\varphi \wedge K\bigcirc(\psi, \varphi) \rightarrow \psi$$

sera vraie d'un agent responsable.

Retournons maintenant à Archimède. Tout d'abord, notre supposition de départ est qu'Archimède est un agent responsable, ce qui nous permet de déduire :

$$KB_jp \wedge K\bigcirc(q, B_jp) \rightarrow q$$

Pour arriver à la conclusion 'q' il suffirait donc que

$$KB_jp$$

$$K\bigcirc(q, B_jp)$$

La deuxième prémisse est vraie dans le contexte que nous avons décrit : Archimède acquit cette connaissance lorsque Hiéron lui formula sa demande.

---

[23] Ce principe est parfois exprimé par l'adage *ignorantia juris non excusat.*

Reste la première prémisse. Le contexte précise que 'B_Jp' est vrai mais ne dit rien quant à 'KB_Jp'. Supposons que '$\neg KB_Jp$' est vrai (et donc que l'introspection doxastique positive est fausse). Est-il raisonnable de penser qu'Archimède pourrait défendre son inaction en soutenant qu'il ne savait pas qu'il croyait (de manière justifiée) qu'il existait une méthode pour déterminer la nature de la couronne sans l'endommager, et ce, malgré le fait qu'il croyait (de manière justifiée) qu'il existait une méthode pour déterminer la nature de la couronne sans l'endommager, qu'il connaissait l'obligation (conditionnelle) à laquelle Hiéron l'avait assujetti, et qu'il est un agent responsable? Cela me semble peu plausible. Il faut donc penser que 'KB_Jp' est vrai et que l'introspection doxastique positive est vraie aussi dans ce contexte.

La situation dans laquelle se trouve Archimède présente une forme similaire à de nombreuses autres. Supposons que vous regardiez les infos à la télévision et que vous attrapiez le message suivant du service de police : « Si vous voyez une personne telle que [une photo est montrée ou description est donnée], communiquez avec le service de police au ... ». Supposons que vous ayez aperçu un individu X ayant tous les attributs de l'individu recherché. Vous seriez donc justifiés de croire que X est le suspect recherché. Par ailleurs, étant donné que vous avez entendu l'annonce du service de police, vous savez que, si vous croyez (de manière justifiée) que X est le suspect recherché, vous devez communiquer avec la police. Disons que 'p' est l'énoncé « X est l'individu recherché par la police » et 'q' est « Vous communiquez avec la police », nous avons donc que B_Jp et $K\bigcirc(q, B_Jp)$. Par (AR) et (AFD), si vous êtes un bon citoyen, nous avons que

$$KB_Jp \wedge K\bigcirc(q, B_Jp) \to q$$

Encore une fois, la seule manière de défendre votre inaction dans ce contexte serait de prétendre que vous croyiez avoir vu l'individu X mais que vous ne saviez pas que vous croyiez l'avoir vu. Ce qui semble absurde. (KB) est donc vrai dans ce cas également.

Le même argument, à quelques détails près, peut être utilisé pour défendre la vérité de (K¬B). Pour ce faire, il suffit de considérer les obligations conditionnelles de la forme '$\bigcirc(\psi,\ \neg B_j\varphi)$'. Prenez le cas d'un employé d'un centre d'appel pour le service à la clientèle d'une certaine compagnie (fournisseur internet, fabricant de balayeuse, Colgate, etc.). La première personne à qui vous parlez sait répondre à la plupart des questions élémentaires. Si elle n'arrive pas à vous répondre, elle doit vous référer à un supérieur hiérarchique. La loi derrière cette prescription est bel et bien de la forme '$\bigcirc(\psi,\ \neg B_j\varphi)$; par exemple, '$\varphi$' pourrait être « Il y a du fluorure dans le dentifrice X » et 'ψ' pourrait être « L'appel est transféré à un supérieur immédiat ».[24] L'employé modèle ne peut ignorer cette loi, il sait donc que, s'il n'est pas en mesure d'affirmer que le dentifrice X contient du fluorure (ou non), il doit transférer l'appel à un supérieur immédiat; autrement dit, la proposition '$K\bigcirc(\psi,\ \neg B_j\varphi)$' est vraie dans cette situation. Il semble encore une fois qu'il serait absurde que l'employé puisse être à la fois responsable, en l'occurrence remplir les obligations prescrites par son boulot, et omettre de transférer un appel concernant le dentifrice X pour lequel il n'était pas en mesure d'affirmer s'il contenait ou non du fluorure. L'introspection doxastique négative n'est donc pas falsifiée par cet exemple non plus.

Dans chacun de ces exemples, la véracité de (KB) (resp. (K¬B)) tenait à l'incompatibilité apparente entre le fait qu'un agent croie (resp. ne croie pas) et le fait qu'il ne sache pas qu'il croit (resp. ne croit pas). Le comportement d'un tel agent serait difficile, me semble-t-il, à défendre devant un tribunal ou dans la cour du roi. La seule chose pouvant excuser l'inaction de l'agent serait son ignorance de l'obligation, mais c'est précisément ce que l'hypothèse *nemo censetur ignorare legem* empêche. Je ne vois pas dans quelle situation un agent pourrait croire que φ, savoir que $\bigcirc(\psi,\ B_j\varphi)$ (ou que $\bigcirc(\psi,\ \neg B_j\varphi)$) et

[24] Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait écrire la loi comme '$\bigcirc(\psi,\ \neg B_j\varphi \wedge \neg B_j\neg\varphi)$'.

prétendre de ne pas savoir qu'il fallait que ψ. Comment pourrait-on alors expliquer le cri d'Archimède?

2.6 Remarques finales

Dans les sections précédentes, nous avons examiné les différents arguments pour et contre les thèses KK et K¬K, et nous avons défendu l'idée qu'il existait une relative indépendance entre ces thèses et les thèses dites d'introspection positive et négative, lesquelles sont conçues comme des conséquences de la transparence épistémique (une thèse aux résonnances internalistes). En particulier, nous avons montré, sous certaines hypothèses, que la thèse KK pouvait être vraie même si la connaissance 'K' était interprétée de manière externaliste. Nous avons analysé un argument contre la thèse K¬K et découvert qu'il reposait sur une certaine prémisse de nature introspective :

(BK) $\quad B_J\varphi \rightarrow B_JK\varphi$.

Et nous avons vu qu'il était possible de démontrer la validité de KK, à partir de cette prémisse, si la connaissance était de type « platonicienne », c'est-à-dire si l'équivalence suivante était vraie de 'K' et 'B_J' :

(PL) $\quad K\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge B_J\varphi$.

Cette analyse a permis d'énoncer une forme doxastique de la transparence, donnée par les principes

(KB) $\quad B_J\varphi \rightarrow KB_J\varphi$

(K¬B) $\quad \neg B_J\varphi \rightarrow K\neg B_J\varphi$

et que nous avons défendus à la section précédente grâce à certains exemples paradigmatiques. La transparence doxastique rend les conditions de vérité de '$K\varphi$' et de '$KK\varphi$' identiques, faisant d'elle une interprétation transparentiste de la thèse KK.

Formellement, si nous interprétons le langage (avec la modalité 'B_J') dans une structure de Kripke conventionnelle $K = < W, R >$, alors les principes positif et négatif de transparence doxastique sont valides dans K si et seulement si R est une relation euclidienne, où une relation est *euclidienne* si, pour tous w, u et $v \in W$,

wRu & $wRv \Rightarrow uRv$.

Une relation d'accessibilité euclidienne R est une relation telle que sa restriction à $R[w]$, l'ensemble des mondes accessibles depuis w, cst la relation totale. Autrement dit, une relation est euclidienne si, quelque soit w, tous les mondes accessibles depuis w sont accessibles entre eux (mais ils n'accèdent pas nécessairement à w).

Va pour l'interprétation transparentiste. Qu'en est-il de l'interprétation agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur? Rappelons que, pour une interprétation agrippéenne, savoir que l'on sait que φ constitue une connaissance plus forte, plus rigoureuse que savoir que φ. Le fait que nous avons montré la possibilité d'une conception transparentiste de la connaissance d'ordre supérieur n'exclut pas la possibilité d'une interprétation agrippéénne de celle-ci. Mais, si l'interprétation agrippéenne est effectivement possible, alors comment pouvons-nous *aussi* la représenter par KK?

À la section 2.3, nous avons déterminé que l'interprétation agrippéenne de Williamson reposait sur une certaine opération '*V*' dont la signification était donnée par la clause (V). Malgré les apparences, cette clause ne se traduit pas dans le cadre kripkéen. En effet, pour exprimer formellement les idées sous-jacentes à celle-ci, il faudrait qu'une modalité puisse s'appliquer à des notions d'ordre supérieur, comme la connaissance, d'une manière qui n'est pas envisageable dans la sémantique de Kripke. Nous analyserons ce phénomène modal d'ordre supérieur au prochain chapitre et, en particulier, nous présenterons une façon de représenter l'interprétation agrippéenne que l'on prête ici à Williamson.

Chapitre 3
Une question d'attitude

> There are known knowns. These are things we know that we know. There are known unknowns. That is to say, there are things that we know we don't know. But there are also unknown unknowns. There are things we don't know we don't know.
>
> *Donald Rumsfeld*

Savoir est une attitude. Si Pompée sait que Jules César a traversé le Rubicon, c'est que Pompée entretient une attitude de connaissance vis-à-vis la proposition « Jules César a traversé le Rubicon ». De même, si Pompée sait que Cicéron est un grand orateur, c'est qu'il entretient une attitude similaire à l'endroit de la proposition « Cicéron est un grand orateur ». Une attitude est une certaine relation entre un agent et un contenu, ce contenu pouvant être propositionnel ou non : Jules César connaît la Gaule, donc Jules César entretient également une attitude épistémique, mais celle-ci n'est pas dirigée vers un contenu propositionnel. Savoir, comme croire, se souvenir, désirer, vouloir, etc. sont des attitudes qui, pour la plupart, sont propositionnelles, mais elles sont parfois dirigées vers des objets, des capacités ou encore des événements. L'attitude propositionnelle est toutefois considérée comme étant la plus générale, et de manière générale il est possible de transformer une attitude non-propositionnelle en une attitude propositionnelle. Nous pouvons donc concevoir la connaissance comme une certaine sorte d'attitude propositionnelle sans perte de généralité.

Il appartient à von Wright (1951) d'avoir consacré l'étude modale des attitudes épistémiques. L'analyse de la connaissance s'est donc transformée, avec lui, en une analyse des propriétés « logiques » des modalités que constituent les attitudes épistémiques. Au chapitre précédent, nous avons d'ailleurs participé à ce paradigme : l'analyse de la thèse de l'introspection épistémique (positive) fut réduite à la question de la validité ou non de '$K\varphi \rightarrow KK\varphi$', pour '$\varphi$' un énoncé quelconque (où, bien sûr, 'K' est une modalité qui représente l'attitude épistémique « S sait que »). Mais nous avons vu à la dernière section que la sémantique traditionnelle pour les modalités – c'est-à-dire la sémantique des mondes possibles – n'arrivait pas à exprimer ce que nous avons nommé « l'interprétation agrippéenne » de la thèse KK. Dans ce chapitre, nous aimerions examiner de plus près ces limitations et comprendre, ultimement, comment la sémantique des mondes possibles pourrait être étendue pour exprimer les notions sous-jacentes à l'interprétation agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur (celle-là même qui rend la thèse KK fausse). Nous commencerons par une brève genèse conceptuelle des attitudes propositionnelles et de la manière dont la sémantique des mondes possibles les interprète. Ensuite, nous examinerons en détail l'interprétation philosophique que Lewis (1996) donne aux mondes possibles dans le contexte de l'épistémologie afin de nous guider dans notre diagnostique; en particulier, nous chercherons à déterminer ce que cette interprétation entraîne quant à la connaissance d'ordre supérieur. Au cœur de ce chapitre se trouvent deux contre-exemples à la thèse KK, formulés dans les termes de l'épistémologie des mondes possibles, qui nous forcent à traiter de front la question de la connaissance d'ordre supérieur. L'analyse de ces contre-exemples aboutira à l'introduction d'une nouvelle sémantique pour les modalités.

3.1 L'attitude propositionnelle comme opération logique

L'attitude propositionnelle occupe une place controversée dans l'analyse des propositions en raison de sa relation à prime abord conflictuelle avec le principe de compositionalité, principe selon lequel toute proposition résulterait de l'application d'opérations propositionnelles primitives à des propositions atomiques ou élémentaires. Sur le plan sémantique, ce principe entraîne que la signification d'une expression complexe est déterminée par les significations de ses expressions constituantes et de la manière dont les opérations primitives transforment les significations; ultimement, la signification de toute expression se réduit donc aux significations des expressions et des opérations primitives. Une conséquence notable du principe de compositionalité est le fait qu'une expression peut être substituée par une autre de même signification *salva veritate* (sans affecter la signification, ou la valeur de vérité, des expressions résultantes). Ainsi, une proposition comme

(1) Si Jules César a traversé le Rubicon alors Pompée prépare la guerre

se décompose en deux propositions :

(1.1) Jules César a traversé le Rubicon

(1.2) Pompée prépare la guerre

et l'opération propositionnelle « si ... alors ». La valeur de vérité de la proposition complexe (1) est alors déterminée par les valeurs de vérité des propositions (1.1) et (1.2) et de la fonction de vérité que définit la conditionnelle matérielle « si ... alors ». Par ailleurs, puisque

(1.3) L'illustre fils de Caius Julius Caesar III a traversé le Rubicon

a la même valeur de vérité que (1.1) (car Jules César est cet illustre fils), la proposition

(1.4) Si l'illustre fils de Caius Julius Caesar III a traversé le Rubicon alors Pompée prépare la guerre

possède la même valeur de vérité que (1) (d'après la conséquence notable mentionnée ci-dessus).

Il ne faut pas laisser la simplicité apparente du principe de compositionalité nous tromper, car ses implications sont considérables et non-triviales. Il précise notamment la forme que doit prendre une théorie exhaustive des propositions : celle-ci doit d'une part donner un inventaire des propositions élémentaires et, d'autre part, donner une liste exhaustive des opérations propositionnelles. À plusieurs égards, la tâche la plus difficile consiste à trouver les opérations primitives, et le mérite d'avoir accompli cette tâche pour les propositions logiques et mathématiques revient à Frege. Nous savons grâce à lui que l'ensemble que forment les connecteurs booléens – négation, conjonction, disjonction, implication – et les quantificateurs – existentiel et universel – est suffisant pour générer toutes les propositions du langage mathématique (je dis bien les propositions du langage mathématique et non pas les propositions correspondant uniquement à des théorèmes). Selon Frege une proposition (ou un énoncé) dénote une valeur de vérité, le Vrai ou le Faux,[25] et les constantes logiques correspondant à des fonctions de vérité : la négation d'une proposition est vraie ssi la proposition niée est fausse, la disjonction est vraie ssi un des disjoints est vrai, la conjonction est vraie ssi chaque conjoint est vrai, une proposition universelle est vraie ssi toutes ses instances le sont, etc. La valeur de vérité d'une proposition complexe se détermine alors par ces fonctions de vérité et les dénotations de ses propositions élémentaires.

Pouvons-nous vraiment concevoir une attitude propositionnelle comme un connecteur propositionnel d'une certaine sorte comme le fit von Wright, c'est-à-dire une opération qui associerait une proposition à chaque paire agent-proposition? Par exemple, à l'agent « Pompée » et à la proposition « Jules César a traversé le Rubicon », l'opération associerait la proposition « Pompée sait/croit que Jules César a traversé le Rubicon ». Les propositions mathématiques étant plutôt laconiques sur la question des agents en général, il est tout-à-fait attendu que Frege ait omis d'ajouter des attitudes propositionnelles à son répertoire de connecteurs propositionnels. Mais une telle omission est-elle possible pour l'analyse du langage dans son ensemble?

---

[25] Cf. Frege, « Sens et dénotation », *in* Frege (1971).

À cette question, Wittgenstein répond par l'affirmative. Wittgenstein est très certainement l'un des premier éliminativistes en matière d'attitudes propositionnelles. Un des objectifs principaux du *Tractatus* était de délimiter ce qui pouvait être exprimé de ce qui ne pouvait l'être, et la manière de déterminer cette frontière était de déterminer la forme générale de la proposition, autrement dit une règle pour générer l'ensemble des propositions. L'attitude propositionnelle, selon lui, n'est pas une opération qui, à partir d'une proposition, nous permet d'en former une autre, c'est-à-dire une opération qui génère « Pompée sait que Jules César a traversé le Rubicon » à partir de « Jules César a traversé le Rubicon » et de « Pompée sait que ». Wittgenstein tente de minimiser la différence entre ces deux propositions pour justifier son éliminativisme, et il explique la différence entre « Pompée sait que Jules César a traversé le Rubicon » et « Jules César a traversé le Rubicon » par la distinction entre *dire* et *montrer*, autre thème central au *Tractatus* : « Pompée sait que p » est simplement une façon d'exprimer la proposition « 'p' *dit* p » (5.542). Il est bien connu que Quine a aussi milité pour l'élimination des attitudes propositionnelles (pour des raisons différentes). Ses positions éliminativistes étaient justifiées notamment par une adhérence au béhaviorisme, lequel nie l'existence des états mentaux. Ainsi, l'attitude propositionnelle est pour Quine une sorte de vestige théorique d'un langage/théorie archaïque, et la science empirique ne tardera pas à montrer qu'il est possible de se passer de ces notions désuètes.[26]

Nous prendrons acquis, dans ce qui suit, que ces attitudes ne sont pas éliminables.[27] Ceci nous mène donc naturellement à la question de savoir s'il est possible d'introduire des nouveaux connecteurs afin de les prendre en compte. Car il se pourrait effectivement que les attitudes propositionnelles

[26] Cf. Quine 1953 : Chap. VIII et Quine 1960 : Chap. VI.

[27] Cette présupposition est justifiée à mon avis par le fait que les éliminativistes n'ont jamais vraiment montré comment se débarrasser des attitudes propositionnelles.

soient inéliminables sans que l'on puisse « sauver » le principe de compositionalité. Il est bien connu que les attitudes propositionnelles semblent violer la substitution *salva veritate* qu'implique le principe de compositionalité. En effet, dans la portée d'une attitude, les propriétés sémantiques d'une proposition semblent brouillées. Si Pompée sait que Cicéron est un grand orateur mais ignore qui est Marcus Tullius, Pompée sait-il que Marcus Tullius est un grand orateur? Évidemment non. Mais si « Pompée sait que » était un connecteur comme les autres, la compositionalité voudrait que la fonction de vérité correspondant à « Pompée sait que » soit invariante sur des propositions ayant des valeurs de vérité identiques. Or, « Cicéron est un grand orateur » et « Marcus Tullius est un grand orateur » ont des conditions de vérité identiques, donc il faudrait que « Pompée sait que Cicéron est un grand orateur » et « Pompée sait que Marcus Tullius est un grand orateur » aient des valeurs de vérité identiques aussi (ce qui n'est pas le cas). L'attitude « Pompée sait que » ne semble pas respecter le principe de compositionalité, car il rend opaque la référence des noms et, conséquemment, la valeur de vérité des propositions qui se trouvent dans sa portée. [28]

Le problème de l'opacité référentielle ou de l'intensionalité est notoirement complexe et la description brève, incomplète et pédestre qui précède est là simplement pour illustrer les difficultés que posent l'introduction d'un opérateur propositionnel comme « Pompée sait que ». Mais ces difficultés ne sont pas circonscrites aux attitudes propositionnelles, elles sont le lot des modalités en général. Nous pourrions même définir une modalité comme une opération propositionnelle unaire qui présente une opacité référentielle, la nécessité métaphysique étant un exemple classique. En effet, si le nombre de planètes est huit, alors du fait que huit est nécessairement égal à huit il

[28] Normalement, on parle substitution *salva veritate* (et d'opacité référentielle) pour les termes (d'individus) seulement. J'emploie ici une conception plus générale de celle-ci.

s'ensuivrait, encore par cette forme du principe de compositionalité,[29] que le nombre de planètes est nécessairement huit. Ce qui est absurde. Nous verrons dans la prochaine section comment la sémantique des mondes possibles permet de régler ces difficultés.

3.2 Les mondes possibles à la rescousse de la compositionalité

Il est vrai qu'avec une sémantique de valeurs de vérité il n'y a pas grand-chose à espérer d'un traitement logique de la modalité; pour une modalité fidèle à la substitution *salva veritate*, il n'y a que deux issues possibles : soit elle définie la fonction de vérité identité soit elle définit la fonction de vérité de la négation. Mais au lieu d'accuser la notion de modalité, il faudrait plutôt dénoncer la simplicité d'esprit de la sémantique des valeurs de vérité : son pouvoir de discrimination entre propositions est ridiculement limité. D'une certaine manière, étant données deux propositions, il y aurait une chance sur deux qu'elles aient la même « signification ».

Le problème avec la sémantique de la valeur de vérité est qu'elle n'a d'égards que pour ce qui est vrai *actuellement*, et il n'y a pas que les attitudes propositionnelles et la nécessité métaphysique qui en souffrent. Les énoncés

(2) Il y a une chance sur quatre que le bébé ait les yeux bleus

(3) Il est fort probable qu'il pleuve demain

sont tout aussi opaques que les énoncés modaux considérés plus haut, peut-il se permettre d'éliminer ce type d'énoncés aussi? Les opérateurs probabilistes « Il y a une chance sur quatre que » et « Il est fort probable que » apparaissant dans (2) et (3) sont opaques car, si nous remplaçons les sous-énoncés

---

[29] Il faut comprendre qu'il n'existe pas seulement un principe de compositionalité : chaque sémantique présuppose un tel principe. Ainsi, dire que le principe de compositionalité est violée par une certaine catégorie d'énoncés revient simplement à dire que la sémantique en question est inappropriée pour cette catégorie d'énoncés (et non pas que le principe de compositionalité dans sa forme générale est fautif).

dans (2) et (3) par des énoncés ayant la même valeur de vérité, alors ils n'auront plus forcément la même valeur de vérité. Par exemple, supposons que « Le bébé aura les yeux bleus » ait la même valeur de vérité que « Il pleuvra demain ». Le principe de compositionalité (sous la forme décrite plus haut) entraînerait alors que

(2.1) Il y a une chance sur quatre qu'il pleuve demain

(3.1) Il est fort probable que le bébé ait les yeux bleus

ont les mêmes valeurs de vérité que (2) et (3) respectivement, ce qui est absurde car ils se contredisent.[30]

Si je parle de ces opérateurs probabilistes, c'est pour illustrer comment la théorie des probabilités arrive à éviter les difficultés sémantiques susmentionnées. La théorie des probabilités rend compte de la divergence entre les conditions de vérité de (2) et celles de (3) à l'aide d'un *univers* probabiliste, une idée qui remonte à Kolmogorov (1933/1960). Chaque point dans un univers X représente une possibilité exhaustive, une configuration possible du cours des choses. Si l'univers en question est celui où deux dés (à six faces) sont lancés, l'univers comportera trente-six points, un pour chaque paire (n, m), où n, $m \in \{1, 2, ..., 6\}$. Un événement dans l'univers X est défini formellement comme un sous-ensemble de X; intuitivement, c'est tout simplement une propriété de cet univers. Par exemple, l'ensemble E des couples

$$(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$$

correspond à la propriété « Un des chiffres est un six ». Bien qu'il ne soit pas d'usage de le faire, car la distinction syntaxe-sémantique est rarement exploi-

[30] On pourrait même accuser cette sémantique d'être responsable du célèbre *slingshot argument* (Davidson 1969) qui montrerait que toutes les propositions vraies correspondent au même fait ou partagent le même *truthmaker*. Une des prémisses essentielles à cet argument est que la valeur de vérité d'un énoncé 'p' n'est pas affectée par la substitution d'une description définie par une autre pour peu que les deux descriptions aient la même dénotation. Or, c'est précisément cette présupposition qui permet de déduire que le nombre de planètes est nécessairement huit.

tée en probabilité, nous pouvons parler de *propositions* au lieu d'événements et d'*énoncés* au lieu de propriétés, de sorte que l'énoncé « Un des chiffres est un six » correspondrait à la proposition E. L'univers ne serait pas complet sans une certaine mesure de probabilité pour ses événements, nommée fonction de probabilité. Un *espace probabilisé* est un univers muni d'une *fonction de probabilité*, une fonction P définie sur l'ensemble des événements de X telle que : (i) $P(E)$ est toujours entre 0 et 1 inclusivement; (ii) $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, si E et F sont disjoints; et (iii) $P(X) = 1$. Dans l'exemple des dés, la définition de cette fonction est évidente.

L'espace probabilisé de Kolmogorov peut être utilisé pour interpréter des « modalités probabilistes » comme celles qui apparaissent dans (2) et (3). Considérons l'énoncé :

(4) Il y a une chance sur deux que la somme des chiffres soit paire

Il y a dans (4), la modalité probabiliste « Il y a une chance sur deux que » et l'énoncé

(4.1) La somme des chiffres est paire.

L'énoncé (4.1) est vrai, par exemple, au point déterminé par (3, 5) mais il est faux au point (3, 4), tandis que (4) est vrai partout. Les énoncés

(4.2) Le premier chiffre est impair

(4.3) Les deux chiffres sont pairs ou les deux chiffres sont impairs

sont également vrais au point (3, 5), mais (4.2) est vrai au point (3, 4), donc ne définit pas la même proposition que (4.1). Il n'est pas difficile de vérifier toutefois que (4.3) définit exactement la même proposition que (4.1). Ces observations devraient rendre clair le fait que nous pouvons substituer (4.3) pour (4.1) dans (4) *salva veritate*, mais nous ne pouvons pas substituer (4.2) pour (4.1) avec les mêmes résultats. Par conséquent, nous avons un certain modèle pour comprendre comment la modalité probabiliste « Il y a une chance sur deux que » peut être conçue comme une certaine opération sur les propositions. Une proposition est une généralisation d'une valeur de vérité, et l'opération correspondant à la modalité probabiliste est une généralisation de la fonction de vérité. Toute cette discussion autour d'une sémantique pour les énoncés probabilistes, qui se trouve à mi-chemin entre les espaces probabilisés de Kolmogorov et les structures de Aumann (cf. Aumann 1976, Fagin et al. 2003), illustre bien comment les notions sous-jacentes à un tel espace nous permettent de résoudre le problème de la compositionalité et de la substitution.

Une première sémantique conçue expressément pour les modalités épistémique et doxastique nous vient de Hintikka (1962). Elle ne puise pas dans l'idiome de la sémantique des mondes possibles, mais y ressemble dans l'esprit. Comme nous avons vu au chapitre précédent, un modèle dans cette sémantique est donné par deux choses :

(H1) Un ensemble Ω d'ensembles de formules maximalement consistants (un ensemble μ étant maximalement consistant ssi, pour toute formule 'φ', (i) il ne contient pas à la fois 'φ' et sa négation '$\neg\varphi$' et (ii) il contient ou bien 'φ' ou bien '$\neg\varphi$');

(H2) Une relation binaire 'ρ' sur Ω qui, pour chaque μ dans Ω, spécifie quels ensembles de formules sont des alternatives à μ.

Nous pouvons comparer un ensemble maximalement consistant à un point d'un univers de Kolmogorov. Via l'appartenance, l'ensemble spécifie entièrement la valeur de vérité de chaque formule du langage; il correspond en quelque sorte à une configuration possible de la situation épistémique de l'agent. La relation est une mesure de l'ignorance de l'agent : étant donné une possibilité épistémique (un ensemble maximalement consistant de formules), elle précise quelles possibilités sont laissées ouvertes par la connaissance de l'agent. Je n'insisterai pas davantage sur ce type de modèles.

La sémantique des mondes possibles est la sémantique aujourd'hui standard pour les modalités. Elle peut être vue comme une synthèse entre la notion d'univers et la notion de système modèle de Hintikka. Au lieu d'ensembles de formules maximalement consistants, Kripke (1963) opte pour des mondes possibles (comparables à des points de l'univers), mais il conserve la relation indiquant lesquels points sont accessibles l'un de l'autre. Plus précisément, un modèle de Kripke est basé sur la notion de structure relationnelle, un couple $< W, R >$ où W est un ensemble (de mondes possibles) et R est une relation binaire sur W (d'accessibilité). Pour obtenir un modèle, c'est-à-dire une structure permettant d'interpréter les formules d'un langage modal, il faut ajouter à ceci une valuation : une fonction *val* qui associe à chaque variable propositionnelle un sous-ensemble de W. Un sous-ensemble de W est une *proposition*, et chaque formule détermine une proposition via les clauses :

$w \Vdash p$ ssi $w \in val(p)$

$w \Vdash \neg\varphi$ ssi non-($w \Vdash \varphi$)

$w \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $w \Vdash \varphi$ et $w \Vdash \psi$

$w \Vdash \Box\varphi$ ssi $v \Vdash \varphi$, pour tout v tel que wRv

(Ici, la modalité '$\Box$' peut être une modalité métaphysique, épistémique, doxastique, etc.) Les clauses déterminent ainsi les opérations propositionnelles que définissent les connecteurs : la négation correspond à la complémentation, la conjonction à l'intersection, et la modalité à l'opération qui, à la proposition $\pi \subset W$, associe la proposition

$\{w \in W : R[w] \subset \pi\}$,

où $R[w]$ est l'ensemble des mondes accessibles depuis w. Chaque monde w d'un modèle de Kripke donne lieu à un ensemble de formules maximalement consistant, l'ensemble $\{\varphi : w \Vdash \varphi\}$.

Il n'est pas trop difficile de voir que le principe de compositionalité est préservé dans cette sémantique :[31] la proposition que définit un énoncé 'φ' est

[31] Cette affirmation n'est pas tout à fait exacte. Comme il fut mentionné dans une note en bas de page plus haut, une sémantique, si elle est présentée récursivement, sous-entend un principe de compositionalité : les clauses indiquent la manière dont la signification du tout est

bel et bien déterminée par les propositions que déterminent les sous-énoncés de 'φ' et la manière dont opèrent les fonctions associées aux connecteurs apparaissant dans 'φ'. Si nous considérons les énoncés

(5) Pompée sait que Cicéron est un grand orateur

(6) Pompée ne sait pas que Marcus Tullius est un grand orateur

alors cette sémantique permet à ces deux énoncés d'êtres vrais si les propositions que définissent

(5.1) Cicéron est un grand orateur

(6.1) Marcus Tullius est un grand orateur

ne sont pas les mêmes. Autrement dit, la négation de (6) ne pourra pas être obtenue de (5) en substituant (5.1) pour (6.1), car les propositions correspondantes sont distinctes.

On a beaucoup reproché à la sémantique des mondes possibles son coût ontologique exorbitant, car celle-ci nous engagerait à l'existence d'une pléthore d'entités possibles dont la nature est loin d'être évidente. Mais pour être honnête, il faut dire que la notion d'espace probabilisé ne s'épargne pas cette difficulté non plus : il n'y aurait pas de probabilité si le possible n'existait pas, même s'il s'agissait d'une existence conceptuelle. Les attitudes à l'endroit de l'existence du possible sont variées et vont de l'ersatz d'existence linguistique à l'existence pleine – le réalisme modal – en passant par une existence réelle mais abstraite (cf. Lewis 1986, Stalnaker 2003, Armstrong 1989). Cependant, nous partageons avec Lewis (1996 : 552) l'opinion que l'utilité heuristique de ces entités possibles est indépendante du statut ontologique qui leur est conféré.

Pour le moment, les mondes possibles n'ont rien de spécifiquement épistémique. Nous verrons dans la prochaine section quelle nature ont ces entités dans le contexte de l'épistémologie.

---

engendrée par les significations des composantes. Si le principe de compositionalité est « préservé » ici, c'est parce que la sémantique convient à ce langage.

3.3 L'épistémologie des mondes possibles

Dans *Elusive Knowledge* (Lewis 1996), Lewis rapproche les sphères de l'épistémologie et de la logique épistémique en articulant une théorie de la connaissance campée dans l'idiome des mondes possibles. En exposant et en examinant la conception de Lewis, nous chercherons à déterminer comment son épistémologie comprend la question de la connaissance d'ordre supérieure.[32]

Le point de départ de cette conception se situe dans la clause sémantique de la modalité épistémique. Pour un sujet épistémique S et une proposition *P*, cette clause s'articule informellement ainsi :

> [u]n sujet S connaît une proposition *P* ssi *P* est le cas dans toutes les possibilités non éliminées par les données probantes (*evidence*) dont S dispose; de façon équivalente, ssi les données probantes dont S dispose éliminent toute possibilité où *P* n'est pas le cas. (*in* Dutant & Engel 2005 : 359)[33]

L'analyse de Lewis vise à comprendre les notions clés de cette définition. La notion d'élimination de possibilités (par des données probantes) retiendra notre attention plus particulièrement.

Concernant la possibilité, laquelle constitue l'élément de base de cette conception, Lewis précise :

> [...] nous ne pouvons pas nous limiter aux possibilités « réelles », qui se conforment aux lois actuelles de la nature, et peut-être aussi à l'histoire de ce qui s'est passé ef-

[32] Par le passé, notamment dans *Convention* (Lewis 1969), Lewis a défendu une conception (S5) de la connaissance, c'est-à-dire une conception qui rend les principes introspectifs (KK) et (K¬K) vrais. Ce que je souhaite examiner dans cette section est non pas ce que Lewis a dit sur la connaissance d'ordre supérieur mais ce qui est impliqué par sa définition de la connaissance.

[33] Je cite la traduction française de Lewis 1996 que l'on trouve dans Dutant & Engel 2005 : pp. 353-390.

> fectivement. Car les propositions à propos des lois et des faits historiques sont contingentes, et peuvent être connues ou pas.
>
> Nous ne pouvons pas davantage nous limiter aux possibilités « épistémiques » de S, c'est-à-dire les possibilités dont S ne sait pas qu'elles ne sont pas le cas. Cela viderait notre définition de son contenu. [...] Cela suffit à produire une équivalence : S sait que P ssi pour chaque possibilité W dans laquelle P n'est pas le cas, S sait que non-W. En contraposant et en annulant une double négation : ssi toute possibilité dont S ne sait pas qu'elle n'est pas le cas est une possibilité où P est le cas. Pour le dire plus vite : ssi P est le cas dans toutes les possibilités épistémiques de S. Mais pour arriver là, nous n'avons pas du tout besoin d'une définition substantielle de la connaissance! Pour transformer cela en définition substantielle, c'est-à-dire en fait la définition que nous avons donnée plus tôt, il nous faut ajouter une chose : les possibilités épistémiques de S sont précisément ces possibilités que les données probantes de S n'ont pas éliminées. (Dutant & Engel 2005 : 361-362)

Nous comprenons, par le deuxième paragraphe de ce passage, que Lewis veut donner une définition substantielle de la connaissance et ceci exige que nous opérions avec prudence dans la définition d'une possibilité. Par « possibilité épistémique », on semble entendre une notion de possibilité définie explicitement en fonction de la connaissance de l'agent. Puisque nous cherchons à donner une définition de la connaissance en termes de possibilités et non l'inverse, cette notion de possibilité épistémique ne peut pas faire. (On remarquera que la difficulté concerne surtout celui qui cherche une définition explicite de la connaissance par opposition à celui qui a des visées strictement sémantiques.) Pour sortir du cercle, Lewis propose alors l'idée que les possibilités sont éliminées par les données probantes (*evidence*) de l'agent; ce faisant, les raisons ou données probantes constitueraient la « cause » de la connaissance et non la connaissance elle-même.

Ce n'est donc pas le sujet mais les données probantes du sujet qui éliminent les possibilités et elles le font de la manière suivante, du moins dans le cas de l'expérience perceptive et la mémoire :

> Les possibilités non-éliminées sont celles où la totalité de la mémoire et de l'expérience perceptive du sujet sont exactement ce qu'elles sont actuellement. Il y a une seule possibilité qui se produit actuellement (pour le temps et le lieu en question); appelons-la l'*actualité*. Alors, une possibilité W est *non-éliminée* ssi la mémoire et l'expérience du sujet en W correspondent parfaitement à son expérience perceptive et à sa mémoire dans l'actualité. (Dutant & Engel 2005 : 362)

Ainsi,

> [l]orsqu'une expérience perceptive (ou un souvenir) E élimine la possibilité W, ce n'est pas parce que le contenu propositionnel de l'expérience entre en conflit avec W. [...] Mais c'est plutôt l'existence de cette expérience qui entre en conflit avec W : W est une possibilité où le sujet n'a pas une expérience E. [...] Disons que E a un contenu propositionnel P [...] Alors, je prétends que E élimine W ssi W est une possibilité où l'expérience ou le souvenir du sujet ont un contenu différent de P. Je ne dis *pas* que E élimine W ssi W est une possibilité dans laquelle P est fausse. (Dutant & Engel 2005 : 363)

L'expérience ou le souvenir E du sujet ou, pour parler de manière plus générale, les données probantes (*evidence*) du sujet éliminent une possibilité w si E a un contenu différent dans w qu'il n'a dans le monde actuel.

La formulation de Lewis, bien qu'astucieuse dans sa volonté d'éviter une caractérisation qui autrement serait, selon lui, circulaire, soulèvent toutefois plusieurs questions. Tout d'abord, la locution « une possibilité où l'expérience ou le souvenir du sujet ont un contenu différent de » est problématique, car elle laisse entendre que les données probantes ont un contenu qui varie de monde en monde, mais elle ne nous éclaire pas sur la manière dont les données probantes acquièrent leur contenu. Quelle est, par exemple, la contrepartie dans w de mon expérience E de la blancheur de la neige dans le monde actuel? Quelles sont les conditions d'identité de ces expériences? Je ne vois pas à quoi pourrait correspondre E si ce n'est son contenu propositionnel (ou une entité représentant ce contenu). Mais surtout, quelle est la pertinence du contenu associé à la contrepartie de E à w si c'est la connaissance dans le monde actuel, et donc le contenu de E au monde actuel, qui nous importe? Il me semble que c'est seulement le contenu de E au monde actuel qui devrait nous préoccuper pour déterminer si la proposition 'p' est connue, même si d'autres mondes possibles sont présupposés pour exprimer ce contenu.

Puisque c'est le contenu (actuel) de nos données probantes qui élimine les mondes, il nous faut clarifier cette notion de contenu si nous souhaitons comprendre comment la conception de la connaissance qui en dépend se comporte avec la connaissance d'ordre supérieur. Tout d'abord, bien que l'idée d'un contenu variant d'un monde à l'autre ne soit pas évidente, il n'est pas impossible d'imaginer des exemples de données probantes qui aient cette propriété. L'externalisme sémantique repose sur l'idée qu'une expérience (ou un souvenir) peut avoir le même contenu *interne* dans différents mondes où il possède des contenus *externes* distincts. Par exemple, le sujet sur Terre regardant un lac rempli d'eau et le même sujet (ou sa contrepartie) sur Terre-Jumelle en train de contempler le soi-disant même lac rempli de XYZ vit une expérience interne identique dans chaque cas en dépit du fait que le contenu externe de sa perception sur Terre est distinct du contenu externe de sa perception sur Terre-Jumelle. L'expérience sera la « même » pour le sujet (ou pour le sujet et sa contrepartie) en dépit du fait que le contenu ne le soit pas. Mais je soupçonne que ce n'est pas ce que Lewis voulait capturer avec sa définition. Après tout, on ne voit pas pourquoi l'ensemble de toutes les possibilités (pertinentes à la caractérisation de la connaissance du sujet) devrait contenir des possibilités « terre-jumelliennes ».

Un autre exemple, moins farfelu cette fois-ci, pourrait être basé sur l'idée qu'un objet puisse être associé à des contenus différents dans des mondes différents, comme un indice ou un élément de preuve. Dans la possibilité w, l'objet O serait la preuve de (*evidence for*) X, mais dans une possibilité v, il serait la preuve de (*evidence for*) Y. Imaginons que O est un certain objet retrouvé sur les lieux d'un crime, disons le mouchoir de Scarlett : dans la possibilité w, il pourrait constituer la preuve que Scarlett était dans la pièce au moment du meurtre du Butler; et dans la possibilité v, il pourrait constituer la preuve que le meurtrier a subtilisé le mouchoir de Scarlett. Le même objet, dans des mondes différents, aurait en quelque sorte des contenus différents, jouerait des rôles différents. Il n'est donc pas impossible de rendre l'idée plausible dans certains cas, mais j'ai l'impression que l'on étire un peu la notion de contenu et de donnée pour faire fonctionner la caractérisation. De toute manière, il y a une difficulté plus importante encore.

La voici. Même si nous supposons que les contreparties d'une même expérience sont caractérisables (indépendamment de leurs contenus), un autre obstacle difficilement surmontable se présente. Supposons que l'expérience E ait des contenus différents dans w et v mais que l'expérience F ait, à v, le contenu que E possède à w. Si w et v sont les seules possibilités pertinentes dans le contexte épistémique du sujet S, la définition entraînerait que S ne sait pas que p (le contenu de E) parce que E n'a pas à v le contenu correspondant à la proposition 'p', malgré le fait que S « expérimente » ce contenu dans la possibilité v via F. Mon incapacité à dissocier l'expérience, le souvenir ou les données probantes de leurs contenus propositionnels m'empêche de donner un contre-exemple plus concret de celui-ci. Il me semble toutefois qu'il y a matière à penser que la définition possède un certain nombre de difficultés qui n'ont pas été identifiées par Lewis, que sa stratégie pour éviter la circularité dans la définition modale de la connaissance n'est pas tout-à-fait complète.

Ces difficultés pourraient être résolues, ou atténuées à tout le moins, si les données probantes représentaient la totalité de la situation épistémique du sujet, c'est-à-dire la totalité de ses expériences, souvenirs et autres déterminants de la connaissance. Si les données probantes sont comprises comme ceci, la possibilité décrite au paragraphe précédent ne pourrait tout simplement pas se produire. De même, cela simplifierait considérablement la question des contenus des contreparties des données probantes : puisqu'il n'y aurait qu'un seul ensemble de données probantes par monde, il n'y aurait qu'un contenu à considérer par monde. L'idée que l'expérience ou le souvenir sont maximalement inclusifs n'est pas vraiment dans notre compréhension usuelle de ces termes. Par exemple, ma perception de la blancheur de la neige semble constituer une expérience à elle propre bien qu'elle soit loin d'être totalement inclusive de toutes mes données probantes. En dépit de son aspect contre-intuitif, cette façon de faire a néanmoins certains avantages. En réalité, c'est une interprétation qui découle directement de la clause sémantique de la modalité épistémique. Pour le voir, rappelons que l'interprétation ou la signification d'une proposition φ est l'ensemble, disons $[\![\varphi]\!]$, des mondes où cette proposition est vraie, lequel est déterminé par les quatre clauses présentées à la section précédente. Nous pouvons réécrire la condition de la modalité épistémique 'K' comme une condition sur la proposition connue; au lieu de

$w \Vdash K\varphi$ ssi $v \Vdash \varphi$, pour tout v tel que wRv,

nous écrirons

$w \Vdash K\varphi$ ssi $R[w] \subset [\![\varphi]\!]$,

où $R[w] = \{v \in W : wRv\}$. Ces deux manières de présenter la clause modale sont équivalentes. Une proposition φ est donc connue à w si et seulement si elle est impliquée (elle est une conséquence) de la proposition dont le contenu est $R[w]$. (Une proposition $\pi' \subset W$ est une conséquence d'une proposition $\pi \subset W$ ssi $\pi \subset \pi'$.) La proposition ayant le contenu $R[w]$ peut être vue comme la proposition maximalement spécifique que le sujet connaît à w ou, de façon équivalente, la conjonction de toutes les propositions qu'il connaît à w. Au lieu de concevoir la relation R comme une relation de discrimination ou de discernement épistémique, nous pouvons la concevoir comme une relation qui, pour chaque w, spécifie la proposition maximalement spécifique connue à w (par l'agent). Pour revenir à Lewis, en comprenant l'expérience E de manière inclusive, c'est-à-dire de manière à ce que E englobe toutes les données probantes de l'agent, le contenu de E à w peut être interprété comme étant la proposition (dont le contenu est) $R[w]$. Ce faisant, l'idée que le contenu de E puisse varier d'un monde à l'autre est plus compréhensible. Si c'est la conception de contenu d'expérience sensorielle et du souvenir qui est retenue, R sera une relation d'équivalence : $w \in R[w]$ et tous les mondes dans $R[w]$ devront avoir la même proposition maximalement spécifique connue par l'agent, donc $R[u] = R[v]$, pour tout u, $v \in R[w]$.

Passons maintenant à l'ensemble des mondes possibles qui est présupposé par cette définition. Jusqu'à quel point cet ensemble doit être inclusif est une question délicate. S'il comprend trop de possibilités, la conception de la connaissance décrite par cette définition mènera tout droit au scepticisme car plus il y a de possibilités plus il y a de chances qu'il y ait une possibilité non-éliminée où non-p. Pour éviter que l'ensemble soit trop vaste, Lewis amende la définition légèrement :

> Notre définition de la connaissance exige une clause *sotto voce*. S *sait que P* ssi les données probantes de S éliminent toute possibilité où P n'est pas le cas...psst! sauf ces possibilités qui entrent en conflit avec nos présuppositions légitimes. (Dutant & Engel 2005 : 364)

La clause *sotto voce* (« psst! sauf ces possibilités qui entrent en conflit avec nos présuppositions légitimes ») agit comme une restriction implicite agissant sur la portée du quantificateur « toute proposition », une clause qui donnera à la conception lewisienne une saveur contextualiste.[34] En fait, la conception de Lewis consiste en grande partie en une description de la manière dont cette restriction opère, et il le fait en énumérant un certain nombre de règles permettant ou non l'ignorance de mondes. Une règle dite d'actualité stipule que le monde actuel est une possibilité qui ne peut être légitimement ignorée,

[34] Lewis se défend toutefois de défendre une conception contextualiste de la *justification*.

l'ensemble des mondes possibles doit donc comprendre ce monde quelque soit le contexte. Une règle dite de croyance qui stipule que « [l']on ne peut légitimement ignorer une possibilité que le sujet croit être le cas, qu'il ait raison ou non d'y croire. » (Dutant & Engel 2005 : 368). Etc. Une fois ces règles appliquées au contexte c de l'agent, le résultat final est un sous-ensemble W_c de l'ensemble W de toutes les possibilités.

Arrêtons-nous un instant pour décrire formellement comment ce contextualisme s'articule. Nous pourrions représenter le contexte épistémique comme un paramètre qui détermine la relation d'accessibilité épistémique. Plus précisément, si C est l'ensemble des contextes, chaque $c \in C$ déterminerait une relation d'accessibilité R_c. Les énoncés épistémiques seraient évalués à des paires (w, c) à l'aide de la clause sémantique suivante pour la modalité 'K' :

$(w, c) \Vdash K\varphi$ ssi $(v, c) \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $R_c(w, v)$

L'idée de Lewis est un cas particulier de celle-ci. La présupposition est que les données probantes de l'agent déterminent une relation (universelle) R sur W, et le contexte épistémique c détermine le sous-ensemble W_c de W (de possibilités qu'on ne peut légitimement ignorer) qui vient restreindre la relation R. Au lieu de la clause ci-dessus, nous posons :

$(w, c) \Vdash K\varphi$ ssi $(v, c) \Vdash \varphi$, pour tout $v \in W_c$ tel que $R(w, v)$

Mais si nous posons $R_c = R \cap (W_c \times W_c)$, cette clause revient à la précédente.

L'interprétation de Lewis nous permet donc mettre de la chaire sur l'ossature de la clause sémantique de la modalité épistémique. Aidés par cette interprétation, nous allons examiner si la clause ne présente pas des faiblesses.[35] Ce que nous tenterons de faire dans la suite est d'exposer en quoi cette clause, et par conséquent la sémantique à laquelle elle participe, ne rend pas justice à la connaissance dans toute sa complexité. En particulier, nous chercherons à montrer que cette clause montre ses faiblesses vis-à-vis des énoncés dans les-

[35] Cette faiblesse ne dépendra pas nécessairement de l'interprétation de Lewis.

quels figurent des modalités épistémiques imbriquées, ou, pour le dire plus simplement, des énoncés rapportant des états épistémiques d'ordre supérieur; par exemple, des énoncés de la forme « S sait qu'il sait que p », « S ne sait pas qu'il ne sait pas que p », etc. La thèse est donc que la sémantique des mondes possibles est insuffisante pour adéquatement rendre compte de la connaissance d'ordre supérieur.

3.4 Le critère d'adéquation sémantique

Avant d'entrer dans la description d'un contre-exemple potentiel à la sémantique des mondes possibles, il faudrait préciser ce que l'on entend par un contre-exemple à cette sémantique; autrement dit, ce que nous cherchons sont le ou les critères d'après lesquels on peut juger si une sémantique formelle est fidèle à la signification ordinaire ou naturelle.[36] La recherche de ce critère présuppose à son tour une autre difficulté, celle de la relation entre une sémantique formelle et le langage ordinaire (ou le fragment de langage ordinaire) qu'elle cherche à modéliser, et donc nous aurons à porter notre attention sur ce point aussi.

Tout d'abord, précisons davantage ce que nous entendrons par *signification*, autant du côté du langage ordinaire que du côté du côté de la sémantique des mondes possibles. Puisque nous nous préoccuperons uniquement de la signification d'énoncés, nous nous permettrons de troquer le terme 'signification' pour le terme, un peu moins ambigüe, de 'conditions de vérité'. L'entité correspondant à la signification d'un énoncé ne nous importera que dans la mesure où elle induit des conditions de vérité pour cet énoncé. Ainsi, toute discussion sur la signification sera comprise comme une discussion sur les conditions de vérité. Pour simplifier l'expression des idées, la terminologie sui-

---

[36] Les remarques de cette section sont d'ordre méthodologique. Les arguments des autres sections n'en dépendent pas.

vante sera employée : l'expression « signification$_L$ » sera employée pour parler de la signification informelle ou préthéorique,[37] et « signification$_{MP}$ » pour parler de la signification telle qu'elle ressort de la sémantique des mondes possibles; par ailleurs, si 'φ' est un énoncé, alors '$\mathrm{CV}_L(\varphi)$' dénotera les conditions de vérité de l'énoncé 'φ' induites par la signification$_L$, et '$\mathrm{CV}_{MP}(\varphi)$' dénotera les conditions de vérité de cet énoncé induites par la signification$_{MP}$.

Ces éléments terminologiques étant posés, notre objectif à présent est de déterminer la formulation précise de la thèse sémantique que nous voulons falsifier, c'est-à-dire la thèse de l'adéquation entre la signification$_L$ et la signification$_{MP}$. Si F est une famille quelconque de formules, nous pourrions être tentés de caractériser la thèse, par rapport à cette famille, comme suit :

(AdF) $\qquad \forall\varphi \in F\,[\,\mathrm{CV}_L(\varphi) = \mathrm{CV}_{MP}(\varphi)\,]$

Une telle formulation, toutefois, ne capture malheureusement pas la thèse que nous recherchons. La raison en est simple : le signe d'égalité entre '$\mathrm{CV}_L(\varphi)$' et '$\mathrm{CV}_{MP}(\varphi)$' laisse entendre que les conditions de vérité générées par la signification$_L$ sont de la même nature ontologique que les conditions de vérité par la signification$_{MP}$, qu'elles sont comparables l'une l'autre et parfois même identiques. Ce qui laisse aussi entendre, d'une part, que nous ayons une idée claire de la nature des conditions de vérité générées par la signification$_L$ et, d'autre part, que nous les identifions à des ensembles de mondes possibles, c'est-à-dire aux entités correspondant aux conditions de vérité selon la signification$_{MP}$. Cette dernière présupposition est particulièrement douteuse, car en vérité, nous n'avons aucune idée précise des entités impliquées par la signification$_L$, donc il serait prématuré de les identifier à une sorte de construction ensembliste abstraite.

Nous touchons ici un problème délicat. Comment analyser la notion de signification comme nous souhaitons le faire, et dans le détail qu'exige une

---

[37] L'expression « signification informelle ou préthéorique » ne signifie pas nécessairement « signification du langage naturel ».

thèse d'adéquation sémantique comme (AdF), sans réellement s'engager sur la nature des entités *sémantiques*, autant du côté de la signification$_L$ que du côté de la signification$_{MP}$? Notre principal problème tient à la disparité entre les deux notions de signification : d'un côté, nous avons la signification$_L$, qui n'est pas une notion théorique bien définie et, de l'autre côté, nous avons la signification$_{MP}$, qui est une notion théorique très précise mais dont la relation aux pratiques concrètes du langage n'est pas évidente. Heureusement pour nous, il n'est pas nécessaire, afin de répondre à la question de l'adéquation sémantique, d'entrer dans ces considérations. L'idée est la suivante : ce qu'*est* la signification (formelle ou informelle) est moins important que les relations de synonymie et d'antonymie qu'elle permet d'engendrer. Autrement dit : quelque soit la nature des entités présupposées par une notion de signification (c.-à-d., la nature des entités à partir desquelles les conditions de vérité sont définies), au final, la signification et les conditions de vérité qui en résultent ont pour conséquence principale une certaine relation de similarité/dis-similarité sur les énoncés, et c'est le comportement de cette relation qui est pertinente pour la question de l'adéquation sémantique. Au lieu de nous demander si les deux notions de conditions de vérité coïncident, nous devrions regarder si les deux notions identifient et distinguent les énoncés pareillement. Suivant cette idée, nous devrions changer (AdF) pour

(AF) $\forall \varphi, \psi \in F\,[\,\mathrm{CV}_L(\varphi) = \mathrm{CV}_L(\psi) \Leftrightarrow \mathrm{CV}_{MP}(\varphi) = \mathrm{CV}_{MP}(\psi)\,]$

Nous pourrions aussi généraliser (AF) en remplaçant '=' par une certaine relation de similarité '$\sim$'.

Il y a cependant une petite difficulté avec (AF). Tout d'abord, (AF) est une contrainte un peu forte. Celui qui a déjà eu l'occasion d'observer de près la sémantique des mondes possibles sait que cette sémantique ne permet pas de distinguer des énoncés logiquement équivalents. En particulier, toutes les vérités logiques ont les mêmes conditions de vérité. Or, d'après le critère d'adéquation que nous nous sommes fixés, c'est-à-dire (AF), il s'ensuivrait que la signification$_L$ et la signification$_{MP}$ ne coïncident pas, car il est raisonnable de penser que certains énoncés logiquement équivalents n'auront pas toutes des conditions de vérité identiques selon la signification$_L$: en effet, on n'a qu'à comparer la tautologie '$p \to p$', dont la vérité nécessaire nous saute aux yeux, à la tautologie (classique) '$(p \to q) \vee (q \to p)$', dont la vérité nécessaire n'est pas immédiatement évidente. Ainsi, il semblerait que la signification$_{MP}$ échoue déjà le test de l'adéquation. Il se pourrait très bien, étant donnée la difficulté du problème, que même une sémantique modifiée sous-distingue les énoncés logiquement équivalents. De façon générale, nous ne pourrons pas nous attendre à une adéquation parfaite entre une sémantique formelle et la signification préthéorique, mais s'il y a une distinction importante qu'une sémantique formelle ne fait pas, ou si la sémantique formelle fait une distinction qui ne correspond à rien, ce sera peut-être indicateur qu'il faille la modifier.

3.5 Clark Kent et la kryptonite

Voici donc les exemples qui, je prétends, nous forcent à réexaminer la nature la clause sémantique pour la modalité.

Imaginons Clark Kent avant qu'il ne décide de devenir Superman, héro costumé combattant les forces du mal. Les pouvoirs de perception de Clark Kent sont bien sûr extraordinaires : il peut voir dans l'obscurité totale, sentir la moindre odeur, entendre le moindre bruit, et il possède une vision rayon-X lui permettant de voir à travers les objets. Clark Kent est donc un être qui connaît potentiellement beaucoup de choses sur les situations dans lesquelles il se retrouve, comparativement à un simple quidam. Malgré cela, il ignore une chose importante, et c'est les effets incapacitants de la kryptonite sur ses pouvoirs; Clark Kent n'a malheureusement pas encore fait l'expérience de cette faiblesse.

Un soir, alors qu'il patrouille en dilettante les quais, il aperçoit un homme – de toute évidence un cambrioleur – sortir précipitamment d'un immeuble, une mallette sous le bras, entrer dans une voiture et prendre fuite. L'homme n'est pas très loin mais la noirceur totale aurait rendu cet événement presqu'invisible pour n'importe qui d'autre. Grâce à ses pouvoirs, Clark Kent arrive à déterminer la taille approximative du voleur, la nature de ses accoutrements, le type de voiture qu'il conduit et aussi quelques informations sur le contenu de la mallette. C'est ainsi que Clark Kent sait que le voleur portait une cape noire, qu'il portait un masque en forme de tête de chauve-souris, qu'il mesurait environ six pieds, et qu'il conduisait une voiture couleur anthracite munie d'ailerons et d'un réacteur. Il n'a pas pu déterminer la nature exacte du contenu de la mallette, mais il est au moins parvenu à déterminer qu'il s'agissait d'un certain minerai et, après supputation géologique, il a limité les possibilités à trois choix : un alliage sophistiqué d'aluminium et de titane, du magnésium ou ... de la kryptonite.

Suivant la caractérisation de Lewis, on pourrait donc dire que les données probantes de Clark Kent éliminent un certain nombre de possibilités : d'abord, elles éliminent les possibilités où le voleur a un masque de pingouin, où il porte une cape verte, et où il conduit un tracteur. Cependant, ses données probantes laissent non-éliminées (au moins) une possibilité épistémique w où le contenu de la mallette est un alliage sophistiqué d'aluminium et de titane, (au moins) une possibilité u où le contenu est du magnésium et (au moins) une possibilité v où le contenu est de la kryptonite. Supposons que le monde actuel est la possibilité w. Bien entendu, Clark Kent ne sait pas qu'il s'agit du monde actuel; pour lui, les mondes w, u et v sont tous indiscernables et peuvent tous être le monde actuel.

Choisissons maintenant une proposition 'p' que Clark connaît, disons la proposition « Le voleur a une mallette sous le bras ». Montrons que

(*) $\quad \mathrm{CV}_{MP}(Kp) \neq \mathrm{CV}_{MP}(KKp)$.

D'après la description de l'exemple, les données probantes de Clark Kent, au monde actuel w, sont telles qu'elles éliminent tous les mondes où non-p. Donc il est vrai que Kp au monde w. Un des mondes non-éliminés par les données probantes de Clark est le monde kryptonite v. Supposons, par ailleurs, que Clark était suffisamment proche de la mallette pour être affectée par son contenu eût-elle été remplie de kryptonite. Il est donc clair, dans ce cas, que Clark n'aurait pas pu savoir que le voleur tient une mallette à v, que $\neg Kp$ est vrai à v. Mais, selon la clause modale,

$w \Vdash KKp$ ssi, pour tout x tel que wRx, $x \Vdash Kp$,

c'est-à-dire Clark sait qu'il sait que p à w si et seulement si ses données probantes éliminent tous les mondes où $\neg Kp$. Or, il se trouve que les données probantes de Clark n'éliminent pas v où $\neg Kp$, et donc $w \Vdash \neg KKp$.

Mais qu'en est-il du comportement des conditions de vérité induites par la signification informelle ou préthéorique de 'Kp' et 'KKp'? L'identité

(**) $\quad \mathrm{CV}_L(Kp) = \mathrm{CV}_L(KKp)$

tient-elle? Si nous considérons que la thèse KK est valide, alors nous considérerons évidemment que (**) tient. En particulier, Lewis, qui de toute évidence soutient cette thèse, sera commis à (**). Nous avons également vu au chapitre précédent que la thèse était également validée par une conception de la connaissance tout à fait défendable et d'une nature différente de celle de Lewis. Je prétends que même Williamson sera obligé d'admettre que (**) est vrai pour au moins une proposition 'p'. En effet, Williamson critique la validité de KK, et la fausseté de KK n'entraîne surtout pas

$\forall p(K\varphi \rightarrow \neg KKp)$.

Par ailleurs, les arguments « anti-lumineux »[38] de Williamson concernent les propositions ayant des conditions de vérité vagues (ou les propositions dont nous avons une connaissance vague), ce qui veut dire qu'ils ne s'appliquent pas aux propositions ayant des conditions de vérité non-vagues (ou les propo-

[38] La thèse KK définie la condition de « luminosité » selon Williamson.

sitions dont nous avons une connaissance non-vague). Or, il existe très certainement une proposition dans l'exemple n'ayant pas des conditions de vérités vagues qui est connue à w mais non à v. Par exemple, l'énoncé 'p' donné au paragraphe précédent (« Le voleur a une mallette sous le bras ») me semble faire l'affaire.

Si les anecdotes sur des personnages aux pouvoirs anormaux vous semblent problématiques, rassurez-vous, ils sont là pour seulement pour l'effet dramatique, le contre-exemple ne tient pas à cela. Pour vous en convaincre, prenez le cas de Kent Clark un homme ordinaire en vacances en Colombie. Lors d'une ballade en voiture dans l'arrière-pays, Kent s'égare de la route principale et tombe sur une bande d'hommes armés qui escortent un camion. Kent n'a pas le temps de faire demi-tour ou de s'expliquer avant d'être appréhendé, ligoté, déchaussé, bandé et jeté à l'arrière du camion sur une cargaison de nature végétale. Le lendemain, il se réveille dans sa voiture, garé sur l'accotement de la route principale qu'il avait quittée par mégarde la veille. Sa situation étant ce qu'elle était, il ne sait pas grand-chose de celle-ci. Il sait que le cargo sous ses pieds avait une certaine texture, il sait que ses assaillants parlaient espagnol, qu'ils étaient plus que quatre et qu'ils sentaient (étrangement) le Chanel N° 5. Il est clair que les données que Kent a en sa possession laissent beaucoup de possibilités non-éliminées. Notamment, il se peut que le cargo ait été du pavot ou encore des feuilles de coca. Supposons qu'il s'agissait de feuilles de coca. La connaissance de Kent était telle qu'elle ne pouvait discriminer entre le monde actuel, disons w, et le monde (presque pareil en tous points), disons v, où le camion transportait du pavot. Supposons par ailleurs que Kent, à son insu, est allergique au pavot et les symptômes qu'il aurait eus auraient été semblables en tous points à ceux du rhume des foins, c'est-à-dire qu'il aurait été congestionné et aurait plus ou moins perdu son sens de l'odorat. Si 'p' est la proposition « Mes assaillants portent du Chanel N°5 », nous retrouvons exactement l'argument décrit plus haut. C'est-à-dire $w \Vdash Kp$, $v \Vdash \neg Kp$, wRv et donc $w \Vdash \neg KKp$.

En exploitant la notion de *fine-tuning*, nous pouvons donner une version plus radicale encore de l'argument. Cette notion provient de la cosmologie et réfère au fait que seules certaines valeurs très spécifiques des constants fondamentales de la physique permettraient à la vie intelligente de se développer dans l'univers, d'où l'idée que notre présent univers est le produit d'un ajustement très minutieux (« fine-tuning ») de ces constantes :

> "Fine-tuning" refers to the supposed fact that there is a set of cosmological parameters or fundamental physical constants that are such that had they been very slightly different, the universe would have been void of intelligent life. For example, in the classical big bang model, the early expansion speed seems fined-tuned. Had it been very slightly greater, the universe would have expanded too rapidly and no galaxies would have formed. There would only have been a very low density hydrogen gas getting more and more dispersed as time went by. In such a universe, life could not evolve. Had the early expansion been very slightly less, then the universe would have recollapsed very soon after the big bang, and again there would have been no life. Our universe, having just the right conditions for life, appears to be balanced on a knife's edge. (Bostrom 2002)

À première vue, le « fine-tuning » semble endosser une vision théiste de l'origine de l'univers. En réalité, il s'explique bien par un argument de sélection qui, dans le contexte présent, est nommé « le principe anthropique » : si seules certaines valeurs très spécifiques des paramètres cosmologiques permettent à la vie intelligente de se développer, il ne faut pas s'étonner que nous habitions un univers qui possède ces caractéristiques très particulières car nous n'aurions jamais pu observer un univers qui ne les possédait pas. Le principe anthropique est contesté par plusieurs, et parmi ses défenseurs on ne s'entend pas toujours sur sa signification et sa portée, mais ceci est sans importance pour la présente discussion.

Nous supposons donc qu'une variation infime de la valeur des constantes physiques fondamentales aurait pu faire en sorte que nous n'existions pas. Considérons maintenant le cas d'un physicien S avant une expérience qui déterminerait la valeur de certaines de ces constantes, dont une constante k en particulier. Avant l'expérience, on sait seulement que la valeur de k se trouve dans un certain intervalle. Il existe donc (au moins) un monde possible pour chacune des valeurs possibles du paramètre k. À l'instar du « fine-tuning », certaines de ces valeurs déterminent des mondes où il n'existe aucune vie intelligente (à l'insu du physicien), ce sont donc *a fortiori* des mondes où le physicien n'existe pas. Si w est le monde actuel et v un monde où la valeur de k est délétère à la vie de S, nous avons donc que dans v il n'y a aucun S, donc S ne peut connaître quoique ce soit dans v. Choisissez donc n'importe quelle proposition « p » connue dans le monde actuelle par S, et vous aurez que la formule '$Kp \rightarrow KKp$' est fausse à w. (On suppose ici que dans un monde où l'agent n'existe pas, la relation d'accessibilité ne discrimine rien, c'est-à-dire qu'il s'agit de la relation totale $W \times W$.)

On pourrait contester les contre-exemples plus haut en soutenant qu'ils ne sont pas fidèles à l'interprétation de la connaissance de Lewis. Le passage de Lewis que nous avons discuté plus haut stipulait clairement que tout monde où le contenu de l'expérience sensorielle et du souvenir de l'agent (c'est-à-dire des données probantes de l'agent) était différent du contenu qu'ils ont dans le monde actuel était éliminé d'emblée. Bien que la caractérisation de cette notion de contenu nous ait présenté des difficultés, nous avons vu qu'il était plausible de l'identifier à $R[w]$ (si l'agent est au monde w), la proposition maximalement spécifique que l'agent connaît à w. Exiger que les données probantes aient le même contenu (dans les possibilités non-éliminées) revenait donc à exiger que R soit une relation d'équivalence. Il est clair que les trois scénarios que nous avons envisagés à la section précédente viole cette condition : Clark Kent et Kent Clark n'ont pas les mêmes capacités épistémiques (le même contenu épistémique associé à leurs données probantes) à w qu'à v, et le physicien n'a évidemment pas la même connaissance dans le monde actuel que dans un monde où il n'existe pas. Mais si l'interprétation de Lewis n'est pas touchée par ces contre-exemples, c'est par stipulation et non par explication, en ce sens qu'elle ne nous explique pas comment réconcilier le fait que Clark Kent ignore sa faiblesse à la kyptonite avec le fait qu'il sache qu'il sait.

3.6 La composition des mondes possibles

Nous entreprenons maintenant une réflexion en profondeur sur la nature d'un monde possible qui nous mènera en temps et lieu vers une compréhension de la mécanique sous-jacente aux contre-exemples de la section précédente. Pour amorcer cette réflexion, nous considérerons les situations épistémiques de certains agents très simples.

Soit S_{A} un agent qui est daltonien rouge-vert : S_{A} ne distingue pas les objets rouges des objets verts. Pour simplifier, nous supposons que S_{A} est parfaitement omniscient sur tous les autres aspects de la réalité. Sa relation d'accessibilité donc donnée par :

$wR_{\mathrm{A}}v$ ssi v est identique à w sauf peut-être pour les couleurs rouge et vert

Pour donner plus de substance à la définition de cette relation, spécifions davantage les objets qui peuplent l'univers de S_{A} et desquels il a une connaissance. Supposons que cet univers contienne un certain nombre d'objets o d'un ensemble $\mathbf{O}$ qui peuvent exemplifier ou non des propriétés primitives P (pas forcément unaires) d'un certain ensemble $\mathbf{P}$, et supposons qu'un monde soit entièrement déterminé par les propriétés que les objets exemplifient à celui-ci. Si P_{V} est la propriété VERT et P_{R} est la propriété ROUGE, le profil épistémique de S_{A} se laisse décrire par l'équivalence suivante :

$wR_{\mathrm{A}}v$ ssi $\forall o_1,\ldots, o_n \forall P \neq P_{\mathrm{V}}, P_{\mathrm{R}} \, [\, w \Vdash P(o_1,\ldots, o_n) \Leftrightarrow v \Vdash P(o_1,\ldots, o_n) \,]$

Les capacités de discrimination de S_A sont telles qu'elles ne différencient pas le monde w du monde v si tous les objets exemplifient les mêmes propriétés dans w et v sauf peut-être les propriétés VERT et ROUGE.

Supposons que S_A sache qu'il est daltonien rouge-vert, et supposons qu'un autre agent S_B soit identique à S_A sauf que, à la différence de S_A, il ne sache pas qu'il est daltonien; en fait, pour simplifier, supposons que S_B ne sache pas s'il est daltonien rouge-vert ou daltonien bleu-jaune. Comment pouvons-nous exprimer cette ignorance de S_B via sa relation d'accessibilité? Cette relation d'accessibilité, disons R_B, devra refléter le fait que les seuls mondes que S_B ne distingue pas sont : (i) soit des mondes qui ne diffèrent que par le rouge ou le vert, ou (ii) soit des mondes qui ne diffèrent que par le daltonisme de S_B (rouge-vert ou bleu-jaune), ou (iii) les deux. Afin de donner une définition de R_B similaire en esprit à celle de R_A, il faudra qu'il y ait dans **P** les propriétés (unaires) P_{DRV} et P_{DBJ}, représentant les propriétés ÊTRE-DALTONIEN-ROUGE-VERT et ÊTRE-DALTONIEN-BLEU-JAUNE, qui sont vraies d'un agent si cet agent est daltonien rouge-vert et daltonien bleu-jaune respectivement. Par ailleurs, il faudra que S_B fasse partie des objets de **O**. L'idée serait donc de définir la relation R_B en termes de ces nouvelles propriétés : wR_Bv ssi

$$\forall o_1,\ldots,o_n \forall P \neq P_V, P_R, P_{DRV}, P_{DBJ} \, [\, w \Vdash P(o_1,\ldots, o_n) \Leftrightarrow v \Vdash P(o_1,\ldots, o_n) \,]$$

Cette manière de comprendre les capacités épistémiques de S_B est fidèle aux conditions (i)-(iii).

L'introduction des propriétés P_{DRV} et P_{DBJ} (comme propriétés primitives à tout le moins) comporte certaines difficultés. La plus importante, à ce que je puis en juger, tient au fait que rien n'empêche que S_B jouisse de la propriété P_{DBJ} à un monde où sa relation d'accessibilité épistémique correspond au daltonisme rouge-vert. Autrement dit, rien n'empêche S_B d'exemplifier la propriété ÊTRE-DALTONIEN-BLEU-JAUNE tout en étant daltonien rouge-vert (et non daltonien bleu-jaune). Tout ceci s'illustre formellement par compatibilité de

$w \Vdash \neg K[P_{\mathrm{DRV}}(S_{\mathrm{B}}))]$ et

$w \Vdash KKp,$

où 'p' est « L'objet o est jaune ». D'un côté, la vérité de '$\neg K[P_{\mathrm{DRV}}(S_{\mathrm{B}})]$' à w entraîne qu'il existe un monde v accessible depuis w où

$v \Vdash P_{\mathrm{DBJ}}(S_{\mathrm{B}})$

Mais d'un autre côté, la vérité de 'KKp' à w signifie que

$v \Vdash Kp,$

en dépit du fait que S_{B} soit daltonien bleu-jaune à v. Pourquoi S_{B} conserve-t-il sa capacité à discerner le jaune du bleu dans un monde où il est censé être daltonien bleu-jaune? Autrement dit, comment pourrions-nous faire en sorte que la formule

$P_{\mathrm{DBJ}}(S_{\mathrm{B}}) \rightarrow \neg Kp$

soit valide?

La réponse passe selon moi par une refonte du concept de monde possible. Si nous adoptons la conception de Lewis (1986) en matière de mondes possibles, notamment l'idée que ce sont des entités primitives indécomposables, la tâche risque d'être difficile. Ainsi, pour les besoins de cette discussion, nous adopterons momentanément une conception légèrement différente, une conception dite *combinatoire* des mondes possibles que l'on peut faire remonter au *Tractatus* de Wittgenstein.

L'ontologie tractarienne est basée sur la notion d'état de choses, ou de fait possible (1.1, 2), lesquels sont les constituants atomiques du monde : « La totalité des états de choses subsistants est le monde » (2.04). Le caractère atomique des états de choses est réitéré dans l'idée que la proposition élémentaire correspond à un état de choses (4.21), et la vérité d'une telle proposition est indépendante de la vérité de toute autre proposition élémentaire : « un signe qu'une proposition est élémentaire, c'est qu'aucune proposition élémentaire ne peut être en contradiction avec elle » (4.211). Un monde possible, dans la mouvance tractarienne, peut être conçu comme une collection d'états de choses (subsistants) : « Le monde est complètement décrit par la donnée de toutes les propositions élémentaires, plus la donnée de celles qui sont vraies et de celles qui sont fausses » (4.26). La conception de la probabilité que Wittgenstein développe dans les passages subséquents repose d'ailleurs sur cette conception combinatoire des mondes (et sur l'idée que chaque combinaison est équiprobable). Cette théorie de la possibilité est dite *combinatoire* (cf. Armstrong 1989), car elle conçoit une possibilité, ou un monde possible, comme une combinaison d'états de choses ou de faits « atomiques ». L'ensemble des mondes possibles est ainsi déterminé par la collection des états de choses et certaines règles de combinaison (chez Wittgenstein, aucune limitation n'est posée sur la combinaison). D'une certaine manière, Hume avait la même conception du possible : il supposait que toute combinaison d'idées (simples) non-contradictoire, c'est-à-dire qu'il est possible d'entretenir, définissait une possibilité.

L'état de choses, ou le fait possible, est donc à l'avant plan de cette ontologie, et l'on a tôt fait de remarquer qu'une ontologie de ce genre évitait l'opposition traditionnelle entre nominalisme et universalisme, du fait qu'elle ne prenait ni pour les objets ni pour les propriétés (universaux). Malgré cela, Brian Skyrms (1981) considère néanmoins que l'ontologie tractarienne est nominaliste dans l'esprit, car :

> its properties and relations are all properties and relations *of* individuals and its facts all are all *first-order* facts: facts 'about' individuals. There are no higher-order facts: facts consisting of relations between relations and objects or relations between relations and relations. In particular, there are no causal relations between relations and individuals. (Skyrms 1981, *in* Armstrong 1989 : 149)

Pour Wittgenstein, il n'y a pas d'état de chose qui corresponde à des propriétés d'états de choses, et c'est d'ailleurs la prémisse de sa critique de la causalité (5.136, 5.1361). Mais Armstrong (1983, 1989, 1997) préfère l'existence d'états de choses d'ordre supérieur à l'abandon de la causalité, et prétend que la négation – qui est moins controversée que la causalité – ne saurait être définie sans un tel fait d'ordre supérieur correspondant à la totalité des faits (cf. Armstrong 1997 : 134-5).

Un monde possible correspond donc à une collection (maximale) de faits élémentaires du premier ordre, et par conséquent détermine seulement des propriétés du premier ordre. Cette conclusion ne semble pas seulement affecter la conception combinatoire de la possibilité; en effet, quelque soit notre conception de la possibilité, un monde possible *à la Kripke* détermine seulement la valeur de vérité des propositions élémentaires.[39] La nécessité n'est pas une propriété élémentaire, sa définition fait appel à l'ensemble de toutes les possibilités, et il en va de même pour la connaissance. Ce qui nous ramène à aux propriétés P_{DRV} et P_{DBJ}. Cette discussion rend clair le fait qu'elles sont des propriétés d'ordre supérieur et non des propriétés du premier ordre (comme « être bleu » ou « être jaune »). Si nous admettons l'existence de propriétés d'ordre supérieur, comment pouvons-nous les intégrer à une analyse en termes de mondes possibles tout en préservant la hiérarchie de propriétés?

L'idée est une généralisation du cadre que nous avons utilisé pour représenter la dépendance contextuelle de la connaissance à la section 3.3. Au lieu d'évaluer les énoncés à des mondes w, nous les évaluions à des couples (w, c), où c était un paramètre qui représentait le contexte épistémique. Au lieu de concevoir les éléments $c \in C$ comme un ensemble de paramètres de contextes

---

[39] Cette affirmation peut surprendre car la valeur de vérité de *toute* formule est déterminée à un monde possible, pas seulement la valeur de vérité des variables propositionnelles. Ce que je cherche à souligner ici est que si nous ne disposons pas de la position de ce monde par rapport aux autres mondes possibles – position qui est donnée par la relation d'accessibilité et qui est extrinsèque au monde – alors ce monde ne détermine que la valeur de vérité des propositionnelles élémentaires. Ce qui permet au monde possible de déterminer les valeurs de vérité des formules non-élémentaires est la relation d'accessibilité, et celle-ci ne fait pas partie du monde possible.

épistémiques, nous pouvons le voir tout simplement comme un ensemble de profils épistémiques possibles. C'est donc le couple (w, c) qui détermine une possibilité et non w : la première composante, w, précise les propriétés élémentaires et la deuxième, c, les propriétés épistémiques. Mais nous ne devons pas nous arrêter là, car la couple (w, c) ne détermine rien sur la connaissance d'ordre supérieure de l'agent. En effet, si w est le monde actuel et si c détermine la relation R_{A}, la paire (w, c) décrit aussi bien la situation de S_{A} que celle de S_{B}, elle ne précise pas quel type de connaissance ou d'ignorance l'agent a par rapport à son daltonisme ou, de manière générale, à sa connaissance d'ordre un (sa connaissance des propriétés élémentaires). Pour exprimer cette connaissance, il fait introduire des profils épistémiques d'ordre deux, lesquels correspondent à des relations d'accessibilité sur les profils c. Ainsi, la situation de S_{A} serait (w, c, d) où le profil d ne confond pas les profils daltoniens rouge-vert avec les profils daltoniens bleu-jaune, et la situation de S_{B} serait (w, c, d') où d' confond ces deux types de profils.

Le fait d'avoir des composantes d'ordre supérieur dans les possibilités nous permet d'avoir des propositions dont les extensions comprennent des profils épistémiques. Par exemple, si l'extension de la proposition 'p_{DRV}' comprend seulement les profils d'ordre un qui sont daltoniens rouge-vert, si l'extension de 'p_{DBV}' comprend seulement les profils d'ordre un qui sont daltoniens bleu-jaune, et si

p_{R} = L'objet o est rouge (et non vert)

p_{B} = L'objet o' est bleu (et non jaune)

alors les formules suivantes :

$p_{\text{DRV}} \wedge p_{\text{R}} \rightarrow \neg K p_{\text{R}}$

$p_{\text{DBJ}} \wedge p_{\text{R}} \rightarrow K p_{\text{R}}$

$p_{\text{DRV}} \wedge p_{\text{B}} \rightarrow K p_{\text{B}}$

$p_{\text{DBJ}} \wedge p_{\text{B}} \rightarrow \neg K p_{\text{B}}$

seront valides. En particulier, si nous supposons que 'p_R' et 'p_B' sont vrais à w, nous aurons que

$(w, c, d) \Vdash \neg Kp_R \wedge Kp_B$

$(w, c, d') \Vdash \neg Kp_R \wedge Kp_B$

pour la connaissance d'ordre un, et

$(w, c, d) \Vdash Kp_{DRV}$

$(w, c, d') \Vdash \neg Kp_{DRV} \wedge \neg Kp_{DBJ}$

pour la connaissance d'ordre deux.

La question est maintenant de savoir comment généraliser la clause modale pour des formules qui ne sont pas des propositions élémentaires (d'ordre un ou deux). Pour des formules 'φ_1' qui sont d'ordre un[40] ou pour des formules 'φ_2' *strictement* d'ordre deux,[41] les clauses sont immédiates :

$(w_0, w_1, w_2) \Vdash K\varphi_1$ ssi $(x, w_1, w_2) \Vdash \varphi_1$, pour tout x tel que $R(w_1)(w_0, x)$

$(w_0, w_1, w_2) \Vdash K\varphi_2$ ssi $(w_0, y, w_2) \Vdash \varphi_2$, pour tout y tel que $R(w_2)(w_1, y)$

Là où il y a matière à interprétation est pour une formule d'ordre deux comme '$KK\varphi$', laquelle n'est pas strictement d'ordre deux. Deux options saillantes se présentent à nous et elles rappellent la distinction entre interprétation transparentiste et interprétation agrippéenne de la connaissance d'ordre supérieur (discutée au chapitre précédent). Selon l'interprétation transparentiste, nous pouvons voir les conditions de vérité de '$KK\varphi$' comme :

$(w_0, w_1, w_2) \Vdash KK\varphi$ ssi $(x, w_1, w_2) \Vdash K\varphi$, pour tout x tel que $R(w_1)(w_0, x)$

Cette interprétation maintient le même profil épistémique d'ordre deux w_1 dans l'évaluation de la connaissance. Nous avons alors, comme prévu, que

$(w, c, d) \Vdash KKp_B$

$(w, c, d') \Vdash KKp_B$

---

[40] Une formule dont l'extension est un sous-ensemble de W.

[41] Une formule dont l'extension est un sous-ensemble de C.

et ce, malgré le fait que S_B ne connaisse pas la nature de son daltonisme sous le profil d'. Selon l'interprétation agrippéenne, nous pouvons concevoir ces conditions comme :

$(w_0, w_1, w_2) \Vdash KK\varphi$ ssi $(w_0, y, w_2) \Vdash K\varphi$, pour tout y tel que $R(w_2)(w_1, y)$

L'agent ne peut connaître 'φ', dans la conception agrippéenne, à moins de connaître 'φ' sous tous les profils épistémiques y laissés non-éliminés par son profil d'ordre trois w_2. Nous verrons plus loin comment les clauses sémantiques se formulent de manière générale.

3.7 Retour sur les contre-exemples

En apparence plus complexes, les cas Clark Kent et Kent Clark peuvent être subsumés aux précédents assez simplement. Le monde kryptonite où Clark Kent perd ses capacités épistémiques surhumaines et le monde pavot où Kent Clark perd son odorat sont des mondes qui pêchent par excès dans leur volonté de représenter à la fois des faits élémentaires (circonstances du vol dans le premier cas et circonstances de l'enlèvement dans l'autre) et des faits épistémiques d'ordre supérieur. Le monde kryptonite v où Clark Kent perd ses pouvoirs devrait plutôt être représenté comme une paire (v_0, v_1), où v_0 détermine les faits élémentaires du premier ordre et v_1 détermine ses capacités épistémiques (même chose pour Kent Clark). Bien que Clark Kent ne connaisse pas sa situation épistémique précise w_1, parce qu'il ne la distingue pas de v_1, sa connaissance d'ordre un à partir du monde actuel (w_0, w_1) reste déterminée par w_1, elle ne fait pas intervenir v_1. Ce serait ainsi une façon de comprendre l'idée de Lewis selon laquelle le contenu de l'expérience et du souvenir doit être identique à celui du monde actuel : son profil épistémique actuel est celui qui compte pour déterminer sa connaissance actuelle et non pas un profil épistémique possible non-actuel. Clark Kent sait donc que le voleur a une mallette sous le bras et : (a) selon la clause transparentiste de la connaissance d'ordre supérieur, Clark Kent sait qu'il sait que le voleur a une mallette sous le bras (en dépit de son ignorance des effets de la kryptonite); mais (b) selon la clause agrippéene, il ne sait pas qu'il le sait (à cause de cette ignorance). Quelle interprétation de '$KK\varphi$' est la bonne? À ça, nous n'avons pas de réponse.

À défaut de pouvoir donner une réponse définitive à cette question, nous pouvons au moins montrer comment subsumer les contre-exemples de Williamson à l'interprétation agrippéenne de la section précédente. Rappelons que Williamson attribuait la propriété suivante à la connaissance de la connaissance (la propriété de luminosité) :

(SK) Si $\alpha \Vdash KKp$ alors $\beta \Vdash Kp$, pour toute situation β telle que $\alpha N\beta$.

Rappelons de même que, si nous définissons 'V' de la manière suivante :

(V) $\alpha \Vdash Vp$ ssi $\beta \Vdash p$, pour toute situation β telle que $\alpha N\beta$,

alors nous pouvons réécrire (SK) comme :

(*) $KKp \rightarrow VKp$

Au lieu de voir la formule 'VKp' dans (*) comme une simple conséquence de 'KKp', nous pourrions la voir comme constitutive ou équivalente à 'KKp', en ce sens qu'elle donnerait précisément les conditions de vérité de 'KKp'. Quelles sont donc les conditions de vérité 'VKp'? Pour les décrire, il nous faudra non seulement l'ensemble A des « situations »[42] et la relation binaire N définie sur celui-ci, mais il nous faudra également un ensemble W de mondes possibles avec lesquels nous interpréterons les modalités épistémiques (d'ordre un). La suggestion est la suivante : prendre chaque élément α de A comme un profil épistémique d'ordre un, c'est-à-dire comme une entité qui détermine une relation d'accessibilité épistémique sur W, et prendre N comme une relation d'accessibilité épistémique qui traduit une ignorance d'ordre deux, soit une ignorance que l'agent manifeste à l'égard de ses profils épistémiques d'ordre un. Cette suggestion reflète bien l'approche *épistémiciste* de Williamson

[42] L'emploi de ce terme n'a rien de technique. Il ne s'agit pas situations telles que les conçoivent Barwise & Perry 1981.

(1994) qui conçoit le vague comme le produit de la connaissance, ou plutôt de l'ignorance, et non pas comme le produit des conditions de vérité des propositions élémentaires (non-épistémiques), ces dernières ayant toujours une extension bien délimitée. Ceci étant dit, les conditions de vérité de 'KKp' seraient donc

$(w, \alpha) \Vdash KKp$ ssi $(w, \beta) \Vdash Kp$, pour tout β tel que $\alpha N \beta$,

où

$(w, \beta) \Vdash Kp$ ssi $(v, \beta) \Vdash p$, pour tout v tel que $wR_\beta v$,

et où R_β est la relation d'accessibilité de l'agent dans la situation β.

Nous avons commencé ce chapitre par une discussion sur l'évolution de la sémantique pour les énoncés dans lesquels figurent des attitudes propositionnelles. Après une discussion sur l'interprétation épistémique de la sémantique des mondes possibles, nous avons cherché à montrer que cette sémantique pouvait être incomplète, c'est-à-dire inadéquate, pour des énoncés dans lesquels figurent des modalités ayant une « action » d'ordre supérieur. Nous avons esquissé les grandes lignes d'une sémantique pouvant représenter cette action, une sémantique dans laquelle une possibilité se comprend comme un n-tuple de « mondes possibles », chaque monde déterminant des propriétés d'un ordre spécifique. La formalisation rigoureuse de ces idées viendra au chapitre 5, mais leur application à la compréhension de la connaissance d'ordre supérieur reste embryonnaire. Toutefois, nous retrouvons en appendice à cette thèse une analyse de la manière dont on peut définir la clause modale pour 'K' de manière générale. Au prochain chapitre, nous proposerons une solution au paradoxe de Fitch qui exploitera encore une fois l'idée de modalité d'ordre supérieur, mais cette fois dans un contexte multimodal.

Chapitre 4
Les vérités inconnaissables et le paradoxe de Fitch

> **fitch**, v. To seek sound arguments for positions no one holds. "In his last article he really went fitching." Hence, *fitch*, n. Such an argument, and *fitchous*, adj. describing such arguments (e.g. a fitchous circle), also *fitchy*, adj. "His argument struck me as fitchy."
>
> *The Philosophical Lexicon*

L'arbre qui tombe dans la forêt existe même s'il n'est pas perçu. N'en déplaise à Berkeley et ses élucubrations parfois fort élégantes visant à nous convaincre du contraire, il reste que peu de gens sains d'esprit contestent ce truisme : mieux vaut supposer que le monde est indifférent à notre perception que de soutenir l'idée qu'*esse est percipi*.[43] Mais jusqu'à quel point le monde est-il indépendant de nous, de notre perception et de notre manière de le concevoir? C'est une chose d'affirmer que le monde poursuit son cours pendant que nous dormons, mais c'en est une autre de croire en l'existence d'entités qui échappent, qui ont toujours échappé et qui échapperont toujours à l'observation ou à la cognition. Existerait-t-il un arbre dont la chute est, par essence ou par principe, imperceptible? Existerait-t-il une vérité qui, par essence ou par principe, est inconnaissable? Ici, le consensus disparaît. D'un côté, le réaliste répond oui et, de l'autre, l'antiréaliste répond non. L'opposition entre ces deux écoles (s'il s'agit bien seulement de deux écoles) tient à la manière de concevoir la relation entre la vérité et la connaissance : pour le réaliste, les deux notions sont indépendantes, mais pour l'antiréaliste, la notion de vérité est conditionnée épistémiquement (cf. Dummett 1978, 1991; Wright : 1992). La

[43] *Principes de la connaissance humaine*, Berkeley.

manière dont s'articule la dépendance entre vérité et connaissance pour ce dernier est une affaire compliquée, et nous éviterons d'entrer dans ces détails, mais il semble qu'il soit minimalement commis à l'idée que toute vérité est en principe connaissable, une thèse portant parfois le nom de *vérificationnisme*.

Entre alors en scène un paradoxe vieux d'environ un demi-siècle : en supposant très peu de choses sur les propriétés logiques de la connaissance et de la possibilité, nous pouvons démontrer que la thèse du vérificationnisme entraîne que toute vérité est actuellement connue, une conséquence qui cohabite mal avec l'humilité épistémique sous-jacente à l'antiréalisme. Ce paradoxe porte le nom de paradoxe de Fitch. Le défi que pose celui-ci au vérificationnisme est d'envergure. Depuis son introduction, plusieurs ont tenté d'identifier ce qui semblait constituer une faille énorme d'une thèse épistémologique qui, jusque là, semblait défendable et plausible. Même ceux qui n'adhèrent pas forcément à cette thèse pourront trouver surprenantes les conséquences qu'elle entraîne sous des hypothèses aussi faibles.[44] Peu sont ceux ayant autant contribué à la littérature sur ce paradoxe que Williamson, il ne faudra donc pas s'étonner que son interprétation fasse autorité. Selon lui, le paradoxe établit des limites intrinsèques à notre connaissance, des limites qui sont structurelles car « elles ne dépendent pas des limitations contingentes de nos capacités computationnelles ou de la structure causale contingente de l'espace-temps[,] [e]lles existent dès que nous ignorons tout court » (Williamson 2000 : 270, ma traduction).

[44] Je dirais même que la plupart des réactions au paradoxe sont de cette nature, car le vérificationnisme, dans cette formulation du moins, est voué à un échec certain de toute manière avec l'addition progressive d'hypothèses logiques et mathématiques. En particulier, si l'agent connaît l'arithmétique du premier ordre et s'il ne connaît au plus que ce qui est prouvable (comme il semble raisonnable de le penser), alors il existe un énoncé qu'il ne pourra jamais connaître par le (premier) théorème d'incomplétude de Gödel. Nous pourrions faire valoir une chose analogue avec la physique quantique (et le principe d'incertitude).

Nous nous donnons pour objectif dans ce chapitre de proposer une nouvelle solution à ce paradoxe. Après une revue ciblée de l'abondante littérature sur la question, nous défendrons l'idée que le paradoxe de Fitch est dû à une déficience dans l'expressivité du langage modal utilisé pour traduire formellement le vérificationnisme. Notre solution s'inscrira dans la lignée de celles proposées par Edgington (1985), Rabinowicz & Segerberg (1994) et Kvanvig (1995). Ces solutions ont en commun l'observation que le paradoxe est produit par une certaine ambiguïté de portée modale. Nous verrons ce que cela signifie en temps et lieux.

4.1 La dérivation du paradoxe

Dans le contexte du paradoxe de Fitch, nous représentons formellement le vérificationnisme, c'est-à-dire la thèse selon laquelle toute vérité est connaissable ou *peut* être connue, de la manière suivante :

(*Ver*) $\forall p(p \to \Diamond Kp)$

Le fait qu'elle implique la connaissance *possible* et non seulement la connaissance est déterminant pour sa vraisemblance. Nul n'oserait défendre la version « actualiste » de cette thèse, parfois appelée vérificationnisme fort ou extrême, et qui s'écrit comme

(*VerF*) $\forall p(p \to Kp)$

Malheureusement pour le vérificationnisme (faible), il se trouve que (*VerF*) peut être dérivé de (*Ver*) en employant des principes logiques à première vue très faibles. Une situation qui porte le nom de paradoxe de Fitch.

Les principes logiques nécessaires à la dérivation de ce « paradoxe » tombent sous trois catégories selon qu'ils concernent (1) les constantes logiques à proprement parler (c.-à-d. les constantes logiques non-modales), (2) la modalité métaphysique ou (3) la modalité épistémique. Les principes de la première catégorie comprennent les définitions classiques des constantes logiques ou, si l'on préfère, les définitions intuitionnistes[45] de ces constantes avec la règle d'élimination de la double négation :

$(\neg\neg)$ $\quad \neg\neg\varphi \vdash \varphi$

La deuxième catégorie comprend la règle et la validité suivantes :

(Nec) $\quad$ Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \Box\varphi$

$(\text{dual}_{\rightarrow})$ $\quad \vdash \Box\neg\varphi \rightarrow \neg\Diamond\varphi$

Et la troisième,

(dist) $\quad \vdash K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$

(T) $\quad \vdash K\varphi \rightarrow \varphi$

Le principe (Nec) – la règle de nécessitation – signifie que toute validité logique est métaphysiquement nécessaire; $(\text{dual}_{\rightarrow})$ est une direction de la dépendance normalement stipulée entre nécessité et possibilité; (dist) est une validité de toute logique modale normale; et (T) – la factivité – traduit la condition qu'il n'y a de connaissance que du vrai. Ces principes sont extrêmement faibles : mis à part (T), ils font tous partie de la logique modale de base. En ce qui concerne (T), il est difficile de contester que la connaissance doive respecter cette propriété.

Une des dérivations les plus générales du vérificationnisme fort du vérificationnisme (faible) procède ainsi :

1.	$q \wedge \neg Kq$	Hypothèse	
2.	$(q \wedge \neg Kq) \rightarrow \Diamond K(q \wedge \neg Kq)$	1, (*Ver*) et $\forall$-élim	(1)
3.	$\Diamond K(q \wedge \neg Kq)$	1, 2 et $\rightarrow$-élim	(1)
4.	$K(q \wedge \neg Kq)$	Hypothèse	
5.	$Kq \wedge K\neg Kq$	4, (dist) et $\rightarrow$-élim	(4)
6.	Kq	5, $\wedge$-élim	(4)
7.	$K\neg Kq$	5, $\wedge$-élim	(4)

[45] Parmi celles-ci, les règles d'introduction et d'élimination pour la quantification propositionnelle (ces règles sont obtenues directement des règles habituelles de quantification en effectuant les changements appropriés).

8.	$\neg Kq$	7, (T) et $\rightarrow$-élim	(4)
9.	$\bot$	6, 8 et $\bot$-intro	(4)
10.	$\neg K(q \wedge \neg Kq)$	4-9, et $\neg$-intro	
11.	$\Box\neg K(q \wedge \neg Kq)$	10, (Nec)	
12.	$\neg\Diamond K(q \wedge \neg Kq)$	11, (dual$_{\rightarrow}$) et $\rightarrow$-élim	
13.	$\bot$	3, 12 et $\bot$-intro	(1)
14.	$\neg(q \wedge \neg Kq)$	1-13, $\neg$-intro	
15.	$q \rightarrow \neg\neg Kq$	14, logique prop. int.	
16.	$q \rightarrow Kq$	15, logique prop. int. et $(\neg\neg)$	
17.	$\forall p(p \rightarrow Kp)$	16, $\forall$-intro	

Par « logique prop. int. » aux étapes 15 et 16, nous entendons la logique propositionnelle intuitionniste. Toutes les étapes de cet argument sont intuitionnistes sauf pour le passage de 15 à 16 qui nécessite la règle classique $(\neg\neg)$. Sans celle-ci, nous n'arrivons qu'à la conclusion :

16'. $\forall p(p \rightarrow \neg\neg Kp)$ 15, $\forall$-intro

Mentionnons que ce paradoxe est parfois présenté autrement comme l'incompatibilité entre le vérificationnisme faible (*Ver*) et le principe dit de modestie épistémique :

(*Mod*) $\exists p(p \wedge \neg Kp)$

Il se trouve que (*Mod*) est classiquement équivalent à la négation de (*VerF*), ce qui signifie que (*Ver*) et (*Mod*) sont inconsistants.

Sans vouloir court-circuiter cette présentation, mentionnons dès maintenant là où nous trouvons que la source de ce paradoxe se situe. Notre diagnostique est que la formule problématique est

(*) $\Diamond K(q \wedge \neg Kq)$,

celle-là même qui se trouve à l'étape 3 de la dérivation et qui est produit par l'instanciation de (Ver) par '$q \wedge \neg Kq$'. Nous prétendons que la logique modale conventionnelle ne permet pas de distinguer les deux occurrences de 'K' dans (*), faisant en sorte qu'elles reçoivent la « même » interprétation et mènent conséquemment à une contradiction. Or, ces deux modalités devraient recevoir des interprétations différentes, car la deuxième occurrence de 'K' provient de la formule '$q \wedge \neg Kq$' dans laquelle la modalité 'K' est interprétée comme la connaissance *actuelle* (en effet, la formule '$q \wedge \neg Kq$' est une forme schématique de la modestie épistémique portant sur la connaissance *actuelle*). C'est seulement après la substitution de '$q \wedge \neg Kq$' dans (*Ver*) que cette occurrence de 'K' devient une connaissance *possible*. Pour résoudre ce paradoxe, il faudrait trouver un moyen de maintenir cette interprétation actuelle 'K' après la substitution dans (i).

4.2 Les réponses au paradoxe

Le paradoxe de Fitch a fait l'objet d'une quantité prodigieuse d'analyses visant tantôt à identifier une prémisse fautive dans l'argument plus haut et tantôt à démontrer que le paradoxe pouvait réapparaître sans cette prémisse. Dans cette section, nous chercherons à donner un aperçu global des différentes stratégies de résolution afin de mieux situer la solution que nous proposerons plus loin. Toute présentation sommaire étant par défaut et par nécessité coupable d'omissions, nous invitons le lecteur avide de détails et de références supplémentaires à consulter Brogaard & Salerno (2009), qui constitue un des recensements les plus complets de cette question et duquel nous nous inspirons fortement ici.

Nous pouvons regrouper les réponses au paradoxe en trois catégories : les réponses qui préconisent des révisions aux principes logiques (modaux ou non), celles qui imposent des restrictions syntaxiques à (*Ver*), et enfin celles qui apportent des modifications sémantiques au langage dans lequel est formulé (*Ver*). Nous les visiterons tour à tour. De manière générale, nous pouvons juger la qualité d'une solution à sa capacité d'empêcher des formes connexes du paradoxe de réapparaître. Nous verrons qu'il s'agit là souvent du test déterminant que plusieurs solutions ne passent pas. L'idée est que, si la solution en question bloque réellement le problème à sa source, elle devra alors bloquer des problèmes similaires également. Sinon, ce sera peut-être le signe qu'elle est *ad hoc*.

4.2.1 Révision logique

Il y a naturellement plusieurs types de révisions logiques possibles. Nombreux sont ceux qui ont suggéré le passage à la logique intuitionniste, ce qui se traduit par l'élimination de la règle ($\neg\neg$), pour résoudre l'impasse. Comme nous l'avons vu, sans cette règle, nous n'arrivons qu'à dériver (16') qui est, selon certains du moins, tout à fait acceptable sur le plan intuitionniste. Aucune stratégie, à ce que je sache, ne propose de réviser les principes logiques de la modalité métaphysique, mais plusieurs proposent de réviser les principes logiques de la modalité épistémique. Nous verrons toutefois que cette dernière approche n'est pas si fructueuse car le paradoxe réapparaît souvent sous une forme modifiée même si les contraintes supplémentaires sur K sont observées. Commençons par cette approche.

Si ce sont les prémisses entourant la modalité épistémique que nous choisissons de modifier, les possibilités se limitent à remettre en cause (dist) ou (T), ou les deux à la fois. L'abandon de (dist) est envisageable si, par exemple, nous épousons une conception de la connaissance comme celle proposée par Nozick (1981). Nozick caractérise la connaissance comme une croyance qui « suit la vérité à la trace », c'est-à-dire comme une croyance qui est corrélée à la vérité de ce dont elle est une croyance. Si '$\Box\!\!\rightarrow$' représente la conditionnelle contrefactuelle (de Stalnaker-Lewis, par exemple) et si 'B' représente la modalité de croyance, alors '$B\varphi$' suit la vérité de 'φ' à la trace si et seulement si

(BTr) $(\neg\varphi \Box\!\!\rightarrow \neg B\varphi) \wedge (\varphi \Box\!\!\rightarrow B\varphi)$

Dans l'idiome de la sémantique des conditionnelles contrefactuelles de Lewis, (BTr) se traduit par

Dans tous les mondes proches du monde actuel où non-φ, l'agent ne croit pas que φ; et dans tous les mondes proches du monde actuel où φ, l'agent croit que φ.

La connaissance chez Nozick est définie comme une croyance vraie qui suit la vérité à la trace :

$(Noz) \quad K\varphi := \varphi \wedge B\varphi \wedge (\neg\varphi \Box\!\!\rightarrow \neg B\varphi) \wedge (\varphi \Box\!\!\rightarrow B\varphi)$

Pour que (Noz) satisfasse (dist), il faut en particulier que l'inférence suivante soit valide :

$$\begin{array}{rc} & \varphi_1 \Box\!\!\rightarrow B\varphi_1 \\ & \varphi_2 \Box\!\!\rightarrow B\varphi_2 \\ \hline \therefore & (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Box\!\!\rightarrow B(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \end{array}$$

Mais il est bien connu que la conditionnelle contrefactuelle ne préserve pas de telles inférences en général. Il se pourrait donc qu'une telle conception de la connaissance ne soit pas compromise par le paradoxe.

Malheureusement, Williamson (1993) nous montre qu'une modalité épistémique n'a pas forcément besoin de satisfaire (dist) pour être victime du paradoxe. Si nous acceptions (Ver), nous dit-il, il est difficile de refuser le principe connexe suivant :

$(Ver^*) \quad \forall p_1,\dots, p_n(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow \Diamond(Kp_1 \wedge \dots \wedge Kp_n))$,

et il se trouve que $(VerF)$ se déduit de (Ver^*) sans recours à (dist). En effet, nous n'avons qu'à remplacer les étapes 2 à 12 dans la dérivation plus haut par

2'.	$(q \wedge \neg Kq) \rightarrow \Diamond(Kq \wedge K\neg Kq)$	1, (Ver^*) et $\forall$-élim	(1)
3'.	$\Diamond(Kq \wedge K\neg Kq)$	1, 2' et $\rightarrow$-élim	(1)
4'.	$Kq \wedge K\neg Kq$	Hypothèse	
5'.	Kq	4', $\wedge$-élim	(4')
6'.	$K\neg Kq$	4', $\wedge$-élim	(4')
7'.	$\neg Kq$	6', (T) et $\rightarrow$-élim	(4')

8'.	$\bot$	5', 7' et $\bot$-intro	(4')
9'.	$\neg(Kq \wedge K\neg Kq)$	4'-8', et $\neg$-intro	
10'.	$\Box\neg(Kq \wedge K\neg Kq)$	9', (Nec)	
11'.	$\neg\Diamond(Kq \wedge K\neg Kq)$	10', (dual$_\rightarrow$) et $\rightarrow$-élim	

Si une forme similaire du paradoxe peut être donnée sans faire appel à (dist), il semble que (dist) ne soit pas le principe en cause.

