UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MOTS DE CHRISTOFFEL ET NOMBRES DE MARKOFF

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

AGNÈS MONGEAU

JUIN 2010

REMERCIEMENTS

En avant-propos de ce mémoire, je tiens à remercier les gens qui m'ont aidé tout au long de cette démarche. D'abord, un grand merci à Christophe Reutenauer, mon directeur de maîtrise, pour sa grande disponibilité et ses bonnes idées qui m'ont permis de progresser dans mon travail. Aussi, je remercie mon conjoint Sébastien, mes parents, ma soeur et mes frères qui m'ont encouragé tout au long de cette réalisation. Finalement, merci à mes correcteurs, Srečko Brlek et Jacques Labelle, d'avoir bien voulu prendre de votre temps pour lire mon travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Les mots de Christoffel forment un sous-ensemble des mots de $\{x, y\}^*$. Nous les présenterons dans ce mémoire de façon géométrique comme étant la discrétisation d'une droite allant de $(0,0)$ à (a,b), avec a et b des entiers premiers entre eux, par un chemin dans $\mathbb{N}^2$. Nous associerons ainsi les mots de Christoffel aux couples d'entiers premiers entre eux.

Nous introduirons ensuite les triplets de Markoff comme étant les solutions de l'équation diophantienne $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Un homomorphisme μ du monoïde libre $\{x, y\}^*$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ sera défini de la façon suivante : $\mu x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mu y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Celui-ci nous permettra de définir la bijection suivante entre les mots de Christoffel et les triplets de Markoff : $w = w_1 w_2 \longrightarrow \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\}$.

Par la suite, nous introduirons l'arbre de Stern-Brocot, l'arbre de Christoffel et l'arbre de Markoff et nous montrerons l'équivalence entre tous ces arbres, et établirons des bijections canoniques entre eux.

Most-clés : Mots de Christoffel ; triplets de Markoff ; bijection ; arbre de Christoffel ; arbre de Markoff ; arbre de Stern-Brocot.

INTRODUCTION

Les mots de Christoffel ont été introduits par E.B. Christoffel dans son article de 1875, dans une version légèrement différente de celle considérée ici. Un peu plus tard, A. Markoff a introduit les nombres de Markoff, dans ses célèbres articles de 1879 et 1880 sur l'approximation diophantienne et les formes quadratiques ; les mots de Christoffel y apparaissant implicitement, bien que Markoff ne connaissait pas (apparemment) l'article de Christoffel.

Le but du présent mémoire est de préciser les liens entre ces deux notions. Nous introduisons les mots de Christoffel de manière géométrique à la Borel-Laubie. Pour établir leurs propriétés, nous utiliserons la formule de Pick. Les triplets de Markoff seront introduits par l'équation diophantienne $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Pour établir la bijection entre mots de Christoffel et triplets de Markoff (Bombieri, 2007; Reutenauer, 2009), nous utiliserons les identités de Fricke, suivant en ceci une méthode de H. Cohn. Nous obtiendrons ainsi une surjection entre les mots de Christoffel et les nombres de Markoff. Nous verrons que l'injectivité dépend de l'unicité des coordonnées de Frobenius des nombres de Markoff et que cette question est équivalente à la conjecture d'injectivité des nombres de Markoff.

Plusieurs arbres binaires infinis sont apparus dans la littérature : arbre de Stern-Brocot, arbre de Markoff (selon H. Cohn), arbre de Christoffel (selon Berstel-de Luca). Nous montrerons l'équivalence entre tous ces arbres, et établirons des bijections canoniques entre eux.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1.1 Formule de Pick (1899)

Dans ce chapitre, les démonstrations sont inspirées de (PlanetMath, 2009). La formule de Pick permet de calculer l'aire d'un polygone dont les sommets sont des points entiers, connaissant le nombre de points entiers à l'intérieur et sur les frontières du polygone. Cette formule, appliquée aux triangles, nous sera utile ultérieurement dans ce mémoire. Avant de démontrer le théorème en général, nous allons le prouver pour des cas particuliers afin de faciliter la démarche.

Définition 1.1.1. On écrira $a \perp b$ pour dire que les deux entiers naturels a et b sont **premiers entre eux**.

Lemme 1.1.2. *Soit ABC un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont parallèles aux axes et les sommets sont des points de $\mathbb{Z}^2$. Si b et i représentent le nombre de points entiers sur les frontières et à l'intérieur de ABC respectivement, alors*

$$\text{aire}(ABC) = i + \frac{1}{2}b - 1.$$

DÉMONSTRATION Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur parallèle à un des axes du plan dont la longueur est un nombre entier et S un des deux axes du plan. Alors l'aire, le nombre de points entiers sur les frontières et le nombre de points entiers à l'intérieur, sont des quantités qui sont conservées lorsqu'on applique à ABC la translation $\overrightarrow{u}$ ou la symétrie par rapport à S. Ainsi, sans perte de généralité, on peut considérer le triangle de la figure 1.1 pour le reste de la démonstration.

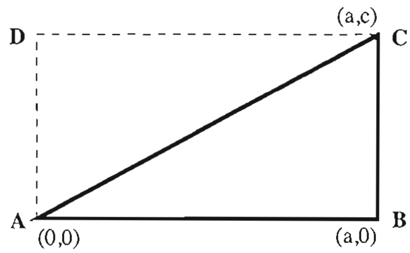

Figure 1.1 Triangle rectangle dont les sommets sont dans $\mathbb{N}^2$.

Les points (x, y) sur l'hypothénuse du triangle ABC sont les points tels que $y = \frac{c}{a}x$ et $0 \leq x \leq a$. On peut écrire $a = sp$ et $c = sq$ où $s, p, q \in \mathbb{N}$ et $p \perp q$. On a ainsi les conditions $y = \frac{q}{p}x$ et $0 \leq x \leq a$. Alors, pour que (x, y) soit un point entier de l'hypothénuse, x prend les valeurs $0, p, 2p, ..., sp$. On obtient donc que l'hypothénuse de ABC contient $s + 1$ points entiers. Ainsi, le triangle ABC a $s + a + c$ points entiers sur sa frontière. Maintenant, l'intérieur du rectangle ABCD contient $(a - 1)(c - 1)$ points entiers, donc l'intérieur du triangle ABC en contient $\frac{(a-1)(c-1)-(s-1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} i + \frac{1}{2}b - 1 &= \frac{ac - a - c - s + 2}{2} + \frac{1}{2}(s + a + c) - 1 \\ &= \frac{ac}{2} \\ &= \text{aire}(ABC). \end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.3. *Soit ABC un triangle dont les sommets sont des points de $\mathbb{Z}^2$. Si b et i représentent le nombre de points entiers sur les frontières et à l'intérieur de ABC respectivement, alors*

$$\text{aire}(ABC) = i + \frac{1}{2}b - 1.$$

DÉMONSTRATION Sans perte de généralité, il suffit de vérifier que le lemme est valide pour les deux triangles illustrés à la figure 1.2. Notons l'aire et le nombre de points entiers à l'intérieur de la région k par A_k et i_k respectivement, pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Notons b_1, b_2, b_3 le nombre de points entiers sur les segments $\overline{AB}, \overline{BC}$ *et* $\overline{AC}$ respectivement.

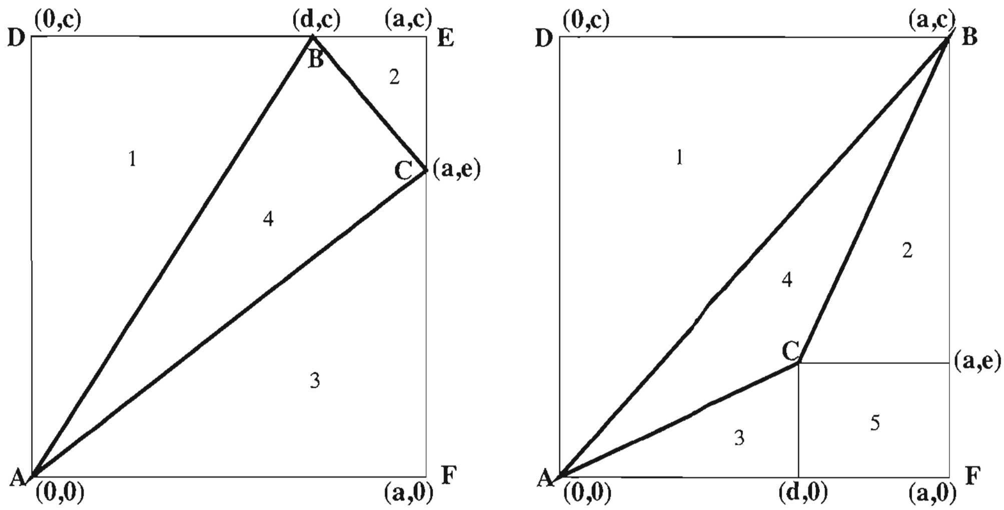

Figure 1.2 Un triangle quelconque dont les sommets sont dans $\mathbb{N}^2$ peut être représenté, à une translation près, par un de ces deux triangles.

Commençons par le triangle de gauche. En appliquant le lemme 1.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &= i_1 + \frac{1}{2}(b_1 + c + d - 1) - 1 && (1.1)\\ A_2 &= i_2 + \frac{1}{2}(b_2 + a - d + c - e - 1) - 1 && (1.2)\\ A_3 &= i_3 + \frac{1}{2}(b_3 + a + e - 1) - 1 && (1.3)\end{aligned}$$

De plus, le nombre de points entiers à l'intérieur de ADEF étant donné par $(a-1)(c-1)$ et aussi par $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + b_1 + b_2 + b_3 - 6$, on obtient l'équation

$$ac - i_1 - i_2 - i_3 = i_4 + b_1 + b_2 + b_3 + a + c - 7. \qquad (1.4)$$

Ainsi, en utilisant (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) on obtient

$$\begin{aligned} A_4 &= \text{aire}(ADEF) - A_1 - A_2 - A_3\\ &= ac - (i_1 + i_2 + i_3) - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + 2a + 2c - 3) + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i_4 + b_1 + b_2 + b_3 + a + c - 7 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) - a - c + \frac{9}{2} \\
&= i_4 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 - 3) - 1.
\end{aligned}$$

Prouvons maintenant le lemme pour le triangle de droite. D'après le lemme 1.1.2, on a