Il reste donc le principe de factivité. Nous pourrions penser qu'une conception de la connaissance basée sur l'acceptation rationnelle n'endosserait pas toujours (T), bien qu'une telle conception ne soit pas très intuitive. Une telle manœuvre aurait pour effet de bloquer le passage de 7 à 8 (et le passage de 6' à 7' ci-dessus). Mais nous pouvons néanmoins retrouver le paradoxe si ajoutons les conditions suivantes pour 'K' :

(D) $\neg K\bot$

(K$\bot$) $K\varphi \wedge K\neg\varphi \rightarrow K\bot$

(KK) $K\varphi \rightarrow KK\varphi$

La condition (D) stipule qu'on ne peut pas connaître de contradiction; ceci n'empêche pas qu'il soit possible de connaître une fausseté, pour autant que cette fausseté ne soit pas une contradiction. C'est évidemment un affaiblissement de (T). La condition (K$\bot$) affirme qu'une contradiction est connue dès qu'une proposition et sa négation sont connues; c'est un cas particulier de la réciproque de (dist). Et la condition (KK), appelée principe d'introspection positive, affirme qu'un agent sait ce qu'il sait. Des trois conditions, (KK) est peut-être la plus contestée,[46] mais les trois conditions demeurent néanmoins des propriétés communément attribuées à la connaissance. Si la modalité épistémique satisfait ces trois principes, nous retrouvons l'antinomie sans faire appel à (T). En effet, il suffit de remplacer les étapes 4-10 par

4''.	$K(q \wedge \neg Kq)$	Hypothèse	
5''.	$Kq \wedge K\neg Kq$	4'', (dist) et $\rightarrow$-élim	(4'')

[46] Cf. chapitre 2 de cette thèse.

6''. Kq	5'', $\wedge$-élim	(4'')
7''. KKq	6'', (KK) et $\rightarrow$-élim	(4'')
8''. $K\neg Kq$	5'', $\wedge$-élim	(4'')
9''. $KKq \wedge K\neg Kq$	7'', 8'' et $\wedge$-intro	(4'')
10''. $K\bot$	9'', (K$\bot$) et $\rightarrow$-élim	(4'')
11''. $\neg K\bot$	(D)	
12''. $\bot$	10'', 11'' et $\bot$-intro	(4'')
13''. $\neg K(q \wedge \neg Kq)$	4''-12'', et $\neg$-intro	

Encore une fois, le fait que le paradoxe resurgisse avec une modification mineure des prémisses semble suggérer que (T) n'est pas au cœur de ce paradoxe.

Examinons à présent l'approche intuitionniste de ce problème, celle qui consiste à abandonner le principe logique ($\neg\neg$). Un intuitionniste de la trempe de Michael Dummett est particulièrement interpellé par le paradoxe de Fitch.[47] S'il existe un thème central et fédérateur dans la philosophie de Dummett, c'est bien l'idée que toute vérité est connaissable, que l'idée même d'une vérité inconnaissable est absurde. Mais l'humilité épistémique que prêche l'antiréalisme est sévèrement ébranlée par les conséquences téméraires de (*Ver*). Heureusement que l'antiréalisme prêche aussi l'adoption de la logique intuitionniste, laquelle, nous l'avons montré plus haut, ne permet pas la dérivation de (*VerF*). Pourrait-on dire par conséquent que l'antinomie est complètement évitée par ce simple choix de logique? Oui et non. Oui, parce que si l'antiréaliste choisit de représenter la modestie épistémique par

(*Mod**) $\neg\forall p(p \rightarrow Kp)$

aucune contradiction ne s'ensuivra (Williamson 1988), (16') n'étant pas équivalent à la négation de (*Mod**). Non, parce qu'il existe des formes modifiées du paradoxe qui ne nécessitent pas l'utilisation de la règle ($\neg\neg$).

[47] Göran Sundholm, en discussion, a défendu l'idée que le paradoxe n'affectait pas l'antiréalisme car la formulation même de (*Ver*), selon lui, présupposait un concept de vérité réaliste.

En effet, Percival (1990) suggère que l'antiréaliste-intuitionniste qui défend (*Mod**) pourra difficilement contester la validité du principe

(*Und*) $\exists p(\neg Kp \wedge \neg K\neg p)$,

lequel est une variation sur l'idée de modestie épistémique. Or, (*Mod**) est peut-être inoffensif, mais il en va tout autrement pour (*Und*). La conclusion (18) entraîne, en logique intuitionniste, la proposition

(*) $\forall p(\neg Kp \rightarrow \neg p)$

car

$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{Int} \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

$\neg\neg\neg\varphi \vdash_{Int} \neg\varphi$.

Mais ceci permet alors la dérivation suivante :

1.	$\neg Kq \wedge \neg K\neg q$	Hypothèse	
2.	$\neg Kq$	1, $\wedge$-élim	(1)
3.	$\neg K\neg q$	1, $\wedge$-élim	(1)
4.	$\neg Kq \rightarrow \neg q$	(*) et $\forall$-élim	
5.	$\neg K\neg q \rightarrow \neg\neg q$	(*) et $\forall$-élim	
6.	$\neg q$	2, 4 et $\rightarrow$-élim	(1)
7.	$\neg\neg q$	3, 5 et $\rightarrow$-élim	(1)
8.	$\bot$	6, 7 et $\bot$-intro	(1)
9.	$\exists p(\neg Kp \wedge \neg K\neg p)$	Hypothèse (*Und*)	
10.	$\bot$	1-8, 9 et $\exists$-élim	(9)
11.	$\neg$(*Und*)	1-10, et $\neg$-intro	

Nous pourrions bloquer la dérivation de cette contradiction en remplaçant la thèse (*Und*) par la thèse suivante :

(*Und**) $\neg\forall p(Kp \vee K\neg p)$

Les thèses (*Und*) et (*Und**) sont équivalentes seulement en logique classique, et $\neg$(*Und*) et (*Und**) sont parfaitement compatibles en logique intuitionniste. Ainsi, le vérificationniste intuitionniste pourrait maintenir la cohérence de sa position.

Encore une fois, la réapparition du paradoxe laisse croire que ($\neg\neg$) n'est pas l'unique responsable de l'antinomie fitchéenne (ou pas du tout responsable du paradoxe).

4.3 Révisions syntaxiques du vérificationnisme

Une autre méthode de résolution consiste à remettre en question le fait que (*Ver*) soit une formalisation correcte de la thèse du vérificationnisme. Celui qui adopte cette méthode devra d'abord montrer en quoi (*Ver*) exprimerait incorrectement le vérificationnisme, il devra proposer ensuite une nouvelle formulation du vérificationnisme et montrer comment elle échappe aux conséquences fâcheuses de l'ancienne. La plupart des tentatives de ce genre peuvent être caractérisées comme des « stratégies de restriction », d'après la typologie de Brogaard et Salerno (2009). Nous trouvons cette terminologie malheureuse cependant, car elle laisse entendre que la formulation originale (*Ver*) exprime le « vrai » vérificationnisme tandis que la nouvelle formulation, obtenue par « restriction » de la thèse originale, représenterait seulement un compromis. Il me semble que cette manière de caractériser l'approche des Edgington, Segerberg, Rabinowicz, Rückert, Kvanvig, etc. ne reflète pas leurs intentions fidèlement, mais nous suivrons néanmoins cette convention.

Commençons par exposer sommairement les stratégies dites de « restriction syntaxique ». Les principaux auteurs pouvant être classés sous cette rubrique sont Tennant et Dummett. Tennant (2001) propose une solution qui ressemble à plusieurs égards aux solutions classiques des paradoxes ensemblistes, lesquelles consistaient à imposer une restriction sur la substitution dans le principe fautif pour empêcher une instance problématique de voir le jour : chez Russell, cette stratégie produisit la contrainte de prédicativité; chez Zermelo, le passage de l'axiome de compréhension à l'axiome de séparation; et chez Tarski, une restriction sur la convention T. Tennant veut restreindre la portée du quantificateur dans (*Ver*) en permettant seulement son instanciation par des formules de la bonne sorte. Lesquelles? Par des formules *cartésiennes*, où

(*Cart*) φ est cartésien ssi $K\varphi \nvdash \bot$,

c'est-à-dire si et seulement si la formule $K\varphi$ n'entraîne aucune contradiction. La saveur de vérificationnisme que Tennant défend est donc

(*VerC*) $\varphi \to \Diamond K\varphi$, pour φ cartésien

Cette version du vérificationnisme ne peut être exprimée qu'en forme schématique car la contrainte est syntaxique.

Il est évident que Tennant évite le paradoxe avec cet amendement à (*Ver*), car toute formule de la forme '$q \wedge \neg Kq$' n'est pas cartésienne. Il reste à nous convaincre cependant que la restriction en question est motivée par autre chose que des considérations *ad hoc*. Il est en effet difficile de comprendre pourquoi l'on restreindrait (*Ver*) abstraction faite du paradoxe. Williamson, parmi d'autres, le lui ont reproché; celui-ci prétend même donner un exemple de formule cartésienne qui permettrait à la dérivation fitchéenne de réapparaître (Williamson 2000b).

Un autre exemple de restriction syntaxique nous vient de Dummett, laquelle est mieux motivée et cadre élégamment avec l'antiréalisme. Il suggère de prendre (*Ver*) comme une clause de base pour une conception vérificationniste/antiréaliste de la vérité. Au lieu de s'appliquer à toutes les propositions, (*Ver*) ne s'appliquerait qu'à une certaine classe d'énoncés :

($\mathrm{V_B}$) $\mathrm{Vr}(p)$ ssi $\Diamond Kp$, pour p un énoncé de base

Pour les énoncés plus complexes, la vérité est définie récursivement suivant des clauses bien connues :

($\mathrm{V}_\wedge$) $\mathrm{Vr}(\varphi$ et $\psi)$ ssi $\mathrm{Vr}(\varphi) \wedge \mathrm{Vr}(\psi)$

($\mathrm{V}_\vee$) $\mathrm{Vr}(\varphi$ ou $\psi)$ ssi $\mathrm{Vr}(\varphi) \vee \mathrm{Vr}(\psi)$

($\mathrm{V}_\to$) $\mathrm{Vr}($si φ, alors $\psi)$ ssi $\mathrm{Vr}(\varphi) \to \mathrm{Vr}(\psi)$

($\mathrm{V}_\neg$) $\mathrm{Vr}($ce n'est pas le cas que $\varphi)$ ssi $\neg\mathrm{Vr}(\varphi)$

($V_\forall$) Vr(tout est φ) ssi $\forall x$Vr(φ)

($V_\exists$) Vr(il existe un φ) ssi $\exists x$Vr(φ)

où les connecteurs à droite sont interprétés de manière intuitionniste. Évidemment, cette manière de présenter le vérificationnisme évite la forme originale du paradoxe, mais la stratégie réussit-elle à bloquer les résurgences?

Brogaard et Salerno (2002) illustre comment, sous certaines hypothèses, cette version du vérificationnisme échoue. Pour faire fonctionner leur argument, il faut supposer tout d'abord que '$\Box$' et 'K' satisfont les conditions

($\Box$KK) $\Box(K\varphi \rightarrow KK\varphi)$

(clos) $\Box(\varphi \rightarrow \psi), \Diamond\varphi \vdash \Diamond\psi$

Si '$\Box$' est une modalité normale et 'K' satisfait (KK), ces deux conditions seront automatiquement satisfaites. Soit dit en passant, il y a matière à penser qu'un antiréaliste, Dummett ou autre, sera commis à (KK), en ce sens qu'il défend une conception de la connaissance que l'on pourrait qualifier d'internaliste et l'internalisme valide (KK). Nous supposerons, par ailleurs, que le qualificatif « être un énoncé de base » a la propriété suivante :

(base) Si 'φ' est un énoncé de base alors '$K\varphi$' est un énoncé de base

Soit 'q' est un énoncé de base, nous pouvons alors déduire :

1.	$q \wedge \neg Kq$	Hypothèse	
2.	q	$\wedge$-élim	(1)
3.	$\Diamond Kq$	2, (V_B)	(1)
4.	$\Box(Kq \rightarrow KKq)$	($\Box$KK)	
5.	$\Diamond KKq$	3, 4 et (clos)	(1)
6.	Kq	5, (V_B) et (base)	(1)
7.	$\neg Kq$	1, $\wedge$-élim	(1)
8.	$\bot$	6, 7 et $\bot$-intro	(1)
9.	$\neg(q \wedge \neg Kq)$	1-8, $\neg$-intro	
10.	$q \rightarrow \neg\neg Kq$	9, log. prop. int.	

L'argument n'étant possible que pour les énoncés de base, nous ne pouvons introduire de quantificateur universel aux étapes 9 ou 10, mais nous pouvons néanmoins exprimer schématiquement le caractère général de la conclusion comme suit :

$\neg(\varphi \wedge \neg K\varphi)$

$\varphi \rightarrow \neg\neg K\varphi$

pour tout énoncé de base 'φ'. Ce qui nous ramène aux mêmes difficultés dont nous avons parlé plus haut concernant la représentation de la modestie épistémique et des antinomies pouvant découler de (*Und*).

4.4 Révisions sémantiques

Par « révision sémantique » nous entendons une stratégie de résolution qui cherche à modifier le langage dans lequel est écrite la thèse du vérificationnisme. L'idée sous-jacente est que le vérificationnisme n'est pas correctement représenté par (*Ver*) et que sa réécriture dans un langage enrichi approprié fera disparaître le paradoxe. Nous recenserons ici dans le détail des analyses d'Edgington, de Rabinowicz & Segerberg, et de Kvanvig, car c'est de celles-ci que nous nous inspirons pour notre propre proposition.

4.4.1 Edgington et la connaissance actuelle

La solution de Dorothy Edgington au paradoxe de Fitch se distincte donc des solutions présentées plus haut par son refus de considérer (*Ver*), ou une restriction syntaxique de (*Ver*), comme une formalisation correcte du vérificationnisme. Edgington prétend que le paradoxe est dû à une confusion de portée dans les modalités, et elle cherche à souligner cette confusion en considérant la version temporelle de (*Ver*) suivante :

(*VerT*) $\forall p(p \rightarrow CKp)$, où '$C$' est la modalité temporelle 'à un certain moment dans le temps'. (Autrement dit, si 'F' et 'P' sont les modalités temporelles « à un moment dans le futur » et « à un moment dans le passé », '$C\varphi$' est équivalent à '$P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$'.) La modalité '$C$' a les mêmes propriétés que '$\Diamond$', et produit par conséquent le même paradoxe; si nous arrivons à dépister les rouages du paradoxe dans leur forme temporelle, nous arriverons vraisemblablement à les dépister sous leur forme originale. Or, ($VerT$) exprime l'idée suivante :

(1) Si 'p' est vrai au temps t_0, alors il existe un moment t_1 où 'Kp' est vrai au temps t_1

Si '$q \wedge \neg Kq$' est vrai au temps t_0, nous pouvons déduire de (1) qu'il existe un moment t_1 tel que

(2) '$K(q \wedge \neg Kq)$' est vrai à t_1

Mais (2) a deux interprétations saillantes :

(2.1) Il est connu à t_1 que '$q \wedge \neg Kq$' est vrai à t_1

(2.2) Il est connu à t_1 que '$q \wedge \neg Kq$' est vrai à t_0

L'interprétation (2.1) coïncide avec ($VerT$), mais le vérificationnisme (temporel) exprime en réalité (2.2). En effet, le vérificationnisme (temporel) stipule que, si une proposition est vraie au temps t, il existe un temps futur, passé ou présent t' où il est su que la proposition est vraie dans la situation t (sans '$'$'). Il ne dit *pas* que, si une proposition est vraie au temps t, il existe un temps futur, passé ou présent t' où il est su que la proposition est vraie au temps t' (avec '$'$'). Il nous faut donc réécrire la thèse ($VerT$) pour qu'elle corresponde à (2.2) plutôt que (2.1).

Pour ce faire, Edgington introduit la modalité « maintenant », notée par 'N' dans le langage objet, avec laquelle elle propose la formalisation suivante du vérificationnisme (temporel) :

($VerT^*$) $\forall p(Np \rightarrow CKNp)$

Autrement dit, ($VerT^*$) affirme que si 'p' est actuellement vrai il existe un temps t où il sera su que 'p' est vrai *maintenant* (et non pas à t). Il est assez simple de vérifier que (*VerT**) bloque les étapes cruciales du paradoxe. En effet, lorsque (*VerT**) est instancié par la formule '$q \wedge \neg Kq$', le conséquent est de la forme '$CKN(q \wedge \neg Kq)$', et celui-ci ne permet aucunement la dérivation de la forme temporelle de (*VerF*).

Pour transposer cette analyse à (*Ver*), c'est-à-dire pour passer de la temporalité à la possibilité, il faut utiliser une opération d'actualité '@' au lieu de l'opération 'N'. L'opération '@' signifie intuitivement « dans le monde actuel », et sa signification est comprise de la manière suivante dans la sémantique des mondes possibles :

$w \Vdash @\varphi$ si et seulement si $w_0 \Vdash \varphi$,

où w_0 est le monde actuel. En d'autres termes, la valeur de vérité de la formule '$@\varphi$' à n'importe quel monde est tout simplement la valeur de vérité de 'φ' au monde actuel w_0. Selon Edgington, la thèse du vérificationnisme s'écrirait donc comme :

(*VerA*) $\forall p(@p \rightarrow \Diamond K@p)$

Cette formulation du vérificationnisme permet d'éviter le paradoxe pour les mêmes raisons que (*VerT**).

Il se trouve toutefois que cette reformulation souffre d'un défaut d'envergure produit par le comportement surprenant de l'opération d'actualité. Celle-ci annule l'effet des autres modalités qui la précède : si vous évaluez l'énoncé '$\Diamond K@p$', vous verrez que la seule chose qui importe à son évaluation est la valeur de vérité de p au monde actuel. En effet,

$v \Vdash \Diamond K@p$ ssi il existe u tel que $vR_m u$ et $u \Vdash K@p$

ssi il existe u tel que $vR_m u$ & [pour tout t, $uR_e t \Rightarrow u \Vdash @p$]

ssi il existe u tel que $vR_m u$ & [pour tout t, $uR_e t \Rightarrow w \Vdash p$]

ssi $w \Vdash p$

ssi $v \Vdash @p$

Ces équivalences tiennent à condition que les relations d'accessibilité métaphysique R_m et épistémique R_e soient non triviales pour chaque monde (ce qui veut dire que $R_m[w]$ et $R_e[w] \neq \varnothing$ pour tout w, où $R[w]$ est l'ensemble des points v accessibles depuis w), et cette condition est remplie pour les modalités en question. De façon générale, quelque soit la concaténation de modalités (de losanges ou de carrés), disons CONC, si les relations d'accessibilité correspondant aux modalités dans la concaténation CONC sont non-triviales, nous aurons aussi que

$v \Vdash \text{CONC } @p$ ssi $v \Vdash @p$ ssi $w \Vdash p$

Cette propriété logique de '@' compromet donc l'adéquation de (*VerA*).

Le problème se constate aussi en examinant informellement les conditions de vérité de l'énoncé « 'p' est vrai au monde w' ». (*VerA*) sous-entend que la proposition (possiblement) connue est non pas 'p' mais « 'p' est vrai au monde actuel ». Mais en quoi consiste le savoir que 'p' est vrai au monde actuel, et en quoi diffère-t-il du savoir que p tout court? Dans la proposition

(3) S sait que 'p' est vrai au monde actuel,

le terme « actuel » apparaît dans la portée de la modalité « S sait que ». Il est donc légitime de se demander si le terme « actuel » est en portée étroite ou en portée étendue. Je prétends que si « actuel » est en portée étroite alors (3) a les mêmes conditions de vérité que

(3.1) S sait que p

Et si « actuel » est en portée étendue, alors (3) a les mêmes conditions de vérité que

(3.2) 'p' est vrai au monde actuel

Voici pourquoi. Une interprétation informelle que l'on peut donner à la relation d'accessibilité épistémique R_e est que $R_e(w, v)$ tient si et seulement si l'agent S ne distingue pas le monde v du monde w lorsque le monde w est le monde actuel. Ainsi, R_e capture l'actualité comme l'agent la conçoit. Plus l'agent confond des mondes non-actuels avec le monde actuel, moins il connaît; et réciproquement, moins il confond de mondes avec le monde actuel, plus il connait. À la limite, s'il distingue parfaitement le monde actuel des autres mondes, il a une connaissance parfaite du monde actuel. Interpréter le terme « actuel » en portée étendue revient à supposer que l'agent a une connaissance parfaite de l'actualité, rendant « S sait que p au monde actuel » équivalent à « 'p' est vrai au monde actuel ». Interpréter le terme « actuel » en portée étroite toutefois est tout simplement redondant, car dans ce cas « actuellement p » signifierait tout simplement que p dans tous les mondes que S ne distingue pas du monde actuel. Dans le premier cas, (*VerA*) représente mal le vérificationnisme, tandis que dans le deuxième, nous retrouvons exactement les mêmes difficultés qu'auparavant.

4.4.2 Rabinowicz & Segerberg et la notion d'actualité

Rabinowicz & Segerberg (1994) considèrent qu'Edgington identifie correctement les causes du paradoxe et la bonne formalisation de la thèse du vérificationnisme, mais ils estiment que les difficultés que rencontre l'opération d'actualité dans l'interprétation de (*VerA*) sont dues à une sémantique fautive. Ils proposent donc un cadre sémantique novateur permettant d'exprimer une notion d'actualité qui n'annule pas l'effet des autres modalités. Leur solution n'est donc pas de nature syntaxique, car ils préservent (*VerA*) comme formulation précise du vérificationnisme, elle est entièrement sémantique, en ce sens qu'elle concerne seulement la manière dont sont interprétées les connecteurs (et conséquemment la logique de ces connecteurs).

Cette sémantique a la particularité de comporter deux dimensions, c'est-à-dire que les formules sont évaluées à des paires : la première coordonnée détermine un monde de perspective, et la seconde, un monde de référence. L'idée est de comprendre la valeur de vérité d'une formule comme dépendant à la fois du monde sur lequel elle porte et du monde par rapport auquel elle est évaluée. Rabinowicz & Segerberg utilise la coordonnée de « référence » pour déterminer les propositions élémentaires et la coordonnée de « perspective » pour déterminer l'actualité.

Un modèle dans la sémantique bidimensionnelle est une structure de la forme $< W, \Pi, N, E, val >$ où

W est un ensemble de mondes;

$\Pi \subset \wp(W \times W)$ est l'ensemble des propositions admissibles;

$N \subset W \times W$ est la relation d'accessibilité métaphysique;

$E \subset (W \times W) \times (W \times W)$ est la relation d'accessibilité épistémique; et

val : Prop $\rightarrow \wp(W) \cap \Pi$ est une valuation

La relation d'accessibilité métaphysique N ne dépend que des mondes de référence, mais la relation d'accessibilité épistémique E permet une dépendance entre les deux dimensions. Les conditions de vérité des connecteurs sont données par les clauses :

$(w, v) \Vdash p$ ssi $v \in val(p)$

$(w, v) \Vdash @\varphi$ ssi $(w, w) \Vdash \varphi$

$(w, v) \Vdash \Box\varphi$ ssi, pour tout v', si vNv' alors $(w, v') \Vdash \varphi$

$(w, v) \Vdash K\varphi$ ssi, pour tout (w', v'), si $(w, v)E(w', v')$ alors $(w', v') \Vdash \varphi$

La clause pour l'actualité montre bien l'utilité de la première composante : retenir quel monde est considéré comme actuel.

Afin de mieux comprendre les idées derrières la solution bidimensionnelle de Rabinowicz & Segerberg, arrêtons-nous un instant pour examiner comment cette sémantique fut employée pour comprendre, d'une part, les énoncés indexicaux temporels (cf. Almog *et al* 1989) et, d'autre part, les vérités contingentes *a priori* (cf. Stalnaker 1999, Davies & Humberstone 1980, Garcia-Carpintero & Macia 2006). Par la même occasion, cette exposition permettra au lecteur d'observer les différences entre le multi-dimensionalisme que nous introduisons dans cette thèse et le bidimensionalisme tel qu'il existe dans la littérature.

Bi-dimensionalité et indexicaux

Une *expression indexicale* est une expression dont la signification ou la dénotation est précisée par le contexte d'énonciation. Par exemple, les pronoms personnels « je », « tu », « nous », etc., les adverbes de temps « maintenant », « aujourd'hui », « demain », « hier », etc. et les adverbes de lieu « ici » et « là » sont des expressions dont les dénotations dépendent du contexte dans lequel ils sont énoncés. Si Obama dit

(4) Je suis ici maintenant

dans le bureau ovale de la Maison Blanche le 6 juin 2010 alors (4) signifie

(4.1) Barack Obama est dans la Maison Blanche le 6 juin 2010

Mais si Neil Armstrong dit (4) sur la Lune le 21 juillet 1969 alors (4) signifie

(4.2) Neil Armstrong est sur la Lune le 21 juillet 1969.

Pour emprunter à la terminologie frégéenne, un énoncé comme « Je suis ici maintenant », dans lequel se trouvent des expressions indexicales, se comporte comme un concept « insaturé » et ce, tant et aussi longtemps que ses arguments ne sont pas précisés.

Laissons de côté pour l'instant les indexicaux ayant trait aux personnes et aux lieux, et concentrons-nous seulement sur les indexicaux temporels. Considérons les énoncés :

(5.1) Obama sera à Washington demain

(5.2) Obama sera à Washington demain ou le lendemain

(5.3) Obama sera à Washington bientôt

(5.4) Obama sera à Washington vendredi

Les trois premiers énoncés sont indexicaux mais pas le dernier. Nous pouvons concevoir (5.1)-(5.3) sur le plan sémantique comme des fonctions qui associent une valeur de vérité au temps ou au contexte d'énonciation. Si T est un ensemble d'instants temporels ordonnés par une certaine relation '$\prec$', pour chaque temps dénonciation $t_0 \in T$, nous pouvons interpréter les opérations temporelles dans une structure $< T, t_0, \prec >$ de la manière suivante :

$t \Vdash P\varphi$ ssi il existe t' tel que $t' \prec t$ et $t' \Vdash \varphi$

$t \Vdash F\varphi$ ssi il existe t' tel que $t \prec t'$ et $t' \Vdash \varphi$

$t \Vdash N\varphi$ ssi $t_0 \Vdash \varphi$

Par ailleurs, si chaque instant temporel t a un successeur t^+, nous pouvons interpréter « demain », noté '*Dm*', et « lendemain », noté '*Ld*', comme :

$t \Vdash Dm\,\varphi$ ssi $t_0^+ \Vdash \varphi$[48]

$t \Vdash Ld\,\varphi$ ssi $t^+ \Vdash \varphi$

Enfin, si t_1 est l'instant correspondant à vendredi, alors nous pouvons interpréter « vendredi », noté '*Vd*', comme :

$t \Vdash Vd\,\varphi$ ssi $t_1 \Vdash \varphi$

Les énoncés (5.1)-(5.4) peuvent alors être réécrits de la manière suivante :

(5.1) *Dm*(Obama est à Washington)

(5.2) *Dm*(Obama est à Washington) ∨ *Ld*(*Dm*(Obama est à Washington))

(5.3) *F*(Obama est à Washington)

(5.4) *Vd*(Obama est à Washington)

Mais la notion de temps d'énonciation et le rôle particulier des indexicaux ne sont pas correctement représentés dans ce type de modèle. Le fait que les expressions « demain » et « vendredi » soient interprétées de la même manière (à un instant de T près) est révélateur d'une certaine lacune; chaque modèle n'ayant qu'un seul temps d'énonciation, ce dernier est un nom d'instant temporel comme un autre. Cette limitation empêche notamment que nous puissions avoir une modalité qui quantifierait sur les temps d'énonciation (et non les temps de référence). Par exemple, la validité temporelle

(6) Demain est toujours le lendemain d'aujourd'hui

pourrait être représentée schématiquement par

(6.1) $Dm\,\varphi \leftrightarrow Ld\,N\varphi$, pour tout φ

mais rien dans (6.1) ne correspond à « toujours » qui joue le rôle d'une modalité quantifiant sur les temps d'énonciation t_0.

---

[48] C'est, du moins, la clause pour « demain » en portée étendue.

Une façon de corriger cette situation, et c'est ici qu'entrent en scène les modèles bidimensionnels, est d'introduire une nouvelle dimension dont la fonction est exclusivement de tenir compte du temps d'énonciation, l'autre étant exclusivement consacrée au temps de « référence ». Un modèle bidimensionnel de cette trempe est basé sur un ensemble temporel T (ordonné par '$\prec$') mais les formules sont évaluées à des couples temporels (s, t). Les clauses sémantiques pour les modalités temporelles non-indexicales utilisent seulement la deuxième coordonnée, tandis que les clauses pour les modalités indexicales utilisent les deux :

$(s, t) \Vdash F\varphi$ ssi il existe t' tel que $t \prec t'$ et $(s, t') \Vdash \varphi$

$(s, t) \Vdash P\varphi$ ssi il existe t' tel que $t' \prec t$ et $(s, t') \Vdash \varphi$

$(s, t) \Vdash N\varphi$ ssi $(s, s) \Vdash \varphi$

$(s, t) \Vdash Dm\,\varphi$ ssi $(s, s^{+}) \Vdash \varphi$

$(s, t) \Vdash Ld\,\varphi$ ssi $(s, t^{+}) \Vdash \varphi$

L'opération « vendredi » se distingue clairement dans cette sémantique des opérations « maintenant » ou « demain » :

$(s, t) \Vdash Vd\; p$ ssi $(s, t_1) \Vdash p$

Par ailleurs, si nous introduisons une modalité '$\circledast$' portant sur le temps d'énonciation et dont la signification est donnée par la clause :

$(s, t) \Vdash \circledast\varphi$ ssi $(s', t) \Vdash \varphi$, pour tout s',

alors (6) peut être représenté schématiquement par

(6.2) $\circledast(Dm\,\varphi \leftrightarrow Ld\,N\varphi)$, pour tout φ

Bi-dimensionalité et le contingent a priori

Regardons à présent du côté de Davies & Humberstone (1980) afin d'étudier leur application du cadre bi-dimensionnel pour exprimer la notion de vérité contingente a priori. Rappelons qu'une *vérité contingente a priori* est une vérité contingente (c'est-à-dire non-nécessaire) qui est connaissable sans recours à l'expérience. Kripke (1982) est le premier à avoir explicitement soutenu que de telles vérités existaient, mais avant lui, Gareth Evans a défendu une notion de « nécessité faible » qui s'apparente de très près à la vérité contingente a priori de Kripke. Examinons celle-ci à présent. Définissons « Vercingétorix » comme étant le nom de l'individu qui a inventé le fil à beurre. Nous ne voulons pas dire que « Vercingétorix » est une description définie, seulement que la description qui accompagne l'introduction de ce nom sert à fixer la référence de « Vercingétorix ». Evans cherche ensuite à attribuer deux propriétés conflictuelles à « Vercingétorix » : d'une part, (a) « Vercingétorix » se comporte comme un nom propre et a, par conséquent, une désignation rigide, mais d'autre part, (b) il se comporte comme une description définie dans la mesure où nous pouvons savoir sans consulter l'expérience, c'est-à-dire a priori, que Vercingétorix est celui qui a inventé le fil a beurre. Cet exemple a des airs de famille avec celui du mètre étalon de Kripke. La référence de « mètre étalon » est une certaine tige de platine dans le monde actuel : (a) « mètre étalon » est rigide en ce sens qu'il désigne la tige dans d'autres mondes possibles, mais (b) le nom a l'aspect d'une description définie parce que nous savons qu'il mesure un mètre sans le mesurer. Considérons donc les deux propositions

(7) Vercingétorix est l'inventeur du fil à beurre

(8) Le mètre étalon mesure un mètre

On prétend que (7) et (8) sont des exemples de vérités contingentes a priori. D'abord, parce que (7) et (8) sont contingentes, l'individu dénoté par Vercingétorix aurait pu ne pas être l'inventeur du fil à beurre comme le mètre étalon aurait pu être plus court ou plus long qu'il ne l'est dans le monde actuel. Ensuite, parce (7) et (8) sont des vérités a priori : il est a priori vrai que l'inventeur du fil à beurre est l'inventeur du fil à beurre et que le mètre étalon est de la même longueur que lui-même.

Comment représenter les énoncés (7) et (8) et leur statut modal dans le formalisme bidimensionnel? Nous utiliserons la première coordonnée pour représenter le monde actuel, le monde où les référence des expressions « Vercingétorix » et « mètre étalon » sont fixées. Chaque monde actuel donne potentiellement lieu à des dénotations différentes de « Vercingétorix » et de « mètre étalon », mais à ce monde actuel il sera vrai que Vercingétorix est l'inventeur du fil à beurre et que le mètre étalon mesure un mètre. Pour mieux comprendre l'effet de la première coordonnée, imaginons trois mondes possibles w_1, w_2 et w_3, en plus du monde actuel w_0, où le mètre étalon mesure 1,1 m, 1,2 m et 1,3 m respectivement (p/r au mètre étalon actuel). Ce scénario donne lieu à seize couples perspective-référence :

		Référence			
		w_0	w_1	W_2	w_3
Perspective	w_0	(w_0, w_0)	(w_0, w_1)	(w_0, w_2)	(w_0, w_3)
	w_1	(w_1, w_0)	(w_1, w_1)	(w_1, w_2)	(w_1, w_3)
	w_2	(w_2, w_0)	(w_2, w_1)	(w_2, w_2)	(w_2, w_3)
	w_3	(w_3, w_0)	(w_3, w_1)	(w_3, w_2)	(w_3, w_3)

Au couple (w_1, w_2), le nom « mètre étalon » est défini comme la tige de platine dans w_1, qui mesure 1,1 m selon notre mètre actuel, et la tige de platine est dans w_2 où elle mesure 1,2 m, toujours selon notre mètre actuel ou ≈ 1,09 m selon la définition de « mètre » dans w_1. Au couple (w_3, w_3), le nom « mètre étalon » est défini comme la tige de platine dans w_3, qui mesure 1.3 m (selon notre actualité), et la tige de platine est aussi dans w_3 (où elle mesure 1 m selon le mètre dans w_3). Quel que soit le monde w, si la tige de platine dans w est choisie comme mètre étalon, alors notre compréhension d'un mètre étalon est telle que nous savons que le mètre étalon dans w mesure un mètre. Il se trouve que les vérités contingentes a priori sont caractérisées par le fait d'être vraies le long de la diagonale, c'est-à-dire à tous les couples (w, w).

La notion modale « est contingent a priori » sera donc une combinaison de deux modalités, l'une que connaissons déjà : la modalité d'actualité '@', dont la signification dans le cadre bidimensionnel est donnée par

$(w, v) \Vdash @\varphi$ ssi $(w, w) \Vdash \varphi$,

et l'autre, la modalité '$\Im$',[49] qui est la contrepartie aléthique de '$\circledast$' et dont la signification est

$(w, v) \Vdash \Im\varphi$ ssi $(w', v) \Vdash \varphi$, pour tout w' tel que wRw',

où $R \subset W \times W$. La modalité « est contingent a priori » est tout simplement la concaténation de '$\Im$' et de '@', ce qui produit les conditions de vérité suivantes :

$(w, v) \Vdash \Im@\varphi$ ssi $(w', v) \Vdash @\varphi$, pour tout v tel que wRw'

ssi $(w', w') \Vdash \varphi$, pour tout w' tel que wRw'

Revenons maintenant à l'analyse de Rabinowicz & Segerberg. À supposer que l'application de la sémantique bidimensionnelle à l'analyse des indexicaux et des vérités contingentes a priori soit claire et justifiée (ce qui ne fait pas l'unanimité, cf. Soames (2002)), comment peut-elle être utile à l'analyse du paradoxe de Fitch et plus généralement à la clarification des énoncés qui impliquent des modalités épistémiques et métaphysiques? Dans un premier temps, pour déterminer si l'analyse bidimensionnelle peut être transposée, il faudrait réussir à rendre intelligible la notion de monde perspective et de monde référentiel dans ce contexte. Dans les exemples plus haut, autant pour celui des indexicaux temporels que celui des vérités contingentes a priori, la première coordonnée comptabilisait un certain paramètre d'actualité. À quoi ceci peut-il correspondre dans le cas présent? Si les énoncés du langage objet comportaient des indexicaux ou si nous voulions représenter la connaissance a

[49] '$\Im$' pour « fixedly ».

priori de vérités contingentes, nous pourrions attacher une interprétation à cette première composante, mais si les énoncés du langage ne comportent pas d'indexicaux et si, comme c'est le cas dans la plupart des applications, nous faisons abstraction du contingent a priori (car après tout il s'agit d'une classe assez restreinte d'énoncés), il faudrait trouver une autre raison d'être pour cette coordonnée. À prime abord, nous pourrions penser que la perspective épistémique détermine un mode de connaissance, qu'elle tient lieu de la manière actuelle de connaître, mais ce n'est pas tout-à-fait l'usage que Segerberg & Rabinowicz en font (car sinon ils n'auraient pas gardé la même formulation du vérificationnisme). Ils discutent longuement les contraintes que nous pouvons éventuellement poser sur la relation d'accessibilité épistémique E sans toutefois nous éclairer sur l'aspect le plus essentiel de leur sémantique, c'est-à-dire la manière dont il faut comprendre la dualité perspective-référence dans un contexte épistémique. Sur ce plan, nous sommes laissés un peu dans le noir.

Mais, indépendamment de la motivation philosophique, est-ce que cette nouvelle interprétation de l'opérateur d'actualité permet d'échapper aux problèmes que rencontrait la notion d'actualité d'Edgington? Il est vrai que cette nouvelle signification de '@' ne présente pas les mêmes propriétés que l'ancienne, en ce sens qu'elle n'annule pas l'effet de la modalité épistémique, mais elle annule tout de même l'effet de la modalité aléthique. En effet, si φ est une formule quelconque, nous avons

$(w, v) \Vdash @\varphi$ ssi $(w, w) \Vdash \varphi$ ssi $(w, v') \Vdash @\varphi$,

ce qui fait de '$@\varphi \rightarrow \Box @\varphi$' une validité logique dans cette sémantique. Par ailleurs, les définitions de ces modalités confèrent des conditions de vérité à (*VerA*) qui sont loin d'être évidentes : la modalité '$\Diamond$' quantifie sur la référence, et 'K', sur les deux dimensions, mais au final seule la quantification sur la première composante est importante pour (*VerA*) étant donnée l'action de '@'. Cette stratégie de solution présente donc certaines faiblesses, mais nous exploiterons l'idée de sémantique bi-dimensionnelle qui lui est sous-jacente dans notre propre solution.

4.4.3 Kvanvig et le caractère indexical de la connaissance

L'analyse de Kvanvig (1995) s'accorde avec Edgington sur le fait que le paradoxe est le résultat d'un problème de portée, mais selon lui le problème de la portée n'est pas tant au niveau de la proposition connue qu'au niveau de la modalité de connaissance. Pour mieux faire ressortir son observation, Kvanvig transcrit l'argument du paradoxe dans un langage modal du premier ordre typé. Ce langage contient des variables x, y, z pour les agents épistémiques, des variables t, s, ... pour le temps et des variables p, q, ... pour les formules, en plus de la modalité aléthique '$\Box$' et de la modalité épistémique '$K(x, t)$', qui admet deux arguments, un d'individu et l'autre de temps (et qui signifie informellement 'x sait que ... au temps t'). Il suppose que la modalité épistémique satisfait les propriétés :

(T) $\quad K(x, t)\varphi \rightarrow \varphi$

(dist) $\quad K(x, t)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K(x, t)\varphi \wedge K(x, t)\psi)$

et que la modalité aléthique '$\Box$' satisfait (dual$_{\rightarrow}$) et (Nec). La quantification propositionnelle que nous retrouvons dans (*Ver*), et qui est intrinsèquement du deuxième ordre, doit être remplacée par un prédicat de vérité 'V' et une quantification du premier ordre sur des noms de propositions. Il faudra donc quelques conditions sur le prédicat de vérité :

(Vr$_{\rightarrow}$) $\quad \varphi \rightarrow \mathrm{V}(n)$

(KVr) $\quad K(x, t)\mathrm{V}(n) \rightarrow K(x, t)\varphi$

où 'n' est un nom de 'φ'. Nous supposerons que '$\ulcorner\varphi\urcorner$' est un nom de '$\varphi$'. Le vérificationnisme est représenté dans ce langage par :

(*VerK*) $\quad \forall p(\mathrm{V}(p) \rightarrow \Diamond\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$

La dérivation du paradoxe de Fitch dans ce contexte procède comme suit :

1.	$\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$	Hypothèse	
2.	$\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	1, ($\mathrm{Vr}_{\rightarrow}$) et $\rightarrow$-élim	(1)
3.	$\Diamond\exists y, sK(y, s)\mathrm{Vr}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	2, (*VerK*), $\forall$, $\rightarrow$-élim	(1)
4.	$K(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	Hypothèse	
5.	$K(y, s)(\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	4, (KVr) et $\rightarrow$-élim	(4)
6.	$K(y, s)\mathrm{V}(p) \wedge K(y, s)(\neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	5, (dist) et $\rightarrow$-élim	(4)
7.	$K(y, s)(\neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	6, $\wedge$-élim	(4)
8.	$\neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$	7, (T) et $\rightarrow$-élim	(4)
9.	$K(y, s)\mathrm{V}(p)$	6, $\wedge$-élim	(4)
10.	$\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$	9, $\exists$-intro	(4)
11.	$\perp$	8, 10 et $\perp$-intro	(4)
12.	$\neg K(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	4-11, $\neg$-intro	
13.	$\forall y, s\neg K(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	12, $\forall$-intro	
14.	$\neg\exists y, sK(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	13, cal. pred. int.	
15.	$\Box\neg\exists y, sK(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	14, (Nec)	
16.	$\neg\Diamond\exists y, sK(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner \mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$	15, ($\mathrm{dual}_{\rightarrow}$) et $\rightarrow$-élim	
17.	$\perp$	3, 16 et $\perp$-intro	(1)
18.	$\neg(\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	1-17, $\neg$-intro	
19.	$\mathrm{V}(p) \rightarrow \neg\neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$	18, cal. préd. int.	
20.	$\mathrm{V}(p) \rightarrow \exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$	18, cal. préd. class.	
21.	$\forall p(\mathrm{V}(p) \rightarrow \neg\neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	19, $\forall$-intro	
22.	$\forall p(\mathrm{V}(p) \rightarrow \exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$	20, $\forall$-intro	

La conclusion à l'étape 21 ne fait appel qu'à la logique intuitionniste, tandis que 22 fait un usage essentiel de la logique classique. Mentionnons que la démonstration que donne Kvanvig est plus sommaire que celle-ci. En particulier, il ne précise aucune des propriétés logiques concernant le prédicat de vérité, et utilise 'p' tantôt comme une variable propositionnelle tantôt comme un nom d'un énoncé.

L'analyse de Kvanvig de ce paradoxe part du principe général selon lequel les quantificateurs comportent une dimension indexicale : « For one can treat quantified sentences as modally indexical. That is, the same quantified sentence can express different propositions in different possible worlds. » (1995 : 493). Dans nos communications quotidiennes, le contexte d'énonciation nous épargne l'effort considérable qu'il faudrait faire afin de fournir les précisions quant aux temps, lieux, personnes, etc. impliqués dans (et implicites à) nos assertions les plus banales. L'idée est donc que les quantificateurs présents dans la thèse du vérificationnisme présentent un comportement indexical.[50]

Comment cette observation peut-elle avoir une incidence sur le paradoxe de Fitch? Le problème, qui est tout à fait général, concerne l'instanciation d'un quantificateur universel par une expression non-rigide dans une formule modale. Donnons un exemple. Soit 'P' est un prédicat correspondant à une propriété essentielle. Puisque 'P' définit une propriété essentielle, la formule suivante est vraie (même nécessairement vraie) :

(*ess*) $\forall x(P(x) \rightarrow \Box P(x))$

Si nous considérons que les lois physiques de même que les constantes qui y apparaissent sont nécessaires, alors le prédicat

$P(x) :=$ x est une constante physique

satisfait (*ess*). Supposons que 'n' est la description définie

$n :=$ la valeur que Newton découvrit dans son labo

et supposons qu'il existe un monde possible où Newton n'a pas trouvé la bonne valeur de la constante universelle de la gravitation, une possibilité qui est plus que vraisemblable (on l'admettra). Dans le monde actuel w_0, 'n' dénote G, mais dans le monde w où Newton se trompe dans ses mesures, 'n' vaut G', et G' est considérablement différente de G. Or, la loi de l'instanciation universelle (ou de la $\forall$-élimination) stipule que

$\forall x(P(x) \rightarrow \Box P(x)) \vdash P(t) \rightarrow \Box P(t)$

[50] C'est une version du contextualisme épistémique.

pour t un terme quelconque.[51] En particulier, (*ess*) et cette loi nous permettent de déduire que $F(n) \rightarrow \Box F(n)$. Dans le monde actuel, n est la constante universelle de la gravitation, donc nous avons que $\Box F(n)$. Mais ceci contredit le fait que n n'est pas G dans w, que $\Diamond\neg F(n)$. Face à cette observation, la conclusion n'est pas que la loi de l'instanciation est erronée dans son ensemble mais plutôt qu'on doit restreindre les instanciations admissibles à des termes dont les dénotations sont rigides (c'est notamment le cas pour les variables).

Kvanvig veut faire valoir qu'une situation similaire est à l'œuvre dans le paradoxe de Fitch. La dérivation du paradoxe dépend d'une instanciation de formule quantifiée universellement (à l'étape 3), et il semble que la formule substituée '$\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$' comporterait un aspect indexical (ou, plus exactement, un aspect non-rigide), car le domaine du quantificateur '$\exists$' varierait d'un monde possible à l'autre. Kvanvig explique la chose ainsi :

> The mistake in the proof occurs with the substitution of an instance of the second assumption into the first assumption as one of the knowable truths. Since propositions are the objects of knowledge, such a substitution is legitimate only if the formula expresses the same proposition in the substitutional context that it expresses in the original context. In the present case, the substitutional context is partially a modal one, for the consequent of the bound conditional in the first assumption is governed by a possibility operator. So for the substitution to be legitimate, the formula would have to be modally nonindexical. Otherwise the unknown proposition expressed by that formula in the actual world may not be the expressed value of that formula in the modal context in question. Since the substituted formula is a quantified one and quantified sentences are generally modally indexical, the argument fails because of an illegitimate substitution in a modal context. (Kvanvig 1995 : 495)

Le problème concerne donc la nature indexicale du quantificateur dans[52]

---

[51] Du moins, à condition que t soit libre pour x dans la formule.

[52] Les quantificateurs peuvent admettre des domaines différents dans des contextes différents sans que cette variation soit due à une forme d'indexicalité.

$\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)$

Celui-ci devrait seulement quantifier sur des valeurs de x et de t actuelles et non pas sur des valeurs possibles de ces paramètres. Malheureusement, c'est ce qui se produit à l'étape 3 :

$\Diamond\exists y, sK(y, s)\mathrm{V}(\ulcorner\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p)\urcorner)$

ou, si 'V' satisfait la réciproque de ($V_{\rightarrow}$), tout simplement :

$\Diamond\exists y, sK(y, s)(\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$

Le quantificateur existentiel le plus à droite, celui qui provient de la modestie épistémique, est maintenant dans la portée de la modalité de possibilité '$\Diamond$', ce qui veut dire que les objets quantifiés par ce quantificateur sont possiblement non-actuels.

Pour résoudre ce problème, Kvanvig introduit des quantificateurs « possibilistes » '$\forall$' et '$\exists$' de même qu'un prédicat d'actualité '@' pour exprimer des quantificateurs « actualistes » '$\forall_{@}$' et '$\exists_{@}$', la quantification actualiste étant une restriction de la quantification possibiliste. La signification intuitive des quantificateurs possibilistes est

$\forall x \ldots$ ssi tous les agents possibles sont tels que ...

$\forall t \ldots$ ssi tous les temps possibles sont tels que ...

Les quantificateurs existentiels '$\exists x$' et '$\exists t$' sont définis en fonction de '$\forall x$' et '$\forall t$' respectivement. Par ailleurs, si on définit le prédicat d'actualité '@' comme

$@(x)$ ssi x est un agent actuel et

$@(t)$ ssi t est un temps actuel,

alors la quantification actualiste peut être définie comme

$\forall_{@} x \ldots$ ssi $\forall x(@(x) \rightarrow \ldots)$

$\forall_{@} t \ldots$ ssi $\forall t(@(t) \rightarrow \ldots)$

La quantification possibiliste rend la modalité de possibilité '$\Diamond$' caduque. Le vérificationnisme s'incarne maintenant par

(Ver_K) $\quad \forall p(\mathrm{V}(p) \rightarrow \exists x, tK(x, t)\mathrm{V}(p))$

et la modestie épistémique, par

(Mod_K) $\exists p(\mathrm{V}(p) \wedge \neg\exists_{@}x,\ tK(x,\ t)\mathrm{V}(p))$

On peut constater que la dérivation du paradoxe est bloquée avec ces modifications.

Williamson (2000) reproche à Kvanvig une mauvaise utilisation du terme « indexical », et estime que Kvanvig cherche plutôt à montrer que des expressions *non-rigides* sont impliquées dans la substitution cruciale du paradoxe. L'indexicalité mène parfois à la non-rigidité, mais la réciproque n'est pas vraie de manière générale. Williamson remet aussi en question le fait que des énoncés non-rigides soient impliqués dans la dérivation du paradoxe, car selon lui une formule telle que '$\neg Kp$' est rigide. Si nous concevons une formule comme un nom de proposition, la sémantique des mondes possibles donne raison à Williamson. En effet, bien que la valeur de vérité d'une formule 'φ' varie d'un monde à l'autre, son extension propositionnelle, c'est-à-dire le sous-ensemble de mondes possibles qu'elle définit, ne varie pas d'un monde à l'autre, il n'y aura donc pas de variation d'un monde à l'autre de la signification d'un énoncé. Par contre, le fait qu'un énoncé ait une signification déterminée, indépendante du monde d'évaluation, ne devrait pas empêcher pas qu'une composante de celle-ci puisse avoir un comportement non-rigide.

4.5 Notre solution — Partie I : La quantification modale

Nous aimerions faire converger maintenant les trois stratégies précédentes. Nous retenons d'Edgington qu'il y a un problème de portée, de Rabinowicz & Segerberg qu'un paramètre supplémentaire peut être employé pour tenir compte de cette portée, et de Kvanvig que la portée est due à la non-rigidité d'un certain domaine de quantification. Notre stratégie consistera, dans un premier temps, à introduire un langage qui éliminera la portée pour que nous puissions constater plus clairement la mécanique qui est sous-jacente au paradoxe, et dans un deuxième temps, nous définirons un langage qui pourra représenter correctement la portée sans rebasculer dans les mêmes antinomies.

Partons de l'observation qu'une modalité est essentiellement un quantificateur avec un domaine de quantification qui varie implicitement d'un monde à l'autre. (Nous pouvons d'ailleurs voir la relation d'accessibilité R d'une modalité comme une fonction qui attribue un domaine de quantification $R[w]$ à chaque monde w, où $v \in R[w]$ ssi wRv.) Utilisons directement des quantificateurs dans le langage objet pour simuler l'action de la modalité de possibilité dans la thèse du vérificationnisme. Ce quantificateur n'aura pas des mondes possibles comme domaine de quantification, mais plutôt des profils épistémiques, des sortes de « perspectives » épistémiques *à la* Rabinowicz & Segerberg. Nous gardons la modalité de connaissance 'K', mais nous lui ajoutons une variable de profil épistémique 'x', variable qui sera liée par la quantification « aléthique ». L'énoncé '$\exists xKx\varphi$' signifie donc qu'il existe un profil épistémique tel que, sous ce profil, l'agent sait que φ. Le vérificationnisme dans ce langage prend donc la forme :

(*VerQ*) $\forall p(p \to \exists xKxp)$

Quant à la modestie, nous pouvons choisir de l'exprimer par

(*) $\exists p(p \wedge \neg K\alpha p)$

où 'α' est une constante qui dénote le profil épistémique actuel, mais il serait plus intéressant d'exiger que tous les profils épistémiques soient modestes :

(**) $\forall x\exists p(p \wedge \neg Kxp)$

La différence entre les deux est importante. La condition (*) pose seulement des conditions sur le profil actuel α, par conséquent (*) est compatible avec l'existence d'un profil épistémique β immodeste, un profil satisfaisant

(***) $\forall p(p \to K\beta p)$

Ce qui veut dire que si (*) représente la modestie, nous pouvons donner un modèle très simple satisfaisant le vérificationnisme et la modestie mais qui trahit les intuitions vérificationnistes, un modèle où le vérificationnisme est une thèse vraie seulement en vertu d'une omniscience possible. Nous exigerons donc que tous nos profils soient modestes, c'est-à-dire que nous choisirons (**) comme principe de modestie (*ModQ*). (De toute manière, si nous choisissons (*) comme principe de modestie, il sera trivial de montrer que (*VerQ*) et (*ModQ*) sont compatibles.)

Les thèses (*VerQ*) et (*ModQ*) ne permettent pas la dérivation du paradoxe de Fitch. En tentant de reproduire la dérivation du paradoxe éponyme, nous obtenons :

1.	$p \wedge \neg Kxp$	Hypothèse	
2.	$\exists y Ky(p \wedge \neg Kxp)$	1, (*VerQ*) et $\forall$,$\rightarrow$-élim	(1)
3.	$Ky(p \wedge \neg Kxp)$	Hypothèse	
4.	$Kyp \wedge Ky(\neg Kxp)$	3, (*dist*) et $\rightarrow$-élim	(3)
5.	$Kyp(\neg Kxp)$	4, $\wedge$-élim	(3)
6.	$\neg Kxp$	5, (*T*) et $\rightarrow$-élim	(3)
7.	Kyp	4, $\wedge$-élim	(3)

Aucune contradiction ne peut être tirée des étapes 6 et 7, nous empêchant par le fait même d'introduire une négation sur 1 pour obtenir, après quelques manipulations classiques, la formule '$p \rightarrow \forall x Kxp$'.

Bien. Nous avons montré que le paradoxe est bloqué par cette voie. Par ailleurs, l'impossibilité de la dérivation ne tient pas à la présence ou l'absence d'une hypothèse particulière; cette obstruction est assez robuste, et confirme l'idée que le paradoxe n'est pas tant dû au vérificationnisme comme tel mais à un problème de substitution en logique modale. Il reste que le paradoxe pourrait réapparaître sous une autre forme dans ce langage. Il faudrait s'assurer de la consistance de (*VerQ*) et (*ModQ*) pour en découdre définitivement avec celui-ci. Une manière de montrer que (*VerQ*) et (*ModQ*) sont consistants, par rapport à une certaine logique Γ (ou, plutôt, par rapport à un certain système de dérivation), est de montrer qu'ils sont satisfaisables dans un modèle qui valide Γ. Notre tâche sera donc de montrer qu'il existe un modèle satisfaisant les formules (*VerQ*) et (*ModQ*) (et une certaine logique Γ). De cette manière, nous aurons la garantie qu'aucune contradiction ne peut être dérivée à partir de (*VerQ*) et (*ModQ*) en utilisant la logique Γ.

Un modèle M de ce langage est un quadruplet $< W, E, \Pi, I >$ où : W est un ensemble de mondes possibles; E est un ensemble de profils épistémiques sur W, c'est-à-dire de relations binaires sur W; Π est un ensemble de propositions admissibles, lesquelles sont des sous-ensembles de W; et I est une fonction d'interprétation I pour les constantes propositionnelles et modales, s'il y en a. Puisque le langage comporte des variables, à la fois modales et propositionnelles, il faut définir des valuations – *à la tarskienne* – afin de pouvoir interpréter toutes les formules dans M. Une valuation de M est une fonction s : Mod $\cup$ Prop $\rightarrow E \cup \Pi$ telle que

$s(x) \in E$, si $x \in$ Mod

$s(p) \in \Pi$, si $p \in$ Prop

Deux valuations s et t sont X-équivalentes, notée $s \sim_X t$, pour X une variable modale ou propositionnelle, si et seulement si

$s(Y) = t(Y)$, pour toute variable $Y \neq X$

Avec ceci, nous avons le nécessaire pour définir les clauses sémantiques (principales) de ce langage :

$w, s \Vdash p$ ssi $w \in s(p)$ (ou $I(p)$, si 'p' est une constante)

$w, s \Vdash Kx\varphi$ ssi $v, s \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $(w, v) \in s(x)$

$w, s \Vdash \forall X\varphi$ ssi $w, t \Vdash \varphi$, pour tout $t \sim_X s$

Une formule close (une formule dans laquelle aucune variable n'est libre) possède une valeur de vérité à w indépendante de la valuation.

Appelons un modèle $< W, E, \Pi, I >$ *vérificationniste à* w si les formules (*VerQ*) et (*ModQ*) sont toutes deux vraies à w. Un modèle est *vérificationniste* (tout court) s'il est vérificationniste à w, pour tout $w \in W$. Nous chercherons donc à déterminer maintenant sous quelles conditions il existe un modèle vérificationniste.

Quelques remarques sur la nature des ensembles E et Π. D'une certaine manière, ($VerQ$) implique que plus il y aura de propositions dans Π plus E devra contenir de profils (pour connaître ces propositions), et ($ModQ$) implique que plus il y aura de profils dans E plus Π devra contenir de propositions (à ignorer par ces profils). Ainsi, on ne s'étonnera pas que la réponse à la question de l'existence d'un modèle vérificationniste dépendra éventuellement des contraintes que satisfait Π ou non. Les caractérisations suivantes du domaine propositionnel Π nous seront utiles pour la suite : Π est le *domaine total* si $\Pi = \wp(W)$, c'est-à-dire s'il comprend toutes les propositions possibles; Π est *fermé sous complémentation* ssi

$\pi \in \Pi \Rightarrow W\backslash\pi \in \Pi$,

pour toute proposition $\pi \in \Pi$; il est *fermé sous intersection* ssi

$\pi, \pi' \in \Pi \Rightarrow \pi \cap \pi' \in \Pi$,

pour toutes proposition $\pi, \pi' \in \Pi$; il est *booléen* ssi il est fermé sous complémentation et intersection; et il est *fermé épistémiquement* ssi il est booléen et si $a(\pi) \in \Pi$, pour tout $\pi \in \Pi$ et pour tout $a \in E$, où

$a(\pi) = \{w \in W : a[w] \subset \pi\}$.

Si Π est fermé épistémiquement, alors il contient, en gros, toute proposition définissable par une formule sans quantificateurs (une formule telle que '$K\alpha p \wedge \neg Kyq$' mais pas '$\forall xKxp$').

Ces précisions étant données, nous avons :

Théorème I

Dans ce qui suit, M est un modèle de la forme $< W, E, \Pi, I >$.

(a) Si $\{w\} \in \Pi$, alors M n'est pas vérificationniste à w; et si Π est le domaine total, M n'est vérificationniste à aucun w.

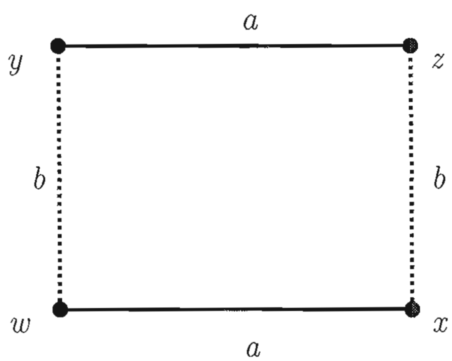
(b) Il existe un modèle vérificationniste M tel que W et E sont finis et Π est fermé sous complémentation.

(c) Si M est vérificationniste et Π est booléen, alors W, E et Π sont infinis.

(d) Il existe un modèle vérificationniste M avec Π fermé épistémiquement.

PREUVE. (a) Supposons que l'extension de p_0 est $\{w\}$, que $I(\alpha) = a$ et que $K\alpha p_0$ est vrai à w. Il s'ensuit que la relation a est « isolée » à w : $(w, w) \in a$ et, pour tout v, $(w, v) \in a$ entraîne $v = w$. Dans ce cas, toute proposition vraie à w est connue à w, contredisant (*ModQ*). La deuxième partie est immédiate.

(b) Posons : $W = \{w, x, y, z\}$; $E = \{a, b\}$, où a est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, x), (y, z)\}$ et b est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, y), (x, z)\}$; $I(\alpha) = a$ et $I(\beta) = b$ (aucune autre contrainte); et $\Pi = \{\{w, x\}, \{y, z\}, \{w, y\}, \{x, z\}\}$. Voir figure.



Π est clairement fermé sous complémentation, on peut vérifier aisément que (*VerQ*) et (*ModQ*) sont vrais à chaque monde (il suffit de considérer tous les cas possibles). Par exemple, au point w la proposition $\{w, x\}$ est vraie mais pas connue par le profil b. Cependant, elle est connue par le profil a. Les autres cas se vérifient de la même manière.

(c) Pour démontrer cette partie nous utilisons (*VerQ*) et (*ModQ*) en alternance. Soient $w_0 \in W$ un monde et $a_0 \in E$ un profil épistémique quelconques. Par (*ModQ*), il existe une proposition $\pi_0 \in \Pi$, dénoté par 'p_0', qui n'est pas connue à w_0 par a_0. Par (*VerQ*), il existe un profil a_1 qui sait que p_0 au point w_0. Mais par (*ModQ*), il existe $\pi_1 \in \Pi$, dénotée par 'p_1', qui n'est pas connue à w_0 par a_1. La proposition $\pi_0 \cap \pi_1$, qui est dénotée par '$p_0 \wedge p_1$', est donc ignorée par les profils a_0 et a_1 à w_0. Par (*VerQ*), il existe donc a_2, distinct de a_0 et de a_1, tel que a_2 sait que $p_0 \wedge p_1$ à w_0. Par (*ModQ*), il existe $\pi_2 \in \Pi$, dénotée par 'p_2', qui est vraie à w_0 mais inconnue par a_2. Et ainsi de suite.

Nous pouvons donc générer une suite infinie de points a_n et de propositions q_m tels que les propositions q_0, q_1, ..., q_{n-1} sont connues à a_n à w_0 mais la proposition q_n est ignorée (il suffit de poser $q_n = p_0 \wedge \ldots \wedge p_n$). Ceci entraîne que toutes les propositions dénotées par les q_n sont distinctes et que tous les points a_n sont distincts aussi. Il s'ensuit donc que E et Π sont infinis. Puisque Π est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de W, W doit être infini.

(d) Nous définissions le modèle $M = < W, A, \Pi, I >$. Posons $W = \mathbb{Z}$. Nous définissons E comme l'ensemble des relations a_n, $n > 0$, où

$a_n(x, y)$ ssi $x - y$ est divisible par 2^n

(La relation a_n est la relation de congruence modulo 2^n.) Nous définissons Π comme l'ensemble des $\pi \subset W$ de la forme

(*) $\pi = a_n[k_1] \cup a_n[k_2] \cup \ldots \cup a_n[k_m]$,

où n et k_1, k_2, ..., k_m sont tels que $0 \leq k_1 < \ldots < k_m < 2^n$ (avec m possiblement $= 0$, auquel cas $\pi = \varnothing$). Rappelons que '$a[k]$' signifie dans ce contexte la classe d'équivalence de k modulo a.

Π est fermé sous complément parce que le complément d'une union (possiblement vide) de classes d'équivalence est également une union (possiblement vide) de classes d'équivalence. Π est aussi fermé sous intersection. Pour démontrer ceci, commençons par observer que si

$\pi = a_n[k_1] \cup a_n[k_2] \cup \ldots \cup a_n[k_m]$

$\sigma = a_{n'}[l_1] \cup a_{n'}[l_2] \cup \ldots \cup a_{n'}[l_{m'}]$

avec $0 \leq k_1 < k_2 \ldots k_m < 2^n$ et $0 \leq l_1 < l_2 \ldots l_{m'} < 2^{n'}$ (m, m' possiblement $=$ 0), alors il existe une décomposition similaire pour π et σ avec les classes de la relation $a_{n''}$, quelque soit $n'' \geq \max(n', n)$. Ceci découle du fait que $2^{n''}$ est un multiple (commun) de 2^n et de $2^{n'}$, et donc toute classe d'équivalence de a_n ou de $a_{n'}$ est une union de classes d'équivalence de $a_{n''}$. Si π est une union disjointe de classes d'équivalence de la relation $a_{n''}$ et la même chose est vraie de σ, alors leur intersection est l'union disjointe des classes qu'ils ont en commun. Donc Π est booléen.

Montrons maintenant que Π est fermé épistémiquement. Nous démontrons la chose par une induction sur le nombre de connecteurs logiques dans φ. S'il n'y a aucuns connecteurs dans 'φ', le résultat est une conséquence de la définition de I et de la définition d'une valuation. Pour l'étape d'induction, il faut procéder par cas selon le connecteur principal de φ. Les cas booléens suivent par l'hypothèse d'induction et les arguments du paragraphe précédent. Il reste donc le cas de la modalité épistémique. Supposons que φ est de la forme $Kx\psi$ (ou $K\alpha\psi$) et que la valeur de x (ou de α) est a. Il suffit maintenant d'observer que

$w \Vdash Kx\psi$ ssi $v \Vdash Kx\psi$, pour tout v tel que $(w, v) \in a$,

car a est une relation d'équivalence. La proposition définie par '$Kx\psi$', lorsque x vaut a, sera donc une union (possiblement vide) de classes d'équivalence de la relation a.

Il faut maintenant montrer que (*VerQ*) et (*ModQ*) sont vrais partout dans le modèle. Commençons par (*VerQ*). Soit π une proposition vraie à w. Il existe un n minimal tel que π se décompose selon (*) plus haut. Les classes d'équivalence de (*) étant disjointes, il existe une unique classe à laquelle appartient w, la classe $a_n[w]$. Puisque la proposition π est une conséquence de la proposition $a_n[w]$, c'est-à-dire que $a_n[w] \subset \pi$, il suffit de connaître $a_n[w]$ pour connaître π. Par la définition des relations $a_{n'}$, il est clair que $a_{n'}[w] \subset a_n[w]$ lorsque $n' \geq n$. Or, $a_{n'}$ sait que $a_n[w]$ à w si et seulement si $a_{n'}[w] \subset a_n[w]$.

Pour démontrer (*ModQ*), pour tout $a \in E$, il faut trouver une proposition vraie à w mais qui n'est pas connue par a. La relation a est identique à a_n pour un certain n. Par définition de Π, $a_{n+1}[w]$ est une proposition et nous avons que $a_n[w] \not\subset a_{n+1}[w]$, donc $a_{n+1}[w]$ n'est pas connue à w par a. ✠

La partie (d) nous montre donc qu'il existe un modèle vérificationniste avec un domaine propositionnel substantiel. Les parties (b) et (c) établissent des bornes inférieures : il existe un modèle vérificationniste fini à condition que son domaine propositionnel ne soit pas fermé sur intersection, sinon le modèle est infini. Cette dernière conséquence est particulièrement étonnante, car je ne croyais pas à prime abord que la vérité de ($ModQ$) et de ($VerQ$) pouvait influencer la cardinalité du modèle. Enfin, la partie (a) montre les limites supérieures du domaine propositionnel, celui-ci ne peut pas contenir des propositions maximalement spécifiques à un monde.

Concernant la question de la logique la plus forte que nous pouvons appliquer à ($ModQ$) et ($VerQ$) sans qu'une contradiction puisse en être dérivée, nous n'avons qu'à examiner le modèle défini dans la preuve de (d) pour en juger. D'abord, le modèle valide la logique classique (autant sur le plan des connecteurs booléens que sur le plan des quantificateurs propositionnels et modaux) et il valide tout principe logique impliqué par (S5) pour les modalités épistémiques. Autrement dit, le modèle satisfait une logique très forte, et donc la consistance démontrée entre ($ModQ$) et ($VerQ$) est particulièrement robuste.

4.6 Notre solution — Partie II : De la quantification à la modalité

Les résultats du théorème I donnent substance à l'idée que le problème le plus fondamental dans le paradoxe de Fitch est un problème avec le langage modal conventionnel et sa sémantique. Pouvons-nous espérer une version « modale » de la solution de la section précédente, c'est-à-dire une version de cette solution qui emploie des modalités au lieu des quantificateurs? C'est ce que nous ferons dans cette section.

Nous définissons une sorte de sémantique bidimensionnelle (asymétrique) en s'inspirant de ce qui précède. Un modèle de cette sémantique est de la forme $< W, E, \Pi, R, I >$, où $< W, E, \Pi, I >$ est un modèle au sens de la section précédente et où R est une relation binaire sur E (ou, si nous le souhaitons, sur $W \times E$). L'évaluation des formules s'effectuera à des couples $(w, a) \in$

$W \times E$. La quantification modale est traduite par une modalité de possibilité '$\Diamond$' interprétée avec la relation R :

$(w, a) \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $(w, b) \Vdash \varphi$, pour un certain b tel que $R(a, b)$

Le deuxième paramètre précise le contexte épistémique, c'est-à-dire la relation avec laquelle il faut interpréter la modalité épistémique :

$(w, a) \Vdash K\varphi$ ssi $(v, a) \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $a(w, v)$

Nous avons donc reproduit l'action de la quantification modale mais ne sommes pas tirés d'affaire pour autant, car la réintroduction d'une modalité réintroduit le problème de la portée. L'évaluation de la formule clé du paradoxe '$\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$' dans cette sémantique provisoire nous le démontre :

$(w, a) \Vdash \Diamond K(p \wedge \neg Kp)$ ssi $(w, b) \Vdash K(p \wedge \neg Kp)$, pour b tel que $R(a, b)$

$\Rightarrow (w, b) \Vdash Kp$ & $(w, b) \Vdash K\neg Kp$, pour un certain b tel que $R(a, b)$

$\Rightarrow (w, b) \Vdash Kp$ & $(w, b) \Vdash \neg Kp$, pour un certain b tel que $R(a, b)$

$\Rightarrow (w, b) \Vdash \bot$, pour un certain b tel que $R(a, b)$

Les deux occurrences de 'K' dans '$K(p \wedge \neg Kp)$' sont interprétées dans le même contexte épistémique b, alors que la deuxième occurrence est censée représenter la connaissance actuelle a. Autrement dit, les deux occurrences de 'K' sont en portée étroite (par rapport à la modalité de possibilité), mais en réalité, pour être fidèle à l'interprétation que nous visions, seulement la première aurait due l'être (la deuxième aurait due être en portée étendue). Il faudrait donc que notre langage ait la capacité d'exprimer la portée d'une modalité épistémique.

Avant de continuer, il faut en dire plus long sur la notion de portée appliquée aux modalités et sur la notion de portée en général. La question de la portée d'une expression se pose dès qu'on a affaire à des modalités et des expressions dont la signification varie d'un monde à l'autre (notamment, des descriptions définies). Par exemple, l'énoncé

(9) Le Président des États-Unis aurait pu être un vétéran

a deux interprétations saillantes selon notre compréhension de l'interaction entre le terme 'Le Président des États-Unis' (abrégé par 'POTUS') et le verbe modal 'aurait pu'. D'un côté, (9) peut signifier

(9.1) Celui qui est actuellement POTUS aurait pu être un vétéran

(9.2) Celui qui aurait pu être POTUS est un vétéran

On dit que la description définie POTUS est en portée étendue dans (9.1) et en portée étroite dans (9.2). En première approximation, l'énoncé (9) peut se traduire formellement par

(9.3) $\Diamond \mathrm{Vet}(\mathrm{POTUS})$

où '$\mathrm{Vet}(x)$' est le prédicat « est un vétéran ». La nuance entre (9.1) et (9.2) tient à la manière d'interpréter 'POTUS' : soit 'POTUS' reçoit sa valeur « avant » d'évaluer '$\Diamond$' (on dira alors qu'il est en portée étendue), soit 'POTUS' reçoit sa valeur « après » l'évaluation de '$\Diamond$' (on dira alors qu'il est en portée étroite). Cette différence dans l'évaluation de '$\Diamond \mathrm{Vet}(\mathrm{POTUS})$' peut être exprimée en termes de mondes possibles comme suit :

(9.4) $w \Vdash \Diamond \mathrm{Vet}(\mathrm{POTUS})$ ssi il existe un monde possible v (accessible de w) où l'individu qui est POTUS à w est Vet à v

(9.5) $w \Vdash \Diamond \mathrm{Vet}(\mathrm{POTUS})$ ssi il existe un monde possible v (accessible de w) où l'individu qui est POTUS à v est Vet à v

C'est précisément le même phénomène qui se produit dans l'évaluation de '$\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$'.

Pour exprimer ces distinctions de portée dans la syntaxe, nous ajoutons au langage un opérateur lambda 'λ' et une opération de d'évaluation '[ ]', cf. Fitting & Mendelsohn (1998 : Ch. 8). Ensemble, ces deux opérateurs serviront à marquer la portée. L'énoncé (9.3) en portée étendue sera traduit syntaxiquement par

(9.6) $\lambda x.\Diamond \mathrm{Vet}(x)[\mathrm{POTUS}]$

et (9.3) en portée étroite sera traduit par

(9.7) $\Diamond \lambda x.\mathrm{Vet}(x)[\mathrm{POTUS}]$

Le duo 'λx' et '[ ]' nous indique quand/où il faut interpréter 'POTUS' : quand 'λx' est avant (à gauche de) '$\Diamond$', comme dans (9.6), x prend la valeur de POTUS dans le monde actuel (ou le monde w d'où nous évaluons (9.6)); et quand 'λx' est après (à droite de) '$\Diamond$', comme dans (9.7), x prend la valeur de POTUS dans le monde possible où '$\Diamond$' nous emmène. Nous pouvons employer la même stratégie pour les modalités épistémiques en effectuant les changements nécessaires. L'opérateur d'abstraction 'λ' abstraira dans ce contexte des modalités épistémiques 'Kx' indicées par des variables. Les formules de ce langage doivent être définies en même temps que les « abstractions », les clauses syntaxiques principales étant :

(i) Si φ est une formule et x n'est pas liée dans φ, alors $Kx\varphi$ est une formule
(ii) Si φ est une formule et x est libre dans φ, alors $\lambda x.\varphi$ est une abstraction
(iii) Si $\lambda x.\varphi$ est une abstraction et n, un agent, alors $\lambda x.\varphi[n]$ est une formule

Puisque nous n'avons affaire qu'à un seul agent (avec plusieurs profils possibles), 'n' dénotera toujours le même agent, et il n'y aura donc pas d'utilité à l'opérateur d'évaluation '[-]' : nous interpréterons donc '$\lambda x.\varphi$' comme une abréviation de '$\lambda x.\varphi[n]$'.

Les clauses sémantiques pour ces nouvelles opérations exigent les mêmes valuations pour les variables de Mod $\cup$ Prop qu'à la section précédente, mais cette fois-ci les variables serviront à 'λ' et non pas à la quantification. L'évaluation d'une formule se fait à une paire (w, a) et pour une valuation s. Les clauses sémantiques principales sont donc :

$(w, a), s \Vdash Kx\varphi$ ssi $(w, a), s \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $s(x)(w, v)$

$(w, a), s \Vdash \lambda x.\varphi$ ssi $(w, a), t \Vdash \varphi$, où $t \sim_x s$ et $t(x) = a$

$(w, a), s \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $(w, b), s \Vdash \varphi$, pour un certain b tel que $R(a, b)$

L'idée sous-jacente à ces clauses est de faire en sorte que la modalité 'λxKx' soit interprétée par la relation d'accessibilité a à la paire (w, a). Si nous avons des constantes modales 'α', interprétées par la fonction d'interprétation 'I', nous n'avons qu'à ajouter une variante de la première clause :

$(w,\ a),\ s \Vdash K\alpha\varphi$ ssi $(w,\ a),\ s \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $I(\alpha)(w,\ v)$

La quantification propositionnelle sera interprétée de la même manière qu'à la section précédente.

Une petite remarque s'impose quant à l'instanciation d'un énoncé général dans ce langage. Plus haut, nous avons vu que la loi de l'instanciation d'un universel était violée si nous permettions l'instanciation par des termes non-rigides. La même chose est vraie dans ce contexte : l'instanciation d'un quantificateur propositionnel par une formule ne préservera pas la vérité (en général) si la formule comporte des modalités de la forme '$\lambda x.Kx$', car celles-ci ont une interprétation qui varie d'un profil épistémique à l'autre. C'est pourquoi nous devrons limiter l'instanciation des quantificateurs propositionnels à des formules constantes, des formules dans lesquelles n'apparaît pas 'λ'. (Autrement dit, seule cette forme restreinte de l'instanciation préserve la validité dans cette sémantique).

Dans ce nouveau langage, les thèses du vérificationnisme et de la modestie sont traduites par

(Mod_λ) $\exists p(p \wedge \neg\lambda x.Kxp)$

(Ver_λ) $\forall p(p \rightarrow \Diamond\lambda y.Kyp)$

Un modèle M est dit *vérificationniste au point* $(w,\ a)$ si (Mod_λ) et (Ver_λ) sont vrais à $(w,\ a)$ et il est *vérificationniste* s'il est vérificationniste en tous points. Suivant la remarque du paragraphe précédent, nous ne pouvons *pas* instancier '$\forall p$' dans (Ver_λ) par la formule '$p \wedge \neg\lambda x.Kxp$', car cette formule comporte une modalité variable.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème I :

Théorème II

Dans ce qui suit, M est un modèle de la forme $< W,\ E,\ \Pi,\ R,\ I >$.

(a) Si $\{w\} \in \Pi$, alors M n'est pas vérificationniste à $(w,\ a)$, quelque soit $a \in E$; et si Π est le domaine total, M n'est pas vérificationniste.

(b) Il existe un modèle vérificationniste M tel que W et E sont finis et Π est fermé sous complémentation.
(c) Si M est vérificationniste et Π est booléen, alors W, E et Π sont infinis.
(d) Il existe un modèle vérificationniste M avec Π fermé épistémiquement.[53]

PREUVE. Les démonstrations des parties (a)-(d) sont presqu'identiques à celles des parties correspondantes du théorème I. Pour la partie (d), il suffit de poser $M = < W, E, \Pi, R, I >$, où $< W, E, \Pi, I >$ est le modèle de la partie (d) de la preuve du théorème I et où R est la relation totale sur E. ✠

Les mêmes remarques concernant les limites inférieures et supérieures qu'établit ce résultat s'appliquent ici presque sans modifications. Par ailleurs, le modèle construit en (d) est tel que les modalités épistémiques de même que la modalité métaphysique sont de type (S5), ce qui signifie que (Mod_λ) et (Ver_λ) sont consistants même pour des logiques très fortes. Le théorème précédent décrit donc la géographie complète du paradoxe de Fitch : là où il commence, là où il s'arrête, et les propriétés générales du terrain vérificationniste.

On pourrait critiquer le fait que cette solution comporte un degré de complexité qui surpasse considérablement les solutions précédentes du paradoxe. Mais le langage et la sémantique introduits répondent à une question plus large que celle du paradoxe de Fitch, et ils peuvent espérer trouver une utilité ailleurs pour établir leur légitimité. Par ailleurs, à ce que je sache, aucun résultat s'approchant du théorème II n'existe dans la littérature sur le paradoxe de Fitch. En soi, cette fin, me semble-t-il, justifie les moyens.

[53] Dans ce contexte, Π est *fermé épistémiquement* s'il est booléen et s'il comprend l'extension de toute formule dans laquelle 'λ' ne figure pas.

Chapitre 5
Structures relationnelles d'ordre supérieur

5.1 Introduction

Nous nous donnons maintenant pour objectif l'étude rigoureuse des structures sémantiques introduites informellement plus haut et qui étaient sous-jacentes à l'analyse philosophique des chapitres 1 à 4. Plus précisément, nous définirons la notion de *structure relationnelle d'ordre supérieur* et nous présenterons la syntaxe et la sémantique d'une famille de *langages modaux d'ordre supérieur*. L'idée derrière l'introduction de ces structures était de faire en sorte qu'un monde possible puisse déterminer des notions modales d'ordre supérieur, comme une relation d'accessibilité par exemple, et permettre ensuite la définition de modalités qui porteraient sur ces aspects d'ordre supérieur. Dans l'exemple de la nécessité physique possible, dont nous avons discuté au premier chapitre, nous en sommes venus à la conclusion qu'il fallait non seulement que le monde actuel détermine la valeur de vérité des propositions élémentaires, il devait également déterminer la valeur de la nécessité actuelle. Dans la sémantique traditionnelle des mondes possibles, le problème est que ce paramètre d'ordre supérieur est fixe dans tout le modèle. Ici, nous cherchons à faire de lui une composante d'un monde possible complexe.

Soit W un ensemble de mondes possibles – un monde dans le sens conventionnel du terme – et soit $\mathbf{R}$ un ensemble de relations d'accessibilité sur W. D'une certaine manière, les couples de la forme (w, R), où $w \in W$ et $R \in \mathbf{R}$, déterminent les vérités élémentaires et les contraintes modales, c'est-à-dire des contraintes d'ordre supérieur, auxquelles ces vérités élémentaires sont assujetties. Par exemple, si la modalité en question est la modalité physique, alors R précise quels ensembles de vérités élémentaires sont compatibles entre elles. Au lieu de prendre pour deuxième composante la relation d'accessibilité comme telle, ce qui risque de créer des complications dans un contexte multimodal, la deuxième composante sera un paramètre v d'un ensemble V, chacun étant associé à une relation d'accessibilité sur W via une fonction $\Phi : V \rightarrow \mathbf{R}$ (dans un contexte multimodal, disons à n modalités, la fonction Φ associe à chaque paramètre un n-tuples de relations d'accessibilité, une relation pour chacune des n modalités). Cette structure peut donc être caractérisée par le couple $< W \times V, \Phi >$. Comme nous l'avons vu, l'intérêt d'avoir ces nouveaux paramètres tient surtout à la possibilité de définir de nouvelles modalités sur $W \times V$, lesquelles dépendent de l'existence de relations d'accessibilité sur $W \times V$. Dans l'exemple de la nécessité possible, nous avons parlé de la nécessité d'avoir une modalité portant sur la composante V, celle qui détermine la nécessité physique, une modalité dont la relation d'accessibilité est une relation binaire sur V (donc, en particulier, une relation binaire sur $W \times V$). Si $\mathbf{Q}$ est un ensemble de relations d'accessibilité sur $W \times V$, et si $\Psi : U \rightarrow \mathbf{Q}$ est une fonction attribuant une relation $Q \in \mathbf{Q}$ à chaque paramètre $u \in U$, alors le triplet (w, v, u) caractérise non seulement les vérités élémentaires et les liens d'interdépendance entre ces vérités mais aussi les liens de dépendance entre les liens eux-mêmes.[54]

Donnons un exemple simple avant de continuer pouvant illustrer l'idée de nécessité possible. Supposons que l'ensemble de toutes les configurations élémentaires possibles est donné par $W = \{w, x, y, z\}$, que l'ensemble des compatibilités entre ces configurations est donné par $V = \{a, b\}$, et que

[54] Il existe une certaine parenté entre cette construction et les structures sous-jacentes aux *logiques combinées* de Gabbay (1996a) et aux *produits de logiques modales* de Gabbay & Shehtman (1998; 2000; 2002). Voir la dernière section de ce chapitre.

l'ensemble des compatibilités entre ces compatibilités est donné par le singletons $U = \{u\}$. Supposons, par ailleurs, que $\mathbf{R} = \{R_1, R_2\}$ et $\mathbf{Q} = \{Q\}$, et que

R_1 = clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, x), (y, z)\}$

R_2 = clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, y), (x, z)\}$

Q = relation totale sur V, c.-à-d. $V \times V$

Définissons maintenant les fonctions $\Phi : V \to \mathbf{R}$ et $\Psi : U \to \mathbf{Q}$ comme suit :

$\Phi(a) = R_1$

$\Phi(b) = R_2$

$\Psi(u) = Q$

Ces relations sont illustrées dans la figure ci-dessous.

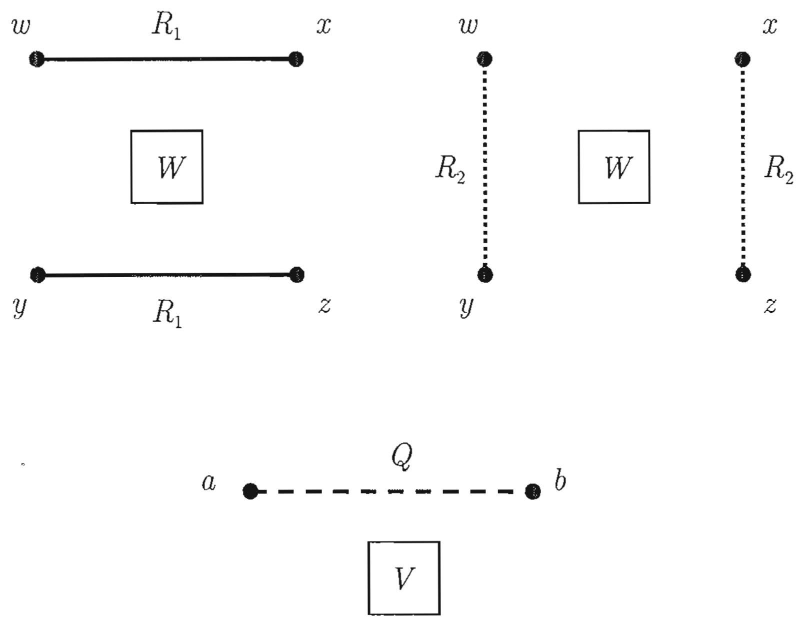


Figure 5.1.1 – Les relations R_1, R_2 et Q

La structure résultante est de la forme $< W\times V\times U,\ \Phi\cup\Psi >$ que nous pouvons représenter schématiquement par la figure 5.1.2.

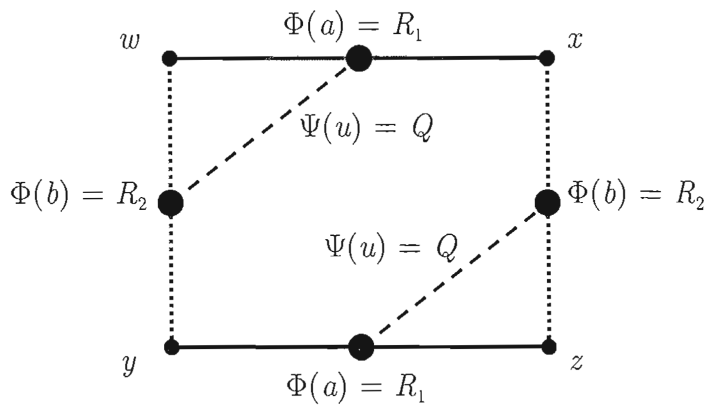


Figure 5.1.2 – Représentation schématique de $< W\times V\times U,\ \Phi\cup\Psi >$

Si R_1 et R_2 représentent des profils physiques possibles, alors Q représente le fait que les deux profils sont possibles, que la nécessité physique *à la* R_1 est possible à partir de la nécessité physique *à la* R_2. Cet exemple est suffisamment simple pour que l'on puisse le représenter schématiquement dans un seul diagramme, mais hélas ce ne sera pas possible dans un grand nombre de cas.

Aux chapitres 2 et 3, nous avons (tacitement) fait appel à ce type de structures pour élaborer une sémantique bidimensionnelle visant à exprimer adéquatement l'interprétation agrippéenne de KK, c'est-à-dire le principe (VK) derrière l'idée de « luminosité » de Williamson, et le contextualisme épistémique de Lewis. Cette sémantique était constituée à la base de paires $(w,\ c)$ où $w \in W$ est un monde et $c \in C$ est un contexte épistémique. Les structures auxquelles nous avons fait appel étaient de la forme $< W\times C,\ \Phi >$, où $\Phi : C \rightarrow \mathbf{R}$ associe à chaque contexte épistémique une relation d'accessibilité épistémique de l'ensemble $\mathbf{R} \subset \wp(W\times W)$.

Dans notre discussion sur le paradoxe de Fitch, nous avons introduit une notion de possibilité qui portait non pas sur les faits élémentaires mais sur les profils épistémiques des agents, une modalité qui était intrinsèquement d'ordre supérieur. Cette fois-ci, la deuxième dimension n'était pas là pour préciser des contextes mais pour préciser la nature de la connaissance dans une possibilité métaphysique.

Et finalement, dans la dernière partie du chapitre 3, nous avons utilisé une deuxième et troisième dimensions pour représenter l'ignorance du fait de connaître, il s'agit toujours de la même idée.

5.2 Structures relationnelles d'ordre supérieur (cas général)

Nous généralisons à présent la construction de la section présente. Pour tout n, soit W_n un ensemble de mondes d'ordre (ou de rang) n et posons

$\mathbf{W}_n = W_0 \times W_1 \times \ldots \times W_n$

$\mathbf{W} = W_0 \times W_1 \times W_2 \times \ldots.$

Soit $\mathbf{R}_n$ un ensemble de relations binaires sur $\mathbf{W}_n$ (c'est-à-dire un ensemble de sous-ensembles de $\mathbf{W}_n \times \mathbf{W}_n$). Pour tout $n \geq 0$, soit $\Phi_{n+1}: W_{n+1} \rightarrow \mathbf{R}_n$ une fonction surjective qui attribue à chaque élément de W_{n+1} une relation de $\mathbf{R}_n$ (la fonction qui attribue le profil épistémique à w_{n+1}). Nous définissons Φ : $\bigcup_{n\geq 0} W_{n+1} \rightarrow \bigcup_{n\geq 0} \mathbf{R}_n$ de la manière suivante : pour tout $n \geq 0$ et tout $w \in W_{n+1}$, $\Phi(w) = \Phi_{n+1}(w)$. La structure $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ est une *structure relationnelle d'ordre supérieur* ou une *SROS*. Nous verrons qu'il est parfois utile de travailler avec une *structure relationnelle d'ordre supérieur de rang fini n*, ou une *SROF*. Une SROF de rang n est une structure $< \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R >$ où :

$\Phi_{\leq n}(w) = \Phi_{m+1}(w)$, pour tout $w \in W_{m+1}$ et $0 \leq m < n$

$R \subset \mathbf{W}_n \times \mathbf{W}_n$

Un cas particulier de SROF de rang n est celle obtenue en « tronquant » une SROS $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ à un point $w \in W_{n+1}$ comme suit :

$\mathbf{S}_{\leq n}(w) = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, \Phi_{n+1}(w) >,$

où $\Phi_{\leq n}$ est définie de manière évidente. Nous appellerons cette structure *la restriction de* $\mathbf{S}$ *à* w. La figure suivante représente l'idée derrière les composantes d'une SROS.

$$
\begin{array}{llllllll}
\ldots & \mathbf{R}_n & & & & & & \\
 & W_n & \text{---}\Phi_n\!\rightarrow & \mathbf{R}_{n-1} & & & & \\
 & & & W_{n-1} & \ldots & & & \\
 & & & & \ldots & \text{---}\Phi_2\!\rightarrow & \mathbf{R}_1 & \\
 & & & & & & W_1 \quad \text{---}\Phi_1\!\rightarrow & \mathbf{R}_0 \\
 & & & & & & & W_0
\end{array}
$$

Figure 5.2.1 – Représentation d'une SROS

Nous présentons ici quelques conventions notationnelles qui reviendront souvent. Pour $n \geq 0$, $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots) \in \mathbf{W}$, $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots) \in \mathbf{W}$ et $w \in W_n$, nous définissons :

$\mathbf{w}_n = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$

$\mathbf{w}^n = (w_n, w_{n+1}, \ldots)$

$\mathbf{W}^n = W_n \times W_{n+1} \times \ldots$

$(\mathbf{w}_{-n}, w) = (w_0, \ldots, w_{n-1}, w, w_{n+1}, \ldots)$

$(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^{n+1}) = (w_0, w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots)$

Les notations analogues sont définies sur $\mathbf{W}_n$. Notamment, si

$\mathbf{w}_n = (w_{0,n}, w_{1,n}, \ldots, w_{n,n}) \in \mathbf{W}_n$,

l'élément $(\mathbf{w}_{n,-m}, v) \in \mathbf{W}_n$ est tout simplement

$(w_{0,n}, \ldots, w_{m-1,n}, v, w_{m+1,n}, \ldots, w_{n,n})$.

Par ailleurs, encore pour $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots)$ et $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots) \in \mathbf{W}$, nous définissons les relations binaires $\approx_n$, $\approx_{\geq n}$ et $[n+1]$ sur $\mathbf{W}$, $n \geq 0$, comme suit :

$\mathbf{w} \approx_n \mathbf{v}$ ssi $w_k = v_k$, pour tout $k \neq n$

$\mathbf{w} \approx_{\geq n} \mathbf{v}$ ssi $w_k = v_k$, pour tout $k \geq n$

$\mathbf{w}[n+1]\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_{\geq n} \mathbf{v}$ et $\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)$.

Nous définissons l'analogue des relations $\approx_m$, $\approx_{\geq m}$ et $[m+1]$ sur $\mathbf{W}_n$ (avec la même notation) pour $0 \leq m < n$.

La caractérisation des structures relationnelles d'ordre supérieur s'inspire de près de celle de structures de Kripke. Le tableau 5.2.2 rappelle certaines des conditions souvent rencontrées par les structures de Kripke.

Tableau 5.2.2 – Conditions sur les structures

NOM	CONDITION
K	La classe de toutes les structures
K4	La classe des structures transitives
T	La classe des structures réflexives
B	La classe des structures symétriques
KD	La classe des structures non-bornées à droite
S4	La classe des structures réflexives et transitives
S5	La classe des structures réflexives, symétriques et transitives

Si $\mathbf{S} = \langle \mathbf{W}, \Phi \rangle$ est une SROS, nous caractériserons $\mathbf{S}$ avec une suite $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n, \ldots)$, où κ_n est la condition que remplissent toutes les relations de $\mathbf{R}_n$. Pour caractériser une SROF $\langle \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R \rangle$ de rang n, nous utiliserons $\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = (\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_{n+1})$, où κ_{n+1} caractérise R et κ_m caractérise les relations de $\mathbf{R}_m$, pour $m \leq n$. Par exemple, si pour tout $n \geq 0$ les relations de $\mathbf{R}_n$ sont des relations d'équivalence, alors $\mathbf{S}$ aura pour caractéristique (**S5**, **S5**, ..., **S5**, ...), ou $(\mathbf{S5})^\omega$ pour abréger.

5.3 Structures relationnelles d'ordre supérieur simples

Nous nous intéresserons à un cas particulier de SROS, la *structure relationnelle d'ordre supérieur simple*, ou SROSs. Une SROSs $\mathbf{S} = \langle \mathbf{W}, \Phi \rangle$ est une SROS qui possède la particularité suivante : pour tout n, les relations $R \in \mathbf{R}_n$ ne dépendent que de la n-ième composante, c'est-à-dire que

$\mathbf{w}_n R \mathbf{v}_n$ ssi $w_n R' v_n$,

où R' est une relation binaire sur W_n. Pour cette raison, nous dirons que Φ est une fonction qui attribue à chaque $w \in W_{n+1}$ une relation binaire sur W_n (et non pas une relation binaire sur $\mathbf{W}_n$). Par ailleurs, pour $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots)$ et $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots) \in \mathbf{W}$, nous définissons la relation binaire $\{n+1\}$ sur $\mathbf{W}$, $n \geq 0$, de la manière suivante :

$\mathbf{w}\{n+1\}\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{v}$ et $\Phi(w_{n+1})(w_n, v_n)$.

Dans le cas d'une SROSs $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$, la restriction de $\mathbf{S}$ à $w \in W_{n+1}$ est définie comme la structure de Kripke $\mathbf{S}_n(w) = < W_n, \Phi_{n+1}(w) >$. La notion de caractéristique pourra être utilisée ici aussi (*mutatis mutandis*) pour caractériser les SROSs.

Puisque les SROSs sont plus simples, nous préférerons débuter notre examen des structures relationnelles d'ordre supérieur avec elles, que ce soit pour les notions sémantiques ou syntaxiques.

5.4 Syntaxe

Les SROS seront mises à profit pour interpréter un langage modal d'ordre supérieur. Définissons ce langage.

Le langage modal d'ordre supérieur L décrit plus bas comporte des opérateurs hybrides d'une nature assez particulière. Pour exprimer la plupart des notions modales d'ordre supérieur, ces opérateurs hybrides ne seront pas nécessaires, mais ils se révéleront particulièrement utiles pour les preuves de complétudes. La plupart des expressions auront un rang, à la fois les modalités, les variables propositionnelles et les nominaux, lequel sera important pour l'évaluation sémantique.

Le langage L présuppose à la base un ensemble de variables propositionnelles Prop et un ensemble de nominaux Nom. Le rang d'une variable propositionnelle $p \in$ Prop (resp. d'un nominal $\alpha \in$ Nom) est noté $r(p)$ (resp. $r(\alpha)$), et, pour chaque $n \geq 0$, il y a une infinité (dénombrable) de variables propositionnelles et de nominaux de rang n. Pour $n \geq 0$, nous définissons :

$\mathrm{Prop}_n = \{p \in \mathrm{Prop} : r(p) = n\}$

$\mathrm{Prop}_{\leq n} = \{p \in \mathrm{Prop} : r(p) \leq n\}$

$\mathrm{Nom}_n = \{\alpha \in \mathrm{Nom} : r(\alpha) = n\}$

$\mathrm{Nom}_{\leq n} = \{\alpha \in \mathrm{Nom} : r(\alpha) \leq n\}$

Par ailleurs, L est doté d'une suite de modalités '$\Box_n$' (une pour chaque $n \geq 1$), de modalités constantes '$\Box_\alpha$' (une pour chaque nominal $\alpha \in \mathrm{Nom}$), et de modalités d'actualité '$@_\alpha$' (également une pour chaque nominal α). Informellement : '$\Box_n$' est une modalité « dépendante » ou « variable », c'est-à-dire dont la signification est donnée par la n-ième coordonnée w_n du point $\mathbf{w}$ où elle est évaluée (via la fonction Φ_n); '$\Box_\alpha$' est une modalité « constante » ou « invariable » et dont la signification est donné par la coordonnée dénotée par α; et '$@_\alpha$', au point $\mathbf{w}$, signifie tout simplement « au point $\mathbf{v}$ », où toutes les coordonnées de $\mathbf{v}$ sont identiques à celles de $\mathbf{w}$ sauf possiblement v_n qui représente la valeur dénotée par α. Nous verrons comment cela s'articule plus précisément plus loin. Les clauses syntaxiques définissant les formules du langage L sont données par :

$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid \Box_\beta\varphi \mid \Box_m\varphi$

où, bien sûr, $p \in \mathrm{Prop}$, $\alpha \in \mathrm{Nom}$, $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$ et $m \geq 1$. (Les autres connecteurs booléens et les duals des modalités sont introduits par définition.) Nommons Form (ou Form_L pour mettre en valeur L) l'ensemble des formules de L.

Pour des besoins futurs, il nous faut étendre la notion de rang r à l'ensemble des formules de L, que nous effectuons de la manière suivante :

$r(\neg\varphi) = r(\varphi)$;

$r(\varphi \wedge \psi) = \max(r(\varphi), r(\psi))$;

$r(@_\alpha\varphi) = r(\Box_\alpha\varphi) = \max(r(\alpha), r(\varphi))$;

$r(\Box_m\varphi) = \max(m, r(\varphi))$

Par ailleurs, certains sous-langages de L seront intéressants pour nous. D'abord, pour tout $n \geq 1$, le langage L_n est le langage donné par les clauses syntaxiques suivantes :

$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid \Box_{n+1}\varphi$

où $p \in \mathrm{Prop}_n$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. L'ensemble des formules de L_n est dénoté par Form_n. Ce langage comporte une seule modalité, en l'occurrence la modalité '$\Box_{n+1}$', et tous ses autres éléments syntaxiques primitifs sont de rang n. Il sera particulièrement utile pour les SROSs. Nous définissons, ensuite, le langage $L_{\leq n}$ qui est donné par les clauses suivantes :

$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid \Box_\beta\varphi \mid \Box_{m+1}\varphi$

où $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$, $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n}\backslash\mathrm{Nom}_0$ et $0 \leq m \leq n$. Celui-ci comporte des modalités constantes et variables, mais ne possède qu'une seule modalité de rang $n+1$ (la modalité '$\Box_{n+1}$'). L'ensemble de formules de $L_{\leq n}$ sera dénoté par $\mathrm{Form}_{\leq n}$.

Les définitions des paragraphes qui suivent pourront être reconsultées plus tard au besoin. Une *formule constante* est une formule dans laquelle il n'y a aucune modalité '$\Box_m$', pour $m \geq 1$. Cette appellation est due au fait que la présence de modalités '$\Box_m$' qui rendent les formules dans lesquelles elles figurent « variables » en signification, selon ce que nous avons mentionné plus haut concernant leur interprétation à un point $\mathbf{w}$. Le *fragment constant* est l'ensemble des formules constantes et est dénoté par FCon (ou FCon_L). Nous définissons enfin les ensembles $\mathrm{FCon}_n = \mathrm{Form}_n \cap \mathrm{FCon}$ et $\mathrm{FCon}_{\leq n} = \mathrm{Form}_{\leq n} \cap \mathrm{FCon}$.

Posons $\mathbf{Nom}_n = \mathrm{Nom}_0\times\mathrm{Nom}_1\times\ldots\times\mathrm{Nom}_n$. Un élément $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$ est de la forme $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_m \in \mathrm{Nom}_m$, pour $0 \leq m \leq n$. Nous utiliserons (parfois) les conventions notationnelles suivantes : pour $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$ et $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$

$@(\alpha) = @_\alpha$

$\Box(\alpha) = \Box_\alpha$

$\wedge\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$

$@(\boldsymbol{\alpha}) = @(\alpha_0)@(\alpha_1) \ldots @(\alpha_n)$

$\boldsymbol{\alpha}_m = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$

$\boldsymbol{\alpha}_{-m} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$

$\boldsymbol{\alpha}^m = (\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$

$(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$

$(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}^{m+1}) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n)$

Posons par ailleurs

$\mathbf{Nom} = \mathrm{Nom}_0 \times \mathrm{Nom}_1 \times \ldots$

$\mathbf{Nom}_{-n} = \mathrm{Nom}_0 \times \ldots \times \mathrm{Nom}_{n-1} \times \mathrm{Nom}_{n+1} \times \ldots$

$\mathbf{Nom}^n = \mathrm{Nom}_n \times \mathrm{Nom}_{n+1} \times \ldots$

Les conventions précédentes sont adaptées *mutatis mutandis* pour **Nom** lorsqu'elles peuvent s'appliquer.

Pour chaque formule φ, nous définissons l'ensemble des nombres naturels $rep(\varphi)$ comprenant tous les rangs susceptibles d'être importants pour l'évaluation de 'φ', l'idée étant que si un rang n n'appartient pas à $rep(\varphi)$ alors la signification de 'φ' ne dépend pas de la n-ième coordonnée (de n'importe quel monde où elle est évaluée). Cet ensemble est défini de la manière suivante : $m \in rep(\varphi)$ ssi (au moins) une des conditions suivantes est vraie :

(rp1) il existe $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ qui apparaît dans φ

(rp2) il existe $p \in \mathrm{Prop}_n$ qui apparaît dans φ et $m \leq n$

(rp3) '$\Box_n$' apparaît dans φ et $m \leq n$

Nous définissons également l'ensemble de nombres $rep_s(\varphi)$ de la manière suivante : $m \in rep_s(\varphi)$ ssi (au moins) une des conditions suivantes est vraie :

(rps1) il existe $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ qui apparaît dans φ

(rps2) il existe $p \in \mathrm{Prop}_m$ qui apparaît dans φ

(rps3) '$\Box_m$' ou '$\Box_{m+1}$' apparaissent dans φ

Cet ensemble sera important pour la sémantique des SROSs.

5.5 Sémantique

Nous donnons ici les règles pour interpréter le langage L dans les structures relationnelles d'ordre supérieur. Il faudra d'abord définir la notion d'un modèle de L (basé sur une structure relationnelle d'ordre supérieur).

5.5.1 Sémantique pour L dans les SROS

Un *modèle* $\mathbf{M}$ *de* L est une SROS $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ munie d'une fonction de valuation

$val : \text{Prop} \cup \text{Nom} \rightarrow \bigcup_{n\geq 0}\wp(\mathbf{W}_n) \cup \bigcup_{n\geq 0} W_n$

qui doit satisfaire les deux conditions :

$val(p) \subset \mathbf{W}_n$, si $r(p) = n$

$val(\alpha) \in W_n$, si $r(\alpha) = n$

Nous dirons alors que $\mathbf{M}$ est *un modèle basé sur* $\mathbf{S}$. Un modèle est *nommé* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout w, si $w \in W_n$, il existe $\alpha \in \text{Nom}_n$ tel que $\text{val}(\alpha) = w$ (autrement dit : pour tout n, tout élément de W_n est nommé par un nominal de Nom_n).

La restriction de *val* à $\text{Prop}_n \cup \text{Nom}_n$ est nommée val_n, et la restriction de *val* à $\text{Prop}_{\leq n} \cup \text{Nom}_{\leq n}$ est nommée $val_{\leq n}$. Si $w \in W_{n+1}$, nous définissons *la restriction de* $\mathbf{M}$ *à* w, notée $\mathbf{M}_{\leq n}(w)$, comme $< \mathbf{S}_{\leq n}(w), val_{\leq n} >$.

Pour une fonction *val* donnée, nous définissons la relation $[\beta] \subset \mathbf{W}\times\mathbf{W}$, où $\beta \in \text{Nom}_{n+1}$, comme

$\mathbf{w}[\beta]\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_{\geq n} \mathbf{v}$ et $\Phi(val(\beta))(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)$.

La modalité '$\Box_\beta$' sera interprétée avec la relation $[\beta]$, et la modalité '$\Box_{n+1}$' avec la relation $[n+1]$. Soient $p \in \text{Prop}_n$, $\alpha \in \text{Nom}_n$ et $\beta \in \text{Nom}_{n+1}$, les clauses sémantiques pour interpréter les formules de L dans $\mathbf{M}$ à un point $\mathbf{w}$ sont :

$\mathbf{w} \nVdash \bot$

$\mathbf{w} \Vdash p$ ssi $\mathbf{w}_n \in val(p)$

$\mathbf{w} \Vdash \alpha$ ssi $val(\alpha) = w_n$

$\mathbf{w} \Vdash \neg\varphi$ ssi $\mathbf{w} \nVdash \varphi$

$\mathbf{w} \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w} \Vdash \psi$

$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, où $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{v}$ et $v_n = val(\alpha)$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{v}$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[n{+}1]\mathbf{v}$

Suivant les conventions notationnelles que nous nous sommes données plus haut, les trois dernières clauses peuvent aussi être formulées comme :

$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)) \Vdash \varphi$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_\beta\varphi$ ssi $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n$ t. q. $\Phi(val(\beta))(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_n\varphi$ ssi $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n$ t. q. $\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)$

Ces mêmes clauses sémantiques permettent d'interpréter les formules de $L_{\leq n}$ dans la restriction $\mathbf{M}_{\leq n}(w)$. Ces clauses sémantiques attribuent à chaque formule φ une extension (propositionnelle) que nous noterons par $[\![\varphi]\!]$. L'extension d'une formule $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ dans $\mathbf{M}_{\leq n}(w)$ sera notée par $[\![\varphi]\!]_{\leq n}(w)$.

Nous introduisons les notions de *validité dans un modèle* $\mathbf{M}$, *dans une structure* $\mathbf{S}$ et *dans une classe de structures* $\mathfrak{S}$, lesquelles sont de plus en plus strictes, de la manière suivante :

$\mathbf{M} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

$\mathbf{S} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M} \Vdash \varphi$, pour tout modèle $\mathbf{M}$ basé sur la structure $\mathbf{S}$

$\mathfrak{S} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{S} \Vdash \varphi$, pour toute structure $\mathbf{S}$ dans $\mathfrak{S}$

Si E est un ensemble de formules, nous définissons également la notion de satisfaction d'un ensemble de formules à un point d'un modèle :

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash E$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \psi$, pour tout $\psi \in E$

Les notions de validité ci-dessus peuvent être adaptées pour s'appliquer à un ensemble de formules. Nous définissons également la notion de *conséquence sémantique (locale) à un point d'un modèle* :

$\mathbf{M}, \mathbf{w}, E \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$, si $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash E$

Encore une fois, nous pouvons définir une notion de conséquence sémantique plus stricte en s'inspirant des diverses notions de validité décrites plus haut; en particulier :

$E \Vdash \varphi$ ssi $[< \mathbf{S},\ val >, \mathbf{w} \Vdash E \Rightarrow < \mathbf{S},\ val >, \mathbf{w} \Vdash \varphi]$, pour toute structure $\mathbf{S} = < \mathbf{W},\ \Phi >$, pour toute valuation *val* sur $\mathbf{S}$ et pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

5.5.2 Sémantique pour L dans les SROSs

Un *modèle simple* $\mathbf{M}$ *de* L *basé sur une structure relationnelle d'ordre supérieur* est un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{S},\ val >$ tel que $\mathbf{S} = < \mathbf{W},\ \Phi >$ est une SROSs et, pour tout $p \in \mathrm{Prop}_n$,

$val(p) = \mathbf{W}_{n-1} \times V$, où $V \subset W_n$

Dans le cas des modèles simples, nous considérerons donc que $val(p) \subset W_n$ (et non pas $val(p) \subset \mathbf{W}_n$). Pour une fonction *val* donnée, nous définissons la relation $\{\beta\} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{W}$, avec $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, par

$\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{v}$ et $\Phi(val(\beta))(w_n,\ v_n)$.

Certaines des clauses sémantiques peuvent être reformulées pour les modèles simples à la lumière de cette discussion. Soient $p \in \mathrm{Prop}_n$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, nous avons :

$\mathbf{w} \Vdash p$ ssi $w_n \in val(p)$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_\beta \varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{v}$

ssi $(\mathbf{w}_{-n},\ w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$ t. q. $\Phi(val(\beta))(w_n,\ w)$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_n \varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{n\}\mathbf{v}$

ssi $(\mathbf{w}_{-n},\ w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$ t. q. $\Phi(w_{n+1})(w_n,\ w)$

La *restriction simple à* $w \in W_{n+1}$ *du modèle simple* $\mathbf{M}$, noté $\mathbf{M}_n(w)$, est définie comme la paire $< \mathbf{S}_n(w),\ val_n >$, et constitue un modèle de Kripke. Les clauses précédentes nous permettent d'évaluer les formules de L_n dans ce modèle restreint. L'extension de φ dans $\mathbf{M}_n(w)$ est notée $[\![\varphi]\!]_n(w)$.

5.6 Autres syntaxes et sémantiques

Nous allons considérer deux autres systèmes. Le premier permettra d'exprimer des nuances de portées et le deuxième concernera les structures bidirectionnelles servant à exprimer notamment des modalités temporelles.

5.6.1 Modalités avec portées

Dans l'analyse du paradoxe de Fitch au chapitre 4, nous avons examiné des cas où une modalité pouvait avoir une portée. Normalement, il est question de la portée – étroite ou étendue – d'un terme apparaissant dans le champ d'action d'une modalité, mais nous avons vu dans ce chapitre que les modalités pouvaient aussi avoir une portée. On rencontre la notion de portée plus souvent qu'autrement lorsque l'on discute de la référence d'un nom dans un contexte modal. Si la référence d'un nom ou d'un terme dépend du monde d'évaluation, comme c'est le cas avec une description définie, une certaine ambiguïté de « portée » apparaît dans le langage. Par exemple, l'énoncé

(1) Le Président des États-Unis aurait pu être un vétéran

a deux interprétations saillantes selon notre compréhension de l'interaction entre le terme 'Le Présidente des États-Unis' (abrégé par 'POTUS') et le verbe modal 'aurait pu'. D'un côté, (1) peut signifier

(1.1) Celui qui est actuellement POTUS aurait pu être un vétéran

(1.2) Celui qui aurait pu être POTUS est un vétéran

On dit que la description définie POTUS est en portée étendue dans (1.1) et en portée étroite dans (1.2). En première approximation, l'énoncé (1) peut se traduire formellement par

(1.3) $\Diamond \mathrm{Vet}(\mathrm{POTUS})$

où '$\mathrm{Vet}(x)$' est le prédicat « est un vétéran ». La nuance entre (1.1) et (1.2) tient à la manière d'interpréter 'POTUS' : soit 'POTUS' reçoit sa valeur

« avant » d'évaluer '$\Diamond$' (on dira alors qu'il est en portée étendue), soit 'POTUS' reçoit sa valeur « après » l'évaluation de '$\Diamond$' (on dira alors qu'il est en portée étroite). Cette différence dans l'évaluation de '$\Diamond$Vet(POTUS)' peut être exprimée en termes de mondes possibles comme suit :

(1.4) $w \Vdash \Diamond$Vet(POTUS) ssi il existe un monde possible v (accessible de w) où l'individu qui est POTUS à w est Vet à v

(1.5) $w \Vdash \Diamond$Vet(POTUS) ssi il existe un monde possible v (accessible de w) où l'individu qui est POTUS à v est Vet à v

Pour exprimer ces distinctions de portée dans la syntaxe, nous ajoutons au langage un opérateur lambda 'λ' et une opération de d'évaluation '[ ]'. Ensemble, ces deux opérateurs serviront à marquer la portée. L'énoncé (1.3) en portée étendue sera écrit traduit syntaxiquement par

(1.6) $\lambda x.\Diamond\mathrm{Vet}(x)[\mathrm{POTUS}]$

et (1.3) en portée étroite sera traduit par

(1.7) $\Diamond\lambda x.\mathrm{Vet}(x)[\mathrm{POTUS}]$

Le duo 'λx' et '[ ]' nous indique quand/où il faut interpréter 'POTUS'.

La notion de portée est importante pour le langage L malgré le fait qu'il ne comporte aucune description définie (il s'agit après tout d'un langage propositionnelle). La portée ne se manifeste pas au niveau d'une interaction entre termes d'individus et modalités (car il n'y a pas de termes d'individus) mais dans l'interaction entre modalités de rangs différents. Prenons l'énoncé

(2) $\Diamond_2\Box_1 p$

Un tel énoncé pourrait signifier, par exemple, qu'il est nécessaire que p selon une certaine notion de nécessité. Dans cette interprétation, '$\Box_1$' est en portée étroite, et l'interprétation en portée étendue n'est pas très intéressante. Mais considérons l'énoncé

(3) $\Box_2(\Diamond_1 p \leftrightarrow \Diamond_1 p)$

Il y a une interprétation de (3) qui est trivialement vraie et l'autre non. Si les deux modalités '$\Diamond_1$' sont interprétées soit en portée étroite ou soit en portée étendue, (3) correspondrait vraisemblablement à un théorème (la nécessitation appliquée à une instance de tautologie). Mais si une des modalités '$\Diamond_1$' est interprétée en portée étroite et l'autre en portée étendue, (3) signifie tout autre chose : qu'il est possible que p selon la possibilité actuelle ssi il est possible que p selon toute autre possibilité (possible). Cet exemple montre que le phénomène de portée apparaît dès qu'une expression est interprétée différemment d'un monde à l'autre, que cette expression soit un terme d'individu ou non. Pour exprimer cette distinction entre interprétations, nous pouvons encore utiliser un opérateur d'abstraction 'λ' et un opérateur d'évaluation '[ ]'. La première interprétation correspondrait aux énoncés

(3.1) $\lambda x, y.\Box_2(\Diamond_1(x)p \leftrightarrow \Diamond_1(y)p)[\eta][\eta]$

(3.2) $\Box_2\lambda x, y.(\Diamond_1(x)p \leftrightarrow \Diamond_1(y)p)[\eta][\eta]$

Ici, 'η' est un nom non-rigide de la modalité que représente '$\Diamond_1$'. (En général, puisqu'il n'y a qu'une seule modalité variable de rang n (la modalité '$\Diamond_n$'), nous omettrons d'utiliser la fonction d'évaluation pour préciser la portée.) La deuxième interprétation de (3) correspondrait plutôt aux énoncés

(3.3) $\lambda x.\Box_2\lambda y.(\Diamond_1(x)p \leftrightarrow \Diamond_1(y)p)[\eta][\eta]$

(3.4) $\lambda y.\Box_2\lambda x.(\Diamond_1(x)p \leftrightarrow \Diamond_1(y)p)[\eta][\eta]$

Par défaut, dans le langage L, toutes les modalités sont interprétées en portée étroite, le langage L_λ, que nous définirons sous peu, permettra de sélectionner la portée des modalités dans une formule.

Pour exprimer la portée des modalités variables nous devrons utiliser des variables. Soit donc Var_n un ensemble dénombrable de variables (de rang n), pour chaque rang $n \geq 1$, et soit $\mathrm{Var} = \bigcup_{n\geq 1}\mathrm{Var}_n$. Pour chaque $x \in \mathrm{Var}_n$, nous ajouterons une opération d'abstraction, 'λx', et une modalité « variable », notée par '$\Box_x$', '$\Box(x)$' ou '$\Box_n(x)$'. Nous définissons conjointement l'ensemble Form_λ des formules de L_λ et, pour chaque $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$, l'ensemble $bv(\varphi)$ des variables liées de la formule φ :

(F1) Si $p \in \mathrm{Prop}$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}$, alors $p, \alpha \in \mathrm{Form}_\lambda$ et $bv(p) = bv(\alpha) = \varnothing$;

(F2) Si $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\lambda$, alors $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et

$$bv(\neg\varphi) = bv(\varphi)$$
$$bv(\varphi \wedge \psi) = bv(\varphi) \cup bv(\psi);$$

(F3) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}$, alors $@_\alpha\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et $bv(@_\alpha\varphi) = bv(\varphi)$;

(F4) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$, alors $\Box_\beta\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et

$$bv(\Box_\beta\varphi) = bv(\varphi);$$

(F5) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$, $x \in \mathrm{Var}$ et $x \notin bv(\varphi)$, alors $\Box_x\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et

$$bv(\Box_x\varphi) = bv(\varphi);$$

(F6) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$, $x \in \mathrm{Var}$ et $x \notin bv(\varphi)$, alors $\lambda x.\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et

$$bv(\lambda x.\varphi) = bv(\varphi) \cup \{x\};$$

Si $v(\varphi)$ est l'ensemble des variables qui figurent dans φ, alors l'ensemble des variables libres de φ est $fv(\varphi) = v(\varphi)\backslash bv(\varphi)$. Nous avons laissé tomber l'opération d'évaluation car, comme nous l'avons précisé plus haut, il n'y qu'une seule modalité (variable) de rang n. Une formule φ est *close* si $fv(\varphi) = \varnothing$. L'ensemble de formules closes est noté par CForm_λ et l'ensemble des formules constantes FCon_λ. L'ensemble des formules de rang $\leq n$, dénoté $\mathrm{Form}_{\lambda\leq n}$, est obtenu de Form_λ en modifiant les clauses de la manière suivante :

(F1) $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$ au lieu de Prop et Nom;

(F3) $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$ au lieu de Nom;

(F4) $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n}\backslash\mathrm{Nom}_0$ au lieu $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$;

(F5) et (F6) $x \in \mathrm{Var}_{\leq n+1}$ au lieu de $x \in \mathrm{Var}$.

(Ici, $\mathrm{Var}_{\leq n+1} = \mathrm{Var}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{Var}_{n+1}$.) Les formules Form_λ peuvent contenir des modalités variables de rang (jusqu'à) n+1 et des modalités constantes de rang (jusqu'à) n. Nous définissons ensuite $\mathrm{CForm}_{\lambda\leq n} = \mathrm{CForm}_\lambda \cap \mathrm{Form}_{\lambda\leq n}$ et $\mathrm{FCon}_{\lambda\leq n} = \mathrm{FCon}_\lambda \cap \mathrm{Form}_{\lambda\leq n}$. les définitions des ensembles $rep(\varphi)$ et $rep_s(\varphi)$, pour chaque $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$, restent les mêmes à une différence près : '$\Box_n$' est remplacé par '$\Box_x$', où $x \in \mathrm{Var}_n$.

Sémantique pour L_λ dans les SROS (cas général)

L'interprétation des formules de L_λ dans un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{W}, \Phi, val >$, qui est basé sur la structure relationnelle d'ordre supérieur $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$, nécessite l'introduction de la notion de suite d'attributions (ou de valuations) pour pouvoir rendre compte de l'effet du connecteur 'λ'. Une *attribution de valeurs aux variables de rang n dans le modèle* **M** est une fonction s_n: $\mathrm{Var}_n \to W_n$, pour $n \geq 1$. Une *suite d'attributions dans le modèle* **M** est une suite

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots)$

où chaque s_n est une attribution de valeurs aux variables de Var_n. (Nous pouvons également voir **s** comme une fonction de Var dans $\bigcup_{n\geq 1} W_n$ qui envoie les variables de rang n dans W_n.) La notion de suite d'attributions remonte à Tarski et constitue maintenant un appareil standard utilisé pour définir les clauses sémantiques d'un opérateur qui lie des variables (comme un quantificateurs ou, dans le cas présent, comme l'opération 'λ'). Puisqu'une suite d'attributions ne dépend pas de la valuation *val* de **M**, nous noterons l'ensemble des suites d'attributions de n'importe quel modèle basé sur **S** par Att(**S**). Pour chaque variable $x \in \mathrm{Var}$, nous définissons la relation binaire $\approx_x$ suivante sur Att(**S**)

$\mathbf{s} \approx_x \mathbf{t}$ ssi $\mathbf{s}(y) = \mathbf{t}(y)$, pour tout $y \neq x$

Si $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$, nous définissons la relation $[\mathbf{s}(x)] \subset \mathbf{W}\times\mathbf{W}$ comme la relation

$\mathbf{w}[\mathbf{s}(x)]\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_{\geq n} \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}_n\Phi(s_{n+1}(x))\mathbf{v}_n$

L'interprétation d'une formule de L_λ à un point $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ d'un modèle **M** est donc relative à une suite $\mathbf{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$. Supposons que $p \in \mathrm{Prop}_n$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$, et $\varphi \in \mathrm{Form}$. La satisfaction d'une formule est alors définie récursivement par les clauses :

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \nVdash \bot$

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash p$ ssi $\mathbf{w}_n \in val(p)$

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash \alpha$ ssi $val(\alpha) = w_n$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \neg\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \nVdash \varphi$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \psi$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha\varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)), \mathrm{s} \Vdash \varphi$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{v}$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_x\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[\mathrm{s}(x)]\mathbf{v}$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathbf{t} \Vdash \varphi$, où $\mathbf{t} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$ est t. q. $\mathbf{t} \approx_x \mathrm{s}$ et $\mathbf{t}(x) = w_{n+1}$

Nous adoptons la convention suivante pour faciliter l'écriture de la clause précédente : si $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$, $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$ et $w \in W_{n+1}$, alors (s_{-x}, w) dénotera l'unique suite d'attributions $\mathbf{t}$ telle que $\mathbf{t} \approx_x \mathrm{s}$ et $\mathbf{t}(x) = w$. De cette manière, nous avons les reformulations suivantes des deux dernières clauses :

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_x\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n$ t. q. $\Phi(s_{n+1}(x))(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)$

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w_{n+1}) \Vdash \varphi$

Nous écrirons $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$, et les autres notions de validité sont adaptées *mutatis mutandis.* L'extension d'une formule φ pour une certaine suite s se note $[\![\varphi]\!]_\mathrm{s}$; si $[\![\varphi]\!]_\mathrm{s}$ ne dépend pas s, cette extension sera notée $[\![\varphi]\!]$ tout court.

Ces clauses sémantiques peuvent aussi servir à interpréter les formules de $\mathrm{Form}_{\lambda\leq n}$ (de rang $\leq n$) sur des SROF de rang n (des structures relationnelles d'ordre supérieur de rang fini n). En ce qui concerne les suites d'attributions, une formule de $\mathrm{Form}_{\lambda\leq n}$ a des variables (modales) de rang au plus n+1, il suffira donc de tronquer les éléments de $\mathrm{Att}(\mathbf{S})$ au rang n+1. Si $\mathbf{S}_{\leq n}(w)$ est une SROS de rang n (avec $w \in W_{n+1}$), nous définissons $\mathrm{Att}(\mathbf{S}_{\leq n}(w))$ comme l'ensemble des fonctions $\mathrm{s}_{\leq n}\colon \mathrm{Var}_{\leq n+1} \to \bigcup_{1\leq m\leq n+1} W_m$ telles que

$\mathrm{s}_{\leq n}(x) \in W_m$, si $x \in \mathrm{Var}_m$ et $1 \leq m \leq n$

$\mathrm{s}_{\leq n}(x) = w$, si $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$

La deuxième contrainte sur $\mathrm{s}_{\leq n}$ est là pour nous assurer que les valeurs que $\mathrm{s}_{\leq n}$ donne aux variables de rang $n + 1$ qui sont représentées dans le modèle de rang n ($\mathbf{S}_{\leq n}(w)$ n'a que w comme valeur de rang n+1). Par ailleurs, si $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$, $\mathrm{s}_{\leq n}(w)$ dénotera l'attribution de $\mathrm{Att}(\mathbf{S}_{\leq n}(w))$ telle que

$s_{\leq n}(w)(x) = s(x)$, si $x \in \mathrm{Var}_m$ et $1 \leq m \leq n$

$s_{\leq n}(w)(x) = w$, si $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$

Il est clair que tout élément de $\mathrm{Att}(\mathbf{S}_{\leq n}(w))$ est de la forme $s_{\leq n}(w)$ pour un certain $s \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$.

Sémantique pour L_λ dans les SROSs (cas simple)

Comme nous l'avons fait pour le langage L, nous soulignons un type de modèle particulier basé sur une structure relationnelle d'ordre supérieur simple. Notons d'abord qu'un modèle $\mathbf{M}$ de L est également un modèle de L_λ. Nous définissons donc un *modèle simple de* L_λ comme étant un modèle simple de L, c.-à-d. un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{W}, \Phi, val >$ de L tel que $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ est une SROSs et tel que val associe une extension de W_n (et non pas de $\mathbf{W}_n$) à chaque variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_n$. Nous définissons, dans ce cas, pour chaque $x \in \mathrm{Var}_n$, la relation $\{s(x)\} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{W}$ comme suit :

$\mathbf{w}\{s(x)\}\mathbf{v}$ ssi $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{v}$ et $w_n\Phi(s_{n+1}(x))v_n$

Si $p \in \mathrm{Prop}_n$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, et $x \in \mathrm{Var}_{n+1}$, nous obtenons les reformulations suivantes pour les clauses sémantiques dans le cas des modèles simples pour L_λ :

$\mathbf{w}, s \Vdash p$ ssi $w_m \in val(p)$

$\mathbf{w}, s \Vdash \Box_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{w}, s \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{v}$

$\mathbf{w}, s \Vdash \Box_x\varphi$ ssi $\mathbf{w}, s \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{s(x)\}\mathbf{v}$

5.6.2 Logique modale temporelle (ou bidirectionnelle)

Les langages présentés jusqu'ici n'utilisent qu'une direction des relations d'accessibilité des structures. Or, il se trouve que la modélisation de notions modales temporelles requiert des modalités qui peuvent « parcourir » les relations d'accessibilité dans les deux directions. Par exemple, la modalité 'F' qui signifie « dans le futur » ou « à un moment du futur », est l'inverse de la modalité 'P' qui signifie « dans le passé » ou « à un moment du passé ». Plus loin, dans le chapitre sur les conditionnelles, nous verrons un exemple de modalité bidirectionnelle non-temporelle.

Sur le plan syntaxique, nous remplacerons les modalités variables '$\Box_n$' pour les modalités variables 'H_n' et 'G_n', et les modalités constantes '$\Box_\alpha$', avec $\alpha \in$ Nom, pour les modalités constantes 'H_α' et 'G_α'. Les clauses syntaxiques pour les formules de ce langage sont

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid H_n\varphi \mid G_n\varphi \mid H_\beta\varphi \mid G_\beta\varphi$$

où $p \in$ Prop, $\alpha \in$ Nom, $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$ et $n \geq 1$. Nous introduisons la notation suivante :

$$P\varphi = \neg H\neg\varphi$$

$$F\varphi = \neg G\neg\varphi$$

pour $(P, H) = (P_n, H_n)$ ou (P_β, H_β) et $(F, G) = (F_n, G_n)$ ou (F_β, G_β). Toutes les autres notions syntaxiques sont définies en prenant cette différence en considération. Appelons ce langage L_T, et l'ensemble de ses formules Form_T. Nous définissons les formules du langage $L_{T\leq n}$, qui est l'analogue temporel du langage $L_{\leq n}$, par les clauses :

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid H_{m+1}\varphi \mid G_{m+1}\varphi \mid H_\beta\varphi \mid G_\beta\varphi$$

où $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$, $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n}\backslash\mathrm{Nom}_0$ et $0 \leq m \leq n$. L'ensemble des formules de $L_{T\leq n}$ est dénoté par $\mathrm{Form}_{T\leq n}$. Nous définissons aussi le langage L_{Tn} (l'analogue temporel de L_n) par les clauses :

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\alpha\varphi \mid H_{n+1}\varphi \mid G_{n+1}\varphi$$

où $p \in \mathrm{Prop}_n$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. L'ensemble des formules de L_{Tn} est dénoté par Form_{Tn}.

Une formule constante est définie de la même manière et l'ensemble de ces formules est dénoté par FCon_T. Par ailleurs, nous définissons

$$\mathrm{FCon}_{T\leq n} = \mathrm{FCon}_T \cap \mathrm{Form}_{T\leq n}$$

$$\mathrm{FCon}_{Tn} = \mathrm{FCon}_T \cap \mathrm{Form}_{Tn}$$

La définitions des ensembles $rep(\varphi)$ et $rep_s(\varphi)$, pour chaque $\varphi \in \text{Form}_T$, restent les mêmes à la différence suivante près : il faut remplacer '$\Box_n$' dans les clauses par 'G_n' et 'H_n'.

<u>Sémantique pour L_T dans les SROS (cas général)</u>

Les seules clauses que nous devons préciser sont celles pour les modalités. Nous interprétons 'H_{n+1}' et 'H_β' avec les relations inverses de $[n+1]$ et $[\beta]$. Il est clair que L_T est une généralisation de L. Ces nouvelles clauses sont :

$\mathbf{w} \Vdash H_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v}[n+1]\mathbf{w}$

$\mathbf{w} \Vdash G_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[n+1]\mathbf{v}$

$\mathbf{w} \Vdash H_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{w}$

$\mathbf{w} \Vdash G_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{v}$

Nous interprétons donc 'G_{n+1}' et 'G_β' comme nous interprétions '$\Box_{n+1}$' et '$\Box_\beta$', c'est-à-dire avec les relation $[n+1]$ et $[\beta]$. Toutes les autres notions sémantiques sont adaptées en conséquence.

<u>Sémantique pour L_T dans les SROSs (cas simple)</u>

Les clauses dérivées pour les modèles temporels simples sont évidentes :

$\mathbf{w} \Vdash H_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v}\{n+1\}\mathbf{w}$

$\mathbf{w} \Vdash G_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{n+1\}\mathbf{v}$

$\mathbf{w} \Vdash H_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{w}$

$\mathbf{w} \Vdash G_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{v}$

Nous introduisons les abréviations suivantes :

$\underline{P}\varphi = \varphi \vee P\varphi$

$\underline{H}\varphi = \varphi \wedge H\varphi$ (ou $\neg\underline{P}\neg\varphi$)

$\underline{F}\varphi = \varphi \vee F\varphi$

$\underline{G}\varphi = \varphi \wedge G\varphi$ (ou $\neg\underline{F}\neg\varphi$)

Le tableau 5.6.1 suivant énumère des conditions fréquemment rencontrées dans le contexte d'une logique modale temporelle (ou bidirectionnelle).

Tableau 5.6.1 – Conditions sur les structures temporelles

NOM	CONDITION
Aref	Anti-réflexivité
CV	Aucune (les modalités G et H sont réciproques)
Tot	La relation est totale
Sbif	La relation est sans bifurcations à gauche et à droite
Beg	Il existe un prédécesseur qui n'a pas de prédécesseur
End	Il existe un successeur qui n'a pas de successeur
Den	Densité

Une petite remarque sur le tableau. Soit $R \subset W \times W$ une relation binaire sur W. R est *antiréflexive* ssi non-$R(w, w)$, pour tout $w \in W$. Elle est *totale* ssi, pour tous w et $v \in W$,

$R(w, v)$ ou $w = v$ ou $R(v, w)$.

Elle est *sans bifurcations à droite* ssi, pour tous w, u et $v \in W$,

$R(w, u)$ & $R(w, v) \Rightarrow R(v, u)$ ou $u = v$ ou $R(u, v)$;

et elle est *sans bifurcations à gauche* ssi, pour tous w, u et $v \in W$,

$R(u, w)$ & $R(v, w) \Rightarrow R(v, u)$ ou $u = v$ ou $R(u, v)$.

Elle satisfait **Beg** ssi, pour tout $w \in W$, il existe w^* tel que

(i) $R(w^*, w)$,

(ii) pour tout $v \in W$, non-$R(v, w^*)$;

et satisfait **End** ssi, pour tout $w \in W$, il existe w^* tel que

(i) $R(w, w^*)$,

(ii) pour tout $v \in W$, non-$R(w^*, v)$.

Enfin, R est *dense* ssi, pour tout w, $v \in W$ tels que wRv, il existe $u \in W$ tel que $wRuRv$.

Ces mêmes conditions seront fréquemment utilisées pour caractériser les relations d'accessibilité des structures relationnelles d'ordre supérieur.

5.6.3 Logique modale bidirectionnelle avec portée

Nous pouvons faire avec L_T ce que nous avons fait avec L pour les portées. Il suffit de définir un langage $L_{\lambda T}$ permettant de préciser la portée des modalités temporelles (ou bidirectionnelles) de L_T. Il faut la même collection d'ensembles Var_n de variables (de rang n). Les clauses syntaxiques de $L_{\lambda T}$ sont presqu'identiques à celle de L_T, il suffit tout simplement de remplacer les clauses (F4) et (F5) par :

(F4.1) Si $\varphi \in$ Form et $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$, alors $H_\beta\varphi$ et $G_\beta\varphi \in$ Form et
$$bv(H_\beta\varphi) = bv(G_\beta\varphi) = bv(\varphi);$$

(F5.1) Si $\varphi \in$ Form, $x \in$ Var et $x \notin bv(\varphi)$, alors $H_x\varphi$ et $G_x\varphi \in$ Form et
$$bv(H_x\varphi) = bv(G_x\varphi) = bv(\varphi);$$

L'ensemble des formules de $L_{\lambda T}$ sera dénoté par $\mathrm{Form}_{\lambda T}$.

En ce qui concerne les clauses sémantiques, nous avons d'un côté la version générale et la version simple. Dans les deux cas, la seule nouveauté se trouve au niveau des nouvelles modalités temporelles. Dans le premier cas,

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash H_x\varphi$ ssi $\mathbf{v}, \mathbf{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[s(x)]\mathbf{v}$

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash G_x\varphi$ ssi $\mathbf{v}, \mathbf{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}[s(x)]\mathbf{v}$

Et dans le deuxième cas,

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash H_x\varphi$ ssi $\mathbf{v}, \mathbf{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v}\{s(x)\}\mathbf{w}$

$\mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash G_x\varphi$ ssi $\mathbf{v}, \mathbf{s} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{s(x)\}\mathbf{v}$

Toutes les autres notions sont adaptées en apportant les modifications nécessaires.

5.7 Les logiques fibrées et les SROS

Les structures relationnelles d'ordre supérieur et les logiques fibrées initiées par Gabbay partagent un certain air de famille. Nous considérons dans cette dernière section comment, dans certains cas, une structure relationnelle d'ordre supérieur peut être conçue comme la « fibration » de deux structures relationnelles (conventionnelles) par une fonction qui correspondrait à une « exponentiation ».

Commençons tout d'abord par introduire l'idée générale de logique fibrée. Si L_1 est un langage interprété dans une classe de modèles $\mathbf{M}_1$ et L_2 un langage interprété dans une classe de modèles $\mathbf{M}_2$, on peut se demander comment définir une classe de modèles à partir de $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ pour le langage $L_1{*}L_2$, c'est-à-dire le langage obtenu en combinant les langages L_1 et L_2 (en combinant les symboles primitifs et leurs clauses syntaxiques). Comment pouvons-nous évaluer les formules de $L_1{*}L_2$ avec les modèles de $\mathbf{M}_1$ et de $\mathbf{M}_2$ de L_1 et de L_2 respectivement? Une *fibration sémantique* de ces deux langages est une procédure qui permet précisément d'évaluer les formules de $L_1{*}L_2$ en employant les modèles des classes respectives. Donnons un exemple.

Pour $M = < W_M, R_M, val_M > \in \mathbf{M}_i$, avec $i = 1, 2$, posons $W_i = \bigcup\{ W_M : M \in \mathbf{M}_i\}$ et définissons Φ_{ij}, avec $i \neq j$ et $i, j \in \{1, 2\}$, comme la fonction

$$\Phi_{ij} : W_i \rightarrow \mathbf{M}_j \times W_j$$

telle que

$$\Phi_{ij}(w) = (M, v) \Rightarrow v \in W_M.$$

Un modèle de $L_1{*}L_2$ est de la forme $\mathbf{N} = < \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \Phi_{12}, \Phi_{21} >$. En effet, pour interpréter les formules de $L_1{*}L_2$ dans $\mathbf{N}$, nous supposerons que les connecteurs booléens ont la même signification et que la seule différence réside dans l'interprétation des modalités et des variables propositionnelles. Par exemple, prenons le cas de la formule $\Box_1\Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$, où $\Box_1$, $p_1 \in L_1$ et $\Diamond_2$, $p_2 \in L_2$. Nous avons d'abord que $(M, w) \Vdash \Box_1\Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$

ssi $(M, w') \Vdash \Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$, pour tout w' tel que $R(w, w')$

et ensuite que $(M, w') \Vdash \Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$

ssi $\Phi_{12}(M, w') \Vdash \Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$

ssi $N, v \Vdash \Diamond_2(p_1 \wedge p_2)$

ssi $N, v' \Vdash p_1 \wedge p_2$, pour un certain v' tel que $S(v, v')$

et enfin $N, v' \Vdash p_1 \wedge p_2$

ssi $N, v' \Vdash p_1$ et $N, v' \Vdash p_2$

ssi $\Phi_{21}(N, v') \Vdash p_1$ et $v' \in val_N(p_2)$

ssi $M', w'' \Vdash p_1$ et $v' \in val_N(p_2)$

ssi $w'' \in val_{M''}(p_1)$ et $v' \in val_N(p_2)$

Les fonctions Φ_{12} et Φ_{21} permettent le saut d'un point d'un modèle de $\mathbf{M}_i$ à un point d'un modèle de $\mathbf{M}_j$ lorsque la dernière expression évaluée est dans L_i et la prochaine dans L_j.

La littérature sur les logiques fibrées porte en grande majorité sur deux types de fibration sémantique : la fusion et le « dovetailing », lesquelles donnent lieu, respectivement, à des logiques minimales et des logiques produit. On retrouve également la fibration dans la temporalisation de certaines logiques, la logique modal intuitionniste et des logiques flous complexes (cf. Gabbay 1996b : *Fibred semantics and the weaving of logics*; Gabbay & Shehtman 1998, 2000 & 2002 : *Products of modal logics, Parts I-III*; Gabbay et al. 2002a : *Advanced tense logic* (*Handbook of philosiphical logic, vol 7*); Gabbay et al. 2003 : *Many-dimensional modal logics: Theory and Applications*).

La question est de savoir si les SROS peuvent être conçues comme une variété spéciale de fibration. La réponse est oui, mais il s'agit d'une fibration dont l'existence n'est pas recensée dans la littérature. Voyons comment une structure relationnelle d'ordre supérieur de rang fini peut être obtenue par l'application répétée d'une opération « d'exponentiation ». Soit

$\mathbf{M} = \{< W, R, val_1 > : R \in \mathbf{R}\}$

un ensemble de modèles de Kripke, soit $N = < W \times V, S, val_2 >$ un autre modèle de Kripke, et soit $\Phi : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction attribuant à chaque élément de V une relation d'un des modèles de **M**. Pour simplifier, nous supposerons que Φ est une bijection. Si nous posons

$\Phi_{21}(N, (w, v)) = (< W, \Phi(v), val_1 >, w)$

$\Phi_{12}(M, w) = (< W\times V, S, val_2 >, (w, \Phi^{-1}(R_M)))$

alors les clauses induites par fibration sont exactement celles de la sémantique des structures relationnelles d'ordre supérieur. En effet,

$< W, \Phi(v), val_1 >, w \Vdash \Diamond_2\Diamond_1\Diamond_2\varphi$

ssi $\Phi_{12}(< W, \Phi(v), val_1 >, w) = (N, (w, v)) \Vdash \Diamond_2\Diamond_1\Diamond_2\varphi$

ssi $N, (w', v') \Vdash \Diamond_1\Diamond_2\varphi$, pour (w', v') tel que $(w, v)S(w', v')$

ssi $\Phi_{12}(N, (w', v')) = (< W, \Phi(v'), val_1 >, w') = (M', w') \Vdash \Diamond_1\Diamond_2\varphi$, pour ...

ssi $M', w'' \Vdash \Diamond_2\varphi$, pour un w'' tel que $\Phi(v')(w', w'')$ & pour ...

ssi $\Phi_{21}(M', w'') = (N', (w'', v')) \Vdash \Diamond_2\varphi$, pour ...

ssi $(N', (w''', v'')) \Vdash \varphi$, pour (w''', v'') tel que $(w'', v')S(w''', v'')$ & pour ...

On voit par cet exemple que l'évaluation de la formule $w \Vdash \Diamond_2\Diamond_1\Diamond_2\varphi$ s'effectue de la même manière dans la SROF $< W\times V, \Phi, S, val_1 \cup val_2 >$ que dans la structure fibrée. Un nom approprié pour ce type de fibration serait peut-être *l'exponentiation de la classe* **M** *par le modèle N.*

Nous avons donc ramené les structures relationnelles d'ordre supérieur à une sous-classe de structures déjà connues, mais ceci n'aide en rien leur étude car il existe peu de résultats sur la fibration en général et aucun, à ce que je sache, sur les structures obtenues par exponentiation. Il faudra donc faire tout ce travail nous même.

Chapitre 6
Résultats sémantiques – Partie I

Nous présentons dans ce chapitre un certain nombre de résultats sémantiques pour le langage de base L interprété dans des modèles simples, c'est-à-dire un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$ basé sur une structure relationnelle d'ordre supérieur simple $\mathbf{S}$ (une SROSs) et tel que la valuation val satisfait la condition : $val(p) \subset W_{r(p)}$ pour tout $p \in$ Prop. Nous examinerons la question de l'interprétation de L dans des SROS générales dans le prochain chapitre.

6.1 Propriétés élémentaires

Nous commençons par montrer que la satisfaction et la validité se comportent telles qu'attendues.

Proposition 6.1.1

Soient $\mathbf{M}$ un modèle simple de L, $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Nous avons que

(a) Si φ est une instance de tautologie, alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

(b) Si $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w} \Vdash \varphi \to \psi$, alors $\mathbf{w} \Vdash \psi$

(c) Si $\mathbf{M} \Vdash \varphi$, alors $\mathbf{M} \Vdash \Box_{n+1}\varphi$, $\mathbf{M} \Vdash \Box_\alpha\varphi$ et $\mathbf{M} \Vdash @_\alpha\varphi$

(d) $\mathbf{w} \Vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, pour $\Box = \Box_{n+1}$ ou $\Box_\beta$

(e) Si $n \notin rep_s(\varphi)$, alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$

PREUVE. Les preuves de (a), (b) et (c) sont presqu'identiques aux preuves des résultats analogues pour la logique modale conventionnelle.

(d) Démontrons le résultat pour $\Box = \Box_{n+1}$, la preuve pour $\Box_\beta$ en découlera. Il faut donc montrer l'implication suivante :

(*) $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}(\varphi \to \psi) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\varphi \to \Box_{n+1}\psi$

Si $\Phi(w_{n+1})[w_n] = \varnothing$, $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$ et donc $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\varphi \to \Box_{n+1}\psi$, par « affaiblissement ». Il s'ensuit alors que (*) est vraie. Nous pouvons donc supposer que $\Phi(w_{n+1})[w_n] \neq \varnothing$. Nous savons que

$\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}(\varphi \to \psi)$

ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi \to \psi$, pour tout $w \in W_n$ tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, w)$

Supposons que $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\varphi$, c'est-à-dire

$(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$ tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, w)$.

Il en résulte que, pour tout $w \in W_n$ tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, w)$,

$(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi \to \psi$ et $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$

et, par la partie (b), que

$(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \psi$, pour tout $w \in W_n$ tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, w)$

Autrement dit, $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$. Ce qui démontre (*).

(e) Par induction sur la complexité de φ.

<u>Étape de base</u>. Si $\varphi = p$ avec $r(p) = m \neq n$, alors

$\mathbf{w} \Vdash p$ ssi $w_m \in val(p)$

ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash p$

Si $\varphi = \alpha$ avec $r(\alpha) = m \neq n$, alors

$\mathbf{w} \Vdash \alpha$ ssi $w_m = val(\alpha)$

ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash p$

<u>Étape d'induction</u>. (i) Si φ est une combinaison booléenne, le résultat découle directement de l'hypothèse d'induction.

(ii) Si $\varphi = @_\alpha\psi$ avec $r(\alpha) = m$ quelconque (pas nécessairement distinct de n), alors $n \notin rep_s(\psi)$ (car $n \notin rep_s(\varphi)$). Si $m \neq n$, par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons

$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi$ ssi $(\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)) \Vdash \psi$

ssi $((\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha))_{-n}, w) \Vdash \psi$, pour tout $w \in W_n$

ssi $((\mathbf{w}_{-n}, w)_{-m}, val(\alpha)) \Vdash \psi$, pour tout $w \in W_n$

ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash @_\alpha\psi$, pour tout $w \in W_n$

Si $m = n$, nous avons trivialement que

$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi$ ssi $(\mathbf{w}_{-m}, w) \Vdash @_\alpha\psi$, pour tout $w \in W_n$

(iii) Si $\varphi = \Box_{m+1}\psi$ avec $m + 1$ et $m \neq n$, car $n \notin rep_s(\varphi)$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons

$\mathbf{w} \Vdash \Box_{m+1}\psi$ ssi $\forall w \in W_m\ [\,\Phi(w_{m+1})(w_m, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-m}, w) \Vdash \psi\,]$

ssi $\forall w \in W_m\ [\,\Phi(w_{m+1})(w_m, w) \Rightarrow \forall v \in W_n\ [\,((\mathbf{w}_{-m}, w)_{-n}, v) \Vdash \psi\,]\,]$

ssi $\forall v \in W_n\ \forall w \in W_m\ [\,\Phi(w_{m+1})(w_m, w) \Rightarrow ((\mathbf{w}_{-m}, w)_{-n}, v) \Vdash \psi\,]$

ssi $\forall v \in W_n\ \forall w \in W_m\ [\,\Phi(w_{m+1})(w_m, w) \Rightarrow ((\mathbf{w}_{-n}, v)_{-m}, w) \Vdash \psi\,]$

ssi $\forall v \in W_n\ [\,((\mathbf{w}_{-n}, v)_{-m}, w_m) \Vdash \Box_{m+1}\psi\,]$

ssi $\forall v \in W_n\ [\,(\mathbf{w}_{-n}, v) \Vdash \Box_{m+1}\psi\,]$

(iv) Si $\varphi = \Box_\beta\psi$, la preuve est similaire au cas (iii). ✠

La partie (e) de la proposition précédente nous indique comment interpréter l'ensemble de rangs $rep_s(\varphi)$. Si un rang n n'est pas « représenté » dans φ, c'est-à-dire s'il n'appartient pas à $rep_s(\varphi)$, la valeur de vérité de φ à $\mathbf{w}$ ne dépend pas de la n-ième coordonnée de $\mathbf{w}$. Nous démontrons dans ce qui suit encore deux autres résultats concernant le rang et l'évaluation sémantique. Le premier concerne les formules de Form_n. Du fait de la ressemblance entre les formules de Form_n et celles d'un langage modal hybride conventionnel, on ne s'étonnera pas que les valeurs de vérité de ces formules ne dépendent que d'une partie très restreinte du modèle simple.

Si $\mathbf{M} = <\mathbf{W}, \Phi, val>$ est un modèle simple et $w \in W_{n+1}$, la restriction simple à w de $\mathbf{M}$ est le modèle de Kripke $\mathbf{M}_n(w) = < W_n, \Phi_{n+1}(w), val_n >$. Une formule de L_n ne dépend que de cette « partie » de $\mathbf{M}$, comme le démontre la proposition suivante.

Proposition 6.1.2

Si $\varphi \in \mathrm{Form}_n$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash \varphi$

PREUVE. Par induction sur la complexité de φ.

<u>Étape de base</u>. Supposons que φ est une variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_n$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash p$ ssi $w_n \in val(p)$ ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash p$

Supposons que φ est un nominal $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \alpha$ ssi $w_n = val(\alpha)$ ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash \alpha$

Si φ est $\bot$, la preuve est immédiate.

<u>Étape d'induction</u>. (i) Si φ est $\neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$, la preuve est directe.

(ii) Si φ est de la forme $@_\alpha\psi$ avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, nous avons par clause sémantique de '$@_\alpha$' et par l'hypothèse d'induction que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi$ ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), val(\alpha) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash @_\alpha\psi$

(iii) Si φ est de la forme $\Box_{n+1}\psi$, alors par la clause sémantique de '$\Box_{n+1}$' et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, v) \Vdash \psi$, pout tout v tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, v)$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), v \Vdash \psi$, pout tout $v \in W_n$ tel que $\Phi(w_{n+1})(w_n, v)$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash \Box_{n+1}\psi$

Ce qui complète la démonstration. ✠

Un résultat analogue tient pour les formules de $\mathrm{Form}_{\leq n}$. En effet, l'évaluation d'une formule φ du langage $L_{\leq n}$ à un point $\mathbf{w}$ d'un modèle $\mathbf{M}$ ne dépend que de la restriction à w_{n+1} de ce modèle, c'est-à-dire du modèle simple de rang fini :

$\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}) = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, \Phi(w_{n+1}), val_{\leq n} >$

Nous avons :

Proposition 6.1.3

Si $\varphi \in \text{Form}_{\leq n}$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ si et seulement si $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$

PREUVE. La preuve est presqu'identique à celle de la proposition précédente : il faut considérer les nominaux α, les variables propositionnelles p, les opérateurs d'actualité $@_\alpha$, les modalités constantes $\Box_\beta$ de rang $\leq n$, et les modalités $\Box_{m+1}$ pour $0 \leq m \leq n$. Le cas qui n'est pas considéré dans la preuve précédente est lorsque $\varphi = \Box_\beta$ (car il n'y a pas de telles modalités dans Form_n).

Si φ est de la forme $\Box_\beta\psi$ avec $r(\beta) = m+1 < n+1$, par la clause sémantique de '$\Box_\beta$' et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Box_\beta\psi$ ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-m}, v) \Vdash \psi$, pout tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{v}$

ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-m}, v) \Vdash \psi$, pout tout v tel que $\Phi(val(\beta))(w_m, v)$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), (\mathbf{w}_{-m,n}, v) \Vdash \psi$, pout tout v tel que $\Phi(val(\beta))(w_m, v)$

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \Box_\beta\psi$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Afin de peaufiner la caractérisation de l'extension d'une formule $\varphi \in \text{Form}_n$, définissons

$Ext_n(\varphi) = \bigcup\{[\![\varphi]\!]_n(w)\times\{w\} : w \in W_{n+1}\}$

Il est une conséquence de cette définition que $Ext_n(\varphi) \subset W_n \times W_{n+1}$. Nous définissons une notion similaire pour les extensions des formules φ de $\text{Form}_{\leq n}$:

$Ext_{\leq n}(\varphi) = \bigcup\{[\![\varphi]\!]_{\leq n}(w)\times\{w\} : w \in W_{n+1}\}$

Nous avons que $Ext_{\leq n}(\varphi) \subset \mathbf{W}_{n+1}$. La proposition suivante donne un aperçu global des propriétés de l'extension d'une formule de Form_n ou de $\text{Form}_{\leq n}$.

Proposition 6.1.4

Soient $p \in \mathrm{Prop}_n$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

(a) $[\![\bot]\!] = \varnothing$

(b) $[\![p]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times val(p) \times \mathbf{W}^{n+1}$

(c) $[\![\alpha]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times \{val(\alpha)\} \times \mathbf{W}^{n+1}$

(d) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_n$, alors $[\![\varphi]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times Ext_n(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

(e) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$, alors $[\![\varphi]\!] = Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

PREUVE. Les preuves de (a), (b) et (c) découlent immédiatement des clauses sémantiques pour les variables propositionnelles, les nominaux et pour $\bot$.

(d) Par définition et par la proposition 6.1.2, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \in [\![\varphi]\!] \text{ ssi } & \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \\
\text{ssi } & \mathbf{M}_n(w_{n+1}),\ w_n \Vdash \varphi \\
\text{ssi } & w_n \in [\![\varphi]\!]_n(w_{n+1}) \\
\text{ssi } & (w_n,\ w_{n+1}) \in Ext_n(\varphi) \\
\text{ssi } & \mathbf{w} \in \mathbf{W}_{n-1} \times Ext_n(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}
\end{aligned}$$

(e) Par définition et par la proposition 6.1.3, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \in [\![\varphi]\!] \text{ ssi } & \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \\
\text{ssi } & \mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}),\ \mathbf{w}_n \Vdash \varphi \\
\text{ssi } & \mathbf{w}_n \in [\![\varphi]\!]_{\leq n}(w_{n+1}) \\
\text{ssi } & \mathbf{w}_{n+1} \in Ext_{\leq n}(\varphi) \\
\text{ssi } & \mathbf{w} \in Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ✠

Malgré le fait, donc, qu'une structure relationnelle d'ordre supérieur ait un nombre infini « d'étages », il demeure que l'extension de chaque formule ne dépend que d'un nombre fini de ceux-ci.

Si $\mathbf{S}$ une SROS, rappelons que $\mathbf{R}_n$ désigne l'ensemble des relations de rang n (l'image de W_{n+1} par la fonction Φ_{n+1}). Le tableau 6.1.5 énumère les conditions que définissent certains schèmes de formules bien connus et transposés ici dans L.

Tableau 6.1.5 – Schèmes de formules définissant des conditions de structures

NOM	SCHÈME DE FORMULE	CONDITION
(K_n)	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	Aucune
(4_n)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	Les relations de $\mathbf{R}_n$ sont transitives
(5_n)	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Les relations de $\mathbf{R}_n$ sont euclidiennes
(T_n)	$\Box\varphi \to \varphi$	Les relations de $\mathbf{R}_n$ sont réflexives
(B_n)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Les relations de $\mathbf{R}_n$ sont symétriques
(D_n)	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	Les relations de $\mathbf{R}_n$ sont sérielles

où $\Box = \Box_{n+1}$ ou $\Box_\beta$ avec $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$.

Rappelons la définition d'une relation euclidienne et celle d'une relation sérielle : une relation $R \subset W \times W$ est *euclidienne* ssi, pour tous w, u et $v \in W$, wRu & $wRv \Rightarrow uRv$; et R est *sérielle* ssi, pour tout w il existe v tel que wRv.

Il faut relativement peu d'instances des schèmes de formules du tableau 6.1.5 pour définir les conditions correspondantes, comme l'illustre la proposition suivante :

Proposition 6.1.6

Soit *Sch* un schème du tableau 6.1.5 portant sur les modalités de rang $n+1$, et soit *Cond* la condition correspondant à ce schème. Nous avons

$\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_n$

ssi toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ satisfont *Cond*.

PREUVE. C'est une conséquence directe de 6.1.2. Si $\varphi \in \mathrm{Form}_n$, alors $Sch(\varphi) \in \mathrm{Form}_n$. Ainsi,

$\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tous $\varphi \in \mathrm{Form}_n$

ssi, pour tout $w \in W_{n+1}$,

$\mathbf{S}_n(w) \Vdash Sch(\varphi)$, pour tous $\varphi \in \mathrm{Form}_n$

ssi, pour tout $w \in W_{n+1}$, la relation de $\mathbf{S}_n(w)$ satisfait la condition *Cond*. Autrement dit : ssi toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ satisfont cette condition. ✠

La proposition précédente établit donc que la condition *Cond* est définissable avec relativement très peu d'instances du schème *Sch* correspondant à cette condition; notamment, elle est définissable avec des instances de *Sch* par des formules de Form_n seulement. Nous pourrions nous demander maintenant si des instances plus permissives de *Sch* conduiraient à des contraintes plus fortes que *Cond* sur les relations. Autrement dit, si toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ d'une certaine structure satisfont *Cond*, est-ce que *toutes* les instances de *Sch* seront valides dans cette structure? Il se trouve que la réponse est oui : autoriser des instances par des formules autres que celle de Form_n ne pose aucune contrainte supplémentaire sur les structures. Pour démontrer ce résultat toutefois, il faudra travailleur un peu.

Il nous faut introduire une version infinitaire du langage L qui servira à réécrire les formules de Form_L en des formules équivalentes qui seront plus facilement manipulables sur le plan sémantique. Soit κ un cardinal infini quelconque, notre tâche dans l'immédiat est de définir une version infinitaire de L que nous nommerons L_κ. Le langage L_κ comprend les symboles primitifs de L en plus des connecteurs '$\bigwedge$' et '$\bigvee$', lesquels serviront à exprimer la conjonction et la disjonction infinies. L'ensemble des formules $\mathrm{Form}_{<\kappa}$ de L_κ est défini récursivement par les clauses syntaxiques suivantes :

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_m\varphi \mid @_\alpha\varphi \mid \Box_\beta\varphi \mid \bigwedge E \mid \bigvee E$$

où $p \in \mathrm{Prop}$, $\alpha \in \mathrm{Nom}$, $\beta \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$, $m \geq 1$ et E est un sous-ensemble de $\mathrm{Form}_{<\kappa}$ tel que $|E| < \kappa$.

Un modèle de L_κ est tout simplement modèle de L. Il suffit seulement de préciser comment les nouveaux connecteurs sont interprétés dans celui-ci :

$\mathbf{w} \Vdash \wedge E$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$, pour toute formule $\varphi \in E$

$\mathbf{w} \Vdash \vee E$ ssi il existe une formule $\varphi \in E$ telle que $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

Toutes les autres notions sémantiques restent inchangées.

Nous définissons maintenant certaines notions qui seront indispensables à la réécriture des formules de L. Pour $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}$, posons

$\mathrm{Nom}(\mathbf{V}) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom} : val(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{V}\}$[55]

$\mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}_{-n}) = \{\alpha \in \mathrm{Nom}_n : (\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \alpha) \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})\}$

$\mathrm{N}(\mathbf{V}) = \vee\{\wedge\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})\}$

$\mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}_{-n}) = \vee\mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}_{-n})$

$\mathrm{N}_n(\mathbf{V}) = \vee\{\wedge\boldsymbol{\alpha}_{-n} \wedge \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}_{-n}) : \boldsymbol{\alpha}_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$

Il faut voir $\mathbf{V}$ ici comme une éventuelle extension de formule. Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})$, $\wedge\boldsymbol{\alpha}$ est une expression qui est vrai seulement au point $val(\boldsymbol{\alpha})$ de $\mathbf{V}$. La disjonction $\mathrm{N}(\mathbf{V})$ de toutes ces expressions nous donnera une formule ayant $\mathbf{V}$ pour extension. Nous pouvons réécrire cette disjonction de conjonctions de nominaux pour rassembler les nominaux de rang n, ce qui nous donnera $\mathrm{N}_n(\mathbf{V})$. Le proposition suivante énonce les propriétés élémentaires de ces réécritures.

Proposition 6.1.7

(a) $\mathbf{N} \subset \mathrm{Nom}([\![\vee\mathbf{N}]\!])$

(b) $[\![\mathrm{N}(\mathbf{V})]\!] = \mathbf{V}$

(c) $[\![\mathrm{N}_n(\mathbf{V})]\!] = \mathbf{V}$

PREUVE. (a) Soit $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}$ et soit $\mathbf{w}$ tel que $\mathbf{w} = val(\boldsymbol{\beta})$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{w} \Vdash \wedge\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \vee\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{w} \in [\![\vee\mathbf{N}]\!]$$

et donc $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Nom}([\![\vee\mathbf{N}]\!])$.

(b) Si $\mathbf{w} \in [\![\mathrm{N}(\mathbf{V})]\!]$, alors $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})\}$. Ceci n'est possible que si $\mathbf{w} \Vdash \wedge\boldsymbol{\beta}$ pour un certain $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})$. D'une part, $\mathbf{w} \Vdash \wedge\boldsymbol{\beta}$ ssi $val(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{w}$, et

[55] Ici, $val(\boldsymbol{\alpha}) = (val(\alpha_0), val(\alpha_1), \ldots, val(\alpha_n), \ldots)$.

d'autre part, $\beta \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})$ ssi il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tel que $val(\beta) = \mathbf{v}$. Donc, $\mathbf{w} = val(\beta) = \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Si $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, puisque $\mathbf{M}$ est nommé, il existe $\beta \in \mathbf{Nom}$ tel que $val(\beta) = \mathbf{w}$, donc $\beta \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})$. Ainsi,

$$\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha : \alpha \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})\} \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}(\mathbf{V})$$

et donc $\mathbf{w} \in [\![\mathrm{N}(\mathbf{V})]\!]$.

(c) Si $\mathbf{w} \in [\![\mathrm{N}_n(\mathbf{V})]\!]$, alors

$$\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}.$$

Ceci n'est possible que si

$$\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n} \wedge \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n})$$

pour un certain $\beta_{-n} \in \mathrm{Nom}_{-n}(\mathbf{V})$. D'une part, $\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n}$ entraîne que $val(\beta_{-n}) = \mathbf{w}_{-n}$; et d'autre part, $\mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n})$ entraîne que

$$\mathbf{w} \Vdash \vee\mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n})$$

et donc que $\mathbf{w} \Vdash \beta$, pour un certain $\beta \in \mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n})$, c'est-à-dire que $val(\beta) = w_n$. Ainsi, $\mathbf{w} = val(\beta) \in \mathbf{V}$.

Pour l'autre direction, soient $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ et $\beta \in \mathbf{Nom}$ tels que $val(\beta) = \mathbf{w}$. Nous avons donc que $\beta_{-n} \in \mathrm{Nom}_{-n}(\mathbf{V})$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta \text{ ssi } \mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n} \wedge \beta_n \\
&\quad \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n} \wedge \vee\mathrm{Nom}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n}) \\
&\quad \text{ssi } \mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n} \wedge \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \beta_{-n}) \\
&\quad \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge \mathrm{N}_n(\mathbf{V}, \alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\} \\
&\quad \text{ssi } \mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}_n(\mathbf{V}) \\
&\quad \text{ssi } \mathbf{w} \in [\![\mathrm{N}_n(\mathbf{V})]\!]
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. ✠

Cette proposition nous permet d'établir :

Corollaire 6.1.8

Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_{<\kappa}$. Nous avons

(a) $\mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

(b) $\mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

Preuve. Parties (b) et (c) appliquées à $\mathbf{V} = [\![\varphi]\!]$. ✠

Nous arrivons à un lemme essentiel qui nous permettra de démontrer le théorème que nous recherchons. Dans ce qui suit, pour chaque $\mathbf{w}_{-n} \in \mathbf{W}_{-n}$, $\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n})$ désignera un nominal de $\mathbf{Nom}_{-n}$ (peu importe lequel) tel que $val(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n})) = \mathbf{w}_{-n}$ (en réalité, un élément $\mathbf{Nom}_{-n}$ est une suite infini de nominaux, mais nous emploierons la métonymie « nominal de $\mathbf{Nom}_{-n}$ » pour simplifier).

Lemme 6.1.9

Pour chaque $\alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}$, soit $p(\alpha_{-n}) \in \mathrm{Prop}_n$ tel que $val(p(\alpha_{-n})) = val(p(\beta_{-n}))$, si $val(\alpha_{-n}) = val(\beta_{-n})$. Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, nous avons que :

(a) $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

(b) $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

(c) $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

Preuve. (a) Nous avons que $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$

ssi $\exists\beta_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\,[\,\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta_{-n} \wedge p(\beta_{-n})\,]$

ssi $\exists\beta_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\,[\,val(\beta_{-n}) = \mathbf{w}_{-n}\ \&\ \mathbf{w} \Vdash p(\beta_{-n})\,]$

ssi $val(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n})) = \mathbf{w}_{-n}\ \&\ \mathbf{w} \Vdash p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

(b) Nous avons que $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$ ssi

$\exists w \in W_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(w_n, w)\ \&\ (\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}\,]$

Par conséquent, d'après (a), $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$

ssi $\exists w \in W_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(w_n, w)\ \&\ (\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}p(\alpha_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

(c) Nous avons que $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\vee\{\wedge\alpha_{-n} \wedge p(\alpha_{-n}) : \alpha_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$ ssi

$\forall w \in W_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(w_n,\, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n},\, w) \Vdash \bigvee\{\bigwedge\boldsymbol{\alpha}_{-n} \wedge p(\boldsymbol{\alpha}_{-n}) : \boldsymbol{\alpha}_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}\,]$

Par conséquent, d'après (a), $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\bigvee\{\bigwedge\boldsymbol{\alpha}_{-n} \wedge p(\boldsymbol{\alpha}_{-n}) : \boldsymbol{\alpha}_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$

ssi $\forall w \in W_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(w_n,\, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n},\, w) \Vdash p(\boldsymbol{\alpha}_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}p(\boldsymbol{\alpha}_{-n}(\mathbf{w}_{-n}))$

Ce qui complète la démonstration. ✠

Corollaire 6.1.10

Les propositions du lemme précédent tiennent aussi si nous remplaçons '$\Box_{n+1}$' par '$\Box_\beta$', où $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$.

Preuve. Il suffit de refaire exactement le même argument. ✠

Nous approchons de notre but. Penchons-nous à présent sur la forme des schèmes du tableau 6.1.5. (Mentionnons d'emblée que nous exclurons (K) de la discussion car nous savons déjà que toutes les instances de ce schème sont valides par la proposition 6.1.1.) Chaque schème du tableau (à l'exception de (K) bien sûr) est de la forme '*ant* $\rightarrow$ *con*', où '*ant*' est la formule 'φ' précédée d'une concaténation de $\Box$ et de $\Diamond$ (possiblement rien) et '*con*' est la formule 'φ' précédée d'une autre concaténation de $\Box$ et de $\Diamond$ (possiblement vide). Soit '*ma*' la concaténation de modalités devant φ dans *ant*, et soit '*mc*' la concaténation de modalités devant φ dans *con*. Nous avons que

$Sch = ma\,\varphi \rightarrow mc\,\varphi$

Par exemple, pour (T),

$ant(\mathrm{T}) = \Box\varphi \;\&\; con(\mathrm{T}) = \varphi;$

$ma(\mathrm{T}) = \Box \;\&\; mc(\mathrm{T}) = \varnothing$

Pour l'axiome (4),

$ant(4) = \Box\varphi \;\&\; con(4) = \Box\Box\varphi;$

$ma(4) = \Box \;\&\; mc(4) = \Box\Box$

Voici le théorème recherché :

Théorème 6.1.11
Soit *Sch* un schème du tableau 6.1.5 ayant trait à des modalités de rang n+1. Si $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_n$, alors $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_L$.

PREUVE. Supposons que $\mathbf{S} \Vdash Sch(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathrm{Form}_n$. Soient $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ une formule constante, $\mathbf{M}$ un modèle basé sur $\mathbf{S}$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Nous devons montrer que $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash Sch(\varphi)$. Puisque

$$Sch(\varphi) = ma\,\varphi \to mc\,\varphi$$

il faut montrer que

$$\mathbf{w} \Vdash ma\,\varphi \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\varphi$$

Par ailleurs, par un des corollaires précédents, puisque $[\![\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])]\!] = [\![\varphi]\!]$, il suffit de montrer que

$$\mathbf{w} \Vdash ma\,\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!]) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])$$

Il faut d'abord apporter une petite modification à $\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])$ pour pouvoir appliquer le lemme ci-dessus. Soit $p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n})$ une nouvelle variable propositionnelle telle que

$$val(p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n})) = \{val(\alpha) : \alpha \in \mathrm{Nom}_n([\![\varphi]\!], \boldsymbol{\alpha}_{-n})\}$$

Autrement dit, $p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n})$ a la même extension dans W_n que $\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!], \boldsymbol{\alpha}_{-n})$. Nous remplaçons $\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!], \boldsymbol{\alpha}_{-n})$ par $p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n})$ dans $\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])$. Nommons cette formule $\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!])$, c'est-à-dire

$$\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!]) = \vee\{\wedge\boldsymbol{\alpha}_{-n} \wedge p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n}) : \boldsymbol{\alpha}_{-n} \in \mathbf{Nom}_{-n}\}$$

Il est clair que $\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!])$ possède la même extension que $\mathrm{N}_n([\![\varphi]\!])$, et donc la même extension que φ. Par conséquent, notre objectif est de montrer que

$$(*) \qquad \mathbf{w} \Vdash ma\,\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!]) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!])$$

C'est ici que le lemme précédent intervient. Une application répétée de (a), (b) et (c) nous donne

$$\mathbf{w} \Vdash ma\,\mathrm{M}_n([\![\varphi]\!]) \text{ ssi } \mathbf{w} \Vdash ma\,p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}_{-n})$$

$\mathbf{w} \Vdash mc\, \mathrm{M}_n([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash mc\, p(\varphi, \alpha_{-n})$

de sorte que l'implication (*) est équivalente à l'implication suivante :

(**) $\mathbf{w} \Vdash ma\, p(\varphi, \alpha_{-n}) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\, p(\varphi, \alpha_{-n})$

Mais (**) est équivalente à $\mathbf{w} \Vdash ma\, p(\varphi, \alpha_{-n}) \rightarrow mc\, p(\varphi, \alpha_{-n})$, laquelle est équivalente à $\mathbf{w} \Vdash Sch(p(\varphi, \alpha_{-n}))$ et $p(\varphi, \alpha_{-n}) \in \mathrm{Form}_n$. Mais, par hypothèse, nous savons que $Sch(p(\varphi, \alpha_{-n}))$ est valide dans **S**. D'où le résultat. ✠

6.2 Invariance et bisimulation

Il existe naturellement un nombre infini de structures simples, et donc un nombre encore plus élevé de modèles simples. Mais ces modèles ne se distinguent pas tous sur le plan de la satisfaction : il peut arriver que des modèles différents satisfassent exactement les même formules, qu'ils soient équivalents aux yeux du langage L. Cette situation n'est évidemment pas particulière aux modèles d'ordre supérieur et survient pour n'importe quel langage et classe de modèles assortis. Décrivons comment le problème s'articule pour la logique modale conventionnelle pour ensuite le transposer au cas des modèles d'ordre supérieur.

Si $S_1 = < W_1, R_1 >$ et $S_2 = < W_2, R_2 >$ sont deux structures relationnelles et si M_1 et M_2 sont des modèles basés respectivement sur S_1 et S_2, on dit que le point $w_1 \in W_1$ est *élémentairement équivalent* au point $w_2 \in W_2$ ssi, pour toute formule φ,

(EE1) $M_1, w_1 \Vdash \varphi \Leftrightarrow M_2, w_2 \Vdash \varphi$.

Nous écrirons $M_1, w_1 \leftrightharpoons M_2, w_2$ (ou tout simplement $w_1 \leftrightharpoons w_2$) pour signifier que w_1 est élémentairement équivalent à w_2. On dira que M_1 est *élémentairement équivalent* à M_2 s'il existe une relation binaire $R \subset W_1 \times W_2$ telle que

(EE2) $R(w_1, w_2) \Rightarrow w_1 \leftrightharpoons w_2$

(EE3) $\forall w_1 \in W_1\, \exists w_2 \in W_2\, R(w_1, w_2)\ \&\ \forall w_2 \in W_2\, \exists w_1 \in W_1\, R(w_1, w_2)$

Nous aimerions trouver une condition générale entre deux points de deux modèles (et par la suite entre deux modèles tout court) qui garantirait que ces deux points (et éventuellement les deux modèles) sont élémentairement équivalents.

Il n'est pas trop difficile de voir qu'un homomorphisme surjectif entre M_1 et M_2 constitue une relation satisfaisant aux conditions (EE1)-(EE3). En effet, si $\Theta : W_1 \to W_2$ est un homomorphisme surjectif (c'est-à-dire que Θ préserve les relations d'accessibilité et les fonctions de valuation), alors une vérification élémentaire nous donne que

$M_1, w_1 \leftrightarrows M_2, \Theta(w_1)$

Mais l'homomorphisme est une condition trop forte en général, en ce sens qu'il existe vraisemblablement beaucoup de modèles élémentairement équivalents qui ne sont pas homomorphes. C'est dans ce contexte qu'a été introduite la notion de bisimulation : il s'agit d'une relation qui, comme le verrons, garantit l'équivalence élémentaire, mais qui est beaucoup plus générale que l'homomorphisme surjectif.

Une *bisimulation* entre les structures relationnelles S_1 et S_2 est une relation binaire $Z \subset W_1 \times W_2$ qui satisfait les deux conditions suivantes : pour tous $w \in W_1$ et $v \in W_2$ tels que wZv,

(zig) $\exists w' \in W_1$ t. q. $wR_1w' \Rightarrow \exists v' \in W_2$ t. q. vR_2v' et $w'Zv'$

(zag) $\exists v' \in W_2$ t. q. $vR_2v' \Rightarrow \exists w' \in W_1$ t. q. wR_1w' et $w'Zv'$

Deux points $w \in W_1$ et $v \in W_2$ sont dits *Z-bisimilaires* si Z est une bisimulation entre Z entre S_1 et S_2 telle que wZv, et ils sont dits *bisimilaires* s'ils sont Z-bisimilaires pour une certaine bisimulation Z. Deux structures sont dites *Z-bisimilaires* si Z est une bisimulation telle que :

$\forall w \in W_1, \exists v \in W_2$ t. q. wZv

$\forall v \in W_2, \exists w \in W_1$ t. q. wZv

Autrement dit, tout point de W_1 est Z-bisimilaire à un point de W_2, et tout point de W_2 est Z-bisimilaire à un point de W_1. Une *bisimulation entre deux* *modèles* $M_1 = < S_1,\ val_1 >$ et $M_2 = < S_1,\ val_2 >$ est une bisimulation Z entre les deux structures sous-jacentes S_1 et S_2 qui satisfait la condition supplémentaire :

(base$_p$) $wZv \Rightarrow \forall p \in \text{Prop}\,[\, w \in val_1(p) \text{ ssi } v \in val_2(p)\,]$

(base$_\alpha$) $wZv \Rightarrow \forall \alpha \in \text{Nom}\,[\, w = val_1(\alpha) \text{ ssi } v = val_2(\alpha)\,]$

Deux points $w \in W$ et $v \in V$ de deux modèles M_1 et M_2 sont *Z-bisimilaires* si Z est une bisimulation (de modèles) entre M_1 et M_2 et wZv. Deux points sont *bisimilaires* s'ils sont Z-bisimilaires pour une certaine bisimulation Z. Deux modèles M_1 et M_2 sont *Z-bisimilaires* si Z est une bisimulation (de modèles) entre M_1 et M_2 et

$\forall w \in W_1, \exists v \in W_2$ t. q. wZv

$\forall v \in W_2, \exists w \in W_1$ t. q. vZw

Deux modèles sont *bisimilaires* s'ils sont Z-bisimilaires pour une certaine bisimulation (de modèles) Z.

Une bisimulation remplit bien les attentes formulées dans les conditions (EE1)-(EE3) :

Proposition 6.2.1

Soient $M_1 = < W_1,\ R_1,\ val_1 >$ et $M_2 = < W_2,\ R_2,\ val_2 >$ des modèles, $w \in W_1$ et $v \in W_2$ des points de ces modèles, et Z une bisimulation entre M_1 et M_2. Si wZv, alors $M_1,\ w \leftrightarrows M_2,\ v$.

Par ailleurs, si pour tout $w \in W_1$ il existe $v \in W_2$ tel wZv et pour tout $v \in W_2$ il existe $w \in W_1$ tel que wZv, alors la condition (EE3) est remplie.

PREUVE. On peut soit démontrer directement le résultat soit consulter un ouvrage comme Blackburn et al. (2001) pour les détails. ✠

Nous voulons démontrer un résultat analogue pour les modèles simple (d'ordre supérieur). Si **M** et **N** sont des modèles simples basés respectivement sur les structures simples $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ et $\mathbf{T} = < \mathbf{V}, \Gamma >$, nous dirons que le point $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ est *élémentairement équivalent* au point $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ ssi, pour toute formule φ,

(EE1) $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \varphi$.

Nous écrirons $\mathbf{M}, \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{N}, \mathbf{v}$ (ou tout simplement $\mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{v}$) pour signifier que $\mathbf{w}$ est élémentairement équivalent à $\mathbf{v}$. On dira que $\mathbf{M}$ est *élémentairement équivalent* à $\mathbf{N}$ s'il existe une relation binaire $R \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ telle que

(EE2) $R(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{v}$

(EE3) $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}\, \exists \mathbf{v} \in \mathbf{V}\, R(\mathbf{w}, \mathbf{v})\ \&\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\, \exists \mathbf{w} \in \mathbf{W}\, R(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

Notre but est de donc de définir une certaine relation binaire $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ qui garantit l'équivalence élémentaire des points qu'elle met en relation.

Puisqu'une bisimulation est, d'une certaine manière, une généralisation d'un homomorphisme, précisons d'abord la notion d'homomorphisme propre aux SROSs (et par extension aux modèles simples). Si $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ et $\mathbf{T} = < \mathbf{V}, \Gamma >$ sont des SROSs, un homomorphisme entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ sera une fonction $\Theta : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ telle que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\mathbf{w}, \mathbf{w'} \in \mathbf{W}$:

$\mathbf{w}\{n{+}1\}\mathbf{w'} \Rightarrow \Theta(\mathbf{w})\{n{+}1\}\Theta(\mathbf{w'})$, et

$\mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'} \Rightarrow \Theta(\mathbf{w}) \approx_n \Theta(\mathbf{w'})$.

Autrement dit, Θ devra respecter les relations sous-jacentes à une SROSs. Le lecteur pourrait exprimer un certain étonnement devant la deuxième condition concernant la préservation de la relation $\approx_n$. Si nous voulons que l'homomorphisme préserve l'interprétation des modalités hybrides, il faut l'exiger car c'est cette famille de relations d'accessibilité qui est nécessaire à leur interprétation. Un homomorphisme entre modèles est un homomorphisme Θ entre les structures sur lesquelles sont basés ces modèles qui préserve les fonctions de valuation :

$\mathbf{w'} = \Theta(\mathbf{w}) \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall p \in \mathrm{Prop}_n\, [\, w_n \in val(p) \Rightarrow w_n{}' \in val'(p)\,]$

$\mathbf{w'} = \Theta(\mathbf{w}) \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_n\, [\, w_n = val(\alpha) \Rightarrow w_n{}' = val'(\alpha)\,]$

Il est clair que l'homomorphisme surjectif entre modèles entraîne l'équivalence élémentaire, mais encore une fois il y a des conditions plus faibles qui garantissent cette même équivalence.

Si $\mathbf{S} = <\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = <\mathbf{V}, \Gamma>$ sont des structures simples (des SROSs), une bisimulation entre **S** et **T** est une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}{\times}\mathbf{V}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, si $\mathbf{wZv}$, alors

(zig$_n$) $\quad \mathbf{w}\{n{+}1\}\mathbf{w'} \Rightarrow \exists\mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}\{n{+}1\}\mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_n$) $\quad \mathbf{v}\{n{+}1\}\mathbf{v'} \Rightarrow \exists\mathbf{w'} \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}\{n{+}1\}\mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zig$_\approx$) $\quad \mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'} \Rightarrow \exists\mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v} \approx_n \mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_\approx$) $\quad \mathbf{v} \approx_n \mathbf{v'} \Rightarrow \exists\mathbf{w'} \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

Les définitions de *points* **Z**-*bisimilaires*, de *points bisimilaires*, de *structures* **Z**-*bisimilaires*, et de *structures bisimilaires* sont analogues à celles données plus haut.

Si $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val_1>$ et $\mathbf{N} = <\mathbf{T}, val_2>$ sont des modèles basés sur les structures simples **S** et **T**, une bisimulation entre les modèles **M** et **N** est une bisimulation **Z** entre les structures sous-jacentes respectives **S** et **T** telle que

(base$_p$) $\quad \mathbf{wZv} \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall p \in \mathrm{Prop}_n\,[\,w_n \in val_1(p)$ ssi $v_n \in val_2(p)\,]$

(base$_\alpha$) $\quad \mathbf{wZv} \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_n\,[\,w_n = val_1(\alpha)$ ssi $v_n = val_2(\alpha)\,]$

Les définitions de *points* **Z**-*bisimilaires*, de *points bisimilaires*, de *modèles* **Z**-*bisimilaires*, et de *modèles bisimilaires* sont analogues à celles données plus haut.

La contrainte (base$_\alpha$) est en réalité très forte lorsqu'elle est combinée avec le fait que nos modèles sont nommés et les conditions (zig$_\approx$) et (zag$_\approx$). Déjà, dans le cas de la logique hybride conventionnelle, nous pouvons observer l'effet de cette contrainte (ou du moins sa contrepartie) : si tout point $w \in W$ est nommé, disons par α, et si une bisimulation préserve la dénotation de chaque nominal, nous devrons avoir $val_1(\alpha)Zval_2(\alpha)$, c'est-à-dire que Z ne pourra mettre en relation que des points qui sont dénotés par le même nominal (tantôt via val_1 tantôt via val_2). Pour les modèles simples, la situation s'articule comme suit :

Proposition 6.2.2
Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ respectivement, et soit $\mathbf{Z}$ une bisimulation entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$. Si $\mathbf{wZv}$ alors
(a) $val_1(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{w}$ et $val_2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}$ pour un certain $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$, et
(b) $val_1(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\boldsymbol{\beta}_n \in \mathbf{Nom}_n$.

PREUVE. (a) Supposons que $\mathbf{wZv}$ et soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ tel que $val_1(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{w}$ (un tel $\boldsymbol{\alpha}$ existe car $\mathbf{M}$ est nommé). La condition (base$_\alpha$) entraîne que $val_2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}$.
(b) Pour n'importe quel $\mathbf{w'}$ tel que $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'}$, nous aurons qu'il existe par (zig$_\approx$) un $\mathbf{v'}$ tel que $\mathbf{v} \approx_n \mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$. Mais $\mathbf{w'} = (\mathbf{w}_{-n}, w)$ pour un certain $w \in W_n$, ce qui veut dire qu'il existe $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $val_1(\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \beta) = \mathbf{w'}$ (car $\mathbf{M}$ est nommé). Par (base$_\alpha$) encore une fois, nous avons que $val_2(\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \beta) = \mathbf{v'}$. En exploitant (zag$_\approx$), nous pouvons montrer que cette observation tient dans l'autre direction. Nous avons donc, pour tout n, que
(*) $\qquad \mathbf{wZv} \Rightarrow val_1(\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \beta)\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \beta)$
pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_n$. Il reste à montrer que (*) entraîne l'implication
(**) $\qquad val_1(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$
Supposons que $\beta_n \in \mathrm{Nom}_n$, pour tout $n \geq 0$. Nous savons par (*) que

$$val_1(\boldsymbol{\alpha}_{-0}, \beta_0)\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\alpha}_{-0}, \beta_0).$$

De même, en appliquant (*) aux points $val_1(\boldsymbol{\alpha}_{-0}, \beta_0)$ et $val_2(\boldsymbol{\alpha}_{-0}, \beta_0)$, nous aurons que $val_1(\beta_0, \beta_1, \boldsymbol{\alpha}^2)\mathbf{Z}val_2(\beta_0, \beta_1, \boldsymbol{\alpha}^2)$, c'est-à-dire

$$val_1(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}^2)\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}^2).$$

De manière générale, nous aurons

$$val_1(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}).$$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Une bisimulation se comporte adéquatement vis-à-vis les relations $\{\beta\}$ aussi :

Proposition 6.2.3

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles **M** et **N** respectivement, soit **Z** une bisimulation entre **M** et **N**, et soit $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Si **wZv**, alors

(zig$_\beta$) $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{w}' \Rightarrow \exists \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{v}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

(zag$_\beta$) $\mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{v}' \Rightarrow \exists \mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{w}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

PREUVE. Soit $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{w}'$. Puisque **M** est nommé, il existe $\alpha, \alpha' \in$ **Nom** tels que $val_1(\alpha) = \mathbf{w}$ et $val_1(\alpha') = \mathbf{w}'$. Par la proposition précédente, nous avons que $val_2(\alpha) = \mathbf{v}$. Définissons

$$\mathbf{x} = (\mathbf{w}_{-(n+1)}, val_1(\beta)) = val_1(\alpha_{-n}, \beta)$$
$$\mathbf{x}' = (\mathbf{w}'_{-(n+1)}, val_1(\beta)) = val_1(\alpha'_{-n}, \beta)$$

Par définition des relations $\{\beta\}$ et $\{n+1\}$, nous avons que $\mathbf{x}\{n+1\}\mathbf{x}'$. La condition (zig$_n$) entraîne qu'il existe $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{y}\{n+1\}\mathbf{y}'$ et $\mathbf{x}'\mathbf{Z}\mathbf{y}'$. Par la proposition précédente,

$$\mathbf{y} = val_2(\alpha_{-n}, \beta)$$
$$\mathbf{y}' = val_2(\alpha'_{-n}, \beta)$$

Soit $\mathbf{v}' = val_2(\alpha')$. Nous avons par la définition des relations $\{\beta\}$ et $\{n+1\}$ que $\mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{v}'$, et par la proposition précédente que $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$. Ce qui démontre (zig$_\beta$).

La direction (zag$_\beta$) se démontre de manière analogue. ✠

Montrons que la bisimulation se comporte bien à l'endroit de l'équivalence élémentaire :

Proposition 6.2.4

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles simples $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val_1 >$ et $\mathbf{N} = < \mathbf{T}, val_2 >$. Si **w** et **v** sont bisimilaires, alors $\mathbf{M}, \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{N}, \mathbf{v}$.

PREUVE. Nous devons montrer que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \varphi$,

pour toute formule φ. La preuve est par induction sur la complexité de φ.

<u>Étape de base</u>. Si φ est une variable propositionnelle $p \in$ Prop ou un nominal $\alpha \in$ Nom, les conditions (base$_p$) et (base$_\alpha$) sur les bisimulations entraînent immédiatement le résultat.

<u>Étape d'induction</u>. (i) Si φ est une combinaison booléenne, la preuve est une application directe de l'hypothèse d'induction.

(ii) Supposons que $\varphi = @_\alpha\psi$, avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Tout d'abord, observons que

$\mathbf{w} \approx_n (\mathbf{w}_{-n}, val_1(\alpha))$

Par (zig$_\approx$), il existe $\mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v} \approx_n \mathbf{v}'$ et $(\mathbf{w}_{-n}, val_1(\alpha))\mathbf{Z}\mathbf{v}'$. De même, par (base$_\alpha$), $v_n{}' = val_2(\alpha)$. Ainsi, $(\mathbf{w}_{-n}, val_1(\alpha))\mathbf{Z}(\mathbf{v}_{-n}, val_2(\alpha))$. En appliquant l'hypothèse d'induction à ψ (qui a moins de connecteurs que φ), nous obtenons

$\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, val_1(\alpha)) \Vdash \psi \Rightarrow \mathbf{N}, (\mathbf{v}_{-n}, val_2(\alpha)) \Vdash \psi$

ce qui revient à

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi \Rightarrow \mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash @_\alpha\psi$

La condition (zag$_\approx$) nous permet de démontrer l'autre direction de ces implications.

(iii) Supposons que $\varphi = \Box_{n+1}\psi$. Au lieu de démontrer l'équivalence suivante :

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \Box_{n+1}\psi$,

nous démontrerons l'équivalence :

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$,

ce qui revient au même. Nous avons

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w}' \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{w}'$ t. q. $\mathbf{w}\{n+1\}\mathbf{w}'$

Par l'hypothèse d'induction, s'il existe $\mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ bisimilaire à $\mathbf{w}'$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w}' \Vdash \psi$ ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v}' \Vdash \psi$

La condition (zig$_n$) nous assure de l'existence d'un tel $\mathbf{v}'$ qui, en plus d'être bisimilaire à $\mathbf{w}'$, est tel que $\mathbf{v}\{n+1\}\mathbf{v}'$. Il en résulte donc que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w'} \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{w'} \in \mathbf{W}$ t. q. $\mathbf{w}\{n+1\}\mathbf{w'}$

$\Rightarrow \mathbf{N}, \mathbf{v'} \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ t. q. $\mathbf{v}\{n+1\}\mathbf{v'}$

ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$

Un argument symétrique montre que l'autre direction ($\Leftarrow$) tient également.

(iv) En appliquant la proposition 6.2.3 et en employant un argument similaire à celui de (iii), nous pouvons montrer que le résultat tient si $\varphi = \Box_\beta\psi$.

Ce qui complète la démonstration. ✠

Il n'est pas difficile d'adapter cette notion de bisimulation pour les structures simples de rang fini. Soient $\mathbf{S} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R >$ et $\mathbf{T} = < \mathbf{V}_n, \Gamma_{\leq n}, Q >$ des SROF de rang n. Nous définissons une bisimulation (de rang n) entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ comme une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}_n \times \mathbf{V}_n$ telle que : pour tout $m \leq n$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n} \backslash \mathrm{Nom}_0$, si $\mathbf{wZv}$

(zig$_m$) $\quad \mathbf{w}\{m+1\}\mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v}\{m+1\}\mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_m$) $\quad \mathbf{v}\{m+1\}\mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w}\{m+1\}\mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zig$_\approx$) $\quad \mathbf{w} \approx_m \mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v} \approx_m \mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_\approx$) $\quad \mathbf{v} \approx_m \mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w} \approx_m \mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

Une bisimulation entre les modèles simples de rang n $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val_1 >$ et $\mathbf{N} = < \mathbf{T}, val_2 >$ est une bisimulation entre les structures $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ telle que

(base$_p$) $\quad \mathbf{wZv} \Rightarrow \forall m \leq n \forall p \in \mathrm{Prop}_m [\, w_m \in val_1(p)$ ssi $v_m \in val_2(p) \,]$

(base$_\alpha$) $\quad \mathbf{wZv} \Rightarrow \forall m \leq n \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_m [\, w_m = val_1(\alpha)$ ssi $v_m = val_2(\alpha) \,]$

Cette notion de bisimulation a sensiblement les mêmes propriétés que la précédente. Notamment, nous avons que si $\mathbf{wZv}$, alors

$val_1(\beta)\mathbf{Z}val_2(\beta)$, pour tout $\beta \in \mathbf{Nom}_n$

et, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n} \backslash \mathrm{Nom}_0$,

(zig$_\beta$) $\quad \mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_\beta$) $\quad \mathbf{v}\{\beta\}\mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w}\{\beta\}\mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

Surtout, si deux points sont bisimilaires, alors il est facile de voir qu'ils seront élémentairement équivalents (la transposition de l'équivalence élémentaire étant évidente).

Une bisimulation entre structures simples induit des bisimulations sur les restrictions de ces structures. Si $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ est une bisimulation entre $\mathbf{S} = <\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = <\mathbf{V}, \Gamma>$, et si $a \in W_{n+1}$ et $b \in V_{n+1}$, nous définissons la relation $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b) \subset \mathbf{W}_n\times\mathbf{V}_n$ comme suit : $\mathbf{w}_n\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}_n$ ssi

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W}\, \exists \mathbf{y} \in \mathbf{V}\, [\, \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{w}_n, a) \ \&\ \mathbf{y}_{n+1} = (\mathbf{v}_n, b) \ \&\ \mathbf{xZy}\,]$$

Par ailleurs, nous définissons $\mathbf{Z}_n(a, b) \subset W_n\times V_n$ comme suit : $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$ ssi

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W}\, \exists \mathbf{y} \in \mathbf{V}\, [\, (x_n, x_{n+1}) = (w, a) \ \&\ (y_n, y_{n+1}) = (v, b) \ \&\ \mathbf{xZy}\,]$$

La relation $\mathbf{w}_n\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}_n$ est une bisimulation (de rang n) entre la restriction de $\mathbf{S}$ à a et la restriction de $\mathbf{T}$ à b, et la relation $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$ est une bisimulation (au sens originel) entre $\mathbf{S}_n(a)$ et $\mathbf{T}_n(b)$. En effet :

Proposition 6.2.5

Soit $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ une bisimulation entre $\mathbf{S} = <\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = <\mathbf{V}, \Gamma>$, et soient $a \in W_{n+1}$ et $b \in V_{n+1}$.

(a) $\mathbf{Z}_n(a, b)$ est une bisimulation (de structures) entre $\mathbf{S}_n(a)$ et $\mathbf{T}_n(b)$.

(b) Si $\mathbf{Z}$ est une bisimulation entre $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val_1>$ et $\mathbf{N} = <\mathbf{T}, val_2>$, alors $\mathbf{Z}_n(a, b)$ est une bisimulation (de modèles) entre $\mathbf{M}_n(a)$ et $\mathbf{N}_n(b)$.

(c) $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)$ est une bisimulation (de structures) entre $\mathbf{S}_{\leq n}(a)$ et $\mathbf{T}_{\leq n}(b)$.

(d) Si $\mathbf{Z}$ est une bisimulation entre $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val_1>$ et $\mathbf{N} = <\mathbf{T}, val_2>$, alors $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)$ est une bisimulation (de modèles) entre $\mathbf{M}_{\leq n}(a)$ et $\mathbf{N}_{\leq n}(b)$.

PREUVE. (a) Supposons que $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$, où $w \in W_n$ et $v \in V_n$, et supposons qu'il existe $w' \in W_n$ tel que $\Phi_{n+1}(a)(w, w')$. D'une part, si $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$, c'est qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tels que $(x_n, x_{n+1}) = (w, a)$, $(y_n, y_{n+1}) = (v, b)$ et $\mathbf{xZy}$. Posons $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}_{-n}, w')$. Il est alors évident que $\mathbf{x}\{n+1\}\mathbf{x}'$. Puisque $\mathbf{Z}$ est une bisimulation, il existe $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{y}\{n+1\}\mathbf{y}'$ et $\mathbf{x}'\mathbf{Zy}'$. Mais $\mathbf{y}\{n+1\}\mathbf{y}'$

entraîne que $\mathbf{y}'$ est de la forme $(\mathbf{y}_{-n}, v')$, avec $y_{n+1} = b$ et $v' \in V_n$ tel que $\Gamma_{n+1}(b)(v, v')$. Nous avons donc qu'il existe $v' \in V_n$ avec $w'\mathbf{Z}_n(a, b)v'$ et $\Gamma_{n+1}(b)(v, v')$. Ce qui montre (zig). La démonstration de (zag) se fait de manière analogue.

(b) Supposons que $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$ et soit $p \in \mathrm{Prop}_n$. Si $w\mathbf{Z}_n(a, b)v$, c'est qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tels que $(x_n, x_{n+1}) = (w, a)$, $(y_n, y_{n+1}) = (v, b)$ et $\mathbf{xZy}$. Puisque $\mathbf{xZy}$, il s'ensuit que $w_n \in val_1(p)$ ssi $v_n \in val_2(p)$, autrement dit que

$$w \in val_1(p) \text{ ssi } v \in val_2(p)$$

La démonstration de (base$_\alpha$) est similaire.

Les parties (c) et (d) sont des conséquences directes des définitions de bisimulation et de bisimulation induite. ✠

Corollaire 6.2.6

Si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont $\mathbf{Z}$-bisimilaires (comme modèles) et si $\mathbf{wZv}$, alors $\mathbf{M}_n(w_{n+1})$ et $\mathbf{N}_n(v_{n+1})$ sont bisimilaires et $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1})$ et $\mathbf{N}_{\leq n}(v_{n+1})$ sont bisimilaires.

Preuve. Ce corollaire est plus ou moins la conséquence directe de la proposition précédente et de la proposition 6.2.2. ✠

6.3 Traduction dans la logique du premier ordre

Nous montrons dans cette section comment traduire le langage L dans un certain langage du premier ordre de sorte que la notion de satisfaction dans les structures simples soit traduite en une notion de satisfaction dans des modèles du premier ordre.

Nous commencerons par traduire L dans un langage du premier ordre typé L_{Trs} (avec égalité).[56] Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il y aura une collection (dénom-

[56] On dit habituellement « sorté » plutôt que « typé », mais je trouve le terme « sorté » affreux et « typé » rend bien l'idée derrière ce langage.

brable) de variables et de symboles de constantes de type n; plus précisément, un ensemble Var_n de variables x_n de type n, et un ensemble Con_n de symboles de constantes comprenant une constante 'a_α' (ou '$a(\alpha)$') pour chaque $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Les symboles de prédicat prendront des arguments de types spécifiques; par exemple, si 'A' est un symbole de prédicat de type '$(n, n+1)$', c'est que 'A' est un prédicat à deux variables, la première étant de type n et la seconde de type $n+1$. Il y aura, pour chaque $p \in \mathrm{Prop}_n$, un symbole de prédicat 'P_p' (ou '$P(p)$') de type (n). L'ensemble de tous les symboles de prédicats unaires de type (n) (de cette forme) sera dénoté par CON_n. Enfin, pour tout $n \geq 0$, il y aura le symbole de prédicat '$R_{n+1}(x_{n+1}, x_n, y_n)$' de type $(n+1, n, n)$. Les règles de formation des formules de L_{Trs}, une fois cette liste spécifiée, sont évidentes, l'ensemble de ces formules étant dénoté par Form_{Trs}.

Si $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ et si $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$, le L_{Trs}-modèle typé du premier ordre correspondant est $M(\mathbf{S}) = < \mathbf{D}, I >$ où $\mathbf{D} = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$I(a_\alpha) = val(\alpha)$$
$$I(P_p) = val(p)$$
$$I(R_{n+1}) = \Phi_{n+1}$$

Pour la suite, le symbole de constante 'a_w' (ou '$a(w)$') est définie comme la (une des) constante(s) 'a_α' tel que $val(\alpha) = w$. L'ensemble Term_n des termes de type n de L_{Trs} est l'union de Con_n et de Var_n. Définissons l'ensemble Con comme l'union des Con_n, Var comme l'union des Var_n, et Term comme l'union des Term_n.

Pour les besoins de la traduction, nous définissons **Con** comme l'ensemble des suites $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$, où $a_n \in \mathrm{Con}_n$, **Var** comme l'ensemble des suites $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$, où $x_n \in \mathrm{Var}_n$, et **Term** comme l'ensemble des suites $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots)$, où $t_n \in \mathrm{Term}_n$. Si $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{a}(\mathbf{w})$ est la suite de **Term** telle que

$$\mathbf{a}(\mathbf{w}) = (a(w_0), a(w_1), \ldots).$$

La fonction de traduction

$$\mathrm{Tr} : \mathbf{Term} \times \mathrm{Form}_L \to \mathrm{Form}_{Trs}$$

est définie récursivement comme suit : pour $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots) \in \mathbf{Term}$,

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \bot) = a \neq a$ (a au choix)

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = P_p(t_n)$, si $r(p) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = a_\alpha$, si $r(\alpha) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \neg\varphi) = \neg\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi)$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi \wedge \psi) = \mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi) \wedge \mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \psi)$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, @_\alpha\varphi) = \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, a_\alpha), \varphi))$, si $r(\alpha) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_{n+1}\varphi) = \forall x_n(R_{n+1}(t_{n+1}, t_n, x_n) \rightarrow \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi))$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_\beta\varphi) = \forall x_n(R_{n+1}(a_\beta, t_n, x_n) \rightarrow \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi))$, si $r(\beta) = n{+}1$

En dépit du fait $\mathbf{t}$ soit une suite infinie, il n'y a jamais plus qu'un nombre fini de t_k dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi)$.

Proposition 6.3.1

Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ et soit $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Nous avons que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. La preuve est par induction sur φ.

<u>Étape de base</u>. Supposons que $\varphi = p$, où $p \in \mathrm{Prop}_n$. Nous avons que

$M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), p)$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash P_p(a(w_n))$

ssi $I(a(w_n)) \in I(P_p)$

ssi $w_n \in val(p)$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash p$

Si $\varphi = \alpha$, avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

$M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \alpha)$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash a(w_n) = a_\alpha$

ssi $I(a(w_n)) = I(a_\alpha)$

ssi $w_n = val(\alpha)$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \alpha$

<u>Étape d'induction</u>. (i) Si $\varphi = \neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$, la preuve est directe.

(ii) Supposons que $\varphi = @_\alpha\psi$, avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons, par définition et par l'hypothèse d'induction, que

$M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), @_\alpha\psi)$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{w})_{-n}, a_\alpha), \psi))$

ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, I(a_\alpha)) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi$

(iii) Supposons que $\varphi = \Box_{n+1}\psi$. Nous avons, par définition et par l'hypothèse d'induction, que

$M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \Box_{n+1}\psi)$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_n(R_{n+1}(a(w_{n+1}), a(w_n), x_n) \rightarrow \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{w})_{-n}, x_n), \varphi))$

ssi $\forall w \in W_n [\, I(a(w_{n+1}), a(w_n), a(w)) \in I(R_{n+1})$

$\Rightarrow M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{w})_{-n}, a(w)), \varphi)) \,]$

ssi $\forall w \in W_n [\, \Phi_{n+1}(w_{n+1})(w_n, w) \Rightarrow M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{w})_{-n}, a(w)), \varphi)) \,]$

ssi $\forall w \in W_n [\, \Phi_{n+1}(w_{n+1})(w_n, w) \Rightarrow \mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi \,]$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$

(iv) Si $\varphi = \Box_\beta\psi$, avec $r(\beta) \geq 1$, la preuve est similaire à celle de (iii).

Ce qui complète la démonstration. ✠

Pour tous φ et $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$, le nombre de variables (libres ou pas) dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \varphi)$ est fini, car il n'y a qu'un nombre fini d'étapes dans la définition de la traduction $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \varphi)$ de φ, et chaque étape de la traduction n'ajoute qu'un nombre fini de variables.

Proposition 6.3.2

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ et soit $n = \max\{m : x_m$ libre dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi\}$. Nous avons

$\mathbf{M} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$

Preuve. Nous avons que $\mathbf{M} \Vdash \varphi$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$, pour tous $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$, …

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$, pour tous $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$, …, $w_n \in W_n$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_n \mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Nous étendons le travail précédent pour traduire la validité dans une structure. Pour ce faire, nous devons ajouter à L_{Trs} des variables et des quantificateurs d'ordre deux. Plus précisément, pour chaque n, il faut un ensemble VAR_n de variables de prédicats unaires X de type (n). Nous appellerons ce langage L_{TRs} et l'ensemble des formules de L_{TRs} est Form_{TRs}. L'ensemble TERM_n des termes de type (n) est donc l'union de CON_n et de VAR_n. Enfin, l'ensemble CON est l'union des CON_n, VAR est l'union des VAR_n, et TERM est l'union des TERM_n.

Soit $\vartheta : \mathrm{Con} \cup \mathrm{CON} \to \mathrm{Var} \cup \mathrm{VAR}$ une fonction injective telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{Nom}$ et pour tout $p \in \mathrm{Prop}$,

$\vartheta(a_\alpha) = x_\alpha$ (ou $x(\alpha)$), où $x_\alpha \in \mathrm{Var}_{r(\alpha)}$

$\vartheta(P_p) = X_p$ (ou $X(p)$), où $X_p \in \mathrm{VAR}_{r(p)}$

Exigeons, par ailleurs, que les variables de Var qui sont utilisées dans les traductions ne sont pas dans l'image de ϑ. Une telle fonction existe car les ensembles Con, CON, Var et VAR sont infinis. Nous modifions maintenant la fonction de traduction Tr en remplaçant les clauses

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = P_p(t_n)$, si $r(p) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = a_\alpha$, si $r(\alpha) = n$

par celles-ci :

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = X_p(t_n)$, si $r(p) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = x_\alpha$, si $r(\alpha) = n$

Avec ces modifications, nous pouvons traduire les formules dans L_{TRs} de même que la validité dans un structure, comme le démontre la proposition suivante :

Proposition 6.3.3

Soient $\varphi \in$ Form, $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$, et $n = \max\{m : x_m$ libre dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)\}$. Soient p_1, p_2, …, $p_k \in$ Prop et α_1, α_2, …, $\alpha_l \in$ Nom les variables propositionnelles et les nominaux apparaissant dans φ. Nous avons :

(a) $\mathbf{S}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k)\forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l)\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

(b) $\mathbf{S} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k)\forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l)\forall x_0 \ldots \forall x_n\mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$

PREUVE. (a) Par définition, $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$

ssi $< \mathbf{S}, val >, \mathbf{w} \Vdash \varphi$

ssi $< \mathbf{D}, I >, \mathbf{w} \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

où I est une fonction d'interprétation telle que

$I(x(\alpha_m)) = val(\alpha_m)$

$I(X(p_m)) = val(p_m)$

$I(R_{n+1}) = \Phi_{n+1}$

Nous pouvons décomposer I en deux parties : I_{val}, la restriction de I à Term $\cup$ TERM, et I_Φ, sa restriction à l'ensemble $\{R_{n+1} : n \geq 0\}$, de sorte que $I = I_{val} \cup I_\Phi$. La partie I_{val} est déterminée seulement par val, et la partie I_Φ par Φ. L'action de I_{val} est donc de donner une valeur aux variables $x(\alpha_1)$, …, $x(\alpha_l)$ et $X(p_1)$, …, $X(p_k)$ de $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$. Or, $\mathbf{S}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$

ssi $< \mathbf{S}, val >, \mathbf{w} \Vdash \varphi$, pour tout val

ssi $< \mathbf{D}, (J_{val}, I_\Phi) >, \mathbf{w} \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$, pour tout J_{val}

ssi $< \mathbf{D}, I > \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k)\forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l)\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

(L'évaluation de '$\forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k)\forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l)\forall x_0 \ldots \forall x_n\mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$' ne dépend pas de I_{val}.)

(b) Conséquence immédiate de (a). ✠

Une dernière remarque avant de conclure cette section. Il est bien connu qu'un langage du premier ordre typé peut être traduit dans un langage du premier ordre non-typé. Ainsi, nous pouvons donc traduire le langage L dans un langage du premier ordre non-typé. Soit L_{TPO} le langage du premier ordre (non-typé) avec égalité ayant comme variables les éléments de $\text{Var} = \bigcup_n \text{Var}_n$, comme symboles de constantes les éléments de $\text{Con} = \bigcup_n \text{Con}_n$, et comme symboles de prédicats : les éléments de $\text{CON} = \bigcup_n \text{CON}_n$, et les symboles de prédicat '$R_{n+1}(x_{n+1}, x_n, y_n)$' et '$TP_n(x)$' pour tout $n \geq 0$. (Le symbole de prédicat '$TP_n(x)$' servira à marquer le type d'un individu.) L'ensemble des formules de L_{TPO} est Form_{TPO}. La différence entre Form_{Trs} et Form_{TPO} tient non seulement à la présence de '$TP_n(x)$' mais au fait que les clauses syntaxiques de L_{TPO} n'incluent pas de contraintes sur les types (par exemple, '$P_p(x)$' est une formule de L_{TPO} même si $r(x) \neq r(p)$, ce qui n'est pas vrai pour L_{Trs}).

Si $M = < \mathbf{D}, I >$ est un modèle de L_{Trs}, où $\mathbf{D} = (W_n)_{n \geq 0}$, nous définissons le modèle $N(M) = < D, J >$ de L_{TPO} comme suit :

$D = \bigcup_{n \geq 0} W_n$

$J(X) = I(X)$, si $X \in \text{Con} \cup \text{CON} \cup \{R_{n+1} : n \geq 0\}$

$J(TP_n) = W_n$, pour $n \geq 0$

Il est facile de voir que J est bien définie et que $N(M)$ est bel et bien un modèle de L_{TPO}.