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2}(b_1 + c + a - 1) - 1 \tag{1.5}$$
$$A_2 = i_2 + \frac{1}{2}(b_2 + c - e + a - d - 1) - 1 \tag{1.6}$$
$$A_3 = i_3 + \frac{1}{2}(b_3 + d + e - 1) - 1 \tag{1.7}$$

L'aire de la région 5 peut être calculée comme suit

$$A_5 = (a - d)e = (a - d - 1)(e - 1) + a - d + e - 1 = i_5 + a - d + e - 1. \tag{1.8}$$

De plus, le nombre de points entiers à l'intérieur de ADBF étant donné par $(a-1)(c-1)$ et aussi par $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + b_1 + b_2 + b_3 + e + a - d - 7$, on obtient l'équation

$$ac - i_1 - i_2 - i_3 - i_5 = i_4 + b_1 + b_2 + b_3 + e + 2a + c - d - 8. \tag{1.9}$$

Ainsi, (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) et (1.9) nous donnent

$$\begin{aligned}
A_4 &= \text{aire}(ADBF) - A_1 - A_2 - A_3 - A_5 \\
&= ac - (i_1 + i_2 + i_3) - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + 2a + 2c - 3) - i_5 - a + d - e + 4 \\
&= i_4 + b_1 + b_2 + b_3 + e + 2a + c - d - 8 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) - 2a + d - e - c + \frac{11}{2} \\
&= i_4 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 - 3) - 1.
\end{aligned}$$

Le résultat est donc valide pour un triangle quelconque dont les sommets sont dans $\mathbb{N}^2$. $\square$

Théorème 1.1.4. *(Théorème de Pick) Soit $P \subseteq \mathbb{R}^2$ un polygone dont tous les sommets sont des points de $\mathbb{Z}^2$. Si I est le nombre de points entiers à l'intérieur de P et B le nombre de points entiers sur les frontières de P, alors*

$$\text{aire}(P) = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

DÉMONSTRATION Pour démontrer le théorème, nous allons procéder par récurrence sur le nombre de sommets du polygone. Le cas de base étant un triangle, le lemme 1.1.3 nous confirme que le résultat est valide. Considérons maintenant un polygone P ayant au moins 4 sommets, ceux-ci étant des points de $\mathbb{Z}^2$. Il est possible de relier deux sommets non consécutifs de P afin de former deux polygones P_1 et P_2 dont la réunion est P et dont les intérieurs sont disjoints. Ces deux polygones ont un nombre de sommets inférieur à celui de P, on peut donc appliquer la récurrence. Notons l'aire, le nombre de points entiers à l'intérieur et le nombre de points entiers sur les frontières de P_i par A_i, I_i et B_i respectivement, pour $i = 1, 2$. Alors, on a

$$A_1 = I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1$$

et

$$A_2 = I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1.$$

Il est évident que l'aire de P est la somme des aires de P_1 et P_2. Si Q est le nombre de points entiers sur le segment commun à P_1 et P_2, alors on a $I = I_1 + I_2 + Q - 2$ et $B = B_1 + B_2 - 2Q + 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I + \frac{1}{2}B - 1 &= I_1 + I_2 + Q - 2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2 - 2Q + 2) - 1 \\
&= I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1 + I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1 \\
&= A_1 + A_2 \\
&= \text{aire}(P).
\end{aligned}$$

□

1.2 Identité de Fricke

Définition 1.2.1. Le groupe spécial linéaire d'ordre 2 de $\mathbb{Z}$, noté $SL_2(\mathbb{Z})$, est le groupe des matrices 2×2 sur $\mathbb{Z}$ de déterminant égal à 1.

Nous allons ici donner quelques propriétés de la trace de ces matrices.

Proposition 1.2.2. *Pour toutes matrices A et B de $SL_2(\mathbb{Z})$, on a*

$$\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(A^2B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(AB)$$

et

$$\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(AB^2) = \mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(AB).$$

DÉMONSTRATION Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ainsi, on déduit l'équation suivante

$$A^{-1} + A = \mathrm{Tr}(A)I_2. \tag{1.10}$$

En multipliant (1.10) par A à gauche et B à droite puis en prenant la trace, on obtient

$$\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(A^2B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(AB).$$

En multipliant maintenant $B^{-1} + B = \mathrm{Tr}(B)I_2$ par A à gauche et B à droite puis en prenant la trace, on a

$$\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(AB^2) = \mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(AB).$$

□

Démontrons maintenant une identité bien connue pour les matrices du groupe spécial linéaire de degré 2, l'identité de Fricke. Ce théorème provient de l'article de Fricke (Fricke, 1896).