La fonction de traduction Trad : $\text{Form}_{Trs} \to \text{Form}_{TPO}$ est définie récursivement comme suit :

$\text{Trad}(\varphi) = \varphi$, si φ est une formule atomique de L_{Trs}

$\text{Trad}(\neg\varphi) = \neg\text{Trad}(\varphi)$

$\text{Trad}(\varphi \wedge \psi) = \text{Trad}(\varphi) \wedge \text{Trad}(\psi)$

$\text{Trad}(\forall x \varphi) = \forall x(TP_n(x) \to \text{Trad}(\varphi))$, si $x \in \text{Var}_n$

Il faut montrer que M et $N(M)$ s'accordent sur l'évaluation de φ et $\text{Trad}(\varphi)$.

Proposition 6.3.4

Si $\varphi \in \text{Form}_{Trs}$ est une formule close, alors

$M \Vdash \varphi$ ssi $N(M) \Vdash \text{Trad}(\varphi)$

PREUVE. Par induction sur la complexité de φ.

Étape de base. Si φ est une formule atomique, le résultat est vrai, car $\text{Trad}(\varphi) = \varphi$ et J attribue les même interprétations aux éléments de Con et de CON que I.

Étape d'induction. (i) Si $\varphi = \neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$, la preuve est une conséquence directe de l'hypothèse d'induction.

(ii) Supposons que $\varphi = \forall x\, \psi$, avec $x \in \text{Var}_n$. D'abord, par la définition de la quantification typée, nous avons que

$$M \Vdash \forall x\, \psi \text{ ssi } M \Vdash \psi[x/a(w)], \text{ pour tout } w \in W_n$$

D'autre part, par la définition de Trad et de la quantification non-typée, nous avons que

$$\begin{aligned} N(M) \Vdash \text{Trad}(\forall x\, \psi) &\text{ ssi } N(M) \Vdash \forall x(TP_n(x) \to \text{Trad}(\psi)) \\ &\text{ssi } N(M) \Vdash TP_n(a(w)) \to \text{Trad}(\psi)[x/a(w)], \text{ pour tout } w \in \textstyle\bigcup_{m\geq 0} W_m \\ &\text{ssi } N(M) \Vdash TP_n(a(w)) \to \text{Trad}(\psi)[x/a(w)], \text{ pour tout } w \in W_n \\ &\text{ssi } N(M) \Vdash \text{Trad}(\psi)[x/a(w)], \text{ pour tout } w \in W_n \end{aligned}$$

Par l'hypothèse d'induction, pour tout $w \in W_n$,

$$M \Vdash \psi[x/a(w)] \text{ ssi } N(M) \Vdash \text{Trad}(\psi)[x/a(w)],$$

donc $M \Vdash \forall x\, \psi$ ssi $N(M) \Vdash \text{Trad}(\forall x\, \psi)$.

Ce qui complète la démonstration. ✠

Ces résultats permettent d'établir les corollaires suivants :

Corollaire 6.3.5 (Compacité et Löwenheim-Skolem descendant)

Soit E un ensemble de formules de L. Nous avons :

(a) Si tout sous-ensemble fini de E est satisfaisable (dans un modèle simple), alors E est satisfaisable (dans un modèle simple).

(b) Si E est satisfaisable (dans un modèle simple), alors E est satisfaisable dans un modèle simple au plus dénombrable.

PREUVE. (a) Soit $F \subset E$ un sous-ensemble fini (de formules de L) satisfaisable dans $\mathbf{M}$ à $\mathbf{w}$. D'après les propositions précédentes, pour toute formule $\varphi \in F$, nous avons :

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $N(M(\mathbf{S})) \Vdash \mathrm{Trad}(\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi))$

Autrement dit, l'ensemble de formules

$\{\mathrm{Trad}(\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)) : \varphi \in F\}$

est satisfaisable (au sens du premier ordre). Puisque ceci est vrai de tout sous-ensemble F fini, d'après le théorème de compacité (de la logique du premier ordre), nous obtenons qu'il existe un modèle M de L_{TPO} tel que

$M \Vdash \{\mathrm{Trad}(\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)) : \varphi \in E\}$.

Puisque tout L_{TPO}-modèle peut être converti en une SROSs et que cette conversion préserve la satisfaction (il suffit de suivre les détails de la preuve de la proposition 6.3.1 pour s'en convaincre), il s'ensuit qu'il existe un modèle simple satisfaisant E.

(b) Argument analogue à la différence près que l'on invoque le théorème de Löwenheim-Skolem (descendant). ✠

Chapitre 7
Résultats sémantiques – Partie II

Nous présentons dans ce chapitre des résultats sémantiques analogues à ceux qui ont été exposés dans le chapitre précédent mais cette fois-ci pour les autres modèles généraux et pour les autres syntaxes exposées au chapitre 5.

7.1 Propriétés élémentaires

La satisfaction et la validité se comportent telles qu'attendues aussi dans le cas général.

Proposition 7.1.1

Soient $\mathbf{M}$ un modèle (général) de L, $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Nous avons que

(a) Si φ est une instance de tautologie, alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

(b) Si $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$, alors $\mathbf{w} \Vdash \psi$

(c) Si $\mathbf{M} \Vdash \varphi$, alors $\mathbf{M} \Vdash \Box_{n+1}\varphi$, $\mathbf{M} \Vdash \Box_\alpha\varphi$ et $\mathbf{M} \Vdash @_\alpha\varphi$

(d) $\mathbf{w} \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, pour $\Box = \Box_{n+1}$ ou $\Box_\beta$

(e) Si $n \notin rep(\varphi)$, alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$

Preuve. Les preuves de (a) à (d) ne comportent aucune difficulté. Pour la partie (e), il faut prendre note de la différence entre *rep* et rep_s, mais la preuve reste la même pour l'essentiel. ✠

Nous avons des résultats similaires concernant l'extension des formules dans les SROS générales. Lorsque $w \in W_{n+1}$, rappelons que

$\mathbf{M}_{\leq n}(w) = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, \Phi(w), val_{\leq n} >$

est le modèle de rang fini obtenu de $\mathbf{M}$ par restriction à w.

Proposition 7.1.2

Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ si et seulement si $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$

Preuve. La preuve par induction est analogue à celle pour les modèles simples. Les cas nouveaux sont ceux qui impliquent les modalités. Examinons le cas où $\varphi = \Box_{m+1}\psi$, où $0 \leq m \leq n$. Nous avons $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Box_{m+1}\psi$

ssi $\mathbf{M}, (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \psi$, pour tout $\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m$ tel que $\Phi(w_{m+1})(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_m)$

ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), (\mathbf{v}_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \Vdash \psi$, pour tout $\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m$ tel que …

ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \Box_{m+1}\psi$

Si $\varphi = \Box_\beta\psi$ avec $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n}\backslash\mathrm{Nom}_0$, la démonstration est analogue. ✠

Rappelons aussi que $E_{\leq n}(\varphi) = \bigcup\{[\![\varphi]\!]_{\leq n}(w)\times\{w\} : w \in W_{n+1}\}$. Autrement dit, $E_{\leq n}(\varphi)$ est en quelque sorte l'union des extensions de φ dans $\mathbf{M}_{\leq n}(w)$ pour $w \in W_{n+1}$. Nous avons :

Proposition 7.1.3

Soient $p \in \mathrm{Prop}_n$, et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

(a) $[\![\bot]\!] = \varnothing$

(b) $[\![p]\!] = val(p)\times\mathbf{W}^{n+1}$

(c) $[\![\alpha]\!] = \mathbf{W}_{n-1}\times\{val(\alpha)\}\times\mathbf{W}^{n+1}$

(d) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$, alors $[\![\varphi]\!] = Ext_{\leq n}(\varphi)\times\mathbf{W}^{n+2}$

PREUVE. Les preuves de (a), (b) et (c) découlent immédiatement des clauses sémantiques pour les variables propositionnelles, les nominaux et pour $\bot$.

(d) Par définition et par la proposition précédente, nous avons que

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \in [\![\varphi]\!] &\text{ ssi } \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}),\ \mathbf{w}_n \Vdash \varphi \\ &\text{ ssi } \mathbf{w}_n \in [\![\varphi]\!]_{\leq n}(w_{n+1}) \\ &\text{ ssi } \mathbf{w}_{n+1} \in Ext_{\leq n}(\varphi) \\ &\text{ ssi } \mathbf{w} \in Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}\end{aligned}$$

D'où le résultat. ✠

Nous conservons les caractérisations du tableau 6.1.5 pour les SROS générales. Nous avons déjà les conséquences suivantes pour la définissabilité.

Proposition 7.1.4

Soit *Sch* un schème du tableau 6.1.5 portant sur les modalités de rang $n+1$, et soit *Cond* la condition correspondant à ce schème. Nous avons

$$\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi), \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$$

ssi toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ satisfont *Cond*.

PREUVE. (On remarquera que la proposition serait toujours vraie si nous remplacions l'ensemble $\mathrm{Form}_{\leq n}$ par $\mathrm{Prop}_{\leq n}$.) Il faut montrer que la relation $\Phi(w) \subset \mathbf{W}_n \times \mathbf{W}_n$ satisfait *Cond* si

$$\mathbf{S}_{\leq n}(w) \Vdash Sch(\varphi), \text{ pour tous } \varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$$

Soit F_n est le sous-ensemble de formules de $\mathrm{Form}_{\leq n}$ généré par les clauses

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_{n+1}\varphi$$

où $p \in \mathrm{Prop}_n$. L'évaluation d'une formule φ de F_n dans $\mathbf{M}_{\leq n}(w)$ est équivalente à l'évaluation φ dans le modèle de Kripke $< \mathbf{W}_n, \Phi_{n+1}(w), val >$. Or, la validité de toutes les instances de *Sch* dans la structure de Kripke $< \mathbf{W}_n, \Phi_{n+1}(w) >$ entraîne que $\Phi_{n+1}(w)$ satisfait *Cond*. ✠

Si nous voulons montrer que la validité du schème *Sch* avec des instances limitées à $\mathrm{Form}_{\leq n}$ (voire même Prop_n) implique la validité de ce schème avec des instances quelconques, il faut à nouveau faire appel au langage infinitaire L_κ. Les seules modifications que nous apporterons sont les clauses pour les modalités (la relation [-] remplacera la relation {-}). Pour $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$, rappelons que

$$\mathrm{Nom}(\mathbf{V}) = \{\alpha \in \mathbf{Nom} : val(\alpha) \in \mathbf{V}\}$$

Les notions suivantes seront importantes pour la réécriture des formules de L : pour $\alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}$, nous définissons

$$\mathrm{Nom}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}) = \{\alpha_n \in \mathbf{Nom}_n : (\alpha_n, \alpha^{n+1}) \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})\}$$

$$\mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}) = \vee\mathrm{Nom}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1})$$

$$\mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}) = \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge \mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$$

La formule $\mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V})$ a les propriétés désirées :

Lemme 7.1.5

$[\![\mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V})]\!] = \mathbf{V}$

Preuve. En effet, $\mathbf{w} \in [\![\mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V})]\!]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge \mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$

ssi $\exists\beta^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}[\, \mathbf{w} \Vdash \wedge\beta^{n+1} \wedge \mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \beta^{n+1})\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \wedge\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}) \wedge \mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}_{\leq n}(\mathbf{V}, \alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

ssi $\alpha(\mathbf{w}) \in \mathrm{Nom}(\mathbf{V})$

ssi $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Ce qui complète la preuve. ✠

Corollaire 7.1.6

Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_{<\kappa}$, alors $\mathbf{w} \Vdash \mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$.

PREUVE. Lemme précédent avec $\mathbf{V} \doteq [\![\varphi]\!]$. ✠

Ceci nous permet d'établir le lemme clé suivant :

Lemme 7.1.7

Pour chaque $\alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}$, soit $p(\alpha^{n+1}) \in \mathrm{Prop}_n$ tel que $val(p(\alpha^{n+1})) = val(p(\beta^{n+1}))$, si $val(\alpha^{n+1}) = val(\beta^{n+1})$.[57] Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, nous avons que :

(a) $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(b) $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(c) $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

PREUVE. (a) Nous avons que $\mathbf{w} \Vdash \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$

ssi $\exists\beta^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\,[\,\mathbf{w} \Vdash \wedge\beta^{n+1} \wedge p(\beta^{n+1})\,]$

ssi $\exists\beta^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\,[\,val(\beta^{n+1}) = \mathbf{w}^{n+1}\ \&\ \mathbf{w} \Vdash p(\beta^{n+1})\,]$

ssi $val(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1})) = \mathbf{w}^{n+1}\ \&\ \mathbf{w} \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(b) Nous avons donc que $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\exists\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)\ \&\ (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}\,]$

Par conséquent, d'après (a), $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$

ssi $\exists\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n)\ \&\ (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(c) Nous avons que $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\forall\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash \vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}]$

Par conséquent, d'après (a), $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\vee\{\wedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$

ssi $\forall\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

Ce qui complète la démonstration. ✠

---

[57] Ici, $val(\alpha^{n+1}) = (val(\alpha_{n+1}), val(\alpha_{n+2}), \ldots)$.

Corollaire 7.1.8
Les propositions du lemme précédent tiennent aussi si nous remplaçons '$\Box_{n+1}$' par '$\Box_\beta$', où $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$.

PREUVE. Il suffit de refaire exactement le même argument. ✠

Tout ceci pour en arriver à :

Théorème 7.1.9
Soit *Sch* un schème du tableau 6.1.5 ayant trait à des modalités de rang n+1. Si $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$, alors $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_L$.

PREUVE. Supposons que $\mathbf{S} \Vdash Sch(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ (voire Prop_n). Soient $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ une formule constante, $\mathbf{M}$ un modèle basé sur $\mathbf{S}$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Nous devons montrer que $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash Sch(\varphi)$. Puisque

$$Sch(\varphi) = ma\,\varphi \rightarrow mc\,\varphi$$

il faut montrer que

$$\mathbf{w} \Vdash ma\,\varphi \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\varphi$$

Par ailleurs, par un des corollaires précédents, puisque $[\![\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])]\!] = [\![\varphi]\!]$, il suffit de montrer que

$$\mathbf{w} \Vdash ma\,\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!]) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$$

Il faut d'abord apporter une petite modification à $\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ pour pouvoir appliquer le lemme ci-dessus. Soit $p(\varphi, \alpha^{n+1})$ une nouvelle variable propositionnelle telle que

$$val(p(\varphi, \alpha^{n+1})) = \{val(\alpha_n) : \alpha_n \in \mathrm{Nom}_{\leq n}([\![\varphi]\!], \alpha^{n+1})\}$$

Nous remplaçons $\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!], \alpha^{n+1})$ par $p(\varphi, \alpha^{n+1})$ dans $\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$. Soit $\mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ cette formule. Il est clair que $\mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ possède la même extension que $\mathrm{N}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$, et donc la même extension que φ. Il suffit donc de montrer que

(*) $\quad \mathbf{w} \Vdash ma\,\mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!]) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\,\mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$

Une application répétée des parties (a), (b) et (c) du lemme précédent nous donne

$\mathbf{w} \Vdash ma\, \mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash ma\, p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$

$\mathbf{w} \Vdash mc\, \mathrm{M}_{\leq n}([\![\varphi]\!])$ ssi $\mathbf{w} \Vdash mc\, p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$

de sorte que l'implication (*) est équivalente à l'implication suivante :

(**) $\quad \mathbf{w} \Vdash ma\, p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}) \Rightarrow \mathbf{w} \Vdash mc\, p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$

Mais (**) est équivalente à $\mathbf{w} \Vdash ma\ p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}) \to mc\ p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1})$, laquelle est équivalente à $\mathbf{w} \Vdash Sch(p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}))$ et $p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}) \in \mathrm{Form}_{\leq n}$. Mais, par hypothèse, nous savons que $Sch(p(\varphi, \boldsymbol{\alpha}^{n+1}))$ est valide dans **S**. D'où le résultat. ✠

7.2 Invariance et bisimulation

Soient $\mathbf{S} = \,<\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = \,<\mathbf{V}, \Gamma>$ des SROS. Un homomorphisme entre **S** et **T** est une fonction $\Theta : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ telle que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout **w**, $\mathbf{w'} \in \mathbf{W}$:

$\mathbf{w}[n{+}1]\mathbf{w'} \Rightarrow \Theta(\mathbf{w})[n{+}1]\Theta(\mathbf{w'})$, et

$\mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'} \Rightarrow \Theta(\mathbf{w}) \approx_n \Theta(\mathbf{w'})$.

Autrement dit, Θ doit préserver les relations $[n{+}1]$ et $\approx_n$. Un homomorphisme entre modèles est un homomorphisme Θ entre les structures sur lesquelles sont basés ces modèles qui préserve les fonctions de valuation :

$\mathbf{w'} = \Theta(\mathbf{w}) \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall p \in \mathrm{Prop}_n\, [\, w_n \in val(p) \Rightarrow w_n' \in val'(p)\,]$

$\mathbf{w'} = \Theta(\mathbf{w}) \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_n\, [\, w_n = val(\alpha) \Rightarrow w_n' = val'(\alpha)\,]$

Il est clair que l'homomorphisme surjectif entre modèles entraîne l'équivalence élémentaire.

Une bisimulation entre les SROS **S** et **T** est une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}{\times}\mathbf{V}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, si $\mathbf{wZv}$, alors

(zig_n) $\quad \mathbf{w}[n{+}1]\mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}[n{+}1]\mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag_n) $\quad \mathbf{v}[n{+}1]\mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}[n{+}1]\mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

($\mathrm{zig}_\approx$) $\quad \mathbf{w} \approx_n \mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v} \approx_n \mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag$_\approx$) $\mathbf{v} \approx_n \mathbf{v}' \Rightarrow \exists \mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w} \approx_n \mathbf{w}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

Les définitions de *points* **Z**-*bisimilaires*, de *points bisimilaires*, de *structures* **Z**-*bisimilaires*, et de *structures bisimilaires* sont analogues à celles données plus haut.

Si $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val_1>$ et $\mathbf{N} = <\mathbf{T}, val_2>$ sont des modèles basés sur les structures **S** et **T**, une bisimulation entre les modèles **M** et **N** est une bisimulation **Z** entre les structures sous-jacentes respectives **S** et **T** telle que

(base$_p$) $\mathbf{wZv} \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall p \in \mathrm{Prop}_n\, [\, w_n \in val_1(p)$ ssi $v_n \in val_2(p)\,]$

(base$_\alpha$) $\mathbf{wZv} \Rightarrow \forall n \geq 0, \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_n\, [\, w_n = val_1(\alpha)$ ssi $v_n = val_2(\alpha)\,]$

Les définitions de *points* **Z**-*bisimilaires*, de *points bisimilaires*, de *modèles* **Z**-*bisimilaires*, et de *modèles bisimilaires* sont analogues à celles données plus haut.

Proposition 7.2.1

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles **M** et **N** respectivement, et soit **Z** une bisimulation entre **M** et **N**. Si **wZv** alors

(a) $val_1(\alpha) = \mathbf{w}$ et $val_2(\alpha) = \mathbf{v}$ pour un certain $\alpha \in \mathbf{Nom}$, et

(b) $val_1(\beta_n, \alpha^{n+1})\mathbf{Z}val_2(\beta_n, \alpha^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\beta_n \in \mathbf{Nom}_n$.

PREUVE. La démonstration est la même que celle pour les SROS simples. ✠

Une bisimulation se comporte adéquatement vis-à-vis les relations [β] aussi :

Proposition 7.2.2

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles **M** et **N** respectivement, soit **Z** une bisimulation entre **M** et **N**, et soit $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Si **wZv**, alors

(zig$_\beta$) $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{w}' \Rightarrow \exists \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{v}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

(zag$_\beta$) $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{v}' \Rightarrow \exists \mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{w}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

PREUVE. Soit $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{w}'$. Puisque $\mathbf{M}$ est nommé, il existe α, $\alpha' \in$ **Nom** tels que $val_1(\alpha) = \mathbf{w}$ et $val_1(\alpha') = \mathbf{w}'$. Par la proposition précédente, nous avons que $val_2(\alpha) = \mathbf{v}$. Définissons

$$\mathbf{x} = (\mathbf{w}_{-(n+1)}, val_1(\beta)) = val_1(\alpha_{-n}, \beta)$$
$$\mathbf{x}' = (\mathbf{w}'_{-(n+1)}, val_1(\beta)) = val_1(\alpha'_{-n}, \beta)$$

Par définition des relations $[\beta]$ et $[n+1]$, nous avons que $\mathbf{x}[n+1]\mathbf{x}'$. La condition (zig$_n$) entraîne qu'il existe $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{y}[n+1]\mathbf{y}'$ et $\mathbf{x}'\mathbf{Z}\mathbf{y}'$. Par la proposition précédente,

$$\mathbf{y} = val_2(\alpha_{-n}, \beta)$$
$$\mathbf{y}' = val_2(\alpha'_{-n}, \beta)$$

Soit $\mathbf{v}' = val_2(\alpha')$. Nous avons par la définition des relations $[\beta]$ et $[n+1]$ que $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{v}'$, et par la proposition précédente que $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$. Ce qui démontre (zig$_\beta$).

La direction (zag$_\beta$) se démontre de manière analogue. ✠

Montrons que la bisimulation se comporte bien à l'endroit de l'équivalence élémentaire :

Proposition 7.2.3

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val_1 >$ et $\mathbf{N} = < \mathbf{T}, val_2 >$. Si $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}$ sont bisimilaires, alors $\mathbf{M}, \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{N}, \mathbf{v}$.

PREUVE. La preuve est par induction sur la complexité de φ.

Étape de base. Si φ est une variable propositionnelle $p \in$ Prop ou un nominal $\alpha \in$ Nom, le résultat découle de (base$_p$) et (base$_\alpha$).

Étape d'induction. (i) Le cas booléen est une conséquence directe de l'hypothèse d'induction.

(ii) Si $\varphi = @_\alpha\psi$, avec $\alpha \in$ Prop$_n$, la démonstration est identique au cas simple.

(iii) Supposons que $\varphi = \Box_{n+1}\psi$. Nous démontrerons l'équivalence :

$$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi \text{ ssi } \mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi.$$

Nous avons

$\mathbf{M}$, $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{M}$, $\mathbf{w'} \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{w'}$ t. q. $\mathbf{w}[n+1]\mathbf{w'}$

Par l'hypothèse d'induction, s'il existe $\mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ bisimilaire à $\mathbf{w'}$, alors

$\mathbf{M}$, $\mathbf{w'} \Vdash \psi$ ssi $\mathbf{N}$, $\mathbf{v'} \Vdash \psi$

La condition (zig_n) nous assure de l'existence d'un tel $\mathbf{v'}$ qui, en plus d'être bisimilaire à $\mathbf{w'}$, est tel que $\mathbf{v}[n+1]\mathbf{v'}$. Il en résulte donc que

$\mathbf{M}$, $\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$ ssi $\mathbf{M}$, $\mathbf{w'} \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{w'} \in \mathbf{W}$ t. q. $\mathbf{w}[n+1]\mathbf{w'}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{N}$, $\mathbf{v'} \Vdash \psi$, pour un certain $\mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ t. q. $\mathbf{v}[n+1]\mathbf{v'}$

ssi $\mathbf{N}$, $\mathbf{v} \Vdash \Diamond_{n+1}\psi$

Un argument symétrique exploitant (zag_n) montre que l'autre direction ($\Leftarrow$) tient également.

(iv) En appliquant la proposition précédente et en employant un argument similaire à celui de (iii), nous pouvons montrer que le résultat tient pour $\varphi = \Box_\beta\psi$.

Ce qui complète la démonstration. ✠

Cette notion de bisimulation pour les SROS générales s'adapte facilement aux SROF. Soient $\mathbf{S} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R >$ et $\mathbf{T} = < \mathbf{V}_n, \Gamma_{\leq n}, Q >$ des SROF de rang n. Nous définissons une bisimulation (de rang n) entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ comme une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}_n \times \mathbf{V}_n$ telle que : pour tout $m \leq n$ et $\beta \in \text{Nom}_{\leq n} \backslash \text{Nom}_0$, si $\mathbf{wZv}$

(zig_m) $\mathbf{w}[m+1]\mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v}[m+1]\mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

(zag_m) $\mathbf{v}[m+1]\mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w}[m+1]\mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

($\text{zig}_\approx$) $\mathbf{w} \approx_m \mathbf{w'} \Rightarrow \exists \mathbf{v'} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v} \approx_m \mathbf{v'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

($\text{zag}_\approx$) $\mathbf{v} \approx_m \mathbf{v'} \Rightarrow \exists \mathbf{w'} \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w} \approx_m \mathbf{w'}$ et $\mathbf{w'Zv'}$

Une bisimulation entre les modèles de rang n

$\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val_1 >$

$\mathbf{N} = < \mathbf{T}, val_2 >$

est une bisimulation entre les structures $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ telle que

(base_p) $\mathbf{wZv} \Rightarrow \forall m \leq n \forall p \in \text{Prop}_m [\, w_m \in val_1(p)$ ssi $v_m \in val_2(p) \,]$

(base$_\alpha$) $\mathbf{wZv} \Rightarrow \forall m \leq n \forall \alpha \in \mathrm{Nom}_m [\, w_m = val_1(\alpha) \text{ ssi } v_m = val_2(\alpha) \,]$

Cette notion de bisimulation jouit sensiblement des mêmes propriétés que la précédente. Notamment, nous avons que si $\mathbf{wZv}$, alors

$val_1(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}val_2(\boldsymbol{\beta})$, pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$

et, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_{\leq n} \backslash \mathrm{Nom}_0$,

(zig$_\beta$) $\mathbf{w}[\beta[\mathbf{w}' \Rightarrow \exists \mathbf{v}' \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{v}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

(zag$_\beta$) $\mathbf{v}[\beta]\mathbf{v}' \Rightarrow \exists \mathbf{w}' \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w}[\beta]\mathbf{w}'$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

Surtout, si deux points sont bisimilaires, alors il est facile de voir qu'ils seront élémentairement équivalents (la transposition de la définition d'équivalence élémentaire dans ce contexte étant évidente).

Une bisimulation entre des SROS induit des bisimulations sur les restrictions de ces structures. Si $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ est une bisimulation entre les structures $\mathbf{S} = <\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = <\mathbf{V}, \Gamma>$, et si $a \in W_{n+1}$ et $b \in V_{n+1}$, nous définissons la relation $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b) \subset \mathbf{W}_n\times\mathbf{V}_n$ comme suit : $\mathbf{w}_n\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}_n$ ssi

$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W}\, \exists \mathbf{y} \in \mathbf{V}\, [\, \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{w}_n, a) \,\&\, \mathbf{y}_{n+1} = (\mathbf{v}_n, b) \,\&\, \mathbf{xZy} \,]$

La relation $\mathbf{w}_n\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}_n$ est une bisimulation (de rang n) entre la restriction de $\mathbf{S}$ à a et la restriction de $\mathbf{T}$ à b. En effet :

Proposition 7.2.4

Soit $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ une bisimulation entre $\mathbf{S} = <\mathbf{W}, \Phi>$ et $\mathbf{T} = <\mathbf{V}, \Gamma>$, et soient $a \in W_{n+1}$ et $b \in V_{n+1}$.

(a) $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)$ est une bisimulation (de structures) entre $\mathbf{S}_{\leq n}(a)$ et $\mathbf{T}_{\leq n}(b)$.

(b) Si $\mathbf{Z}$ est une bisimulation entre $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val_1>$ et $\mathbf{N} = <\mathbf{T}, val_2>$, alors $\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)$ est une bisimulation (de modèles) entre $\mathbf{M}_{\leq n}(a)$ et $\mathbf{N}_{\leq n}(b)$.

PREUVE. Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_n$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ tels que $\mathbf{wZ}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}$, et soit $m \leq n$. Par définition de $\mathbf{Z}_{\leq n}$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tels que $\mathbf{xZy}$, $\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{w}, a)$ et $\mathbf{y}_{n+1} = (\mathbf{v}, b)$.

Démontrons (zig$_m$). Supposons qu'il existe $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w}[m{+}1]\mathbf{w}'$. Posons $\mathbf{x}' = (\mathbf{w}', \mathbf{x}^{n+1})$. Nous avons alors que $\mathbf{x}[m{+}1]\mathbf{x}'$. Il existe donc $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{y}[m{+}1]\mathbf{y}'$ et $\mathbf{x}'\mathbf{Z}\mathbf{y}'$. Or, $\mathbf{y}' = (\mathbf{v}', \mathbf{y}^{n+1})$ avec $\mathbf{v}' \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{v}[m{+}1]\mathbf{v}'$ (ceci est une conséquence de la définition de $[m{+}1]$), ce qui démontre (zig$_m$). La démonstration de (zag$_m$) est analogue.

Démontrons maintenant (zig$_\approx$). Soit $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}_n$ tel que $\mathbf{w} \approx_m \mathbf{w}'$. Si $\mathbf{x} = (\mathbf{w}, \mathbf{x}^{n+1})$ et $\mathbf{x}' = (\mathbf{w}', \mathbf{x}^{n+1})$, il est évident que $\mathbf{x} \approx_m \mathbf{x}'$. Puisque $\mathbf{x}\mathbf{Z}\mathbf{y}$, nous avons qu'il existe $\mathbf{y}'$ tel que $\mathbf{x}'\mathbf{Z}\mathbf{y}'$ et $\mathbf{y} \approx_m \mathbf{y}'$. Si $\mathbf{y} \approx_m \mathbf{y}'$, c'est que $\mathbf{y}' = ((\mathbf{v}_{-m}, v), \mathbf{y}^{n+1})$. Par conséquent, il existe $\mathbf{v}' \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{w}'\mathbf{Z}_{\leq n}(a, b)\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v} \approx_m \mathbf{v}'$.
(b) La preuve découle immédiatement de (base$_p$) et (base$_\alpha$). ✠

Corollaire 7.2.5
Si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont $\mathbf{Z}$-bisimilaires (comme modèles) et si $\mathbf{w}\mathbf{Z}\mathbf{v}$, alors $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1})$ et $\mathbf{N}_{\leq n}(v_{n+1})$ sont bisimilaires.

PREUVE. Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_n$, nous voulons montrer qu'il existe $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{a}\mathbf{Z}_{\leq n}(w_{n+1}, v_{n+1})\mathbf{b}$. Si $\mathbf{a} \approx_n \mathbf{w}$, posons $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{w}^{n+1})$. La condition (zig$_\approx$) nous assure qu'il existe $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{y} \approx_n \mathbf{v}$ et $\mathbf{x}\mathbf{Z}\mathbf{y}$. Il suffira donc de poser $\mathbf{b} = \mathbf{y}_n$ et nous aurons $\mathbf{a}\mathbf{Z}_{\leq n}(w_{n+1}, v_{n+1})\mathbf{b}$. Soit maintenant $\mathbf{a}'$ tel que $\mathbf{a}' \approx_{n-1} \mathbf{a}$. Posons $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{w}^{n+1})$ et $\mathbf{x}' = (\mathbf{a}', \mathbf{w}^{n+1})$. Du fait que $\mathbf{x} \approx_{n-1} \mathbf{x}'$ et $\mathbf{x}\mathbf{Z}\mathbf{y}$, il existe $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$, par (zig$_\approx$), tel que $\mathbf{x}'\mathbf{Z}\mathbf{y}'$ et $\mathbf{y} \approx_{n-1} \mathbf{y}'$. Si $\mathbf{y} \approx_{n-1} \mathbf{y}'$, c'est que $\mathbf{y}' = (\mathbf{y}_{-(n-1)}, v) = ((\mathbf{b}_{-(n-1)}, v), \mathbf{v}^{n+1})$, où $v \in V_{n-1}$. Il existe donc $\mathbf{b}' \in \mathbf{V}_n$ tel que $\mathbf{a}'\mathbf{Z}_{\leq n}(w_{n+1}, v_{n+1})\mathbf{b}'$. En procédant de la même manière pour $n-2$, …, 1, 0, nous aurons montré que le résultat est vrai pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_n$. L'autre direction se démontre de manière analogue en utilisant (zag$_\approx$) au lieu de (zig$_\approx$).✠

7.3 Traduction dans le premier ordre

Nous montrons dans cette section comment traduire le langage L dans un certain langage du premier ordre de sorte que la notion de satisfaction dans les SROS soit traduite en une notion de satisfaction de modèles du premier ordre.

Le langage de traduction du premier ordre L_{Tr} pour les SROS est presqu'identique à L_{Trs}, la seule différence se situant au niveau des symboles de prédicats. Ce langage comportera un ensemble CON_n de symboles de prédicats de type $(0, 1, \ldots, n)$ 'P_p' ou '$P(p)$, un pour chaque $p \in \mathrm{Prop}_n$, de même qu'un symbole de prédicat '$R_{n+1}(x_{n+1}, \mathrm{x}_n, \mathbf{y}_n)$' de type $(n+1, 0, 1, \ldots, n, 0, 1, \ldots, n)$ pour chaque $n \geq 0$. L'ensemble de formules de L_{Tr} est Form_{Tr}.

Si $\mathbf{S} = < \mathbf{W}, \Phi >$ est une SROS et si $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$ est un modèle basé sur $\mathbf{S}$, le L_{Tr}-modèle du premier ordre correspondant sera $M(\mathbf{S}) = < \mathbf{D}, I >$ où $\mathbf{D} = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$I(a_\alpha) = val(\alpha)$$
$$I(P_p) = val(p)$$
$$I(R_{n+1}) = \Phi_{n+1}$$

La fonction de traduction

$$\mathrm{Tr} : \mathbf{Term} \times \mathrm{Form}_L \to \mathrm{Form}_{Tr}$$

est définie récursivement comme suit : pour $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots) \in \mathbf{Term}$,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \perp) = a \neq a \ (a \text{ au choix})$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = P_p(t_0, t_1, \ldots, t_n), \text{ si } r(p) = n$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = a_\alpha, \text{ si } r(\alpha) = n$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \neg\varphi) = \neg\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi)$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi \wedge \psi) = \mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi) \wedge \mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \psi)$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, @_\alpha\varphi) = \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, a_\alpha), \varphi)), \text{ si } r(\alpha) = n$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_{n+1}\varphi) = \forall \mathrm{x}_n(R_{n+1}(t_{n+1}, \mathbf{t}_n, \mathrm{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathrm{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_\beta\varphi) = \forall \mathrm{x}_n(R_{n+1}(a_\beta, \mathbf{t}_n, \mathrm{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathrm{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$

(Dans les deux dernières clauses, '$\forall\mathbf{x}_n$' signifie '$\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n$'). En dépit du fait que $\mathbf{t}$ soit une suite infinie, il n'y a jamais plus qu'un nombre fini de t_k dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi)$.

Proposition 7.3.1

Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ et soit $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Nous avons que

$$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \text{ ssi } M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. La preuve est par induction sur φ.

<u>Étape de base</u>. Si $\varphi = p$, où $p \in \mathrm{Prop}_n$, nous avons que

$$\begin{aligned} M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), p) &\text{ ssi } M(\mathbf{S}) \Vdash P_p(\mathbf{a}(\mathbf{w}_n)) \\ &\text{ ssi } I(\mathbf{a}(\mathbf{w}_n)) \in I(P_p) \\ &\text{ ssi } \mathbf{w}_n \in val(p) \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash p \end{aligned}$$

Si $\varphi = \alpha$, avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

$$\begin{aligned} M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \alpha) &\text{ ssi } M(\mathbf{S}) \Vdash a(w_n) = a_\alpha \\ &\text{ ssi } I(a(w_n)) = I(a_\alpha) \\ &\text{ ssi } w_n = val(\alpha) \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \alpha \end{aligned}$$

<u>Étape d'induction</u>. (i) Si $\varphi = \neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$, la preuve est directe.

(ii) Supposons que $\varphi = @_\alpha\psi$, avec $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons, par définition et par l'hypothèse d'induction, que

$$\begin{aligned} M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), @_\alpha\psi) &\text{ ssi } M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{w})_{-n}, a_\alpha), \psi)) \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, I(a_\alpha)) \Vdash \psi \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}, (\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)) \Vdash \psi \\ &\text{ ssi } \mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha\psi \end{aligned}$$

(iii) Supposons que $\varphi = \Box_{n+1}\psi$. Nous avons, par définition et par l'hypothèse d'induction, que $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \Box_{n+1}\psi)$

$$\text{ssi } M(\mathbf{S}) \Vdash \forall\mathbf{x}_n(R_{n+1}(a(w_{n+1}), \mathbf{a}(\mathbf{w}_n), \mathbf{x}_n) \rightarrow \mathrm{Tr}((\mathbf{x}_n, \mathbf{a}(\mathbf{w})^{n+1}), \psi))$$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,I(a(w_{n+1}),\, \mathbf{a}(\mathbf{w}_n),\, \mathbf{a}(\mathbf{v}_n)) \in I(R_{n+1})$

$\Rightarrow M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{v}_n),\, \mathbf{a}(\mathbf{w})^{n+1}),\, \varphi))\,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi_{n+1}(w_{n+1})(\mathbf{w}_n,\, \mathbf{v}_n) \Rightarrow M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}((\mathbf{a}(\mathbf{v}_n),\, \mathbf{a}(\mathbf{w})^{n+1}),\, \varphi))\,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\,[\,\Phi_{n+1}(w_{n+1})(\mathbf{w}_n,\, \mathbf{v}_n) \Rightarrow \mathbf{M},\, (\mathbf{v}_n,\, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash \psi\,]$

ssi $\mathbf{M},\, \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}\psi$

(iv) Si $\varphi = \Box_\gamma\psi$, avec $r(\gamma) \geq 1$, la preuve est similaire à celle de (iii).

Ce qui complète la démonstration. ✠

Pour tous φ et $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$, le nombre de variables (libres ou pas) dans $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}),\, \varphi)$ est fini, car il n'y a qu'un nombre fini d'étapes dans la définition de la traduction $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}),\, \varphi)$ de φ, et chaque étape de la traduction n'ajoute qu'un nombre fini de variables.

Proposition 7.3.2

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ et soit $n = \max\{m : x_m \text{ libre dans } \mathrm{Tr}(\mathbf{x},\, \varphi)\}$. Nous avons

$\mathbf{M} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}),\, \varphi)$

PREUVE. Nous avons que $\mathbf{M} \Vdash \varphi$

ssi $\mathbf{M},\, \mathbf{w} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}),\, \varphi)$, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}),\, \varphi)$, pour tous $w_0 \in W_0,\, w_1 \in W_1,\, \ldots$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}),\, \varphi)$, pour tous $w_0 \in W_0,\, w_1 \in W_1,\, \ldots,\, w_n \in W_n$

ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \mathrm{Tr}(\mathbf{x},\, \varphi)$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Nous étendons la proposition précédente à la validité. Pour ce faire, nous devons ajouter à L_{Tr} des variables et des quantificateurs d'ordre deux. Plus précisément, pour chaque n, il faut un ensemble VAR_n de variables de prédicats X de type $(0,\, 1,\, \ldots,\, n)$. Nous appellerons ce langage L_{TR} et l'ensemble des formules de L_{TR} est Form_{TR}. L'ensemble TERM_n des termes de type $(0, 1, \ldots, n)$ est donc l'union de CON_n et de VAR_n. Enfin, l'ensemble CON est l'union des CON_n, VAR est l'union des VAR_n, et TERM est l'union des TERM_n.

Soit $\vartheta : \mathrm{Con} \cup \mathrm{CON} \to \mathrm{Var} \cup \mathrm{VAR}$ une fonction injective telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{Nom}$ et pour tout $p \in \mathrm{Prop}$,

$\vartheta(a_\alpha) = x_\alpha$ (ou $x(\alpha)$), où $x_\alpha \in \mathrm{Var}_{r(\alpha)}$

$\vartheta(P_p) = X_p$ (ou $X(p)$), où $X_p \in \mathrm{VAR}_{r(p)}$

Exigeons, par ailleurs, que les variables de Var qui sont utilisées dans les traductions ne sont pas dans l'image de ϑ. Une telle fonction existe car les ensembles Con, CON, Var et VAR sont infinis. Nous modifions la fonction de traduction Tr en remplaçant les clauses

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = P_p(t_n)$, si $r(p) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = a_\alpha$, si $r(\alpha) = n$

par celles-ci :

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, p) = X_p(t_0, t_1, \ldots, t_n)$, si $r(p) = n$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \alpha) = t_n = x_\alpha$, si $r(\alpha) = n$

Avec ces modifications, nous pouvons traduire les formules dans L_{TR} de même que la validité dans une SROS, comme le démontre la proposition suivante :

Proposition 7.3.3

Soient $\varphi \in \mathrm{Form}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$, et $n = \max\{m : x_m \text{ libre dans } \mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)\}$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathrm{Prop}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in \mathrm{Nom}$ les variables propositionnelles et les nominaux apparaissant dans φ. Nous avons :

(a) $\mathbf{S}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k) \forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l) \mathrm{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

(b) $\mathbf{S} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k) \forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l) \forall x_0 \ldots \forall x_n \mathrm{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$

Preuve. Les preuves sont essentiellement les mêmes qu'au chapitre précédent. ✠

La traduction Trad de L_{Trs} dans L_{TPO} peut être adaptée *mutatis mutandis* pour le langage L_{Tr}. En apportant les modifications nécessaires, nous obtenons :

Proposition 7.3.4
Si $\varphi \in \text{Form}_{Tr}$ est une formule close, alors

$M \Vdash \varphi$ ssi $N(M) \Vdash \text{Trad}(\varphi)$

PREUVE. Identique à celle de la proposition 6.3.4. ✠

Ces résultats permettent d'établir les mêmes corollaires :

Corollaire 7.3.5 (Compacité et Löwenheim-Skolem descendant)
Soit E un ensemble de formules de L. Nous avons :

(a) Si tout sous-ensemble fini de E est satisfaisable (dans un modèle général), alors E est satisfaisable (dans un modèle général).

(b) Si E est satisfaisable (dans un modèle général), alors E est satisfaisable dans un modèle général au plus dénombrable.

PREUVE. La preuve est analogue à celle de 6.3.5. ✠

7.4 Le langage L_λ

Nous présentons dans cette section les résultats sémantiques pour le langage L_λ interprété tantôt dans des SROS simples et tantôt dans des SROS générales. Nous serons plus laconiques sur les détails et nous nous contenterons parfois d'exposer en vrac les propositions correspondantes.

Rappelons que Att(**S**) est l'ensemble des suite d'attributions de valeurs dans **S** à des variables de L_λ. Nous avons :

Proposition 7.4.1
Soit **M** un modèle (simple ou général) de L_λ, et soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$. Nous avons que

(a) Si φ est une instance de tautologie, alors $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$
(b) Si $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$, alors $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \psi$
(c) $\mathbf{M} \Vdash \varphi$, alors $\mathbf{M} \Vdash \Box_{n+1}\varphi$, $\mathbf{M} \Vdash \Box_\beta\varphi$, $\mathbf{M} \Vdash @_\alpha\varphi$ et $\mathbf{M} \Vdash \lambda x.\varphi$
(d) $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, pour $\Box = \Box_{n+1}$ ou $\Box_\beta$
(e) Si $n \notin rep_s(\varphi)$ (resp. si $n \notin rep(\varphi)$), alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$

PREUVE. La preuve ne comporte aucune difficulté particulière. ✠

Proposition 7.4.2
Soit **M** un modèle simple, et soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$, α et $\beta \in \mathrm{Nom}$, et x et $y \in \mathrm{Var}$ avec $x \neq y$. Nous avons que

(a) $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\neg\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \neg\lambda x.\varphi$
(b) $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.(\varphi \wedge \psi)$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi \wedge \lambda x.\psi$
(c) $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.@_\alpha\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha\lambda x.\varphi$, si $r(\alpha) \neq r(x)$
(d) $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\Box\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box\lambda x.\varphi$, si $\Box = \Box_\beta, \Box_y$, et $r(\beta), r(y) \neq r(x) + 1$

Si **M** est un modèle général, nous remplaçons (d) par

(d') $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\Box\varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box\lambda x.\varphi$, si $\Box = \Box_\beta, \Box_y$ et $r(\beta), r(y) \leq r(x)$

PREUVE. Les vérifications de (a) et de (b) sont immédiates. Pour (c), supposons que $r(x) = m$ et $r(\alpha) = n$, sous l'hypothèse que $n \neq m$, nous avons que

$$\begin{aligned}\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.@_\alpha\varphi &\text{ ssi } \mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w_m) \Vdash @_\alpha\varphi \\ &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)), (\mathrm{s}_{-x}, w_m) \Vdash \varphi\end{aligned}$$

ssi $(\mathbf{w}_{-n}, val(\alpha)), \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi$

ssi $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha \lambda x.\varphi$

Pour (d), supposons que $r(\beta) = n + 1$ et que $r(x) = m + 1$, sous l'hypothèse que $n \neq m + 1$, nous avons que

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\Box_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w_{m+1}) \Vdash \Box_\beta\varphi$

ssi $\forall w \in W_n [\, \Phi(val(\beta))(w_n, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n}, w), (\mathrm{s}_{-x}, w_{m+1}) \Vdash \varphi \,]$

ssi $\forall w \in W_n [\, \Phi(val(\beta))(w_n, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n}, w), \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi \,]$

ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_\beta \lambda x.\varphi$

La preuve pour $\Box = \Box_y$ avec $r(y) = n + 1$ est similaire. Pour la partie (d'), toujours en supposant que $r(\beta) = n + 1$ et que $r(x) = m + 1$, sous l'hypothèse que $n \leq m$, nous avons que

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\Box_\beta\varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w_{m+1}) \Vdash \Box_\beta\varphi$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n [\, \Phi(val(\beta))(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}), (\mathrm{s}_{-x}, w_{m+1}) \Vdash \varphi \,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_{n-1} [\, \Phi(val(\beta))(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}), \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi \,]$

ssi $\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_\beta \lambda x.\varphi$

et la preuve est similaire pour $\Box = \Box_y$ avec $r(y) = n + 1$. ✠

Proposition 7.4.3

Soit $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$. Si $x \notin fv(\varphi)$, alors

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \varphi$,

pour tout $w \in W_n$.

PREUVE. Par induction sur le nombre de connecteurs dans φ.

Étape de base. Si $\varphi = p \in \mathrm{Prop}$ ou $\alpha \in \mathrm{Nom}$, alors la valeur de vérité de φ ne dépend pas d'une valuation. Donc, en particulier,

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \varphi$

pour tout $w \in W_n$.

Étape inductive. (i) Le cas booléen est immédiat.

(ii) Si $\varphi = @_\alpha\psi$, où $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$, alors

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha\psi$ ssi $(\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), \mathrm{s} \Vdash \psi$

ssi $(\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \psi$, pour tout $w \in W_n$, par (HI)

ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash @_\alpha\psi$, pour tout $w \in W_n$

(iii) Si $\varphi = \Box_y\psi$, avec $y \in \mathrm{Var}_{m+1}$ tel que $y \neq x$, alors

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_y\psi$ ssi $\forall v \in W_m [\Phi(\mathrm{s}(y))(w_m, v) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-m}, v), \mathrm{s} \Vdash \psi]$

ssi $\forall v \in W_m [\Phi(\mathrm{s}(y))(w_m, v) \Rightarrow \forall w \in W_n [(\mathbf{w}_{-m}, v), (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \psi]$

ssi $\forall w \in W_n \forall v \in W_m [\Phi((\mathrm{s}_{-x}, w)(y))(w_m, v) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-m}, v), (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \psi]$

ssi $\forall w \in W_n$ $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \Box_y\psi$

La preuve est similaire pour $\varphi = \Box_\beta\psi$.

(iv) Si $\varphi = \lambda y.\psi$ avec $y \in \mathrm{Var}_m$, alors $y \neq x$ car $x \notin fv(\varphi)$. Nous avons

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda y.\psi$ ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-y}, w_m) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{w}, ((\mathrm{s}_{-y}, w_m)_{-x}, w) \Vdash \psi$, pour tout $w \in \mathrm{Var}_n$

ssi $\mathbf{w}, ((\mathrm{s}_{-x}, w)_{-y}, w_m) \Vdash \psi$, pour tout $w \in \mathrm{Var}_n$

ssi $\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \lambda y.\psi$, pour tout $w \in \mathrm{Var}_n$

Si $y = x$, alors pour tout $w \in W_n$,

$\mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \lambda x.\psi$ ssi $\mathbf{w}, ((\mathrm{s}_{-x}, w)_{-x}, w_n) \Vdash \psi$

ssi $(\mathrm{s}_{-x}, w_n) \Vdash \psi$

ssi $\mathrm{s} \Vdash \lambda x.\psi$

Ce qui complète la preuve pour l'interprétation de L_λ dans des structures simples. Pour les structures générales, seule la partie (iii) doit être modifiée et cette modification est minime. ✠

Corollaire 7.4.4

Soit $\mathbf{M} = < \mathbf{W}, \Phi, val >$ un modèle de L_λ. Si $\varphi \in \mathrm{CForm}_\lambda$, alors

$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{w}, \mathbf{t} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{t} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$.

PREUVE. Si $\varphi \in \mathrm{CForm}_\lambda$, alors $fv(\varphi) = \varnothing$. Le résultat est donc une conséquence de la proposition précédente. ✠

Proposition 7.4.5

Soient $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$ et x Var_m tels que $x \notin bv(\varphi)$. Nous avons que

$$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi \text{ ssi } \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi[x/\alpha]$$

où $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ est tel que $val(\alpha) = \mathrm{s}(x)$.

PREUVE. Par induction. Si φ est une variable propositionnelle ou un nominal, le résultat est trivialement vrai car x n'y apparaît pas dans φ. Le cas où φ est une combinaison booléenne est une conséquence directe de l'hypothèse d'induction. Si $\varphi = @_\beta\psi$, où $\beta \in \mathrm{Nom}_n$, alors nous avons par définition et par l'hypothèse d'induction que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\beta\psi \text{ ssi } & (\mathbf{w}_{-n}, val(\beta)), \mathrm{s} \Vdash \psi \\
\text{ssi } & (\mathbf{w}_{-n}, val(\beta)), \mathrm{s} \Vdash \psi[x/\alpha] \\
\text{ssi } & \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\beta\psi[x/\alpha]
\end{aligned}$$

Si $\varphi = \Box_\beta\psi$, où $\beta \in \mathrm{Nom}_n$, alors nous avons par définition et par l'hypothèse d'induction que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_\beta\psi \text{ ssi } & \forall w \in W_n\,[\,\Phi(val(\beta))(w_n, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n}, w), \mathrm{s} \Vdash \psi\,] \\
\text{ssi } & \forall w \in W_n\,[\,\Phi(val(\beta))(w_n, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n}, w), \mathrm{s} \Vdash \psi[x/\alpha]\,] \\
\text{ssi } & \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_\beta\psi[x/\alpha]
\end{aligned}$$

Si $\varphi = \Box_y\psi$, où $y \in \mathrm{Var}_n$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_y\psi \text{ ssi } & \forall w_{n-1}\,[\,\Phi(\mathrm{s}(y))(w_{n-1}, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-(n-1)}, w), \mathrm{s} \Vdash \psi\,] \\
\text{ssi } & \forall w_{n-1}\,[\,\Phi(\mathrm{s}(y))(w_{n-1}, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-(n-1)}, w), \mathrm{s} \Vdash \psi[x/\alpha]\,] \\
\text{ssi } & \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \Box_y\psi[x/\alpha]
\end{aligned}$$

Enfin, si $\varphi = \lambda y.\psi$, où $y \in \mathrm{Var}_n$, alors $y \neq x$, car $x \notin bv(\varphi)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda y.\psi \text{ ssi } & \mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-y}, w_n) \Vdash \psi \\
\text{ssi } & \mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-y}, w_n) \Vdash \psi[x/\alpha] \\
\text{ssi } & \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda y.\psi[x/\alpha]
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. Encore une fois, si L_λ est interprété dans des SROS générales, la preuve est similaire. ✠

Corollaire 7.4.6

Soit $x \in \mathrm{Nom}_m$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ et $\varphi \in \mathrm{Form}_\lambda$. Nous avons que

$$\mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha \lambda x.\varphi \text{ ssi } \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha \varphi[x/\alpha]$$

PREUVE. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @(\alpha)\lambda x.\varphi &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\varphi \\ &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), (\mathrm{s}_{-x}, val(\alpha)) \Vdash \varphi \\ &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), (\mathrm{s}_{-x}, val(\alpha)) \Vdash \varphi[x/\alpha], \text{ par la proposition précédente} \\ &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{-m}, val(\alpha)), \mathrm{s} \Vdash \varphi[x/\alpha], \text{ car } x \notin fv(\varphi) \\ &\text{ ssi } \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash @_\alpha \varphi[x/\alpha] \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. ✠

Rappelons que si $\mathrm{s} \in \mathrm{Att}(\mathbf{S})$, $\mathrm{s}_{\leq n}(w)$ dénote l'attribution de $\mathrm{Att}(\mathbf{S}_{\leq n}(w))$ telle que

$$\mathrm{s}_{\leq n}(w)(x) = \mathrm{s}(x), \text{ si } x \in \mathrm{Var}_m \text{ et } 1 \leq m \leq n$$
$$\mathrm{s}_{\leq n}(w)(x) = w, \text{ si } x \in \mathrm{Var}_{n+1}$$

Nous avons :

Proposition 7.4.7

Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{\lambda \leq n}$, alors

$$\mathbf{M}, \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \varphi \text{ si et seulement si } \mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n, \mathrm{s}_{\leq n}(w) \Vdash \varphi$$

PREUVE. Par induction sur la complexité de φ. Les preuves pour tous les cas sauf un, le cas $\varphi = \lambda x.\psi$, sont analogues à celles que nous avons données précédemment. Supposons que $x \in \mathrm{Var}_m$, nous avons

$$\mathbf{M}, \mathbf{w}, \mathrm{s} \Vdash \lambda x.\psi \text{ ssi } \mathbf{M}, \mathbf{w}, (\mathrm{s}_{-x}, w_m) \Vdash \psi$$

Par l'hypothèse d'induction,

$$\mathbf{M}, \mathbf{w}, \mathbf{t} \Vdash \psi \text{ ssi } \mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n, (\mathrm{s}_{-x}, w_m)_{\leq n}(w) \Vdash \psi$$

Ce qui nous donne

$\mathbf{M}, \mathbf{w}, \mathbf{s} \Vdash \lambda x.\psi$ ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n, (\mathbf{s}_{-x}, w_m)_{\leq n}(w) \Vdash \psi$

ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n, \mathbf{s}_{\leq n}(w) \Vdash \lambda x.\psi$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Proposition 7.4.8

Si $\varphi \in \mathrm{CForm}_{\lambda\leq n}$, alors $[\![\varphi]\!] = Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

PREUVE. Si $\varphi \in \mathrm{CForm}_{\lambda\leq n}$, la valeur de vérité de φ à un point $\mathbf{w}$ ne dépend pas d'une suite d'attribution particulière. Nous avons donc que $\mathbf{w} \in [\![\varphi]\!]$

ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$

ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$

ssi $\mathbf{w}_n \in [\![\varphi]\!]_{\leq n}(w_{n+1})$

ssi $\mathbf{w}_{n+1} \in Ext_{\leq n}(\varphi)$

ssi $\mathbf{w} \in Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

D'où le résultat. ✠

Les résultats sur la définissabilité restent les mêmes.

La notion de bisimulation est la même, rien dans la bisimulation ne dépend de 'λ'. Toutefois, la définition l'équivalence élémentaire doit être légèrement modifiée : $\mathbf{M}, \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{N}, \mathbf{v}$ ssi

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \varphi$

pour toute formule $\varphi \in \mathrm{CForm}_{\lambda}$. La bisimulation préserve cette notion d'équivalence élémentaire :

Proposition 7.4.9

Soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ des points des modèles (simples ou générales) $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val_1 >$ et $\mathbf{N} = < \mathbf{T}, val_2 >$. Si $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}$ sont bisimilaires, alors

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \leftrightarrows \mathbf{N}, \mathbf{v}$.

PREUVE. La preuve est par induction sur la complexité de φ. Il suffit de considérer le cas $\varphi = \lambda x.\psi$ avec $fv(\psi) = \{x\}$ et $x \in \mathrm{Var}_n$. Nous avons que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \lambda x.\psi$ ssi $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \psi[x/\alpha(w_n)]$

Or, $\psi[x/\alpha(w_n)]$ est une formule close de complexité moindre que φ, nous avons donc par l'hypothèse d'induction que

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \psi[x/\alpha(w_n)]$ ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \psi[x/\alpha(w_n)]$

ssi $\mathbf{N}, \mathbf{v} \Vdash \lambda x.\psi$

Ce qui démontre le résultat. ✠

Pour adapter la traduction au langage L_λ, il suffit d'ajouter la clause suivante à la définition de Trad :

$\mathrm{Trad}(\mathbf{t}, \lambda x.\varphi) := \mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \varphi)[x_n/t_n]$, si $x \in \mathrm{Var}_n$

Tous les autres résultats découlant de cette traduction restent les mêmes.

7.5 Structures temporelles et le langage L_T

Nous présentons dans cette section les résultats sémantiques pour le langage L_T interprété dans des SROS simples et générales. Encore une fois, certains de ces résultats seront donnés en vrac.

Proposition 7.5.1

Soit $\mathbf{M}$ un modèle bidirectionnel (simple ou général), et soient $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Nous avons que

(a) Si φ est une instance de tautologie, alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$

(b) Si $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$, alors $\mathbf{w} \Vdash \psi$

(c) $\mathbf{M} \Vdash \varphi$, alors $\mathbf{M} \Vdash \Box\varphi$, pour $\Box = H_{n+1}$, H_β, G_{n+1} ou G_β, et $\mathbf{M} \Vdash @_\alpha\varphi$

(d) $\mathbf{w} \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, pour $\Box = H_{n+1}$, H_β, G_{n+1} ou G_β

(e) Si $n \notin rep_s(\varphi)$ (resp. si $n \notin rep(\varphi)$), alors $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_n$

Pour les SROS simples, nous avons :

Proposition 7.5.2

(a) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{Tn}$, alors $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}_n(w_{n+1}), w_n \Vdash \varphi$

(b) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{T\leq n}$, alors $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$

Pour les SROS générales, nous avons :

Proposition 7.5.3

Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{T\leq n}$, alors $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$

Nous avons les mêmes caractérisations d'extensions pour les cas simple et général :

Proposition 7.5.4

Soient $p \in \mathrm{Prop}_n$, et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

(a) $[\![\bot]\!] = \varnothing$

(b) $[\![p]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times val(p) \times \mathbf{W}^{n+1}$

(c) $[\![\alpha]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times \{val(\alpha)\} \times \mathbf{W}^{n+1}$

(d) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{Tn}$, alors $[\![\varphi]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times Ext_n(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

(e) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{T\leq n}$, alors $[\![\varphi]\!] = Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

Proposition 7.5.5

Soient $p \in \mathrm{Prop}_n$, et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$. Nous avons que

(a) $[\![\bot]\!] = \varnothing$

(b) $[\![p]\!] = val(p) \times \mathbf{W}^{n+1}$

(c) $[\![\alpha]\!] = \mathbf{W}_{n-1} \times \{val(\alpha)\} \times \mathbf{W}^{n+1}$

(d) Si $\varphi \in \mathrm{Form}_{T \leq n}$, alors $[\![\varphi]\!] = Ext_{\leq n}(\varphi) \times \mathbf{W}^{n+2}$

Dans le tableau 7.5.6, $\varphi \in \mathrm{Form}_T$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $P = P_{n+1}$ ou P_β avec $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Les mêmes remarques s'appliquent à H, F et G.

Tableau 7.5.6 – Schèmes et conditions correspondantes pour les structures simples

NOM	SCHÈME DE FORMULE	CONDITION
(aref$_n$)	$\alpha \to \neg P\alpha$	**Aref**
(CV$_n$)	$\varphi \to GP\varphi \;\;\&\;\; \varphi \to HF\varphi$	**CV**
(tot$_n$)	$P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$	**Tot**
(sbif$_n$)	$PF\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi \;\;\&\;\; FP\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$	**Sbif**
(beg$_n$)	$\underline{P}H\bot$	**Beg**
(end$_n$)	$\underline{F}G\bot$	**End**
(dense$_n$)	$P\varphi \to PP\varphi \;\;\&\;\; F\varphi \to FF\varphi$	**Den**

Dans le tableau 7.5.7, $\varphi \in \mathrm{Form}_T$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $P = P_{n+1}$ ou P_β avec $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$. Les mêmes remarques s'appliquent à H, F et G.

Tableau 7.5.7 – Schèmes et conditions correspondantes pour les structures générales

NOM	SCHÈME DE FORMULE	CONDITION
(aref$_n$)	$\wedge\alpha \to \neg P\wedge\alpha$	**Aref**
(CV$_n$)	$\varphi \to GP\varphi \;\;\&\;\; \varphi \to HF\varphi$	**CV**
(tot$_n$)	$P\wedge\alpha \vee \wedge\alpha \vee F\wedge\alpha$	**Tot**
(sbif$_n$)	$PF\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi \;\;\&\;\; FP\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$	**Sbif**
(beg$_n$)	$\underline{P}H\bot$	**Beg**
(end$_n$)	$\underline{F}G\bot$	**End**
(dense$_n$)	$P\varphi \to PP\varphi \;\;\&\;\; F\varphi \to FF\varphi$	**Den**

Nous prendrons pour acquis qu'un schème de ce tableau définit sa condition correspondante dans une structure bidirectionnelle conventionnelle, et nous montrerons, comme nous l'avons fait pour le langage de base, qu'un résultat analogue tient pour les SROS bidirectionnelle.

Pour les structures simples et générales, nous avons :

Proposition 7.5.8

Soit *Sch* un schème du tableau 7.5.6 portant sur les modalités de rang $n+1$, et soit *Cond* la condition correspondant à ce schème. Nous avons

$\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_{Tn}$

ssi toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ satisfont *Cond.*

Proposition 7.5.9

Soit *Sch* un schème du tableau 7.5.7 portant sur les modalités de rang $n+1$, et soit *Cond* la condition correspondant à ce schème. Nous avons

$\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq Tn}$ (voire Prop_{Tn})

ssi toutes les relations de $\mathbf{R}_n$ satisfont *Cond.*

Le lemme suivant nous permettra de montrer le théorème sur la validité des schèmes lorsqu'ils admettent des instances arbitraires.

Lemme 7.5.10

Pour chaque $\alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}$, soit $p(\alpha^{n+1}) \in \mathrm{Prop}_n$ tel que $val(p(\alpha^{n+1})) = val(p(\beta^{n+1}))$ si $val(\alpha^{n+1}) = val(\beta^{n+1})$. Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, nous avons que :

(a) $\mathbf{w} \Vdash \bigvee\{\bigwedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(b.1) $\mathbf{w} \Vdash P_{n+1}\bigvee\{\bigwedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash P_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(b.2) $\mathbf{w} \Vdash F_{n+1}\bigvee\{\bigwedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash F_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(c.1) $\mathbf{w} \Vdash H_{n+1}\bigvee\{\bigwedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash H_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

(c.2) $\mathbf{w} \Vdash G_{n+1}\bigvee\{\bigwedge\alpha^{n+1} \wedge p(\alpha^{n+1}) : \alpha^{n+1} \in \mathbf{Nom}^{n+1}\}$ ssi $\mathbf{w} \Vdash G_{n+1}p(\alpha^{n+1}(\mathbf{w}^{n+1}))$

PREUVE. La preuve ne comporte rien de nouveau. ✠

Corollaire 7.5.11

Les propositions du lemme précédent tiennent aussi si nous remplaçons 'H_{n+1}' et 'G_{n+1}' par 'H_β' et 'G_β', où $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$.

Nous arrivons donc au théorème recherché.

Théorème 7.5.12

Soit *Sch* un schème du tableau 7.5.6 ou 7.5.7 portant sur les modalités de rang n+1. Si $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Prop}_{Tn}$, alors $\mathbf{S} \Vdash Sch(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Form}_T$.

PREUVE. L'argument donné au chapitre précédent se transpose ici très facilement pour tous les schèmes à l'exception de (sbif), ce dernier n'étant pas de la forme '$ma\,\varphi \rightarrow mc\,\varphi$'. Toutefois, les formules

$$PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$$
$$FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$$

sont (propositionnellement) équivalentes à

$$(PF\varphi \rightarrow P\varphi) \vee (PF\varphi \rightarrow \varphi) \vee (PF\varphi \rightarrow F\varphi)$$
$$(FP\varphi \rightarrow P\varphi) \vee (FP\varphi \rightarrow \varphi) \vee (FP\varphi \rightarrow F\varphi)$$

Nous pouvons appliquer l'argument à chaque élément de chaque disjonction (chacun étant de la forme '$ma\,\varphi \rightarrow mc\,\varphi$'), et obtenir le résultat. ✠

En ce qui concerne la notion de bisimulation pour les SROS bidirectionnelles, il suffit de modifier la définition pour prendre en considération la relation réciproque. Renommons les conditions (zig_n) et (zag_n) comme ($\mathrm{zig}_n\!\uparrow$) et ($\mathrm{zag}_n\!\uparrow$) respectivement. Une bisimulation entre deux SROS bidirectionnelles simples est définie comme une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ satisfaisant (zig$_n\uparrow$), (zag$_n\uparrow$), (zig$_\approx$) et (zag$_\approx$) de même que les conditions : si $\mathbf{wZv}$, alors

(zig$_n\downarrow$) $\mathbf{w}'\{n+1\}\mathbf{w} \Rightarrow \exists\mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}'\{n+1\}\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

(zag$_n\downarrow$) $\mathbf{v}'\{n+1\}\mathbf{v} \Rightarrow \exists\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}'\{n+1\}\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

Une bisimulation entre SROS est une relation $\mathbf{Z} \subset \mathbf{W}\times\mathbf{V}$ satisfaisant (zig$_n\uparrow$), (zag$_n\uparrow$), (zig$_\approx$) et (zag$_\approx$) de même que les conditions : si $\mathbf{wZv}$, alors

(zig$_n\downarrow$) $\mathbf{w}'[n+1]\mathbf{w} \Rightarrow \exists\mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tel que $\mathbf{v}'[n+1]\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

(zag$_n\downarrow$) $\mathbf{v}'[n+1]\mathbf{v} \Rightarrow \exists\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}'[n+1]\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'\mathbf{Z}\mathbf{v}'$

Cette définition peut être modifiée pour s'appliquer à des SROS bidirectionnelles de rang fini. Les mêmes résultats tiennent *mutatis mutandis.*

Pour les résultats de traduction, il faut encore faire quelques modifications mineures. Au lieu d'avoir les clauses

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_{n+1}\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(t_{n+1}, t_n, x_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_\beta\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(a_\beta, t_n, x_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$

pour les structures simples, et les clauses

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_{n+1}\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(t_{n+1}, \mathbf{t}_n, \mathbf{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}^{n+1}, \mathbf{x}_n), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, \Box_\beta\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(a_\beta, \mathbf{t}_n, \mathbf{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}^{n+1}, \mathbf{x}_n), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$

pour les structures générales, nous adoptons

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, H_{n+1}\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(t_{n+1}, x_n, t_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, H_\beta\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(a_\beta, x_n, t_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, G_{n+1}\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(t_{n+1}, t_n, x_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, G_\beta\varphi) := \forall x_n(R_{n+1}(a_\beta, t_n, x_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{t}_{-n}, x_n), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$

pour les structures bidirectionnelles simples, et

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, H_{n+1}\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(t_{n+1}, \mathbf{x}_n, \mathbf{t}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, H_\beta\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(a_\beta, \mathbf{x}_n, \mathbf{t}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, G_{n+1}\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(t_{n+1}, \mathbf{t}_n, \mathbf{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi))$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{t}, G_\beta\varphi) := \forall \mathbf{x}_n(R_{n+1}(a_\beta, \mathbf{t}_n, \mathbf{x}_n) \to \mathrm{Tr}((\mathbf{x}_n, \mathbf{t}^{n+1}), \varphi)), \text{ si } r(\beta) = n+1$$

pour les structures bidirectionnelles générales. Ces modifications nous permettent d'obtenir les mêmes résultats sur les traductions. Notamment, pour une formule $\varphi \in \text{Form}_T$, nous avons

Proposition 7.5.13
Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$,

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \text{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

Proposition 7.5.14
Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ et soit $n = \max\{m : x_m$ libre dans $\text{Tr}(\mathbf{x}, \varphi\}$. Nous avons

$\mathbf{M} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \text{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \varphi)$

Proposition 7.5.15
Soient $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ et $n = \max\{m : x_m$ libre dans $\text{Tr}(\mathbf{x}, \varphi\}$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k \in$ Prop et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in$ Nom les variables propositionnelles et les nominaux apparaissant dans φ. Nous avons que

(a) $\mathbf{S}, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k) \forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l) \text{Tr}(\mathbf{a}(\mathbf{w}), \varphi)$

(b) $\mathbf{S} \Vdash \varphi$ ssi $M(\mathbf{S}) \Vdash \forall X(p_1) \ldots \forall X(p_k) \forall x(\alpha_1) \ldots \forall x(\alpha_l) \forall x_0 \ldots \forall x_n \text{Tr}(\mathbf{x}, \varphi)$

Chapitre 8
Logique modale d'ordre supérieur – Partie I

Nous présentons dans ce chapitre des axiomatisations complètes pour la logique sous-jacente à la sémantique du langage L lorsqu'interprété sur des structures relationnelles d'ordre supérieur simples, et nous examinerons dans le prochain chapitre la logique plus générale des SROS générales. Bien que nous nous inspirions ici de l'axiomatisation et des preuves de complétude de la logique hybride (notamment de Blackburn *et al.* 2001 : 434-445), il y a des différences considérables entre une logique modale d'ordre supérieur et une logique modale plus conventionnelle comme la logique hybride. La principale difficulté dans la recherche d'une preuve de complétude est de trouver un moyen de construire un modèle canonique, donc une structure en produit, à partir d'un ensemble de formules. C'est ici que les opérateurs hybrides montrent leur utilité et c'est essentiellement pour cette raison qu'ils ont été introduits dans le langage L.

8.1 La logique des structures simples

Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures relationnelles d'ordre supérieur (de L-structures donc). Par *la logique de* $\mathcal{C}$, disons $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$, l'ensemble de toutes les formules de L qui sont valides dans toutes les structures $\mathcal{C}$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{L}(\mathcal{C}) = \{\varphi \in \mathrm{Form}_L \colon \mathbf{S} \Vdash \varphi, \text{ pour toute structure } \mathbf{S} \in \mathcal{C}\}.$$

Notre tâche sera de montrer que l'ensemble $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ est axiomatisable pour certaines classes remarquables $\mathcal{C}$, qu'il existe un système de dérivation (ensemble d'axiomes et de règles inférentielles) nous permettant de dériver tous (et seulement tous) les éléments de $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$. Autrement dit, nous voulons montrer que

(Cf) $\quad \vdash_\Gamma \varphi$ ssi $\Vdash_\mathcal{C} \varphi$

où '$\vdash_\Gamma$' signifie « est dérivable dans le système de déduction Γ » et '$\Vdash_\mathcal{C}$' est synonyme de '$\mathcal{C} \Vdash \varphi$'. Ce résultat porte le nom de *complétude faible*, par opposition à la *complétude forte* qui s'énonce plutôt comme :

(CF) $\quad E \vdash_\Gamma \varphi$ ssi $E \Vdash_\mathcal{C} \varphi$,

où $E \subset \mathrm{Form}_L$ et où '$E \vdash_\Gamma$' signifie « est dérivable dans Γ à partir des hypothèses E ». Nous démontrerons dans ce chapitre, de même que le suivant, la complétude forte pour plusieurs paires $(\Gamma, \mathcal{C})$.

Démontrer la complétude forte requiert que nous démontrions deux implications :

($\mathrm{CF}_\Rightarrow$) $\quad E \vdash_\Gamma \varphi \Rightarrow E \Vdash_\mathcal{C} \varphi$

($\mathrm{CF}_\Leftarrow$) $\quad E \Vdash_\mathcal{C} \varphi \Rightarrow E \vdash_\Gamma \varphi$

La première direction ($\mathrm{CF}_\Rightarrow$) est normalement la plus facile, car il suffit de démontrer, afin de prouver l'implication, que les axiomes sont valides et que les règles inférentielles préservent la validité. C'est l'autre direction qui comporte le plus de difficultés conceptuelles et sur celle-ci que nous aurons à travailler le plus longuement. Tout d'abord, au lieu de démonter ($\mathrm{CF}_\Rightarrow$), nous démontrerons, pour tout ensemble de formules F,

(Hk) $\quad F \nvdash_\Gamma \bot \Rightarrow [\exists \mathbf{M} = <\mathbf{S}, \mathit{val}>$ avec $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$ et $\exists \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ t. q. $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash F]$

Il n'est pas difficile de voir que (Hk) entraîne ($\mathrm{CF}_\Leftarrow$). En effet, nous avons que

$$E \vdash_\Gamma \varphi \Rightarrow E \Vdash_\mathcal{C} \varphi \text{ ssi } [\,\text{non-}(E \vdash_\Gamma \varphi) \Rightarrow \text{non-}(E \Vdash_\mathcal{C} \varphi)\,]$$

D'une part, non-$(E \vdash_\Gamma \varphi)$ est tout simplement équivalent à $E \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Gamma \bot$. En posant $F = E \cup \{\neg\varphi\}$, nous obtenons $F \nvdash_\Gamma \bot$. Par (Hk), ceci implique qu'il existe un modèle $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, \mathit{val}>$, avec $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$, et un point $w \in \mathbf{W}$ tels que $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash F$, c'est-à-dire

$$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash E \;\&\; \mathbf{M}, \mathbf{w} \nVdash \varphi$$

Mais c'est précisément là la signification de non-$(E \Vdash_\mathcal{C} \varphi)$.

En d'autres termes, nous démontrerons que tout ensemble consistant est satisfaisable (est vrai à un certain monde d'un certain modèle). Pour ce faire, nous adapterons les méthodes dites de « Henkin » à ce langage pour construire un modèle satisfaisant un ensemble maximalement consistant à partir de E lui-même. Et, comme nous l'avons spécifié plus haut, c'est pour la définition de ce modèle que les nominaux et les opérations hybrides montreront toute leur utilité.

Commençons par l'exposition du système de dérivation de base pour la logique des SROS simples.

I. Axiomes propositionnels.

Toutes les instances de tautologies propositionnelles.

II. Axiomes propres aux modalités de rang m, $m \geq 1$.

Dans la suite '$\Box$' représentera '$\Box_{n+1}$' ou '$\Box_\gamma$', avec $r(\gamma) = n + 1$. Tous les systèmes incluront les schèmes d'axiomes suivants :

(K_n) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

D'autres schèmes (optionnels) sont :

(D_n) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$

(T_n) $\Box\varphi \to \varphi$

(B_n) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

(4_n) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(5_n) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

III. Axiomes hybrides pour les nominaux et opérateurs d'actualité. Ce groupe d'axiomes est inspiré directement de ceux présentés dans Blackburn *et al.* (2001 : 438-439). Soient α, $\beta \in \mathrm{Nom}_n$. Tous les systèmes incluront les schèmes d'axiomes suivants, il n'y aucune contrainte sur φ (à l'exception de l'axiome ($\mathrm{ind}_@$)):

($K_@$) $@_\alpha(\varphi \to \psi) \to (@_\alpha\varphi \to @_\alpha\psi)$

(dual) $@_\alpha\neg\varphi \leftrightarrow \neg @_\alpha\varphi$

(intro) $\alpha \wedge \varphi \rightarrow @_\alpha\varphi$

(ref) $@_\alpha\alpha$

(sym) $@_\alpha\beta \leftrightarrow @_\beta\alpha$

(nom) $@_\alpha\beta \wedge @_\beta\varphi \rightarrow @_\alpha\varphi$

(agree) $@_\alpha@_\beta\varphi \leftrightarrow @_\beta\varphi$

(back) $\Diamond@_\alpha\varphi \rightarrow @_\alpha\varphi$, où $\Diamond = \Diamond_{n+1}$ ou $\Diamond_\gamma$, et $r(\gamma) = n+1$

(bridge) $@_\alpha\Diamond\beta \wedge @_\beta\varphi \rightarrow @_\alpha\Diamond\varphi$, où $\Diamond = \Diamond_{n+1}$ ou $\Diamond_\gamma$, et $r(\gamma) = n+1$

IV. Axiomes de dépendance et d'indépendance. Ces schèmes d'axiomes dictent les dépendances et indépendances logiques entre les formules du langage. La notation '$\pm\varphi$' dans un axiome signifie que l'on peut instancier (uniformément) soit par 'φ' soit par '$\neg\varphi$'.

Axiomes d'indépendance. Soient α, $\beta \in$ Nom des nominaux. Nous posons :

(perm$_@$) $@_\beta@_\alpha\varphi \leftrightarrow @_\alpha@_\beta\varphi$, où $r(\alpha) \neq r(\beta)$

(perm$_{@\Box}$) $@_\alpha\Box_{n+1}\varphi \leftrightarrow \Box_{n+1}@_\alpha\varphi$, si $r(\alpha) \neq n$, $n+1$

$@_\alpha\Box_\beta\varphi \leftrightarrow \Box_\beta@_\alpha\varphi$, si $r(\alpha) \neq r(\beta) - 1$

(ind$_@$) $@_\alpha\varphi \leftrightarrow \varphi$, si $r(\alpha) \notin rep_s(\varphi)$

Axiomes de dépendance. Soit $\alpha \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, nous posons

(inst$_\Box$) $@_\alpha(\Box_{n+1}\varphi \leftrightarrow \Box_\alpha\varphi)$

V. Règles inférentielles. Les règles inférentielles sont assez proches de celles de la logique modale conventionnelle. Soient $\varphi \in \mathrm{Form}_L$, $\alpha \in$ Nom, $n \geq 0$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}\backslash\mathrm{Nom}_0$, nous définissons les règles :

(MP) Si $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ et $\vdash \varphi$, alors $\vdash \psi$

(Nec$_@$) Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash @_\alpha\varphi$

(Nec$_\Box$) Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \Box_{n+1}\varphi$

(Nec$_K$) Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \Box_\gamma\varphi$

Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une suite de nominaux de rangs strictement croissants (pas nécessairement successifs), et soient α, $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ des nominaux. Nous ajoutons deux autres règles qui sont propres à la logique hybride (Blackburn *et al.* 2001 : 440). Pour l'application de la première, α ne doit pas apparaître dans φ (c'est-à-dire que les nominaux de la suite α n'apparaissent pas dans φ); et pour l'application de la deuxième, $\beta \neq \alpha$ n'apparaît pas dans φ :

(Name) Si $\vdash \wedge\alpha \rightarrow \varphi$, alors $\vdash \varphi$

(Paste) Si $\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\varphi \rightarrow \theta$, alors $\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\varphi \rightarrow \theta$

Γ_s désignera le système logique minimal défini par ces axiomes et règles sans les axiomes optionnels du groupe II. Une *preuve dans* Γ_s est une suite finie de formules $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ de L telle que :

($\vdash$1) Soit φ_k est un axiome;

($\vdash$2) Soit il existe des formules φ_i et φ_j dans la suite, avec i, $j < k$, telles que φ_k est obtenue des formules φ_i et φ_j par (MP), ou φ_k est obtenue de la formule φ_i (ou φ_j) par l'application de (Nec_K), ($\text{Nec}_\Box$), ($\text{Nec}_@$), (Name) ou (Paste).

Une formule φ est un *théorème de* Γ_s, noté $\vdash \varphi$, s'il existe une preuve de Γ_s, $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$, telle que $\varphi_n = \varphi$.

Si H est un ensemble de formules, une *preuve (ou une dérivation) de* Γ_s *sous les hypothèses* H est une suite de formules $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ de L telle que

($\vdash$3) Soit $\vdash \varphi_k$

($\vdash$4) Soit $\varphi_k \in H$

($\vdash$5) Soit il existe des formules φ_i et φ_j dans la suite, avec i, $j < k$, telle que φ_k est obtenue des formules φ_i et φ_j par (MP).

Une formule φ est un *théorème de* Γ_s *sous les hypothèses* H, noté $H \vdash \varphi$, s'il existe une preuve de Γ_s sous les hypothèses H, $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$, telle que $\varphi_n = \varphi$.

Nous devons maintenant montrer que la première implication ($\text{CF}_\Rightarrow$) tient.

Proposition 8.1.1

Les axiomes de Γ_s sont valides et les règles inférentielles préservent la validité.

Preuve. La validité des axiomes du groupe I est une conséquence des clauses sémantiques booléennes. En ce qui concerne le groupe II, nous avons montré que (K) est valide dans les structures simples, et nous avons identifié les familles de structures que les axiomes optionnels définissent. Des vérifications élémentaires montrent que les axiomes ($K_@$)-(bridge) du groupe III tiennent dans toute structure.

Pour le groupe IV, une vérification simple nous donne ($\text{perm}_@$) et la proposition 6.1.1, partie (e), nous montre que ($\text{ind}_@$) tient. Il reste à montrer que ($\text{perm}_{@\Box}$) et ($\text{inst}_\Box$) sont valides. Supposons que $r(\alpha) \neq n, n+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Box_{n+1}\varphi \text{ ssi } & (\mathbf{w}_{-r(\alpha)}, val(\alpha)) \Vdash \Box_{n+1}\varphi \\ \text{ssi } & \forall w \in W_n\, [\Phi(w_{n+1})(w_n, w) \Rightarrow ((\mathbf{w}_{-r(\alpha)}, val(\alpha))_{-n}, w) \Vdash \varphi] \\ \text{ssi } & \forall w \in W_n\, [\Phi(w_{n+1})(w_n, w) \Rightarrow ((\mathbf{w}_{-n}, w)_{-r(\alpha)}, val(\alpha)) \Vdash \varphi] \\ \text{ssi } & \forall w \in W_n\, [\Phi(w_{n+1})(w_n, w) \Rightarrow (\mathbf{w}_{-n}, w) \Vdash @_\alpha\varphi] \\ \text{ssi } & \mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1}@_\alpha\varphi \end{aligned}$$

Le même argument, à quelques détails près, nous permet de montrer que

$$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\Box_\beta\varphi \leftrightarrow \Box_\beta @_\alpha\varphi$$

sauf que l'hypothèse $r(\alpha) \neq r(\beta)$ n'est plus nécessaire. Quant à l'axiome ($\text{inst}_\Box$), sa démonstration est immédiate.

Il faut maintenant montrer que les règles inférentielles préservent la validité. La vérification a déjà été faite pour le modus ponens et les différentes formes de nécessitation, il reste à montrer que les règles (Name) et (Paste) préservent elles-aussi la validité. Soit φ une formule et $\boldsymbol{\alpha}$ une suite finie de nominaux (de rangs strictement croissants) qui n'apparaît pas dans φ. Nous devons montrer que

$$\Vdash \wedge\boldsymbol{\alpha} \to \varphi \Rightarrow \Vdash \varphi,$$

Si nous montrons que

$$\mathbf{S} \Vdash \wedge\alpha \to \varphi \Rightarrow \mathbf{S} \Vdash \varphi,$$

pour toute structure simple **S**, nous aurons terminé. Supposons le contraire : il existe une structure simple **S** telle que

$$\mathbf{S} \Vdash \wedge\alpha \to \varphi \;\&\; \mathbf{S} \nVdash \varphi,$$

Il existe donc un modèle $\mathbf{M} = <\mathbf{S},\, val>$ et un point $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ tels que

$$\mathbf{M},\, \mathbf{w} \Vdash \neg\varphi.$$

Toute valuation val' qui s'accorde avec val sur les nominaux et les variables propositionnelles dans φ sera telle que $<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \Vdash \neg\varphi$. En particulier, considérons la valuation val' qui rend $\wedge\alpha$ vrai; une telle valuation existe car α n'apparaît pas dans φ. Nous avons donc

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \Vdash \wedge\alpha$$

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \nVdash \varphi$$

contredisant la validité de $\wedge\alpha \to \varphi$.

Pour démontrer (Paste), nous procédons de la même manière : supposons qu'il existe une structure **S**, un modèle $\mathbf{M} = <\mathbf{S},\, val>$ et un point $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ tels que

$$\mathbf{S} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \beta \wedge @_\beta \varphi \to \theta$$

$$\mathbf{M},\, \mathbf{w} \nVdash (@_\alpha \Diamond_\gamma \varphi \to \theta)$$

c'est-à-dire que $\mathbf{M},\, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \varphi$ mais $\mathbf{M},\, \mathbf{w} \nVdash \theta$. Si $\mathbf{M},\, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \varphi$, c'est qu'il existe $w \in W_m$ tel que $\Phi(val(\gamma))(val(\alpha),\, w)$ et $\mathbf{M},\, (\mathbf{w}_{-m},\, w) \Vdash \varphi$. Toute valuation val' qui s'accorde avec val sur les nominaux et les variables propositionnelles dans φ sera également telle que

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, (\mathbf{w}_{-m},\, w) \Vdash \varphi$$

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \nVdash \theta$$

Choisissons val' pour que $val'(\beta) = w$, ce qui est possible car $\beta \neq \alpha$ et β n'apparaît pas dans φ. Nous aurons donc

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \beta \wedge @_\beta \varphi$$

$$<\mathbf{S},\, val'>,\, \mathbf{w} \nVdash \theta$$

contredisant la validité de $@_\alpha \Diamond_\gamma \beta \wedge @_\beta \varphi \to \theta$.

Ce qui complète la démonstration. ✠

8.2 Complétude pour $L_{\leq n}$

Nous nous inspirons ici de la preuve de complétude pour la logique hybride donnée dans Blackburn *et al.* (2001). Dans cette preuve, si E est un ensemble maximalement consistant de formules du langage de base de la logique hybride, le modèle canonique basé sur E est la collection $\mathcal{E}$ d'ensembles maximalement consistants $E(\alpha)$, où

$$E(\alpha) = \{\varphi : @_\alpha\varphi \in E\},$$

pour chaque nominal α. Intuitivement, nous pouvons voir un ensemble maximalement consistant (tel que E) comme l'ensemble des formules qui sont vraies à un certain monde, disons le monde w. Puisque l'ensemble E contient, pour toute formule φ, ou bien $@_\alpha\varphi$ ou bien $@_\alpha\neg\varphi$, E nous renseigne aussi sur la valeur de vérité de φ au monde dénoté par α, disons $w(\alpha)$. $E(\alpha)$ représente ainsi l'ensemble des formules qui sont vraies au monde $w(\alpha)$. Notre collection $\mathcal{E}$ peut être vue comme l'ensemble des mondes $w(\alpha)$, un monde $w(\beta)$ étant accessible depuis un monde $w(\alpha)$ si $\Diamond\beta$ est vrai à $w(\alpha)$, c'est-à-dire si $@_\alpha\Diamond\beta$ appartient à E. La preuve rigoureuse de complétude consiste à montrer que ces idées informelles fonctionnent.

Nous voudrions faire la même chose avec le langage L et les structures relationnelles d'ordre supérieur (d'abord simples et ensuite générales). Si E est un ensemble maximalement consistant (par rapport à un système déductif donné), E se comporte comme un point d'un modèle de L en ce sens qu'il spécifie une valeur de vérité à chaque formule φ du langage L. Soit $\mathbf{w}(E)$ ce point. Puisque nous connaissons la valeur de vérité de $@_\alpha\varphi$ à $\mathbf{w}(E)$, nous connaissons la valeur de vérité de φ au monde $(\mathbf{w}(E)_{-n}, w(\alpha))$, et de manière générale nous pourrons connaître la valeur de vérité de φ au monde $\mathbf{w}(\boldsymbol{\alpha})$, où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$. Le modèle canonique sera basé sur l'ensemble $\mathbf{Nom}$ (à un quotient près), et la relation d'accessibilité $\Phi(\gamma)$ sera définie à partir de la modalité $\Diamond_\gamma$: $\Phi(\gamma)(\alpha, \beta)$ si et seulement si $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$.

Dans ce chapitre et dans le prochain, nous montrerons que ces idées conduisent véritablement à un résultat de complétude. Dans cette section, nous démontrons la complétude pour le fragment $L_{\leq n}$ du langage L, et dans la prochaine nous la démontrons pour L sans restrictions. Nous procédons ainsi pour des questions de simplicité d'exposition.

Commençons par le début. Rappelons qu'un ensemble de formules E est Γ_s-*consistant* (ou Γ_s-con) ssi $E \nvdash \bot$, qu'il est *maximal* ssi, pour toute formule φ, $\varphi \in E$ ou $\neg\varphi \in E$, et qu'il Γ_s-*maximalement consistant* (ou Γ_s-maxcon) ssi il est maximal et Γ_s-con. Le lemme suivant rassemble un certain nombre de résultats montrant que le système de dérivation se comporte de manière attendue.

Lemme 8.2.1

(a) $E \vdash \varphi$ ssi il existe $\theta_1, \ldots, \theta_r \in E$ tels que $\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow \varphi$.

(b) Si E est Γ_s-con et $\nvdash \neg\varphi$, alors $E \cup \{\varphi\}$ est Γ_s-con.

(c) Si E est Γ_s-maxcon et $E \vdash \varphi$, alors $\varphi \in E$; en particulier, si $\vdash \varphi$, $\varphi \in E$.

(d) Si E est Γ_s-maxcon, et si $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in E$, alors $\psi \in E$.

PREUVE. (a) $\Rightarrow$. Supposons que $E \vdash \varphi$. Par induction sur la longueur n de la preuve.

Étape de base. Si $n = 1$, alors la preuve n'est constituée que de la formule φ et $\vdash \varphi$ ou $\varphi \in H$. Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \theta \rightarrow \varphi$ pour n'importe quelle formule $\theta \in H$. Si $\varphi \in H$, nous avons $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Étape d'induction. Supposons que le résultat tienne pour toutes les preuves de longueur n et moins. Soit $\{\varphi_k : 1 \leq k \leq n{+}1\}$ une preuve de φ sous les hypothèses H de longueur $n{+}1$. D'après ($\vdash$3)-($\vdash$5), la formule $\varphi_{n+1} = \varphi$ est soit un théorème de Γ_s, soit un élément de H, ou elle est obtenue par (MP) de formules précédentes dans la suite. Si c'est les deux premiers cas, le résultat est immédiat. Supposons que φ_{n+1} est obtenue de φ_i et φ_j par (MP). Ceci entraîne que l'une de ces formules, disons φ_i, est ψ et l'autre, φ_j, est $\psi \rightarrow \varphi$. Puisque les suites $\{\varphi_l : 1 \leq l \leq i\}$ et $\{\varphi_l : 1 \leq l \leq j\}$ sont des preuves de longueur n ou moins, l'HI nous assure l'existence de formules $\theta_1, \ldots, \theta_s, \ldots, \theta_r \in H$ telles que

$$\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_s \rightarrow \psi$$

$$\vdash \theta_{s+1} \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Des manipulations du calcul propositionnel nous permettent de conclure que

$$\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow \varphi$$

Ce qui démontre cette direction.

$\Leftarrow$. Supposons qu'il existe $\theta_1, \ldots, \theta_r \in E$ tels que $\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow \varphi$. Il existe alors une preuve de φ sous les hypothèses H.

(b) Soit E un ensemble Γ_s-con, φ une formule telle que $E \nvdash \neg\varphi$. Supposons que $E \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. D'après (a), ceci entraîne qu'il existe $\theta_1, \ldots, \theta_r \in E$ telles que

$$\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \wedge \varphi \rightarrow \bot$$

Des manipulations simples nous permettent d'en déduire que

$$\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow \neg\varphi$$

Par la partie (a) de ce lemme, $E \vdash \neg\varphi$. Contradiction.

(c) Supposons le contraire : E est Γ_s-maxcon, $E \vdash \varphi$ et $\varphi \notin E$. Par maximalité, $\varphi \notin E$ entraîne que $\neg\varphi \in E$, et donc $E \vdash \neg\varphi$. Mais ceci contredit la consistance de E.

(d) Soient φ, $\varphi \rightarrow \psi \in E$. Puisque $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$, il s'ensuit que $E \vdash \psi$ et donc $\psi \in E$, par la partie (c). ✠

On aura reconnu que la partie (a) du lemme précédent est le théorème de la déduction pour Γ_s. La partie (b) nous indique comment on peut prolonger un ensemble consistant de manière à préserver sa consistance. Nous démontrons maintenant certaines propriétés de permutation et d'indépendance qui seront utilisées à répétition pour la démonstration des propositions subséquentes.

Lemme 8.2.2 (Lemmes de permutation et d'indépendance)

(a) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nominaux de rangs strictement croissants (on n'a pas forcément que $\alpha_m \in \mathrm{Nom}_m$) et soit φ une formule. Si π est une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$, alors

$$\vdash @(\alpha_n)@(\alpha_{n-1})\ldots@(\alpha_0)\varphi \leftrightarrow @(\alpha_{\pi(n)})@(\alpha_{\pi(n-1)})\ldots@(\alpha_{\pi(0)})\varphi$$

(b) Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ les nominaux de la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dont les rangs sont dans $rep_s(\varphi)$. Nous avons

$$\vdash @(\alpha_n)@(\alpha_{n-1})\ldots@(\alpha_0)\varphi \leftrightarrow @(\beta_k)@(\beta_{k-1})\ldots@(\beta_1)\varphi$$

(c) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nominaux de rangs strictement croissants, et soit φ une formule. Nous avons

$$\vdash @(\alpha_n)\ldots@(\alpha_0)\Diamond_\gamma\varphi \leftrightarrow \ @(\alpha_m)\Diamond_\gamma@(\alpha_n)\ldots@(\alpha_{m+1})@(\alpha_{m-1})\ldots@(\alpha_0)\varphi$$

où $r(\gamma) = m+1$.

Preuve. (a) Puisque les α_m sont tous de rangs différents, il suffit d'appliquer l'axiome ($\mathrm{perm}_@$) à plusieurs reprises pour obtenir le résultat.

(b) Il suffit d'appliquer ($\mathrm{ind}_@$) et un argument simple de façon répétée de la manière suivante : si $r(\alpha_n) \in rep_s(\varphi)$, alors on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_n = \beta_k$; si $r(\alpha_n) \notin rep_s(\varphi)$, alors l'axiome ($\mathrm{ind}_@$) nous permet de déduire que

$$\vdash @(\alpha_0)@(\alpha_1)\ldots@(\alpha_n)\varphi \leftrightarrow @(\alpha_0)@(\alpha_1)\ldots@(\alpha_{n-1})\varphi$$

En continuant comme ceci jusqu'à α_0, nous obtenons le résultat.

(c) Il suffit d'utiliser ($\mathrm{perm}_{@\Box}$) et ($\mathrm{perm}_@$) à répétition. ✠

Si E un ensemble Γ_s-maxcon et si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Nom}_n$, nous définissons

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \{\varphi : @_{\boldsymbol{\alpha}}\varphi \in E\} = \{\varphi : @(\alpha_0)@(\alpha_1)\ldots@(\alpha_n)\varphi \in E\}$$

Les ensembles $E(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$, serviront plus tard à déterminer la valeur de vérité des formules dans le modèle canonique construit à partir de E. Le lemme suivant rassemble certaines propriétés que ces ensembles possèdent.

Lemme 8.2.3

Soit E un ensemble Γ_s-maxcon, et soient $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$ et $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$. Nous avons :

(a) $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in E(\boldsymbol{\alpha})$ et $E(\boldsymbol{\alpha})$ est Γ_s-maxcon

(b) Si $@_\alpha\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $@(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)}, \alpha)\varphi \in E$

(c) Si $\alpha \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $E(\boldsymbol{\alpha}) = E(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)}, \alpha)$

(d) Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in E$, alors $E = E(\boldsymbol{\alpha})$

(e) Si $p \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $p \in E(\boldsymbol{\beta}_{-r(p)}, \alpha_{r(p)})$

Preuve. (a) Nous savons que $@(\alpha_m)\alpha_m \in E$ (car $@(\alpha_m)\alpha_m$ est un axiome). Par le lemme de permutation et d'indépendance,

$$\vdash @(\alpha_m)\alpha_m \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\alpha_m)\alpha_m \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha})\alpha_m$$

donc $@(\boldsymbol{\alpha})\alpha_m \in E$.

Supposons que $E(\boldsymbol{\alpha})$ est inconsistant. D'après le lemme 8.2.2, partie (a), il existe donc des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E(\boldsymbol{\alpha})$ telles que

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r \rightarrow \bot$$

En appliquant $n + 1$ fois ($\mathrm{Nec}_@$), une pour chaque α_m, et en exploitant les propriétés de distributivité de '@', nous obtenons

$$\vdash @(\boldsymbol{\alpha})\varphi_1 \wedge \ldots \wedge @(\boldsymbol{\alpha})\varphi_r \rightarrow @(\boldsymbol{\alpha})\bot$$

Puisque $@(\boldsymbol{\alpha})\bot \leftrightarrow \bot$, il en résulte que

$$\vdash @(\boldsymbol{\alpha})\varphi_1 \wedge \ldots \wedge @(\boldsymbol{\alpha})\varphi_r \rightarrow \bot$$

et donc $E \vdash \bot$, par le lemme 8.2.2, partie (a). Ce qui contredit la consistance de E.

Il est facile de montrer que si $E(\boldsymbol{\alpha})$ n'est pas maximal alors E ne l'est pas non plus. En effet, si $\varphi, \neg\varphi \notin E(\boldsymbol{\alpha})$, c'est que $@(\boldsymbol{\alpha})\varphi, \neg@(\boldsymbol{\alpha})\varphi \notin E(\boldsymbol{\alpha})$.

(b) C'est une conséquence du lemme 8.2.2, désormais le lemme (perm-ind), et de l'axiome (agree).

(c) $\subset$. Soit $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$. Puisque $\alpha \in E(\boldsymbol{\alpha})$, nous avons $\varphi \wedge \alpha \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et donc $@_\alpha\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$ par l'axiome (intro). Par la partie (b), ceci entraîne que $@(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)})@(\alpha)\varphi \in E$, et donc $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)}, \alpha)$.

$\supset$. Si $\alpha \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $@(\boldsymbol{\alpha})\alpha \in E$ et donc $@(\alpha_{r(\alpha)})\alpha \in E$, par le lemme (perm-ind). Par l'axiome (sym), nous avons que $@(\alpha)\alpha_{r(\alpha)} \in E$, ce qui entraîne, par la partie (b) de ce lemme, que $@(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)}, \alpha)\alpha_{r(\alpha)} \in E$, et donc $\alpha_{r(\alpha)} \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\alpha)}, \alpha)$. Il suffit maintenant de reprendre le même argument qu'en ($\subset$).

(d) $\subset$. Soit $\varphi \in E$. Puisque $\alpha_0 \in E$, nous avons que $\alpha_0 \wedge \varphi \in E$ et par (intro) que $@(\alpha_0)\varphi \in E$. De même, puisque $\alpha_1 \in E$, nous avons que $\alpha_1 \wedge @(\alpha_0)\varphi \in E$ et par (intro) que $@(\alpha_1)@(\alpha_0)\varphi \in E$. En répétant cet argument, nous obtenons $@(\boldsymbol{\alpha})\varphi \in E$, et donc $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$.

$\supset$. Soit $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$. Par définition, nous avons que $@(\boldsymbol{\alpha})\varphi \in E$. Supposons que $\varphi \notin E$ et donc que $\neg\varphi \in E$ par maximalité. Par l'argument du paragraphe précédent, nous aurions que $@(\boldsymbol{\alpha})\neg\varphi \in E$ et donc que $\neg\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, ce qui contredit la consistance de $E(\boldsymbol{\alpha})$.

(e) Soit $p \in \mathrm{Prop}_m$ tel que $@(\boldsymbol{\alpha})p \in E$. D'après le lemme (perm-ind),

$$\vdash @(\boldsymbol{\alpha})p \leftrightarrow @(\alpha_{r(p)})p$$

et

$$\vdash @(\alpha_{r(p)})p \leftrightarrow @(\boldsymbol{\beta}_{-r(p)})@(\alpha_{r(p)})p \leftrightarrow @(\boldsymbol{\beta}_{-r(p)}, \alpha_{r(p)})p$$

D'où le fait que $p \in E(\boldsymbol{\beta}_{-r(p)}, \alpha_{r(p)})$. ✠

Un ensemble Γ_s-maxcon E est *nommé* ssi il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ tel que $\alpha_n \in E$, pour tout $n \geq 0$, et il est *collé* ssi, pour toute formule φ et pour tous $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$, si $@_\alpha\Diamond_\gamma\varphi \in E$, alors il existe $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\varphi \in E$. Exiger que E soit nommé revient à exiger que le monde qu'il définit soit dénoté par un certain $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$; et exiger que E soit collé revient à exiger que les « mondes » accessibles depuis E soient également nommés. On remarquera qu'il n'est pas nécessaire qu'un ensemble Γ_s-maxcon contiennent des nominaux, car ça ne contredit en aucun cas la logique Γ_s. Nous verrons plus loin qu'il est toujours possible d'étendre un ensemble Γ_s-con à un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, et c'est à partir d'ensembles Γ_s-maxcon nommés et collés que nous construirons le modèle canonique.

Si E est un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, pour tout m, nous définissons une relation sur l'ensemble de nominaux de rang m, Nom_m, de la manière suivante :

$\alpha \cong_m \beta$ ssi $@_\alpha\beta \in E$

La relation $\cong_m$ identifie les nominaux qui ne sont pas distingués par E.

Lemme 8.2.4

Soit E un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé.

(a) La relation $\cong_m$ est une relation d'équivalence sur Nom_m.

(b) Si $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, \alpha, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$ et $\boldsymbol{\gamma}^* = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, \beta, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$, et si $\alpha \cong_m \beta$, alors $E(\boldsymbol{\gamma}) = E(\boldsymbol{\gamma}^*)$.

PREUVE. (a) La propriété de réflexivité est garantie par l'axiome (ref). L'axiome (sym) garantit celle de symétrie. En ce qui concerne la transitivité, l'axiome (nom) nous dit que $@_\alpha\beta \wedge @_\beta\varphi \rightarrow @_\alpha\varphi$. En particulier, si $\varphi = \gamma$, l'axiome stipule que $@_\alpha\beta \wedge @_\beta\gamma \rightarrow @_\alpha\gamma$, ce qui implique que $\cong_m$ est transitive.
(b) Si $\alpha \cong_m \beta$, c'est que $@_\alpha\beta \in E$. Par le lemme (perm-ind), $@(\boldsymbol{\gamma}_{-m})@_\alpha\beta \in E$. Par une conséquence de (agree), $@(\boldsymbol{\gamma})\beta \in E$, c'est-à-dire $\beta \in E(\boldsymbol{\gamma})$. Par le lemme 8.2.3 (c), $E(\boldsymbol{\gamma}) = E(\boldsymbol{\gamma}^*)$. ✠

Pour tout $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$, nous définissons une relation binaire $\rho(\gamma)$ (ou ρ_γ) sur l'ensemble Nom_m de la manière suivante : pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$,

$\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ ssi $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$

Nous montrons que cette définition préserve la relation $\cong_m$.

Lemme 8.2.5

(a) Si γ, $\delta \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ sont tels que $\gamma \cong_{m+1} \delta$, alors $\rho_\gamma = \rho_\delta$.

(b) Si $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$, et si $\alpha \cong_m \alpha'$ et $\beta \cong_m \beta'$, alors $\rho_\gamma(\alpha', \beta')$.

PREUVE. (a) Supposons que $\gamma \cong_{m+1} \delta$, c'est-à-dire que $@_\gamma\delta \in E$. Par (agree) et ($\mathrm{inst}_\Box$), nous savons que

$\vdash @_\alpha @_\gamma \delta \leftrightarrow @_\gamma \delta$

$\vdash @_\alpha @_\gamma (\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta)$

$\vdash @_\alpha @_\delta (\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta)$

donc $@_\alpha @_\gamma \delta$, $@_\alpha @_\gamma (\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta)$ et $@_\alpha @_\delta (\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta) \in E$. D'une part,

$\vdash @_\delta(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta) \to (@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow @_\delta\Diamond_\delta\beta)$, par ($\mathrm{K}_@$)

$\to (@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta)$, par ($\mathrm{ind}_@$)

et donc

$\vdash @_\alpha @_\delta(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta) \to @_\alpha(@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta\beta)$, par ($\mathrm{Nec}_@$) et ($\mathrm{K}_@$)

$\to (@_\alpha @_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow @_\alpha\Diamond_\delta\beta)$, par ($\mathrm{K}_@$)

Ainsi, $@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}\beta \in E$ ssi $@_\alpha\Diamond_\delta\beta \in E$. D'autre part,

$\vdash @_\gamma\delta \wedge @_\gamma(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta) \to @_\gamma(\delta \wedge (\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta))$, par ($\mathrm{K}_@$) et (dual)

$\to @_\gamma(@_\delta(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta))$, par (intro)

$\to @_\delta(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta)$, par (agree)

$\to (@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow @_\delta\Diamond_\gamma\beta)$, par ($\mathrm{K}_@$)

$\to (@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta)$, par ($\mathrm{ind}_@$)

et donc

$\vdash @_\alpha @_\gamma\delta \wedge @_\alpha @_\gamma(\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta) \to @_\alpha(@_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma\beta)$, par ($\mathrm{Nec}_@$) et ($\mathrm{K}_@$)

$\to (@_\alpha @_\delta\Diamond_{m+1}\beta \leftrightarrow @_\alpha\Diamond_\gamma\beta)$, par ($\mathrm{K}_@$)

Ainsi, $@_\alpha @_\delta\Diamond_{m+1}\beta \in E$ ssi $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$. Par conséquent,

$@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$ ssi $@_\alpha @_\delta\Diamond_{m+1}\beta \in E$ ssi $@_\alpha\Diamond_\delta\beta \in E$

(b) Nous avons d'abord que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ ssi $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$. Ensuite, $\alpha \cong_m \alpha'$ entraîne que $@_\alpha\alpha' \in E$. Il est facile de voir par (intro) que

$\vdash @_\alpha\alpha' \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\beta \to @_\alpha @_{\alpha'}\Diamond_\gamma\beta$

donc $@_\alpha @_{\alpha'} \Diamond_\gamma \beta \in E$, et $@_{\alpha'} \Diamond_\gamma \beta \in E$ par (agree). Par ailleurs, $@_{\alpha'} @_\beta \beta' \in E$ par (agree) et

$$\vdash @_{\alpha'} @_\beta \beta' \to @_{\alpha'} \Box_\gamma @_\beta \beta'$$

par (back) et ($K_@$), donc $@_{\alpha'} \Box_\gamma @_\beta \beta' \in E$. Ainsi, $@_{\alpha'} \Diamond_\gamma \beta \in E$ et $@_{\alpha'} \Box_\gamma @_\beta \beta' \in E$ impliquent que $@_{\alpha'} \Diamond_\gamma (\beta \wedge @_\beta \beta') \in E$. Mais

$$\vdash @_{\alpha'} \Box_\gamma (\beta \wedge @_\beta \beta' \to \beta')$$

par (intro), et

$$\vdash @_{\alpha'} \Diamond_\gamma (\beta \wedge @_\beta \beta') \wedge @_{\alpha'} \Box_\gamma (\beta \wedge @_\beta \beta' \to \beta') \to @_{\alpha'} \Diamond_\gamma \beta',$$

donc $@_{\alpha'} \Diamond_\gamma \beta' \in E$. Ainsi, $\rho_\gamma(\alpha', \beta')$. ✠

Le lemme suivant donne des formulations équivalentes de la relation ρ_γ, lesquelles sont plus communes dans les preuves de complétude.

Lemme 8.2.6

Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

(a) $@_\alpha \Diamond_\gamma \beta \in E$

(b) $\forall \varphi (\Box_\gamma \varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$

(c) $\forall \varphi (\varphi \in E(\beta) \Rightarrow \Diamond_\gamma \varphi \in E(\alpha))$

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que $@_\alpha \Diamond_\gamma \beta \in E$ mais qu'il existe une formule φ telle que $\Box_\gamma \varphi \in E(\alpha)$ et $\varphi \notin E(\beta)$, c'est-à-dire $\neg\varphi \in E(\beta)$. Si $\neg\varphi \in E(\beta)$, c'est que $@_\beta \neg\varphi \in E$ et, donc, par (bridge), que $@_\alpha \Diamond_\gamma \neg\varphi \in E$. Mais, si $@_\alpha \Diamond_\gamma \neg\varphi \in E$, c'est que $\neg @_\alpha \Box_\gamma \varphi \in E$ et, par conséquent, que $\Box_\gamma \varphi \notin E$. Contradiction.

(b) $\Rightarrow$ (a). Supposons que $\forall \varphi (\Box_\gamma \varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$ mais que $@_\alpha \Diamond_\gamma \beta \notin E$. Nous avons donc $\neg @_\alpha \Diamond_\gamma \beta \in E$, ce qui revient à $@_\alpha \Box_\gamma \neg\beta \in E$. Nous avons alors que $\Box_\gamma \neg\beta \in E(\alpha)$ et donc que $\neg\beta \in E(\beta)$, ce qui est contradictoire.

(b) $\Rightarrow$ (c). Supposons que $\forall \varphi (\Box_\gamma \varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$ et soit $\psi \in E(\beta)$. Nous voulons montrer que $\Diamond_\gamma \psi \in E(\alpha)$. Supposons le contraire : $\Diamond_\gamma \psi \notin E(\alpha)$, et donc $\neg\Diamond_\gamma\psi \in E(\alpha)$, ce qui revient à $\Box_\gamma\neg\psi \in E(\alpha)$. Par hypothèse, ceci entraîne que $\neg\psi \in E(\beta)$. Contradiction.

(c) $\Rightarrow$ (b). La preuve est analogue au cas précédent. ✠

Toujours en supposant que E est un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, nous avons maintenant le nécessaire pour définir la structure relationnelle d'ordre supérieur simple canonique basée sur E. Tout d'abord, posons

$N_m = \mathrm{Nom}_m / \cong_m$

$\mathbf{N}_m = N_0 \times \ldots \times N_m$

$\mathbf{N} = N_0 \times \ldots \times N_m \times \ldots$

La partie (b) du lemme 8.2.5 montre que la relation que définit ρ_γ, pour chaque $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$, induit une relation binaire sur N_m (que la relation ne dépend que la classe d'équivalence de chaque nominal de Nom_m). La partie (a) de ce lemme montre que la suite $\Lambda = (\Lambda_m)_{m\geq 0}$ de fonctions $\Lambda_{m+1} : N_{m+1} \to \wp(N_m \times N_m)$, où $\Lambda_{m+1}(|\gamma|)$ est la relation induite par ρ_γ sur N_m, est bien définie (ne dépend pas de la classe de γ). Nous définissons la *structure relationnelle d'ordre supérieur simple canonique (basée sur E)* comme la structure $\mathbf{S}_E = < \mathbf{N}, \Lambda >$.

Il faut maintenant définir le modèle canonique simple basé sur $\mathbf{S}_E$. Nous commençons par définir un modèle pour $L_{\leq n}$ basé sur une restriction de $\mathbf{S}_E$. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $\varepsilon \in E$, et soit $e = |\varepsilon| \in N_{n+1}$. Nous définissons le *modèle canonique simple de rang n (basé sur E)* comme le modèle simple de rang n suivant :

$\mathbf{M}_E(e) = < \mathbf{N}_n, \Lambda_{\leq n}(e), val >$

où val est la valuation de $L_{\leq n}$ telle que,

$val(p) = \{|\alpha| \in N_{r(p)} : @_\alpha p \in E\}$,

pour tout $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$, et

$val(\alpha) = |\alpha|$,

pour tout $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$.

Tout ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé donne donc lieu à un $L_{\leq n}$-modèle. Cependant, nous ne savons pas quel modèle faire correspondre à un ensemble F qui est seulement Γ_s-con. Bien entendu, s'il existe un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé comprenant F, alors nous n'avons qu'à prendre le modèle canonique basé sur celui-ci. Si nous avions une garantie qu'un ensemble Γ_s-con est toujours compris dans (au moins) un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, cette question serait réglée. Or, c'est précisément là l'objet de la proposition suivante, qui est une sorte de lemme de Lindenbaum. Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin d'augmenter le langage L avec des nouveaux nominaux : pour chaque m, Nom_m^+ sera un ensemble (dénombrable) de nominaux de rang m nouveaux (distincts de ceux de Nom_m), et nous poserons $\mathrm{Nom}_m^* = \mathrm{Nom}_m \cup \mathrm{Nom}_m^+$. Appelons L^* le langage obtenu par cette addition de nominaux.

Proposition 8.2.7 (Lemme de Lindenbaum)
Soit F un ensemble Γ_s-con de L. Il existe une extension E de F dans le langage L^* qui est Γ_s-maxcon nommée et collée.

PREUVE. Nous nous occupons tout d'abord de nommer F. Pour chaque m, soit α_m^+ un nominal de Nom_m^+. Posons $F^+ = F \cup \{\alpha_m^+ : m \geq 0\}$ et montrons que F^+ est consistant. Supposons le contraire : $F^+ \vdash \bot$. Autrement dit,

$$F \cup \{\alpha_m^+ : m \geq 0\} \vdash \bot.$$

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ les formules de F et $\beta_1, \ldots, \beta_l$ les nominaux de Nom^* impliqués dans une preuve de $\bot$ dans Γ_s. Si $\theta = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$ et $\wedge\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l$, alors le lemme 8.2.1, partie (a), entraîne que

$$\begin{aligned} F^+ \vdash \bot &\Rightarrow \vdash (\wedge\beta) \wedge \theta \to \bot \\ &\Rightarrow \vdash \wedge\beta \to \neg\theta \end{aligned}$$

Puisque θ est une formule dans laquelle β n'apparaît pas, la règle (Name) nous permet de conclure que $\vdash \neg\theta$. Autrement dit, il existe une preuve de $\bot$ sous les hypothèses F, contredisant la consistance de F.

Il faut maintenant progressivement ajouter des formules à F^+ pour en faire un ensemble Γ_s-maxcon collé. Pour ce faire, nous utiliserons une énumération (φ_l) de toutes les formules de L^*. Posons $E_0 = F^+$. Pour $l > 0$, si (i) $E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$ est Γ_s-inconsistant, alors nous posons $E_{l+1} = E_l$. Si (ii) $E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$ est Γ_s-con et si φ_{l+1} n'est pas de la forme $@_\alpha\Diamond_\gamma\psi$, alors nous posons $E_{l+1} = E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$. Enfin, si (iii) $E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$ est Γ_s-con et si $\varphi_{l+1} = @_\alpha\Diamond_\gamma\psi$, pour un certain ψ, alors nous étendons E_l comme suit : soit β un nominal de $\mathrm{Nom}_m{}^*$ qui n'apparaît ni dans E_l ni dans φ_{l+1} (il existe toujours un tel β car $\mathrm{Nom}_m{}^*\backslash\{\alpha_m{}^+\}$ est infini et n'apparaît pas dans F^+, et une formule est ajoutée au plus à chaque étape de ce processus), nous posons alors

$$E_{l+1} = E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\psi\}.$$

Montrons que, pour tout l, si E_l est Γ_s-con, alors E_{l+1} est Γ_s-con. Supposons le contraire. E_l est consistant mais E_{l+1} est inconsistant. Puisque E_{l+1} est distinct de E_l, un des deux cas (ii) ou (iii) s'applique. Le cas (ii) peut être éliminé d'emblée, par définition. Reste le cas (iii). Or,

$$E_{l+1} \vdash \bot \text{ ssi } E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\psi\} \vdash \bot$$

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ les formules de E_l entrant dans cette preuve d'une contradiction et soit θ la conjonction des θ_j, nous avons alors que

$$\begin{aligned}
E_{l+1} \vdash \bot &\Rightarrow \vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \wedge (@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\psi) \wedge \theta \to \bot \\
&\text{ssi } \vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \wedge (@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\psi) \to \neg\theta \\
&\text{ssi } \vdash (@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\psi) \to \neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi)
\end{aligned}$$

Le nominal β n'apparaît pas dans $\neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi)$, car il n'apparaît ni dans E_l ni dans φ_{l+1}. Par la règle (Paste), il en résulte que

$$\begin{aligned}
E_{l+1} \vdash \bot &\Rightarrow \vdash \neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi) \\
&\text{ssi } \theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \vdash \bot \\
&\Rightarrow E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \vdash \bot
\end{aligned}$$

Mais ceci contredit la consistance de E_l et $@_\alpha\Diamond_\gamma\psi$.

Posons maintenant $E = \cup E_l$. L'ensemble E est Γ_s-consistant, car chaque E_l l'est. Par ailleurs, E est maximal. Supposons le contraire. Soit ψ une formule telle que $\psi \notin E$ et $\neg\psi \notin E$. Il existe j et k tels que $\psi = \varphi_{j+1}$ et $\neg\psi = \varphi_{k+1}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $j < k$. Puisque $\psi \notin E$, nous avons que $E_j \cup \{\varphi_{j+1}\}$ est inconsistant. Par conséquent, $E_j \vdash \neg\varphi_{j+1}$ et donc $E_k \vdash \neg\varphi_{j+1}$, car $E_j \subset E_k$. Autrement dit, $E_k \vdash \varphi_{k+1}$, c'est-à-dire $E_k \vdash \neg\psi$. Mais si $\neg\psi \notin E$, c'est que $E_k \cup \{\varphi_{k+1}\} = E_k \cup \{\neg\psi\}$ est inconsistant, donc E_k est inconsistant. Contradiction.

L'ensemble E est nommé parce que c'est une extension de F^+, et il est collé par construction. ✠

Les propositions suivantes montrent que notre modèle canonique a certaines propriétés clés qui seront nécessaires pour la preuve de complétude.

Proposition 8.2.8 (Lemme d'existence)
Soit E un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$, $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors il existe $\beta_m \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$ et $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta_m)$.

Preuve. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $@(\boldsymbol{\alpha})\Diamond_\gamma\varphi \in E$. Par le lemme (perm-ind), nous avons

$$\vdash @(\boldsymbol{\alpha})\Diamond_\gamma\varphi \leftrightarrow @(\alpha_m)\Diamond_\gamma @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})\varphi,$$

donc $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})\varphi \in E$. Étant donné que E est collé, il existe $\beta_m \in \mathrm{Nom}_m$ tel que

$$@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta_m \wedge @(\beta_m)@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})\varphi \in E$$

Donc $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta_m$, $@(\beta_m)@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})\varphi \in E$, par maximalité. Mais $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta_m \in E$ signifie que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$, et $@(\beta_m)@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})\varphi \in E$ entraîne, par le lemme (perm-ind), que $@(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta_m)\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta_m)$. ✠

Proposition 8.2.9 (Lemme de vérité)
Soit E un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, et soit $\mathbf{M}_E(e)$ le modèle canonique de rang n basé sur E. Pour toute formule $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$, nous avons

$$\mathbf{M}_E(e), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi \text{ ssi } \varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$$

où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$ est tel que $|\alpha_m| = w_m$, pour $0 \leq m \leq n$.

PREUVE. Par induction sur le nombre de connecteurs dans φ.
Étape de base. Si φ est une variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_m$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n \Vdash p & \text{ ssi } w_m \in val(p) \\ & \text{ ssi } |\alpha_m| \in val(p) \\ & \text{ ssi } @(\alpha_m)p \in E \end{aligned}$$

Puisque $\vdash @(\alpha_m)p \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\alpha_m)p \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha})p$, nous avons

$$\mathbf{w}_n \Vdash p \text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha})p \in E \text{ ssi } p \in E(\boldsymbol{\alpha})$$

Si φ est un nominal $\beta \in \mathrm{Nom}_m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n \Vdash \beta & \text{ ssi } w_m = val(\beta) \\ & \text{ ssi } w_m = |\beta| \\ & \text{ ssi } |\alpha_m| = |\beta| \\ & \text{ ssi } @(\alpha_m)\beta \in E \end{aligned}$$

Puisque $\vdash @(\alpha_m)\beta \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\alpha_m)\beta \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha})\beta$, nous avons

$$\mathbf{w}_n \Vdash \beta \text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha})\beta \in E \text{ ssi } \beta \in E(\boldsymbol{\alpha})$$

Si φ est $\bot$, le résultat est immédiat.
Étape inductive. (i) Si le connecteur principal dans φ est un connecteur booléen, la démonstration est dircete. En effet, si $\varphi = \psi \wedge \theta$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n \Vdash \psi \wedge \theta & \text{ ssi } \mathbf{w}_n \Vdash \psi \text{ et } \mathbf{w}_n \Vdash \theta \\ & \text{ ssi } \psi \in E(\boldsymbol{\alpha}) \text{ et } \theta \in E(\boldsymbol{\alpha}), \text{ par l'hypothèse d'induction} \\ & \text{ ssi } \psi \wedge \theta \in E(\boldsymbol{\alpha}), \text{ par maximalité de } E(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

La démonstration pour la négation est analogue.
(ii) Supposons que φ est de la forme $\Box_\gamma \psi$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$\mathbf{w}_n \Vdash \Box_\gamma\psi$ ssi $(\mathbf{w}_{n,-m}, v) \Vdash \psi$, pour tout $v \in N_m$ tel que $\Lambda_{m+1}(|\gamma|)(w_m, v)$

ssi $(\mathbf{w}_{n,-m}, |\beta|) \Vdash \psi$, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta)$

ssi $\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)$, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta)$

Si l'équivalence

(*) $\Box_\gamma\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})$ ssi $\forall\beta \in \mathrm{Nom}_m\,[\,\rho_\gamma(\alpha_m, \beta) \Rightarrow \psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)\,]$

est vraie, nous aurons terminé. Mais, en contraposant et en opérant quelques transformations élémentaires, nous avons que (*) est équivalent à

(**) $\Diamond_\gamma\neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})$ ssi $\exists\beta \in \mathrm{Nom}_m\,[\,\rho_\gamma(\alpha_m, \beta)\ \&\ \neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)\,]$

Or, la direction « $\Rightarrow$ » est le lemme d'existence appliqué à '$\Diamond_\gamma\neg\psi$', et la direction « $\Leftarrow$ » est une conséquence de (bridge) :

$\rho_\gamma(\alpha_m, \beta)\ \&\ \neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)$ ssi $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta$ et $@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@_\beta\neg\psi \in E$

ssi $@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta$ et $@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@_\beta\neg\psi \in E$

ssi $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta$ et $@_\beta\neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m})$

ssi $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m})$

car $E(\boldsymbol{\alpha}_{-m})$ est Γ_s-maxcon.

(iii) Supposons que φ est de la forme $\Box_{m+1}\psi$. Deux cas se présentent : (a) le cas $m = n$ et (b) le cas $m < n$.

(a) Soit $\varepsilon \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $|\varepsilon| = e$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$\mathbf{w}_n \Vdash \Box_{n+1}\psi$ ssi $(\mathbf{w}_{n-1}, v) \Vdash \psi$, pour tout $v \in N_n$ tel que $\Lambda_{n+1}(w_{n+1})(w_n, v)$

ssi $(\mathbf{w}_{n-1}, |\beta|) \Vdash \psi$, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $\rho(\varepsilon)(\alpha_n, \beta)$

ssi $\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-n}, \beta)$, pour tout $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $\rho(\varepsilon)(\alpha_n, \beta)$

ssi $\Box_\varepsilon\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})$

Nous savons que

$\vdash @_\varepsilon(\Box_{n+1}\psi \leftrightarrow \Box_\varepsilon\psi)$,

ce qui entraîne que

$\vdash @_\varepsilon @_\alpha(\Box_{n+1}\psi \leftrightarrow \Box_\varepsilon\psi)$

$\to (@_\varepsilon @_\alpha\Box_{n+1}\psi \leftrightarrow @_\varepsilon @_\alpha\Box_\varepsilon\psi)$

donc $@_\varepsilon @_\alpha\Box_\varepsilon\psi \in E$ ssi $@_\varepsilon @_\alpha\Box_{n+1}\psi \in E$. Mais, par (intro),

$\vdash \varepsilon \wedge @_\varepsilon\varphi \to \varphi \;\&\; \vdash \varepsilon \wedge \varphi \to @_\varepsilon\varphi$,

donc $@_\alpha\Box_\varepsilon\psi \in E$ ssi $@_\alpha\Box_{n+1}\psi \in E$, c'est-à-dire

$\Box_\varepsilon\psi \in E(\alpha)$ ssi $\Box_{n+1}\psi \in E(\alpha)$,

ce qui complète la preuve de ce cas.

(b) Toutes les idées nécessaires à la démonstration de ce cas se trouvent dans la preuve du cas (a) ci-dessus.

(iv) Supposons que φ est de la forme $@_\beta\psi$, où $\beta \in \mathrm{Nom}_m$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_n \Vdash @_\beta\psi &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{n,-m}, val(\beta)) \Vdash \psi\\ &\text{ ssi } (\mathbf{w}_{n,-m}, |\beta|) \Vdash \psi\\ &\text{ ssi } \psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)\end{aligned}$$

Mais $\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)$ entraîne que $@(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)\psi = @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\beta)\psi \in E$. De même

$\vdash @(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\beta)\psi \leftrightarrow @(\alpha_m)@(\boldsymbol{\alpha}_{-m})@(\beta)\psi \leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha})@(\beta)\psi$,

par (agree) et (perm-ind), donc $@(\boldsymbol{\alpha})@(\beta)\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})$.

Ce qui complète la preuve. ✠

Nous arrivons enfin au résultat recherché :

Théorème 8.2.10 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ_s-con de formules de $\mathrm{Form}_{\leq n}$, F est satisfaisable.

PREUVE. D'après le lemme de Lindenbaum, il existe un ensemble E de formules de L^* qui contient F et qui est Γ_s-maxcon nommé et collé. Soit $\mathbf{M}_E(e)$ le modèle canonique de rang n basé sur E. Puisque E est nommé, il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$ tel que $E = E(\boldsymbol{\alpha})$. Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{N}_n$ tel que $\mathbf{w} = |\boldsymbol{\alpha}|$. $\mathbf{M}_E(e)$ satisfait F au point $\mathbf{w}$. En effet, supposons que $\varphi \in F \subset E$. Il s'ensuit que $@(\boldsymbol{\alpha})\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et donc $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ par le lemme de vérité. ✠

8.3 Complétude pour L

Dans cette section, nous montrons la complétude pour le langage L (et non plus seulement le fragment $L_{\leq n}$). Nous devons apporter quelques modifications aux définitions que nous avons introduites plus haut. Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ (et non plus $\mathbf{Nom}_n$), nous définissons

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \{\varphi \in \text{Form} : @(\boldsymbol{\alpha}_n)\varphi \in E, \text{ où } n = r(\varphi)\}.$$

Dans ce qui suit, si $\boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbf{Nom}_n$, $E(\boldsymbol{\alpha}_n)$ sera toujours l'ensemble de formules tel que défini à la section précédente. Il n'est pas difficile de montrer, d'après ce que nous savons déjà, que si $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{Nom}$ est tel $\varepsilon_k \in E$, pour tout k, alors l'ensemble $E(\boldsymbol{\alpha}_n)$ est tout simplement l'ensemble $E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1})$. Nous devons montrer à présent que $E(\boldsymbol{\alpha})$ a sensiblement les mêmes propriétés que $E(\boldsymbol{\alpha}_n)$.

Lemme 8.3.1

Soit E un ensemble Γ_s-maxcon, et soient $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}$, $\gamma \in \text{Nom}_m$ et $p \in \text{Prop}_m$. Nous avons :

(a) Si $r(\varphi) = n$, alors $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$ ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n)$

(b) Pour tout m, $\alpha_m \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et $E(\boldsymbol{\alpha})$ est Γ_s-maxcon

(c) Si $\gamma \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $E(\boldsymbol{\alpha}) = E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \gamma)$

(d) Si $\alpha_m \in E$, pour tout m, alors $E = E(\boldsymbol{\alpha})$

(e) Si $p \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $p \in E(\boldsymbol{\beta}_{-m}, \alpha_m)$

PREUVE. (a) Il s'agit d'une conséquence directe de la définition des ensembles $E(\boldsymbol{\alpha})$ et $E(\boldsymbol{\alpha}_n)$.

Les parties (b)-(e) découlent de (a) et des propriétés de $E(\boldsymbol{\alpha}_n)$. ✠

Nous conservons la même structure canonique $\mathbf{S}_E$. Le *modèle simple canonique basé sur E* est le modèle simple $\mathbf{M}_E = < \mathbf{S}_E, val >$, où

$$val(p) = \{|\alpha| \in N_{r(p)} : @_\alpha p \in E\},$$

pour tout $p \in \text{Prop}$, et

$val(\alpha) = |\alpha|$,

pour tout $\alpha \in$ Nom.

Proposition 8.3.2 (Lemme d'existence)

Soit E un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, $\boldsymbol{\alpha} \in$ **Nom**, $\varphi \in$ Form et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors il existe $\beta_m \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$ et $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta_m)$.

PREUVE. Soit $n = r(\Diamond_\gamma\varphi)$. Nous avons que $\Diamond_\gamma\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ et que $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n)$ par la partie (a) du lemme précédent. Par le lemme d'existence (version bornée), il existe $\beta_m \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$ et $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{n,-m}, \beta_m)$. Par le lemme précédent, partie (a), ceci entraîne que $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta_m)$. ✠

Proposition 8.3.3 (Lemme de vérité)

Soit E un ensemble Γ_s-maxcon nommé et collé, et soit $\mathbf{M}_E$ le modèle simple canonique basé sur E. Pour toute formule $\varphi \in$ Form, nous avons

$\mathbf{M}_E, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$

où $\boldsymbol{\alpha} \in$ **Nom** est tel que $|\alpha_m| = w_m$, pour $m \geq 0$.

PREUVE. Soit $n = r(\Diamond_\gamma\varphi) + 1$ et soit $\varepsilon_{n+1} \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $e = |\varepsilon_{n+1}|$ ($\varepsilon_{n+1} \in E$). Nous avons que $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n-1}$, et donc :

$\mathbf{M}_E, \mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $[\mathbf{M}_E]_{\leq n-1}(w_n), \mathbf{w}_{n-1} \Vdash \varphi$

ssi $[\mathbf{M}_E]_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$, car la n+1-ième coordonnée n'affecte pas φ

ssi $[\mathbf{M}_E]_{\leq n}(e), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$, pour la même raison

ssi $\mathbf{M}_E(e), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi$, par définition

ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n)$, par le lemme de vérité pour $L_{\leq n}$

ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, par 8.3.1 (a)

Ce qui complète la démonstration. ✠

Ce qui nous donne enfin :

Théorème 8.3.4 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ_s-con de formules de Form, alors F est satisfaisable.

PREUVE. D'après le lemme de Lindenbaum, il existe un ensemble E de formules de L^* qui contient F et qui est Γ_s-maxcon nommé et collé. Soit $\mathbf{M}_E$ le modèle basé sur E. Puisque E est nommé, il existe $\alpha \in \mathbf{Nom}$ tel que $E = E(\alpha)$. Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{w} = |\alpha|$. $\mathbf{M}_E$ satisfait F au point $\mathbf{w}$. En effet, supposons que $\varphi \in F \subset E$ et soit $n = r(\varphi)$. Il s'ensuit que $@(\alpha_n)\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\alpha)$, et donc $\mathbf{w} \Vdash \varphi$, par le lemme de vérité. ✠

8.4 Canonicité des axiomes

Le lecteur attentif aura remarqué que ce résultat de complétude n'est pas « complet ». Nous avons seulement montré que tout ensemble de formules Γ_s-con était satisfaisable dans un modèle simple, mais nous n'avons pas montré que, par exemple, si la logique Γ_s contient l'axiome (4_m), alors les relations de rang m du modèle canonique sont transitives, que si la logique contient l'axiome (T_{m}), les relations de rang m du modèle canonique sont réflexives, etc. Nous devons montrer que nos axiomes sont *canoniques* pour certaines propriétés. On dit qu'un schème d'axiome Ax est canonique pour une propriété $\mathcal{P}$ ssi la présence des instances appropriées de Ax dans E (c'est-à-dire la présence dans E des instances autorisées par les conditions de Ax) fait en sorte que le modèle $\mathbf{M}_E$ a la propriété $\mathcal{P}$ (si $\mathcal{C}$ est la classe de modèles, ou de structures, ayant la propriété $\mathcal{P}$, on dit aussi canonique pour la classe $\mathcal{C}$). En particulier, nous dirons qu'un axiome Ax est *canonique pour la propriété qu'il définit* ssi (i) Ax définit la propriété $\mathcal{P}$ sur les structures simples et (ii) Ax est canonique pour $\mathcal{P}$.

Proposition 8.4.1

Les axiomes du groupe II sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

PREUVE. Supposons que (D_n) est un axiome de Γ_s. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, nous voulons montrer qu'il existe $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$. Par (D_n), nous avons que $\vdash \Box_\gamma\top \rightarrow \Diamond_\gamma\top$ et donc $\vdash \Diamond_\gamma\top$, car $\vdash \Box_\gamma\top$. Enfin, par $(\mathrm{Nec}_@)$, nous avons $\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\top$ et donc $@_\alpha\Diamond_\gamma\top \in E$. Puisque E est collé, il existe $\beta \in \mathrm{Nom}_n$ tel que $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\top \in E$, et donc $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$.

Supposons que (T_n) est un axiome de Γ_s. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_n$, nous voulons montrer que $\rho_\gamma(\alpha, \alpha)$. Puisque Γ_s contient (T_n), $\vdash \alpha \rightarrow \Diamond_\gamma\alpha$ et donc $\vdash @_\alpha\alpha \rightarrow @_\alpha\Diamond_\gamma\alpha$, par $(\mathrm{Nec}_@)$ et $(K_@)$. Ainsi, $@_\alpha\Diamond_\gamma\alpha \in E$ par (ref).

Supposons que (B_n) est un axiome de Γ_s. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_n$, nous voulons montrer que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ entraîne $\rho_\gamma(\beta, \alpha)$. Supposons que $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$. Puisque (B_n) est un axiome, nous avons $\vdash @_\alpha\alpha \rightarrow @_\alpha\Box_\gamma\Diamond_\gamma\alpha$ et donc $\Box_\gamma\Diamond_\gamma\alpha \in E(\alpha)$, par (ref). Nous savons que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ est équivalent à

$$\forall\varphi(\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta)),$$

donc $\Diamond_\gamma\alpha \in E(\beta)$, c'est-à-dire $@_\beta\Diamond_\gamma\alpha \in E$.

Supposons que (4_n) est un axiome de Γ_s. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\alpha, \beta, \nu \in \mathrm{Nom}_n$, nous devons montrer que ρ_γ est transitive, c'est-à-dire que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ et $\rho_\gamma(\beta, \nu)$ entraînent que $\rho_\gamma(\alpha, \nu)$. Par hypothèse, nous avons donc que $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$ et $@_\beta\Diamond_\gamma\nu \in E$. Par (bridge),

$$\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\beta \wedge @_\beta\Diamond_\gamma\nu \rightarrow @_\alpha\Diamond_\gamma\Diamond_\gamma\nu$$

et par (4_n), $(\mathrm{Nec}_@)$ et $(K_@)$,

$$\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\Diamond_\gamma\nu \rightarrow @_\alpha\Diamond_\gamma\nu.$$

Ainsi, $@_\alpha\Diamond_\gamma\nu \in E$.

Enfin, supposons que (5_n) est un axiome de Γ_s. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\alpha, \beta, \nu \in \mathrm{Nom}_n$, nous devons montrer que ρ_γ est euclidienne, c'est-à-dire que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ et $\rho_\gamma(\alpha, \nu)$ entraînent que $\rho_\gamma(\beta, \nu)$. Par hypothèse, nous avons que $@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in$

E et $@_\alpha\Diamond_\gamma\nu \in E$, et donc $@_\alpha(\Diamond_\gamma\beta \wedge \Diamond_\gamma\nu) \in E$. Par (5_m), $\vdash \Diamond_\gamma\nu \to \Box_\gamma\Diamond_\gamma\nu$ et donc $@_\alpha(\Diamond_\gamma\beta \wedge \Box_\gamma\Diamond_\gamma\nu) \in E$. Or,

$\vdash @_\alpha(\Diamond_\gamma\beta \wedge \Box_\gamma\Diamond_\gamma\nu) \to @_\alpha(\Diamond_\gamma(\beta \wedge \Diamond_\gamma\nu)$

$\to @_\alpha(\Diamond_\gamma @_\beta\Diamond_\gamma\nu)$, par (intro) notamment

$\to @_\alpha @_\beta\Diamond_\gamma\nu$, par (back)

$\to @_\beta\Diamond_\gamma\nu$, par (agree)

Ce qui complète la démonstration. ✠

8.5 Application : Logique modale multidimensionnelle

Je donne un aperçu rapide d'une application à la logique modale multidimensionnelle qu'on peut faire du travail accompli jusqu'à présent (cette logique est une généralisation des logiques modales obtenu par produit cartésien de Gabbay & Shehtman : 1998a, 1998b & 2002). Une *structure relationnelle multidimensionnelle* (infinie) est un couple

$< \prod_{n\geq 0} W_n, (R_n)_{n\geq 0} >$,

où, pour tout $n \geq 0$, W_n est un ensemble et R_n est une relation binaire sur l'ensemble W_n. Le langage L_{MD} de la logique modale multidimensionnelle est généré par les clauses syntaxiques :

$\varphi ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_{m+1}\varphi$

où chaque variable propositionnelle 'p' possède un certain rang $r(p) \geq 0$ et où $m \geq 0$. Un modèle de ce langage est un couple $< S, val >$, où S est une structure multidimensionnelle et val est une valuation telle que

$val(p) \subset W_{r(p)}$, pour tout p

Pour $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} W_n$, la satisfaction à $\mathbf{w}$ est définie récursivement de la manière suivante :

$\mathbf{w} \nVdash \bot$

$\mathbf{w} \Vdash p$ ssi $w_{r(p)} \in val(p)$

$\mathbf{w} \Vdash \neg\varphi$ ssi $\mathbf{w} \nVdash \varphi$

$\mathbf{w} \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ et $\mathbf{w} \Vdash \psi$

$\mathbf{w} \Vdash \Box_{m+1}\varphi$ ssi $(\mathbf{w}_{-m}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_m$ tel que $R_m(w, w_m)$

De toute évidence, une structure relationnelle multidimensionnelle est un cas particulier de SROSs, une structure où, pour tout $n \geq 0$, Φ_{n+1} est la fonction constante telle que $\Phi_{n+1}(w) = R_n$, pour tout $w \in W_{n+1}$. De même, le langage L_{MD} est un fragment de L, obtenu de ce dernier en supprimant toute présence de nominaux, et les clauses sémantiques ci-dessus sont précisément celles qui sont induites par un modèle simple dans le langage L_{MD}. Il n'est pas difficile de voir que le schème :

(MD$_n$) $\quad \Box_\gamma\varphi \leftrightarrow \Box_\delta\varphi$, où $\gamma, \delta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$

caractérise la condition définissante des structures multidimensionnelles (le fait que Φ_{n+1} soit constante sur W_{n+1}). En effet, (MD$_n$) entraîne que les formules '$@_\alpha\Diamond_\gamma\beta$' et '$@_\alpha\Diamond_\delta\beta$', quelques soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_n$, sont logiquement équivalentes, et il s'ensuit alors que $\mathbf{R}_n$ est un singleton (que Φ_{n+1} est constante). Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que l'ajout de (MD$_n$) à l'axiomatisation de la logique des structures simples transforme la structure canonique en structure multi-dimensionnelle. Ce qui nous permet d'obtenir :

Proposition 8.5.1

Le système $\Gamma_s + \{(\mathrm{MD}_n) : n \geq 0\}$ est complet par rapport à la classe des structures multidimensionnelles (pour le langage L).

Chapitre 9
Logique modale d'ordre supérieur – Partie II

Nous adaptons ici les résultats du chapitre précédent aux autres sémantiques et aux autres syntaxes.

9.1 La logique des structures générales

L'axiomatisation restera en grande partie inchangée. Il faudra faire quelques modifications cruciales à quatre axiomes : aux axiomes (back) et (bridge) du groupe III et aux axiomes ($\text{perm}_{@\Box}$) et ($\text{ind}_{@}$) du groupes IV, et à une règle : la règle (Paste). Ces changements refléteront le fait qu'une modalité de rang $n+1$ est interprétée avec une relation binaire $\mathbf{W}_n$ dans une structure générale (et non pas sur W_n), et qu'une variable propositionnelle de rang n est associée à une extension de $\mathbf{W}_n$ (et non de W_n). Ainsi, toutes les dimensions inférieures au rang de la formule seront importantes pour son évaluation.

Soient $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$ et soient $\alpha, \beta \in \text{Nom}$ et $\gamma \in \text{Nom}_{n+1}$. Nous remplaçons les axiomes susmentionnés par les suivants :

(back) $\quad \Diamond @_{\boldsymbol{\alpha}}\varphi \rightarrow @_{\boldsymbol{\alpha}}\varphi$, où $\Diamond = \Diamond_{n+1}$ ou $\Diamond_{\gamma}$

(bridge) $\quad @_{\boldsymbol{\alpha}}\Diamond{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_{\boldsymbol{\beta}}\varphi \rightarrow @_{\boldsymbol{\alpha}}\Diamond\varphi$, où $\Diamond = \Diamond_{n+1}$ ou $\Diamond_{\gamma}$

($\text{perm}_{@\Box}$) $\quad @_{\alpha}\Box_{n+1}\varphi \leftrightarrow \Box_{n+1}@_{\alpha}\varphi$, si $r(\alpha) > n+1$

$\quad @_{\alpha}\Box_{\beta}\varphi \leftrightarrow \Box_{\beta}@_{\alpha}\varphi$, si $r(\alpha) \geq r(\beta)$

($\text{ind}_{@}$) $\quad @_{\alpha}\varphi \leftrightarrow \varphi$, si $r(\alpha) \notin rep(\varphi)$

Et nous reformulons (Paste) comme suit : si $\boldsymbol{\beta}$ n'apparaît pas dans φ ou θ,

(Paste) $\quad$ Si $\vdash @_{\boldsymbol{\alpha}}\Diamond_{\gamma}{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_{\boldsymbol{\beta}}\varphi \rightarrow \theta$, alors $\vdash @_{\boldsymbol{\alpha}}\Diamond_{\gamma}\varphi \rightarrow \theta$

Toutes les autres définitions ayant trait au système de dérivation Γ_s restent les mêmes. Nous appelons aussi ce nouveau système Γ.

Nous avons :

Proposition 9.1.1

Les axiomes et les règles inférentielles de Γ sont valides.

PREUVE. La vérification de la validité dans des structures générales de toutes les règles et de tous les axiomes qui sont restés inchangés est identique à la vérification précédente. Il suffit donc de se concentrer sur la nouvelle mouture des quatre axiomes et de la règle (Paste). Soit $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$, nous devons montrer que $\Diamond_{m+1}@_\alpha\varphi \to @_\alpha\varphi$ est valide (le cas où $\Diamond = \Diamond_\gamma$ avec $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ se démontrera de manière analogue). Or,

$\mathbf{w} \Vdash \Diamond_{m+1}@_\alpha\varphi$ ssi $\exists \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m\,[\,\Phi(w_{m+1})(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_m)\ \&\ (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash @_\alpha\varphi\,]$

ssi $\exists \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m\,[\,\Phi(w_{m+1})(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_m)\ \&\ (val(\alpha), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi\,]$

$\Rightarrow (val(\alpha), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi$

ssi $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\varphi$

Montrons que (bridge) est valide. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Nom}_m$, nous devons montrer la validité de $@_\alpha\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \wedge @_\beta\varphi \to @_\alpha\Diamond_{m+1}\varphi$ (le cas où $\Diamond = \Diamond_\gamma$ avec $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ se démontrera de manière analogue). Or, $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \wedge @_\beta\varphi$

ssi $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta\ \&\ \mathbf{w} \Vdash @_\beta\varphi$

ssi $(val(\alpha), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta\ \&\ (val(\beta), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi$

ssi $\exists \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m\,[\,\Phi(w_{m+1})(val(\alpha), \mathbf{v}_m)\ \&\ (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash {\wedge}\beta\,]\ \&\ (val(\beta), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi$

ssi $\exists \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m\,[\,\Phi(w_{m+1})(val(\alpha), \mathbf{v}_m)\ \&\ \mathbf{v}_m = val(\beta)\,]\ \&\ (val(\beta), \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi$

$\Rightarrow \exists \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m\,[\,\Phi(w_{m+1})(val(\alpha), \mathbf{v}_m)\ \&\ (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha\Diamond_{m+1}\varphi$

En ce qui concerne ($\mathrm{ind}_@$), la partie (e) de la proposition 7.1.1 montre qu'il est valide dans les structures générales.

Il reste à montrer que ($\mathrm{perm}_{@\Box}$) et ($\mathrm{inst}_\Box$) sont valides. Si $r(\alpha) > n+1$, alors nous avons que $\mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Box_{n+1}\varphi$

ssi $(\mathbf{w}_{-r(\alpha)}, val(\alpha)) \Vdash \Box_{n+1}\varphi$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\ [\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, (\mathbf{w}_{-r(\alpha)}, val(\alpha))^{n+1}) \Vdash \varphi\,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\ [\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow ((\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1})_{-r(\alpha)}, val(\alpha)) \Vdash \varphi\,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\ [\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow ((\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1})_{-r(\alpha)}, w_{r(\alpha)}) \Vdash @_\alpha\varphi\,]$

ssi $\forall \mathbf{v}_n \in \mathbf{W}_n\ [\,\Phi(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \Rightarrow (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1}) \Vdash @_\alpha\varphi\,]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \Box_{n+1} @_\alpha \varphi$

(Je rappelle que $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}^{n+1})$ est l'élément de $\mathbf{W}$ ayant les composantes de $\mathbf{v}$ jusqu'à n et les composantes de $\mathbf{w}$ après n.) Le même argument, à quelques détails près, nous permet de montrer que

$\mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Box_\beta \varphi \leftrightarrow \Box_\beta @_\alpha \varphi$

sauf que cette fois-ci, l'hypothèse $r(\alpha) \geq r(\beta)$ est suffisante. Quant à l'axiome ($\mathrm{ind}_@$), sa validité découle de la proposition 7.1.1 partie (e).

Il nous reste maintenant à vérifier la règle (Paste) préserve elle-aussi la validité. Procédons par l'absurde : supposons qu'il existe une structure générale $\mathbf{S}$, un modèle $\mathbf{M} = <\mathbf{S}, val>$ et un point $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ tels que

$\mathbf{S} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \wedge \beta \wedge @_\beta \varphi \to \theta$

$\mathbf{M}, \mathbf{w} \nVdash (@_\alpha \Diamond_\gamma \varphi \to \theta)$

c'est-à-dire que $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \varphi$ mais $\mathbf{M}, \mathbf{w} \nVdash \theta$. Si $\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \varphi$, c'est qu'il existe $\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m$ tel que $\Phi(val(\gamma))(val(\alpha), \mathbf{v}_m)$ et $\mathbf{M}, (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi$. Toute valuation val^* qui s'accorde avec val sur les nominaux et les variables propositionnelles dans φ et θ sera également telle que

$<\mathbf{S}, val^*>, (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \varphi \ \&\ \mathbf{M}, \mathbf{w} \nVdash \theta$

Choisissons val^* de telle sorte que $val^*(\beta) = \mathbf{v}_m$, ce qui est possible car β n'apparaît ni dans φ ni dans θ. Nous aurons donc

$<\mathbf{S}, val^*>, \mathbf{w} \Vdash @_\alpha \Diamond_\gamma \wedge \beta \wedge @_\beta \varphi$

$<\mathbf{S}, val^*>, \mathbf{w} \nVdash \theta$

contredisant la validité dans $\mathbf{S}$ de $@_\alpha \Diamond_\gamma \wedge \beta \wedge @_\beta \varphi \to \theta$.

Ce qui complète la démonstration. ✠

9.2 Complétude pour $L_{\leq n}$

Les lemmes suivants donnent un aperçu du comportement du système déductif Γ.

Lemme 9.2.1

(a) $E \vdash \varphi$ ssi il existe $\theta_1, \ldots, \theta_r \in E$ tels que $\vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r \rightarrow \varphi$.

(b) Si E est Γ-con et $\nvdash \neg\varphi$, alors $E \cup \{\varphi\}$ est Γ-con.

(c) Si E est Γ-maxcon et $E \vdash \varphi$, alors $\varphi \in E$; en particulier, si $\vdash \varphi$, $\varphi \in E$.

(d) Si E est Γ-maxcon, et si φ, $\varphi \rightarrow \psi \in E$, alors $\psi \in E$.

PREUVE. Ces preuves ne dépendent pas du fait que nous interprétions L dans une structure simple ou générale. ✠

Lemme 9.2.2 (Lemmes de permutation et d'indépendance)

(a) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nominaux de rangs strictement croissants (on n'a pas forcément que $\alpha_m \in \mathrm{Nom}_m$) et soit φ une formule. Si π est une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$, alors

$$\vdash @(\alpha_n)@(\alpha_{n-1})\ldots@(\alpha_0)\varphi \leftrightarrow @(\alpha_{\pi(n)})@(\alpha_{\pi(n-1)})\ldots@(\alpha_{\pi(0)})\varphi$$

(b) Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ les nominaux de la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dont les rangs sont dans $rep_{\leq}(\varphi)$. Nous avons

$$\vdash @(\alpha_n)@(\alpha_{n-1})\ldots@(\alpha_0)\varphi \leftrightarrow @(\beta_k)@(\beta_{k-1})\ldots@(\beta_1)\varphi$$

(c) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nominaux de rangs strictement croissants, et soit φ une formule. Nous avons

$$\vdash @(\alpha_n)\ldots@(\alpha_0)\Diamond_\gamma\varphi \leftrightarrow @(\alpha_m)@(\alpha_{m-1})\ldots@(\alpha_0)\Diamond_\gamma@(\alpha_n)\ldots@(\alpha_{m+1})\varphi$$

où $r(\gamma) = m+1$.

PREUVE. La preuve de (a) ne comporte aucun élément nouveau, celle de (b) repose sur la nouvelle version de ($\text{ind}_@$) et celle de (c) sur la nouvelle version de ($\text{perm}_{@\Box}$). ✠

Encore une fois, nous démontrons d'abord la complétude pour langage $L_{\leq n}$ pour des questions de simplicité d'exposition. Si E un ensemble Γ-maxcon et si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Nom}_n$, rappelons que

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \{\varphi : @(\boldsymbol{\alpha})\varphi \in E\}.$$

Lemme 9.2.3

Soit E un ensemble Γ-maxcon, et soient $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$, $\gamma \in \text{Nom}_{\leq n}$ et $p \in \text{Prop}_{\leq n}$. Nous avons :

(a) $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in E(\boldsymbol{\alpha})$ et $E(\boldsymbol{\alpha})$ est Γ-maxcon

(b) Si $@_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $@(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\gamma)}, \gamma)\varphi \in E$

(c) Si $\gamma \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $E(\boldsymbol{\alpha}) = E(\boldsymbol{\alpha}_{-r(\gamma)}, \gamma)$

(d) Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in E$, alors $E = E(\boldsymbol{\alpha})$

(e) Si $p \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $p \in E(\boldsymbol{\alpha}_{r(p)}, \boldsymbol{\beta}^{r(p)+1})$

PREUVE. La seule véritable différence se trouve dans (e). Soit $p \in \text{Prop}_{\leq n}$ tel que $r(p) = m$ et $@(\boldsymbol{\alpha})p \in E$. D'après les lemmes de permutation et d'indépendance, dorénavant (perm-ind),

$$\begin{aligned} \vdash @(\boldsymbol{\alpha})p &\leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha}_{\text{r}m})p \\ &\leftrightarrow @(\boldsymbol{\beta}^{m+1})@(\boldsymbol{\alpha}_m)p \\ &\leftrightarrow @(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}^{m+1})p \end{aligned}$$

D'où le fait que $p \in E(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}^{m+1})$. ✠

La définition d'un ensemble collé change dans le contexte de la logique Γ. Nous dirons qu'un ensemble Γ-maxcon E est *collé* ssi, pour toute formule φ et pour tous $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \text{Nom}_{m+1}$, si $@_\alpha\Diamond_\gamma\varphi \in E$, alors il existe $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_m$

tel que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\varphi \in E$. Ce changement reflète le fait qu'une relation d'accessibilité dans une structure relationnelle d'ordre supérieur est une relation sur $\mathbf{W}_n$ et non sur W_n.

La relation $\cong_m$ est définie de la même manière sur les nominaux de Nom_m, pour tout m. Si $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_m$, nous définissons la relation '$\cong_{\leq m}$' sur $\mathbf{Nom}_m$ de la manière suivante :

$\boldsymbol{\alpha} \cong_{\leq m} \boldsymbol{\beta}$ ssi $\alpha_k \cong_k \beta_k$, pour tout k tel que $0 \leq k \leq m$

Lemme 9.2.4

Soit E un ensemble Γ-maxcon nommé et collé.

(a) Les relations $\cong_m$ et $\cong_{\leq m}$ sont des relations d'équivalence.

(b) Si $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, \alpha, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$ et $\gamma^* = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, \beta, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$, et si $\alpha \cong_m \beta$, alors $E(\gamma) = E(\gamma^*)$.

(c) Si $\gamma = (\boldsymbol{\alpha}, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$ et $\gamma^* = (\boldsymbol{\beta}, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n)$, et si $\boldsymbol{\alpha} \cong_{\leq m} \boldsymbol{\beta}$, alors $E(\gamma) = E(\gamma^*)$.

PREUVE. Il s'agit de vérifications directes. ✠

Pour tout $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$, nous définissons la relation binaire ρ_γ (ou $\rho(\gamma)$) sur l'ensemble $\mathbf{Nom}_m$ comme suit :

$\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ ssi $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \in E$,

pour tous $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_m$. Montrons que cette relation « préserve » $\cong_m$ et $\cong_{\leq m}$.

Lemme 9.2.5

(a) Si $\gamma, \delta \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ sont tels que $\gamma \cong_{m+1} \delta$, alors $\rho_\gamma = \rho_\delta$.

(b) Si $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, et si $\boldsymbol{\alpha} \cong_{\leq m} \boldsymbol{\alpha}^*$ et $\boldsymbol{\beta} \cong_{\leq m} \boldsymbol{\beta}^*$, alors $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$.

PREUVE. (a) Supposons que $\gamma \cong_{m+1} \delta$, c'est-à-dire que $@_\gamma\delta \in E$. Par ($\mathrm{Nec}_@$), ($\mathrm{ind}_@$) et ($\mathrm{inst}_\Box$), nous savons que

$\vdash @_\alpha @_\gamma \delta \leftrightarrow @_\gamma \delta$

$\vdash @_\alpha @_\gamma (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$

$\vdash @_\alpha @_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta)$

donc $@_\alpha @_\gamma \delta$, $@_\alpha @_\gamma (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$ et $@_\alpha @_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta) \in E$. D'une part,

$\vdash @_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta) \to (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow @_\delta \Diamond_\delta{\wedge}\beta)$, par ($K_@$)

$\to (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta)$, par ($ind_@$)

et donc

$\vdash @_\alpha @_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta) \to @_\alpha (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\delta{\wedge}\beta)$, par ($Nec_@$) et ($K_@$)

$\to (@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow @_\alpha \Diamond_\delta{\wedge}\beta)$, par ($K_@$)

Ainsi, $@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}\beta \in E$ ssi $@_\alpha \Diamond_\delta \beta \in E$. D'autre part,

$\vdash @_\gamma \delta \wedge @_\gamma (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$

$\to @_\gamma (\delta \wedge (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta))$, par ($K_@$) et (dual)

$\to @_\gamma (@_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta))$, par (intro)

$\to @_\delta (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$, par (agree)

$\to (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow @_\delta \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$, par ($K_@$)

$\to (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$, par ($ind_@$)

et donc

$\vdash @_\alpha @_\gamma \delta \wedge @_\alpha @_\gamma (\Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$

$\to @_\alpha (@_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$, par ($Nec_@$) et ($K_@$)

$\to (@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \leftrightarrow @_\alpha \Diamond_\gamma{\wedge}\beta)$, par ($K_@$)

Ainsi, $@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \in E$ ssi $@_\alpha \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \in E$. Par conséquent,

$@_\alpha \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \in E$ ssi $@_\alpha @_\delta \Diamond_{m+1}{\wedge}\beta \in E$ ssi $@_\alpha \Diamond_\delta{\wedge}\beta \in E$

(b) Nous avons d'abord que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ ssi $@_\alpha \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \in E$. Ensuite, $\alpha \cong_{\leq m} \alpha^*$ entraîne que $@_\alpha \alpha^* \in E$. Il est une conséquence de (perm-ind) et de (intro) que

$\vdash @_\alpha \alpha^* \wedge @_\alpha \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \to @_\alpha @_{\alpha^*} \Diamond_\gamma{\wedge}\beta$

donc $@_\alpha @_{\alpha^*} \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \in E$, et $@_{\alpha^*} \Diamond_\gamma{\wedge}\beta \in E$ par (perm-ind) et (agree). Par ailleurs, $@_{\alpha^*} @_\beta {\wedge}\beta^* \in E$ par (agree) (et (perm-ind)) et

$\vdash @_{\alpha^*} @_\beta {\wedge}\beta^* \to @_{\alpha^*} \Box_\gamma @_\beta {\wedge}\beta^*$

par (back) (et (perm-ind)), donc $@_{\alpha^*}\Box_\gamma @_\beta \wedge\beta^* \in E$. Ainsi, $@_{\alpha^*}\Diamond_\gamma \wedge\beta^* \in E$ et $@_{\alpha^*}\Box_\gamma @_\beta \wedge\beta^* \in E$ impliquent que $@_{\alpha^*}\Diamond_\gamma(\wedge\beta \wedge @_\beta\wedge\beta^*) \in E$. Mais

$$\vdash @_{\alpha^*}\Box_\gamma(\wedge\beta \wedge @_\beta\wedge\beta^* \to \wedge\beta^*)$$

par (intro) (et (perm-ind)), et

$$\vdash @_{\alpha^*}\Diamond_\gamma(\wedge\beta \wedge @_\beta\wedge\beta^*) \wedge @_{\alpha^*}\Box_\gamma(\wedge\beta \wedge @_\beta\wedge\beta^* \to \wedge\beta^*) \to @_{\alpha^*}\Diamond_\gamma\wedge\beta^*,$$

donc $@_{\alpha^*}\Diamond_\gamma\beta^* \in E$. Ainsi, $\rho_\gamma(\alpha^*, \beta^*)$. ✠

Lemme 9.2.6

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

(a) $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \in E$

(b) $\forall\varphi(\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$

(c) $\forall\varphi(\varphi \in E(\beta) \Rightarrow \Diamond_\gamma\varphi \in E(\alpha))$

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \in E$ mais qu'il existe une formule φ telle que $\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha)$ et $\varphi \notin E(\beta)$. Donc, $\neg\varphi \in E(\beta)$. Si $\neg\varphi \in E(\beta)$, c'est que $@_\beta\neg\varphi \in E$. Par (bridge), nous obtenons donc que $@_\alpha\Diamond_\gamma\neg\varphi \in E$, c'est-à-dire $@_\alpha\neg\Box_\gamma\varphi \in E$ et donc $\neg\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha)$. Contradiction.

(b) $\Rightarrow$ (a). Supposons que $\forall\varphi(\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$ mais que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \notin E$. Nous avons donc $\neg@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \in E$, ce qui revient à $@_\alpha\Box_\gamma\neg\wedge\beta \in E$. Nous avons alors que $\Box_\gamma\neg\wedge\beta \in E(\alpha)$ et donc que $\neg\wedge\beta \in E(\beta)$, ce qui entraîne qu'un des β_k, $0 \leq k \leq m$, est tel que $\beta_k \notin E(\beta)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Supposons que $\forall\varphi(\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$ et soit $\psi \in E(\beta)$. Nous voulons montrer que $\Diamond_\gamma\psi \in E(\alpha)$. Supposons le contraire : $\Diamond_\gamma\psi \notin E(\alpha)$, et donc $\neg\Diamond_\gamma\psi \in E(\alpha)$, ce qui revient à $\Box_\gamma\neg\psi \in E(\alpha)$. Par hypothèse, ceci entraîne que $\neg\psi \in E(\beta)$. Contradiction.

(c) $\Rightarrow$ (b). La preuve est analogue au cas précédent. ✠

La partie (b) du lemme 9.2.5 montre que la relation que définit ρ_γ, pour chaque $\gamma \in \mathrm{Nom}_m$, induit une relation binaire sur $\mathbf{N}_m$ (que la relation ne dépend que la classe d'équivalence de chaque nominal de Nom_m). La partie (a) de ce lemme montre que la suite $\Lambda = (\Lambda_n)_{n\geq 0}$ de fonctions $\Lambda_{n+1} : N_{n+1} \rightarrow \wp(\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_n)$, où $\Lambda_{n+1}(|\gamma|)$ est la relation induite par ρ_γ sur $\mathbf{N}_n$, est bien définie (ne dépend pas de la classe de γ). Nous définissons la *SROS canonique basée sur E* comme la structure $\mathbf{S}_E = < \mathbf{N}, \Lambda >$.

Il faut maintenant définir un modèle basé sur $\mathbf{S}_E$. Nous commençons par définir un modèle pour $L_{\leq n}$ basé sur une restriction de $\mathbf{S}_E$. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $\varepsilon \in E$, et soit $e = |\varepsilon| \in N_{n+1}$. Nous définissons le *modèle canonique de rang n basé sur E* comme le modèle de rang n

$$\mathbf{M}_E(e) = < \mathbf{N}_n, \Lambda(e), val >,$$

où *val* est la valuation de $L_{\leq n}$ telle que

$$val(p) = \{|\alpha| \in \mathbf{N}_{r(p)} : @_\alpha p \in E\},$$

pour tout $p \in \mathrm{Prop}_{\leq n}$, et

$$val(\alpha) = |\alpha|,$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{Nom}_{\leq n}$.

Nous avons :

Proposition 9.2.7 (Lemme de Lindenbaum)
Soit F un ensemble Γ-con de L. Il existe une extension E de F dans le langage L^* qui est Γ-maxcon nommée et collée.

PREUVE. Nous répétons la même procédure qu'au chapitre précédent pour faire en sorte que F soit nommé. L'ensemble F^+ résultant est Γ-con.

Il faut maintenant progressivement ajouter des formules à F^+ pour en faire un ensemble Γ-maxcon collé. Pour ce faire, nous utiliserons une énumération (φ_l) de toutes les formules de L^*. Posons $E_0 = F^+$. Pour $l > 0$, si (i) $E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$ est Γ-inconsistant, posons $E_{l+1} = E_l$. Si (ii) $E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$ est Γ-consistant et si φ_{l+1} n'est pas de la forme $@_\alpha\Diamond_\gamma\psi$, nous posons $E_{l+1} = E_l \cup \{\varphi_{l+1}\}$. Enfin, si (iii) $\varphi_{l+1} = @_\alpha\Diamond_\gamma\psi$, nous prolongeons E_l de la manière suivante : soit $\beta \in$ $\mathbf{Nom}_m{}^*$ qui n'apparaît pas dans E_l ou φ_{l+1} (il existe toujours un tel β car $\mathrm{Nom}_m{}^*\backslash\{\alpha_m{}^+\}$ est infini et n'apparaît pas dans F^+, et une formule est ajoutée au plus à chaque étape de ce processus), nous posons

$$E_{l+1} = E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\psi\}.$$

Montrons que, pour tout l, si E_l est Γ-consistant, alors E_{l+1} est Γ-consistant. Supposons le contraire. E_l est consistant mais E_{l+1} est inconsistant. Puisque E_{l+1} est distinct de E_l, un des deux cas (ii) ou (iii) s'applique. Le cas (ii) peut être éliminé d'emblée par définition. Reste le dernier. Or,

$$E_{l+1} \vdash \bot \text{ ssi } E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\psi\} \vdash \bot$$

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ les formules de E_l entrant dans cette preuve d'une contradiction et soit θ la conjonction des θ_j, nous avons alors que

$$\begin{aligned} E_{l+1} \vdash \bot &\Rightarrow \vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \wedge (@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\psi) \wedge \theta \to \bot \\ &\text{ssi} \vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \wedge (@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\psi) \to \neg\theta \\ &\text{ssi} \vdash (@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\psi) \to \neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi) \end{aligned}$$

Le nominal β n'apparaît pas dans $\neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi)$, car il n'apparaît ni dans E_l ni dans $\{\varphi_{l+1}\}$. Par la règle (Paste), il en résulte que

$$\begin{aligned} E_{l+1} \vdash \bot &\Rightarrow \vdash \neg(\theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi) \\ &\text{ssi } \theta \wedge @_\alpha\Diamond_\gamma\psi \vdash \bot \\ &\Rightarrow E_l \cup \{@_\alpha\Diamond_\gamma\psi\} \vdash \bot \end{aligned}$$

Mais ceci contredit la consistance de E_l avec $@_\alpha\Diamond_\gamma\psi$.

Posons maintenant $E = \cup E_l$. La preuve que E est consistant est la même qu'au chapitre précédent. Par ailleurs, L'ensemble E est nommé parce que c'est une extension de F^+, et il est collé par construction. ✠

Proposition 9.2.8 (Lemme d'existence)

Soit E un ensemble Γ-maxcon nommé et collé, $\alpha \in \mathbf{Nom}_n$, $\varphi \in \text{Form}_{\leq n}$ et $\gamma \in \text{Nom}_{m+1}$. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\alpha)$, alors il existe $\beta_m \in \mathbf{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$ et $\varphi \in E(\beta_m, \alpha^{m+1})$.

PREUVE. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\alpha)$, alors $@(\alpha)\Diamond_\gamma\varphi \in E$. Par le lemme (perm-ind), nous avons

$$\vdash @(\alpha)\Diamond_\gamma\varphi \leftrightarrow @(\alpha_m)\Diamond_\gamma @(\alpha^{m+1})\varphi,$$

donc $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma @(\alpha^{m+1})\varphi \in E$. Étant donné que E est collé, il existe $\beta_m \in \mathbf{Nom}_m$ tel que

$$@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta_m \wedge @(\beta_m)@(\alpha^{m+1})\varphi \in E$$

Donc $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\wedge\beta_m$, $@(\beta_m)@(\alpha^{m+1})\varphi \in E$, par maximalité. Mais $@(\alpha_m)\Diamond_\gamma\beta_m \in E$ signifie que $\rho_\gamma(\alpha_m, \beta_m)$, et $@(\beta_m)@(\alpha^{m+1})\varphi \in E$ entraîne, par le lemme (perm-ind), que $@(\beta_m, \alpha^{m+1})\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\beta_m, \alpha^{m+1})$. ✠

Proposition 9.2.9 (Lemme de vérité)

Soit E un ensemble Γ-maxcon nommé et collé, et soit $\mathbf{M}_E(e)$ le modèle canonique de rang n basé sur E. Pour toute formule $\varphi \in \text{Form}_{\leq n}$, nous avons

$$\mathbf{M}_E(e), \mathbf{w} \Vdash \varphi \text{ ssi } \varphi \in E(\alpha)$$

où $\alpha \in \mathbf{Nom}_n$ est tel que $|\alpha_m| = w_m$, pour $0 \leq m \leq n$.

PREUVE. Par induction sur le nombre de connecteurs dans φ.

<u>Étape de base</u>. Si φ est une variable propositionnelle $p \in \text{Prop}_m$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \Vdash p &\text{ ssi } \mathbf{w}_m \in val(p) \\ &\text{ ssi } |\alpha_m| \in val(p) \\ &\text{ ssi } @(\alpha_m)p \in E \end{aligned}$$

Puisque $\vdash @(\alpha_m)p \leftrightarrow @(\alpha_n)\ldots@(\alpha_{m+1})@(\alpha_m)p \leftrightarrow @(\alpha)p$, nous avons

$$\mathbf{w} \Vdash p \text{ ssi } \mathbf{w} \in val(p) \text{ ssi } @(\alpha)p \in E \text{ ssi } p \in E(\alpha)$$

Si φ est un nominal, la preuve est identique au cas simple.

Étape inductive. (i) Si le connecteur principal dans φ est un connecteur booléen, la démonstration est conséquence directe de l'hypothèse d'induction (et de la maximalité de $E(\boldsymbol{\alpha})$).

(ii) Supposons que φ est de la forme $\Box_\gamma\psi$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \Vdash \Box_\gamma\psi &\text{ ssi } (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \psi, \text{ pour tout } \mathbf{v}_m \in \mathbf{N}_m \text{ tel que } \Lambda_{m+1}(|\gamma|)(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_m)\\
&\text{ ssi } (|\boldsymbol{\beta}_m|, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \psi, \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_m \text{ tel que } \rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)\\
&\text{ ssi } \psi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1}), \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_m \text{ tel que } \rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)
\end{aligned}$$

Si l'équivalence

(*) $\quad \Box_\gamma\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}) \text{ ssi } \forall\boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m [\, \rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m) \Rightarrow \psi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1}) \,]$

est vraie, nous aurons terminé. Nous avons, en contraposant et effectuant des transformations élémentaires, que (*) est équivalent à

(**) $\quad \Diamond_\gamma\neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}) \text{ ssi } \exists\boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m [\, \rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m) \;\&\; \neg\psi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1}) \,]$

La direction « $\Rightarrow$ » correspond au lemme d'existence appliqué à '$\Diamond_\gamma\neg\psi$'. Et la direction « $\Leftarrow$ » résulte de l'argument suivant :

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m) \;\&\; \neg\psi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1}) &\text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha}_m)\Diamond_\gamma\wedge\boldsymbol{\beta}_m \;\&\; @(\boldsymbol{\beta}_m)@(\boldsymbol{\alpha}^{m+1})\neg\psi \in E\\
&\text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha}_m)\Diamond_\gamma@(\boldsymbol{\alpha}^{m+1})\neg\psi \in E, \text{ par (bridge)}\\
&\text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha}_m)@(\boldsymbol{\alpha}^{m+1})\Diamond_\gamma\neg\psi \in E, \text{ par (perm-ind)}\\
&\text{ ssi } @(\boldsymbol{\alpha})\Diamond_\gamma\neg\psi \in E\\
&\text{ ssi } \Diamond_\gamma\neg\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

(iii) Supposons que φ est de la forme $\Box_{m+1}\psi$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \Vdash \Box_{m+1}\psi &\text{ ssi } \mathbf{v} \Vdash \psi, \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{N}_m \text{ tel que } \mathbf{w}[m{+}1]\mathbf{v}\\
&\text{ ssi } (\mathbf{v}_m, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \psi, \text{ pour tout } \mathbf{v}_m \in \mathbf{N}_m \text{ tel que } \Lambda_{m+1}(w_{m+1})(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_m)\\
&\text{ ssi } (|\boldsymbol{\beta}_m|, \mathbf{w}^{m+1}) \Vdash \psi, \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m \text{ tel que } \rho(\alpha_{m+1})(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)\\
&\text{ ssi } \psi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1}), \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m \text{ tel que } \rho(\alpha_{m+1})(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)\\
&\text{ ssi } \Box(\alpha_{m+1})\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

(iii) Supposons que φ est de la forme $\Box_{m+1}\psi$. Deux cas se présentent : (a) le cas $m = n$ et (b) le cas $m < n$.

(a) Soit $\varepsilon \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $|\varepsilon| = e$. Par définition et par l'hypothèse d'induction, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_n \Vdash \Box_{n+1}\psi \text{ ssi } & \mathbf{v}_n \Vdash \psi, \text{ pour tout } \mathbf{v}_n \in \mathbf{N}_n \text{ tel que } \Lambda_{n+1}(w_{n+1})(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \\
\text{ssi } & (\mathbf{w}_n, |\beta|) \Vdash \psi, \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n \text{ tel que } \rho(\varepsilon)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\
\text{ssi } & \psi \in E(\boldsymbol{\beta}), \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n \text{ tel que } \rho(\varepsilon)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\
\text{ssi } & \Box_\varepsilon\psi \in E(\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

Nous savons que

$$\vdash @_\varepsilon(\Box_{n+1}\psi \leftrightarrow \Box_\varepsilon\psi),$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
\vdash\ & @_\varepsilon @_\alpha(\Box_{n+1}\psi \leftrightarrow \Box_\varepsilon\psi) \\
& \to (@_\varepsilon @_\alpha \Box_{n+1}\psi \leftrightarrow @_\varepsilon @_\alpha \Box_\varepsilon\psi)
\end{aligned}$$

donc $@_\varepsilon @_\alpha \Box_\varepsilon\psi \in E$ ssi $@_\varepsilon @_\alpha \Box_{n+1}\psi \in E$. Mais, par (intro),

$$\vdash \varepsilon \wedge @_\varepsilon\varphi \to \varphi \;\&\; \vdash \varepsilon \wedge \varphi \to @_\varepsilon\varphi,$$

donc $@_\alpha \Box_\varepsilon\psi \in E$ ssi $@_\alpha \Box_{n+1}\psi \in E$, c'est-à-dire

$$\Box_\varepsilon\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}) \text{ ssi } \Box_{n+1}\psi \in E(\boldsymbol{\alpha}),$$

ce qui complète la preuve de ce cas.

(b) Toutes les idées nécessaires à la démonstration de ce cas se trouvent dans la preuve du cas (a) ci-dessus.

(iv) Si φ est de la forme $@_\beta\psi$, où $\beta \in \mathrm{Nom}_m$, la preuve n'est pas différente du cas simple du chapitre précédent.

Ce qui complète la preuve. ✠

Ce qui nous donne enfin :

Théorème 9.2.10 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ-con de formules de $\mathrm{Form}_{\leq n}$, alors F est satisfaisable.

PREUVE. D'après le lemme de Lindenbaum, il existe un ensemble E de formules de L^* qui contient F et qui est Γ-maxcon nommé et collé. Soit $\mathbf{M}_E(e)$ le modèle canonique de rang n basé sur E. Puisque E est nommé, il existe $\boldsymbol{\alpha} \in$ $\mathbf{Nom}_n$ tel que $E = E(\boldsymbol{\alpha})$. Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{N}_n$ tel que $\mathbf{w} = |\boldsymbol{\alpha}|$. $\mathbf{M}_E(e)$ satisfait F au point $\mathbf{w}$. En effet, supposons que $\varphi \in F \subset E$. Il s'ensuit que $@(\boldsymbol{\alpha})\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et donc $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ par le lemme de vérité. ✠

9.3 Complétude pour L

Nous rappelons la définition de l'ensemble

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \{\varphi \in \text{Form} : @(\boldsymbol{\alpha}_n)\varphi \in E, \text{ où } n = r(\varphi)\},$$

où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$. Cet ensemble a sensiblement les mêmes propriétés qu'avant :

Lemme 9.3.1

Soit E un ensemble Γ-maxcon, et soient $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}$, $\beta \in \text{Nom}_m$ et $p \in \text{Prop}_m$. Nous avons :

(a) Si $r(\varphi) = n$, alors $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$ ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n)$

(b) Pour tout m, $\alpha_m \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et $E(\boldsymbol{\alpha})$ est Γ-maxcon

(c) Si $\beta \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $E(\boldsymbol{\alpha}) = E(\boldsymbol{\alpha}_{-m}, \beta)$

(d) Si $\alpha_m \in E$, pour tout m, alors $E = E(\boldsymbol{\alpha})$

(e) Si $p \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors $p \in E(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}^{m+1})$

Le *modèle (général) canonique basé sur* E est le modèle $\mathbf{M}_E = < \mathbf{S}_E, val >$, où

$$val(p) = \{|\boldsymbol{\alpha}| \in \mathbf{N}_{r(p)} : @_{\boldsymbol{\alpha}}p \in E\},$$

pour tout $p \in$ Prop, et

$$val(\alpha) = |\alpha|,$$

pour tout $\alpha \in$ Nom.

Proposition 9.3.2 (Lemme d'existence)
Soit E un ensemble Γ-maxcon nommé et collé, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$, $\varphi \in \mathrm{Form}$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Si $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, alors il existe $\boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)$ et $\varphi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1})$.

PREUVE. Soit $n = r(\Diamond_\gamma\varphi)$. Nous avons que $\Diamond_\gamma\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n}$ et que $\Diamond_\gamma\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n)$ par la partie (a) du lemme précédent. Par le lemme d'existence (version bornée), il existe $\boldsymbol{\beta}_m \in \mathbf{Nom}_m$ tel que $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m)$ et $\varphi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, (\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n))$. Par le lemme précédent, partie (a), ceci entraîne que $\varphi \in E(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}^{m+1})$. ✠

Proposition 9.3.3 (Lemme de vérité)
Soit E un ensemble Γ-maxcon nommé et collé, et soit $\mathbf{M}_E$ le modèle canonique basé sur E. Pour toute formule $\varphi \in \mathrm{Form}$, nous avons

$$\mathbf{M}_E, \mathbf{w} \Vdash \varphi \text{ ssi } \varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$$

où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ est tel que $|\alpha_m| = w_m$, pour $m \geq 0$.

PREUVE. Soit $n = r(\Diamond_\gamma\varphi) + 1$ et soit $\varepsilon_{n+1} \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ tel que $e = |\varepsilon_{n+1}|$ ($\varepsilon_{n+1} \in E$). Nous avons que $\varphi \in \mathrm{Form}_{\leq n-1}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_E, \mathbf{w} \Vdash \varphi \text{ ssi } & [\mathbf{M}_E]_{\leq n-1}(w_n), \mathbf{w}_{n-1} \Vdash \varphi \\
\text{ssi } & [\mathbf{M}_E]_{\leq n}(w_{n+1}), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi, \text{ car la } n{+}1\text{-ième coordonnée n'affecte pas } \varphi \\
\text{ssi } & [\mathbf{M}_E]_{\leq n}(e), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi, \text{ pour la même raison} \\
\text{ssi } & \mathbf{M}_E(e), \mathbf{w}_n \Vdash \varphi, \text{ par définition} \\
\text{ssi } & \varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}_n), \text{ par le lemme de vérité pour } L_{\leq n}. \\
\text{ssi } & \varphi \in E(\boldsymbol{\alpha}), \text{ par 9.3.1 (a)}
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. ✠

Ce qui nous donne enfin :

Théorème 9.3.4 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ-con de formules de Form, alors F est satisfaisable.

PREUVE. D'après le lemme de Lindenbaum, il existe un ensemble E de formules de L^* qui contient F et qui est Γ-maxcon nommé et collé. Soit $\mathbf{M}_E$ le modèle basé sur E. Puisque E est nommé, il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ tel que $E = E(\boldsymbol{\alpha})$. Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{w} = |\boldsymbol{\alpha}|$. $\mathbf{M}_E$ satisfait F au point $\mathbf{w}$. En effet, supposons que $\varphi \in F \subset E$ et soit $n = r(\varphi)$. Il s'ensuit que $@(\boldsymbol{\alpha}_n)\varphi \in E$, c'est-à-dire $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$, et donc $\mathbf{w} \Vdash \varphi$, par le lemme de vérité. ✠

Il nous faut enfin montrer les axiomes sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

Proposition 9.3.5
Les axiomes du groupe II sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

PREUVE. Supposons que (D_n) est un axiome de Γ. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$, nous voulons montrer qu'il existe $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$ tel que $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Par (D_n), nous avons que $\vdash \Box_\gamma\top \rightarrow \Diamond_\gamma\top$ et donc $\vdash \Diamond_\gamma\top$, car $\vdash \Box_\gamma\top$. Enfin, par $(\mathrm{Nec}_@)$, nous avons $\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\top$ et donc $@_\alpha\Diamond_\gamma\top \in E$. Puisque E est collé, il existe $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$ tel que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta\top \in E$, et donc $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Supposons que (T_n) est un axiome de Γ. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_n$, nous voulons montrer que $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. Puisque Γ contient (T_n), $\vdash \wedge\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \Diamond_\gamma\wedge\boldsymbol{\alpha}$ et donc $\vdash @_\alpha\wedge\boldsymbol{\alpha} \rightarrow @_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\boldsymbol{\alpha}$, par $(\mathrm{Nec}_@)$, $(\mathrm{K}_@)$ et (perm-ind). Ainsi, $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\boldsymbol{\alpha} \in E$ par (ref) et (perm-ind).

Supposons que (B_n) est un axiome de Γ. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$, nous voulons montrer que $\rho_\gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ entraîne $\rho_\gamma(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. Supposons que

$@_\alpha\Diamond_\gamma\beta \in E$. Puisque ($B_n$) est un axiome, nous avons $\vdash @_\alpha\wedge\alpha \to @_\alpha\Box_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\alpha$ et donc $\Box_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\alpha \in E(\alpha)$, par (ref). Nous savons que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ est équivalent à

$$\forall\varphi(\Box_\gamma\varphi \in E(\alpha) \Rightarrow \varphi \in E(\beta))$$

donc $\Diamond_\gamma\wedge\alpha \in E(\beta)$, c'est-à-dire $@_\beta\Diamond_\gamma\wedge\alpha \in E$.

Supposons que (4_n) est un axiome de Γ. Soient $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et α, β, $\nu \in$ $\mathbf{Nom}_n$, nous devons montrer que ρ_γ est transitive, c'est-à-dire que $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$ et $\rho_\gamma(\beta, \nu)$ entraînent que $\rho_\gamma(\alpha, \nu)$. Par hypothèse, nous avons donc que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta$ $\in E$ et $@_\beta\Diamond_\gamma\wedge\nu \in E$. Par (bridge),

$$\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge @_\beta\Diamond_\gamma\wedge\nu \to @_\alpha\Diamond_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\nu$$

et par (4_n), ($\mathrm{Nec}_@$), ($\mathrm{K}_@$) et (perm-ind),

$$\vdash @_\alpha\Diamond_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\nu \to @_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\nu.$$

Ainsi, $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\nu \in E$.

Enfin, supposons que (5_n) est un axiome de Γ. Soient $\gamma \in \mathbf{Nom}_{n+1}$ et α, β, $\nu \in \mathbf{Nom}_n$, nous devons montrer que ρ_γ est euclidienne, c'est-à-dire que $\rho_\gamma(\alpha,$ $\beta)$ et $\rho_\gamma(\alpha, \nu)$ entraînent que $\rho_\gamma(\beta, \nu)$. Par hypothèse, nous avons que $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\beta$ $\in E$ et $@_\alpha\Diamond_\gamma\wedge\nu \in E$, et donc $@_\alpha(\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge \Diamond_\gamma\wedge\nu) \in E$. Par ($5_m$),

$$\vdash \Diamond_\gamma\wedge\nu \to \Box_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\nu$$

et donc $@_\alpha(\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge \Box_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\nu) \in E$. Or,

$$\vdash @_\alpha(\Diamond_\gamma\wedge\beta \wedge \Box_\gamma\Diamond_\gamma\wedge\nu) \to @_\alpha(\Diamond_\gamma(\wedge\beta \wedge \Diamond_\gamma\wedge\nu)$$

$\to @_\alpha(\Diamond_\gamma @_\beta\Diamond_\gamma\wedge\nu)$, par (intro) et (perm-ind) notamment

$\to @_\alpha @_\beta\Diamond_\gamma\wedge\nu$, par (back) et (perm-ind)

$\to @_\beta\Diamond_\gamma\wedge\nu$, par agree

Ce qui complète la démonstration. ✠

9.4 Logique de L_λ (sur des structures simples)

Nous présentons maintenant une axiomatisation de la logique du langage L_λ interprété dans des structures simples.

Dans un premier temps, nous modifions les axiomes et règles de Γ_s de la manière suivante : nous remplaçons toute occurrence de '$\Box_n$' par une occurrence de '$\Box_x$' où $x \in Var_{n+1}$, et nous remplaçons l'axiome ($\text{inst}_\Box$) par l'axiome

(inst_λ) $\quad @_\beta(\lambda x.\varphi \leftrightarrow \varphi[x/\beta])$

où $\beta \in \text{Nom}_{n+1}$ et $x \in \text{Var}_{n+1}$ et où '$\varphi[x/\beta]$' est la formule obtenue de 'φ' en substituant '$\Box_x$' pour '$\Box_\beta$' (uniformément). Dans un deuxième temps, nous ajoutons les axiomes et la règle inférentielle spécifiques à l'opération d'abstraction '$\lambda x.$' suivants : soient α, $\beta \in$ Nom et x, $y \in$ Var tels que $x \neq y$, nous posons

($\lambda\neg$) $\quad \lambda x.\neg\varphi \leftrightarrow \neg\lambda x.\varphi$

($\lambda\wedge$) $\quad \lambda x.(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \lambda x.\varphi \wedge \lambda x.\psi$

($\lambda @$) $\quad \lambda x.@_\alpha\varphi \leftrightarrow @_\alpha\lambda x.\varphi$, si $r(x) \neq r(\alpha)$

($\lambda\Box$) $\quad \lambda x.\Box_\beta\varphi \leftrightarrow \Box_\beta\lambda x.\varphi$, si $r(\beta) \neq r(x) + 1$

$\quad \lambda x.\Box_y\varphi \leftrightarrow \Box_y\lambda x.\varphi$, si $r(y) \neq r(x) + 1$

(ind_λ) $\quad \lambda x.\varphi \leftrightarrow \varphi$, si $x \notin fv(\varphi)$

(Abs) $\quad$ Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \lambda x.\varphi$

Dans l'axiome (ind_λ) et la règle (Abs), puisque '$\lambda x.\varphi$' doit être une formule, il est sous-entendu que $x \notin bv(\varphi)$.

Nous appellerons ce système logique $\Gamma_{\lambda s}$. La définition d'une dérivation reste la même à la différence près que nous rajoutons la règle (Abs) à la liste de règles dans ($\vdash$2).

Proposition 9.4.1

Les axiomes et les règles de $\Gamma_{\lambda s}$ sont valides.

PREUVE. La validité de (inst_λ) et de ($\lambda\neg$) à ($\lambda\Box$) a déjà été prouvée. En ce qui concerne (ind_λ), nous savons que, si $x \in \text{Var}_m$ n'est pas libre dans φ,

$\mathbf{w}, \text{s} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{w}, (\text{s}_{-x}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_m$

Par conséquent,

$\mathbf{w}$, s $\Vdash \lambda x.\varphi$ ssi $\mathbf{w}$, $(\mathrm{s}_{-x}, w_m) \Vdash \varphi$

ssi $(\mathrm{s}_{-x}, w) \Vdash \varphi$, pour tout $w \in W_m$

ssi s $\Vdash \varphi$

Enfin, pour (Abs), soit φ tel que

$\mathbf{S} \Vdash \varphi$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{w}$, s $\nVdash \lambda x.\varphi$

où $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, \mathit{val} >$, $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et s $\in$ Att($\mathbf{S}$). Mais

$\mathbf{M}$, $\mathbf{w}$, s $\nVdash \lambda x.\varphi$ ssi $\mathbf{M}$, $\mathbf{w}$, s $\nVdash \lambda x.\varphi$

ssi $\mathbf{M}$, $\mathbf{w}$, $(\mathrm{s}_{-x}, w_m) \nVdash \varphi$

Ce qui contredit la validité de φ dans $\mathbf{S}$. ✠

Les définitions de $E(\boldsymbol{\alpha})$ et du modèle canonique restent les mêmes. La preuve du lemme de Lindenbaum et celle du lemme d'existence sont identiques, ne dépendant pas de 'λ'.

Proposition 9.4.2 (Lemme de vérité)

Soit E un ensemble $\Gamma_{\lambda s}$-maxcon nommé et collé, et soit $\mathbf{M}_E = < \mathbf{N}, \Lambda, \mathit{val} >$ le modèle canonique basé sur E. Pour toute formule $\varphi \in \mathrm{CForm}_\lambda$, nous avons

$\mathbf{M}_E$, $\mathbf{w} \Vdash \varphi$ ssi $\varphi \in E(\boldsymbol{\alpha})$

où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}$ est tel que $|\alpha_m| = w_m$, pour $m \geq 0$.

Preuve. La seule étape de la preuve qu'il faut ajouter est celle concernant l'opérateur λ. Supposons que φ est de la forme $\lambda x.\psi$, où ψ a au plus une variable libre $x \in \mathrm{Var}_m$. Puisque

$\mathbf{w} \Vdash \lambda x.\psi$ ssi $\mathbf{w}$, s $\Vdash \lambda x.\psi$

ssi $\mathbf{w}$, s $\Vdash @(\alpha_m)\lambda x.\psi$

ssi $\mathbf{w}$, s $\Vdash @(\alpha_m)\psi[x/\alpha_m]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash @(\alpha_m)\psi[x/\alpha_m]$

ssi $\mathbf{w} \Vdash \psi[x/\alpha_m]$

car $\lambda x.\psi$, $\psi[x/\alpha_m] \in \mathrm{CForm}_\lambda$ et $|\alpha_m| = w_m$. Or, $\psi[x/\alpha_m]$ a moins de connecteurs que φ, donc par l'hypothèse d'induction,

$$\mathbf{w} \Vdash \psi[x/\alpha_m] \text{ ssi } \psi[x/\alpha_m] \in E(\boldsymbol{\alpha})$$
$$\text{ssi } @(\boldsymbol{\alpha}_n)\psi[x/\alpha_m] \in E$$

où n est le rang de $\psi[x/\alpha_m]$. Mais une conséquence directe de (inst_λ) est que

$$\vdash @(\boldsymbol{\alpha}_n)(\lambda x.\psi \leftrightarrow \psi[x/\alpha_m])$$

donc, par ($\mathrm{K}_@$), $@(\boldsymbol{\alpha}_n)\psi[x/\alpha_m] \in E$ ssi $@(\boldsymbol{\alpha}_n)\lambda x.\psi \in E$. D'où l'équivalence recherchée. ✠

Théorème 9.4.3 (Complétude)

Si F est un ensemble $\Gamma_{\lambda s}$-con de formules de CForm, F est satisfaisable.

9.5 Logique de L_λ (sur des structures générales)

Nous présentons maintenant une axiomatisation de la logique du langage L_λ interprété dans des structures générales.

D'une part, nous modifions les axiomes et règles de Γ : nous remplaçons toute occurrence de '$\Box_{n+1}$' par une occurrence de '$\Box_x$' où $x \in Var_{n+1}$, et nous remplaçons l'axiome ($\mathrm{inst}_\Box$) par l'axiome

(inst_λ) $\quad @_\beta(\lambda x.\varphi \leftrightarrow \varphi[x/\beta])$

où $\beta \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ et $x \in \mathrm{Var}_m$ et où '$\varphi[x/\beta]$' est la formule obtenue de 'φ' en substituant '$\Box_x$' pour '$\Box_\beta$'. D'autre part, nous ajoutons les axiomes et la règle inférentielle spécifiques à l'opération d'abstraction '$\lambda x.$' suivants : soient α, $\beta \in \mathrm{Nom}$ et x, $y \in \mathrm{Var}$ tels que $x \neq y$, nous posons

($\lambda\neg$) $\quad \lambda x.\neg\varphi \leftrightarrow \neg\lambda x.\varphi$

($\lambda\wedge$) $\quad \lambda x.(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \lambda x.\varphi \wedge \lambda x.\psi$

($\lambda @$) $\quad \lambda x.@_\alpha\varphi \leftrightarrow @_\alpha\lambda x.\varphi$, si $r(x) \neq r(\alpha)$

($\lambda\Box$) $\quad \lambda x.\Box_\beta\varphi \leftrightarrow \Box_\beta\lambda x.\varphi$, si $r(\beta) \leq r(x)$

	$\lambda x.\Box_y\varphi \leftrightarrow \Box_y\lambda x.\varphi$, si $r(y) \leq r(x)$
(ind$_\lambda$)	$\lambda x.\varphi \leftrightarrow \varphi$, si $x \notin fv(\varphi)$
(Abs)	Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \lambda x.\varphi$

Dans l'axiome (ind$_\lambda$) et la règle (Abs), puisque '$\lambda x.\varphi$' doit être une formule, il est sous-entendu que $x \notin bv(\varphi)$.

Nous appellerons ce système logique Γ_λ. La définition d'une dérivation reste la même à la différence près que nous rajoutons la règle (Abs) à la liste de règles dans ($\vdash$2).

Nous avons :

Proposition 9.5.1

Les axiomes et les règles de Γ_λ sont valides.

Les définitions de $E(\alpha)$ et du modèle canonique restent les mêmes. Les preuves des trois lemmes cruciaux (Lindenbaum, existence et vérité) se démontrent aisément à partir de ce que nous savons déjà.

Théorème 9.5.2 (Complétude)

Si F est un ensemble Γ_λ-con de formules de CForm, alors F est satisfaisable.

9.6 La logique de L_T (sur les structures simples)

Pour adapter les résultats de complétude au langage L_T il faudra d'une part traduire les axiomes du groupe II à IV dans le langage L_T, mais il faudra aussi ajouter quelques axiomes au groupe III, certains faisant partie de la logique de base et d'autres étant des ajouts potentiels. Ensuite, il faudra montrer qu'un modèle canonique pour la logique de base est un modèle simple et qu'un modèle canonique pour la logique de base + Ax est un modèle ayant la propriété que définit Ax.

Pour l'essentiel, les axiomes et les règles de la logique de L_T (sur les structures simples) sont les axiomes et les règles de Γ_s dans lesquels on a remplacé uniformément '$\Box_{n+1}$' par 'H_{n+1}' ou 'G_{n+1}' et '$\Box_\gamma$' par 'H_γ' ou 'G_γ', avec $\gamma \in \mathrm{Nom}_{n+1}$ (ce qui signifie qu'on remplace '$\Diamond_{n+1}$' par 'P_{n+1}' ou 'F_{n+1}' et '$\Diamond_\gamma$' par 'P_γ' ou 'F_γ'). Donc, l'axiome (K_n) dans L_T devient

(K$_m$) $H(\varphi \to \psi) \to (H\varphi \to H\psi)$
$G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi)$

où 'H' = 'H_{n+1}' ou 'H_γ' et 'G' = 'G_{n+1}' ou 'G_γ'; l'axiome (back) devient

(back) $P@_\alpha\varphi \to @_\alpha\varphi$, où $P = P_{n+1}$ ou P_γ, et $r(\alpha) = n$, $r(\gamma) = n+1$
$F@_\alpha\varphi \to @_\alpha\varphi$, où $F = F_{n+1}$ ou F_γ, et $r(\alpha) = n$, $r(\gamma) = n+1$

et la règle (Nec$_\Box$) devient

(Nec$_\Box$) Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash H_{n+1}\varphi$ et $\vdash G_{n+1}\varphi$

Les axiomes propres à la logique de base de L_T sont (K$_n$) et

(CV$_m$) $\varphi \to GP\varphi$
$\varphi \to HF\varphi$

En plus des axiomes facultatifs (D$_n$), (T$_n$), (B$_n$), (*4*$_n$) et (*5*$_n$), nous avons les axiomes

(aref$_n$) $\alpha \to \neg P\alpha$, où $r(\alpha) = n$
(tot$_n$) $P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$, où $r(\alpha) = n$
(sbif$_n$) $PF\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$ & $FP\varphi \to P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$
(beg$_n$) $\underline{P}H\bot$
(end$_n$) $\underline{F}G\bot$
(dense$_n$) $P\varphi \to PP\varphi$ & $F\varphi \to FF\varphi$

La logique de base de L_T (ou toute extension de celle-ci) est dénotée par Γ_{Ts}.

Proposition 9.6.1

Les axiomes et les règles de Γ_{Ts} sont valides.

PREUVE. Nous avons déjà démontré que les axiomes et les règles de base étaient valides dans les structures bidirectionnelles simples, et que les axiomes spécifiques étaient valides dans les structures de type correspondant. ✠

Les démonstrations des lemmes de Lindenbaum, d'existence et de vérité sont presqu'identiques, de même que la démonstration du théorème complétude. Ainsi,

Théorème 9.6.2 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ_{Ts}-con de formules de Form_T, alors F est satisfaisable.

Il nous reste à démontrer que les axiomes de Γ_{Ts} sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

Proposition 9.6.3

Si E est un ensemble Γ_{Ts}-maxcon nommé et collé, si $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ et si $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$, alors $@_\alpha P_\gamma \beta \in E$ ssi $@_\beta F_\gamma \alpha \in E$

PREUVE. Supposons que $@_\alpha P_\gamma \beta \in E$ mais que $@_\beta F_\gamma \alpha \notin E$. Il s'ensuit que $\neg @_\beta F_\gamma \alpha \in E$ et, puisque $\vdash \neg @_\beta F_\gamma \alpha \leftrightarrow @_\beta \neg F_\gamma \alpha \leftrightarrow @_\beta G_\gamma \neg \alpha$, que $@_\beta G_\gamma \neg \alpha \in E$. Du fait que $@_\alpha P_\gamma \beta \wedge @_\beta G_\gamma \neg \alpha \in E$, nous en déduisons par (bridge) que $@_\alpha P_\gamma G_\gamma \neg \alpha \in E$, et donc $\neg @_\alpha H_\gamma F_\gamma \alpha \in E$. Par ailleurs, par l'axiome (CV), ($\mathrm{Nec}_@$) et ($\mathrm{K}_@$), nous avons que $\vdash @_\alpha \alpha \to @_\alpha H_\gamma F_\gamma \alpha$ et donc $@_\alpha H_\gamma F_\gamma \alpha \in E$, ce qui est contradictoire. L'autre direction se démontre en utilisant l'autre partie de (CV). ✠

Proposition 9.6.4

Les axiomes de Γ_{Ts} sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

PREUVE. (aref). Soient $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$, nous voulons montrer que $@_\alpha P_\gamma \alpha \notin E$. Or, nous savons que $\vdash @_\alpha \alpha$ par (ref) et $\vdash @_\alpha \alpha \rightarrow @_\alpha \neg P_\gamma \alpha$ par (aref_m) et ($\mathrm{Nec}_@$), donc $@_\alpha \neg P_\gamma \alpha \in E$, c'est-à-dire $@_\alpha P_\gamma \alpha \notin E$.

(tot). Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ Nous avons que $@_\alpha P_\gamma \beta \vee @_\alpha \beta \vee @_\alpha F \beta \in E$ et donc $\rho_\gamma(\beta, \alpha)$ ou $\alpha \cong_m \beta$ ou $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$.

(sbif). Soient $\alpha, \beta, \nu \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ tels que $@_\nu F_\gamma \alpha$ et $@_\nu F_\gamma \beta \in E$. Il faut montrer que $@_\alpha P_\gamma \beta$, $@_\alpha \beta$ ou $@_\beta P_\gamma \alpha \in E$. Supposons le contraire : $@_\alpha P_\gamma \beta$, $@_\alpha \beta$ et $@_\beta P_\gamma \alpha \notin E$. Nous avons donc que $\neg @_\alpha P_\gamma \beta$, $\neg @_\alpha \beta$ et $\neg @_\beta P_\gamma \alpha \in E$. Par (dual) et le fait que $@_\beta P_\gamma \alpha \in E$ ssi $@_\alpha F_\gamma \beta \in E$, nous avons que $@_\alpha \neg P_\gamma \beta \wedge @_\alpha \neg \beta \wedge @_\alpha \neg F_\gamma \beta \in E$, ce qui revient à $@_\alpha \neg (P_\gamma \beta \vee \beta \vee F_\gamma \beta) \in E$. Si nous montrons que $@_\alpha P_\gamma F_\gamma \beta \in E$, nous aurons terminé (car cela entraînera que $@_\alpha (P_\gamma \beta \vee \beta \vee F_\gamma \beta) \in E$ par (sbif)). D'un côté, puisque $@_\nu F_\gamma \alpha \in E$, nous avons que $@_\alpha P_\gamma \nu \in E$. Puisque $@_\nu F_\gamma \beta \in E$, nous avons $@_\alpha P_\gamma F_\gamma \beta \in E$ par (bridge). D'où le résultat. La preuve de l'autre direction est similaire (et utilise l'autre moitié de (sbif)).

(beg). Soient $\alpha \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Nous avons que $\vdash @_\alpha \underline{P}_\gamma H_\gamma \bot$, par (beg) et ($\mathrm{Nec}_@$), donc $@_\alpha \underline{P}_\gamma H_\gamma \bot \in E$. Puisque E est collé, il existe $\beta \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $@_\alpha \underline{P}_\gamma \beta \in E$ et $@_\beta H_\gamma \bot \in E$. Mais

$$
\begin{aligned}
\vdash @_\beta H_\gamma \bot &\rightarrow @_\beta \neg P_\gamma \top \\
&\rightarrow @_\beta \neg P_\gamma \nu, \text{ pour tout } \nu \in \mathrm{Nom}_m
\end{aligned}
$$

Donc, $@_\beta P_\gamma \nu \notin E$, pour tout $\nu \in \mathrm{Nom}_m$.

(end). Preuve similaire à la précédente.

(dense). Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ tels que $@_\alpha P_\gamma \beta \in E$. Il est une conséquence de (dense) et de ($\mathrm{Nec}_@$) que $@_\alpha P_\gamma P_\gamma \beta \in E$. Puisque E est collé, il existe $\nu \in \mathrm{Nom}_m$ tel que $@_\alpha P_\gamma \nu$ et $@_\nu P_\gamma \beta \in E$. Même preuve si $@_\alpha F_\gamma \beta \in E$. ✠

9.7 La logique de L_T (sur les structures générales)

La logique Γ_T du langage L_T sur les structures cumulatives est à la logique Γ_{Ts} (du langage L_{Ts} sur les structures simples) ce que la logique Γ est à la logique Γ_s. Pour adapter les résultats de complétude il faut remplacer (back), (bridge), (perm$_{@\Box}$), (ind$_@$), (aref), (tot) et (Paste) dans Γ_{Ts} par les versions suivantes. Soient $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Nom}_n$ et soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}$. Nous posons :

(back)	$P@_\alpha\varphi \to @_\alpha\varphi$,
	$F@_\alpha\varphi \to @_\alpha\varphi$
(bridge)	$@_\alpha P{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta\varphi \to @_\alpha P\varphi$
	$@_\alpha F{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta\varphi \to @_\alpha F\varphi$
(perm$_{@\Box}$)	$@_\alpha P_{n+1}\varphi \leftrightarrow P_{n+1}@_\alpha\varphi$ & $@_\alpha F_{n+1}\varphi \leftrightarrow F_{n+1}@_\alpha\varphi$, si $r(\alpha) > n+1$
	$@_\alpha P_\beta\varphi \leftrightarrow P_\beta@_\alpha\varphi$ & $@_\alpha F_\beta\varphi \leftrightarrow F_\beta@_\alpha\varphi$, si $r(\alpha) \geq r(\beta)$
(ind$_@$)	$@_\alpha\varphi \leftrightarrow \varphi$, si $r(\alpha) \notin rep(\varphi)$
(aref)	$\wedge\boldsymbol{\alpha} \to \neg P{\wedge}\boldsymbol{\alpha}$
(tot)	$P{\wedge}\boldsymbol{\alpha} \vee \wedge\boldsymbol{\alpha} \vee F{\wedge}\boldsymbol{\alpha}$

où $(P, F) = (P_{n+1}, F_{n+1})$ ou (P_γ, F_γ), et $r(\gamma) = n+1$. Et nous reformulons (Paste) comme suit : si $\boldsymbol{\beta}$ n'apparaît ni dans φ ni dans θ

(Paste)	Si $\vdash @_\alpha P_\gamma{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta\varphi \to \theta$, alors $\vdash @_\alpha P_\gamma\varphi \to \theta$
	Si $\vdash @_\alpha F_\gamma{\wedge}\boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta\varphi \to \theta$, alors $\vdash @_\alpha F_\gamma\varphi \to \theta$

Cette logique porte le nom de Γ_T. Nous avons que

Proposition 9.7.1

Les axiomes et les règles de Γ_T sont valides.

PREUVE. Nous avons déjà démontré que les axiomes et les règles de base étaient valides dans les structures générales bidirectionnelles, et que les axiomes spécifiques étaient valides dans les structures de type correspondant. ✠

Les démonstrations des lemmes de Lindenbaum, d'existence et de vérité sont presqu'identiques, de même que la démonstration du théorème complétude. Ainsi,

Théorème 9.7.2 (Complétude)
Si F est un ensemble Γ_T-con de formules de Form_T, il existe un modèle qui satisfait F.

Il nous reste à démontrer que les axiomes de Γ_T sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

Proposition 9.7.3
Si E est un ensemble Γ_T-maxcon nommé et collé, si $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ et si $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in$ $\mathbf{Nom}_m$, alors $@_\alpha P_\gamma \wedge \boldsymbol{\beta} \in E$ ssi $@_\beta F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$

PREUVE. Supposons que $@_\alpha P_\gamma \wedge \boldsymbol{\beta} \in E$ mais que $@_\beta F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \notin E$. Il s'ensuit que $\neg @_\beta F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$ et, puisque $\vdash \neg @_\beta F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow @_\beta \neg F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow @_\beta G_\gamma \neg \wedge \boldsymbol{\alpha}$, que $@_\beta G_\gamma \neg \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$. Du fait que $@_\alpha P_\gamma \wedge \boldsymbol{\beta} \wedge @_\beta G_\gamma \neg \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$, nous en déduisons par (bridge) que $@_\alpha P_\gamma G_\gamma \neg \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$, et donc $\neg @_\alpha H_\gamma F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$. Par ailleurs, par l'axiome (CV), ($\mathrm{Nec}_@$) et ($\mathrm{K}_@$), nous avons que $\vdash @_\alpha \wedge \boldsymbol{\alpha} \to @_\alpha H_\gamma F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha}$ et donc $@_\alpha H_\gamma F_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \in E$, ce qui est contradictoire. L'autre direction se démontre en utilisant l'autre partie de (CV). ✠

Proposition 9.7.4
Les axiomes de Γ_T sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent.

PREUVE. (aref). Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$, nous voulons montrer que $@_\alpha P_\gamma \wedge \boldsymbol{\alpha} \notin E$. Or, nous savons que $\vdash @_\alpha \wedge \boldsymbol{\alpha}$, par (ref) et (perm-ind), et que $\vdash$

$@_\alpha\wedge\alpha \to @_\alpha\neg P_\gamma\wedge\alpha$, par (arcf), ($\mathrm{Nec}_@$) et (perm-ind), donc $@_\alpha\neg P_\gamma\wedge\alpha \in E$, c'est-à-dire $@_\alpha P_\gamma\wedge\alpha \notin E$.

(tot). Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Nom}_m$. Nous avons que $@_\alpha(P\wedge\beta \vee \wedge\beta \vee F\wedge\beta) \in E$, donc $@_\alpha P\wedge\beta$ ou $@_\alpha\wedge\beta$ ou $@_\alpha F\wedge\beta \in E$, c'est-à-dire $\rho_\gamma(\beta, \alpha)$ ou $@_\alpha\wedge\beta$ ou $\rho_\gamma(\alpha, \beta)$.

(sbif). Soient $\alpha, \beta, \nu \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ tels que $@_\nu F_\gamma\wedge\alpha$ et $@_\nu F_\gamma\wedge\beta \in E$. Il faut montrer que $@_\alpha P_\gamma\wedge\beta$, $@_\alpha\wedge\beta$ ou $@_\beta P_\gamma\wedge\alpha \in E$. Supposons le contraire : $@_\alpha P_\gamma\wedge\beta$, $@_\alpha\wedge\beta$ et $@_\beta P_\gamma\wedge\alpha \notin E$. Nous avons donc que $\neg@_\alpha P_\gamma\wedge\beta$, $\neg@_\alpha\wedge\beta$ et $\neg@_\beta P_\gamma\wedge\alpha \in E$. Par (dual) et le fait que $@_\beta P_\gamma\wedge\alpha \in E$ ssi $@_\alpha F_\gamma\wedge\beta \in E$, nous avons que $@_\alpha\neg P_\gamma\wedge\beta \wedge @_\alpha\neg\wedge\beta \wedge @_\alpha\neg F_\gamma\wedge\beta \in E$, ce qui revient à $@_\alpha\neg(P_\gamma\wedge\beta \vee \wedge\beta \vee F_\gamma\wedge\beta) \in E$. Si nous montrons que $@_\alpha P_\gamma F_\gamma\wedge\beta \in E$, nous aurons terminé (car cela entraînera que $@_\alpha(P_\gamma\wedge\beta \vee \wedge\beta \vee F_\gamma\wedge\beta) \in E$ par (sbif)). D'un côté, puisque $@_\nu F_\gamma\wedge\alpha \in E$, nous avons que $@_\alpha P_\gamma\wedge\nu \in E$. Puisque $@_\nu F_\gamma\wedge\beta \in E$, nous avons $@_\alpha P_\gamma F_\gamma\wedge\beta \in E$ par (bridge). D'où le résultat. La preuve de l'autre direction est similaire (et utilise l'autre moitié de (sbif)).