Théorème 1.2.3. *(Identité de Fricke) Pour toutes matrices A et B de $SL_2(\mathbb{Z})$, on a*

$$\mathrm{Tr}(A)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(AB)^2 = \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) + 2 + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(AB).$$

DÉMONSTRATION Soit $C, D \in SL_2(\mathbb{Z})$. En multipliant (1.10) (où A est remplacé par D) par C à gauche et en prenant la trace on a

$$\mathrm{Tr}(CD^{-1}) = \mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(C) - \mathrm{Tr}(CD). \tag{1.11}$$

En utilisant la proposition 1.2.2 avec $B = I_2$, on a $2 + \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A)^2$. Aussi, en remplaçant C par AB et D par $B^{-1}A$ dans (1.11), on obtient $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) = \mathrm{Tr}(B^{-1}A)\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(ABB^{-1}A)$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) = \mathrm{Tr}(AB^{-1})\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A^2) \\
\Rightarrow\ &\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) = (\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB))\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A^2) \quad \textit{par } 1.11 \\
\Rightarrow\ &\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB)^2 - \mathrm{Tr}(A)^2 + 2.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.11) pour les matrices $C = ABA^{-1}$ et $D = B$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= \mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(ABA^{-1}) - \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) \\
&= \mathrm{Tr}(B)^2 - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB)^2 + \mathrm{Tr}(A)^2 - 2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

CHAPITRE II

MOTS DE CHRISTOFFEL ET TRIPLETS DE MARKOFF

2.1 Mots de Christoffel

Les mots de Christoffel sont des mots sur un alphabet à deux lettres. Ils peuvent être définis de plusieurs façons ; dans ce texte nous allons utiliser une définiton géométrique basée sur la discrétisation d'un segment de droite par un chemin dans $\mathbb{N}^2$. Cette façon de traiter les mots de Christoffel correspond à celle utilisée dans le livre *Combinatorics on Words* (Berstel et al., 2008). Une grande partie des résulats et des démonstrations du chapitre sont d'ailleurs inspirées de celles de ce livre.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soit a et b des entiers naturels tels que $a \perp b$. Le **chemin de Christoffel** de pente $\frac{b}{a}$ est le chemin discret dans $\mathbb{N}^2$ de $(0,0)$ vers (a,b) qui satisfait aux conditions suivantes :

- les pas sont horizontaux $((i,j)$ à $(i+1,j))$ ou verticaux $((i,j)$ à $(i,j+1))$;
- le chemin se trouve sous le segment de droite de $(0,0)$ à (a,b) ;
- il n'y a aucun point de $\mathbb{N}^2$ à l'intérieur de la région définie par le chemin et le segment droite de $(0,0)$ à (a,b).

Lorsqu'on parcourt les points de $\mathbb{N}^2$ sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$, on effectue deux types de pas. D'un point (i,j) on va au point $(i+1,j)$ ou au point $(i,j+1)$. On peut ainsi définir un mot de $\{x,y\}^*$ à partir de ce chemin. Un pas du premier type sera

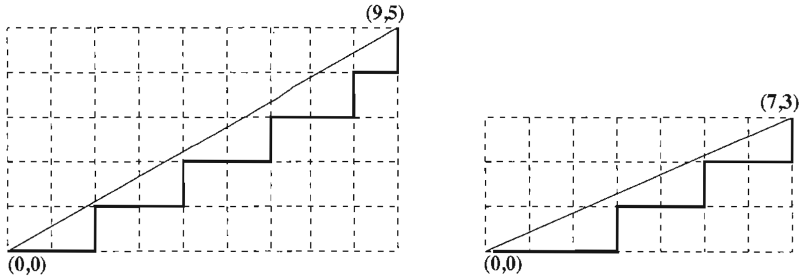

Figure 2.1 Chemins de Christoffel de pente $\frac{5}{9}$ et $\frac{3}{7}$ respectivement.

représenté par un x et un pas du deuxième type par un y. On notera le mot ainsi créé $C(a,b)$.

Définition 2.1.2. Soit a et b des entiers naturels. Un mot w de $\{x,y\}^*$ est appelé un **mot de Christoffel de pente** $\frac{b}{a}$ si $a \perp b$ et $w = C(a,b)$. Un mot de Christoffel est dit **trivial** si sa longueur est 1.

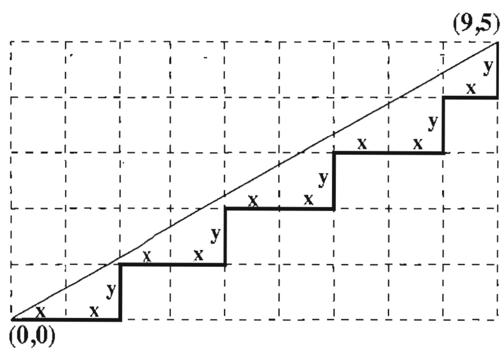

Figure 2.2 Le mot de Christoffel de pente $\frac{5}{9}$ est xxyxxyxxyxxyxy.

Remarques 2.1.3.

1. Le mot de Christoffel de pente 0 est x
2. Le mot de Christoffel de pente ∞ est y.
3. Le mot de Christoffel de pente 1 est xy.

2.1.2 Factorisation standard

Définition 2.1.4. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux tels que $(a, b) \neq (0, 1)$. L'**étiquette** d'un point entier (i, j) sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$ est le nombre $\frac{ib-ja}{a}$.

On peut remarquer que l'étiquette d'un point entier (i, j) sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$ correspond à la distance verticale entre ce dernier et le segment de droite de $(0, 0)$ à (a, b). En effet, la distance verticale entre (i, j) et la droite est la distance entre (i, j) et (i, y) avec $\frac{y}{i} = \frac{b}{a}$. Donc, cette distance est $y - j = \frac{ib}{a} - j = \frac{ib-ja}{a}$ = étiquette de (i, j).

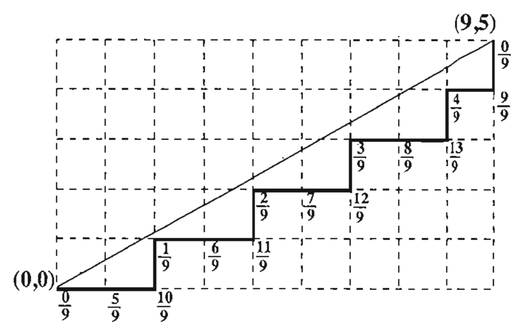

Figure 2.3 Les étiquettes des points entiers sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{5}{9}$.

Les deux prochains résultats étant élémentaires, ils seront présentés sans démonstration.

Proposition 2.1.5. *Soit a et b deux entiers naturels. Alors*

$$a \perp b \quad \text{si et seulement si } b \perp (a + b).$$

Proposition 2.1.6. *Soit a et b deux entiers naturels. Alors a et b sont premiers entre eux si et seulement si le segment de droite de (0,0) à (a,b) ne contient aucun point de* $\mathbb{N}^2$ *autre que (0,0) et (a,b).*

Lemme 2.1.7. *Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Si* $\frac{s}{a}$ *et* $\frac{t}{a}$ *sont les étiquettes de deux points entiers consécutifs sur le chemin de Christoffel de pente* $\frac{b}{a}$, *alors* $t \equiv s+b \bmod (a+b)$. *De plus, t prend exactement une fois les valeurs 0,1,...,a+b-1 lorsque* $(\frac{s}{a}, \frac{t}{a})$ *parcourt toutes les paires d'étiquettes consécutives.*

DÉMONSTRATION Considérons les étiquettes $\frac{s}{a}$ et $\frac{t}{a}$ de deux points entiers consécutifs sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$. Si $\frac{s}{a}$ est l'étiquette du point (i, j), alors $\frac{t}{a}$ est l'étiquette du point $(i+1, j)$ ou du point $(i, j+1)$. Ainsi, on a $\frac{s}{a} = \frac{ib-ja}{a}$ et $\frac{t}{a} = \frac{(i+1)b-ja}{a} = \frac{ib-ja+b}{a}$ ou $\frac{t}{a} = \frac{ib-(j+1)a}{a} = \frac{ib-ja-a}{a}$. On obtient alors $t = s+b$ ou $t = s-a$ et donc $t \equiv s+b \bmod (a+b)$. Puisque $(\frac{s}{a}, \frac{t}{a})$ parcourt $a+b$ paires d'étiquettes consécutives et que l'étiquette du point $(0,0)$ est $\frac{0}{a}$, il reste à montrer que b est un générateur de $\mathbb{Z}_{a+b}$. Soit c et d des entiers tels que $0 < c, d \leq a+b$. Alors

$$\begin{aligned} cb \equiv db \bmod (a+b) &\Rightarrow (c-d)b = k(a+b), \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a+b)|(c-d) \quad \text{puisque } a \perp b \Rightarrow b \perp (a+b) \\ &\Rightarrow c = d. \end{aligned}$$

Donc le groupe engendré par b contient $a+b$ éléments. Ainsi, t prend exactement une fois les valeurs $0, 1, ..., a+b-1$. □

Pour un chemin de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$, on a donc un unique point entier d'étiquette $\frac{1}{a}$. À l'aide de ce point nous allons pouvoir définir sans ambiguité une factorisation standard pour un mot de Christoffel.

Définition 2.1.8. Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ et (i, j) le point d'étiquette $\frac{1}{a}$ sur le chemin de Christoffel associé. La **factorisation standard** de w est la factorisation $w = w_1 w_2$ où w_1 représente la partie de w entre (0,0) et (i, j) et w_2 la partie de w entre (i, j) et (a, b).

Exemple. Le point d'étiquette $\frac{1}{9}$ sur le chemin de Christoffel de pente $\frac{5}{9}$ est le point (2,1), qui se trouve après le troisième pas (voir figure 2.3). Ainsi, la factorisation standard de xxyxxyxxyxxyxy est (xxy)(xxyxxyxxyxy).

Cette factorisation a été introduite par Jean-Pierre Borel et François Laubie (Borel et Laubie, 1993) et la majorité des résulats de ce chapitre leurs sont dus.

Proposition 2.1.9. *(Borel et Laubie, 1993) Soit w un mot de Christoffel non trivial dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Alors w_1 et w_2 sont des mots de Christoffel.*

DÉMONSTRATION Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Notons S le chemin de Christoffel associé à w et S_1, S_2 les chemins associés à w_1 et w_2 respectivement (voir figure 2.4). Notons $C = (i, j)$ le point de S d'étiquette $\frac{1}{a}$.

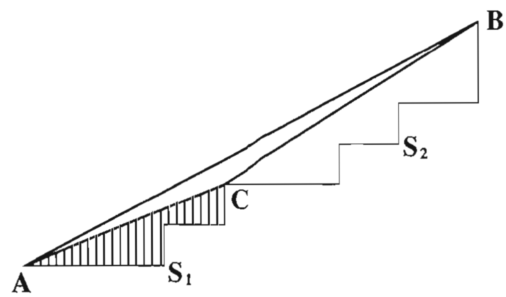

Figure 2.4 La factorisation standard d'un mot de Christoffel donne deux mots de Christoffel.