(beg). Soient $\alpha \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$. Nous avons que $\vdash @_\alpha \underline{P}_\gamma H_\gamma\bot$, par (beg) et ($\mathrm{Nec}_@$), donc $@_\alpha \underline{P}_\gamma H_\gamma\bot \in E$. Puisque E est collé, il existe $\beta \in \mathbf{Nom}_m$ tel que $@_\alpha \underline{P}_\gamma\wedge\beta \in E$ et $@_\beta H_\gamma\bot \in E$. Mais

$$\begin{aligned}\vdash @_\beta H_\gamma\bot &\to @_\beta\neg P_\gamma\top\\ &\to @_\beta\neg P_\gamma\wedge\nu, \text{ pour tout } \nu \in \mathbf{Nom}_m\end{aligned}$$

Donc, $@_\beta P_\gamma\wedge\nu \notin E$, pour tout $\nu \in \mathbf{Nom}_m$.

(end). Preuve similaire à la précédente.

(dense). Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Nom}_m$ et $\gamma \in \mathrm{Nom}_{m+1}$ tels que $@_\alpha P_\gamma\wedge\beta \in E$. Il est une conséquence de (dense) et de ($\mathrm{Nec}_@$) que $@_\alpha P_\gamma P_\gamma\wedge\beta \in E$. Puisque E est collé, il existe $\nu \in \mathbf{Nom}_m$ tel que $@_\alpha P_\gamma\wedge\nu$ et $@_\nu P_\gamma\wedge\beta \in E$. Même preuve si $@_\alpha F_\gamma\wedge\beta \in E$. ✠

Il est aussi possible d'étendre au langage L_T et aux sémantiques bidirectionnelles la notion de portée modale. Les preuves des résultats correspondants sont immédiates.

Chapitre 10
Le temps du possible

> The future is something which everyone reaches at the rate of 60 minutes an hour, whatever he does, whoever he is.
>
> *C. S. Lewis*

Le thème principale derrière le formalisme développé aux chapitres précédents, nous le rappelons, est que la modalité se comprend parfois non seulement comme une quantification sur des mondes possibles mais aussi comme une quantification sur d'autres entités « possibles », notamment des relations d'accessibilité. Nous voulons illustrer dans ce chapitre comment cette idée est à l'œuvre dans un certain formalisme mis sur pied par Prior, et développé subséquemment par Burgess (1978), Kamp (1979), et Thomason (1984, 2002). Prior propose ce formalisme dans le cadre d'une analyse sur le temps et le déterminisme (Prior 1967 : Ch. VII) qui met en évidence l'interaction entre les modalités de possibilité et de temporalité. Nous verrons comment cela nous mène naturellement aux structures relationnelles d'ordre supérieur et nous présenterons une manière de traduire les analyses de Burgess et de Thomason en termes de SROS.

10.1 La possibilité temporalisée

L'idée que la possibilité est intrinsèquement liée au temps est ancrée dans notre conception courante de la temporalité. Nous concevons le passé comme inaltérable et le futur comme indéterminé et porteur de possibilités, l'existence de la liberté ou du libre choix étant conditionnelle à l'existence non pas d'un seul futur mais de plusieurs. La possibilité – d'une chose, d'un événement ou d'une proposition – dépend toujours du temps, car ce qui est possible à un instant ne l'est plus forcément à l'instant suivant.

Malgré le lien serré que la conception courante entretient entre temporalité et possibilité, la conception formelle de la possibilité, au moment où Prior écrit, est curieusement dénuée de toute référence au temps. La conception formelle en question est celle due à Kripke (1963), qui exprime la possibilité en termes de mondes possibles intemporelles et qui remonte vraisemblablement à Leibniz : un énoncé 'p' est possible si et seulement si il existe un « monde possible » où 'p' est vrai (et il est nécessaire si et seulement si il est vraie à tous les mondes possibles). La conception kripkéenne/leibnizienne de la possibilité est clairement intemporelle en ce sens qu'elle s'applique exclusivement à des énoncés intemporels, un énoncé temporel étant un énoncé dont la valeur de vérité ne dépend pas du moment de son évaluation. Malheureusement (c'est-à-dire malheureusement pour la conception kripkéenne), la plupart des énoncés *sont* temporels soit parce qu'une expression indexicale temporelle y figure soit parce qu'un temps est implicite à son énonciation/évaluation. Par exemple, les énoncés

(1.1) Obama gère une crise

(1.2) Obama est en réunion aujourd'hui

sont tous les deux temporels : le deuxième pour des raisons évidentes (parce que l'expression « aujourd'hui » est temporellement indexicale), et le premier, par notre façon de comprendre la nature d'une action comme « gérer une crise » (une crise étant un événement que l'on gère pendant un temps déterminé précisé par le contexte d'énonciation). Par contre, l'énoncé

(1.3) Sarah Palin est la Présidente des USA en date du 22 avril 2010 est intemporel (et heureusement faux), non pas parce qu'aucune référence au temps n'y est faite, mais parce que sa valeur de vérité ne dépend pas du moment d'énonciation.

L'approche de Kripke peut être modifiée pour l'interprétation des énoncés temporels, mais elle rencontre des difficultés importantes lorsque nous cherchons à l'adapter pour interpréter des énoncés qui sont à la fois temporels *et* aléthiques. Voyons pourquoi. Si nous nous limitons seulement aux énoncés temporels, nous pouvons concevoir les mondes possibles comme des mondes-instants et la relation d'accessibilité comme une relation qui ordonne temporellement ces mondes-instants. De cette manière, des expressions modales temporelles comme « demain », « dans le passé », « prochainement », etc. pourront être comprises *à la kripkéenne* sans problèmes. Cependant, les énoncés suivants :

(1.5) John McCain aurait pu être le Président des USA, ou

(1.6) Les Républicains remporteront peut-être les élections de mi-mandat,

dans lesquels figurent des expressions modales temporelles et aléthiques, ne pourront pas être interprétées de cette manière. Si nous interprétons ces expressions sur un ensemble commun de mondes possibles, nous nous retrouvons avec des « mondes » qui représentent à la fois des histoires complètes et à la fois des tranches (ou instances) d'histoires complètes, deux catégories d'entités complètement disjointes (une tranche temporelle d'histoire étant toujours une partie stricte d'une histoire). Par exemple, si nous rendons les modalités explicites dans (1.5) et si nous les interprétons de manière usuelle (par une quantification sur des mondes), nous obtenons

(1.7) À un certain moment du passé m^-, il existe un monde possible w où John McCain est le Président des USA à un moment futur m^+

Le problème vient donc du fait que m^- et m^+ soient conceptuellement des instants faisant partie de w, des entités dépendant de w, et non pas des mondes à part entière. Le monde w ne précise pas seulement les événements avoisinant l'instant où John McCain remporte l'élection, mais tous les événements présents, passés ou futurs; m^- et m^+ sont des moments passé et futur *relativement* à w. Par conséquent, pour être à la hauteur de la tâche, une sémantique relationnelle exprimée en termes de quantification sur des mondes devra, d'une part, distinguer le monde-instant du monde et, d'autre part, traduire la dépendance entre deux. C'est ce que la sémantique proposée par Prior permet, et que la sémantique kripkéenne ne permet pas.

10.2 L'inaltérabilité du passé et le déterminisme

Prior présente cette nouvelle sémantique comme étant l'aboutissement de l'analyse d'une vieille énigme philosophique concernant l'inaltérabilité du passé et le déterminisme. On a depuis longtemps observé que l'inaltérabilité du passé, le principe selon lequel

(HN) $\varphi \to \Box\varphi$, si φ est un énoncé portant sur le passé (ou le présent),

qui à première vue est difficilement contestable, pouvait entraîner – sous certaines hypothèses – le déterminisme, c'est-à-dire le principe :

(Dét) $\varphi \to \Box\varphi$, pour tout énoncé φ.

Les arguments démontrant cette implication se ressemblent dans les grandes lignes, et le premier que Prior expose et décortique est celui de Jonathan Edwards (1764).

Edwards rencontre cette question dans le cadre d'une discussion sur la compatibilité du libre arbitre avec la prescience divine. Quatre prémisses peuvent être extirpées de son argument et elles ne concernent que quelques propriétés élémentaires de la prescience divine et de la nécessité :

(I) Premièrement, si un énoncé concernant le passé, ou le présent immédiat, est vrai (resp. faux) alors il est nécessairement vrai (resp. faux), autrement dit (HN).

(II) Deuxièmement, Dieu connaît la valeur de vérité de tout énoncé – présent, passé ou futur – et ce, depuis toujours; en particulier, étant donné un énoncé concernant le futur, il sait si cet énoncé est vrai ou faux, actuellement comme dans le passé.

(III) Troisièmement, et ce principe est de nature purement « modale », si une implication est nécessairement vraie, et si l'antécédent de cette implication est nécessairement vrai, alors le conséquent de cette implication est nécessairement vrai.

(IV) Quatrièmement et dernièrement, il est nécessairement le cas que la connaissance implique la vérité.

Ces prémisses sont mises à profit de la manière suivante. Soit p un énoncé temporel. La prescience divine entraîne que

(2.1) Si p dans le futur, alors Dieu sait que p dans le futur; et si Dieu sait que (non-(p dans le futur)) alors Dieu sait que non-(p dans le futur).

Mais la proposition (2.1) concerne le présent, car elle concerne la connaissance actuelle de Dieu (voire sa connaissance passée aussi), donc par la première prémisse, nous avons

(2.2) Si Dieu sait que (p dans le futur), alors nécessairement-(Dieu sait que (p dans le futur)); et si non-(p dans le futur), alors nécessairement-(Dieu sait que non-(p dans le futur))

Par ailleurs, les troisième et quatrième prémisses impliquent :

(2.3) Si nécessairement-(Dieu sait que p dans le futur), alors nécessairement-(p dans le futur); et si nécessairement-(Dieu sait que non-(p dans le futur)), alors nécessairement-(non-(p dans le futur))

En combinant (2.1), (2.2) et (2.3), nous arrivons à

(2.4) Si p dans le futur, alors nécessairement-(p dans le futur); et si non-(p dans le futur), alors nécessairement-non-(p dans le futur)

Puisque le tiers exclu s'applique à 'p dans le futur', nous avons

(2.5) nécessairement-(p dans le futur) ou nécessairement-non-(p dans le futur)

L'énoncé p étant arbitraire, l'argument démontre que tout énoncé (temporel) est nécessairement vrai ou nécessairement faux.

Abandonner l'hypothèse d'un Dieu omniscient ne nous permettra pas d'éviter la conclusion de l'argument; il se trouve en effet que la prescience divine n'y figure pas de manière essentielle. En s'inspirant de Cicéron (cf. *De fato*) et de Pierre de Rivo (Baudry 1950), Prior remplace les deuxième et quatrième prémisses par les prémisses séculières suivantes : d'une part, la valeur de vérité de tout énoncé, concernant le présent, le passé ou le futur, est présentement déterminée; et d'autre part, il est nécessairement vrai que si l'énoncé 'φ' est vrai, alors φ. L'argument prend alors la forme suivante : si p est un énoncé temporel quelconque, la deuxième prémisse nous assure que

(3.1) L'énoncé 'p dans le futur' est présentement vrai ou faux

Puisque l'énoncé 'p dans le futur' est vrai ou faux présentement, nous avons par la première prémisse que

(3.2) Si 'p dans le futur' est vrai (resp. faux), alors nécessairement-('p dans le futur' est vrai (resp. faux))

Nous déduisons de (3.2), de la troisième prémisse et de nouvelle quatrième prémisse que

(3.3) Si 'p dans le futur' est vrai, alors nécessairement-(p dans le futur); et si 'p dans le futur' est faux, alors nécessairement-non-(p dans le futur)

Si la loi du tiers-exclu est valide pour le prédicat de vérité, nous obtenons :

(3.4) Nécessairement-(p dans le futur) ou nécessairement-non-(p dans le futur)

Et donc le futur est déterminé.

La conclusion des arguments précédents n'est pas la faute d'une erreur de déduction, ils se traduisent aisément dans un langage formel. Si '$\Box$' est la modalité de nécessité métaphysique, et si 'K' est la modalité épistémique représentant la connaissance divine, alors les prémisses du premier argument prennent la forme :

(P1) $\varphi \to \Box\varphi$, où φ est une proposition concernant le présent ou le passé

(P2) $\varphi \to K\varphi$, pour toute proposition φ

(P3) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, pour toutes propositions φ et ψ

(P4) $\Box(K\varphi \to \varphi)$

Par ailleurs, si 'Tr' signifie « est vrai », alors les prémisses modifiées du deuxième argument sont :

(P2') $\varphi \to \mathrm{Tr}(\varphi)$

(P4') $\Box(\mathrm{Tr}(\varphi) \to \varphi)$

L'argument d'Edwards se traduit par

1.	Fp	hypothèse	
2.	KFp	par (P2)	(1)
3.	$\Box KFp$	par (P1)	(1)
4.	$\Box K\varphi \to \Box\varphi$	par (P3) et (P4)	(1)
5.	$\Box Fp$	par 3 et 4	(1)
6.	$Fp \to \Box Fp$	par 1-5	

Quant à l'argument de de Rivo, il se traduit par :

1.	Fp	hypothèse	
2.	$\mathrm{Tr}(Fp)$	par (P2')	(1)
3.	$\Box\mathrm{Tr}(Fp)$	par (P1)	(1)
4.	$\Box\mathrm{Tr}(\varphi) \to \Box\varphi$	par (P3) et (P4')	(1)
5.	$\Box Fp$	par 3 et 4	(1)
6.	$Fp \to \Box Fp$	par 1-5	

Dans les deux cas, nous arrivons à la même conclusion, notamment que le futur est déterminé.

Prior transcrit formellement un argument légèrement différent de ceux dont il discute et que nous venons d'exposer plus haut, un argument qui évite soigneusement la connaissance providentielle ou le prédicat de vérité. Le langage qu'il choisit pour cette tâche est doté des modalités '$P(n)$' et '$F(n)$', pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui ont les significations informelles suivantes :

$P(n)\varphi$ ssi φ il y a n unités de temps

$F(n)\varphi$ ssi φ dans n unités de temps

Si l'unité de temps est un jour, '$P(1)\varphi$' et '$F(1)\varphi$' signifient donc respectivement « demain, φ » et « hier, φ ». Au lieu de représenter (HN) par la prémisse (P1)[58], comme nous l'avons fait plus haut, il choisit plutôt

(P1') $P(m)\varphi \rightarrow \Box P(m)\varphi$, pour tout $m \geq 0$ et pour tout φ

Dans (P1'), toute instance est permise (et pas seulement des instances de formules portant sur le passé). Son argument repose par ailleurs sur la troisième prémisse (P3), adaptée ce langage bien sûr, et sur les prémisses suivantes :

(P5) $F(n)\varphi \rightarrow P(m)F(m{+}n)\varphi$

(P6) $\Box(P(m)F(m{+}n)\varphi \rightarrow F(n)\varphi)$

qui traduisent simplement le comportement des intervalles de temps (par exemple, le fait que le surlendemain d'hier est le demain d'aujourd'hui). Voici donc la façon dont Prior expose formellement la réduction de (HN) à (Dét) :

1.	$P(m)F(m+n)\varphi \rightarrow \Box P(m)F(m+n)\varphi$	par (P1')
2.	$F(n)\varphi \rightarrow P(m)F(m+n)\varphi$	par (P5)
3.	$F(n)\varphi \rightarrow \Box P(m)F(m+n)\varphi$	par 1 et 2
4.	$\Box(P(m)F(m+n)\varphi \rightarrow F(n)\varphi)$	par (P6)
5.	$\Box P(m)F(m+n)\varphi \rightarrow \Box F(n)\varphi$	par 4 et (P3)
6.	$F(n)\varphi \rightarrow \Box F(n)\varphi$	par 3 et 5

L'idée derrière cette dérivation est simple : si φ dans n jours, alors présentement φ dans n jours, et il y a m jours, φ dans $m + n$ jours (remplacer 'φ' par un énoncé comme « Il pleuvra » ou « La fin du monde arrivera » par exemple), toute vérité du futur devient ainsi *ipso facto* une vérité du passé.

[58] En remplaçant les modalités 'P' et 'F' par '$P(n)$' et '$F(n)$' bien sûr.

Une stratégie pour sortir de cette impasse, qui s'inspire de considérations de Guillaume d'Ockham, est décrite par Prior comme suit :

> the principle that what has been cannot now not have been only applies to past-tense propositions which are not equivalent to future-tense ones (in the way in which 'It was the case yesterday that it would be the case two days later that I-am-smoking is equivalent to 'It will be the case tomorrow that I am smoking') (Prior 1967 : 121)

(HN), ou (P1), ne doit être appliqué ni à des formules concernant le futur ni à des formules concernant le passé qui sont équivalentes à des formules concernant le futur, notamment la formule '$P(m)F(m+n)\varphi$' de l'argument de Prior qui concerne à première vue le passé mais qui est équivalente à la formule '$F(n)\varphi$' concernant le futur. Prior choisira de formuler cette contrainte comme suit : (HN), ou (P1), est vrai pour toute formule φ dans laquelle ne figure aucune expression de la forme '$F(n)$'.

C'est une chose de poser une contrainte et c'en est une autre de la rendre intelligible. Il est vrai que la contrainte n'est pas sans attrait intuitif. Les substitutions déterminantes dans (HN) pour obtenir (Dét) avaient toutes un air illégitime, en ce sens qu'elles contournaient subtilement la contrainte déjà présente sur (HN). Mais il y a une difficulté concernant la possibilité et la temporalité à laquelle cette contrainte ne semble pas répondre, et c'est de rendre compatibles, d'une part, l'intuition de linéarité temporelle que présupposent les opérations « demain », « hier », « dans le futur », etc. (et que présupposent *a fortiori* les modalités '$P(m)$' et '$F(m)$') et, d'autre part, l'intuition de bifurcation temporelle (vers le futur) que présuppose l'opération de possibilité dans une conception non-déterministe du futur. La linéarité du temps garantit une valeur de vérité déterminée à un énoncé comme « La fusée décollera dans dix secondes », sans quoi il faudrait préciser par rapport à quel futur la fusée décollera dans dix secondes; tandis que la bifurcation (potentielle) du cours du temps rend intelligible un énoncé comme « La fusée pourrait ne pas décoller à la fin du décompte (dans dix secondes) », sans quoi le décollage de la fusée dans dix secondes serait inéluctable. Cette difficulté est au cœur de la dérivation du paradoxe plus haut : la linéarité nécessaire à l'inaltérabilité du passé se transposait au futur entraînant le déterminisme. Un compromis devra être trouvé afin que puissent s'épanouir ces deux intuitions et ce compromis est le suivant : l'évaluation d'une formule se fait par rapport à un temps *et* une histoire, c'est-à-dire un parcours linéaire d'instants possibles. Les opérations « demain », « hier », « dans le futur », etc. seront évaluées à un instant *et* par rapport à une histoire donnée, et les opérations « possiblement » et « nécessairement » seront évaluées en quantifiant sur les histoires « accessibles » depuis l'instant en question.

Ce que nous décrivons dans les grandes lignes est l'idée derrière la sémantique de Prior basée sur la notion de *modèle ockhamiste* :

> we may define an ockhamist model as a line without a beginning or end which may break up into branches as it moves from left to right (i.e. from past to future), though not the other way; so that from any point on it there is only one route to the left (into the past) but possibly a number of alternative routes to the right (into the future). (Prior 1967 : 126)

La structure sous-jacente à un modèle ockhamiste proposé par Prior est un arbre : la bifurcation à droite représente les possibilités à venir, et la non-bifurcation à gauche représente le fait que le passé est inaltérable. Plus précisément, un *arbre* $\mathbf{T}$ est défini comme un ensemble T muni d'une relation '$\prec$' antiréflexive et transitive telle que, pour tout $t \in T$, sa restriction aux prédécesseurs de t est une relation linéaire, c'est-à-dire que l'ensemble

$$\{x \in T : x \preccurlyeq t\}$$

est ordonné linéairement par '$\prec$' pour tout $t \in T$ (la relation $\preccurlyeq$ est définie comme : $x \preccurlyeq y$ ssi $x \prec y$ ou $x = y$). Dans un arbre, il n'y a qu'un seul chemin pour aller de droite à gauche mais (en principe) une multitude de chemins pour aller de gauche à droite. Chaque chemin de gauche à droite représente un déroulement possible du temps, ce qui nous amène à définir plus précisément une *histoire* de **T** comme un chemin de longueur maximale, l'ensemble de toutes les histoires de **T** étant dénoté par $H(\mathbf{T})$. Si h et $g \in H(\mathbf{T})$ sont des histoires, nous écrirons $h \approx_t g$ quand elles partagent le même passé jusqu'à t, c'est-à-dire $h \approx_t g$ ssi

$$\{s \in h : s \preccurlyeq t\} = \{s \in g : s \preccurlyeq t\}$$

Cette relation nous aidera à interpréter la modalité métaphysique.

Prior émet un certain nombre de prescriptions (1967 : 126) concernant l'interprétation des formules temporelles et aléthiques dans ces modèles. Tout d'abord, un modèle **M** basé sur un arbre **T** est la donnée d'une paire $< \mathbf{T}, val >$ où val : Prop $\rightarrow \wp(T)$ est une fonction qui attribue un sous-ensemble de T à chaque variable propositionnelle, $val(p)$ étant l'ensemble des points où p est vraie. Ensuite, l'évaluation d'une formule φ se fait à un point $t \in T$ et par rapport à une histoire $h \in H$; en particulier, une modalité temporelle ne peut être comprise que dans le contexte d'une histoire. Enfin, les clauses sémantiques pour les modalités sont données par :

$(t, h) \Vdash P\varphi$ ssi il existe $s \in h$ tel que $s \prec t$ et $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash F\varphi$ ssi il existe $s \in h$ tel que $t \prec s$ et $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash \Box\varphi$ ssi $(t, g) \Vdash \varphi$, pour toute histoire $g \in H$ telle que $h \approx_t g$

Autrement dit : '$P\varphi$' est vrai au point (t, h) si et seulement si φ à un instant antérieur à t selon h; '$F\varphi$' est vrai au point (t, h) si et seulement si φ à un instant ultérieur à t selon h; et '$\Box\varphi$' est vrai au point (t, h) si et seulement si φ à l'instant t selon toute histoire g accessible depuis h.

Si φ est une formule dans laquelle ne figure pas la modalité 'F', nous nous attendons à ce que (HN) soit vrai de φ. Vérifions-le pour une variable propositionnelle 'p' :

$$(t, h) \Vdash \Box Pp \text{ ssi } \forall g \in H[\, h \approx_t g \Rightarrow (t, g) \Vdash Pp\,]$$

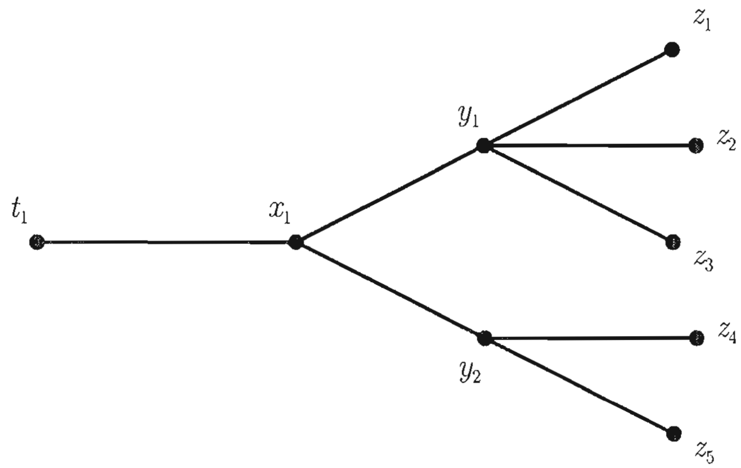


Figure 10.2.1 – Un modèle ockhamiste

$$\text{ssi } \forall g \in H [\, h \approx_t g \Rightarrow \exists s \in g [\, s \prec t \;\&\; (s, g) \Vdash p \,]$$
$$\text{ssi } \forall g \in H [\, h \approx_t g \Rightarrow \exists s \in g [\, s \prec t \;\&\; s \in val(p) \,]$$

Si $(t, h) \Vdash Pp$, c'est qu'il existe $s \in h$ tel que $s \prec t$ et $s \in val(p)$. D'autre part, pour toute histoire g équivalente à h jusqu'à t, $s \in h$ ssi $s \in g$. Ainsi,

$$(t, h) \Vdash Pp$$

entraîne que $(t, h) \Vdash \Box Pp$.

La figure 10.2.1 représente un arbre $\mathbf{T}$. Les quadruplets

$$h_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$$
$$h_2 = (t_1, x_1, y_1, z_2)$$
$$h_3 = (t_1, x_1, y_1, z_3)$$
$$h_4 = (t_1, x_1, y_2, z_4)$$
$$h_5 = (t_1, x_1, y_2, z_5)$$

sont les branches de longueur maximale de $\mathbf{T}$, et constituent donc les histoires de $\mathbf{T}$. Les histoires h_1 et h_2 ont des passés identiques jusqu'à y_1, mais h_1 et h_4 ont seulement des passés équivalents jusqu'à x_1. La valeur de vérité dépend à la fois d'un instant et d'une histoire. Par exemple, si la proposition p est vraie seulement au point z_2, alors par les clauses sémantiques décrites ci-dessus

$(t_1, h_2) \Vdash Fp$,

car il existe un instant ultérieur à t_1 dans l'histoire h_2 où la proposition p est vraie. Par contre,

$(w_1, h_1) \nVdash Fp$,

car le seul point où p est vraie n'est pas un instant ultérieur à t_1 selon l'histoire h_1. Supposons que la proposition q est vraie seulement aux points z_1, z_2 et z_3. Nous avons alors, encore par les clauses, que

$(y_1, h_1) \Vdash \Box Fq$

car pour toute histoire h dont le passé est identique à celui de h_1 jusqu'à y_1, $(y_1, h) \Vdash Fq$. Toutefois,

$(x_1, h_1) \nVdash \Box Fq$

car q n'est vraie dans aucun instant après x_1 selon h_5, et h_5 a un passé identique à celui de h_1 jusqu'à x_1.

10.3 Les structures de Kamp et de Burgess

Prior trace les grandes lignes d'une interprétation *ockhamiste* de la temporalité et de la possibilité, mais omet de poursuivre une analyse plus approfondie de celle-ci. Kamp (1968) propose une formalisation des idées de Prior en définissant ce que Thomason (1984) nommera un *modèle de Kamp.* Il propose une axiomatisation pour la notion de validité correspondante mais réalise plus tard qu'elle est incomplète. Thomason (1984) donne d'autres exemples de formules valides qui échappent à cette axiomatisation. Burgess (1979) affirma que la notion de validité des structures de Kamp était essentiellement du premier ordre, donnant ainsi une indication à suivre pour son axiomatisation, mais cette affirmation fut remise en question par Kripke et Burgess n'a jamais fourni de justification supplémentaire pour la défendre. Zanardo (1985) donne, pour la première fois, une preuve de complétude pour cette notion de validité. Par la suite, Gabbay (dans Gabbay, Hodkinson & Reynolds 1994) donne aussi une preuve de complétude se basant sur une règle d'irréflexivité, qu'il avait déjà introduite dans Gabbay (1981). Le but de cette section est d'exposer en détail les approches de Kamp et de Burgess, en s'inspirant notamment de Zanardo (1996).

Commençons par l'approche de Burgess. Nous avons précisé plus haut qu'un *arbre* $\mathbf{T}$ est un ensemble T muni d'une relation $\prec\ \subset T\times T$ antiréflexive et transitive telle que, pour chaque $t \in T$, la restriction de $\prec$ à l'ensemble des prédécesseurs de t (incluant t) est une relation linéaire, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{x \in T : x \preccurlyeq t\}$$

est ordonné linéairement par '$\prec$' pour tout $t \in T$. Pour chaque $t \in T$, une *t-branche* est un sous-ensemble linéairement ordonné maximal de

$$\{x \in T : t \preccurlyeq x\};$$

une *branche* b est une t-branche pour un certain $t \in T$; son *point initial* t est dénoté par I_b; et l'ensemble de toutes les branches sur l'arbre $\mathbf{T}$ est $B(\mathbf{T})$. Comme auparavant, un sous-ensemble linéairement ordonné maximal de T est une *histoire* (un chemin de longueur maximale), et l'ensemble des histoires sur $\mathbf{T}$ est $H(\mathbf{T})$. La linéarité à gauche de $\prec$ assure que toute branche b détermine une unique histoire $h_b = b \cup \{x \in T : x \prec I_b\}$.

Le langage L_{P} que nous considérerons est constitué des modalités 'P', 'F' et '$\Diamond$' et des variables propositionnelles $p \in$ Prop. Si val_{T} : Prop $\rightarrow \wp(B(\mathbf{T}))$ est une valuation pour Prop, les clauses sémantiques sont données par :

$b \Vdash p$ ssi $b \in val_{\mathrm{T}}(p)$

$b \Vdash \neg\varphi$ ssi $b \nVdash \varphi$

$b \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $b \Vdash \varphi$ et $b \Vdash \psi$

$b \Vdash P\varphi$ ssi $\exists a \in B(\mathbf{T})$ tel que $b \subsetneq a$ & $a \Vdash \varphi$

$b \Vdash F\varphi$ ssi $\exists a \in B(\mathbf{T})$ tel que $a \subsetneq b$ & $a \Vdash \varphi$

$b \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $\exists a \in B(\mathbf{T})$ tel que $I_a = I_b$ & $a \Vdash \varphi$

Ces clauses permettent d'attribuer un sous-ensemble de $B(\mathbf{T})$ à toute formule de L_{P}. Étant donné qu'une branche b détermine une paire $(I_b, h_b) \in T \times H(\mathbf{T})$ de manière unique, et qu'une paire $(t, h) \in T \times H(\mathbf{T})$ détermine une branche de manière unique (la branche $b = \{x \in h : t \preccurlyeq x\}$), nous pouvons définir la sémantique par rapport à ces paires. Les clauses sémantiques deviennent alors :

$(t, h) \Vdash P\varphi$ ssi $\exists s \in h$ tel que $s \prec t$ & $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash F\varphi$ ssi $\exists s \in h$ tel que $t \prec s$ & $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $\exists g \in H(\mathbf{T})$ tel que $t \in g$ & $(t, g) \Vdash \varphi$

Cette présentation a l'avantage de faire valoir la particularité de la modalité aléthique vis-à-vis les modalités temporelles : les dernières quantifient sur des moments appartenant à l'histoire h (qui est fixée) et la première quantifie sur les histoires g qui partagent le même passé avec h (avant t inclusivement).

On remarquera que $B(\mathbf{T})$ comprend *toutes* les branches sur $\mathbf{T}$, ce qui donne à cette sémantique des allures de logique du deuxième ordre. Pour éviter les conséquences que cela pourrait comporter, Burgess s'inspire d'une stratégie introduite par Henkin pour traduire une partie de la logique du deuxième ordre dans la logique du premier ordre. Il définit un *fagot* (*bundle* en anglais) ou une *structure de Burgess* comme une paire $< \mathbf{T}, \mathcal{B} >$, où $\mathbf{T}$ est une structure arborescente et où $\mathcal{B} \subset B(\mathbf{T})$ satisfait les conditions

(B1) Si $b \in \mathcal{B}$ et si $a \subset b$ ou $b \subset a$, alors $a \in \mathcal{B}$

(B2) Pour tout $t \in T$, il existe une branche $b \in \mathcal{B}$ passant par t

La première condition est une condition de clôture sur les passés et les futurs : si $a \subsetneq b$, a est un passé par rapport à b, si $b \subsetneq a$, a est un futur par rapport à b. La deuxième condition garantie qu'aucun temps (ou qu'aucun instant) n'est historiquement isolé. La structure arborescente conventionnelle, ou pleine, est celle pour laquelle $\mathcal{B} = B(\mathbf{T})$, donc une structure de Burgess est clairement une généralisation de celle-ci. Un *modèle de Burgess* est une structure de Burgess munie d'une valuation val_{B} qui respecte la condition :

(B3) $val_{\mathcal{B}}(p) \subset \mathcal{B}$

L'ensemble $\mathcal{B}$ précise donc les extensions admissibles pour les variables propositionnelles. Les clauses sémantiques pour les modalités doivent refléter ces modifications :

$b \Vdash P\varphi$ ssi $\exists a \in \mathcal{B}$ tel que $b \subsetneq a$ & $a \Vdash \varphi$

$b \Vdash F\varphi$ ssi $\exists a \in \mathcal{B}$ tel que $a \subsetneq b$ & $a \Vdash \varphi$

$b \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $\exists a \in \mathcal{B}$ tel que $I_a = I_b$ & $a \Vdash \varphi$

Si nous définissons l'ensemble des histoires de $\mathcal{B}$ par

$H(\mathcal{B}) = \{h \in H(\mathbf{T}) : \exists a \in \mathcal{B}$ tel que $a \subset h\}$,

les points d'évaluations peuvent être vus comme des couples $(t, h) \in T \times H(\mathcal{B})$, et les clauses deviennent alors

$(t, h) \Vdash P\varphi$ ssi $\exists s \in h$ tel que $s \prec t$ & $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash F\varphi$ ssi $\exists s \in h$ tel que $t \prec s$ & $(s, h) \Vdash \varphi$

$(t, h) \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $\exists g \in H(\mathcal{B})$ tel que $t \in g$ & $(t, g) \Vdash \varphi$

Il est facile de voir que l'extension d'une formule est toujours un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ (ou de $T \times H(\mathcal{B})$).

La sémantique de Kamp diffère de celle de Burgess et s'apparente davantage à celle de Prior. Thomason définit une *structure de Kamp* comme un triplet $\mathbf{K} = < \mathcal{T}, W, \approx >$ tel que :

(K1) $\mathcal{T}$ est une fonction sur W telle que $\mathcal{T}(w) = < T_w, \prec_w >$, où T_w est un ensemble ordonné par une relation linéaire stricte $\prec_w$;

et $\approx$ est une relation sur l'ensemble

$\{(w, v, t) \in W \times W \times (\bigcup_{w \in W} T_w) : t \in T_w \cap T_v\}$

satisfaisant

(K2) $\approx_t$ est une relation d'équivalence sur $W_t = \{w \in W : t \in T_w\}$

(K3) Si $w \approx_t v$, alors $\{s \in T_w : s \prec_w t\} = \{s \in T_v : s \prec_v t\}$

(K4) Si $w \approx_t v$, alors $w \approx_s v$, pour tout $s \prec_w t$

On peut comprendre chaque élément de $w \in W$ comme une histoire, laquelle est précisée par la fonction $\mathcal{T}$. L'ensemble W_t, pour tout $t \in T = \bigcup_{w \in W} T_w$, est l'ensemble des histoires w passant par t. Si $w \approx_t v$, c'est que w et v passent tous les deux par l'instant t et, en vertu de (K3) et (K4), partagent la même histoire avant t. Dans ce qui suivra, $T = \bigcup_{w \in W} T_w$.

Si deux histoires w et v sont équivalentes à l'instant t, ceci entraîne qu'elles sont isomorphes jusqu'à t :

Proposition 10.3.1

Si $w \approx_t v$, alors pour tous $r, s \preccurlyeq_w t$

$r \prec_w s \Leftrightarrow r \prec_v s.$

PREUVE. Supposons le contraire : il existe $s, s' \preccurlyeq_w t$ tels que $s \prec_w s'$ mais $s' \prec_v s$. Si $s \prec_w s'$, alors

$s' \notin \{r \in T_w : r \prec_w s\},$

et si $s' \prec_v s$ alors

$s' \in \{r \in T_v : r \prec_v s\}.$

Mais, par la condition (K4), puisque $s \preccurlyeq_w t$, nous avons que $w \approx_s v$, ce qui implique, par (K3), que

$\{r \in T_w : r \prec_w s\} = \{r \in T_v : r \prec_v s\}.$

Contradiction. ✠

Un *modèle de Kamp* est défini comme une structure de Kamp munie d'une fonction de valuation val_K : Prop $\rightarrow \wp(T \times W)$ qui respecte la condition :

(K5) $w \approx_t v \Rightarrow [\,(t, w) \in val_K(p)$ ssi $(t, v) \in val_K(p)\,]$

L'évaluation d'une formule de L_P dans un modèle de Kamp se fait à une paire (t, w), les clauses sémantiques principales sont adaptées comme suit :

$(t, w) \Vdash P\varphi$ ssi $\exists s \in T_w$ tel que $s \prec_w t$ & $(s, w) \Vdash \varphi$

$(t, w) \Vdash F\varphi$ ssi $\exists s \in T_w$ tel que $t \prec_w s$ & $(s, w) \Vdash \varphi$

$(t, w) \Vdash \Diamond\varphi$ ssi $\exists v \in W$ tel que $w \approx_t v$ & $(t, v) \Vdash \varphi$

Toute formule reçoit donc une extension dans $T \times W$.

10.4 Relation entre les structures de Kamp et de Burgess

Nous démontrons maintenant certaines ressemblances entre les structures de Kamp et de Burgess (dont certains sont énoncés dans Zanardo 1996). Toute structure de Burgess peut être convertie en une structure de Kamp, et la réciproque est vraie sous certaines conditions. Les deux classes de structures auront donc sensiblement la même logique.

Commençons par montrer qu'une structure de Kamp est transformable en structure de Burgess. Une structure de Kamp doit cependant satisfaire une certaine condition de maximalité pour que cette transformation soit possible. En effet, dans une structure de Kamp, rien n'empêche une histoire d'être le prolongement d'une autre : qu'il existe des histoires w et v telles que

(i) $T_w \subset T_v$

(ii) $w \approx_s v$, pour tout $s \in T_w$

(iii) $\exists t \in T_v$ tel que $s \prec_v t$, pout tout $s \in T_w$

Cette situation est impossible dans une structure de Burgess simplement par la définition d'une histoire comme chemin de longueur *maximale* dans l'arbre (un chemin de longueur maximale ne peut pas être prolongé). Il faut donc se limiter aux structures de Kamp pour lesquelles il n'y a pas de tels prolongements. Cette contrainte peut se capturer comme suit :

(Max) $\forall t \in T_w [\, w \approx_t v]$ ssi $\forall t \in T_v [w \approx_t v]$

Sous cette condition, il est possible de traduire la satisfaction dans un type de modèle en la satisfaction dans l'autre type.

La transformation d'une structure de Kamp $\mathbf{K} = < \mathcal{T}, W, \approx >$ en une structure de Burgess repose sur la définition d'une certaine relation d'équivalence. Posons d'abord

$D(\mathbf{K}) = \{(t, w) \in T \times W : t \in T_w\}$, l'ensemble des couples (moment, histoire) « admissibles » de $\mathbf{K}$, et définissons la relation $\sim$ sur les éléments de $D(\mathbf{K})$:

$(s, v) \sim (t, w)$ ssi $s = t$ et $v \approx_t w$.

(Rappelons au passage que $T = \bigcup_{w \in W} T_w$). Autrement dit, deux paires (s, v) et (t, w) de $D(\mathbf{K})$ sont en relation selon $\sim$ ssi elles ont le même instant présent ($s = t$) et les passés selon w et v à partir de t ($= s$) sont équivalents. Il est assez clair que $\sim$ est une relation d'équivalence. Posons alors $T(\mathbf{K}) = D(\mathbf{K})/\sim$, l'ensemble des classes d'équivalences de $D(\mathbf{K})$ modulo $\sim$. Nous voulons faire de $T(\mathbf{K})$ un arbre. Pour ce faire, nous définissons un ordre $\prec$ sur $T(\mathbf{K})$ induit par les ordres $\prec_w$ comme suit :

$|(s, v)| \prec |(t, w)|$ ssi $v \approx_s w \;\&\; s \prec_w t$

Il faut montrer que cette relation est bien définie et qu'elle fait de $T(\mathbf{K})$ un arbre.

Proposition 10.4.1

$< T(\mathbf{K}), \prec >$ est un arbre.[59]

PREUVE. Montrons que $\prec$ est bien définie. Ceci découle du fait que les conditions (K3) et (K4) nous assurent que les valeurs de vérités respectives des deux conjoints dans la définition de $\prec$ ne dépendent pas des représentants de classes d'équivalence.

Montrons maintenant que $\prec$ est antiréflexive. Supposons par l'absurde que $|(t, w)| \prec |(t, w)|$. Ceci impliquerait par définition que $t \prec_w t$, contredisant l'anti-réflexivité de $\prec_w$.

---

[59] Pour être plus précis, il faudrait dire que $T(\mathbf{K})$ est une *forêt*, où une *forêt* est une union disjointe d'arbres, car nous ne savons pas si $\mathbf{K}$ comporte plusieurs composantes connexes. Se restreindre aux structures de Kamp qui n'ont qu'une seule composante connexe ne pose aucun problème; cela n'affectera pas la logique, car le langage ne peut définir la notion de connexité.

En ce qui concerne la transitivité, soient $r, s, t \in T$ et $u, v, w \in W$ tels que $|(r, u)| \prec |(s, v)|$ et $|(s, v)| \prec |(t, w)|$. Ceci veut dire que

$u \approx_r v \;\&\; r \prec_v s$

$v \approx_s w \;\&\; s \prec_w t$

Par la proposition 10.3.1, $v \approx_s w$ et $r \prec_v s$ entraînent que $r \prec_w s$. Par la transitivité de $\prec_w$, nous avons $r \prec_w t$. Enfin, par la condition (K4), $v \approx_s w$, $u \approx_r v$ et $r \prec_w s$ entraînent que $u \approx_r w$. Nous avons donc que $|(r, u)| \prec |(t, w)|$.

Montrons, pour terminer, que $\{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|\}$ est ordonné linéairement. Soient $|(r, u)|$, $|(s, v)|$ tels que

$|(r, u)| \preccurlyeq |(t, w)|$

$|(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|$

Ceci signifie que

$u \approx_r w \;\&\; r \preccurlyeq_w t$

$v \approx_s w \;\&\; s \preccurlyeq_w t$

Puisque T_w est linéairement ordonné par $\prec_w$, le résultat s'ensuit. ✠

La proposition précédente ne dépend pas de (Max) cependant; (Max) est nécessaire afin que chaque $w \in W$ puisse définir une histoire dans $T(\mathbf{K})$.

Proposition 10.4.2

L'ensemble $h(w) = \{|(t, w)| : t \in T_w\}$ est une histoire de $T(\mathbf{K})$.

Preuve. Si $h(w)$ n'est pas un chemin de longueur maximale, il existe $|(s, v)| \notin h(w)$ tel que $|(t, w)| \prec |(s, v)|$, pour tout $t \in T_w$. Par définition de '$\prec$', ceci signifie que $w \approx_t v$ et $t \prec_v s$, pour tout $t \in T_w$. Clairement, $s \notin T_w$ par anti-réflexivité de $\prec_v$. Par ailleurs, non-($w \approx_s v$) car, sinon, cela impliquerait que $s \in T_w$ par (K3). Nous avons donc $\forall t \in T_w [\, w \approx_t v]$ mais non-$\forall t \in T_v [\, w \approx_t v]$, ce qui contredit (Max). ✠

Nous verrons comment cette propriété sera importante pour bien traduire le problème de la satisfaction. Pour chaque $|(t, w)| \in T(\mathbf{K})$, nous définissons

$$b(t, w) = \{|(s, v)| \in h(w) : |(t, w)| \preccurlyeq |(s, v)|\}.$$

La notation '$b(t, w)$' est bien définie car, si $t' \in T$ et $w' \in W$ sont tels que

$$b(t', w') = b(t, w),$$

c'est que $|(t, w)| \preccurlyeq |(t', w')|$ et $|(t', w')| \preccurlyeq |(t, w)|$, et donc $(t, w) \sim (t', w')$. L'ensemble $b(t, w)$ est une branche de $T(\mathbf{K})$ car $h(w)$ est maximal. Nous définissons par ailleurs l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathbf{K}) = \{b \in B(T(\mathbf{K})) : b = b(t, w), \text{ pour un certain } |(t, w)| \in T(\mathbf{K})\}.$$

Proposition 10.4.3

$\mathcal{B}(\mathbf{K})$ est un fagot.

PREUVE. Si $b \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$, c'est qu'il existe $|(t, w)| \in T(\mathbf{K})$ tel que

$$b = b(t, w) = \{|(s, v)| \in h(w) : |(t, w)| \preccurlyeq |(s, v)|\}$$

Par ailleurs, si $a \in B(T(\mathbf{K}))$, c'est qu'il existe $|(t', w')| \in T(\mathbf{K})$ tel que a est un sous-ensemble $\prec$-linéaire maximal de

$$\{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)|\}$$

Si $a \subset b$, nous avons donc que

$$\begin{aligned} a &= b \cap \{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)|\} \\ &= \{|(s, v)| \in b : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)|\} \\ &= \{|(s, v)| \in h(w) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)|\} \\ &= \{|(s, v)| \in h(w) : |(t', w)| \preccurlyeq |(s, v)|\} \\ &= b(t', w) \end{aligned}$$

et donc $a \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$. Si $b \subset a$,

$$a = \{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|\} \cup b$$

Par linéarité à gauche, nous avons que

$$\{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|\} \subset h(w)$$

et donc $a = b(t', w) \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$. ✠

Il nous reste à définir la valuation induite par val_K sur la structure de Burgess $B(\mathbf{K}) = < T(\mathbf{K}), \mathcal{B}(\mathbf{K}) >$. Soit val_B : Prop $\rightarrow \wp(\mathcal{B}(\mathbf{K}))$ définie par

$b(t, w) \in val_B(p)$ ssi $(t, w) \in val_K(p)$

Puisque (t, w) n'est peut-être pas le seul couple à générer la branche $b(t, w)$, il faut s'assurer que la définition de val_B ne dépende pas de la manière dont cette branche est présentée.

Proposition 10.4.4

La valuation val_B est bien définie.

PREUVE. Supposons que (t, w) et (t', w') sont tels que $b(t', w') = b(t, w)$, il faut montrer que

$(t, w) \in val_K(p) \Rightarrow (t', w') \in val_K(p)$.

Nous savons que, si $b(t', w') = b(t, w)$, $|(t, w)| = |(t', w')|$. Donc,

$(t, w) \sim (t', w')$,

par conséquent, $t = t'$ et $w \approx_t w'$. Par (K5), nous avons finalement que $(t', w') \in val_K(p)$. ✠

Nous sommes donc prêts à démontrer le résultat principal.

Proposition 10.4.5

Soit φ une formule de L_P. Pour tout $(t, w) \in D(\mathbf{K})$, nous avons que

$\mathbf{K}, (t, w) \Vdash \varphi$ ssi $B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash \varphi$

PREUVE. La preuve est par induction sur la complexité de φ.

(i) Si φ est une variable propositionnelle p, alors il faut montrer que

$(t, w) \in val_K(p)$ ssi $b(t, w) \in val_B(p)$

Ceci est précisément la définition de val_B.

(ii) Le cas booléen est immédiat.

(iii) Si $\varphi = P\psi$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}, (t, w) \Vdash P\psi &\text{ ssi } \exists s \in T_w \text{ tel que } s \prec_w t \;\&\; \mathbf{K}, (s, w) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } \exists s \in T_w \text{ tel que } s \prec_w t \;\&\; B(\mathbf{K}), b(s, w) \Vdash \psi, \text{ par (HI)} \\
&\Rightarrow \exists b(s, w) \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } b(s, w) \subsetneq b(t, w) \;\&\; B(\mathbf{K}), b(s, w) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash P\psi
\end{aligned}$$

Pour l'autre direction,

$$B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash P\psi \text{ ssi } \exists b \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } b \subsetneq b(t, w) \;\&\; B(\mathbf{K}), b \Vdash \psi$$

Si $b \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$ est tel que $b \subsetneq b(t, w)$, c'est que $b = b(s, w)$ pour un certain $s \in T_w$ tel que $s \prec_w t$.

(iv) Si $\varphi = F\psi$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}, (t, w) \Vdash F\psi &\text{ ssi } \exists s \in T_w \text{ tel que } t \prec_w s \;\&\; \mathbf{K}, (s, w) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } \exists s \in T_w \text{ tel que } t \prec_w s \;\&\; B(\mathbf{K}), b(s, w) \Vdash \psi \\
&\Rightarrow \exists b(s, w) \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } b(t, w) \subsetneq b(s, w) \;\&\; B(\mathbf{K}), b(s, w) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash F\psi
\end{aligned}$$

Pour l'autre direction,

$$B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash F\psi \text{ ssi } \exists b \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } b(t, w) \subsetneq b \;\&\; B(\mathbf{K}), b \Vdash \psi$$

Si $b \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$ est tel que $b(t, w) \subsetneq b$, c'est que

$$\begin{aligned}
b &= \{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w')| \preccurlyeq |(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|\} \cup b(t, w) \\
&= \{|(s, v)| \in T(\mathbf{K}) : |(t', w)| \preccurlyeq |(s, v)| \preccurlyeq |(t, w)|\} \cup b(t, w) \\
&= \{|(s, v)| \in h(w) : |(t', w)| \preccurlyeq |(s, v)|\} \\
&= b(t', w)
\end{aligned}$$

où $t' \in T_w$ est tel que $t' \prec_w t$.

(v) Si $\varphi = \Diamond\psi$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}, (t, w) \Vdash \Diamond\psi &\text{ ssi } \exists v \in W \text{ tel que } v \approx_t w \;\&\; \mathbf{K}, (t, v) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } \exists h(v) \in H(\mathbf{K}) \text{ tel que } v \approx_t w \;\&\; (t, v) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } \exists b(t, v) \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } |(t, v)| = |(t, w)| \;\&\; (t, v) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } \exists b(t, v) \in \mathcal{B}(\mathbf{K}) \text{ tel que } I_{b(t, v)} = I_{b(t, w)} \;\&\; b(t, v) \Vdash \psi \\
&\text{ ssi } B(\mathbf{K}), b(t, w) \Vdash \Diamond\psi
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. ✠

Pour démontrer la réciproque de cette proposition, il faut maintenant montrer comment convertir une structure de Burgess en une structure de Kamp. Soit $\mathbf{B} = <\mathbf{T}, \mathcal{B}(\mathbf{T})>$ une structure de Burgess (donc $\mathbf{T} = <T, \prec>$ est un arbre), nous définissons $K(\mathbf{B})$ la structure de Kamp $<\mathcal{T}_{\mathrm{B}}, W_{\mathrm{B}}, \approx>$ telle que :

(i) $W_{\mathrm{B}} = H(\mathbf{T})$. Les éléments W_{B} sont des chemins de longueur maximale dans $\mathbf{T}$, donc en particulier des sous-ensembles de T.

(ii) Pour $w \in H(\mathbf{T})$, $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}(w) = <w, \prec_w>$, où $\prec_w = \prec \cap (w \times w)$. Ainsi, $T_{\mathrm{B}} = \bigcup\{w : w \in W_{\mathrm{B}}\} = T$. $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}(w)$ est linéaire sur w, d'où (K1).

(iii) $\approx \subset \{(w, v, t) \in W_{\mathrm{B}} \times W_{\mathrm{B}} \times T_{\mathrm{B}} : t \in w \cap v\}$ est définie par : $w \approx_t v$ ssi $w\restriction_t = v\restriction_t$, où l'ensemble $w\restriction_t = w \cap \{s \in T : s \preccurlyeq t\}$. Il est facile de voir que cette relation satisfait les conditions (K2), (K3) et (K4).

Cette fois-ci chaque branche $b \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$ correspond à un unique $(t_b, w_b) \in T_{\mathrm{B}} \times W_{\mathrm{B}}$ et réciproquement. Enfin, si val_{B} est une valuation sur $\mathbf{B}$, nous définissons val_{K} pour $K(\mathbf{B})$ par

$(t_b, w_b) \in val_{\mathrm{K}}(p)$ ssi $b \in val_{\mathrm{B}}(p)$

Proposition 10.4.6

Soit φ une formule de L_{P}. Pour tout $b \in \mathcal{B}$, nous avons

$\mathbf{B}, b \Vdash \varphi$ ssi $K(\mathbf{B}), (t_b, w_b) \Vdash \varphi$

PREUVE. La vérification est directe et ressemble à celle la proposition précédente. ✠

Les propositions 10.4.5 et 10.4.6 entraînent ensemble que la logique des structures de Burgess est la même que la logique des structures de Kamp satisfaisant (Max). En effet, soit $\mathfrak{L}_{\mathrm{B}}$ la logique des structures de Burgess et soit $\mathfrak{L}_{\mathrm{Kmax}}$ la logique des structures de Kamp satisfaisant (Max). Nous avons :

Corollaire 10.4.7

$\mathfrak{L}_{\mathrm{B}} = \mathfrak{L}_{\mathrm{Kmax}}$

PREUVE. Supposons que $\varphi \in \mathfrak{L}_{\mathrm{B}}$ mais que $\varphi \notin \mathfrak{L}_{\mathrm{Kmax}}$. Il existe donc un modèle de Kamp **K** (satisfaisant (Max)) et un couple $(t, w) \in D(\mathbf{K})$ tels que

$\mathbf{K}, (t, w) \Vdash \neg\varphi.$

Par la proposition 10.4.5, ceci entraîne que

$B(\mathbf{K}), b(t, w) \nVdash \varphi,$

contredisant le fait que $\varphi \in \mathfrak{L}_{\mathrm{B}}$. L'autre direction se démontre de manière analogue (en remarquant aussi que, si $b \in \mathcal{B}$, (t_b, w_b) est une couple admissible de $K(\mathbf{B})$). ✠

Pour terminer cette section sur la présentation des sémantiques d'inspiration priorienne, mentionnons que Zanardo (1996) définit une version encore plus générale de structure arborescente. Son analyse commence par l'observation que toute structure de Burgess $< T, \prec, \mathcal{B} >$ peut être représentée comme une structure de Kripke $< W, \sqsubset, \equiv >$ où $W = \mathcal{B}$, '$\sqsubset$' est la relation d'inclusion inverse '$\supset$' et '$\equiv$' est la relation binaire sur $\mathcal{B}$ définie par

$a \equiv b$ ssi $I_a = I_b$

Les relations ainsi définies satisfont les conditions :

(BS) '$\sqsubset$' est un ordre partiel **sbif** et '$\equiv$' est une relation d'équivalence

(Dis) $w \sqsubset v \Rightarrow$ non-$[w \equiv v]$

(PI) $w \equiv v \Rightarrow \exists f : \{u \in W : u \sqsubset w\} \rightarrow \{u \in W : u \sqsubset v\}$ tel que (i) f préserve $\sqsubset$ et (ii) pour tout u, $u \sqsubset w \Rightarrow u \equiv f(u)$

(WDC) $v \sqsubset w \;\&\; w \equiv w^* \Rightarrow \exists v^*$ tel que $v \equiv v^* \;\&\; v^* \sqsubset w^*$

(MB) $v \equiv w \;\&\; v \neq w \Rightarrow \exists v^* \sqsupset v\, \forall u \sqsupset w$ non-$[v^* \equiv u]$

Celles-ci ne sont pas indépendantes, nous avons que (Dis+PI+MB) = (PI+MB).

À partir de ces conditions, Zanardo définit une classe très générale de structures dites « ockhamistes » : si $K = < W, \sqsubset, \equiv >$ est une structure de Kripke, elle est *ockhamiste* si et seulement si elle satisfait (BS), (Dis), (PI), (WDC) & (MB). Dans une telle structure, une histoire est tout simplement un sous-ensemble $\sqsubset$-connexe maximal de W. Zanardo démontre que toute structure de Kripke ockhamiste est en fait une structure de Burgess, ces dernières ont donc déjà toute la généralité souhaitée.

10.5 SROS pré-ockhamistes, ockhamistes et kampiennes

Nous aimerions maintenant utiliser « l'artillerie » des structures relationnelles d'ordre supérieur pour représenter les idées sémantiques de Prior. L'observateur attentif aura déjà remarqué la grande ressemblance qu'il y a entre une structure de Kamp et une structure relationnelle d'ordre supérieur de rang deux. Si $\mathbf{K}$ est la structure de Kamp $< \mathcal{T}, W, \approx >$, alors $T = \bigcup_{w \in W} T_w$ se comporte comme l'ensemble des points de rang 0, et l'ensemble W comme l'ensemble des points de rang 1. La fonction $\mathcal{T}$ a exactement le même rôle que la fonction Φ d'une SROS; notamment, elle attribue à chaque $w \in W$ une relation binaire $\prec_w$ sur $T_w \subset T$. Enfin, la relation $\approx$ n'est rien d'autre que la relation binaire R sur $T \times W$ définie par

$(t, w)R(s, v)$ ssi $t = s$ & $w \approx_t v$

Notre structure de Kamp ressemble donc à une sorte de structure relationnelle d'ordre supérieur fini (une SROF) $\mathbf{S} = < T, W, \Phi, R >$.

Il faut toutefois être prudent avant de conclure qu'une structure de Kamp (et *a fortiori* un modèle de Kamp) puisse être convertie aussi directement. Il y deux difficultés que nous rencontrons dans le passage d'un type de structure dans l'autre : premièrement, le problème de la traduction de la notion validité dans un modèle de Kamp et, deuxièmement, le problème des instants historiquement isolés. Ces deux problèmes sont liés comme nous le verrons sous peu. Rappelons ce qu'est la validité dans une structure de Kamp :

(*) $\mathbf{K} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{K}, (t, w) \Vdash \varphi$, pour tous $t \in T$ et $w \in W$ tels que $t \in T_w$

La condition de droite de (*) est très importante dans cette définition, elle impose la contrainte que t soit un instant dans l'histoire w. Par opposition, la définition de la validité d'une formule φ dans une SROF $\mathbf{S} = < T, W, \Phi, R >$ ne comporte pas de telles contraintes :

(**) $\mathbf{S} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash \varphi$, pour tous $t \in T$ et $w \in W$

Cette divergence sur le plan de la validité introduit des divergences importantes entre les logiques. Notamment, pour t et w tels que $t \notin T_w$, t se comportera comme un moment historiquement isolé, une histoire qui se résume à un instant, sans passé ni futur, et ceci a d'énormes conséquences sur la validité selon la définition (**). Par exemple, supposons que toute histoire w de $\mathbf{K}$ soit sans fin : pour chaque $t \in T_w$ il existerait toujours $t' \in T_w$ qui serait ultérieur à t selon w. Dans ce cas, la formule '$F\top$' est valide dans $\mathbf{K}$ (selon la validité (*) bien sûr). Mais si nous regardons du côté de la SROF correspondante $\mathbf{S}$, il est évident que cette formule ne pourra pas être valide de manière générale car, du moment qu'il existe un instant t n'appartenant pas une histoire w (ce qui semble *a priori* possible), nous aurons que

$$\mathbf{S}, (t, w) \nVdash F\top,$$

et ce, en dépit du fait que tout instant appartenant à l'histoire w possède un instant successeur lui aussi. Il y a donc de sérieux désaccords entre (*) et (**), et cet exemple montre, par ailleurs, que la validité que définit (**) n'est pas très intéressante. La question est donc de savoir comment traduire la validité de type (*) dans les SROS.

Nous devons donc trouver un moyen d'exprimer la contrainte $t \in T_w$ avec les ressources qui sont propres aux SROS. Une première idée serait de définir une notion de satisfaction '$\Vdash_K$' comme suit :

$\mathbf{S}, (t, w) \Vdash_K \varphi$ ssi $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash P\top \vee F\top \rightarrow \varphi$

à partir de laquelle nous pourrions définir une notion de validité correspondante. Or, nous avons que $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash P\top \vee F\top$

$\mathbf{S}, (t, w) \Vdash P\top \vee F\top$ ssi $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash P\top$ ou $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash F\top$

ssi $\exists t' \in T$ tel que $t' \prec_w t$ ou $t \prec_w t'$

Mais le fait qu'un instant t soit ordonné par w n'est-il pas la marque caractéristique de son appartenance à l'histoire w, c'est-à-dire à T_w? Si oui, on croirait donc avoir trouver la manière de convertir, par un moyen simple, la « Kamp validité » dans les SROS. Mais ce n'est pas si simple, et ce qui vient jeter du sable dans l'engrenage est, encore une fois, les instants historiquement isolés. Voyons pourquoi.

Une structure de Kamp ne précise rien sur la cardinalité des ensembles T_w. En particulier, rien n'empêche que T_w soit un singleton $\{t\}$, auquel cas $\prec_w$ est la relation vide (la relation vide sur un singleton est une relation linéaire antiréflexive). Si $\prec_w$ est la relation vide, la condition

$\exists t' \in T$ tel que $t' \prec_w t$ ou $t \prec_w t'$

n'est pas équivalente à $t \in T_w = \{t\}$, et donc le stratagème que nous avons déployé pour capturer la Kamp-validité ne pourra pas fonctionner. Par contre, si $\prec^w$ est la clôture réflexive de $\prec_w$ dans T_w, c'est-à-dire si

$\prec^w = \prec_w \cup \{(t, t) : t \in T_w\}$,

et si 'P^*', 'F^*' sont des modalités interprétées avec $\prec^w$ comme suit :

$(t, w) \Vdash P^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour un certain $s \in T$ tel que $s \prec^w t$

$(t, w) \Vdash F^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour un certain $s \in T$ tel que $t \prec^w s$

alors

$t \in T_w$ ssi $\mathbf{S}, (t, w) \Vdash P^*\top \vee F^*\top$

Si nous arrivions à traiter les modalités 'P^*' et 'F^*' dans le cadre de la logique modale d'ordre supérieur, nous aurons réussi.

Pour ce faire, il nous faut commencer par introduire une structure multimodale $\mathbf{S}$ de la forme $< T, W, (\Phi^1, \Phi^2), R >$, où Φ^1 et Φ^2 sont des fonctions telles que $\Phi^i(w)$, pour $i = 1, 2$, est une relation binaire sur T. Les relations $\Phi^1(w)$, $w \in W$, serviront à l'interprétation de 'F' et 'G' et les relations $\Phi^2(w)$, $w \in W$, à l'interprétation de 'F^*' et 'G^*'. Dans ce qui suit, $\Phi^1(w) = \prec_w$ et $\Phi^2(w) = \prec^w$. Nous dirons que $\prec_w$ *est la restriction antiréflexive de* $\prec^w$ ssi

$s \prec_w t$ ssi $s \prec^w t$ et $s \neq t$,

c'est-à-dire $\prec_w = \prec^w \setminus \{(t, t) : t \in T\}$. Nous dirons que $\mathbf{S}$ est une *structure pré-ockhamiste* si

(PO) Pour tout $w \in W$, $\prec_w$ est la restriction antiréflexive de $\prec^w$

Nous démontrerons que (PO) est définissable.

Avant de démontrer ceci, nous devons d'abord préciser le langage et la sémantique des structures pré-ockhamistes. Appelons L_O le langage dont nous venons de discuter, c'est-à-dire le langage généré par les clauses :

$$\varphi ::= p \mid \omega \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid @_\omega\varphi \mid @_\alpha\varphi \mid X\varphi \mid Y\varphi \mid \Box\varphi$$

avec

$X = H, G, H_\alpha$ ou G_α

$Y = H^*, G^*, H_\alpha{}^*$ ou $G_\alpha{}^*$

et où $p \in \mathrm{Prop}_{\leq 1}$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Les modalités '$X$' et '$Y$' sont de rang 1 et la modalité (constante) '$\Box$' est de rang 2. L'ensemble de toutes les formules de L_O est dénoté par Form_O. Nous interprétons ce langage dans un modèle dit *pré-ockhamiste*. Un *modèle pré-ockhamiste* $\mathbf{M}$ est une paire $< \mathbf{S}, val >$, où $\mathbf{S} = < T, W, (\Phi^1, \Phi^2), R >$ est une structure pré-ockhamiste et *val* est une valuation pour L_O. Les clauses sémantiques de L_O sont dérivées de celles de $L_{T\leq 2}$ et de la discussion précédente, dont voici celles qui concernent les modalités :

$(t, w) \Vdash @_\omega\varphi$ ssi $(val(\omega), w) \Vdash \varphi$

$(t, w) \Vdash @_\alpha\varphi$ ssi $(t, val(\alpha)) \Vdash \varphi$

$(t, w) \Vdash H\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $s \prec_w t$

$(t, w) \Vdash H_\alpha\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $s \prec_{val(\alpha)} t$

$(t, w) \Vdash G\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $t \prec_w s$

$(t, w) \Vdash G_\alpha\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $t \prec_{val(\alpha)} s$

$(t, w) \Vdash H^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $s \prec^w t$

$(t, w) \Vdash H_\alpha{}^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $s \prec^{val(\alpha)} t$

$(t, w) \Vdash G^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $t \prec^w s$

$(t, w) \Vdash G_\alpha{}^*\varphi$ ssi $(s, w) \Vdash \varphi$, pour tout $s \in T$ tel que $t \prec^{val(\alpha)} s$

$(t, w) \Vdash \Box\varphi$ ssi $(s, v) \Vdash \varphi$, pour tout $(s, v) \in T\times W$ tel que $(s, v)R(t, w)$

Ces clauses garantissent une extension dans $T\times W$ à chaque formule de L_O.

Nous prétendons que la condition définissante des structures pré-ockhamistes (PO) est définissable par les schèmes suivants :

(incl) $H^*\varphi \to H\varphi$

(refl) $P^*\varphi \wedge H\neg\varphi \to \varphi$

(aref) $\omega \to \neg P\omega$

Nous montrerons que le schème (incl) définit la condition $\prec_w \subset \prec^w$, le schème (refl) la condition que $\prec^w$ se distingue de $\prec_w$ seulement sur des points réflexifs, et le schème (aref) la condition que $\prec_w$ est antiréflexive. Il n'est pas difficile de montrer que des relations $\prec^w$ et $\prec_w$ satisfont ces trois conditions si et seulement si $\prec_w$ est la restriction antiréflexive de $\prec^w$.

Proposition 10.5.1

Une structure $\mathbf{S} = < T, W, (\Phi^1, \Phi^2), R >$ valide les schèmes (incl), (refl) et (aref) si et seulement si elle satisfait (PO).

PREUVE. Nous montrons que (incl), (refl) et (aref) définissent les trois conditions du paragraphe précédent respectivement.

(incl) Remarquons d'abord que $(t, w) \Vdash H^*\neg\psi \to H\neg\psi$

ssi $(t, w) \Vdash P\psi \to P^*\psi$

ssi $(t, w) \Vdash P\psi \Rightarrow (t, w) \Vdash P^*\psi$

ssi $\exists s[\, s \prec_w t \,\&\, (s, w) \Vdash \psi\,] \Rightarrow \exists s[\, s \prec^w t \,\&\, (s, w) \Vdash \psi\,]$

Si $\prec_w \subset \prec^w$, cette implication est vraie. Supposons qu'une structure valide le schème (incl) mais que $\prec_w \not\subset \prec^w$, c'est-à-dire qu'il existe s, t tels que $s \prec_w t$ mais non-$[\, s \prec^w t \,]$. Posons $\psi = \omega(s)$. Par l'implication ci-dessus, nous obtenons que $s \prec^w t$. Contradiction.

(refl) Nous avons que $(t, w) \Vdash P^*\varphi \wedge H\neg\varphi \rightarrow \varphi$

$\quad$ ssi $(t, w) \Vdash P^*\varphi \wedge H\neg\varphi \Rightarrow (t, w) \Vdash \varphi$

$\quad$ ssi $[\,(t, w) \Vdash P^*\varphi \;\&\; (t, w) \Vdash H\neg\varphi\,] \Rightarrow (t, w) \Vdash \varphi$

$\quad$ ssi $[\,\exists s[\, s \prec^w t \;\&\; (s, w) \Vdash \varphi\,] \;\&\; \forall s[\, s \prec_w t \Rightarrow (s, w) \nVdash \varphi\,]\,] \Rightarrow (t, w) \Vdash \varphi$

Si $\prec_w$ ne se distingue de $\prec^w$ que par des points réflexifs, cette implication est vraie. Supposons qu'il existe une structure qui valide (refl) mais pour laquelle $\prec_w$ se distingue de $\prec^w$ par plus que les points réflexifs. Il existe donc s, t tels que $s \neq t$ et $s \prec^w t$ mais non-$[\, s \prec_w t \,]$. En posant $\varphi = \omega(s)$ dans l'implication ci-dessus, nous obtenons

$\quad$ $s \prec^w t \;\&\;$ non-$[\, s \prec_w t \,] \Rightarrow t = s$,

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

(aref) La preuve du résultat pour ces schèmes a déjà été donnée au chapitre 7, section 7.5.

Ce qui complète la démonstration. ✠

La conséquence de cette proposition est que la paire de fonctions (Φ^1, Φ^2) d'une structure pré-ockhamiste $\mathbf{S} = \langle T, W, (\Phi^1, \Phi^2), R \rangle$ est entièrement spécifiée par la deuxième composante Φ^2, et donc nous représenterons $\mathbf{S}$ désormais par $\langle T, W, \Phi, R \rangle$, où Φ tiendra lieu de Φ^2.

Il est important maintenant de revenir à la notion de Kamp-validité. Si nous avons introduit les structures pré-ockhamistes, c'était pour définir la formule

$\quad$ $\kappa = P^*\top \vee F^*\top$

qui est vraie à un point (t, w) si et seulement si t est un instant de l'histoire w. Cette formule nous permettra notamment de définir une notion de Kamp-satisfaction. Soient $\mathbf{M}$ un modèle pré-ockhamiste, $E \subset \text{Form}_O$ et $\varphi \in \text{Form}_O$. Nous définissons la *Kamp satisfaction* '$\Vdash_K$' comme suit :

$\mathbf{M}, (t, w), E \Vdash_K \varphi$ ssi $\mathbf{M}, (t, w), \kappa \Vdash E \Rightarrow \mathbf{M}, (t, w), \kappa \Vdash \varphi$

En particulier, si $E = \varnothing$, nous avons :

$\mathbf{M}, (t, w) \Vdash_K \varphi$ ssi $\mathbf{M}, (t, w) \Vdash \kappa \to \varphi$

Nous définissons la *Kamp validité* et la *Kamp conséquence*, que ce soit dans un modèle, une structure ou une classe de structures, de la manière habituelle. On remarquera que la notion de Kamp-satisfaction comporte certains aspects surprenants : si $t \notin T_w$, alors $(t, w) \Vdash_K \bot$. Ceci exprime tout simplement le fait que la Kamp-satisfaction ne pose aucune contrainte lorsque t n'appartient pas à l'histoire w. Une classe de structures $\mathfrak{K}$ est dite *Kamp-définissable* s'il existe un ensemble $E \subset \text{Form}_O$ tel que $\mathbf{S} \in \mathfrak{K}$ ssi $\mathbf{S} \Vdash E$. Il est clair, donc, que si $\mathfrak{K}$ est Kamp-définissable alors $\mathfrak{K}$ est définissable tout court, en l'occurrence par l'ensemble $\{\kappa \to \varphi : \varphi \in E\}$.

Nous définissons maintenant une structure ockhamiste. Si $\mathbf{S}$ est la structure pré-ockhamiste $< T, W, \Phi, R >$, pour $t \in T$ et $w \in W$, posons :

$T_w = \{t \in T : \exists s \in T \text{ tel que } t \prec^w s \text{ ou } t \prec^w s\}$

$W_t = \{w \in W : t \in T_w\}$

Nous dirons que $\mathbf{S}$ est une *structure ockhamiste* ssi :

(O1) Pour tout $w \in W$, $\prec^w$ est une relation antisymétrique, transitive, sans bifurcations et n'ayant qu'une seule composante connexe

(O2) Pour tous $s, t \in T$ et $w, v \in W$, $(t, w)R(s, v) \Rightarrow t = s$

(O3) Pour tout $t \in T$, $R_t \subset W_t \times W_t$

(O4) Si $R_t(w, v)$, alors $\{s \in T_w : s \prec_w t\} = \{s \in T_v : s \prec_v t\}$

(O5) Si $R_t(w, v)$, alors $R_s(w, v)$, pour tout $s \prec_w t$

La première condition stipule qu'une histoire est linéaire et unique; la deuxième que, si une paire instant-histoire est accessible depuis une autre, ils partagent le même instant; la troisième que la possibilité au temps t n'est définie que pour les histoires passant par t; la quatrième que, si une paire instant-histoire est accessible depuis une autre au temps t, ils partagent la même histoire avant t; et la cinquième que, si une paire instant-histoire est accessible depuis une autre au temps t, elle l'était également à tous les instants précédents.

Nous voulons montrer que ces conditions sont définissables; en fait, nous montrerons qu'elles sont Kamp-définissables. Nous prétendons que (O1) est Kamp-définissable par

(asym) $(P^*\omega \wedge F^*\omega) \rightarrow \omega$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$

de même que les schèmes (*4*), (sbif) et

(conx) $@_\mu\kappa \wedge @_\nu\kappa \rightarrow @_\mu(P^*\nu \vee \nu \vee F^*\nu)$, $\mu, \nu \in \mathrm{Nom}_0$

Nous prétendons ensuite que (O2)-(O5) sont Kamp-définissables par

(ock_2) $\Diamond\omega \rightarrow \omega$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$

(ock_3) $\Box\kappa$

(ock_4) $\Diamond\alpha \rightarrow (P\varphi \leftrightarrow P_\alpha\varphi)$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$ et $\varphi \in \mathrm{FCon}_O$

(ock_5) $\Diamond\alpha \rightarrow H\Diamond\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

FCon_O est l'ensemble des formules constantes de L_O (des formules sans modalités variables).

Nous avons :

Proposition 10.5.2

(a) (asym), (*4*), (sbif) et (conx) Kamp-définissent (O1)

(b) (ock_1)-(ock_5) Kamp-définissent (O2)-(O5) respectivement

PREUVE. Puisqu'il s'agit de Kamp-définissabilité, nous supposerons dans la suite que $t \in T_w$.

(a) (asym) Il suffit de remarquer que $(t, w) \Vdash (P^*\omega \wedge F^*\omega) \rightarrow \omega$

ssi $(t, w) \Vdash P^*\omega \wedge F^*\nu \Rightarrow (t, w) \Vdash \omega$

ssi $t \prec^w val(\omega)$ & $val(\omega) \prec^w t \Rightarrow t = val(\omega)$

Cette dernière condition est validée par et définie une relation antisymétrique.

(*4*) & (sbif) La preuve du résultat pour ces schèmes a déjà été donnée au chapitre 7, section 7.5.

(conx) Soient $r = val(\mu)$ et $s = val(\nu)$.Nous avons que $(t, w) \Vdash$ (conx)

ssi $(t, w) \Vdash @_\mu\kappa \wedge @_\nu\kappa \Rightarrow (t, w) \Vdash @_\mu(P^*\nu \vee \nu \vee F^*\nu)$

ssi $[\,(r, w) \Vdash \kappa$ & $(r, w) \Vdash \kappa\,] \Rightarrow (r, w) \Vdash (P^*\nu \vee \nu \vee F^*\nu)$

ssi $[\,\exists r'[\,r' \prec^w r$ ou $r' \prec^w r]$ & $\exists s'[\,s' \prec^w s$ ou $s \prec^w s'\,]\,]$

$\Rightarrow [\,s \prec^w r$ ou $r = s$ ou $r \prec^w s\,]$

L'antécédent stipule que r et s appartiennent à des composantes connexes de $\prec^w$, et le conséquent que r et s sont comparables selon $\prec^w$. Le résultat découle de cette observation.

(b) (ock_2) Il suffit de remarquer que $(t, w) \Vdash \Diamond\omega \rightarrow \omega$

ssi $(t, w) \Vdash \Diamond\omega \Rightarrow (t, w) \Vdash \omega$

ssi $[\,\exists(s, v)$ tel que $(t, w)R(s, v)$ & $s = val(\omega)\,] \Rightarrow [\,t = val(\omega)\,]$

Ce qui nous permet de constater que (ock_2) est valide dans une structure satisfaisant (O2). Par ailleurs, supposons qu'une structure valide (ock_2) mais que non-$[\,\forall(s, v)\,[\,(t, w)R(s, v) \Rightarrow t = s\,]$, alors il existerait (s, v) tel que

$(t, w)R(s, v)$ & $s \neq t$

Mais ceci impliquerait que $s = val(\omega) = t$. Contradiction.

(ock_3) Supposons que $R_t(w, v)$, avec $t \in T_w$ bien sûr. Nous avons que

$(t, w) \Vdash \Box\kappa$ ssi $(t, v) \Vdash \kappa$, pour tout v tel que $R_t(w, v)$

ssi $(t, w) \Vdash F^*\top \vee P^*\top$, pour tout v tel que $R_t(w, v)$

ssi $\exists s[\,s \prec^v t$ ou $t \prec^v s\,]$, pour tout v tel que $R_t(w, v)$

ssi $v \in W_t$

(ock_4) Montrons maintenant que la validité de $\Diamond\alpha \rightarrow (P\varphi \leftrightarrow P_\alpha\varphi)$ dans **S** entraîne que, pour tous $t \in T$ et $w, v \in W$,

$R_t(w, v) \Rightarrow T_w(t) = T_v(t)$,

où $T_w(t) = \{s \in T_w\colon s \prec_w t\}$. Supposons que $R_t(w, v)$, et soit $\alpha = \alpha(v)$. Nous avons donc que $(t, w) \Vdash \Diamond\alpha$. Puisque **S** valide ($\text{ock}_4$), nous avons

$(t, w) \Vdash \Diamond\alpha \rightarrow (P\varphi \leftrightarrow P_\alpha\varphi)$

ssi $(t, w) \Vdash P\varphi \leftrightarrow P_\alpha\varphi$

ssi $[\,(t, w) \Vdash P\varphi \Leftrightarrow (t, w) \Vdash P_\alpha\varphi\,]$

ssi $\exists s \in T[\,s \prec_w t \;\&\; (s, w) \Vdash \varphi\,] \Leftrightarrow \exists s \in T[\,s \prec_v t \;\&\; (s, w) \Vdash \varphi\,]$

Soit $t' \in T$ tel que $t' \prec_w t$, et posons $\varphi = \omega(t')$. Nous avons alors que

$\exists s \in T[\,s \prec_w t \;\&\; s = t'\,] \Leftrightarrow \exists s \in T[\,s \prec_v t \;\&\; s = t'\,]$.

De même, si $t'' \in T$ est que $t'' \prec_v t$ et si $\varphi = \omega(t'')$, alors

$\exists s \in T[\,s \prec_w t \;\&\; s = t''\,] \Leftrightarrow \exists s \in T[\,s \prec_v t \;\&\; s = t''\,]$.

Ce qui démontre $T_w(t) = T_v(t)$. Démontrer que (ock_4) est valide dans une structure satisfaisant (O4) est encore plus simple.

(ock_5) Montrons enfin que la validité de $\Diamond\alpha \rightarrow H\Diamond\alpha$ dans **S** entraîne que, pour tous $t \in T$ et $w, v \in W$,

$R_t(w, v) \Rightarrow R_s(w, v)$, si $s \prec_w t$

Supposons que $R_t(w, v)$. Posons $\alpha = \alpha(v)$. Nous avons que

$(t, w) \Vdash \Diamond\alpha \rightarrow H\Diamond\alpha$

ssi $(t, w) \Vdash H\Diamond\alpha$

ssi $(s, w) \Vdash \Diamond\alpha$, pour tout $s \prec_w t$

ssi $\exists u[\,R_s(w, u) \;\&\; (s, u) \Vdash \alpha\,]$, pour tout $s \prec_w t$

ssi $R_s(w, v)$, pour tout $s \prec_w t$

Démontrer que (ock_5) est valide dans une structure satisfaisant (O5) est encore plus simple.

D'où le résultat. ✠

Il reste cependant à déterminer si la condition (Max) est définissable. Nous avions vu que cette condition n'est pas rencontrée en général par une structure de Kamp, mais qu'elle était une condition nécessaire à la conversion d'une structure de Kamp en une structure de Burgess. Pour les structures ockhamistes, elle s'énonce comme suit :

(Max_O) $\forall s[\,t \prec_w s \Rightarrow R_s(w, v)\,]$ ssi $\forall s[\,t \prec_v s \Rightarrow R_s(w, v)\,]$

L'écriture plus complexe s'explique par le fait que nous ne disposons plus des ensembles T_w, d'où la nécessité d'employer l'expression '$t \prec_x s \Rightarrow$'. Il se trouve que cette condition est, elle aussi, définissable aussi dans le langage L_O. Posons

(max) $\Diamond\alpha \rightarrow (G\Diamond\alpha \leftrightarrow G_\alpha\Diamond\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

Nous avons :

Proposition 10.5.3

Soit **S** une structure ockhamiste. Nous avons que $\mathbf{S} \Vdash_K$ (max) ssi **S** satisfait la condition (Max_O).

PREUVE. Soit $(t, w) \in T \times W$. Si non-$R_t(w, val(\alpha))$, alors $(t, w) \Vdash \max(\alpha)$ car $(t, w) \nVdash \Diamond\alpha$. Supposons donc que $R_t(w, val(\alpha))$. Nous avons que

$$(t, w) \Vdash \Diamond\alpha \rightarrow (G\Diamond\alpha \leftrightarrow G_\alpha\Diamond\alpha)$$

$$\text{ssi } (t, w) \Vdash G\Diamond\alpha \leftrightarrow G_\alpha\Diamond\alpha$$

$$\text{ssi } [(t, w) \Vdash G\Diamond\alpha \Leftrightarrow (t, w) \Vdash G_\alpha\Diamond\alpha]$$

$$\text{ssi } [\forall s[t \prec_w s \Rightarrow R_s(w, v)] \Leftrightarrow \forall s[t \prec_v s \Rightarrow R_s(w, v)]]$$

Cette observation nous permet de déduire le résultat. ✠

Nous définissons un dernier type de structures, la structure dite *kampienne*. Une *structure kampienne* est une structure ockhamiste $\mathbf{S} = < T, W, \Phi, R >$ telle que

(OK) R_t est une relation d'équivalence (sur W_t)

Un *modèle kampien* est un modèle ockhamiste basé sur une structure kampienne. Nous savons que cette condition est (Kamp-)définissable par les schèmes :

(ok) $\Box\alpha \rightarrow \alpha$, $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ & $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

Ce sont les structures kampiennes qui peuvent être converties en structures de Kamp et vice versa. En effet, **S** peut être convertie en la structure de Kamp $K(\mathbf{S}) = < \mathcal{T}_S, W_S, \approx >$ en posant

$\mathcal{T}_S(w) = < T_w, \prec_w >$

$W_S = W$

$w \approx_t v$ ssi $R_t(w, v)$

Il est clair que $K(\mathbf{S})$ est une structure de Kamp. Par ailleurs, la structure de Kamp $\mathbf{K} = < \mathcal{T}, W, \approx >$ peut être convertie en la structure kampienne $S(\mathbf{K}) = < T_K, W_K, \Phi, R >$ en posant

$T_K = T = \bigcup_{w \in W} T_w$

$W_K = W$

$\Phi(w) =$ la clôture réflexive de $\prec_w$ dans T_w

$R_t(w, v)$ ssi $w \approx_t v$

On peut vérifier que $S(\mathbf{K})$ est une structure kampienne sans difficultés. Nous avons également que $S(K(\mathbf{S})) = \mathbf{S}$ et que $K(S(\mathbf{K})) = \mathbf{K}$.

Nous avons le nécessaire pour montrer que la satisfaction dans une structure de Kamp est traduisible en satisfaction dans une structure kampienne. Pour ce faire, il faut mettre sur pied une certaine fonction de traduction Trad permettant de traduire les formules de L_P en formules de L_O. Soit ϑ une fonction injective de Prop_P dans Prop_1 et soit P_P l'image de Prop_P par ϑ dans Prop_O; ϑ est donc une bijection entre Prop_P et P_P. Nous définissons Trad : $\text{Form}_P \rightarrow \text{Form}_O$ de la manière suivante :

$\text{Trad}(p) = \vartheta(p)$

$\text{Trad}(\neg\varphi) = \neg\text{Trad}(\varphi)$

$\text{Trad}(\varphi \wedge \psi) = \text{Trad}(\varphi) \wedge \text{Trad}(\psi)$

$\text{Trad}(P\varphi) = P\text{Trad}(\varphi)$

$\text{Trad}(F\varphi) = F\text{Trad}(\varphi)$

$\text{Trad}(\Diamond\varphi) = \Diamond\text{Trad}(\varphi)$

Toute formule de L_P est donc associée, via Trad, à une formule de L_O.

Il reste à convertir une valuation de L_P en une valuation de L_O et nous serons en mesure d'établir notre résultat. Soit **K** est une structure de Kamp. Si $val_K : \mathrm{Prop}_P \rightarrow \wp(T \times W)$ est une valuation de L_P sur **K**, alors nous définissons $val_{S(K)}$ comme une valuation de L_O sur $S(\mathbf{K})$ telle que

$(t, w) \in val_{S(K)}(\vartheta(p))$ ssi $(t, w) \in val_K(p)$,

pour tout $p \in \mathrm{Prop}_P$ (les valeurs de $val_{S(K)}$ sur les variables qui ne sont pas dans P_P importent peu pour la suite). Ici nous rencontrons un problème apparenté à celui de la Kamp-validité plus haut. Il y a une légère divergence entre la validité d'une formule dans une structure de Kamp, d'une part, et la validité de cette même formule dans une structure kampienne, d'autre part. Cette différence tient à la présence d'une contrainte sur les valuations chez les modèles de Kamp (la condition (K5)) qui n'a pas sa contrepartie chez les modèles kampiens. Si $\mathbf{M} = < \mathbf{K}, val_K >$ est un modèle de Kamp, (K5) exige que val_K satisfasse la condition :

$(t, w) \in val_K(p)$ & $R_t(w, v) \Rightarrow (t, v) \in val_K(p)$,

ce qui n'est pas exigée de la valuation d'un modèle kampien. Si nous n'imposons pas de condition analogue sur les valuations d'un modèle kampien, nous n'obtiendrons pas le résultat de traduction recherché. Appelons la valuation val_S d'un modèle kampien $\mathbf{N} = < \mathbf{S}, val_S >$ *normale* si elle satisfait la condition :

(KN) $R_t(w, v) \Rightarrow [\,(t, w) \in val_S(p) \Leftrightarrow (t, v) \in val_S(p)\,]$

Nous dirons que modèle kampien est *normal* si sa valuation est normale. Nous allons donc modifier notre notion de validité dans une structure kampienne en restreignant les valuations admissibles à la classe des valuations normales; autrement dit, une formule sera valide si

$< \mathbf{S}, val_S >, (t, w) \Vdash_K \varphi$, pour toute valuation normale val_S

Cette nouvelle notion de validité serait sans intérêt si elle n'était pas définissable. Or, il se trouve que la classe des modèles normaux est définissable par le schème (kn) $p \to \Box p$, $p \in \mathrm{Prop}_1$

Par ailleurs, toutes conditions dont nous avions discuté dans cette section sont définissables avec des valuations normales seulement.

En effet, nous avons :

Proposition 10.5.4

(a) Les conditions de structures qui ont fait l'objet des propositions précédentes sont définissables avec des valuations normales.

(b) La classe des modèles kampiens normaux est définissable par (kn).

(c) Si $\mathbf{M} = < \mathbf{K}, val_{\mathbf{K}} >$ est un modèle de Kamp, alors $\mathbf{N} = < S(\mathbf{K}), val_{S(\mathbf{K})} >$ est un modèle kampien normal.

Preuve. (a) Nous avons pu définir ces conditions avec des instances de schèmes dans lesquelles il n'y avait que des nominaux (ou, à la limite, des variables propositionnelles de Prop_0), donc ces preuves ne sont pas affectées par la restriction aux valuations normales.

(b) Soit $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$ un modèle kampien. Supposons que $(t, w) \in val(p)$. Nous avons donc que $\mathbf{M}, (t, w) \Vdash p \to \Box p$

ssi $\mathbf{M}, (t, w) \Vdash \Box p$

ssi $\mathbf{M}, (t, v) \Vdash p$, pour tout v tel que $R_t(w, v)$

ssi $(t, v) \in val(p)$, pour tout v tel que $R_t(w, v)$

(c) Direct. ✠

Nous avons donc :

Proposition 10.5.5

Soient $\mathbf{M} = < \mathbf{K}, val_{\mathbf{K}} >$ un modèle de Kamp. Pour tout $(t, w) \in T \times W$ tel que $t \in T_w$, nous avons :

$< \mathbf{K}, val_{\mathbf{K}} >, (t, w) \Vdash \varphi$ ssi $< S(\mathbf{K}), val_{S(\mathbf{K})} >, (t, w) \Vdash \mathrm{Trad}(\varphi)$

PREUVE. La preuve se fait par induction sur la complexité des formules φ du langage L_P. Elle ne comporte aucune surprise. ✠

Nous définissons la nouvelle notion de conséquence résultant de ces considérations : pour **S** une structure kampienne et pour $E \subset \mathrm{Form}_O$ et $\varphi \in \mathrm{Form}_O$,

$\mathbf{S},\ E \Vdash_{KN} \varphi$ ssi $< \mathbf{S},\ val >,\ E \Vdash_K \varphi$, pour toute valuation normale *val*

En particulier, si $E = \varnothing$, nous obtenons :

$\mathbf{S} \Vdash_{KN} \varphi$ ssi $< \mathbf{S},\ val > \Vdash_K \varphi$, pour toute valuation normale *val*

Si $\mathcal{K}$ est une classe de structures kampiennes,

$\mathcal{K},\ E \Vdash_{KN} \varphi$ ssi $\mathbf{S},\ E \Vdash_{KN} \varphi$, pour toute structure $\mathbf{S} \in \mathcal{K}$

Corollaire 10.5.6

(a) Soit $\mathfrak{K}$ une classe de structures de Kamp et soit

$S(\mathfrak{K}) = \{S(\mathbf{K}) : \mathbf{K} \in \mathfrak{K}\}$

la classe correspondante de structures kampiennes. Nous avons alors que

$\mathfrak{K},\ E \Vdash \varphi$ ssi $S(\mathfrak{K}),\ E \Vdash_{KN} \mathrm{Trad}(\varphi)$

(b) La logique de L_P dans les structures de Kamp est la logique de $\mathrm{Trad}(L_P)$ dans les structures kampiennes, c'est-à-dire

$E \Vdash \varphi$ ssi $E \Vdash_{KN} \mathrm{Trad}(\varphi)$

PREUVE. (a) Posons $\varphi' = \mathrm{Trad}(\varphi)$ et $E' = \mathrm{Trad}(E)$. Nous avons que

$\mathfrak{K},\ E \Vdash \varphi \Leftrightarrow S(\mathfrak{K}),\ E' \Vdash_{KN} \varphi'$

ssi non-$[\,\mathfrak{K},\ E \Vdash \varphi\,] \Leftrightarrow$ non-$[\,S(\mathfrak{K}),\ E' \Vdash_{KN} \varphi'\,]$

D'une part, nous avons que non-$[\,\mathfrak{K},\ E \Vdash \varphi\,]$

ssi $\exists \mathbf{M} = < \mathbf{K},\ val_\mathbf{K} >$ tel que $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$ et non-$[\,\mathbf{M},\ (t,\ w),\ E \Vdash \varphi\,]$

ssi $\exists \mathbf{M} = < \mathbf{K},\ val_\mathbf{K} >$ tel que $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$, $\mathbf{M},\ (t,\ w) \Vdash E$ et $\mathbf{M},\ (t,\ w) \nVdash \varphi$

ssi $\exists \mathbf{M} = < \mathbf{K},\ val_\mathbf{K} >$ tel que $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$, $\mathbf{M},\ (t,\ w) \Vdash E \cup \{\neg\varphi\}$

Ici, $t \in T_w$ car il s'agit de la validité dans une structure de Kamp. Nous avons, d'autre part, que non-$[\,S(\mathfrak{K}),\ E \Vdash_{KN} \varphi'\,]$

ssi $\exists\mathbf{N} = <\mathbf{S}, val_{\mathbf{S}}>$ tel que $\mathbf{N}$ est normal, $\mathbf{S} \in S(\mathfrak{K})$ et

non-$[\mathbf{N}, (t, w), E' \Vdash_{\mathrm{K}} \varphi']$

Par ailleurs, non-$[\mathbf{N}, (t, w), E' \Vdash_{\mathrm{K}} \varphi']$

ssi $\mathbf{N}, (t, w) \Vdash_{\mathrm{K}} E'$ et non-$[\mathbf{N}, (t, w) \Vdash_{\mathrm{K}} \varphi']$

ssi $\mathbf{N}, (t, w) \Vdash_{\mathrm{K}} E'$ & $\mathbf{N}, (t, w) \Vdash \kappa \wedge \neg\varphi'$

ssi $t \in T_w$ et $\mathbf{N}, (t, w) \Vdash E' \cup \{\neg\varphi'\}$

Le résultat s'ensuit par la proposition précédente.

(b) En posant $\mathfrak{K}$ = la classe de toutes les structures de Kamp, nous avons, par la partie (a), que

$E \Vdash \varphi$ ssi $S(\mathfrak{K}), E \Vdash_{\mathrm{KN}} \mathrm{Trad}(\varphi)$

Si nous montrons que $S(\mathfrak{K})$ = la classe de toutes les structures kampiennes, nous aurons terminé. Soit $\mathbf{S}$ une structure kampienne quelconque. Nous savons que $K(\mathbf{S})$ est une structure de Kamp et que $S(K(\mathbf{S}))$ est une structure kampienne. Or, $S(K(\mathbf{S})) = \mathbf{S}$ et $S(K(\mathbf{S})) \in S(\mathfrak{K})$. ✠

10.6 Axiomatisation et complétude

Nous démontrons ici que les logiques des structures kampiennes et ockhamistes sont axiomatisables. Il « suffit » de montrer que les nombreux schèmes de formules définissant les différentes propriétés de ces structures sont canoniques pour ces propriétés. Nous montrerons d'abord que

(incl) $H^*\varphi \to H\varphi$

(refl) $P^*\varphi \wedge H\neg\varphi \to \varphi$

(aref) $\omega \to \neg P\omega$

sont canoniques pour les propriétés respectives qu'elles définissent (voir plus haut). Ensemble, celles-ci caractérisent les structures pré-ockhamistes. Nous montrerons ensuite que les schèmes '$\kappa \to X$' où X est

(asym) $(P^*\omega \wedge F^*\omega) \to \omega$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$

(*4*), (sbif) et

(conx) $@_\mu\kappa \wedge @_\nu\kappa \to @_\mu(P^*\nu \vee \nu \vee F^*\nu)$, $\mu, \nu \in \mathrm{Nom}_0$

sont canoniques pour l'antisymétrie, la transitivité, l'absence de bifurcations et la présence d'une seule composante connexe respectivement. Nous montrerons aussi que les schèmes '$\kappa \to X$' où X est

(ock$_2$) $\Diamond\omega \to \omega$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$

(ock$_3$) $\Box\kappa$

(ock$_4$) $\Diamond\alpha \to (P\varphi \leftrightarrow P_\alpha\varphi)$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$ et $\varphi \in \mathrm{FCon}_O$

(ock$_5$) $\Diamond\alpha \to H\Diamond\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

(max) $\Diamond\alpha \to (G\Diamond\alpha \leftrightarrow G_\alpha\Diamond\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

sont canoniques pour les propriétés (O2)-(O5) et (Max$_O$) respectivement. Enfin, nous montrerons que '$\kappa \to X$' où X est

(ok) $\Box\alpha \to \alpha$, $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ & $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$

(kn) $p \to \Box p$, $p \in \mathrm{Prop}_1$

sont canoniques pour la propriété que R_t est une relation d'équivalence et la propriété d'une valuation normale.

Proposition 10.6.1

Les schèmes sont canoniques pour les conditions qu'ils définissent.

PREUVE. Dans ce qui suit, E est un ensemble maximalement consistant de formules de L_O, celui à partir duquel nous construisons un modèle canonique.

(incl) Soient $\omega, \mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Il faut montrer que

$$@_\omega P_\alpha\mu \in E \Rightarrow @_\omega P_\alpha{}^*\mu \in E$$

Or, $\vdash H^*\neg\mu \to H\neg\mu$ par (incl) et donc $\vdash @_\omega @_\alpha(H^*\neg\mu \to H\neg\mu)$. Mais

$$\begin{aligned} \vdash @_\omega @_\alpha(H^*\neg\mu \to H\neg\mu) &\to @_\omega @_\alpha(P\mu \to P^*\mu) \\ &\to (@_\omega @_\alpha P\mu \to @_\omega @_\alpha P^*\mu) \\ &\to (@_\omega P_\alpha\mu \to @_\omega P_\alpha{}^*\mu) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(refl) Soient $\omega, \mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Il faut montrer que

$$@_\omega P_\alpha{}^*\mu \in E \;\&\; @_\omega P_\alpha\mu \notin E \Rightarrow @_\omega\mu \in E$$

Or, $\vdash (P^*\mu \wedge H\neg\mu) \to \mu$ par (refl) et donc $\vdash @_\omega @_\alpha((P^*\mu \wedge H\neg\mu) \to \mu)$. Mais

$$\vdash @_\omega @_\alpha(P^*\mu \wedge H\neg\mu) \to \mu) \to ((@_\omega @_\alpha P^*\mu \wedge @_\omega @_\alpha H\neg\mu) \to @_\omega @_\alpha\mu))$$
$$\to ((@_\omega P_\alpha{}^*\mu \wedge \neg @_\omega P_\alpha\mu) \to @_\omega\mu)$$

D'où le résultat.

(aref) Nous savons déjà que ce schème est canonique.

Les axiomes qui suivent sont tous de la forme '$\kappa \to X$'. Nous écrirons '$\vdash_\kappa X$' pour signifier que $\vdash \kappa \to X$. Si (ω, α) est un couple tel que $@_\omega @_\alpha\kappa \in E$, alors

(*) $\qquad \vdash_\kappa X \Rightarrow \; @_\omega @_\alpha X \in E.$

Nous supposons dans la suite que $@_\omega @_\alpha\kappa \in E$ (car, sinon, il n'y a rien à démontrer).

(asym) Soient $\omega, \mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Il faut montrer que

$$@_\omega P_\alpha{}^*\mu \in E \;\&\; @_\mu P_\alpha{}^*\omega \in E \Rightarrow @_\omega\mu \in E$$

Or, $\vdash_\kappa (P^*\mu \wedge F^*\mu) \to \mu$, par (asym), et donc $@_\omega @_\alpha((P^*\mu \wedge F^*\mu) \to \mu) \in E$, par (*). Mais

$$\vdash @_\omega @_\alpha((P^*\mu \wedge F^*\mu) \to \mu) \to ((@_\omega @_\alpha P^*\mu \wedge @_\omega @_\alpha F^*\mu) \to @_\omega @_\alpha\mu)$$
$$\to ((@_\omega P_\alpha{}^*\mu \wedge @_\mu P_\alpha{}^*\omega) \to @_\omega\mu)$$

D'où le résultat.

(*4*) et (sbif) La preuve dans ce cas a déjà été donnée.

(conx) Soient $\omega, \mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Il faut montrer que

$$[@_\omega @_\alpha\kappa \in E \;\&\; @_\mu @_\alpha\kappa \in E] \Rightarrow [@_\omega P_\alpha{}^*\mu \text{ ou } @_\omega\mu \text{ ou } @_\omega F_\alpha{}^*\mu \in E]$$

Or, $\vdash_\kappa (@_\omega\kappa \wedge @_\mu\kappa) \to @_\omega(P^*\mu \vee \mu \vee F^*\mu)$ par (conx) et donc

$$@_\omega @_\alpha((@_\omega\kappa \wedge @_\mu\kappa) \to @_\omega(P^*\mu \vee \mu \vee F^*\mu)) \in E$$

Mais

$$\vdash @_\omega @_\alpha((@_\omega\kappa \wedge @_\mu\kappa) \to @_\omega(P^*\mu \vee \mu \vee F^*\mu))$$
$$\to ((@_\omega @_\alpha((@_\omega\kappa \wedge @_\mu\kappa)) \to @_\omega @_\alpha(P^*\mu \vee \mu \vee F^*\mu))$$
$$\to ((@_\omega @_\alpha\kappa \wedge @_\mu @_\alpha\kappa) \to (@_\omega @_\alpha P^*\mu \vee @_\omega @_\alpha\mu \vee @_\omega @_\alpha F^*\mu))$$
$$\to ((@_\omega @_\alpha\kappa \wedge @_\mu @_\alpha\kappa) \to (@_\omega P_\alpha{}^*\mu \vee @_\omega\mu \vee @_\omega F_\alpha{}^*\mu))$$

D'où le résultat.

(ock$_2$) Soient (ω, α), $(\mu, \beta) \in \mathbf{Nom}_1$. Supposons que $@_\omega @_\alpha \Diamond(\mu \wedge \beta) \in E$, il faut montrer que $@_\omega \mu \in E$. Nous avons $\vdash_\kappa \Diamond\mu \rightarrow \mu$ et donc $@_\omega @_\alpha(\Diamond\mu \rightarrow \mu) \in E$. Or, d'une part, nous avons

$$\vdash @_\omega @_\alpha \Diamond(\mu \wedge \beta) \rightarrow @_\omega @_\alpha \Diamond\mu$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} &\vdash @_\omega @_\alpha(\Diamond\mu \rightarrow \mu) \rightarrow (@_\omega @_\alpha \Diamond\mu \rightarrow @_\omega @_\alpha \mu) \\ &\qquad \rightarrow (@_\omega @_\alpha \Diamond\mu \rightarrow @_\omega \mu) \end{aligned}$$

Par conséquent, si $@_\omega @_\alpha \Diamond(\mu \wedge \beta) \in E$, $@_\omega \mu \in E$.

(ock$_3$) Soient $(\omega, \alpha) \in \mathbf{Nom}_1$ tel que $@_\omega @_\alpha \kappa \in E$. Nous devons montrer que

$$@_\omega @_\alpha \Diamond\beta \in E \Rightarrow @_\omega @_\beta \kappa \in E$$

Nous avons $\vdash_\kappa \Box\kappa$ et donc $@_\omega @_\alpha \Box\kappa \in E$. Puisque $@_\omega @_\alpha \Diamond\beta \in E$, nous avons que $@_\omega @_\beta \kappa \in E$.

(ock$_4$) Soient ω, $\mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Il faut montrer que si $@_\omega @_\alpha \Diamond\beta \in E$, alors les ensembles

$$T_\alpha = \{\mu \in \mathrm{Nom}_0 : @_\omega P_\alpha \mu \in E\}$$

$$T_\beta = \{\mu \in \mathrm{Nom}_0 : @_\omega P_\beta \mu \in E\}$$

sont égaux. Soit $\mu \in \mathrm{Nom}_0$, nous avons

$$\begin{aligned} &\vdash @_\omega @_\alpha \Diamond\beta \wedge @_\omega @_\alpha(\Diamond\beta \rightarrow (P\mu \leftrightarrow P_\beta \mu)) \\ &\qquad \rightarrow @_\omega @_\alpha(P\mu \leftrightarrow P_\beta \mu) \\ &\qquad \rightarrow @_\omega @_\alpha(P_\alpha \mu \leftrightarrow P_y \mu) \\ &\qquad \rightarrow (@_\omega @_\alpha P_\alpha \mu \leftrightarrow @_\omega @_\alpha P_\beta \mu) \\ &\qquad \rightarrow (@_\omega P_\alpha \mu \leftrightarrow @_\omega P_\beta \mu) \end{aligned}$$

Donc, $@_\omega P_\alpha \mu \in E$ ssi $@_\omega P_\beta \mu \in E$, c'est-à-dire $T_\alpha = T_\beta$.