Nous allons d'abord montrer que w_1 est le mot de Christoffel de pente $\frac{j}{i}$. Pour ce faire, nous devons montrer que $i \perp j$, que S_1 est sous AC et que l'intérieur de la région hachurée ne contient pas de points de $\mathbb{N}^2$.

Rappelons que l'étiquette d'un point entier du chemin de Christoffel correspond à la distance verticale entre le point et le chemin. Ainsi, C est le point de S le plus près de AB et donc S_1 se trouve en dessous de AC. De plus, puisque w est un mot de Christoffel, la région délimitée par AB et S ne contient pas de points entiers. Puisque AC se trouve dans cette région, le segment ne contient aucun point entier autre que ses extrémités et donc par la proposition 2.1.6, on a $i \perp j$. Aussi, l'intérieur de la région hachurée est contenu dans l'intérieur de la région délimitée par AB et S et ne contient donc aucun point entier.

De la même façon, on peut montrer que w_2 est le mot de Christoffel de pente $\frac{b-j}{a-i}$. □

Nous allons démontrer ici que l'unique factorisation d'un mot de Christoffel en deux mots de Christoffel est la factorisation standard.

Théorème 2.1.10. *(Borel et Laubie, 1993) Soit w un mot de Christoffel non trivial. Alors w a une unique factorisation $w = w_1w_2$ avec w_1 et w_2 des mots de Christoffel.*

DÉMONSTRATION Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Supposons que w ait une autre factorisation $w = uv$ avec u et v des mots de Christoffel. Notons $C = (i, j)$ et $C' = (c, d)$ les points qui séparent w en w_1w_2 et w en uv respectivement (voir figure 2.5).

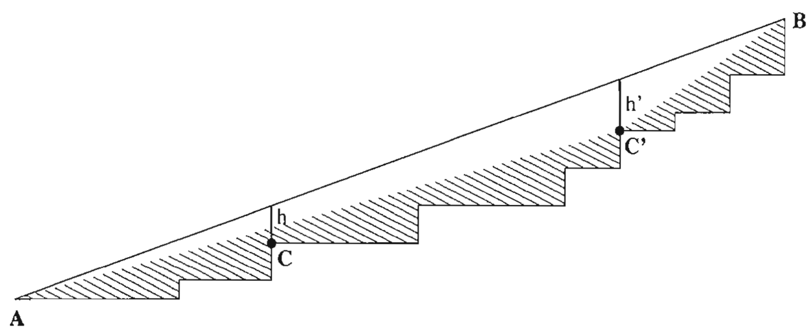

Figure 2.5 L'unique factorisation d'un mot de Christoffel en deux mots de Christoffel est la factorisation standard.

Puisque w, w_1, w_2, u et v sont des mots de Christoffel, on a $a \perp b$, $i \perp j$, $(a-i) \perp (b-j)$, $c \perp d$ et $(a-c) \perp (b-d)$. Ainsi, par la proposition 2.1.6, on a que les segments AB, AC, CB, AC' et $C'B$ ne contiennent pas d'autres points entiers que leurs extrémités. On obtient aussi que l'intérieur des régions ABC et ABC' ne contient aucun point entier. Donc, par le théorème de Pick (théorème 1.1.4), on a que $aire(ABC) = aire(ABC') = \frac{1}{2}$.

Cependant, le triangle ABC est formé de deux triangles : l'un de base h et de hauteur i et l'autre de base h et de hauteur $a - i$. Le triangle ABC' est lui aussi formé de deux triangles : l'un de base h' et de hauteur c et l'autre de base h' et de hauteur $a-c$. Puisque C est l'unique point du chemin de Christoffel à une distance verticale de $\frac{1}{a}$ de AB, on a $h < h'$. Ainsi, $\frac{1}{2} = aire(ABC) = \frac{hi}{2} + \frac{h(a-i)}{2} = \frac{ha}{2} < \frac{h'a}{2} = aire(ABC') = \frac{1}{2}$. On a donc une contradiction. Ainsi, la seule factorisation d'un mot de Christoffel en deux mots de Christoffel est sa factorisation standard. □

Proposition 2.1.11. *Soit w un mot de Christoffel de longueur au moins 3 dont la factorisation standard est $w = w_1 w_2$. Alors w_1 est préfixe de w_2 ou w_2 est suffixe de w_1.*

DÉMONSTRATION Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ dont la factorisation standard est $w = w_1 w_2$. Notons $C = (i, j)$ le point du chemin de Christoffel d'étiquette $\frac{1}{a}$.

D'abord, nous allons montrer que dans les figures 2.6 et 2.7, l'intérieur de la zone hachurée ne contient aucun point entier. Puisque (w_1, w_2) est la factorisation standard de w, l'intérieur du triangle ABC ne contient aucun point entier et sa frontière en contient seulement 3. D'après le théorème de Pick on peut donc dire $aire(ABC) = \frac{1}{2}$. Puisque le segment AC' est obtenu de CB par une translation de $(-i, -j)$ et que le segment $C'B$ est obtenu de AC par une translation de $(a - i, b - j)$, le triangle $AC'B$ a seulement 3 points entiers sur sa frontière. De plus, on a $aire(ABC) = aire(AC'B)$. Par le théorème de Pick on peut donc conclure que l'intérieur de $AC'B$ ne contient aucun point entier. Ainsi, les zones hachurées ne contiennent aucun point entier.

1. Supposons d'abord que $i \leq a - i$ et montrons que w_1 est préfixe de w_2 (voir figure 2.6).

Par définition, le chemin de Christoffel de pente $\frac{b-j}{a-i}$ passe en dessous du segment AC'. Considérons S, la partie du chemin pour laquelle la première coordonnée est plus petite ou égale à i, S est bien défini puisque $i \leq a - i$. Puisque la région hachurée ne contient aucun point entier, S passe en dessous du segment AC. Puisqu'il ne doit pas y avoir de point entier entre S et AC', alors S coïncide avec le chemin de Christoffel de pente $\frac{j}{i}$. Donc w_1 est préfixe de w_2.

2. Supposons maintenant que $i > a - i$ et montrons que w_2 est suffixe de w_1 (Voir figure 2.7).

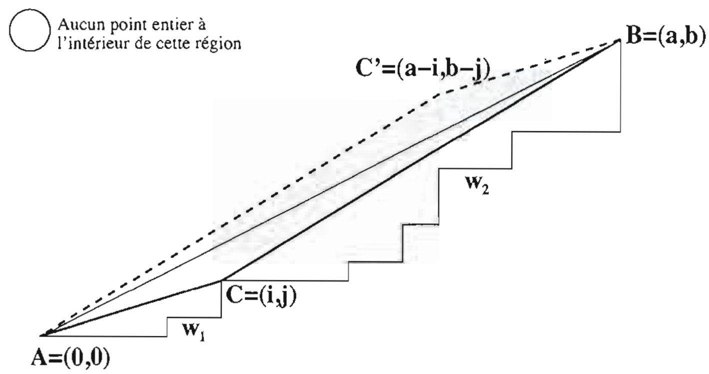

Figure 2.6 w_1 est préfixe de w_2

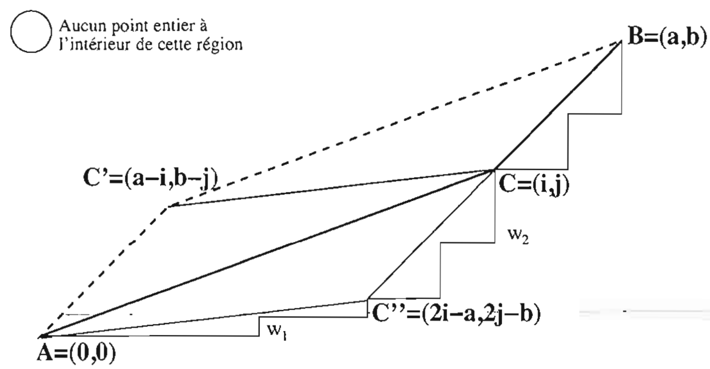

Figure 2.7 w_2 est suffixe de w_1

On peut d'abord constater que l'intérieur du triangle ACC'' ne contient aucun point entier puisque ACC'' est obtenu de $C'BC$ par une translation de $(-(a-i), -(b-j))$ et que $C'BC$ se trouve dans la zone hachurée.

Considérons S', la partie du chemin de Christoffel de pente $\frac{j}{i}$ pour laquelle la première coordonnée est plus grande que $2i - a$. S' est bien définie puisque $i > a - i$ et $a - i > 0$ donnent que $i > 2i - a > 0$. Puisque l'intérieur du triangle ACC'' ne contient aucun point entier, S' passe en dessous du segment $C''C$. Pusiqu'il ne doit pas y avoir de point entier entre S' et AC, alors S' coïncide avec le chemin de Christoffel de pente $\frac{b-j}{a-i}$. Donc w_2 est suffixe de w_1. $\square$

Proposition 2.1.12. *Soit w un mot de Christoffel de longueur au moins 3 dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Alors $w_1 = uw_2$ ou $w_2 = w_1v$ avec u et v des mots de Christoffel.*

DÉMONSTRATION Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Notons $C = (i, j)$ le point du chemin de Christoffel d'étiquette $\frac{1}{a}$. Par la proposition 2.1.11 on sait que $w_1 = uw_2$ ou $w_2 = w_1v$ avec u et v des mots de $\{x, y\}^*$.

Considérons d'abord le cas où $w_2 = w_1v$. Nous allons montrer que v est le mot de Christoffel de pente $\frac{b-2j}{a-2i}$. Pour ce faire, il faut montrer que la partie associée à v du chemin de Christoffel de w est en dessous du segment DB et que $a - 2i$ et $b - 2j$ sont premiers entre eux. Commençons par démontrer que l'intérieur de la partie hachurée de la figure 2.8 ne contient aucun point entier. D'abord, le parallélogramme $AC'BC$ correspond au parallélogramme de la figure 2.6, donc son intérieur ne contient aucun point entier. Le triangle CBD est obtenu du triangle $AC'C$ en effectuant la translation (i, j) et donc son intérieur ne contient aucun point entier. Puisque w_2 est un mot de Christoffel, le segment CB ne contient aucun point entier autre que ses extrémités. Ainsi, l'intérieur de la région hachurée ne contient aucun point entier. Le chemin associé à v ne peut pas passer dans la région hachurée et donc il passe en dessous du segment DB.