(ock$_5$) Soient ω, $\mu \in \mathrm{Nom}_0$ et α, $\beta \in \mathrm{Nom}_1$ tels que $@_\omega @_\alpha \Diamond\beta$, $@_\omega P_\alpha \mu \in E$. Nous voulons montrer que $@_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E$. Nous avons

$$\begin{aligned} &\vdash @_\omega @_\alpha \Diamond\beta \wedge @_\omega @_\alpha(\Diamond\beta \rightarrow H\Diamond\beta) \\ &\qquad \rightarrow @_\omega @_\alpha H\Diamond\beta \\ &\qquad \rightarrow @_\omega @_\alpha H_\alpha \Diamond\beta \\ &\qquad \rightarrow @_\omega H_\alpha @_\alpha \Diamond\beta \end{aligned}$$

Donc, $@_\omega H_\alpha @_\alpha \Diamond\beta \in E$. De même,

$$\vdash @_\omega P_\alpha \mu \wedge @_\omega H_\alpha @_\alpha \Diamond\beta \to @_\omega P_\alpha(\mu \wedge @_\alpha \Diamond\beta)$$
$$\to @_\omega P_\alpha @_\mu @_\alpha \Diamond\beta$$
$$\to @_\omega @_\mu @_\alpha \Diamond\beta$$
$$\to @_\mu @_\alpha \Diamond\beta$$

Donc, $@_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E$.

(max) Soient $\omega, \mu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_1$. Nous voulons montrer que

$$\forall\mu\,[\,@_\omega F_\alpha \mu \in E \Rightarrow @_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E\,] \Leftrightarrow \forall\mu\,[\,@_\omega F_\beta \mu \in E \Rightarrow @_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E\,]$$

Supposons que

$$@_\omega F_\alpha \mu \Rightarrow @_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E,$$

pour tout $\mu \in \mathrm{Nom}_0$. Tout d'abord,

$$@_\omega F_\alpha \mu \Rightarrow @_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E, \text{ pour tout } \mu \in \mathrm{Nom}_0,$$
$$\text{ssi } \Diamond\beta \in E(\mu, \alpha), \text{ pour tout } \mu \text{ tel que } \rho_\alpha(\omega, \mu)$$
$$\text{ssi } G_\alpha \Diamond\beta \in E(\omega, \alpha)$$
$$\text{ssi } @_\omega @_\alpha G_\alpha \Diamond\beta \in E$$
$$\text{ssi } @_\omega G_\alpha @_\alpha \Diamond\beta \in E$$

D'autre part, nous avons que

$$\vdash @_\omega @_\alpha \Diamond\beta \wedge \to @_\omega @_\alpha(\Diamond\beta \to (G\Diamond\beta \leftrightarrow G_\beta \Diamond\beta))$$
$$\to @_\omega @_\alpha(G\Diamond\beta \leftrightarrow G_\beta \Diamond\beta)$$
$$\to @_\omega @_\alpha(G_\alpha \Diamond\beta \leftrightarrow G_\beta \Diamond\beta)$$
$$\to (@_\omega G_\alpha @_\alpha \Diamond\beta \leftrightarrow @_\omega G_\beta @_\alpha \Diamond\beta)$$

Donc, $@_\omega G_\beta @_\alpha \Diamond\beta \in E$. Mais ceci signifie que

$$@_\omega F_\beta \mu \Rightarrow @_\mu @_\alpha \Diamond\beta \in E, \text{ pour tout } \mu \in \mathrm{Nom}_0.$$

L'autre direction se démontre de manière symétrique.

(ok) Ce résultat est connu.

(kn) Il faut montrer que la valuation val_E du modèle canonique est normale, c'est-à-dire que, pour $p \in \mathrm{Prop}_1$, il faut montrer que

$$@_\omega @_\alpha p \in E \;\&\; @_\omega @_\alpha \Diamond\beta \in E \Rightarrow @_\omega @_\beta p \in E$$

Nous savons que $\vdash_\kappa p \to \Box p$, et donc que $@_\omega @_\alpha(p \to \Box p) \in E$. Mais

$$\vdash @_\omega @_\alpha (p \to \Box p) \to (@_\omega @_\alpha p \to @_\omega @_\alpha \Box p)$$

Par conséquent, $@_\omega @_\alpha \Box p \in E$. Puisque $@_\omega @_\alpha \Diamond \beta \in E$, il s'ensuit alors que $@_\omega @_\beta p \in E$. ✠

Théorème 10.6.2

La logique des structures de Kamp est axiomatisable.

PREUVE. Conséquence de la proposition précédente et du corollaire 10.5.5 ✠

Chapitre 11
Paris en bouteille

Si Adam avait été homosexuel, personne ne serait là pour le dire.
Oscar Wilde

Nous voulons faire ici pour la logique des conditionnelles contrefactuelles de Lewis (1973) ce que nous avons fait au chapitre précédent pour la logique temporelle et aléthique : montrer que la sémantique des sphères de Lewis est un cas particulier de la sémantique des structures relationnelles d'ordre supérieur. Plus précisément, nous définirons une certaine classe de SROS qui correspondra à la classe des systèmes de sphères de Lewis (les structures qu'il utilise pour définir la sémantique des conditionnelles contrefactuelles), et nous montrerons comment convertir la sémantique de Lewis en une sémantique sur ces SROS. Nous établirons donc un certain nombre de résultats de conversion de structures et de traduction de formules, et nous clôturerons l'analyse en montrant que les V-logiques des conditionnelles contrefactuelles (cf. Lewis 1973 : Chap. 6) sont en fait des cas particuliers de logiques de SROS. Les SROS constituent un cadre prometteur pour explorer des généralisations de la sémantique de Lewis, notamment une sémantique de conditionnelles contrefactuelles *temporalisées* (comme celle développée par Thomason & Gupta 1981), ce que je n'ai malheureusement pas eu le temps de faire dans ce chapitre.

11.1 Les conditionnelles contrefactuelles de Lewis

Pierre angulaire dans l'énonciation des lois universelles, des relations causales et des jugements hypothétiques, aucun connecteur n'a suscité autant de débats en philosophie que la conditionnelle « si … alors », comme en témoigne d'ailleurs l'abondante littérature sur le sujet (cf. l'anthologie de Bennett 2003 et la synthèse de Edgington 2006). La conditionnelle « si … alors » comporte en réalité plusieurs sous-variétés, dont certaines sont plus problématiques que d'autres. Parmi les conditionnelles ayant généré le plus de difficultés, l'on retrouve sans conteste la conditionnelle dite *contrefactuelle* ou *contraire aux faits*, reconnaissable le plus souvent en français par l'usage du plus-que-parfait dans l'antécédent et du conditionnel passé dans le conséquent :

(1) Si Obama avait choisi un autre colistier, il n'aurait pas été élu

Ce qui rend la conditionnelle contrefactuelle problématique est le fait que son évaluation requiert des états de choses, ou des faits, non-actuels.

Le problème consistant à trouver une formalisation convenable de la sémantique des énoncés conditionnels (contrefactuels ou pas) existe depuis que la conditionnelle matérielle a vu le jour, car les conditions de vérité de cette dernière servent très mal notre compréhension intuitive de la conditionnelle en général. Celles-ci mènent à des conséquences contre-intuitives bien répertoriées, et bon nombre d'entre elles semblent découler de l'indépendance trop grande permise entre l'antécédent et le conséquent. Par exemple, la conditionnelle

(1.1) Si Harper est le Premier ministre du Canada (PMC), alors Obama est le Président des États-Unis (POTUS)

est vraie selon les conditions de vérité de la conditionnelle matérielle (l'antécédent et le conséquent sont vrais) et, pourtant, nous pourrions légitimement la considérer comme fausse (ou à tout le moins douteuse), en ce sens qu'il ne semble pas y avoir de lien de conséquence entre le fait que Stephen Harper soit PMC et le fait que Obama soit POTUS. Pour corriger ce problème d'indépendance, on a proposé de représenter la conditionnelle logiquement comme une conditionnelle matérielle précédée d'une modalité de nécessité. L'énoncé (1.1) s'écrirait alors comme

(1.2) $\Box$(Harper est PMC $\rightarrow$ Obama est POTUS)

où '$\Box$' est une modalité de nécessité et '$\rightarrow$' est la conditionnelle matérielle. Cette nouvelle conditionnelle, appelée *conditionnelle stricte*, évite la difficulté précédente, car (1.2) est faux : en effet, il existe un monde possible où Stephen Harper est toujours le PMC mais où John McCain est POTUS (donc l'implication (1.1) est fausse dans ce monde et cela entraîne que (1.2) est faux tout court). Mais la conditionnelle stricte n'est pas sans problèmes non plus. Si nous comprenons

(1.3) Si Barack Obama est assassiné, Joe Biden deviendra le Président

comme la conditionnelle stricte

(1.4) $\Box$(Obama est assassiné $\rightarrow$ Biden devient Président)

alors (1.3) sera vraisemblablement fausse si '$\Box$' traduit une notion de nécessité suffisamment forte. Nous pourrions imaginer une situation possible où Obama et Biden sont tous les deux victimes d'un attentat, ce qui rendrait l'antécédent de (1.4) vrai et son conséquent faux. Cependant, cette situation est moins possible que d'autres où seulement Obama est assassiné, car le président et le vice-président sont toujours censés voyager séparément. Supposons pour les besoins de la cause toutefois que la modalité de nécessité '$\Box$' rend (1.4) vrai, c'est-à-dire qu'elle inclut des possibilités où Obama est assassiné, mais seulement celles qui sont les plus rapprochées du monde actuel, donc aucune où Obama *et* Biden sont assassinés. Considérons alors la conditionnelle contrefactuelle

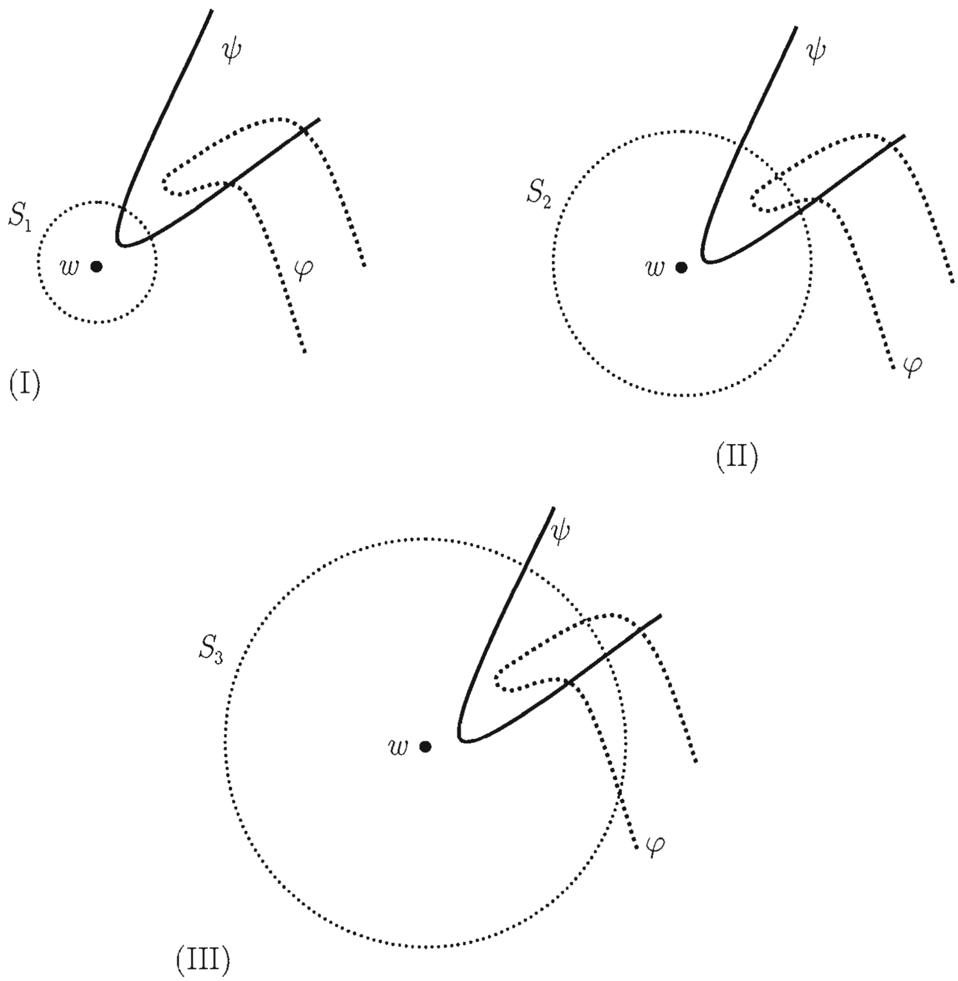
(1.5) Si Joe Biden et Obama sont assassinés, Sarah Palin ira sur la Lune

Si (1.5) se laisse traduire par la conditionnelle stricte

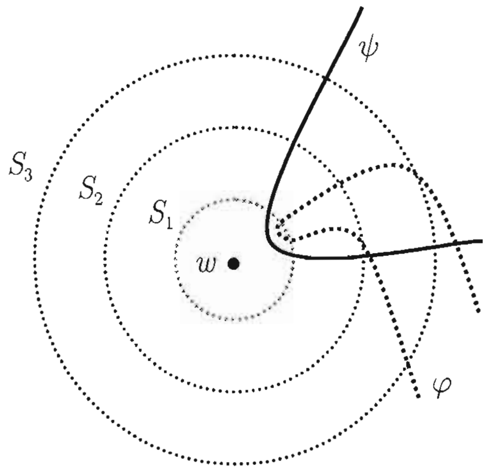
(1.6) $\Box$(Biden et Obama sont assassinés $\rightarrow$ Palin va sur la Lune) alors (1.5) sera vraie en dépit du fait qu'elle est clairement (intuitivement) fausse. La conditionnelle (1.6) est vraie car nous avons supposé que la modalité '$\Box$' n'était pas assez inclusive pour comprendre des possibilités où Biden et Obama sont assassinés conjointement, donc (1.6) est vraie car l'antécédent de la conditionnelle matérielle est toujours faux. Mais (1.5) est clairement faux, car, dans les mondes les plus près du monde actuel où les deux sont assassinés, Sarah Palin ne va pas ou n'ira pas sur la Lune; les possibilités où Palin va sur la Lune sont très éloignées de celles où Obama et Biden sont assassinés, encore plus éloignées du monde actuel que ces dernières ne le sont.

Ces observations rendent clair le fait que la conditionnelle stricte n'est pas un bon candidat pour la traduction formelle de la conditionnelle contrefactuelle. Elles nous montrent également que la conditionnelle contrefactuelle s'apparente davantage à une sorte de conditionnelle stricte variable. Pour que (1.4) ait les bonnes conditions de vérité, il faut que la modalité '$\Box$' soit suffisamment inclusive pour comprendre des mondes où Obama est assassiné mais assez restrictive pour exclure des mondes où Obama *et* Biden sont assassinés; et pour que (1.6) ait les bonnes conditions de vérité, il faut que '$\Box$' soit suffisamment inclusive pour comprendre des mondes où Obama et Biden sont assassinés mais assez restrictive pour exclure des mondes où Sarah Palin va sur la Lune. En somme, pour chaque conditionnelle, il faut que '$\Box$' soit suffisamment inclusive pour permettre à l'antécédent d'être vrai (si possible) mais guère plus.

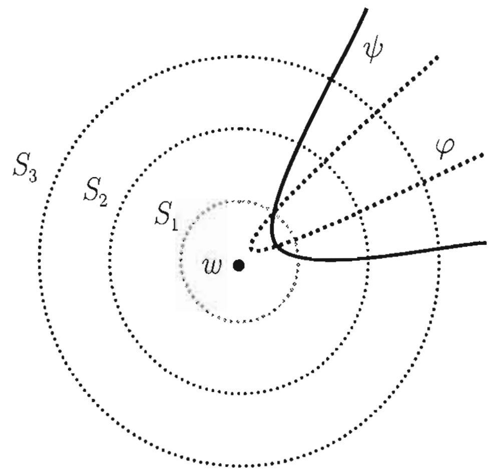
L'idée qu'une variation dans l'interprétation de '$\Box$' influe sur les conditions de vérité de la conditionnelle stricte '$\Box(\varphi \rightarrow \psi)$' est illustrée par la figure ci-dessous. Si l'ensemble des mondes accessibles depuis w ne comprend pas de mondes où φ, comme c'est le cas pour (I), la conditionnelle sera trivialement vraie. Si cet ensemble contient trop de mondes, comme c'est le cas pour (III), la conditionnelle stricte '$\Box(\varphi \rightarrow \psi)$' sera falsifiée par des possibilités très éloignées et impertinentes. Mais s'il contient seulement les mondes qui sont suffisamment rapprochés, la conditionnelle stricte aura les mêmes conditions de vérité que la conditionnelle contrefactuelle.



La valeur de vérité d'une conditionnelle à un monde w sera donc définie à l'aide d'un ensemble de voisinages emboîtés de plus en plus inclusifs autour de w, ce que Lewis appelle un système de sphères. Plus on monte dans la hiérarchie des sphères, plus les sphères englobent des mondes éloignés du monde actuel sur le plan métaphysique. Appelons un θ-monde un monde possible où θ. S'il existe une sphère S telle que tous les φ-mondes de S sont des ψ-mondes, alors le fait que les sphères soient emboîtées entraîne que toutes les sphères S'



(IV)



(V)

plus « proches » du monde actuel que S ont également cette propriété. En particulier, la sphère la plus rapprochée (si elle existe) contenant des φ-mondes aura cette propriété. Nous arrivons donc ici une définition provisoire de la conditionnelle contrefactuelle : cette conditionnelle est vraie s'il existe une sphère contenant des mondes où l'antécédent 'φ' est vrai et telle que tous les φ-mondes de cette sphère sont des mondes où le conséquent 'ψ' est vrai. Le cas (IV) ci-dessus illustre une situation où une conditionnelle de cette forme est vraie, et le cas (V) une situation où elle est fausse.

Nous transformons maintenant ces idées en définitions rigoureuses. Soit W un ensemble de mondes possibles. Un *système de sphères* sur W est définie comme une fonction $\mathbf{S} : W \to \wp(\wp(W))$ telle que

(Sph) $\mathbf{S}(w) \neq \varnothing$ et $< \mathbf{S}(w), \subset >$ est un ordre total,

pour tout $w \in W$. Dans l'exposition philosophique des systèmes de sphères (1973 : 14), Lewis inclut également les conditions suivantes :

(C) $\{w\} \in \mathbf{S}(w)$, pour tout $w \in W$, pour tout $w \in W$

($\cup$) Si $\mathrm{T} \subset \mathbf{S}(w)$, alors $\bigcup \mathrm{T} \in \mathbf{S}(w)$, pour tout $w \in W$

($\cap$) Si $\mathrm{T} \subset \mathbf{S}(w)$, alors $\bigcap \mathrm{T} \in \mathbf{S}(w)$, pour tout $w \in W$

Nous dirons qu'un système de sphères $\mathbf{S}$ est *centré* ssi il satisfait (C), qu'il est *fermé sous union* ssi il satisfait ($\cup$), et qu'il est *fermé sous intersection* ssi il satisfait ($\cap$). Enfin, $\mathbf{S}$ est *fermé* tout court ssi il est fermé sous intersection et union. $\mathbb{S}_W$ dénotera l'ensemble des systèmes de sphères sur W. Dans l'exposition formelle de ces idées (1973 : Ch. 6), les conditions (C), ($\cup$) et ($\cap$) ne font pas partie de la définition du système minimal.

Les systèmes de sphères servent à exprimer la signification des formules d'un langage propositionnel L_{CD} ayant pour connecteurs les conditionnelles '$\Box\!\!\rightarrow$' et '$\Box\!\!\Rightarrow$' de même que les connecteurs booléens habituels. Les clauses syntaxiques de L_{CD} sont données par

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \varphi \Box\!\!\rightarrow \psi \mid \varphi \Box\!\!\Rightarrow \psi$$

où p est une variable propositionnelle de $\mathrm{Prop}_{\mathrm{CD}}$. Un modèle $\mathbf{M}$ pour ce langage est une paire $< \mathbf{S}, val >$, où $\mathbf{S}$ est un système de sphères et *val* est une valuation propositionnelle, c'est-à-dire $val : \mathrm{Prop}_{\mathrm{CD}} \rightarrow \wp(W)$. Les clauses sémantiques pour les connecteurs booléens restent les mêmes, il suffit donc de préciser l'interprétation des conditionnelles dans $\mathbf{M}$. Pour la première conditionnelle :

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \Box\!\!\rightarrow \psi$ ssi

(i) Aucune sphère de $\mathbf{S}(w)$ ne contient un φ-monde, ou

(ii) Il existe une sphère S de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un φ-monde et tout monde de S est un $(\varphi \rightarrow \psi)$-monde.

Formellement, ces conditions se traduisent par

(i) $\forall S \in \mathbf{S}(w)\, \forall v \in S\,[\, v \nVdash \varphi\,]$

(ii) $\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in S\,[\, v \Vdash \varphi\,]\ \&\ \forall v \in S\,[\, v \Vdash \varphi \rightarrow \psi\,]\,]$

Pour la seconde conditionnelle :

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \Box\!\!\Rightarrow \psi$ ssi il existe une sphère S de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un φ-monde et tout monde de S est un $(\varphi \rightarrow \psi)$-monde.

Formellement,

$$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \Box\!\!\Rightarrow \psi \text{ ssi } \exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in S\,[\, v \Vdash \varphi\,]\ \&\ \forall v \in S\,[\, v \Vdash \varphi \rightarrow \psi\,]\,]$$

Ces clauses déterminent la signification de toute formule de L_{CD}.

Lewis met à profit les connecteurs conditionnels '$\Box\!\!\rightarrow$' et '$\Box\!\!\Rightarrow$' afin de donner une interprétation formelle à la conditionnelle « Si φ, alors il se pourrait que ψ » (pp. 21, 25). Deux versions de cette conditionnelle sont offertes :

$\varphi \Diamond\!\!\rightarrow \psi =_{\text{déf}} \neg(\varphi \Box\!\!\rightarrow \neg\psi)$

$\varphi \Diamond\!\!\Rightarrow \psi =_{\text{déf}} \neg(\varphi \Box\!\!\Rightarrow \neg\psi)$

et elles ont les conditions de vérité dérivées suivantes :

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \Diamond\!\!\rightarrow \psi$ ssi

(i) Il existe une sphère de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un φ-monde, et

(ii) Toute sphère S de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un φ-monde contient aussi un $(\varphi \wedge \psi)$-monde.

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \Diamond\!\!\Rightarrow \psi$ ssi toute sphère S de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un φ-monde contient aussi un $(\varphi \wedge \psi)$-monde.

Ces deux nouvelles conditionnelles nous permettent notamment de définir '$\Box\!\!\Rightarrow$' en termes de '$\Box\!\!\rightarrow$' et vice versa :

$\Vdash \varphi \Diamond\!\!\Rightarrow \psi \leftrightarrow (\varphi \Diamond\!\!\rightarrow \varphi \rightarrow \varphi \Diamond\!\!\rightarrow \psi)$

$\Vdash \varphi \Box\!\!\rightarrow \psi \leftrightarrow (\varphi \Box\!\!\Rightarrow \varphi \rightarrow \varphi \Box\!\!\Rightarrow \psi)$

La liste initiale de nos connecteurs est donc redondante.

Il est également possible de définir des notions de nécessité et de possibilité en termes de ces opérateurs (pp. 22, 30). Plus précisément, la nécessité et la possibilité *externes* sont définies comme suit :

$\Box\varphi =_{\text{déf}} \neg\varphi \Box\!\!\rightarrow \bot$

$\Diamond\varphi =_{\text{déf}} \neg\Box\neg\varphi$ (ou, de manière équivalente, $\varphi \Diamond\!\!\rightarrow \top$)

La nécessité et la possibilité *internes* sont définies comme :

$\blacksquare\varphi =_{\text{déf}} \top \Box\!\!\Rightarrow \varphi$ (ou, de manière équivalente, $\Diamond\top \wedge (\top \Box\!\!\rightarrow \varphi)$)

$\blacklozenge\varphi =_{\text{déf}} \top \Diamond\!\!\Rightarrow \varphi$ (ou, de manière équivalente, $\Diamond\top \rightarrow (\top \Diamond\!\!\rightarrow \varphi)$)

Il est facile de vérifier que :

$\mathbf{S}, w \Vdash \Box\varphi$ ssi tout $w \in \bigcup\mathbf{S}(w)$ est un φ-monde

$\mathbf{S}, w \Vdash \Diamond\varphi$ ssi il existe $w \in \bigcup\mathbf{S}(w)$ qui est un φ-monde

$\mathbf{S}, w \Vdash \blacksquare\varphi$ ssi il existe $S \in \mathbf{S}(w)$ non-vide ne contenant que des φ-mondes

$\mathbf{S}, w \Vdash \blacklozenge\varphi$ ssi tout $S \in \mathbf{S}(w)$ non-vide contient un φ-monde

Des connecteurs de possibilité comparée '$\preccurlyeq$', '$\prec$' et '$\approx$' peuvent également être interprétés dans les systèmes de sphères (p. 52) : '$\varphi \preccurlyeq \psi$' signifie qu'il n'est pas moins possible que φ qu'il n'est possible que ψ; '$\varphi \prec \psi$' signifie qu'il est plus possible que φ qu'il ne l'est que ψ; et '$\varphi \approx \psi$' signifie qu'il est aussi possible que φ qu'il l'est que ψ. Dans le langage des sphères :

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \preccurlyeq \psi$ ssi, pour toute sphère S de $\mathbf{S}(w)$, s'il existe un monde de S où ψ est vrai, il existe un monde de S où φ est vrai.

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \prec \psi$ ssi il existe une sphère S de $\mathbf{S}(w)$ qui contient un monde où φ est vrai mais aucun monde où ψ est vrai.

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \approx \psi$ ssi, pour toute sphère S de $\mathbf{S}(w)$, il existe un monde de S où ψ est vrai si et seulement si il existe un monde de S où φ est vrai.

Ce qui se traduit formellement par :

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \preccurlyeq \psi$ ssi $\forall S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in S\,[\,v \Vdash \psi\,] \Rightarrow \exists v \in S\,[\,v \Vdash \varphi\,]\,]$

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \prec \psi$ ssi $\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in S\,[\,v \Vdash \varphi\,]\ \&\ \forall v \in S\,[\,v \nVdash \psi\,]\,]$

$\mathbf{S}, w \Vdash \varphi \approx \psi$ ssi $\forall S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in S\,[\,v \Vdash \psi\,] \Leftrightarrow \exists v \in S\,[\,v \Vdash \varphi\,]\,]$

Ici encore les connecteurs ne sont pas tous indépendants. Il se trouve que '$\preccurlyeq$' et '$\prec$' sont inter-définissables et le connecteur '$\approx$' peut-être défini en fonction de '$\preccurlyeq$' ou de '$\prec$'. En effet, une vérification simple nous donne que

$\Vdash \varphi \preccurlyeq \psi \leftrightarrow \neg(\psi \prec \varphi)$

$\Vdash \varphi \prec \psi \leftrightarrow \neg(\psi \preccurlyeq \varphi)$

$\Vdash \varphi \approx \psi \leftrightarrow (\varphi \preccurlyeq \psi \wedge \psi \preccurlyeq \varphi)$

Par ailleurs, ces connecteurs sont suffisants expressifs pour définir les conditionnelles contrefactuelles plus haut. En effet, nous avons les équivalences suivantes :

$\Vdash \varphi \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} \psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \prec (\varphi \wedge \neg\psi)$

$\Vdash \varphi \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} \psi \leftrightarrow \Diamond\varphi \rightarrow (\varphi \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} \psi)$

La réciproque est vraie aussi car :

$\Vdash \varphi \preccurlyeq \psi \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \Diamond\!\!\Rightarrow \varphi$

$\Vdash \varphi \prec \psi \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \Box\!\!\Rightarrow \neg\psi$

Lewis définira d'abord le système de dérivation pour la logique des conditionnelles en termes du connecteur '$\preccurlyeq$'.

11.2 Caractérisation et axiomatisation

Les conditionnelles peuvent prendre plusieurs formes selon les conditions qui sont imposées aux systèmes de sphères. Les conditions suivantes sont recensées par Lewis (p. 120) :

(N) $\mathbf{S}$ est *normal* ssi $\forall w \in W[\bigcup\mathbf{S}(w) \neq \varnothing\,]$

(T) $\mathbf{S}$ est *totalement réflexif* ssi $\forall w \in W[\, w \in \bigcup\mathbf{S}(w)\,]$

(W) $\mathbf{S}$ est *faiblement centré* ssi

$$\forall w \in W[\,\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,S \neq \varnothing\,]\ \&\ \forall S \in \mathbf{S}(w)\,[\,S \neq \varnothing \Rightarrow w \in S\,]\,]$$

(C) $\mathbf{S}$ est *centré* ssi $\forall w \in W[\,\{w\} \in \mathbf{S}(w)\,]$

(L) $\mathbf{S}$ satisfait la *condition limite* ssi

$$\forall w \in W\,\forall \varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}\,[\,[\![\varphi]\!] \cdot \bigcup\mathbf{S}(w) \Rightarrow$$
$$\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,[\![\varphi]\!] \cdot S\ \&\ \forall T \in \mathbf{S}(w)\,[\,[\![\varphi]\!] \cdot T \Rightarrow S \subset T\,]\,]\,]$$ [60]

(S) $\mathbf{S}$ satisfait la *condition de Stalnaker* ssi

$$\forall w \in W\,\forall \varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}\,[\,[\![\varphi]\!] \cdot \bigcup\mathbf{S}(w) \Rightarrow$$
$$\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,\exists v \in W[\,S \cap [\![\varphi]\!] = \{v\}\,]\,]$$

(U-) $\mathbf{S}$ est *localement uniforme* ssi

$$\forall w, v \in W[\,v \in \bigcup\mathbf{S}(w) \Rightarrow \bigcup\mathbf{S}(w) = \bigcup\mathbf{S}(v)\,]$$

(U) $\mathbf{S}$ est *uniforme* ssi $\forall w, v \in W[\bigcup\mathbf{S}(w) = \bigcup\mathbf{S}(v)\,]$

(A-) $\mathbf{S}$ est *localement absolu* ssi $\forall w, v \in W[\,v \in \bigcup\mathbf{S}(w) \Rightarrow \mathbf{S}(w) = \mathbf{S}(v)\,]$

(A) $\mathbf{S}$ est *absolu* ssi $\forall w, v \in W[\,\mathbf{S}(w) = \mathbf{S}(v)\,]$

(UT) $\mathbf{S}$ est *universel* ssi $\forall w \in W[\bigcup\mathbf{S}(w) = W]$

(WA) $\mathbf{S}$ est *faiblement trivial* ssi $\forall w \in W \forall S \in \mathbf{S}(w)\,[\,S \neq \varnothing \Rightarrow S = W]$

---

[60] $X \cdot Y$ ssi $X \cap Y \neq \varnothing$

(CA) $\mathbf{S}$ est *trivial* ssi $W = \{w\}$ & $\mathbf{S}(w) = \{\varnothing, \{w\}\}$

Il n'est pas très difficile de voir que

(C) $\Rightarrow$ (W)	(A) $\Rightarrow$ (A-)
(W) $\Rightarrow$ (T)	(A) $\Rightarrow$ (U)
(T) $\Rightarrow$ (N)	(UT) $\Leftrightarrow$ (T) & (U)
(S) $\Rightarrow$ (L)	(WA) $\Leftrightarrow$ (W) & (A)
(S) & (W) $\Rightarrow$ (C)	(CA) $\Rightarrow$ (WA)
(U) $\Rightarrow$ (U-)	

Les axiomes de L_{CD} correspondant à ces conditions sont (p. 121) :

Tableau 11.2.1 – Schèmes correspondant aux conditions

CONDITION	AXIOMES
(N)	$\mathbf{N} : \top \prec \bot$
(T)	$\mathbf{T} : \Box\varphi \rightarrow \varphi$
(W)	$\mathbf{W} : (\Box\varphi \vee \blacksquare\varphi) \rightarrow \varphi$
(C)	$\mathbf{C} : \blacklozenge\varphi \rightarrow \varphi$
(L)	Rien
(S)	$\mathbf{S} : (\varphi \wedge \psi) \approx (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\Diamond\varphi$
(U-), (U)	$\mathbf{U} : \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ & $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
(A-), (A)	$\mathbf{A} : \varphi \preccurlyeq \psi \rightarrow \Box(\varphi \preccurlyeq \psi)$ & $\varphi \prec \psi \rightarrow \Box(\varphi \prec \psi)$
(UT)	**U** & **T**
(WA)	**W** & **A**
(CA)	**C** & **A**

Les conditions (U-) et (U) (resp. (A-) et (A)) sont axiomatisées par les mêmes axiomes parce que le langage L_{CD} ne permet pas de les distinguer, la logique des structures satisfaisant (U-) est donc la logique des structures satisfaisant (U) et réciproquement (il en va de même pour (A-) et (A)). Par ailleurs, on remarquera l'absence d'axiomes pour caractériser les conditions ($\cup$) et ($\cap$).

Encore une fois, il se trouve que L_{CD} est incapable de définir ces conditions et, par conséquent, ces conditions sont superfétatoires (p. 119, note en bas de page).

Les systèmes de dérivation sont définis de la manière suivante :

Axiomes. Il y quatre groupes d'axiomes, seuls ceux du quatrième groupe sont facultatifs :

I. Toute instance de tautologie propositionnelle.

II. Les définitions des opérations : par exemple, de '$\Box\!\!\rightarrow$', $\Box\!\!\Rightarrow$', '$\Diamond\!\!\rightarrow$', $\Diamond\!\!\Rightarrow$', '$\Box$', '$\blacksquare$', '$\Diamond$', '$\blacklozenge$' '$\prec$' et '$\approx$' en termes de '$\preccurlyeq$'.

III. Les axiomes de transitivité et de connexité pour '$\preccurlyeq$' :

(TR) $((\varphi \preccurlyeq \psi) \wedge (\psi \preccurlyeq \theta)) \rightarrow (\varphi \preccurlyeq \theta)$

(CN1) $(\varphi \preccurlyeq \psi) \vee (\psi \preccurlyeq \varphi)$

(CN2) $(\varphi \preccurlyeq (\varphi \vee \psi)) \vee (\psi \preccurlyeq (\varphi \vee \psi))$

IV. Une sélection parmi les schèmes **N**, **T**, **W**, **C**, **S**, **U** et **A**.

Règles. Nous admettons les règles du modus ponens et de la possibilité comparée :

(MP) Si $\vdash \varphi$ et $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, alors $\vdash \psi$

(PC) Si $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, alors $\vdash \psi \preccurlyeq \varphi$

Le système de dérivation de base Λ est celui qui n'a aucun schème du groupe IV; et si **X** est un ensemble de schèmes de IV, Λ + **X** désigne le système de dérivation de base avec les schèmes de **X**. Si X est l'ensemble des conditions correspondant aux axiomes de **X** via le tableau 11.2.1, Lewis montre que Λ + **X** est un système de dérivation complet pour X. (Les règles et axiomes choisis sont ceux décrits dans la note en bas de page, p. 124, et non pas ceux de la p. 123.)

11.3 Structures relationnelles d'ordre supérieur de Lewis

Notre tâche est maintenant de montrer que les systèmes de sphères sont des cas particuliers de SROS, et que le langage L_{CD} est traduisible dans un fragment de L_T.

La tâche la plus difficile sera de faire ressortir le système de sphères $\mathbf{S}$ comme une collection de relations d'accessibilités binaires sur W. Soit $n \subset W \times W$ une relation binaire sur W. Nous dirons que n est *voisinage admissible pour* $\mathbf{S}$ ssi

$n[w] = \{v \in W : n(w, v)\} \in \mathbf{S}(w)$

pour tout $w \in W$. Autrement dit, n est admissible si, pour tout w, le voisinage qu'il définit pour w est une sphère de $\mathbf{S}(w)$. Il n'est pas difficile de montrer que de telles relations existent. Soit N_{S} l'ensemble de toutes les relations admissibles pour $\mathbf{S}$. Nous dirons que $N \subset N_{\text{S}}$ est un *système de voisinages admissibles* pour $\mathbf{S}$ ssi, pour tout $w \in W$ et pour tout $S \in \mathbf{S}(w)$, il existe $n \in N$ tel que $n[w] = S$. Nous verrons plus loin qu'un système admissible existe toujours et que le choix de ce système n'a pas d'importance (pour peu qu'il soit admissible pour $\mathbf{S}$). Définissons $\mathbf{S}_{\text{L}}$ comme étant la structure relationnelle d'ordre supérieur fini de rang deux $< W, N, \Phi, R >$ où : N est un système de voisinages admissible pour $\mathbf{S}$; Φ est la fonction identité sur N; et R est la relation binaire $W \times N$ telle que

$(w, n)R(v, m)$ ssi $w = v$,

$R_w(n, m)$ sera une abréviation de $(w, n)R(w, m)$.

Nous verrons que $\mathbf{S}_{\text{L}}$ permet d'imiter l'évaluation des conditionnelles dans $\mathbf{S}$.

En effet, si $w \in W$, les clauses sémantiques de L_{CD} pour '$\Box\!\!\Rightarrow$' stipulent que

$\mathbf{w} \Vdash \varphi \Box\!\!\Rightarrow \psi$ ssi $\exists S \in \mathbf{S}(w)$ tel que S contient un φ-monde et tout φ-monde de S est un ψ-monde

Comment convertir cette clause en une clause qui s'évaluerait à des paires de $W \times N$? Il y a trois opérations saillantes dans celle-ci : (i) une quantification existentielle sur les sphères de $\mathbf{S}(w)$, (ii) une quantification existentielle et universelle sur les mondes d'une certaine sphère, et (iii) une conditionnelle matérielle entre φ et ψ. Afin de représenter de façon modale ces quantifications dans le langage objet, nous introduisons une modalité de rang deux '∇' (avec son dual 'Δ') qui sera interprétée à l'aide de R et une modalité (variable) de rang 1 '$\Box$' (avec son dual '$\Diamond$') qui sera interprétée à l'aide des relations de N. Les clauses sémantiques de ces modalités sont :

$(w, n) \Vdash \nabla\theta$ ssi $(w, m) \Vdash \theta$, pour tout m tel que $R_w(n, m)$

$(w, n) \Vdash \Box\theta$ ssi $(w, n) \Vdash \theta$, pour tout v tel que $n(w, v)$

Les clauses des autres connecteurs sont les mêmes. Étant que la relation R_w est la relation binaire totale N, nous pouvons tout simplement supprimer la condition supplémentaire « tel que $R_w(n, m)$ ». Considérons maintenant la formule '$\Delta(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi)$'. Nous avons que $(w, n) \Vdash \Delta(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi))$

ssi $\exists m \in N[\,(w, m) \Vdash \Diamond\varphi$ & $(w, m) \Vdash \Box(\varphi \to \psi)\,]$

ssi $\exists m \in N[\,[$il existe $v \in m[w]$ t. q. $(v, m) \Vdash \varphi\,]$

& $[$pour tout $v \in m[w]$, si $(v, m) \Vdash \varphi$ alors $(v, m) \Vdash \psi\,]\,]$

Observons deux choses. Premièrement, le fait que les variables propositionnelles de L_{CD} aient des extensions dans W (et non dans $W \times N$) et le fait que R_w soit la relation totale entraînent que l'extension d'une formule ne dépend pas de la deuxième coordonnée dans N, donc

$w \Vdash \theta$ ssi $(w, n) \Vdash \theta$ (quelque soit n).

Deuxièmement, puisque N est un système admissible pour $\mathbf{S}$, l'existence d'une relation m telle que [...] est équivalente à l'existence d'une sphère $S \in \mathbf{S}(w)$ telle que [...]. Ces deux observations nous permettent d'établir que

$w \Vdash \Delta(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi))$

ssi $\exists S \in \mathbf{S}(w)\,[\,[$il existe $v \in S$ t. q. $v \Vdash \varphi\,]$

& $[$pour tout $v \in S$, si $v \Vdash \varphi$ alors $v \Vdash \psi\,]\,]$

Donc les conditions de vérité de $\Delta(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi))$ sont précisément celles de $\varphi \mathrel{\Box\!\!\Rightarrow} \psi$. (Il est clair aussi que ces conditions de vérité ne dépendent pas du choix de N.) Nous nous emploierons dans ce qui suit à démontrer que cette transformation/traduction fonctionne en général et qu'elle a les propriétés désirées.

Nous voulons préciser les conditions que devrait satisfaire une SROF de rang deux $\mathbf{S} = < W, N, \Phi, R >$ pour qu'elle se comporte comme un système de sphères. En s'inspirant de la discussion ci-dessus, nous appellerons $\mathbf{S}$ une *structure de Lewis* ssi

(L1) $(w, n)R(v, m) \Rightarrow w = v$

(L2) R_w est linéaire

(L3) $R_w(n, m) \Rightarrow \Phi(n)[w] \subset \Phi(m)[w]$

La première condition nous est familière. Pour des questions de définissabilité, il sera important que R_w soit linéaire (et satisfasse (L3)), nous interpréterons alors les modalités 'Δ' et '∇' avec la clôture réflexive et symétrique de R_w (la clôture réflexive et symétrique de R_w est la relation totale sur W). Pour $M \subset N$ un sous-ensemble N, nous définissons

$$\Phi(M)[w] = \{E \subset W : E = \Phi(n)[w] \text{ pour un certain } n \in M\}$$

Nous avons :

Proposition 11.3.1

Si $\mathbf{S}$ est une structure de Lewis, alors $< \Phi(N)[w], \subset >$ est un ordre total.

PREUVE. Soit S_1 et $S_2 \in \Phi(N)[w]$, il faut montrer que

$$S_1 \subset S_2 \text{ ou } S_1 = S_2 \text{ ou } S_2 \subset S_1.$$

Si S_1 et $S_2 \in \Phi(N)[w]$, c'est qu'il existe n_1 et $n_2 \in N$ tels que $S_i = \Phi(n_i)[w]$. Puisque R_w est une relation linéaire, elle est totale et donc

$$R_w(n_1, n_2) \text{ ou } n_1 = n_2 \text{ ou } R_w(n_2, n_1)$$

La condition (L3) entraîne la propriété recherchée. ✠

Une manière de reformuler cette proposition est qu'il existe un épimorphisme de $< N, R_w >$ sur $< \Phi(N)[w], \subset >$.

On aura peut-être remarqué la ressemblance entre la proposition 11.3.1 et la condition (Sph). En effet, si nous posons

$\mathbf{S}_\mathbf{S}(w) = \Phi(N)[w]$,

pour tout $w \in W$, cette proposition montre finalement que $\mathbf{S}_\mathbf{S}$ est un système de sphères. Toute structure de Lewis $\mathbf{S}$ peut donc être convertie en un système de sphères $\mathbf{S}_\mathbf{S}$. Nous avons également l'autre direction :

Proposition 11.3.2

Tout système de sphère $\mathbf{S}$ peut être transformé en une structure de Lewis

$\mathbf{S}_\mathrm{L} = < W, N, \Phi, R >$

telle que N est un système de voisinages admissibles pour $\mathbf{S}$ et

$|N| = \sup\{|\mathbf{S}(w)| : w \in W\}$.

Preuve. Soit $\mathbf{S}$ un système de sphères. Il nous faut définir la structure de Lewis $\mathbf{S}_\mathrm{L} = < W, N, \Phi, R >$. Le plus difficile sera de définir l'ensemble N de voisinages admissibles pour $\mathbf{S}$. Posons $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}$ et $W_0 = W$, et soit

$f_0 : W \to \bigcup\{\mathbf{S}_0(w) : w \in W_0\}$

une fonction de choix pour la collection $\{\mathbf{S}_0(w) : w \in W_0\}$. Cette fonction existe car $\mathbf{S}(w) \neq \varnothing$ par (Sph). Posons $\mathbf{S}_1(w) = \mathbf{S}_0(w)\backslash\{f_0(w)\}$ et W_1 l'ensemble des $w \in W$ tels que $\mathbf{S}_1(w) \neq \varnothing$. Si $W_1 \neq \varnothing$, soit $g_1 : W_1 \to \bigcup\{\mathbf{S}_1(w) : w \in W_1\}$ la fonction de choix pour la collection $\{\mathbf{S}_1(w) : w \in W_1\}$. Nous définissons

$f_1 : W \to \bigcup\{\mathbf{S}(w) : w \in W\}$

la fonction telle que

$f_1(w) = g_1(w)$, si $w \in W_1$

$f_1(w) = f_0(w)$, si $w \notin W_1$

De manière générale, pour un cardinal successeur κ, nous posons

$\mathbf{S}_\kappa(w) = \mathbf{S}_{\kappa-1}(w)\backslash\{f_{\kappa-1}(w)\}$.

L'ensemble W_κ est défini comme l'ensemble des $w \in W$ tels que $\mathbf{S}_\kappa(w) \neq \varnothing$. Si $W_\kappa \neq \varnothing$, la fonction $g_\kappa : W_\kappa \to \bigcup\{\mathbf{S}_\kappa(w) : w \in W_\kappa\}$ est la fonction de choix de la collection $\{\mathbf{S}_\kappa(w) : w \in W_\kappa\}$, et

$f_\kappa : W \to \bigcup\{\mathbf{S}(w) : w \in W\}$

est la fonction telle que

$f_\kappa(w) = g_\kappa(w)$, si $w \in W_\kappa$

$f_\kappa(w) = f_{\kappa-1}(w)$, si $w \notin W_\kappa$.

Si κ est un cardinal limite, nous posons

$\mathbf{S}_\kappa(w) = \bigcap\{\mathbf{S}_\nu(w) : \nu < \kappa\}$,

L'ensemble $W_\kappa = \bigcap\{W_\nu : \nu < \kappa\}$. Si $W_\kappa \neq \varnothing$, $g_\kappa : W_\kappa \to \bigcup\{\mathbf{S}_\kappa(w) : w \in W_\kappa\}$ est la fonction de choix de la collection $\{\mathbf{S}_\kappa(w) : w \in W_\kappa\}$, et

$f_\kappa : W \to \bigcup\{\mathbf{S}(w) : w \in W\}$

est la fonction telle que

$f_\kappa(w) = g_\kappa(w)$, si $w \in W_\kappa$

$f_\kappa(w) = \bigcap\{f_\nu(w) : \nu < \kappa\}$, si $w \notin W_\kappa$.

Pour $w \notin W_\kappa$, il n'est pas difficile de voir que $f_\mu(w) = f_\nu(w)$, pour tous μ, $\nu < \kappa$. Nous voulons montrer maintenant qu'il existe un cardinal à partir duquel $W_\kappa = \varnothing$, de sorte que la définition de f_κ se stabilise.

Intuitivement, ceci n'est pas difficile à voir étant qu'une sphère est retirée de chaque $\mathbf{S}_\kappa(w)$, pour tout w, à chaque étape du processus. En particulier, si $\kappa < \mu$, et si $w \in W_\mu \subset W_\kappa$, alors $\mathbf{S}_\kappa(w) \supsetneq \mathbf{S}_\mu(w)$. Il existe donc un plus petit cardinal κ^* tel que $\mathbf{S}_{\kappa^*}(w) = \varnothing$, pour tout $w \in W$. Donc, $W_\nu = \varnothing$ et $f_\nu = f_{\kappa^*}$ pour tout $\nu \geq \kappa^*$. Il n'est pas difficile de voir que $\kappa^* = \sup\{|\mathbf{S}(w)| : w \in W\}$.

Soit $F = \{f_\nu : \nu \leq \kappa^*\}$. Pour tout $f \in F$, nous définissons la relation binaire n_f sur W comme suit :

$n_f(w, v)$ ssi $v \in f(w)$.

Posons $N = \{n_f : f \in F\}$ et $\Phi = \mathrm{Id}_N$, la fonction identité sur N. Pour tout $w \in W$, nous définissons la relation R_w comme suit :

$R_w(n_f, n_g)$ ssi $f(w) \subsetneq g(w)$

Il est clair que $\mathbf{S}_L = < W, N, \Phi, R >$ est une structure de Lewis. Par ailleurs, par construction, N est un système de voisinages admissibles pour **S**. ✠

Nous pouvons donc convertir les conditions sur les systèmes de sphères énoncées à la section précédente en des conditions sur les structures de Lewis :

(N') **S** est *normal* ssi $\forall w \in W[\bigcup\Phi(N)[w] \neq \varnothing]$

(T') **S** est *totalement réflexif* ssi $\forall w \in W[w \in \bigcup\Phi(N)[w]]$

(W') **S** est *faiblement centré* ssi

$$\forall w \in W[\exists n \in N[n[w] \neq \varnothing] \;\&\; \forall n \in N[n[w] \neq \varnothing \Rightarrow w \in n[w]]]$$

(C') **S** est *centré* ssi $\forall w \in W[\exists n \in N[m[w] = \{w\}]]$

(L') **S** satisfait la *condition limite* ssi

$$\forall w \in W\, \forall \varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}[\llbracket\varphi\rrbracket \cdot \bigcup\Phi(N)[w] \Rightarrow$$
$$\exists n \in N[\llbracket\varphi\rrbracket \cdot n[w] \;\&\; \forall m \in N[\llbracket\varphi\rrbracket \cdot m[w] \Rightarrow n[w] \subset m[w]]]]$$

(S') **S** satisfait la *condition de Stalnaker* ssi

$$\forall w \in W\, \forall \varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}[\llbracket\varphi\rrbracket \cdot \bigcup\Phi(N)[w] \Rightarrow$$
$$\exists n \in N[\exists v \in W[n[w] \cap \llbracket\varphi\rrbracket = \{v\}]]$$

(U'-) **S** cst *localement uniforme* ssi

$$\forall w, v \in W[v \in \bigcup\Phi(N)[w] \Rightarrow \bigcup\Phi(N)[w] = \bigcup\Phi(N)[v]]$$

(U') **S** est *uniforme* ssi $\forall w, v \in W[\bigcup\Phi(N)[w] = \bigcup\Phi(N)[v]]$

(A'-) **S** est *localement absolu* ssi

$$\forall w, v \in W[v \in \Phi(N)[w] \Rightarrow \Phi(N)[w] = \Phi(N)[v]]$$

(A') **S** est *absolu* ssi $\forall w, v \in W[\Phi(N)[w] = \Phi(N)[v]]$

(UT') **S** est *universel* ssi $\forall w \in W[\bigcup\Phi(N)[w] = W]$

(WA') **S** est *faiblement trivial* ssi $\forall w \in W \forall n \in N[n[w] \neq \varnothing \Rightarrow n[w] = W]$

(CA') **S** est *trivial* ssi $W = \{w\} \;\&\; \Phi(N)[w] = \{\varnothing, \{w\}\}$

Dans ce qui suit, nous supposerons que si X est un ensemble de conditions sur les système de sphères (lesquelles sont formulées à la section 11.2), nous définissons l'ensemble X' comme étant l'ensemble des conditions correspondantes (décrites ci-dessus) sur les structures de Lewis. Et réciproquement, si X' est un ensemble de conditions sur les structures de Lewis, alors X est l'ensemble correspondant de conditions sur les sphères de Lewis.

Nous avons :

Corollaire 11.3.3

Si **S** est un système de sphères de type X, alors $\mathbf{S}_L$ (sa conversion en structure de Lewis) est de type X'; et si **S** est une structure de Lewis de type X', alors $\mathbf{S}_S$ (sa conversion en système de sphères) est de type X.

PREUVE. Conséquence immédiate de ce qui précède. ✠

11.4 Définissabilité et axiomatisation des structures de Lewis

Nous montrons que les structures de Lewis sont définissables et que leur logique est axiomatisable. Pour ce faire, il faudrait spécifier le langage L_L avec lequel nous comptons les définir, L_L est en quelque sorte un fragment de L_T. La modalité de voisinage '∇' (resp. 'Δ') sera définie avec les modalités (complémentaires) de rang deux '$[\uparrow]$' et '$[\downarrow]$' (resp. '$<\uparrow>$' et '$<\downarrow>$'). Les modalités '$[\uparrow]$' et '$[\downarrow]$' se comporteront comme des modalités 'G_2' et 'H_2' de L_T (et '$<\uparrow>$' et '$<\downarrow>$' comme 'F_2' et 'P_2'). Les clauses syntaxiques pour L_L sont

$$\varphi := p \mid \omega \mid \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box\varphi \mid \Box_\alpha\varphi \mid [\downarrow]\varphi \mid [\uparrow]\varphi$$

où $p \in \mathrm{Nom}_{\leq 1}$, $\omega \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Les clauses sémantiques pour un modèle basé sur $\mathbf{S} = < W, N, \Phi, R >$ sont donc :

$(w, n) \Vdash \Box\varphi$ ssi $(w, n) \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $\Phi(n)(w, v)$

$(w, n) \Vdash \Box_\alpha\varphi$ ssi $(w, n) \Vdash \varphi$, pour tout v tel que $\Phi(\alpha)(w, v)$

$(w, n) \Vdash [\downarrow]\varphi$ ssi $(w, m) \Vdash \varphi$, pour tout m tel que $R_w(m, n)$

$(w, n) \Vdash [\uparrow]\varphi$ ssi $(w, m) \Vdash \varphi$, pour tout m tel que $R_w(n, m)$

La définissabilité des conditions (L1) et (L2) est facile à obtenir; en effet, les schèmes suivants conviennent à la tâche :

(idk) $<\downarrow>\omega \rightarrow \omega \;\&\; <\uparrow>\omega \rightarrow \omega$

(aref) $\alpha \rightarrow \neg<\downarrow>\alpha \;\&\; \alpha \rightarrow \neg<\uparrow>\alpha$

(4_1) $[\downarrow]\alpha \rightarrow [\downarrow][\downarrow]\alpha \;\&\; [\uparrow]\alpha \rightarrow [\uparrow][\uparrow]\alpha$

(tot) $<\downarrow>\alpha \vee \alpha \vee <\uparrow>\alpha$

pour tous $\omega \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha \in \mathrm{Nom}_1$. Le premier schème définit la propriété (L1), et les trois autres définissent la linéarité de R_w, c'est-à-dire (L2). Reste à définir la propriété (L3). Posons

(sph$\downarrow$) $\Box\varphi \rightarrow [\downarrow]\Box\varphi$

(sph$\uparrow$) $\Diamond\varphi \rightarrow [\uparrow]\Diamond\varphi$

pour tout $\varphi \in \mathrm{FCon}_L$.

Proposition 11.4.1

Soit **S** une structure $< W, N, \Phi, R >$. Nous avons que

(a) $\forall\varphi \in \mathrm{FCon}_L\,[\,\mathbf{S} \Vdash (\mathrm{sph}\downarrow)(\varphi)\,]$ ssi

$\forall n, m \in N\,[\,R_w(m, n) \Rightarrow \Phi(m)[w] \subset \Phi(n)[w]\,]$

(b) $\forall\varphi \in \mathrm{FCon}_L\,[\,\mathbf{S} \Vdash (\mathrm{sph}\uparrow)(\varphi)\,]$ ssi

$\forall n, m \in N\,[\,R_w(m, n) \Rightarrow \Phi(m)[w] \subset \Phi(n)[w]\,]$

(c) $\forall\varphi \in \mathrm{FCon}_L\,[\,\mathbf{S} \Vdash (\mathrm{sph}\downarrow)(\varphi)\,] \Leftrightarrow \forall\varphi \in \mathrm{FCon}_L\,[\,\mathbf{S} \Vdash (\mathrm{sph}\uparrow)(\varphi)\,]$

PREUVE. (a) ($\Rightarrow$) Soient $m, n \in N$ et $w \in W$ tels que $R_w(m, n)$. Nous voulons montrer que $\Phi(m)[w] \subset \Phi(n)[w]$. Soit **M** le modèle basé sur **S** tel que $val(p) = \Phi(n)[w]$. Nous avons que **M**, $(w, n) \Vdash \Box p$, car

$(w, n) \Vdash \Box p$ ssi $(v, n) \Vdash p$, pour tout $v \in \Phi(n)[w]$

ssi $v \in val(p)$, pour tout $v \in \Phi(n)[w]$

Puisque (sph$\downarrow$) est valide dans **S**, nous avons que $(w, n) \Vdash [\downarrow]\Box p$. Mais,

$(w, n) \Vdash [\downarrow]\Box p$ ssi $(w, x) \Vdash \Box p$, pour tout x tel que $R_w(x, n)$

ssi $\forall x\,[\,R_w(x, n) \Rightarrow \forall v\,[\,\Phi(x)(w, v) \Rightarrow v \in val(p)\,]\,]$

ssi $\forall x[\, R_w(x, n) \Rightarrow \forall v[\, v \in \Phi(x)[w] \Rightarrow v \in \Phi(n)[w]\,]\,]$

ssi $\forall x[\, R_w(x, n) \Rightarrow \Phi(x)[w] \subset \Phi(n)[w]\,]$

Puisque $R_w(m, n)$, le résultat s'ensuit.

($\Leftarrow$) Soit $\varphi \in \mathrm{FCon_L}$, soit **M** un modèle basé sur **S**, et soient $w \in W$ et $n \in N$. Si $(w, n) \nVdash \Box\varphi$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $(w, n) \Vdash \Box\varphi$, ce qui est équivalent à $\{n\}\times\Phi(n)[w] \subset [\![\varphi]\!]$. Puisque $\varphi \in \mathrm{FCon_L}$, nous avons que $[\![\varphi]\!] = V_\varphi \times N$, où $V_\varphi \subset W$, et donc, $\{n\}\times\Phi(n)[w] \subset [\![\varphi]\!]$ ssi $\Phi(n)[w] \subset V_\varphi$. Dans ce cas, nous avons que

$(w, n) \Vdash \Box\varphi \to [\downarrow]\Box\varphi$ ssi $\forall m \in N[\, R_w(m, n) \Rightarrow \Phi(m)[w] \subset V_\varphi\,]$

Par hypothèse, nous avons que $\Phi(m)[w] \subset \Phi(n)[w]$ dès que $R_w(m, n)$. D'où le résultat.

(b) La preuve est analogue à (a).

(c) Conséquence directe des parties précédentes. ✠

La condition (L3) est donc définissable par (sph↓) ou (sph↑).

Nous définissons la modalité '∇' à partir de '$[\downarrow]$' et '$[\uparrow]$' comme suit :

$\nabla\varphi =_{\text{déf.}} [\downarrow]\varphi \wedge \varphi \wedge [\uparrow]\varphi$

Le dual 'Δ' de '∇' est défini naturellement comme

$\Delta\varphi =_{\text{déf.}} \neg\nabla\neg\varphi$ (ce qui est équivalent à '$<\downarrow>\varphi \vee \varphi \vee <\uparrow>\varphi$')

Nous avons

Proposition 11.4.2

(a) $(w, n) \Vdash \nabla\varphi$ ssi $(w, m) \Vdash \varphi$, pour tout $m \in N$

(b) La modalité '∇' satisfait (K), (T), (*4*) et (*5*)

PREUVE. (a) Nous avons que $(w, n) \Vdash \nabla\varphi$

ssi $(w, n) \Vdash [\downarrow]\varphi \wedge \varphi \wedge [\uparrow]\varphi$

ssi $(w, n) \Vdash [\downarrow]\varphi$ & $(w, n) \Vdash \varphi$ & $(w, n) \Vdash [\uparrow]\varphi$

ssi $(w, m) \Vdash \varphi$, pour tout m tel que $R_w(m, n)$ ou $n = m$ ou $R_w(n, m)$
Puisque R_w est totale, le résultat s'ensuit.
(b) Ceci découle de (a) et du fait qu'une modalité interprétée par une relation d'équivalence satisfait ces formules. ✠

Nous définissons le système déductif de base Γ_L comme étant le système déductif ayant les mêmes règles et axiomes que le système déductif de base Γ_T (en omettant bien sûr tout ce qui s'applique aux rangs > 2) et qui possède en plus les axiomes (idk), (aref), (4_1), (tot), et (sph↓) (ou (sph↑)). Nous savons déjà que ces règles et axiomes sont valides dans les structures de Lewis. Montrons qu'ils sont complets.

Proposition 11.4.3

La logique de base Γ_L est complète par rapport aux structures de Lewis.

PREUVE. Montrons que le modèle canonique M_E basé sur E, un ensemble Γ_L-maxcon nommé et collé, est une structure de Lewis. Nous savons déjà que (idk), (aref) et (4_1) sont canoniques pour les propriétés qu'ils définissent. Montrons que (tot) et (sph↓) le sont aussi.
(tot). Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_1$. Puisque (total) est un axiome, nous avons par ($\mathrm{Nec}_@$) que $@_\alpha(<\downarrow>\beta \vee \beta \vee <\uparrow>\beta) \in E$. Or,

$$\vdash @_\alpha(<\downarrow>\beta \vee \beta \vee <\uparrow>\beta) \rightarrow (@_\alpha<\downarrow>\beta \vee @_\alpha\beta \vee @_\alpha<\uparrow>\beta)$$

donc $@_\alpha<\downarrow>\beta \in E$ ou $@_\alpha\beta \in E$ ou $@_\alpha<\uparrow>\beta \in E$ par maximalité.
(sph↓). Nous devons montrer que, pour tous $\mu, \nu \in \mathrm{Nom}_0$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{Nom}_1$, si $@_\alpha<\downarrow>\beta \in E$ alors

$$@_\mu\Diamond_\beta\nu \in E \Rightarrow @_\mu\Diamond_\alpha\nu \in E$$

(On remarquera que $@_\mu\Diamond_\beta\nu \in E$ est équivalent à $\nu \in \rho_\beta[\mu]$.) Supposons le contraire, que $@_\alpha<\downarrow>\beta$, $@_\mu\Diamond_\beta\nu \in E$ mais $@_\mu\Diamond_\alpha\nu \notin E$. Or, nous avons que

$$@_\mu\Diamond_\alpha\nu \notin E \Rightarrow \neg@_\mu\Diamond_\alpha\nu \in E, \text{ par maximalité}$$

$\Rightarrow @_\mu\Box_\alpha\neg\nu \in E$

$\Rightarrow @_\mu @_\alpha \Box_\alpha\neg\nu \in E$, par (perm-ind)

$\Rightarrow @_\mu @_\alpha \Box\neg\nu \in E$, par ($\text{inst}_\Box$)

$\Rightarrow @_\mu @_\alpha [\downarrow]\Box\neg\nu \in E$, par (sph$\downarrow$)

$\Rightarrow @_\mu @_\alpha [\downarrow]\neg\Diamond\nu \in E$

Par ailleurs, si $@_\alpha{<}\downarrow{>}\beta \in E$, alors $@_\mu @_\alpha{<}\downarrow{>}\beta \in E$, par ($\text{ind}_@$). De même, $@_\mu\Diamond_\beta\nu \in E$ entraîne que $@_\mu @_\beta \Diamond_\beta\nu \in E$ et donc $@_\mu @_\beta\Diamond\nu \in E$. Par (bridge), nous avons donc

$@_\mu @_\alpha{<}\downarrow{>}\Diamond\nu \in E$

Mais ceci, avec le fait que $@_\mu @_\alpha[\downarrow]\neg\Diamond\nu \in E$, entraîne une contradiction. Ce qui complète la démonstration. ✠

Il nous restera à déterminer quels axiomes il faut ajouter à Γ_L pour avoir la complétude par rapport aux conditions de structures énoncées à la fin de la section précédente. Pour nous faciliter la tâche ici, nous allons d'abord définir une traduction de L_CD dans L_L ayant toutes les propriétés désirées, et nous nous inspirerons ensuite des traductions des schèmes du tableau 11.2.1 pour trouver nos axiomes.

11.5 Traduction de L_CD dans L_L

Nous avons déjà esquissé une traduction des formules de L_CD dans L_L, il reste à nous assurer que tout se déroule tel qu'anticipé. D'abord la traduction. Nous nous donnons une certaine bijection $\vartheta : \text{Prop}_\text{CD} \to \text{P}$, où $\text{P} \subset \text{Prop}_0$, et nous définissons la fonction de traduction

$\text{Trad} : \text{Form}_\text{CD} \to \text{Form}_\text{L}$

comme suit :

$\text{Trad}(p) = \vartheta(p)$, si $p \in \text{Prop}_\text{CD}$

$\text{Trad}(\neg\varphi) = \neg\text{Trad}(\varphi)$

$\mathrm{Trad}(\varphi \mathbf{~b~} \psi) = \mathrm{Trad}(\varphi) \mathbf{~b~} \mathrm{Trad}(\psi)$, si **b** est un connecteur booléen binaire

$\mathrm{Trad}(\varphi \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} \psi) = \vartriangle\Diamond\varphi \rightarrow \vartriangle(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi))$

$\mathrm{Trad}(\varphi \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} \psi) = \vartriangle(\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi))$

Un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$ basé sur un système de sphères $\mathbf{S}$ est converti en un modèle $\mathbf{M}_{\mathrm{L}} = < \mathbf{S}_{\mathrm{L}}, val_{\mathrm{L}} >$ basé sur la structure de Lewis $\mathbf{S}_{\mathrm{L}}$ correspondante : val_{L} est *une* valuation telle que

$val_{\mathrm{L}}(\vartheta(p)) = val(p)$

pour tout $p \in \mathrm{P}$. Il y a évidemment plusieurs valuations de cette sorte, car la condition ne contraint pas la valeur de val_{L} sur $\mathrm{Prop}_{\mathrm{L}}\backslash\mathrm{P}$ (mais ce sera sans conséquences pour la suite.)

Nous arrivons donc à :

Proposition 11.5.1

Soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$. Pour tout $\theta \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$, écrivons θ' pour $\mathrm{Trad}(\theta)$. Nous avons que

$(w, n) \Vdash (\varphi \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle\Diamond\varphi' \rightarrow \vartriangle(\Diamond\varphi' \wedge \Box(\varphi' \rightarrow \psi'))$

$(w, n) \Vdash (\varphi \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle(\Diamond\varphi' \wedge \Box(\varphi' \rightarrow \psi'))$

$(w, n) \Vdash (\varphi \mathbin{\Diamond\!\!\rightarrow} \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle\Diamond\varphi' \wedge \triangledown(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond(\varphi' \wedge \psi'))$

$(w, n) \Vdash (\varphi \mathbin{\Diamond\!\!\Rightarrow} \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \triangledown(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond(\varphi' \wedge \psi'))$

$(w, n) \Vdash (\Box\varphi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \triangledown\Box\varphi'$

$(w, n) \Vdash (\Diamond\varphi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle\Diamond\varphi'$

$(w, n) \Vdash (\blacksquare\varphi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle(\Diamond\top \wedge \Box\varphi')$

$(w, n) \Vdash (\blacklozenge\varphi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \triangledown(\Diamond\top \rightarrow \Diamond\varphi')$

$(w, n) \Vdash (\varphi \preccurlyeq \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \triangledown(\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\varphi')$

$(w, n) \Vdash (\varphi \prec \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \vartriangle(\Diamond\varphi' \wedge \Box\neg\psi')$

$(w, n) \Vdash (\varphi \approx \psi)'$ ssi $(w, n) \Vdash \triangledown(\Diamond\varphi' \leftrightarrow \Diamond\psi')$

PREUVE. Les vérifications sont directes. ✠

Proposition 11.5.2

Soit $\mathbf{M} = < \mathbf{S}, val >$ un modèle basé sur le système de sphères $\mathbf{S}$ et soit $\mathbf{M}_{\mathrm{L}} = < \mathbf{S}_{\mathrm{L}}, val_{\mathrm{L}} >$ un modèle de Lewis correspondant[61]. Pour toute formule $\varphi \in L_{\mathrm{CD}}$, nous avons

$\mathbf{M}, w \Vdash \varphi$ ssi $\mathbf{M}_{\mathrm{L}}, (w, n) \Vdash \varphi'$

PREUVE. Dans ce qui suit θ' dénotera Trad(θ), pour tout $\theta \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$. Nous démontrons le résultat par induction sur $\varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$.

Étape de base. Si $\varphi = p$, alors $\varphi' = \vartheta(p)$. L'équivalence tient par définition de val_{L}.

Étape d'induction. (a) Si $\varphi = \neg\psi$ ou $\psi\ \mathbf{b}\ \theta$, avec $\mathbf{b}$ un connecteur booléen binaire, le résultat est une conséquence directe de l'hypothèse d'induction.

(b) Si $\varphi = \psi \;\Box\!\!\rightarrow \theta$, alors $\mathbf{M}, w \Vdash \psi \;\Box\!\!\rightarrow \theta$

ssi (i) $\forall S \in \mathbf{S}(w)\, \forall v \in S\, [\, v \nVdash \psi\,]$ ou

(ii) $\exists S \in \mathbf{S}(w)\, [\, \exists v \in S\, [\, v \Vdash \psi\,]\ \&\ \forall v \in S\, [\, v \Vdash \psi \to \theta\,]\,]$

ssi (i) $\forall m \in N\, \forall v \in m[w]\, [\, (v, m) \nVdash \psi'\,]$ ou

(ii) $\exists m \in N\, [\, \exists v \in m[w]\, [(v, m) \Vdash \psi'\,]\ \&\ \forall v \in m[w]\, [\, (v, m) \Vdash \psi' \to \theta'\,]\,]$

ssi (i) $(w, n) \Vdash \nabla\Box\neg\psi'$ ou

(ii) $(w, n) \Vdash \Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box(\psi' \to \theta'))$

ssi $(w, n) \Vdash \nabla\Box\neg\psi' \vee \Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box(\psi' \to \theta'))$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\psi' \to \Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box(\psi' \to \theta'))$

(c) Si $\varphi = \psi \;\Box\!\!\Rightarrow \theta$, alors $\mathbf{M}, w \Vdash \psi \;\Box\!\!\Rightarrow \theta$ ssi

ssi $\exists S \in \mathbf{S}(w)\, \exists v \in S\, [\, v \Vdash \psi\,]\ \&\ \forall v \in S\, [\, v \Vdash \psi \to \theta\,]\,]$

ssi $\exists m \in N\, [\, \exists v \in m[w]\, [(v, m) \Vdash \psi'\,]\ \&\ \forall v \in m[w]\, [\, (v, m) \Vdash \psi' \to \theta'\,]\,]$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box(\psi' \to \theta'))$

Ce qui démontre le résultat. ✠

---

[61] Il y a plusieurs modèles de Lewis correspondant à un même système de sphères, mais cela ne présente pas de difficultés pour les résultats de traduction.

Corollaire 11.5.3

Pour toute formule $\varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$,

$H \Vdash_{\mathrm{X}} \varphi$ ssi $H' \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$

PREUVE. Nous avons que $H \Vdash_{\mathrm{X}} \varphi \Leftrightarrow H' \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$

ssi non-($H \Vdash_{\mathrm{X}} \varphi$) $\Leftrightarrow$ non-($H' \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$)

Or, non-($H \Vdash_{\mathrm{X}} \varphi$)

ssi $\exists \mathbf{M} = <\mathbf{S}, \mathit{val}>$ et $\exists w \in W$ tels que $\mathbf{S}$ est de type X et

$\mathbf{M}, w \Vdash H$ & $\mathbf{M}, w \nVdash \varphi$

ssi $\exists \mathbf{M}_{\mathrm{L}} = <\mathbf{S}_{\mathrm{L}}, \mathit{val}_{\mathrm{L}}>$ et $\exists w \in W$ tels que $\mathbf{S}_{\mathrm{L}}$ est de type X' et

$\mathbf{M}_{\mathrm{L}}, (w, n) \Vdash H$ & $\mathbf{M}_{\mathrm{L}}, (w, n) \nVdash \varphi$

ssi non-($H' \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$).

Ce qui démontre le résultat. ✠

Nous avons donc que la relation de conséquence sémantique '$\Vdash_{\mathrm{X}}$' pour les sphères de Lewis de type X est équivalente à la relation de conséquence '$\Vdash_{\mathrm{X'}}$' des structures de Lewis de type X' pour les traductions dans L_{L} des formules de L_{CD}. Nous allons montrer à présent que la logique des SROS induit une logique complète pour '$\Vdash_{\mathrm{X'}}$' sur les structures de Lewis de type X'.

Tout d'abord, nous montrons que les traductions des axiomes et de la règle spécifiques au système déductif de base Λ sont démontrables dans le système de base Γ_{L}.

Proposition 11.5.4

Nous avons que $\vdash$ Trad(TR), $\vdash$ Trad(CN1) et $\vdash$ Trad(CN2), et que

$\vdash \mathrm{Trad}(\varphi \to \psi) \Rightarrow \vdash \mathrm{Trad}(\psi \preccurlyeq \varphi)$.

PREUVE. L'axiome (TR), qui est donné par

$((\varphi \preccurlyeq \psi) \wedge (\psi \preccurlyeq \theta)) \to (\varphi \preccurlyeq \theta)$, est traduit dans L_{L} par

$$(\nabla(\Diamond\psi' \to \Diamond\varphi') \wedge \nabla(\Diamond\theta' \to \Diamond\psi')) \to \nabla(\Diamond\theta' \to \Diamond\varphi')$$

où $\varphi' = \mathrm{Trad}(\varphi)$, $\psi' = \mathrm{Trad}(\psi)$ et $\theta' = \mathrm{Trad}(\theta)$. Or, nous avons que

$$\begin{aligned} &\vdash (\nabla(\Diamond\psi' \to \Diamond\varphi') \wedge \nabla(\Diamond\theta' \to \Diamond\psi')) \to \nabla((\Diamond\psi' \to \Diamond\varphi') \wedge (\Diamond\theta' \to \Diamond\psi')) \\ &\qquad\qquad \to \nabla(\Diamond\theta' \to \Diamond\varphi') \end{aligned}$$

Ce qui démontre Trad(TR).

L'axiome (CN1) est le schème de formule $(\varphi \preccurlyeq \psi) \vee (\psi \preccurlyeq \varphi)$. Sa traduction dans L_{L} donne

$$\nabla(\Diamond\psi' \to \Diamond\varphi') \vee \nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi').$$

Autrement dit, il faut montrer que

$$\Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \to \nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi')$$

Nous rappelons que $\Delta(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi')$ est équivalent à

$$(<\downarrow>(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \vee (\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \vee <\uparrow>(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi'))$$

Il faut donc montrer que chacun de ces disjoints implique $\nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi')$. Nous utiliserons les validités

$$\Box\theta \to [\downarrow]\Box\theta$$

$$\Diamond\theta \to [\uparrow]\Diamond\theta$$

Or, nous avons que

$$\begin{aligned} &\vdash <\downarrow>(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \to <\downarrow>(\Diamond\psi' \wedge \Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \\ &\qquad \to <\downarrow>(([\uparrow]\Diamond\psi' \wedge \Diamond\psi' \wedge [\downarrow]\Box\neg\varphi') \\ &\qquad \to <\downarrow>([\uparrow](\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \wedge (\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \wedge [\downarrow](\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi')) \\ &\qquad \to <\downarrow>\nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \\ &\qquad \to \Delta\nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \\ &\qquad \to \nabla\nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \\ &\qquad \to \nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \end{aligned}$$

et, par un argument analogue, que

$$\begin{aligned} &\vdash <\uparrow>(\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \to <\uparrow>(\Diamond\psi' \wedge \Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \\ &\qquad \to \nabla(\Diamond\varphi' \to \Diamond\psi') \end{aligned}$$

et enfin que

$$\begin{aligned}\vdash (\Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') &\rightarrow (\Diamond\psi' \wedge \Diamond\psi' \wedge \Box\neg\varphi') \\ &\rightarrow [\uparrow]\Diamond\psi' \wedge \Diamond\psi' \wedge [\downarrow]\Box\neg\varphi' \\ &\rightarrow [\uparrow](\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi') \wedge (\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi') \wedge [\downarrow](\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi') \\ &\rightarrow \nabla(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi')\end{aligned}$$

D'où le résultat.

L'axiome (CN2) est le schème $(\varphi \preccurlyeq (\varphi \vee \psi)) \vee (\psi \preccurlyeq (\varphi \vee \psi))$ et se traduit dans L_{L} par

$$\nabla(\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\varphi') \vee \nabla(\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\psi').$$

Or,

$$\begin{aligned}\vdash (\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\varphi') &\leftrightarrow ((\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\varphi') \wedge (\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\varphi')) \\ &\leftrightarrow (\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\varphi')\end{aligned}$$

et donc $\vdash \nabla(\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\varphi') \leftrightarrow \nabla(\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\varphi')$. Pareillement,

$$\begin{aligned}\vdash (\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\psi') &\leftrightarrow ((\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi') \wedge (\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\psi')) \\ &\leftrightarrow (\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi')\end{aligned}$$

et donc $\vdash \nabla(\Diamond(\varphi' \vee \psi') \rightarrow \Diamond\psi') \leftrightarrow \nabla(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\vdash \mathrm{Trad(CN2)} &\leftrightarrow (\nabla(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi') \vee \nabla(\Diamond\psi' \rightarrow \Diamond\varphi')) \\ &\leftrightarrow \vdash \mathrm{Trad(CN1)}\end{aligned}$$

Montrons enfin que la traduction de la règle (PC) est démontrable. Dans le langage L_{L}, (PC) s'énonce comme suit :

$$\vdash \varphi' \rightarrow \psi' \Rightarrow \vdash \nabla(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi')$$

où $\varphi' = \mathrm{Trad}(\varphi)$ et $\psi' = \mathrm{Trad}(\psi)$. Supposons que $\vdash \varphi' \rightarrow \psi'$. La règle ($\mathrm{Nec}_{\Box}$) et l'axiome ($\mathrm{K}_{\Box}$), avec un peu de manipulations propositionnelles, entraînent que

$$\vdash \Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi'$$

Ensuite, (Nec_{∇}) et (K_{∇}) entraînent que $\vdash \nabla(\Diamond\varphi' \rightarrow \Diamond\psi')$. ✠

Nous cherchons maintenant les axiomes de L_{L} qui correspondent aux axiomes de L_{CD} du tableau 11.2.1 pour étendre le système déductif Γ_{L} et obtenir un résultat de complétude pour des classes particulières de structures de Lewis.

La traduction Trad nous fournit une manière simple de générer les axiomes recherchés, les détails sont donnés dans le tableau 11.5.3 ci-dessous :

Tableau 11.5.5 – Schèmes d'axiomes pour les conditions

AXIOME	TRADUCTION
N'	$\vartriangle\Diamond\top$
T'	$\triangledown\Box\varphi \rightarrow \varphi$
W'	$(\triangledown\Box\varphi \vee \vartriangle(\Diamond\top \wedge \Box\varphi)) \rightarrow \varphi$
C'	$\triangledown(\Diamond\top \rightarrow \Diamond\varphi) \rightarrow \varphi$
S'	$\vartriangle\Diamond\varphi \rightarrow \vartriangle(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \rightarrow \Box\psi))$
U'	$\vartriangle\Diamond\varphi \rightarrow \triangledown\Box\vartriangle\Diamond\varphi$
	$\triangledown\Box\varphi \rightarrow \triangledown\Box\triangledown\Box\varphi$
A'	$\triangledown(\Diamond\psi \rightarrow \Diamond\varphi) \rightarrow \triangledown\Box\triangledown(\Diamond\psi \rightarrow \Diamond\varphi)$
	$\vartriangle(\Diamond\varphi \wedge \Box\neg\psi) \rightarrow \triangledown\Box\vartriangle(\Diamond\varphi \wedge \Box\neg\psi)$

Les instances de ces axiomes sont par des formules $\varphi \in \mathrm{FCon}_{\mathrm{L}}$.

Dans ce qui suit, si **X** est un ensemble d'axiomes de L_{CD} alors **X'** sera l'ensemble des traductions de ces axiomes dans L_{L}, traductions qui sont données par le tableau 11.5.3. De même, si **X'** est un ensemble d'axiomes du tableau 11.5.3, **X** sera l'ensemble des axiomes de L_{CD} correspondants.

Nous étendons le résultat de correspondance, énoncé dans le tableau 11.2.1, aux structures de Lewis. Nous montrerons que la logique des structures de type X' est axiomatisée par Γ_{L} + **X'**.

Proposition 11.5.6

Les axiomes **X'** définissent et sont canoniques pour les conditions X'.

PREUVE. Il suffit de faire la vérification pour chaque couple axiome – condition.

(N'). Vérifions que $\Delta\Diamond\top$ définit la condition (N') pour $w \in W$, c'est-à-dire

$\bigcup\{\Phi(N)[w] : n \in N\} \neq \varnothing$

Nous avons que $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\top$

ssi $\exists m \in N$ tel que $(w, n) \Vdash \Diamond\top$

ssi $\exists m \in N\ \exists v \in \Phi(m)[w]$ tel que $(v, m) \Vdash \top$

ssi $\exists m \in N\ \exists v \in \Phi(m)[w]$

ssi $\bigcup\{\Phi(n)[w] : n \in N\} \neq \varnothing$

Par ailleurs, $\Delta\Diamond\top$ est un axiome

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta\Diamond\top \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta\Diamond\top \in E$

$\Rightarrow \exists\beta$ tel que $@_\omega @_\beta \Diamond_\beta \top \in E$, car E est collé

$\Rightarrow \exists\nu$ et $\exists\beta$ tels que $@_\omega \Diamond_\beta \nu$ et $@_\nu @_\beta \top \in E$, car E est collé

$\Rightarrow \exists\nu$ et $\exists\beta$ tels que $@_\omega \Diamond_\beta \nu \in E$

Donc, $\bigcup\{\rho_\beta[\omega] : \beta \in \mathrm{Nom}_1\} \neq \varnothing$.

(T'). Si $\varphi = \omega(w)$, alors $(w, n) \Vdash \nabla\Box\varphi \to \varphi$

ssi $(w, n) \Vdash \varphi \to \Delta\Diamond\varphi$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\varphi$

ssi $\exists m \in N$ tel que $(w, m) \Vdash \Diamond\varphi$

ssi $\exists m \in N$ tel que $w \in \Phi(m)[w]$

ssi $w \in \bigcup\{\Phi(m)[w] : m \in N\}$

Nous avons que $\omega \to \Delta\Diamond\omega$ est un axiome

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha (\omega \to \Delta\Diamond\omega) \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta\Diamond\omega \in E$

$\Rightarrow \exists\beta$ tel que $@_\omega @_\beta \Diamond_\beta \omega \in E$, car E est collé

$\Rightarrow \exists\nu$ et $\exists\beta$ tels que $@_\omega \Diamond_\beta \nu$ et $@_\nu @_\beta \omega \in E$, car E est collé

Ce qui démontre que $\nu \in \bigcup\{\rho_\beta[\omega] : \beta \in \mathrm{Nom}_1\}$. Mais $@_\nu \omega \in E$, donc $\omega \in \bigcup\{\rho_\beta[\omega] : \beta \in \mathrm{Nom}_1\}$.

(W'). Si $\varphi = \omega(w)$, nous avons que $(w, n) \Vdash (\nabla\Box\varphi \vee \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\varphi)) \to \varphi$

ssi $(w, n) \Vdash \varphi \to (\Delta\Diamond\varphi \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\varphi))$

ssi $(w, n) \Vdash \varphi \to \Delta\Diamond\omega \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\varphi)$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\varphi \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\varphi)$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\varphi$ & $(w, n) \Vdash \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\varphi)$

Il est facile de vérifier que

$(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\omega(w)$ ssi $\exists m \in N$ tel que $\Phi(m)[w] \neq \varnothing$

$(w, n) \Vdash \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega(w))$ ssi $\forall m \in N[\,\Phi(m)[w] \neq \varnothing \Rightarrow w \in \Phi(m)[w]\,]$

Ainsi,

$\exists m \in N$ tel que $\Phi(m)[w] \neq \varnothing$ et $\forall m \in N[\,\Phi(m)[w] \neq \varnothing \Rightarrow w \in \Phi(m)[w]\,]$

Pour la canonicité, $\omega \to \Delta\Diamond\omega \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega)$ est un axiome

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha(\omega \to \Delta\Diamond\omega \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega)) \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha(\Delta\Diamond\omega \wedge \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega)) \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta\Diamond\omega \in E$ & $@_\omega @_\alpha \nabla\,(\Diamond\top \to \Diamond\omega) \in E$

La première condition est connue. Pour la deuxième, nous savons que

$@_\omega @_\alpha \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega) \in E$ ssi $\nabla(\Diamond\top \to \Diamond\omega) \in E(\omega, \alpha)$

$\Rightarrow \Diamond\top \to \Diamond\omega \in E(\omega, \beta)$, pour tout β tel que $@_\omega @_\alpha \Delta\beta \in E$

ssi $@_\omega @_\beta(\Diamond_\beta\top \to \Diamond_\beta\omega) \in E$, pour tout β

ssi $@_\omega(\Diamond_\beta\top \to \Diamond_\beta\omega) \in E$, pour tout β

$\Rightarrow [\,@_\omega\Diamond_\beta\top \in E \Rightarrow @_\omega\Diamond_\beta\omega \in E\,]$, pour tout β

La condition $@_\omega\Diamond_\beta\top \in E$ est équivalente à $\rho_\beta[\omega] \neq \varnothing$; et la condition $@_\omega\Diamond_\beta\omega \in E$ à $\omega \in \rho_\beta[\omega]$.

(C'). Si $\varphi = \omega(w)$, nous avons que $(w, n) \Vdash \nabla(\Diamond\top \to \Diamond\varphi) \to \varphi$

ssi $(w, n) \Vdash \varphi \to \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\varphi)$

ssi $(w, n) \Vdash \omega(w) \to \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\omega(w))$

ssi $(w, n) \Vdash \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\omega(w))$

ssi $\exists m \in N$ tel que $(w, m) \Vdash \Diamond\top \wedge \Box\omega(w)$

ssi $\exists m \in N$ tel que $\Phi(m)[w] \neq \varnothing$ et $\Phi(m)[w] \subset [\![\omega]\!] = \{w\}$

ssi $\exists m \in N$ tel que $\Phi(m)[w] = \{w\}$

Pour la canonicité, $\omega \to \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\omega)$ est un axiome

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha(\omega \to \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\omega)) \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta(\Diamond\top \wedge \Box\omega) \in E$

$\Rightarrow @_\omega @_\beta(\Diamond_\beta\top \wedge \Box_\beta\omega) \in E$, pour un certain $\beta \in \mathrm{Nom}_1$

$\Rightarrow @_\omega \Diamond_\beta\top \in E$ et $@_\omega\Box_\beta\omega \in E$, pour un certain β

La première condition dit que $\rho_\beta[\omega] \neq \varnothing$ et la deuxième que

$\rho_\beta[\omega] \subset \{\nu : @_\omega\nu \in E\}$,

ce qui donne $\rho_\beta[\omega] = \{\nu : @_\omega\nu \in E\}$.

(S'). Supposons que $(w, n) \Vdash \Delta\Diamond\varphi \to \Delta(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi))$. Nous savons que $(w, a) \Vdash \Delta\Diamond\varphi$ est équivalent à l'antécédent de la condition précédente. Pour le conséquent, nous avons que

$(w, n) \Vdash \Delta(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi))$

ssi $\exists m \in N[\,(w, m) \Vdash \Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi)\,]$

ssi $\exists m \in N[\,\Phi(m)[w] \cdot [\![\varphi]\!]\ \&\ (w, m) \Vdash \Diamond\psi \to \Box\psi\,]$

Soit ν tel que $|\nu| \in \Phi(m)[w] \cap [\![\varphi]\!]$. Posons $\varphi = \nu$. Nous avons que

$(w, m) \Vdash \Diamond\nu \to \Box\nu$ ssi $(w, m) \Vdash \Box\nu$

ssi $(v, m) \Vdash \nu$, pour tout $v \in \Phi(m)[w]$

ssi $\Phi(m)[w] \subset \{|\nu|\}$

Ce qui montre que $\Phi(m)[w] \cap [\![\varphi]\!] = \{|\nu|\}$.

Pour la canonicité, $\Delta\Diamond\varphi \to \Delta(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi))$ est un axiome

$\Rightarrow @_\omega @_\alpha(\Delta\Diamond\varphi \to \Delta(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi))) \in E$

$\Rightarrow [@_\omega @_\alpha \Delta\Diamond\varphi \in E \Rightarrow @_\omega @_\alpha \Delta(\Diamond\varphi \wedge (\Diamond\psi \to \Box\psi))) \in E]$

L'antécédent de cette condition est équivalent à

$\exists\beta$ tel que $@_\omega @_\beta \Diamond_\beta\varphi \in E$

ssi $\exists\nu$ et $\exists\beta$ tels que $@_\omega\Diamond_\beta\nu$ et $@_\nu @_\beta\varphi \in E$

ssi $\{\nu : @_\nu @_\beta\varphi \in E\} \cdot \bigcup\{\rho_\beta[\omega] : \beta \in \mathrm{Nom}_1\}$

Tandis que le conséquent est équivalent à

$\exists\beta$ tel que $@_\omega @_\beta \Diamond_\beta\varphi$ et $@_\omega @_\beta(\Diamond_\beta\psi \to \Box_\beta\psi) \in E$

Mais

$@_\omega @_\beta(\Diamond_\beta\psi \to \Box_\beta\psi) \in E$

$\Rightarrow [\,@_\omega @_\beta \Diamond_\beta\psi \in E \Rightarrow @_\omega @_\beta \Box_\beta\psi \in E\,]$

Soit $\mu \in \{\nu : @_\nu @_\beta \varphi \in E\} \cap \bigcup\{\rho_\beta[\omega] : \beta \in \mathrm{Nom}_1\}$ et soit β tel que $\mu \in \rho_\beta[\omega]$. Posons $\psi = \mu$. Nous avons donc

$\Rightarrow [\, @_\omega \Diamond_\beta \mu \in E \Rightarrow @_\omega \Box_\beta \mu \in E]$

ssi $@_\omega \Box_\beta \mu \in E$

$\Rightarrow @_\nu \mu \in E$, pour tout ν tel que $@_\omega \Diamond_\beta \nu \in E$

Par conséquent $\rho_\beta[\omega] = \{\nu : @_\nu \mu \in E\}$.

Nous laissons les conditions (L'), (U') et (A') au lecteur. ✠

Corollaire 11.5.7

(a) Soient $H \subset \mathrm{Form}_\mathrm{L}$ et $\varphi \in \mathrm{Form}_\mathrm{L}$. Nous avons que

$H \vdash_{\mathrm{X'}} \varphi$ ssi $H \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi$

(b) Soient $H \subset \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$ et $\varphi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{CD}}$. Nous avons que

$H \vdash_{\mathrm{X}} \varphi$ ssi $H' \vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$

PREUVE. (a) La direction « $\Rightarrow$ » suit du fait que **X'** définit X'. La direction « $\Leftarrow$ » est une conséquence de la canonicité. En effet,

$H \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi \Rightarrow H \vdash_{\mathrm{X'}} \varphi$ ssi $H \nvdash_{\mathrm{X'}} \varphi \Rightarrow H \nVdash_{\mathrm{X'}} \varphi$

ssi $H \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_{\mathrm{X'}} \bot \Rightarrow \exists \mathbf{M} = <\mathbf{S}, val> \exists w \in W[\,\mathbf{S}$ est de type X' &

$\mathbf{M}, (w, n) \Vdash H$ & $\mathbf{M}, (w, n) \nVdash \varphi\,]$

La seule chose qui n'est pas démontrée par le résultat de complétude du chapitre 9 (section 9.7) est le fait que **S** soit de type X'. Or, ceci est précisément une conséquence de la proposition précédente (la partie sur la canonicité des axiomes).

(b) D'après le corollaire 11.5.3, $H \Vdash_{\mathrm{X}} \varphi$ ssi $H' \Vdash_{\mathrm{X'}} \varphi'$. En utilisant la complétude de Λ + X sur les sphères de Lewis de type **X** et la partie (a) de ce corollaire, nous obtenons le résultat. ✠

Chapitre 12
Calcul de tableaux

Le présent chapitre a pour objectif la mise sur pied d'un calcul de tableaux pour la logique modale d'ordre supérieur simple. Il est sans doute possible de définir un calcul de tableaux pour des logiques plus spécifiques en modifiant les règles données plus bas, mais nous nous contenterons d'en exposer le système le plus élémentaire.

Un tel calcul est intéressant même si nous avons déjà prouvé la complétude pour cette logique par des méthodes axiomatiques, car en plus de la complétude il nous fournit en général une procédure systématique pour construire un modèle satisfaisant une formule (si celle-ci est effectivement satisfaisable). En fait, un calcul de tableau peut être conçu comme étant *essentiellement* un algorithme permettant d'identifier toute formule non-satisfaisable et d'attribuer à toute formule satisfaisable un modèle qui la satisfait. La complétude faible découlera automatiquement de l'existence d'un tel algorithme, car il suffira alors de vérifier si $\neg\varphi$ est satisfaisable pour déterminer si φ est une validité. Par ailleurs, si chaque modèle que l'algorithme produit est fini, nous aurons un corollaire encore plus intéressant que la complétude :

Propriété du modèle fini
Si $\varphi \in \text{Form}_L$ est satisfaisable, alors φ est satisfaisable dans un modèle fini.

Dans la logique modale conventionnelle (cf. Blackburn *et al.* 2001 : 145), cette propriété peut se démontrer à l'aide de la méthode des filtrations. Malheureusement, une filtration n'a pas la structure en produit des SROS, donc cette méthode ne peut être utilisée.

Nous commencerons par donner une description détaillée d'un calcul de tableaux pour une logique modale simple en s'inspirant de Fitting (1972), Fitting & Mendelsohn (1998), Goré (1999) et Massicci (2000). La partie la plus longue de la démonstration que je donne plus bas concerne l'algorithme. Je prouve minutieusement qu'il termine et génère un tableau fini pour toute formule. Il aurait été possible d'omettre certaines de ces preuves mais leur présence rend plus transparent le fait que l'algorithme correspondant pour la logique modale d'ordre supérieur termine et génère un tableau fini pour toute formule lui aussi.

12.1 Tableaux pour la logique modale conventionnelle

Le calcul de tableaux que nous présentons ici repose sur l'idée d'une formule étiquetée (cf. Gabbay 1996). Les étiquettes sont la matière première avec laquelle nous construisons nos modèles. Nous définissons l'ensemble Σ des étiquettes récursivement par les règles :

(Ét1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, $n \in \Sigma$

(Ét2) Si $\sigma \in \Sigma$ et $n \in \mathbb{N}^+$, alors $\sigma.n \in \Sigma$

Une relation d'ordre stricte $\prec \subset \Sigma \times \Sigma$ est définie sur cet ensemble comme suit :

$\sigma \prec \tau$ si et seulement si $\tau = \sigma.n$,

pour un certain $n \in \mathbb{N}^+$. Il est clair que $\mathbf{\Sigma} = < \Sigma, \prec >$ est une structure relationnelle.

Une *formule étiquetée* est une expression de la forme $\sigma :: \varphi$, où $\sigma \in \Sigma$ et φ est une formule. L'étiquette 'σ' joue informellement le rôle de l'opérateur '$@_\sigma$'. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de formules étiquetées, nous définissons

$\acute{E}t(\mathcal{X}) = \{\sigma \in \Sigma : \sigma :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour un certain $\varphi \in \text{Form}\}$

Nous dirons qu'un modèle $M = < W, R, val >$ *réalise* $\mathcal{X}$, un ensemble de formules étiquetées, s'il existe une fonction $f : \acute{E}t(\mathcal{X}) \rightarrow W$ telle que

(RT1) $\sigma \prec \tau \Rightarrow f(\sigma)Rf(\tau)$, pour toutes étiquettes $\sigma, \tau \in \acute{E}t(\mathcal{X})$

(RT2) $\sigma :: \varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow M, f(\sigma) \Vdash \varphi$

Le calcul des tableaux qui sera présenté est une recette pour la construction d'un ensemble de formules étiquetées $\mathcal{X}$ qui servira par la suite à la construction d'un modèle qui réalise $\mathcal{X}$.

Si X est un ensemble de formules et σ est une étiquette, l'ensemble $\sigma :: X$ est défini par

$\{\sigma :: \varphi : \varphi \in X\}$

Si X est ensemble fini formules, et si nous disposons d'un ordre linéaire (quelconque) sur les formules (il y a en a plusieurs, il suffit d'en choisir un et de le garder), nous définissons $\mathcal{B}_0(X)$ comme étant la branche obtenue en ordonnant chacune des formules étiquetées de l'ensemble $1 :: X$.

Nous définissons *un tableau pour* X comme étant un arbre de formules étiquetées généré par les clauses suivantes :

(TB1) $\mathcal{B}_0(X)$ est un tableau pour X

(TB2) Si $\mathcal{T}$ est un tableau (pour X), si $\mathcal{B}$ est une branche de $\mathcal{T}$, et si $\sigma :: \varphi$ est l'extrémité de $\mathcal{B}$ (autrement dit, la feuille de $\mathcal{B}$), alors l'arbre obtenu en prolongeant $\mathcal{B}$ suivant la règle de prolongation correspondant à φ est aussi un tableau (pour X).

Les règles de prolongation sont décrites dans le tableau suivant :

Tableau 12.1.1 Règles de prolongation

NOM	φ	RÈGLE DE PROLONGATION
$(\neg\neg)$	$\neg\neg\psi$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\sigma :: \psi$
$(\wedge)$	$\psi \wedge \theta$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\sigma :: \psi$, et prolongez cette nouvelle branche avec la feuille $\sigma :: \theta$

$(\vee)$	$\neg(\psi \wedge \theta)$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec les feuilles $\sigma :: \psi$ et $\sigma :: \theta$
$(\Box)$	$\Box\psi$	Si $\sigma.k \in \text{Ét}(\mathcal{B})$, prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\sigma.k :: \psi$
$(\Diamond)$	$\neg\Box\psi$	Si k est le plus petit entier tel que $\sigma.k \notin \text{Ét}(\mathcal{B})$, alors prolongez $\mathcal{B}$ avec $\sigma.k :: \neg\psi$

Lorsque $\sigma :: \varphi$ est de la forme $\sigma :: \neg\neg\psi$ (resp. $\sigma :: \psi \wedge \theta$, $\sigma :: \neg(\psi \wedge \theta)$, $\sigma :: \Box\psi$ ou $\sigma :: \neg\Box\psi$), nous l'appellerons une $(\neg\neg)$-formule (resp. $(\wedge)$-, $(\vee)$-, $(\Box)$- ou $(\Diamond)$-formule).

Une branche $\mathcal{B}$ d'une tableau $\mathcal{T}$ est *fermée* s'il existe une formule étiquetée $\sigma :: \varphi$ telle que $\sigma :: \varphi \in \mathcal{B}$ et $\sigma :: \neg\varphi \in \mathcal{B}$. Une branche est *ouverte* si elle n'est pas fermée. Un tableau $\mathcal{T}$ est *fermé* si toutes ses branches sont fermées, et *ouvert* s'il n'est pas fermé. Une branche est *réalisable* si l'ensemble des formules étiquetées de $\mathcal{B}$ est réalisable. Un tableau est *réalisable* si une de ses branches est réalisable.

Exemple

Tableau pour l'ensemble $X = \{\Box\neg(p \wedge \neg q), \Box p \wedge \neg\Box q\}$:

	$1 :: \Box\neg(p \wedge \neg q)$	Règle initiale
	$1 :: \Box p \wedge \neg\Box q$	Règle initiale
	$1 :: \Box p$	$(\wedge)$
	$1 :: \neg\Box q$	$(\wedge)$
	$1.1 :: \neg q$	$(\Diamond)$
	$1.1 :: \neg(p \wedge \neg q)$	$(\Box)$
	$1.1 :: p$	$(\Box)$
$1.1 :: \neg p$	$1.1 :: \neg\neg q$	$(\vee)$
$\perp$	$\perp$	Clôture

Autrement dit, le tableau pour $\neg(\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi))$ est fermé.

Proposition 12.1.2

Si $\mathcal{T}$ est réalisable, alors toute prolongation $\mathcal{T}^+$ de $\mathcal{T}$ est aussi réalisable.

PREUVE. Soit $\mathcal{B}_r$ la (ou une des) branche(s) de $\mathcal{T}$ qui est réalisable, soit $\mathcal{B}$ la branche qui sera prolongée, et soit $\mathcal{B}^+$ le résultat de cette prolongation ($\mathcal{B}^+$ est une branche sauf si la règle ($\vee$) est appliquée, auquel cas $\mathcal{B}^+$ sera un arbre avec deux branches). Si $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_r$, alors $\mathcal{T}$ restera réalisable quelque soit la manière de prolonger $\mathcal{B}$, car $\mathcal{B}_r$ sera toujours une de ses branches. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_r$, soit $M = < W, R, val >$ le modèle qui réalise $\mathcal{B}$ via f, c'est-à-dire que

(*) $\quad \sigma \prec \tau \Rightarrow f(\sigma) R f(\tau)$, pour tous $\sigma, \tau \in \acute{E}t(\mathcal{B})$

(**) $\quad \sigma :: \varphi \in \mathcal{B} \Rightarrow M, f(\sigma) \Vdash \varphi$

Nous montrerons, selon la manière dont est obtenue $\mathcal{B}^+$ de $\mathcal{B}$, que le modèle M réalise aussi $\mathcal{B}^+$:

($\neg\neg$). $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle ($\neg\neg$) à $\sigma :: \neg\neg\varphi \in \mathcal{B}$. Nous avons déjà, par la condition (**), que

$$M, f(\sigma) \Vdash \neg\neg\varphi$$

Mais ceci signifie que

$$M, f(\sigma) \Vdash \varphi$$

Donc, M réalise aussi $\mathcal{B}^+$.

($\wedge$). $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle ($\wedge$) à $\sigma :: \varphi \wedge \psi \in \mathcal{B}$. Nous avons que

$$M, f(\sigma) \Vdash \varphi \wedge \psi$$

par (**), ce qui veut dire que $M, f(\sigma) \Vdash \varphi$ et $M, f(\sigma) \Vdash \psi$. Autrement dit, M réalise $\mathcal{B}^+$.

($\vee$). $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle ($\vee$) à $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{B}$. Encore une fois,

$$M, f(\sigma) \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

par (**), mais ceci implique que M, $f(\sigma) \Vdash \neg\varphi$ ou M, $f(\sigma) \Vdash \neg\psi$. Si c'est le premier cas, alors M réalise la branche de $\mathcal{B}^+$ qui a $\sigma :: \neg\varphi$ comme feuille. Si c'est le deuxième cas, M réalise la branche de $\mathcal{B}^+$ qui a $\sigma :: \neg\psi$ comme feuille.

($\Box$) $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle ($\Box$) à $\sigma :: \Box\varphi \in \mathcal{B}$. Nous avons que

$$M, f(\sigma) \Vdash \Box\varphi$$

Ainsi, M, $v \Vdash \varphi$, pour tout v tel que wRv. En particulier, par la condition (*), nous savons que $f(\sigma)Rf(\sigma.k)$, pour tout k tel que $\sigma.k \in \acute{E}t(\mathcal{B})$, donc

$$M, f(\sigma.k) \Vdash \varphi$$

pour tout $\sigma.k \in \acute{E}t(\mathcal{B})$. Ce qui démontre que $\mathcal{B}^+$ est réalisable par M.

($\Diamond$) $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle ($\Diamond$) à $\sigma :: \neg\Box\varphi \in \mathcal{B}$. Puisque M réalise $\mathcal{B}$, nous avons

$$M, f(\sigma) \Vdash \neg\Box\varphi$$

ce qui veut dire que M, $v \Vdash \neg\varphi$, pour un certain v tel que wRv. Soit $k \in \mathbb{N}^+$ le plus petit entier tel que $\sigma.k \notin \acute{E}t(\mathcal{B})$; $\mathcal{B}^+$ est la prolongation de $\mathcal{B}$ par $\sigma.k :: \varphi$. Définissons $f^+ : \acute{E}t(\mathcal{B}^+) \to W$, la fonction qui est égale à la fonction f sur $\acute{E}t(\mathcal{B})$ et qui envoie $\sigma.k$ sur v (c.-à-d. $f^+(\sigma.k) = v$). Or, M réalise $\mathcal{B}^+$ (via f^+). En effet, les conditions (*) et (**) se vérifient aisément.

Ce qui démontre le résultat. ✠

Proposition 12.1.3

Un tableau fermé n'est pas réalisable.

PREUVE. Soit $\mathcal{T}$ un tableau fermé et $\mathcal{B}$ une branche quelconque de ce tableau. Supposons que $\mathcal{B}$ est réalisable. Il existerait un modèle $M = < W, R, val >$ et une fonction $f : \acute{E}t(\mathcal{B}) \to W$ qui satisfont les conditions (RT1) et (RT2). Puisque $\mathcal{B}$ est fermée, il existe une formule φ et une étiquette σ telles que $\sigma :: \varphi \in \mathcal{B}$ et $\sigma :: \neg\varphi \in \mathcal{B}$. Puisque M réalise $\mathcal{B}$ (via f), par (RT2), nous avons que M, $f(\sigma) \Vdash \varphi$ et M, $f(\sigma) \Vdash \neg\varphi$, ce qui est contradictoire. ✠

Un calcul de tableau est, en particulier, un système de dérivation. Nous démontrons qu'une formule 'φ' est un théorème dans ce calcul en montrant que la formule '$\neg\varphi$' admet un tableau fermé (c'est-à-dire qu'il existe un tableau fermé pour l'ensemble $\{\neg\varphi\}$). Le théorème suivant montre que ce calcul est « sound », qu'il préserve la validité :

Théorème 12.1.4
Si '$\neg\varphi$' admet un tableau fermé, alors 'φ' est valide.

PREUVE. Supposons qu'il existe un tableau fermé $\mathcal{T}$ pour la formule '$\neg\varphi$' mais que 'φ' n'est pas valide. Il existe donc un modèle $M = < W, R, val >$ et un point $w \in W$ tels que

$M, w \Vdash \neg\varphi.$

Si nous montrons que M doit alors réaliser $\mathcal{T}$, nous obtiendrons une contradiction par la proposition 12.1.3.

Soient $\mathcal{T}_n$ le tableau obtenu à la n-ième étape de la construction de $\mathcal{T}$. Nous avons que $\mathcal{T}_0 = \{1 :: \neg\varphi\}$ et que $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}$, pour un certain N. Il est clair que M réalise $\mathcal{T}_0$. Par la proposition 12.1.2, M réalise donc tous les tableaux $\mathcal{T}_n$ jusqu'à $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}$. D'où le résultat. ✠

Nous savons maintenant que notre calcul démontre des validités, mais il devra en faire plus pour être complet, il faudra que toute validité y soit démontrable, ce qui reviendra, nous le verrons, à montrer que tout tableau ouvert d'une certaine sorte est satisfaisable. Cette partie est définitivement la plus compliquée. Nous devrons d'abord montrer comment extraire un modèle d'un tableau ouvert (d'une certaine sorte), et nous devrons ensuite définir un algorithme permettant de générer ces tableaux (quand ceux-ci existent).

Afin de réaliser la première partie de cette tâche, nous utiliserons la notion d'ensemble saturé. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de formules étiquetées, alors $\mathcal{X}$ est dit *saturé* s'il satisfait les conditions énumérées dans le tableau 12.1.5.

Tableau 12.1.5 Conditions de saturation

NOM	CONDITION
(S$\bot$)	Non-($\sigma :: \varphi \in \mathcal{X}$ et $\sigma :: \neg\varphi \in \mathcal{X}$), pour tous σ et φ
(S$\neg\neg$)	Si $\sigma :: \neg\neg\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \varphi \in \mathcal{X}$
(S$\wedge$)	Si $\sigma :: \varphi \wedge \psi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \varphi$, $\sigma :: \psi \in \mathcal{X}$
(S$\vee$)	Si $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \neg\varphi \in \mathcal{X}$ ou $\sigma :: \neg\psi \in \mathcal{X}$
(S$\Box$)	Si $\sigma :: \Box\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma.n :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour tout $\sigma.n \in \acute{E}t(\mathcal{X})$
(S$\Diamond$)	Si $\sigma :: \neg\Box\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma.n :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^+$

Un ensemble (de formules étiquetées) saturé a une propriété remarquable :

Proposition 12.1.6
Si $\mathcal{X}$ est un ensemble saturé, alors $\mathcal{X}$ est réalisable.

PREUVE. Nous construisons le modèle M à partir l'ensemble $\mathcal{X}$ lui-même. Ce modèle a pour ensemble de base $\acute{E}t(\mathcal{X})$, pour relation d'accessibilité $\prec$ et pour valuation

$$val(p) = \{\sigma \in \Sigma : \sigma :: p \in \acute{E}t(\mathcal{X})\}.$$

Montrons que M réalise $\mathcal{X}$ (via la fonction identité). Les conditions (RT1) et (RT2) doivent être vérifiées. La première est immédiate, car f est la fonction identité. Nous démontrerons la seconde en prouvant, par induction, que

(*) $\quad \sigma :: \varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow M, \sigma \Vdash \varphi$

(**) $\quad \sigma :: \neg\varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow M, \sigma \nVdash \varphi$

<u>Étape de base</u>. Si φ est la variable propositionnelle p et $\sigma :: p \in \mathcal{X}$, alors la définition de *val* nous assure que $M, \sigma \Vdash p$, donc (*). Si $\sigma :: \neg p \in \mathcal{X}$, alors

$\sigma :: p \notin \mathcal{X}$, par (S$\bot$), et $\sigma \notin val(p)$, par définition de *val*. Ainsi, $M, \sigma \nVdash p$, et donc (**).

Étape d'induction. Il faut considérer chaque cas séparément.

($\neg$). Supposons que $\varphi = \neg\psi$. Si $\sigma :: \neg\psi \in \mathcal{X}$, alors $M, \sigma \Vdash \neg\psi$ par la partie (**) de l'hypothèse d'induction appliquée à ψ, et donc (*) pour φ. Si $\sigma :: \neg\neg\psi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \psi \in \mathcal{X}$, par (S$\neg\neg$), et $M, \sigma \Vdash \psi$, par la partie (*) de l'HI appliquée à ψ, et donc (**) pour φ.

($\wedge$). Supposons que $\varphi = \psi \wedge \theta$. Si $\sigma :: \psi \wedge \theta \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \psi \in \mathcal{X}$ et $\sigma :: \theta \in \mathcal{X}$, par (S$\wedge$). Par la partie (*) de l'HI appliquée à ψ et θ, nous avons $M, \sigma \Vdash \psi$ et $M, \sigma \Vdash \theta$, d'où $M, \sigma \Vdash \psi \wedge \theta$, et donc (*) pour φ. Si $\sigma :: \neg(\psi \wedge \theta) \in \mathcal{X}$, alors $\sigma :: \neg\psi \in \mathcal{X}$ ou $\sigma :: \neg\theta \in \mathcal{X}$, par (S$\vee$). Supposons que $\sigma :: \neg\psi \in \mathcal{X}$. Par la partie (**) de l'HI appliquée à ψ, nous avons $M, \sigma \nVdash \psi$, d'où $M, \sigma \Vdash \neg\psi$, ce qui entraîne $M, \sigma \Vdash \neg(\psi \wedge \theta)$, et donc (**) pour φ.

($\Box$). Supposons que $\varphi = \Box\psi$. Si $\sigma :: \Box\psi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma.n :: \psi \in \mathcal{X}$ pour tout $\sigma.n \in \acute{E}t(\mathcal{X})$, par (S$\Box$). Par la partie (*) de l'HI appliquée à chaque $\sigma.n :: \psi \in \mathcal{X}$, nous avons $M, \sigma.n \Vdash \psi$. Autrement dit : $M, \sigma.n \Vdash \psi$ pour tout $\sigma.n \in \acute{E}t(\mathcal{X})$, c'est-à-dire $M, \sigma \Vdash \Box\psi$, et donc (*) pour φ. Si $\sigma :: \neg\Box\psi \in \mathcal{X}$, alors $\sigma.n :: \neg\psi \in \mathcal{X}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^+$. Par la partie (**) de l'HI appliquée à ψ, $M, \sigma.n \nVdash \psi$, c'est-à-dire $M, \sigma.n \Vdash \neg\psi$, et donc (**) pour φ.

Ce qui complète la preuve. ✠

Nous sommes maintenant prêts pour la deuxième tâche. Nous allons donner un algorithme pour générer un tableau pour X ayant la propriété suivante : ou bien ce tableau est fermé ou bien ce tableau possède une branche saturée. Si le tableau est fermé, X n'est pas satisfaisable; et si le tableau possède une branche saturée, nous pourrons, d'après la proposition précédente, construire une modèle qui satisfait X.

Dans ce qui suivra, nous supposerons qu'il existe un ordre strict sur les formules du langage et sur les branches du tableau de sorte que l'expression

« la première formule ayant la propriété $\mathcal{P}$ dans le tableau » ait un sens (ici, la propriété $\mathcal{P}$ est quelconque). La nature précise de l'ordre importe peu; seul importe qu'il y en ait un.

Une formule étiquetée portant la marque *active*, *inactive* ou *terminée* sera appelée une formule étiquetée *marquée*. Chaque étape de l'algorithme produira un arbre de formules étiquetées marquées. (Nous verrons l'importance des marques plus tard.)

Le tableau 12.1.7 ci-dessous décrit dans le détail l'algorithme pour produire un tableau pour X, où X est un ensemble (fini) de formules quelconque.

Tableau 12.1.7 Algorithme

ÉTAPE INITIALE	
Le tableau initial est la branche $\mathcal{B}_0(X)$ et toutes les formules étiquetées sont marquées comme étant actives.	
ÉTAPE D'ITÉRATION	
Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des formules actives, effectuez :	
(AP)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe un littéral actif dans $\mathcal{T}$, choisissez le premier littéral actif et marquez-le comme étant terminé.
(A$\neg\neg$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\neg\neg$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\neg\neg$)-formule active $\sigma :: \neg\neg\varphi$ et prolongez toute branche passant par $\sigma :: \neg\neg\varphi$ avec la ($\neg\neg$)-règle. Marquez $\sigma :: \neg\neg\varphi$ comme étant terminée et $\sigma :: \varphi$ comme active.
(A$\wedge$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\wedge$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\wedge$)-formule active $\sigma :: \varphi \wedge \psi$, et prolongez toute branche passant par $\sigma :: \varphi \wedge \psi$ avec la ($\wedge$)-règle. Marquez $\sigma :: \varphi \wedge \psi$ comme terminée, $\sigma :: \varphi$ et $\sigma :: \psi$ comme actives.
(A$\Diamond$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\Diamond$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\Diamond$)-formule active $\sigma :: \neg\Box\varphi$, et prolongez toute branche passant par $\sigma :: \neg\Box\varphi$ avec la ($\Diamond$)-règle. Marquez $\sigma :: \neg\Box\varphi$ comme terminée, marquez toute formule $\sigma.k :: \neg\varphi$ ajoutée par la ($\Diamond$)-règle comme active, et marquez toute formule de la forme $\sigma :: \Box\psi$ dans $\mathcal{T}$ comme active.

(A$\Box$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\Box$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\Box$)-formule active $\sigma :: \Box\varphi$, et prolongez toute branche passant par $\sigma :: \Box\varphi$ avec la ($\Box$)-règle. Marquez $\sigma :: \Box\varphi$ comme inactive et toute formule $\sigma.k :: \varphi$ ajoutée par la ($\Box$)-règle comme active.
(A$\vee$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe de ($\vee$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\vee$)-formule active $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi)$, et prolongez toute branche passant $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ avec la ($\vee$)-règle. Marquez $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ comme terminée, $\sigma :: \neg\varphi$ et $\sigma :: \neg\psi$ comme actives.

Nous devons montrer que l'algorithme fait ce qu'on demande de lui. Dans le contexte de la discussion sur l'algorithme, nous resserrerons notre définition d'un *tableau pour X*. Un *tableau pour X* sera un tableau obtenu à l'une des étapes de cet algorithme. L'ensemble de tous les tableaux pour X, dans ce sens restreint, est dénoté par $\mathcal{T}(X)$. Nous appellerons *l'action de* $\sigma :: \varphi$ l'ensemble des opérations de prolongation et de marquage que la formule $\sigma :: \varphi$ entraîne dans l'algorithme. Dans la discussion, $\mathcal{T}_0$ sera le tableau dans son état initial avec les marques et, si $\mathcal{T}_n$ est un état subséquent de l'algorithme, $\mathcal{T}_{n+1}$ représentera le tableau avec les marques obtenu de $\mathcal{T}_n$ par l'action de la prochaine formule visitée par l'algorithme.

Proposition 12.1.8
L'algorithme est déterminé et complète toujours la transition de $\mathcal{T}_n$ à $\mathcal{T}_{n+1}$.

PREUVE. L'algorithme est déterminé parce qu'aucun choix n'existe dans son exécution (c'est notamment parce que nous avons mis un ordre sur les formules et les branches).

Montrons maintenant la deuxième affirmation. Commençons par montrer que si $\mathcal{T}_n$ a un nombre fini de branches et un nombre fini de formules, alors l'action de $\sigma :: \varphi$ ajoute à $\mathcal{T}_n$ au plus deux branches et au plus un nombre fini de formules. Il suffit de considérer chaque boucle séparément, c'est-à-dire la forme de la formule φ. Si l'algorithme est dans (AP), (A$\neg\neg$), (A$\wedge$), (A$\vee$) et (A$\Diamond$), au plus deux branches et au plus deux formules seront ajoutées à $\mathcal{T}_n$ pour compléter l'action de $\sigma :: \varphi$. Vu que le nombre de branches et le nombre de formules ajoutées est fini, l'algorithme pourra compléter l'action de $\sigma :: \varphi$. Si l'algorithme est dans la boucle (A$\Box$), c'est-à-dire si $\varphi = \Box\psi$, alors l'action de $\sigma :: \varphi$ consistera à ajouter toutes les formules $\sigma.k :: \psi$, avec $\sigma.k \in \acute{E}t(\mathcal{T}_n)$, à toutes les branches passant par $\sigma :: \varphi$. Par hypothèse, $\mathcal{T}_n$ n'a qu'un nombre fini de branches et un nombre fini de formules sur chacune de celles-ci, donc un nombre fini (peut-être nul) de formules de la forme $\sigma.k :: \psi$ seront ajoutées à $\mathcal{T}_n$ pour compléter l'action de $\sigma :: \varphi$.

Puisque l'état initial n'a qu'une branche et qu'un nombre fini de formules, nous avons montré que l'action de $\sigma :: \varphi$ sur $\mathcal{T}_n$ peut toujours être complétée et que l'algorithme pourra toujours passer de l'état $\mathcal{T}_n$ à l'état $\mathcal{T}_{n+1}$. ✠

Pour X un ensemble fini de formules, définissons $Tab(X)$ comme étant l'ensemble des formules pouvant apparaître dans un tableau pour X, autrement dit

$$Tab(X) = \{\varphi \in \text{Form} : \exists \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X), \exists \sigma \in \Sigma \text{ tels que } \sigma :: \varphi \in \mathcal{T}\}$$

Toujours pour X, définissons l'ensemble $SF(X)$ comme étant l'ensemble des formules qui sont ou bien des sous-formules de formules de X ou bien des négations de sous-formules de formules de X.

Proposition 12.1.9

Soient X un ensemble fini de formules, $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(X)$ un tableau pour X quelconque, et $\sigma \in \Sigma$ une étiquette. Alors,

(a) $Tab(X) \subset SF(X)$

(b) $Tab(X)$ est fini

(c) Le nombre de formules étiquetées avec σ dans $\mathcal{T} \leq |Tab(X)|$

PREUVE. (i) Évident, d'après les règles de formation d'un tableau pour X. (ii) Découle du fait que $SF(X)$ est fini. (iii) Conséquence immédiate de (ii). ✠

Nous avons donc une borne supérieure uniforme sur le nombre de formules pouvant être précédées d'une étiquette donnée dans un tableau pour X.

Définissons la longueur d'une étiquette $\sigma \in \Sigma$ par induction comme suit :

(LÉ1) $\text{long}(k) = 0$

(LÉ2) $\text{long}(\sigma.k) = \text{long}(\sigma) + 1$

Autrement dit, la longueur d'une étiquette est le nombre de points '.' dans la l'étiquette.

Définissons aussi la *profondeur modale de* X, $\text{prof}(X)$, comme étant le maximum des profondeurs des formules dans X. (La *profondeur modale d'une formule* est définie récursivement comme : $\text{prof}(p) = 0$, si 'p' est une variable propositionnelle; $\text{prof}(\neg\varphi) = \text{prof}(\varphi)$; $\text{prof}(\varphi \wedge \psi) = \max(\text{prof}(\varphi), \text{prof}(\psi))$; et $\text{prof}(\Box\varphi) = \text{prof}(\varphi) + 1$.)

Proposition 12.1.10

Si $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(X)$ un tableau pour X et $\sigma \in \Sigma$ une étiquette sur $\mathcal{T}$, alors

$$\text{long}(\sigma) \leq \text{prof}(X).$$

PREUVE. Montrons d'abord que la quantité

$$\mu(\mathcal{T}, \sigma) = \max\{\text{prof}(\varphi) : \sigma :: \varphi \in \mathcal{T}\}$$

est strictement décroissante en fonction de la longueur de σ. En effet, soient σ et $\sigma.k$ des étiquettes, et soit $\sigma.k :: \varphi$ une formule sur le tableau $\mathcal{T}$.

Si $\sigma.k :: \varphi$ est la première formule sur $\mathcal{T}$ étiquetée par $\sigma.k$, alors elle résulte de l'application de la ($\Diamond$)-règle, et forcément la formule $\sigma :: \neg\Box\psi$ se trouve également sur $\mathcal{T}$, où ψ est de même profondeur que φ (en fait, $\varphi = \neg\psi$).

Si $\sigma.k :: \varphi$ n'est pas la première formule, elle est ou bien le résultat d'une prolongation par la ($\Box$)-règle, ou bien le résultat d'une prolongation par les règles ($\neg\neg$), ($\wedge$) ou ($\vee$). Si c'est le premier cas, il existe une formule sur le tableau de la forme $\sigma :: \Box\varphi$.

Si c'est le deuxième cas, $\sigma.k :: \varphi$ a été ajoutée suite à une ou plusieurs applications des règles ($\neg\neg$), ($\wedge$) ou ($\vee$). Soit $\sigma.k :: \psi$ la première formule sur l'arbre de cette suite de prolongations. Cette formule a été ajoutée ou bien par la ($\Box$)-règle ou bien par la ($\Diamond$)-règle, nous avons donc $\sigma :: \Box\psi$ ou bien $\sigma :: \neg\Box\theta$ sur le tableau, θ est de la même profondeur que ψ (en fait, $\psi = \neg\theta$), et ψ est de la même profondeur que φ (car les règles booléennes ne modifient pas la profondeur d'une formule).

Il en résulte donc que, pour toute formule du tableau étiquetée avec $\sigma.k$, il en existe une de profondeur supérieur étiquetée par σ. La fonction $\mu(\mathcal{T}, \sigma)$ est donc strictement décroissante en fonction de la longueur de σ.

La conséquence de cette observation est que la longueur d'une étiquette d'un tableau pour X est bornée par le nombre prof(X). En effet, chaque prolongement de la longueur d'une étiquette diminue la profondeur maximale des formules (avec cette étiquette). Une fois rendu aux formules précédées d'une étiquette de longueur prof(X), il ne restera plus de modalités (ces formules seront de profondeur nulle), et aucune augmentation de longueur ne sera possible. ✠

Définissons *la hauteur d'une étiquette* σ comme

$$\text{haut}(\sigma) = \max\{k : \exists\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma \text{ tels que } \sigma = \sigma_1.k.\sigma_2\}$$

Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de formules étiquetées, haut($\mathcal{X}$) désignera le maximum des hauteurs des étiquettes présentes dans $\mathcal{X}$.

Proposition 12.1.11

Si $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$(X) un tableau pour X, alors haut($\mathcal{T}$) $\leq |Tab(X)|$.

PREUVE. Soit $\sigma = \sigma_1.k.\sigma_2$ une étiquette de $\mathcal{T}$. Si σ est sur $\mathcal{T}$, alors $\sigma_1.k$ se trouve sur $\mathcal{T}$. L'algorithme ajoute une nouvelle étiquette de la forme $\sigma_1.k$ à chaque fois, et seulement à chaque fois, qu'il visite une formule active de la forme $\sigma_1 :: \neg\Box\varphi$. L'ensemble des formules étiquetées par σ_1 et pouvant se trouver sur $\mathcal{T}$ est contenu dans $Tab(X)$, donc il y a au plus un nombre fini de formules étiquetées de cette forme sur $\mathcal{T}$ (d'après la proposition 12.1.9). Par ailleurs, lorsque l'algorithme complète l'action de $\sigma :: \neg\Box\varphi$, il marque cette formule comme étant terminée et ne la revisite plus jamais. Nous avons donc que $k < |Tab(X)|$. Puisque l'étiquette $\sigma = \sigma_1.k.\sigma_2$ était quelconque, le résultat tient. ✠

Pour X un ensemble fini de formules, définissons $C(X)$ comme étant le nombre d'occurrences de '$\wedge$' dans les formules de X.

Proposition 12.1.12
Soit $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(\mathrm{X})$ un tableau pour X. Alors, le nombre de branches dans $\mathcal{T}$ est borné par $2^{C(X)}$.

PREUVE. Tout tableau $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(\mathrm{X})$ peut être prolongé en un tableau $\mathcal{T}_n$ (un tableau où l'action d'une formule est totalement complétée), et le nombre de branches sur $\mathcal{T}$ est au plus le nombre qui se trouve sur $\mathcal{T}_n$. Nous aurons donc démontré le résultat si nous le démontrons pour les tableaux $\mathcal{T}_n$.

La seule règle pouvant créer de nouvelles branches est la ($\vee$)-règle, et son application à une branche génère précisément deux branches. Si l'algorithme entre dans la boucle (A$\vee$) dans l'état $\mathcal{T}_n$ et si $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ est sur $\mathcal{T}_n$, le tableau $\mathcal{T}_{n+1}$ résultant de l'action de cette formule sur $\mathcal{T}_n$ aura $2k$ branches où k est le nombre de branches passant par $\sigma :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ dans $\mathcal{T}_n$. Tous les tableaux intermédiaires, dont $\mathcal{T}$, en auront moins. Ainsi, chaque occurrence de '$\wedge$' peut au plus doubler le nombre de branches, et chaque occurrence ne peut le faire qu'une seule fois, car la formule sera marquée comme étant terminée une fois que l'algorithme l'aura visitée. Au total, ceci nous donnera un maximum de $2^{C(X)}$ branches pour un tableau pour X. ✠

Proposition 12.1.13

$\mathcal{T}$(X) est fini.

PREUVE. D'après les propositions 12.1.10 et 12.1.11, le nombre total d'étiquettes figurant dans les tableaux de $\mathcal{T}(X)$ est fini. Ceci entraîne avec la proposition 12.1.9 que le nombre total de formules étiquetées figurant dans des tableaux de $\mathcal{T}(X)$ est fini. Mais puisque le nombre total de branches d'un tableau de $\mathcal{T}(X)$ est borné uniformément par la proposition 12.1.12, ceci ne peut qu'entraîner que le nombre de tableaux dans $\mathcal{T}(X)$ est fini. ✠

Proposition 12.1.14

Une formule n'est visitée qu'un nombre fini de fois.

PREUVE. Toute formule qui n'est pas de la forme $\sigma :: \Box\psi$ n'est visitée qu'une seule fois (car elles sont marquées comme étant terminées par la suite). Il suffit donc montrer que les formules de la forme $\sigma :: \Box\psi$ sont réactivées au plus un nombre fini de fois (avant d'être désactivées).

La réactivation d'une formule de la forme $\sigma :: \Box\psi$ ne peut être fait que par les formules de la forme $\sigma :: \neg\Box\varphi$ (avec la même étiquette). Puisqu'il y a au plus $|Tab(X)|$ de ces formules et que $|Tab(X)| < \infty$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de formules étiquetées de la forme $\sigma :: \neg\Box\varphi$ dans le tableau. Or, chacune de ces formules ne peut réactiver une formule $\sigma :: \Box\psi$ qu'une seule fois, d'où le résultat. ✠

Proposition 12.1.15

L'algorithme termine.

Preuve. Par la proposition 12.1.12, $\mathcal{T}(X)$ est fini, donc il existe un rang n_0 à partir duquel les tableaux correspondant aux états $\mathcal{T}_n$, pour $n > n_0$, seront identiques. La différence entre ces états ne peut tenir qu'aux marquages des formules. Or, puisque les formules ne sont visitées qu'un nombre fini de fois (d'après 12.1.14) et que le nombre de formules à visiter est fini (conséquence de 12.1.12), il existe un rang n_1 à partir duquel les états de l'algorithme seront identiques. Autrement dit, l'algorithme atteindra un état où toutes les branches ouvertes n'auront que des formules terminées ou inactives. ✠

Pour un ensemble X de formules, $\mathcal{T}(X)$ dénotera le tableau pour X que l'algorithme aura produit après complétion. Cette notation est cohérente d'après 12.1.8 et 12.1.15.

Proposition 12.1.16
Si $\mathcal{T}(X)$ est ouvert et si $\mathcal{B}$ est une branche ouverte de $\mathcal{T}(X)$, alors $\mathcal{B}$ est un ensemble saturé.

Preuve. Il faut montrer que $\mathcal{B}$ remplit les conditions (S$\bot$), (S$\neg\neg$), (S$\wedge$), (S$\vee$), (S$\Diamond$) et (S$\Box$). Ceci se vérifie sans difficultés en utilisant la définition de l'algorithme. ✠

Théorème 12.1.17

(a) Complétude faible : Pour toute formule φ,

$$\Vdash \varphi \text{ ssi } \mathcal{T}(\neg\varphi) \text{ est fermé.}$$

(b) Propriété du modèle fini : Si φ est satisfaisable, φ est satisfaisable dans un modèle fini.

PREUVE. (a) La direction « $\Leftarrow$ » est le théorème 12.1.4. Pour l'autre direction, $\Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{T}(\neg\varphi)$ est fermé

ssi [non-[$\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est fermé] $\Rightarrow$ non-[$\Vdash \varphi$]]

ssi [$\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est ouvert $\Rightarrow$ $\neg\varphi$ est satisfaisable]

Si $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est ouvert, c'est qu'il contient une branche ouverte $\mathcal{B}$. Or, d'après la proposition précédente, $\mathcal{B}$ est un ensemble saturé. Par la proposition 12.1.6, cet ensemble est réalisable. Il existe donc un modèle M qui réalise $\mathcal{B}$. Mais si M réalise $\mathcal{B}$, M satisfait $\neg\varphi$ (à un certain point).

(b) Soit φ une formule satisfaisable. Si $\mathcal{T}(\varphi)$ était fermé, $\neg\varphi$ serait valide d'après le théorème 12.1.4; donc $\mathcal{T}(\varphi)$ est ouvert. D'après la proposition précédente, $\mathcal{T}(\varphi)$ contient une branche $\mathcal{B}$ ouverte et saturée. Suivant la construction de la proposition 12.1.6, nous pouvons construire un modèle de φ dont le domaine est $\acute{E}t(\mathcal{B})$, l'ensemble des étiquettes de $\mathcal{B}$. Or, puisque $\mathcal{B}$ est fini, $\acute{E}t(\mathcal{B})$ est fini et donc ce modèle de φ est fini. ✠

12.2 Calcul pour les SROS simples

Il faut à présent généraliser la construction de la section précédente pour accommoder le langage et la sémantique des SROS. Nous supposerons, pour simplifier, que le langage ne comporte ni nominaux ni modalité constante ni modalité hybride.

Tout d'abord, il nous faudra un autre système d'étiquetage. Il s'agira de décupler celui que nous avions auparavant. Nous posons $\Sigma_n = \Sigma$ (l'ensemble des étiquettes de la section précédente) et, pour m tel que $0 \leq m < n$, nous définissons l'ensemble Σ_m par les clauses :

(Ét1$_m$) $k \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow k \in \Sigma_m$

(Ét2$_m$) $k \in \mathbb{N}^+$, $\sigma_m \in \Sigma_m$ et $\sigma_{m+1} \in \Sigma_{m+1} \Rightarrow \sigma_m.k(\sigma_{m+1}) \in \Sigma_m$

Pour $\mu \in \Sigma_{m+1}$, avec $1 \leq m < n$, nous définissons $\Lambda_{m+1}(\mu) \subset \Sigma_m \times \Sigma_m$ comme la relation :

$\Lambda_{m+1}(\mu)(\sigma, \tau)$ ssi $\tau = \sigma.k(\mu)$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^+$

Posons $\mathbf{\Sigma}_n = \Sigma_0 \times \Sigma_1 \ldots \times \Sigma_n$. Nous définissons les relations $\prec_m$ et $\approx_m$ sur $\mathbf{\Sigma}_n$ comme

$\boldsymbol{\sigma} \approx_m \boldsymbol{\tau}$ si et seulement si $\sigma_k = \tau_k$, pour tout $k \neq m$

$\boldsymbol{\sigma} \prec_m \boldsymbol{\tau}$ si et seulement si $\boldsymbol{\sigma} \approx_m \boldsymbol{\tau}$ et $\Lambda_{m+1}(\sigma_{m+1})(\sigma_m, \tau_m)$

La structure $< \mathbf{\Sigma}_n, \Lambda_{\leq n}, \prec >$ forme une structure simple finie de rang n (où $\prec$ est la relation sur $\Sigma = \Sigma_n$ de la section précédente). Nous écrirons souvent

$\sigma_n / \sigma_{n-1} / \ldots / \sigma_0$

pour décrire l'étiquette $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Une *formule étiquetée* (de rang au plus n) est une expression de la forme $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$, où $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{\Sigma}_n$ et φ est une formule de $\mathrm{Form}_{\leq n}$. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de formules étiquetées, nous définissons

$\acute{E}t(\mathcal{X}) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{\Sigma}_n : \boldsymbol{\sigma} :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour un certain $\varphi\}$

De même, pour $0 \leq m \leq n$, nous définissons

$\acute{E}t_m(\mathcal{X}) = \{\sigma \in \Sigma_m : \exists \boldsymbol{\sigma} \in \acute{E}t(\mathcal{X})$ tel que $\sigma_m = \sigma\}$

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de formules étiquetées. Nous dirons qu'un modèle simple fini $\mathbf{M} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R, val >$ de rang n réalise $\mathcal{X}$ s'il existe $\mathbf{f} = (f_m)_{0 \leq m \leq n}$ où $f_m : \acute{E}t_m(\mathcal{X}) \to W_m$ sont des fonctions telles que

(RT1) Pour m tel que $1 \leq m \leq n$, et tous $\sigma, \tau \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{X})$ et $\mu \in \acute{E}t_m(\mathcal{X})$,

$\Lambda_m(\mu)(\sigma, \tau) \Rightarrow \Phi_{\leq n}(f_m(\mu))(f_{m-1}(\sigma), f_{m-1}(\tau))$,

et pour tous $\sigma, \tau \in \acute{E}t_n(\mathcal{X})$,

$\sigma \prec \tau \Rightarrow R(f_n(\sigma), f_n(\tau))$

(RT2) Si $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \in \mathcal{X}$, alors $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \varphi$, où $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = (f_0(\sigma_0), f_1(\sigma_1), \ldots, f_n(\sigma_n))$

Le calcul des tableaux pour la logique des structures simples est une adaptation de celui présenté à la section précédente. En gros, il s'agit d'une recette pour la construction d'un ensemble de formules étiquetées $\mathcal{X}$ qui servira par la suite à la construction d'un modèle qui réalise $\mathcal{X}$.

Si X est un ensemble de formules et $\boldsymbol{\sigma}$ est une étiquette, l'ensemble $\boldsymbol{\sigma} :: X$ est défini par $\{\boldsymbol{\sigma} :: \varphi : \varphi \in X\}$. Si X est ensemble fini formules, et si nous disposons d'un ordre linéaire (quelconque) sur les formules (il y a en a plusieurs, il suffit d'en choisir un et de le garder), nous définissons $\mathcal{B}_0(X)$ comme étant la branche obtenue en ordonnant chacune des formules étiquetées de l'ensemble $\mathbf{1} :: X$, où $\mathbf{1} = 1/1/\ldots/1$.

Si X est un ensemble fini de formules, nous définissons *un tableau pour X* comme étant un arbre de formules étiquetées généré par les clauses suivantes :

(TB1) $\mathcal{B}_0(X)$ est un tableau pour X

(TB2) Si $\mathcal{T}$ est un tableau (pour X), si $\mathcal{B}$ est une branche de $\mathcal{T}$, et si $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ est l'extrémité de $\mathcal{B}$ (autrement dit, la feuille de $\mathcal{B}$), alors l'arbre obtenu en prolongeant $\mathcal{B}$ suivant la règle de prolongation correspondant à φ est aussi un tableau (pour X).

Les règles de prolongation sont décrites dans le tableau 12.2.1 :

Tableau 12.2.1 Règles de prolongation

NOM	φ	RÈGLE DE PROLONGATION
$(\neg\neg)$	$\neg\neg\psi$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\boldsymbol{\sigma} :: \psi$
$(\wedge)$	$\psi \wedge \theta$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\boldsymbol{\sigma} :: \psi$, et prolongez cette nouvelle branche avec la feuille $\boldsymbol{\sigma} :: \theta$
$(\vee)$	$\neg(\psi \wedge \theta)$	Prolongez $\mathcal{B}$ avec les feuilles $\boldsymbol{\sigma} :: \psi$ et $\boldsymbol{\sigma} :: \theta$
$(\Box_m)$	$\Box_m\psi$	$1 \leq m \leq n$: Si $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_m(\mathcal{B})$, prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{(m-1)}.k(\sigma_m) :: \psi$ $m = n + 1$: Si $\sigma_n.k \in \acute{E}t_n(\mathcal{B})$, prolongez $\mathcal{B}$ avec la feuille $\boldsymbol{\sigma}_{-n}/\sigma_n.k :: \psi$
$(\Diamond_m)$	$\neg\Box_m\psi$	$1 \leq m \leq n$: Si k est le plus petit entier tel que $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \notin \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B})$, alors prolongez $\mathcal{B}$ avec $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{(m-1)}.k(\sigma_m) :: \neg\psi$; $m = n + 1$: Si k est le plus petit entier tel que $\sigma_n.k \notin \acute{E}t(\mathcal{B})$, alors prolongez $\mathcal{B}$ avec $\boldsymbol{\sigma}_{-n}/\sigma_n.k :: \neg\psi$

Dans le tableau précédent, $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m)$ dénote l'étiquette obtenue de $\boldsymbol{\sigma}$ en remplaçant la $(m-1)$-ième composante par $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m)$. Lorsque $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ est de la forme $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\psi$ (resp. $\boldsymbol{\sigma} :: \psi \wedge \theta$, $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\psi \wedge \theta)$, $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\psi$ ou $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\psi$), nous l'appellerons une $(\neg\neg)$-formule (resp. $(\wedge)$-, $(\vee)$-, $(\Box_m)$- ou $(\Diamond_m)$-formule).

Une branche $\mathcal{B}$ d'un tableau $\mathcal{T}$ est *fermée* s'il existe des étiquettes $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_n$ avec $\sigma_k = \tau_k$ et une variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_k$ telles que $\boldsymbol{\sigma} :: p \in \mathcal{B}$ et $\boldsymbol{\tau} :: \neg p \in \mathcal{B}$ (on remarquera la différence dans la manière de définir une branche fermée dans ce contexte). Une branche est *ouverte* si elle n'est pas fermée. Un tableau $\mathcal{T}$ est *fermé* si toutes ses branches sont fermées et *ouvert* s'il n'est pas fermé. Une branche est *réalisable* si l'ensemble des formules étiquetées de $\mathcal{B}$ est réalisable. Un tableau est *réalisable* si une de ses branches est réalisable.

Exemple

Élaborons un tableau pour l'ensemble

$$X = \{\Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg(p \wedge \neg q),\ \neg\Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg p,\ \Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg q\},$$

où p, $q \in \mathrm{Prop}_0$, composé de formules de $L_{\leq 3}$.

$1/1/1/1 :: \Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg(p \wedge \neg q)$	Base
$1/1/1/1 :: \neg\Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg p$	Base
$1/1/1/1 :: \Box_4\Box_3\Box_2\Box_1\neg q$	Base
$1.1/1/1/1 :: \neg\Box_3\Box_2\Box_1\neg p$	$(\Diamond_4)$
$1.1/1/1/1 :: \Box_3\Box_2\Box_1\neg(p \wedge \neg q)$	$(\Box_4)$
$1.1/1/1/1 :: \Box_3\Box_2\Box_1\neg q$	$(\Box_4)$
$1.1/1.1(1.1)/1/1 :: \neg\Box_2\Box_1\neg p$	$(\Diamond_3)$
$1.1/1.1(1.1)/1/1 :: \Box_2\Box_1\neg(p \wedge \neg q)$	$(\Box_3)$
$1.1/1.1(1.1)/1/1 :: \Box_2\Box_1\neg q$	$(\Box_3)$
$1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1 :: \neg\Box_1\neg p$	$(\Diamond_2)$
$1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1 :: \Box_1\neg(p \wedge \neg q)$	$(\Box_2)$

$$
\begin{array}{lll}
1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1 :: \Box_1\neg q & & (\Box_2)\\
1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1.1(1.1(1.1(1.1))) :: \neg\neg p & & (\Diamond_1)\\
1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1.1(1.1(1.1(1.1))) :: \neg(p \wedge \neg q) & & (\Box_1)\\
1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1.1(1.1(1.1(1.1))) :: \neg q & & (\Box_1)\\
\sigma :: \neg p & \sigma :: \neg\neg q & (\vee)\\
\sigma :: p & \sigma :: q & (\neg\neg)
\end{array}
$$

où $\sigma = 1.1/1.1(1.1)/1.1(1.1(1.1))/1.1(1.1(1.1(1.1)))$. Autrement dit, le tableau pour la négation de la formule

$$(\Box_4\Box_3\Box_2\Box_1(p \to q) \wedge \Diamond_4\Diamond_3\Diamond_2\Diamond_1 p) \to \Diamond_4\Diamond_3\Diamond_2\Diamond_1 q$$

est fermé. Ce tableau, disons $\mathcal{T}$, comporte deux branches, chacune avec les mêmes étiquettes. Pour chacune des branches $\mathcal{B}$, nous avons :

$$\acute{E}t_0(\mathcal{B}) = \{1,\ 1.1(1.1(1.1(1.1)))\}$$
$$\acute{E}t_1(\mathcal{B}) = \{1,\ 1.1(1.1(1.1))\}$$
$$\acute{E}t_2(\mathcal{B}) = \{1,\ 1.1(1.1)\}$$
$$\acute{E}t_3(\mathcal{B}) = \{1,\ 1.1\}$$

Proposition 12.2.2

Si $\mathcal{T}$ est réalisable, alors toute prolongation $\mathcal{T}^+$ de $\mathcal{T}$ est aussi réalisable.

Preuve. Soit $\mathcal{B}_r$ la (ou une des) branche(s) de $\mathcal{T}$ qui est réalisable, soit $\mathcal{B}$ la branche qui sera prolongée, et soit $\mathcal{B}^+$ le résultat de cette prolongation ($\mathcal{B}^+$ est une branche sauf si la règle $(\vee)$ est appliquée, auquel cas $\mathcal{B}^+$ sera un arbre avec deux branches). Si $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_r$, alors $\mathcal{T}$ restera réalisable quelque soit la manière de prolonger $\mathcal{B}$, car $\mathcal{B}_r$ sera toujours une de ses branches. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_r$, soit $\mathbf{M} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R, val >$ de rang n qui réalise $\mathcal{B}$ via f, c'est-à-dire :

(RT1) Pour m tel que $1 \leq m \leq n$, $\sigma, \tau \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{X})$ et $\mu \in \acute{E}t_m(\mathcal{X})$,

$$\Lambda_m(\mu)(\sigma, \tau) \Rightarrow \Phi_{\leq n}(f_m(\mu))(f_{m-1}(\sigma), f_{m-1}(\tau)),$$

et pour tous $\sigma, \tau \in \acute{E}t_n(\mathcal{X})$,

$\sigma \prec \tau \Rightarrow R(f_n(\sigma), f_n(\tau))$

(RT2) Si $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \in \mathcal{X}$, alors $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \varphi$, où $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = (f_0(\sigma_0), f_1(\sigma_1), \ldots, f_n(\sigma_n))$

Nous montrerons, cas par cas, que le modèle **M** réalise aussi $\mathcal{B}^+$.

$(\neg\neg)$. $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle $(\neg\neg)$ à $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\varphi \in \mathcal{B}$. Nous avons déjà, par la partie condition (RT2), que

$$\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \neg\neg\varphi$$

Mais ceci signifie que

$$\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \varphi$$

Donc, **M** réalise aussi $\mathcal{B}^+$.

$(\wedge)$. $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle $(\wedge)$ à $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \wedge \psi \in \mathcal{B}$. Nous avons que

$$\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \varphi \wedge \psi$$

par (RT2), ce qui veut dire que $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \varphi$ et $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \psi$. Autrement dit, **M** réalise $\mathcal{B}^+$.

$(\vee)$. $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle $(\vee)$ à $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{B}$. Encore une fois,

$$\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

par (RT2), mais ceci implique que $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \neg\varphi$ ou $\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \neg\psi$. Si c'est le premier cas, alors **M** réalise la branche de $\mathcal{B}^+$ qui a $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\varphi$ comme feuille. Si c'est le deuxième cas, **M** réalise la branche de $\mathcal{B}^+$ qui a $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\psi$ comme feuille.

$(\Box_m)$. $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle $(\Box_m)$ à $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\varphi \in \mathcal{B}$. Supposons que $1 \leq m \leq n$ (il restera alors le cas $m = n + 1$). Puisque **M** réalise $\mathcal{B}$, nous avons que

$$\mathbf{M}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \Box_m\varphi$$

Ainsi, $\mathbf{M}, \mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{m\}\mathbf{v}$. En particulier, par la condition (RT1), nous savons que

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})\{m\}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m)),$$

pour tout k tel que $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B})$, donc

M, $f(\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m)) \Vdash \varphi$

pour tout $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B})$. Ce qui démontre que $\mathcal{B}^+$ est réalisé par **M** dans ce cas. Si $m = n + 1$, la démonstration est encore plus simple.

$(\Diamond_m)$. $\mathcal{B}^+$ est obtenue en appliquant la règle $(\Diamond_m)$ à $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\varphi \in \mathcal{B}$. Supposons que $1 \leq m \leq n$ (il restera alors le cas $m = n + 1$). Puisque **M** réalise $\mathcal{B}$, nous avons que

M, $f(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash \neg\Box_m\varphi$

ce qui veut dire que **M**, $\mathbf{v} \Vdash \neg\varphi$, pour un certain $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{w}\{m\}\mathbf{v}$. Soit $k \in \mathbb{N}^+$ le plus petit entier tel que $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \notin \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B})$; $\mathcal{B}^+$ est la prolongation de $\mathcal{B}$ par $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \varphi$. Définissons $g_{m-1} : \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B}^+) \to W_{m-1}$ comme étant la fonction égale à f_{m-1} sur $\acute{E}t_{m-1}(\mathcal{B})$ qui envoie $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m)$ sur $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{g}$ est obtenue de $\mathbf{f}$ en remplaçant f_{m-1} par g_{m-1}, il facile de montrer que **M** réalise $\mathcal{B}^+$ via la fonction $\mathbf{g}$. La démonstration du cas $m = n+1$ est encore plus simple.

Ce qui démontre le résultat. ✠

Proposition 12.2.3

Un tableau fermé n'est pas réalisable.

PREUVE. Soit $\mathcal{T}$ un tableau fermé et $\mathcal{B}$ une branche quelconque de ce tableau. Supposons que $\mathcal{B}$ est réalisable. Il existerait un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R, val >$ et une suite de fonctions $\mathbf{f}$ qui satisfont les conditions (RT1) et (RT2). Puisque $\mathcal{B}$ est fermée, il existe des étiquettes $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_n$ avec $\sigma_k = \tau_k$ et une variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_k$ telles que $\boldsymbol{\sigma} :: p \in \mathcal{B}$ et $\boldsymbol{\tau} :: \neg p \in \mathcal{B}$. Puisque **M** réalise $\mathcal{B}$ (via $\mathbf{f}$), nous avons que **M**, $f(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash p$ et **M**, $f(\boldsymbol{\tau}) \Vdash \neg p$, par (RT2). Mais, **M**, $f(\boldsymbol{\sigma}) \Vdash p$ entraîne que $f_k(\sigma_k) \in val(p)$, et **M**, $f(\boldsymbol{\tau}) \Vdash \neg p$ entraîne que $f_k(\tau_k) = f_k(\sigma_k) \notin val(p)$, ce qui est contradictoire. ✠

Un calcul de tableau est, en particulier, un système de dérivation. Nous démontrons qu'une formule 'φ' est un théorème dans ce calcul en montrant que la formule '$\neg\varphi$' admet un tableau fermé (c'est-à-dire qu'il existe un tableau fermé pour l'ensemble $\{\neg\varphi\}$). Le théorème suivant montre que ce calcul est « sound », qu'il préserve la validité :

Théorème 12.2.4
Si '$\neg\varphi$' admet un tableau fermé, alors 'φ' est valide.

PREUVE. Supposons qu'il existe un tableau fermé $\mathcal{T}$ pour la formule '$\neg\varphi$' mais que 'φ' n'est pas valide. Il existe donc un modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R, val >$ et un point $w \in \mathbf{W}$ tels que

$$\mathbf{M}, \mathbf{w} \Vdash \neg\varphi.$$

Si nous montrons que $\mathbf{M}$ doit alors réaliser $\mathcal{T}$, nous obtiendrons une contradiction par la proposition 12.2.3.

Soient $\mathcal{T}_n$ le tableau obtenu à la n-ième étape de la construction de $\mathcal{T}$. Nous avons que $\mathcal{T}_0 = \{1 :: \neg\varphi\}$ et que $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}$, pour un certain N. Il est clair que $\mathbf{M}$ réalise $\mathcal{T}_0$. Par la proposition 12.2.2, $\mathbf{M}$ réalise donc tous les tableaux $\mathcal{T}_n$ jusqu'à $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}$. D'où le résultat. ✠

Nous savons maintenant que notre calcul démontre des validités, mais il devra en faire plus pour être complet, il faudra que toute validité y soit démontrable, ce qui reviendra, nous le verrons, à montrer que tout tableau ouvert d'une certaine sorte est satisfaisable. Cette partie est définitivement la plus compliquée. Nous devrons d'abord montrer comment extraire un modèle d'un tableau ouvert (d'une certaine sorte), et nous devrons ensuite définir un algorithme permettant de générer ces tableaux (quand ceux-ci existent).

Afin de réaliser la première partie de cette tâche, nous utiliserons la notion d'ensemble saturé. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de formules étiquetées, alors $\mathcal{X}$ est dit *saturé* s'il satisfait les conditions énumérées dans le tableau 12.2.5.

Tableau 12.2.5 Conditions de saturation

NOM	CONDITION
(S$\bot$)	Non-($\boldsymbol{\sigma} :: p \in \mathcal{X}$ et $\boldsymbol{\tau} :: \neg p \in \mathcal{X}$), pour tous $p \in \mathrm{Prop}_k$ et $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_n$ avec $\sigma_k = \tau_k$
(S$\neg\neg$)	Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \in \mathcal{X}$
(S$\wedge$)	Si $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \wedge \psi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$, $\boldsymbol{\sigma} :: \psi \in \mathcal{X}$
(S$\vee$)	Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\varphi \in \mathcal{X}$ ou $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\psi \in \mathcal{X}$
(S$\Box_m$)	$1 \leq m \leq n$: Si $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^+$ tel que $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{X})$ $m = n + 1$: Si $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_{n+1}\varphi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma}_{-n}/\sigma_n.k :: \varphi \in \mathcal{X}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^+$ tel que $\sigma_n.k \in \acute{E}t_n(\mathcal{X})$
(S$\Diamond_m$)	$1 \leq m \leq n$: Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\varphi \in \mathcal{X}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^+$ tel que $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \neg\varphi \in \mathcal{X}$ $m = n + 1$: Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_{n+1}\varphi \in \mathcal{X}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^+$ tel que $\boldsymbol{\sigma}_{-n}/\sigma_n.k :: \neg\varphi \in \mathcal{X}$

Un ensemble saturé a la propriété remarquable suivante :

Proposition 12.2.6

Si $\mathcal{X}$ est un ensemble saturé, alors $\mathcal{X}$ est réalisable.

PREUVE. Nous construisons le modèle $\mathbf{M} = < \mathbf{W}_n, \Phi_{\leq n}, R, val >$ à partir l'ensemble $\mathcal{X}$ lui-même. Pour k tel que $0 \leq k \leq n$ et $p \in \mathrm{Prop}_k$, posons

$W_k = \{\sigma \in \Sigma_k : \exists\boldsymbol{\sigma} \in \acute{E}t(\mathcal{X}) \text{ tel que } \sigma_k = \sigma\}$

$val(p) = \{\sigma \in \Sigma_k : \exists\boldsymbol{\sigma} :: p \in \mathcal{X} \text{ tel quc } \sigma_k = \sigma\}$

Pour m tel que $1 \leq m \leq n$, posons

$\Phi_m = \Lambda_m$

$R = \prec$

Montrons que $\mathbf{M}$ réalise $\mathcal{X}$ (via la fonction identité). Les conditions (RT1) et (RT2) doivent être vérifiées. La première est immédiate, car $\mathbf{f}$ est la fonction identité. Nous démontrerons la seconde en prouvant, par induction, que

(*) $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \varphi$

(**) $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \nVdash \varphi$

<u>Étape de base</u>. Supposons que φ est la variable propositionnelle $p \in \mathrm{Prop}_m$. Si $\boldsymbol{\sigma} :: p \in \mathcal{X}$, alors la définition de val nous assure $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash p$, donc (*) pour φ. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg p \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\tau} :: p \notin \mathcal{X}$ pour tout $\boldsymbol{\tau}$ tel que $\sigma_m = \tau_m$ par (S$\bot$), et donc $\sigma_m \notin val(p)$ par définition de val. Ainsi, $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \nVdash p$, et donc (**) pour φ.

<u>Étape d'induction</u>. Il faut considérer chaque cas séparément.

($\neg$). Supposons que $\varphi = \neg\psi$. Si $\sigma :: \neg\psi \in \mathcal{X}$, alors $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \neg\psi$ par la partie (**) de l'hypothèse d'induction appliquée à ψ, et donc (*) pour φ. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\psi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \psi \in \mathcal{X}$, par (S$\neg\neg$), et $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \psi$, par la partie (*) de l'HI appliquée à ψ, et donc (**) pour φ.

($\wedge$). Supposons que $\varphi = \psi \wedge \theta$. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \psi \wedge \theta \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \psi \in \mathcal{X}$ et $\boldsymbol{\sigma} :: \theta \in \mathcal{X}$, par (S$\wedge$). Par la partie (*) de l'HI appliquée à ψ et θ, nous avons $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \psi$ et $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \theta$, d'où $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \psi \wedge \theta$, et donc (*) pour φ. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\psi \wedge \theta) \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\psi \in \mathcal{X}$ ou $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\theta \in \mathcal{X}$, par (S$\vee$). Supposons que $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\psi \in \mathcal{X}$. Par la partie (**) de l'HI appliquée à ψ, nous avons $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \nVdash \psi$, d'où $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \neg\psi$, ce qui entraîne $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \neg(\psi \wedge \theta)$, et donc (**) pour φ.

($\Box_m$). Supposons que $\varphi = \Box_m\psi$. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\psi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \psi \in \mathcal{X}$ pour tout $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{X})$, par (S$\Box_m$). Par la partie (*) de l'HI appliquée à chaque $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \psi \in \mathcal{X}$, nous avons que

$$\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \Vdash \psi.$$

pour tout $\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \in \acute{E}t_{m-1}(\mathcal{X})$, c'est-à-dire, par la définition de $\{m\}$, $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma} \Vdash \Box_m\psi$, et donc (*) pour φ. Si $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\psi \in \mathcal{X}$, alors $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \neg\psi \in \mathcal{X}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^+$. Par la partie (**) de l'HI appliquée à ψ,

$$\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \nVdash \psi,$$

c'est-à-dire $\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) \Vdash \neg\psi$, et donc (**) pour φ.

Ce qui complète la preuve. ✠

Nous définissons maintenant notre algorithme pour générer un tableau pour X ayant la propriété suivante : ou bien ce tableau est fermé ou bien ce tableau possède une branche saturée. Si le tableau est fermé, X n'est pas satisfaisable; et si le tableau possède une branche saturée, nous pourrons, d'après la proposition précédente, construire une modèle qui satisfait X.

Nous supposerons qu'il existe un ordre strict sur les formules du langage et sur les branches du tableau de sorte que l'expression « la première formule ayant la propriété $\mathcal{P}$ dans le tableau » soit signifiante (ici, la propriété $\mathcal{P}$ est quelconque). La nature précise de l'ordre importe peu; seul importe qu'il y en ait un.

Une formule étiquetée portant la marque *active*, *inactive* ou *terminée* sera appelée une formule étiquetée *marquée*. Chaque étape de l'algorithme produira un arbre de formules étiquetées marquées.

Pour X un ensemble fini de formules, nous définissons l'algorithme de construction d'un tableau pour X de la manière suivante :

Tableau 12.2.7 Algorithme

ÉTAPE INITIALE	
Le tableau initial est la branche $\mathcal{B}_0(X)$ et toutes les formules étiquetées sont marquées comme étant actives.	
ÉTAPE D'ITÉRATION	
Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des formules actives, effectuez :	
(AP)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe un littéral actif dans $\mathcal{T}$, choisissez le premier littéral actif et marquez-le terminé.
(A$\neg\neg$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des $(\neg\neg)$-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première $(\neg\neg)$-formule active $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\varphi$ et prolongez toute branche passant par $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\varphi$ avec la $(\neg\neg)$-règle. Marquez $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\neg\varphi$ comme étant terminée et $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ comme active.

(A$\wedge$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\wedge$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\wedge$)-formule active $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \wedge \psi$, et prolongez toute branche passant par $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \wedge \psi$ avec la ($\wedge$)-règle. Marquez $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi \wedge \psi$ comme terminée, $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ et $\boldsymbol{\sigma} :: \psi$ comme actives.
(A$\Diamond_m$)	Pour chaque $m \in \{1,..., n\}$, en ordre décroissant :
	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\Diamond_m$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\Diamond_m$)-formule active $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\varphi$, et prolongez toute branche passant par $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\varphi$ avec la ($\Diamond_m$)-règle. Marquez $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\Box_m\varphi$ comme terminée, marquez toute formule $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \neg\varphi$ ajoutée par la ($\Diamond_m$)-règle comme active, et marquez toute formule de la forme $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\psi$ dans $\mathcal{T}$ comme active.
(A$\Box_m$)	Pour chaque $m \in \{1,..., n\}$, en ordre décroissant :
	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe des ($\Box_m$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\Diamond_m$)-formule active $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\varphi$, et prolongez toute branche passant par $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\varphi$ avec la ($\Box_m$)-règle. Marquez $\boldsymbol{\sigma} :: \Box_m\varphi$ comme inactive et toute formule $\boldsymbol{\sigma}_{-(m-1)}/\sigma_{m-1}.k(\sigma_m) :: \varphi$ ajoutée par la ($\Box_m$)-règle comme active.
(A$\vee$)	Pendant que $\mathcal{T}$ est ouvert et qu'il existe de ($\vee$)-formules actives dans $\mathcal{T}$, choisissez la première ($\vee$)-formule active $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\varphi \wedge \psi)$, ct prolongez toute branche passant $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ avec la ($\vee$)-règle. Marquez $\boldsymbol{\sigma} :: \neg(\varphi \wedge \psi)$ comme terminée, $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\varphi$ et $\boldsymbol{\sigma} :: \neg\psi$ comme actives.

Dans le contexte de la discussion sur l'algorithme, nous resserrerons notre définition d'un *tableau pour X*. Un *tableau pour X*, dans le contexte de cette discussion, sera un tableau obtenu à l'une des étapes de cet algorithme. L'ensemble de tous les tableaux pour X, dans ce sens restreint, est dénoté par $\mathcal{T}(X)$. Nous appellerons *l'action de* $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ l'ensemble des opérations de prolongation et de marquage que la formule $\boldsymbol{\sigma} :: \varphi$ entraîne dans l'algorithme. Dans la discussion, $\mathcal{T}_0$ sera le tableau dans son état initial avec les marques, et si $\mathcal{T}_n$ est un état subséquent de l'algorithme, $\mathcal{T}_{n+1}$ représentera le tableau avec les marques obtenu de $\mathcal{T}_n$ par l'action de la prochaine formule visitée par l'algorithme. $\mathcal{T}(X)$ désignera *le* tableau produit par l'algorithme appliqué à l'ensemble X (la proposition suivante montre que cette notion est bien définie).

Proposition 12.2.8

(a) L'algorithme est déterminé et la transition de $\mathcal{T}_n$ à $\mathcal{T}_{n+1}$ peut toujours être complétée.

(b) Tout $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(X)$ est fini et $\mathcal{T}(X)$ lui-même est fini.

(c) Toute formule n'est visitée qu'un nombre fini de fois.

(d) L'algorithme termine.

(e) Toute branche ouverte de $\mathcal{T}(X)$ est saturée.

Preuve. Les preuves de ces résultats sont tout-à-fait analogues à celles de la section précédente. Il suffit d'appliquer les mêmes arguments pour les $n+1$ composantes. ✠

Nous arrivons enfin à :

Théorème 12.2.9

(a) Complétude faible : Pour toute formule $\varphi \in \mathrm{Form}_L$,

$$\Vdash \varphi \text{ ssi } \mathcal{T}(\neg\varphi) \text{ est fermé.}$$

(b) Propriété du modèle fini : Si φ est satisfaisable, φ est satisfaisable dans un modèle fini.

Preuve. (a) La direction « $\Leftarrow$ » est le théorème 12.2.4. Pour l'autre direction, $\Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{T}(\neg\varphi)$ est fermé

ssi [non-[$\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est fermé] $\Rightarrow$ non-[$\Vdash \varphi$]]

ssi [$\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est ouvert $\Rightarrow \neg\varphi$ est satisfaisable]

Si $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ est ouvert, c'est qu'il contient une branche ouverte $\mathcal{B}$. Or, d'après la proposition précédente, $\mathcal{B}$ est un ensemble saturé. Par la proposition 12.2.6, cet ensemble est réalisable. Il existe donc un modèle M qui réalise $\mathcal{B}$. Mais si M réalise $\mathcal{B}$, M satisfait $\neg\varphi$ (à un certain point).

(b) Soit φ une formule satisfaisable. Si $\mathcal{T}(\varphi)$ était fermé, $\neg\varphi$ serait valide d'après le théorème 12.2.4; donc $\mathcal{T}(\varphi)$ est ouvert. D'après la proposition précédente, $\mathcal{T}(\varphi)$ contient une branche $\mathcal{B}$ ouverte et saturée. Suivant la construction de la proposition 12.2.6, nous pouvons construire un modèle de φ dont le domaine est $\acute{E}t(\mathcal{B})$, l'ensemble des étiquettes de $\mathcal{B}$. Or, puisque $\mathcal{B}$ est fini, $\acute{E}t(\mathcal{B})$ est fini et donc ce modèle de φ est fini. ✠

APPENDICE : Connaissance et modalité

Nous examinons dans cet appendice la manière dont nous pouvons traduire la modalité épistémique 'K' dans le langage de la modalité d'ordre supérieur de sorte à refléter les subtilités que nous avons identifiées aux chapitres 2 & 3, notamment celles qui concernent les interprétations agrippéennes et transparentistes. En particulier, nous cherchons à déterminer la formulation appropriée de la clause pour la modalité 'K' lorsque celle-ci est précédée par d'autres modalités. Nous allons développer une règle de traduction pour interpréter 'K' qui dépendra du rang de la formule connue et de la conception de la connaissance d'ordre supérieur adoptée. Nous considérons ensuite comment ces notions peuvent être développées dans un contexte multi-agent.

La connaissance de soi

Pour 'p' une proposition de rang 0 et 'q' une proposition rang 1, nous avions vu que les conditions de vérité de 'Kp' et 'Kq' sont correctement rendues si

$Kp = \Box_1 p$ et

$Kq = \Box_2 q$,

Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que les interprétations transparentiste et agrippéenne de 'KKp' sont données par les traductions suivantes :

$KKp = \Box_1\Box_1 p$

$KKp = \Box_2\Box_1 p$ (ou $\Box_2\Box_1\Box_1 p$, nous verrons pourquoi)

Mais comment établir une règle générale de traduction qui donnera les conditions de vérité appropriées pour une formule quelconque (du langage L_E, disons)? Nous cherchons donc une certaine fonction de traduction Trad de l'ensemble des formules de L_E à l'ensemble des formules de L (le langage de la modalité d'ordre supérieur) et, afin d'en faciliter la définition, nous devons tout d'abord généraliser la notion de rang aux formules de L_E. Définissons les fonctions d'ordre ord_{T} et ord_{A} de la manière suivante :

$ord(p)$ = rang de 'p'

$ord(\neg\varphi) = ord(\varphi)$

$ord(\varphi \wedge \psi) = \max(ord(\varphi), ord(\psi))$

pour $ord = ord_{\mathrm{T}}$ ou ord_{A}, et

$ord_{\mathrm{T}}(K\varphi) = ord_{\mathrm{T}}(\varphi)$

$ord_{\mathrm{A}}(K\varphi) = ord_{\mathrm{A}}(\varphi) + 1$

La fonction ord_{T} nous aidera à définir une traduction $\mathrm{Trad}_{\mathrm{T}}$ d'inspiration transparentiste, et la fonction ord_{A} une traduction $\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}$ d'inspiration agrippéenne. Nous posons : pour X = T ou A,

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(p) = p$

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(\neg\varphi) = \mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(\varphi)$

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(\varphi) \wedge \mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(\psi)$

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{X}}(K\varphi) = \Box_{n+1}!\mathrm{Trad}(\varphi)$, si $ord_{\mathrm{X}}(\varphi) = n$

où '$\Box_{n+1}!$' = '$\Box_{n+1}\Box_n \ldots \Box_1$'.

Considérons quelques exemples pour contraster la différence entre les deux traductions. Tout d'abord,

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{T}}(KKp) = \Box_1\Box_1 p$

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}(KKp) = \Box_2\Box_1\Box_1 p$

On remarquera une légère différence entre $\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}(KKp)$ et ce que nous avons nommé la traduction agrippéenne plus haut. En réalité, $\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}(KKp)$ est plus appropriée pour des raisons que nous comprendrons sous peu. Considérons, en effet, la formule '$K(q \wedge Kp)$'. Nous aurions donc

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{T}}(K(p \wedge Kq)) = \Box_2\Box_1(p \wedge \Box_2\Box_1 q)$ et

$\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}(K(p \wedge Kq)) = \Box_3\Box_2\Box_1(p \wedge \Box_2\Box_1 q)$,

alors que notre traduction esquissée plus haut aurait donné '$\Box_2(p \wedge \Box_2\Box_1 q)$' pour $\mathrm{Trad}_{\mathrm{T}}(K(p \wedge Kq))$ et '$\Box_3(p \wedge \Box_2\Box_1 q)$' pour $\mathrm{Trad}_{\mathrm{A}}(K(p \wedge Kq))$. Si les locutions modales '$\Box_2\Box_1$' et '$\Box_3\Box_2\Box_1$' sont préférables à '$\Box_2$' et '$\Box_3$', c'est parce qu'elles expriment tous les niveaux d'incertitude (du plus grand ordre représenté au plus petit) et non seulement le dernier, le plus haut.

La modalité 'K' dans son interprétation agrippéenne cesse d'être une modalité normale. La normalité est logiquement équivalente (en utilisant seulement la règle de nécessitation et des tautologies propositionnelles) à la condition

$$K(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$$

Posons $\varphi = p$ et $\psi = K(p \rightarrow p)$, nous avons que

$$\text{Trad}_{\text{A}}(K(p \wedge Kp)) = \Box_2\Box_1(p \wedge \Box_1(p \rightarrow p)) \text{ et}$$

$$\text{Trad}_{\text{A}}(Kp \wedge KKp) = \Box_1 p \wedge \Box_2\Box_1\Box_1(p \rightarrow p),$$

mais

$$\Vdash \Box_2\Box_1(p \wedge \Box_1(p \rightarrow p)) \leftrightarrow \Box_2\Box_1 p$$

$$\Vdash (\Box_1 p \wedge \Box_2\Box_1\Box_1(p \rightarrow p)) \leftrightarrow \Box_1 p$$

Or, le modèle que nous avons construit à partir de S_{B} et de l'ignorance de son daltonisme satisfait '$\Box_1 p_{\text{B}}$' mais pas '$\Box_2\Box_1 p_{\text{B}}$' au point (w, c, d). Cette conséquence était toutefois anticipée.

La connaissance des autres

Dans l'analyse que nous avons faite de la connaissance d'ordre supérieur jusqu'à présent, il était principalement – sinon exclusivement – question de la connaissance qu'un agent a de ses propres états épistémiques. Intéressante sur le plan philosophique, elle l'est peut-être moins pour d'autres disciplines. La connaissance d'ordre supérieur devient surtout intéressante pour ces dernières lorsqu'elle concerne plusieurs agents à la fois; la connaissance qu'un agent peut avoir des situations épistémiques des autres agents a des conséquences sur son comportement stratégique et, par conséquent, intéresse de près la théorie de la décision et la théorie des jeux. Il revient à Lewis (1969) d'avoir souligné l'importance de la connaissance commune, une connaissance d'ordre supérieur bien particulière, pour la stratégie d'un joueur.

Dans le chapitre 3, nous avons discuté le cas d'un agent ignorant son propre daltonisme. Considérons maintenant les cas de deux daltoniens S_a et S_b tels que

S_a est un daltonien rouge-vert,

S_b est un daltonien bleu-jaune,

S_a sait qu'il est daltonien rouge-vert,

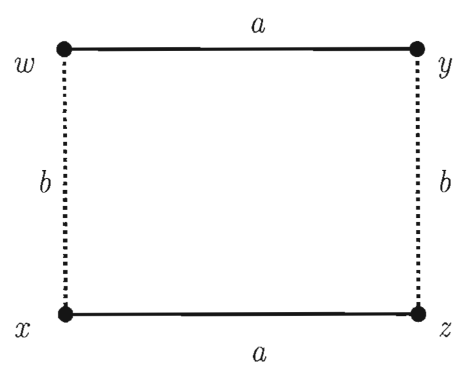
S_b sait qu'il est un daltonien bleu-jaune,

S_a ne sait pas si S_b est daltonien bleu-jaune ou daltonien rouge-vert

S_b sait que S_a est daltonien rouge-vert

Il n'est pas évident de représenter ce type de situation épistémique dans la sémantique des mondes possibles. Il faudrait que la même relation d'accessibilité serve à exprimer à la fois la connaissance de base (du premier ordre) de l'agent, en l'occurrence de son propre daltonisme, et la connaissance « épistémique » de l'agent (du deuxième ordre), l'ignorance ou la connaissance qu'il a du daltonisme de son compatriote. Illustrons en quoi la représentation de ces faits n'est pas évidente.

Si une relation d'accessibilité ne fait pas de distinction entre les niveaux de connaissance, il a fort à parier que nous rencontrerons les mêmes difficultés ici que nous avons rencontrées précédemment. Supposons, afin d'explorer l'hypothèse, qu'une relation sur W suffise à exprimer ces faits, quitte à ajouter des mondes supplémentaires à W au besoin. Je m'explique. Supposons que l'univers des agents S_a et S_b est très limité : il comprend seulement deux objets o_1 et o_2, le premier pouvant être rouge ou vert et le second bleu ou jaune. Les mondes w, x, y et z de cet univers aléthique simplifié se laissent décrire par les quatre couples suivants : w = (r, b), x =



(r, j), y = (v, b) et z = (v, j), où les première et deuxième positions spécifient les couleurs qu'exemplifient les objets o_1 et o_2 respectivement (r = rouge, b = bleu, j = jaune et v = vert). Étant donnés ces mondes, il est facile de déterminer à quoi ressembleront les relations d'accessibilité R_{DRV} et R_{DBJ} de S_a et de S_b respectivement :

R_{DRV} = clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, y), (x, z)\}$

R_{DBJ} = clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(w, x), (y, z)\}$

Toutefois, nous rencontrons déjà une difficulté ici car la relation R_{DRV} ne permet de représenter l'ignorance que S_a a de la connaissance de S_b. En effet, si 'p_1' est l'énoncé « L'objet o_1 est rouge » et 'q_1' est l'énoncé « L'objet o_1 est vert », alors l'énoncé '$(p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1)$' sera connu par S_a partout. Mais si S_a sait que $(p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1)$, c'est-à-dire si

$K_a((p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1))$

est vrai (partout), alors S_a sait que S_b n'est pas daltonien rouge-vert, contrairement à ce que nous voulions.[62]

Nous pourrions éviter cette difficulté en employant un stratagème : dédoubler l'ensemble des mondes possibles W de sorte qu'une copie ait les relations d'accessibilités R_{DRV} et R_{DBJ} pour S_a et S_b (respectivement), et que l'autre copie ait R_{DRV} pour les deux agents, en prenant soin de raccorder ces deux copies de manière appropriée. Le nouvel univers W^+ serait l'union de W et de $W' = \{w', x', y', z'\}$, où les quatre mondes w', x', y' et z' se comportent de manière identique à w, x, y et z sur les plan des faits du premier ordre (par exemple, o_1 est rouge dans w ssi o_1 est rouge dans w', etc.). La nouvelle relation d'accessibilité R_b sur W^+ de l'agent S_b est définie de la manière suivante :

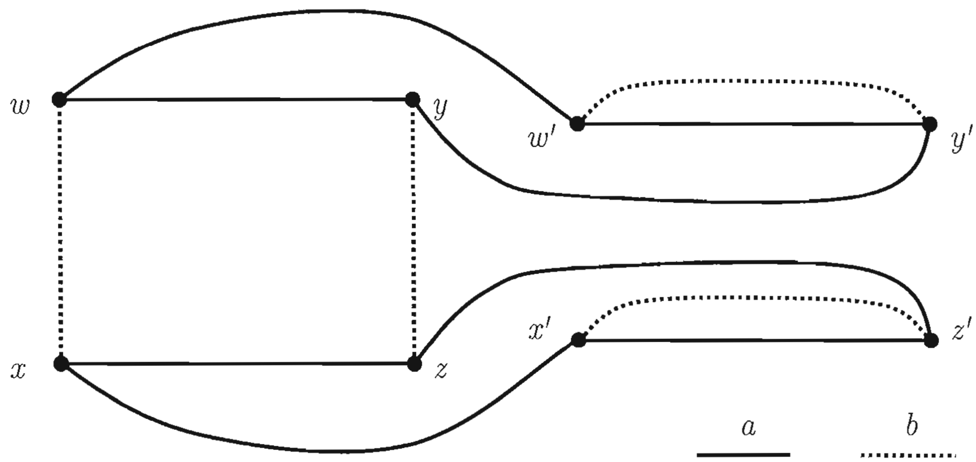
$R_b = R_{\mathrm{DBJ}} \cup (R_{\mathrm{DRV}})'$

où $(R_{\mathrm{DRV}})'$ est définie comme R_{DRV} mais sur les mondes de W' au lieu des mondes de W. La relation d'accessibilité R_a sur W^+ de S_a n'est pas définie aussi simplement; nous ne pouvons pas la définir comme

[62] Cette discussion suit de très près la présentation du chapitre 1.

$R_a = R_{\text{DRV}} \cup (R_{\text{DRV}})'$,

car sinon S_a saurait que S_b est daltonien bleu-jaune aux mondes de W et saurait que S_b est daltonien rouge-vert aux mondes de W'. Il faudrait pour rétablir son ignorance que nous ajoutions des couples dans la relation R_a, notamment les couples (w, w'), (x, x'), (y, y') et (z, z'), et que nous ajoutions aussi le nécessaire pour que cette nouvelle relation soit réflexive, symétrique et transitive. Si nous faisons cela, nous aurons une première approximation satisfaisante de la connaissance qu'ont ces agents l'un de l'autre.



Sans entrer dans l'analyse d'exemples qui pourraient compromettre cette méthode de duplication, au sens où un énoncé aurait une valeur de vérité inattendue, j'aimerais souligner combien cette méthode s'apparente davantage à un rafistolage *ad hoc* qu'une représentation fidèle de la connaissance d'ordre supérieur, le caractère *ad hoc* étant principalement dû au fait que nous ayons à rajouter des « épi-mondes » (ceux de W'). Il y a aussi un problème de taille (littéralement) que rencontre cette méthode : il y a un potentiel de croissance exponentielle de ces « épi-mondes » plus les profils épistémiques d'ordre supérieur de nos agents sont complexes. Dans l'exemple ci-dessus, il n'y a eu qu'un simple dédoublement, ce qui reste contrôlable, mais si, d'une part, l'agent S_a hésitait entre trois profils épistémiques pour S_b et si, d'autre part, S_b hésitait entre deux profils épistémiques pour S_a, alors il faudrait sextupler l'univers de base. Avec plus d'agents et plus d'ignorance de la part des agents à propos des profils épistémiques de leurs voisins, la situation devient vite incontrôlable : avec n agents daltoniens d'une certaine sorte, chacun ne sachant pas si leurs voisins sont daltoniens rouge-vert ou daltoniens bleu-jaune, vous devrez disposer de $2^{n(n-1)}$ copies de l'univers de base.

Cette prolifération ne serait pas pathologique si ce n'était du caractère bigarré des relations d'accessibilité; en essayant de simuler deux niveaux de connaissance en un, il finit par y avoir deux types de liens entre les mondes : d'une part, les liens provenant de la relation d'accessibilité d'ordre un, et d'autre part, des liens qui font le pont entre deux relations d'accessibilité. Dans la relation R_a, le lien entre w et x provient de la relation R_{DRV} mais celui entre w et w' est là pour établir un pont entre les deux profils de S_b que S_a ne distingue pas. Au final, il s'agit d'une quantification sur des relations d'accessibilité qui se dissimule sous les apparences d'une quantification sur les mondes. Il n'y a rien de mal à la dissimulation, mais elle n'est d'aucun avantage si elle crée de telles complications.

Comment adapter les structures et le langage des sections précédentes afin d'appliquer le même genre de solution? D'abord, donnons-nous un langage modale avec les modalités '$[a]_{n+1}$' et '$[b]_{n+1}$', pour chaque $n \geq 0$. Les structures seront définies sur $\mathbf{W} = W_0 \times W_1 \times \ldots$, mais la fonction Φ_{n+1} attribuera une paire $(R_a(w),\ R_b(w))$ de relations d'accessibilité sur W_n, une pour chaque agent, au lieu d'attribuer une seule relation d'accessibilité sur W_n à chaque point de $w \in W_{n+1}$. Pour $x = a$ ou b, nous définissons la relation

$\mathbf{w}\{n+1\}_x\mathbf{v}$ ssi (i) $w_k = v_k$, pour $k \neq n$, et (ii) $R_x(w_{n+1})(w_n,\ v_n)$,

ce qui donne la clause sémantique suivante pour les modalités :

$\mathbf{w} \Vdash [x]_{n+1}\varphi$ ssi $\mathbf{v} \Vdash \varphi$, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ tel que $\mathbf{w}\{n+1\}_x\mathbf{v}$

Il nous faut ensuite trouver une traduction adéquate Trad dans ce langage des formules composées des modalités K_a et K_b. Encore une fois, la notion d'ordre d'une formule sera centrale, et nous ne définirons que la version transparentiste du rang de même que version transparentiste de la fonction de traduction. Pour $x = a$ ou b, posons

$ord_x(p)$ = rang de 'p'

$ord_x(\neg\varphi) = ord_x(\varphi)$

$ord_x(\varphi \wedge \psi) = \max(ord_x(\varphi),\ ord_x(\psi))$

$ord_x(K_y\varphi) = ord_x(\varphi)$, si $x = y$

$ord_x(K_y\varphi) = ord_y(\varphi) + 1$, si $x \neq y$

L'idée est qu'une modalité épistémique fait augmenter le rang de x seulement si celle-ci n'est pas la sienne. Pour la traduction, nous posons :

$\mathrm{Trad}(p) = p$

$\mathrm{Trad}(\neg\varphi) = \mathrm{Trad}(\varphi)$

$\mathrm{Trad}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Trad}(\varphi) \wedge \mathrm{Trad}(\psi)$

$\mathrm{Trad}(K_x\varphi) = [x]_{n+1}!\mathrm{Trad}(\varphi)$, si $ord_x(\varphi) = n$

où '$[x]_{n+1}!$' = '$[x]_{n+1}[x]_n \dots [x]_1$'. Par exemple, si $ord(p) = 0$, alors

$\mathrm{Trad}(K_a p) = [a]_1 p$

$\mathrm{Trad}(K_a K_a p) = [a]_1[a]_1 p$

$\mathrm{Trad}(K_b K_a p) = [b]_2[b]_1[a]_1 p$

$\mathrm{Trad}(K_b K_a K_a p_1) = [b]_2[b]_1[a]_1[a]_1 p$

$\mathrm{Trad}(K_a K_b K_b K_a K_a p_1) = [a]_3[a]_2[a]_1[b]_2[b]_1[b]_2[b]_1[a]_1[a]_1 p$

et ainsi de suite.

Nous voulons montrer qu'il existe un modèle qui satisfait les formules épistémiques décrivant la situation de nos daltoniens S_a et S_b. Notamment, si

p_1 = L'objet o_1 est rouge

q_1 = L'objet o_1 est vert

p_2 = L'objet o_2 est bleu

q_2 = L'objet o_2 est jaune

nous voulons que le modèle satisfasse les traductions de formules suivantes :

$(p_1 \to K_b p_1) \wedge (q_1 \to K_b q_1)$

$(p_2 \to K_a p_2) \wedge (q_2 \to K_a q_2)$

$\neg K_a((p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1))$

Pour construire un tel modèle, il suffit de poser

$W_0 = W = \{w, x, y, z\}$

$W_1 = \{e, f\}$

$W_2 = \{g\}$

avec

$(R_a(e), R_b(e)) = (R_{\mathrm{DRV}}, R_{\mathrm{DBJ}})$

$(R_a(f), R_b(f)) = (R_{\mathrm{DRV}}, R_{\mathrm{DRV}})$

$(R_a(g), R_b(g)) = (\{e, f\} \times \{e, f\}, \{(e, e), (f, f)\})$

Autrement dit : e est le profil épistémique du premier ordre actuel et f est l'autre profil épistémique du premier ordre non-éliminé pas S_a; g est le profil épistémique du deuxième ordre actuel stipulant que S_b sait que S_a est daltonien rouge-vert et qu'il est lui-même daltonien bleu-jaune. On peut vérifier aisément que

$(w, e, g) \Vdash \mathrm{Trad}((p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1))$

$(w, e, g) \Vdash \mathrm{Trad}((p_2 \rightarrow K_a p_2) \wedge (q_2 \rightarrow K_a q_2))$

$(w, e, g) \Vdash \mathrm{Trad}(\neg K_a((p_1 \rightarrow K_b p_1) \wedge (q_1 \rightarrow K_b q_1)))$

Si nous voulons changer la connaissance d'ordre supérieure de S_b, il suffira de modifier la relation qui lui est attribuée à g, il ne sera pas nécessaire de modifier l'ensemble W_0.

Bibliographie

ALMOG, J., PERRY, J. & WETTSTEIN, H. (éds.) (1989), *Themes from Kaplan*, New York : Oxford University Press.

ALSTON, P. (1989), *Epistemic Justification*, Ithaca, NY : Cornell University Press.

ANDERSON, A. AND BELNAP, N. (1975), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1, Princeton: Princeton University Press.

ANDERSON, A. AND BELNAP, N. (1992), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 2, Princeton: Princeton University Press.

AQVIST, L. (1973), « Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Predicates », *Journal of Philosophical Logic* **2** : 1-76.

ARECES C., BLACKBURN, P., & MARX, M. (2001), « Hybrid Logics: Characterization, Interpolation and Complexity », *Journal of Symbolic Logic* **66** : 977–1010.

ARISTOTE, *Éthique à Nicomaque*, trad. DEFRADAS, J., Paris : Agora, 1992.

ARMSTRONG, D. M. (1973), *Belief, Truth and Knowledge*, New York: Cambridge University Press.

ARMSTRONG, D. M. (1983), *What is a Law of Nature*, New York: Cambridge University Press.

ARMSTRONG, D. M. (1989), *A Combinatorial Theory of Possibility*, Cambridge : Cambridge Studies in Philosophy.

ARMSTRONG, D. M. (1997), *A World of State of Affairs*, Cambridge : Cambridge Studies in Philosophy.

AUMANN, R. J. (1976), « Agreeing to disagree », *Annals of Statistics* **4**: 1236-1239.

BALTAG, A., MOSS, .L. S. & SOLECKI, S. (1998), « The logic of Public Announcements, Common Knowledge, and Private Suspicion », *présenté à TARK98*.

BARWISE, J. & PERRY, J. (1981), « Semantic Innocence and Uncompromising Situations », *Midwest Studies in the Philosophy of Language* **6**(1) : 387-404.

BAUDRY, L. (éd.) (1950), *La querelle des futures contingents (Louvain 1465-1475). Textes inédits*, Études de philosophie médiévale **38**, Paris : Vrin.

BENNETT, J. (2003) *A Philosophical Guide to Conditionals*, Oxford: Clarendon Press.

VAN BENTHEM, J., 1983, *The Logic of Time*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1ère éd. (2e éd., 1991).

BERKELEY, G. (1970), *Trois dialogues entre Hylas et Philonous*, trad., prés. et notes par LEROY, A., Paris : Éditions Aubier-Montaigne.

BERKELEY, G. (1991), *Principes de la connaissance humaine*, trad., prés. et notes par BERLIOZ, D., Paris : GF Flammarion.

BERNECKER, S. & DRETSKE, F. (éds.) (2000), *Knowledge: readings in contemporary epistemology*, Oxford : Oxford University Press.

BLACKBURN, P (1993), « Nominal Tense Logic », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **34** : 56-83.

BLACKBURN, P. (1994), « Tense Temporal Reference, and Tense Logic », *Journal of semantics* **11** : 83-101.

BLACKBURN, P. (2000), « Internalizing Labeled Deduction », *Journal of Logic and Computation* **10** : 137-168.

BLACKBURN, P. (2007), « Arthur Prior and Hybrid Logic », *Synthese* **150** : 329–372. (N° spécial dirigé par BRAÜNER, T., HASLE, P. & ØHRSTRØM, P.)

BLACKBURN, P., VAN BENTHEM, J, & WOLTER, F. (2006), *Handbook of Modal Logics*, Elsevier.

BLACKBURN, P., DE RIJKE, M. & VENEMA, Y. (2001), *Modal Logic*, Cambridge : Cambridge University Press.

BLACKBURN, P. & TZAKOVA, M. (1999), « Hybrid Languages and Temporal Logic », *Logic Journal of the IGPL* **7**(1) : 27-54.

BONJOUR, L. (1985), *The Structure of Empirical Knowledge*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

BONJOUR, L. (2002), *Epistemology: Classic Problems and Contemporary Responses*, Lanham, MD : Rowman & Littlefield.

BROCHARD, V. (1887), *Les sceptiques grecs*, Paris : Imprimerie Nationale.

BROGAARD, B. & SALERNO, J. (2002), « Clues to the Paradoxes of Knowability: Reply to Dummett and Tennant », *Analysis* **62** : 143–150.

BROGAARD, B. & SALERNO, J. (2009), « Fitch's Paradox of Knowability », *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ZALTA, E. N. (éd.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/fitch-paradox/>.

BULL, R. (1969), « On Modal Logic with Propositional Quantifiers », *The Journal of Symbolic Logic* **34**(2) : 257-263.

BULL, R. (1970), « An Approach to Tense Logic », *Theoria* **36** : 282-300.

BURGESS, J. (1979), « Logic and Time », *Journal of Symbolic Logic* **44** : 556-582.

BURGESS, J. (1980), « Decidability for Branching Time », *Studia Logica* **39** : 203-18

CANTO-SPERBER, M. (dir.) (1989), *Philosophie grecque*, Paris : Presses Universitaires de France, 2e éd.

CARNO, J. & JONES, A. (2002), « Deontic Logic and Contrary-to-duties », *in* GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (2002b), pp. 265-343.

CHAGROV, A. & ZAKHARYASCHEV, M. (1997), *Modal Logic*, Oxford : Oxford University Press.

CHELLAS, B.F. (1980) *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.

D'AGOSTINO, M., GABBAY, D., HÄHNLE, R. & POSEGGA, J. (éds.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

DANTO, A. C. (1967), « On Knowing That We Know », *in* STROLL, A. (1967) : pp. 32-53.

DAVIDSON, D. (1969), « True to the Facts », *Journal of Philosophy* **64** : 691-703.

DAVIDSON, D. (1986), « Knowing One's Own Mind », *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association* **60**(3): 439-457.

DAVIES, M. & HUMBERSTONE, L. (1980): « Two Notions of Necessity », *Philosophical Studies* **38** : 1–30.

DIVERS, J. (2002), *Possible Worlds*, New York : Routledge.

DRETSKE, F. (1970), « Epistemic Operators », *Journal of Philosphy* **67** : 1007-1022.

DRETSKE, F. (1981), *Knowledge and the Flow of Information*, Cambridge, MA : MIT Press.

DESCARTES, R., *Méditations métaphysiques*, prés., intro. et notes par MARTY, J.-P., Paris : Hachette, 1967.

DESCARTES, R., *Discours de la méthode*, Paris : GF-Flammarion, 1966.

DUMMETT, M. (1978), *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

DUMMETT, M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

DUMMETT, M. (2001), « Victor's Error », *Analysis* **61** : 1–2.

DUTANT, J. & ENGEL, P. (éds.) (2005), *Philosophie de la connaissance: croyance, connaissance, justification*, Paris : Vrin.

EDGINGTON, D. (1985), « The Paradox of Knowability », *Mind* **94** : 557–568.

EDGINGTON, D. (2006), « Conditionals », *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ZALTA, E. N. (éd.), <http://plato.stanford.edu/archives/spr-2006/entries/conditionals/>.

EDWARDS, J. (1764), *A Careful and Strict Enquiry into the Prevailing Notions of that Freedom of the Will which is supposed to be Essential to Moral Agency, Virtue and Vice, Reward and Punishment, Praise and Blame*, Edinburgh : Ogle, Allardice and Thomson, 1818.

ENGEL, P. (1996), *Philosophie et psychologie*, Paris : Folio-Gallimard.

ENGEL, P. (2007), *Va savoir : De la connaissance en général*, Paris : Hermann.

EVANS, G. (2004), « Comment on 'Two Notions of Necessity' », *Philosophical studies* **118**: 11-16.

FAGIN, R., HALPERN, J. Y., MOSES, Y., & VERDI, M. Y. (1995), *Reasoning about Knowledge*, Cambridge, MA: MIT Press.

FAGIN, R., HALPERN, J. Y., MOSES, Y., & VERDI, M. Y. (1996), « Common Knowledge Revisited », *Annals of Pure and Applied Logic* **96** : 89-105.

FINE, K. (1970), « Propositional Quantifiers in Modal Logic », *Theoria* **36**(3) : 336-346.

FINE, K. (2005), *Modality and Tense*, Oxford : Oxford University Press.

FITCH, F. (1963), « A Logical Analysis of Some Value Concepts », *The Journal of Symbolic Logic* **28** : 135–14.

FITTING, M (1972), « Tableau Methods of Proof for Modal Logics », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13**(2) : 237-247.

FITTING, M. & MENDELSOHN, R. (1998), "First-order Modal Logic", Kluwer Academic, Dordrecht.

FREGE, G., *Écrits logiques et philosophiques*, trad. et éd. par IMBERT, C., Paris : Seuil, 1971.

GABBAY, D. (1981), « An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames, », dans MONNICH, U. (éd.), *Aspects of Philosophical Logic*, Dordrecht : Reidel.

GABBAY, D. (1994), *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, New York : Oxford University Press.

GABBAY, D. (1996), *Labelled Deductive Systems*, Oxford : Clarendon Press.

GABBAY, D. (1996a), « An overview of fibred semantics and the combination of logics », *in* BAADER, F. & SCHULZ, K.U. (éds), *Frontiers of Combining Systems: Proceedings of the 1st International Workshop FroCos'96, Munich (Germany)*, volume 3 of *Applied Logic*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers : 1-55.

GABBAY, D. (1996b), « Fibred semantics and the weaving of logics, Part 1: Modal and intuitionistic logic », *Journal of Symbolic Logic* **61**(4).

GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (2001), *Handbook of Philosophical Logic*, Volume 3, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2e éd.

GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (2002a), *Handbook of Philosophical Logic*, Volume 7, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2e éd.

GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (2002b), *Handbook of Philosophical Logic*, Volume 8, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2e éd.

GABBAY, D., HODKINSON, I., & REYNOLDS, M. (1994), *Temporal logic: mathematical foundations and computational aspects: Vol. 1*, Oxford : Clarendon Press.

GABBAY, D., KURUCZ, A., WOLTER, F. & ZAKHARYASCHEV, M. (2003), *Many-dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Amsterdam : Elsevier Science.

GABBAY, D. & SHEHTMAN, V. B. (1998), « Products of Modal Logics, Part 1 », *Logic Journal of IGPL* **6**(1) : 73-146.

GABBAY, D. & SHEHTMAN, V. B. (2000), « Products of Modal Logics, Part 2 », *Logic Journal of IGPL* **8**(2) : 73-146.

GABBAY, D. & SHEHTMAN, V. B. (2002), « Products of Modal Logics, Part 3 », *Studia Logica* **72**(2) : 157-183.

GABBAY, D. & WOODS, J. (éds.) (2006), *Logic and the Modalities in the Twentieth Century, The Handbook of the History of Logic*, volume 7, Amsterdam: Elsevier.

GARCIA-CARPINTERO, M. & MACIA, J. (2006), *Two-Dimensional Semantics*, Oxford : Clarendon Press.

GETTIER, E. (1963), « Is Justified True Belief Knowledge? », *Analysis* **23** : 121-123.

GINET, C. (1970), « What Must Be Added To Knowing To Obtain Knowing That One Knows? », *Synthese* **21** : 163-186.

GOLDMAN, A. (1979), « What is a justified belief? », *Journal of Philosophy* **64** : 355-372.

GOLDMAN, A. (1986), *Epistemology and Cognition*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

GOODMAN, N. (1955), *Fact, Fiction and Forecast*, Cambridge, MA: Harvard.

GORÉ, R. (1999), « Tableau methods for modal and temporal logics », *in* D'AGOSTINO, M., GABBAY, D., HÄHNLE, R. & POSEGGA, J. (éds.), *Handbook of Tableau Methods*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

GRICE, P. (1989), *Studies in the Ways of Words*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

GAIFMAN, H. (1988), « A Theory of Higher Order Probabilities », *in* SKYRMS, B. & HARPER, W. (éds.), *Causation, Chance, and Credence*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

GINET, C. (1970), « What must be added to knowing to obtain knowing that one knows? », *Synthese* **21** : 163-186.

HALPERN, J. (2003), *Reasoning about Uncertainty*, Cambridge, MA : MIT Press.

HENDRICKS, V. F. (2006), *Mainstream and Formal Epistemology*, New York : Cambridge University Press.

HENDRICKS, V. F. & PEDERSEN, S. A. (éds.) (2006a), « Ways of Worlds I–II : Two Special Issues on Possible Worlds and Related Notions », *Studia Logica* **82**(3).

HENKIN, L. (1950), « Completeness in the Theory of Types », *Journal of Symbolic Logic* **15** : 81-91.

HILPINEN, R. (1970), « Knowing that one knows and the classical definition of knowledge », *Synthese* **21** : 109-132.

HINTIKKA, J. (1962), *Knowledge and belief: an introduction to the logic of the two notions*, Ithaca, N.Y. : Cornell University Press, (réimp. 2005).

HINTIKKA, J. (1970), « 'Knowing That One Knows' Reviewed », *Synthese* **21** : 141-162.

HUME, D., *Traité de la nature humaine : Livre I – L'entendement*, trad. BARANGER, P. & SALTEL, P., prés. SALTEL, P., Paris : GF-Flammarion, 1995.

KAMP, J. A. W. (1968), *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, Ph.D. thesis, University of California, Los Angeles.

KAMP, J. (1971), « Formal Properties of 'Now' », *Theoria* **37** : 227-273.

KRIPKE, S. (1959), « A completeness theorem in modal logic », *Journal of Symbolic Logic* **24** : 1-14.

KRIPKE, S. (1963), « Semantical Considerations on Modal Logic », *Acta Philosophica Fennica* **16** : 83-94.

KRIPKE, S. (1982), *Naming and Necessity*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

KOLMOGOROV, A. N. (1933/1960), *Foundations of the Theory of Probability*, 2e éd., New York, NY : Chelsea Publishing Co. (Originally published in 1933).

KVANVIG, J. (1995), « The Knowability Paradox and the Prospects for Anti-Realism », *Noûs* **29** : 481-499.

KVANVIG, J. (2006), *The Knowability Paradox*, Oxford: Oxford University Press.

LEHRER, K. (1970), « Believing That One Knows », *Synthese* **21** : 133-140.

LEHRER, K. (1970a), « The Fourth Condition for Knowledge: A Defence », *Review of Metaphysics* **24** : 122-128.

LEHRER, K. (1990), *Theory of Knowledge*, Boulder CA : Westview Press.

LEMMON, E. J. (1967), « If I Know, Do I Know That I Know? », *in* STROLL, A. (1967) : pp. 54-82.

LEWIS, D. K. (1968), « Counterpart Theory and Quantified Modal Logic », *The Journal of Philosophy* **65**(5) : 113-126.

LEWIS, D. K. (1969), *Convention*, New York : Basil Blackwell.

LEWIS, D. K. (1971), « Counterparts of Persons and Their Bodies », *The Journal of Philosophy* **68**(7) : 203-211.

LEWIS, D. K. (1973), « Counterfactuals », Cambridge : Harvard University Press.

LEWIS, D. K. (1976), « Probability of Conditionals and Conditional Probabilities », *Philosophical Review* **85** : 297-315 (réprimé *in* HARPER et al. (éds.) (1981), *Ifs.*, Dordrecht : Reidel).

LEWIS, D. K. (1979), « Counterfactual Dependence and Time's Arrow », *Noûs* **13** : 455-476.

LEWIS, D. K. (1986), « On the Plurality of Worlds », New York : Basil Blackwell.

LEWIS, D. K. (1996), « Elusive Knowledge », *Australasian Journal of Philosophy* **74** : 549-567.

LEIBNIZ, G. W., *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, chronologie et intro. par BRUNSCHWIG, J., Paris : GF-Flammarion, 1966.

LOCKE, J., *Essai sur l'entendement humain: Livres I et II*, trad., prés., notes et index par VIENNE, J.-M., Paris : Vrin, 2001.

MARION, M. et VOIZARD, A. (éds.) (1998), *Frege : Logique et Philosophie*, Paris : L'Harmattan.

MARX, M. & VENEMA, Y. (1997), « Multidimensional Modal Logic, Volume 4 », de *Applied Logic Series*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

MASSACCI, F. (2000), « Single Step Tableaux for Modal Logics », *Journal of Automated Reasoning* **24** : 319-364.

MONTAGUE, R. (1970), « Universal Grammar », *Theoria* **36** : 373-398.

MORTON, A. (2002), *A Guide Through the Theory of Knowledge*, 3e éd., Oxford : Blackwell.

MOSER, P. (éd.) (2002), *The Oxford handbook of epistemology*, Oxford : Oxford University Press.

NADEAU, R. (éd.) (2009), *Philosophies de la connaissance*, Québec, CA, PUL.

NOZICK, R. (1981), *Philosophical Explanations*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

PERCIVAL, P. (1990), « Fitch and Intuitionistic Knowability », *Analysis* **50** : 182–187.

PERCIVAL, P. (1991), « Knowability, Actuality and the Metaphysics of Context-Dependence », *Australasian Journal of Philosophy* **69** : 82–97.

PLANTIGA, A. (1974), *The Nature of Necessity*, Oxford : Clarendon Press.

PRICHARD, H. A. (1950), *Knowledge and Perception : Essays and Lectures*, ROSS, W. D. (éd.), Oxford : Clarendon Press.

PRIEST, G. (éd.) (1997), *Special Issue: Impossible Worlds*, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **38**(4).

PRIOR, A. N. (1957), *Time and Modality*, Oxford : Clarendon Press.

PRIOR, A. N. (1967), *Past, Present and Future*, Oxford : Clarendon Press.

PRIOR, A. N. (1969), *Papers on Time and Tense*, Oxford : Clarendon Press.

PRIOR, A. N. & FINE, K. (1977), *World, times and selves*, University of Massachusetts Press.

PUTNAM, H. (1984), *Raison, vérité et histoire*, trad. GERSCHENFELD, A., Paris : Minuit.

QUINE, W. V. O. (1943), « Notes on Existence and Necessity », *The Journal of Philosophy* **40**(5) : 113-127.

QUINE, W. V. O. (1953), *From a Logical Point of View: 9 Logico-Philosophical essays*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

QUINE, W. V. O (1960), *Word and Object*, Cambridge, MA : MIT Press.

RABINOWICZ, W. & SEGERBERG, K. (1994), « Actual Truth, Possible Knowledge », *Topoi* **13** : 101–115.

RADFORD, C. (1966), « Knowledge – By Examples », *Analysis* **27**(1).

RÜCKERT, H. (2003), « A Solution to Fitch's Paradox of Knowability », *in* GABBAY, RAHMAN, SYMONS, VAN BENDEGEM (éds.), *Logic, Epistemology and the Unity of Science*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

RUSSELL, B. (1989), *Problèmes de philosophie*, trad. RIVENC, F., Paris : Payot.

RYLE, Gilbert (2005), *La notion d'esprit*, trad. STERN-GILLET, S., Paris : Payot.

RYNIN, D. (1967), « Knowledge, Sensation, and Certainty », *in* STROLL, A. (1967) : pp. 10-31.

SALERNO, J., (éd.) (2009), *New Essays on the Knowability Paradox*, Oxford : Oxford University Press.

SCOTT, D. (1970), « Advice on Modal Logic », *in* LAMBERT, K, (éd.), *Philosophical Problems in Logic*, Dordrecht : D. Reidel : 143-173.

SEGERBERG, K. (1970), « Modal Logic with Linear Alternative Relations », *Theoria* 36: 301-322.

SEGERBERG, K. (1973), « Two-Dimensional Modal Logic », *Journal of Philosophical Logic* **2**(1) : 77-96.

SEXTUS EMPIRICUS, *Oeuvres choisies de Sextus Empiricus*, trad. par GRENIER, J & GORON, G., Paris : Aubier-Montaigne, 1948.

SHEKHTMAN, V. B. (1978), « Two-Dimensional Modal Logic », trad. de *Matematicheskie Zametki* **23**(5) : 759-772.

SKYRMS, B. (1981), « Tractarian Nominalism », *Philosophical Studies* **40**, Dordrecht : Reidel : 199-206.

SMULLYAN, R. (1968), *First Order Logic*, Springer-Verlag.

SOAMES, S. (2002), *Beyond Rigidity*, Oxford : Oxford University Press.

SOSA, E. & GRECO, J. (éds.) (1998), *The Blackwell Guide to Epistemology*, Oxford : Blackwell.

SOSA, E. & KIM, J. (2000), *Epistemology : An Anthology*, London : Blackwell Publishers.

STALNAKER, R. (1968), « A Theory of Conditionals », *Studies in Logical Theory, American Philosophical Quarterly*, Monograph: 2, 98-112.

STALNAKER, R. (1970), « Probability and Conditionals », *Philosophy of Science* **37** : 64-80. (Réimp. *in* HARPER et al. (éds.) (1981), *Ifs*, Dordrecht : Reidel).

STALNAKER, R. (1987), *Inquiry*, Cambridge, MA : MIT Press.

STALNAKER, R. (2003), *Ways a World Might Be: Metaphysical and Anti-metaphysical Essays*, Oxford : Oxford University Press.

STANLEY, J. (1997), *Names and Rigid Designation*, *in* HALE, B. & WRIGHT, C., *A Companion to the Philosophy of Language*, Oxford : Blackwell Press : 555-585.

STROLL, A. (éd.) (1967), *Epistemology : New Essays in the Theory of Knowledge*, Westport : Greenwood Press.

TENNANT, N. (1997), *The Taming of the True*, Oxford : Oxford University Press.

TENNANT, N. (2001a), « Is Every Truth Knowable? Reply to Williamson », *Ratio* **XIV** : 263–280.

TENNANT, N. (2001b), « Is Every Truth knowable? Reply to Hand and Kvanvig », *Australasian Journal of Philosophy* **79** : 107–113.

TENNANT, N. (2002), « Victor Vanquished », *Analysis* **62** : 135–142.

THOMASON, R. (1984), « Combinations of Tense and Modality », *in* GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (éds.), *The Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 3, Dordrecht : Reidel : 135-165.

THOMASON, R. & GUPTA, A. (1981), « A Theory of Conditionals in the Context of Branching Time », *in* HARPER, W., STALNAKER, R., & PEARCE, G.

(éds.), *Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance and Time*, Dordrecht : Reidel : 299-322.

THOMASON, R. & STALNAKER, R. (1968), « Reference and Modality », *Noûs* **12**(4) : 359-372.

WILLIAMSON, T. (1982), « Intuitionism Disproved? », *Analysis* **42** : 203–207.

WILLIAMSON, T. (1987b) « On Knowledge of the Unknowable », *Analysis* **47** : 154–8.

WILLIAMSON, T. (1987a), « On the Paradox of Knowability », *Mind* **96** : 256–61.

WILLIAMSON, T. (1988), « Knowability and Constructivism », *Philosophical Quarterly* **38** : 422–432.

WILLIAMSON, T. (1992), « On Intuitionistic Modal Epistemic Logic », *Journal of Philosophical Logic* **21** : 63–89.

WILLIAMSON, T. (1993), « Verificationism and Non-Distributive Knowledge », *Australasian Journal of Philosophy* **71** : 78–86.

WILLIAMSON, T. (1994), *Vagueness*, London : Routledge.

WILLIAMSON, T. (1995a), « Does assertibility satisfy the S4 axiom? », *Crítica* **27** : 3-22.

WILLIAMSON, T. (1995b) « Is knowing a state of mind? », *Mind* **104** : 533-65.

WILLIAMSON, T. (2000), *Knowledge and its Limits*, Oxford : Oxford University Press.

WILLIAMSON, T. (2000a), « Tennant on Knowable Truth », *Ratio* **XIII** : 99–114.

WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logicus-Philosophicus*, trad. par PEARS, D. F. et MCGUINNESS, B. F., intr. par RUSSELL, B., Londres : Routledge Classics, 2004.

WITTGENSTEIN, L. *On Certainty*, Oxford: Basil Blackwell, 1969.

WITTGENSTEIN, L, *Tractatus logico-philosophicus*, trad. GRANGER, G.-G., Paris : Gallimard, 2001.

VON WRIGHT, G. H. (1951), *An essay in modal logic*, North Holland.

WRIGHT, C. (1992), *Truth and Objectivity*, Cambridge, MA : Harvard University Press.

WRIGHT, C. (1993), *Realism, Meaning, and Truth*, Oxford : Blackwell, 2e éd.

ZANARDO, A. (1985), « A Finite Axiomatization of the Set of Strongly Valid Ockhamist Formulas », *The Journal of Philosophical Logic* **14** : 447-468.

ZANARDO, A. (1996), « Branching-Time Logic with Quantification over Branches: The Point of View of Modal Logic », *The Journal of Symbolic Logic* **61**(1) : 1-39.