Maintenant, puisque DB est obtenu de CC' en effectuant la translation (i, j) et que CC' est dans la région hachurée, les seuls points entiers sur DB sont ses extrémités. De la proposition 2.1.6 on obtient donc $b - 2j \perp a - 2j$. Ainsi, v est bien un mot de Christoffel.

De la même façon, on peut montrer que u est un mot de Christoffel si $w_1 = uw_2$. $\square$

Proposition 2.1.13. *(Borel et Laubie, 1993) Soit w un mot de Christoffel non trivial dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Alors $w_1w_1w_2$ et $w_1w_2w_2$ sont des mots de Christoffel.*

DÉMONSTRATION Soit w un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$ dont la facto-

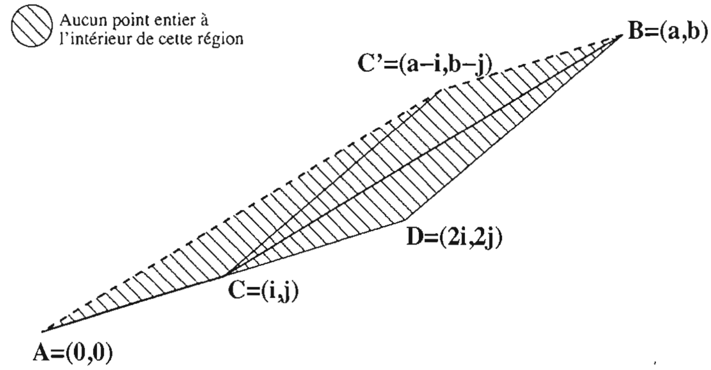

Figure 2.8 Si $w = w_1w_2$ est un mot de Christoffel, alors $w_1 = uw_2$ ou $w_2 = w_1v$ avec u et v des mots de Christoffel.

risation standard est $w = w_1w_2$. Notons $C = (i, j)$ le point du chemin de Christoffel d'étiquette $\frac{1}{a}$.

Montrons d'abord que $w_1w_1w_2$ est le mot de Christoffel de pente $\frac{b+j}{a+i}$. On commence par montrer que $a+i \perp b+j$. Puisque l'étiquette de (i, j) est $\frac{1}{a}$, alors $ib - ja = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que p divise $a+i$ et $b+j$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $a+i = pk$ et $b+j = pk'$. Alors

$$
\begin{aligned}
& ja + ij = jpk \text{ et } ib + ij = ipk' \\
\Rightarrow\ & ib + ij - ja - ij = ipk' - jpk \\
\Rightarrow\ & ib - ja = p(ik' - jk) \\
\Rightarrow\ & 1 = p(ik' - jk) \\
\Rightarrow\ & p = 1.
\end{aligned}
$$

Puisque le seul entier qui divise à la fois $a+i$ et $b+j$ est 1, on a que $a+i \perp b+j$.

Il suffit maintenant de démontrer que l'intérieur du triangle ABD ne contient aucun point entier. Notons I le nombre de points entiers à l'intérieur du triangle ABD. D'abord, puisque $a+i \perp b+j$, la proposition 2.1.6 donne que AB ne contient pas d'autres points

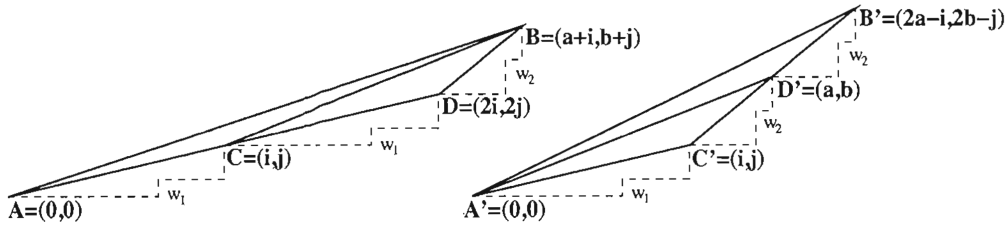

Figure 2.9 Si $w = w_1w_2$ est un mot de Christoffel, alors $w_1w_1w_2$ et $w_1w_2w_2$ sont des mots de Christoffel.

entiers que ses extrémités. Aussi, puisque w_1 et w_2 sont des mots de Chistoffel, AC, CD et DB ne contiennent pas d'autres points entiers que leurs extrémités. Ainsi, les frontières de ABD contiennent 4 points entiers. Par le théorème de Pick (théorème 1.1.4) on obtient donc

$$aire(ABD) = I + 1.$$

Maintenant, on peut aussi calculer l'aire de ABD à l'aide d'un déterminant de la façon suivante :

$$aire(ABD) = \left| \frac{1}{2} det \begin{pmatrix} a+i & b+j \\ 2i & 2j \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(2aj - 2bi) \right| = 1 \tag{2.1}$$

Ainsi, $1 = I + 1$, et on a donc que l'intérieur de ABD ne contient aucun point entier et que $w_1w_1w_2$ est un mot de Christoffel.

De façon similaire, on peut montrer que $w_1w_2w_2$ est le mot de Christoffel de pente $\frac{2b-j}{2a-i}$. □

Proposition 2.1.14. *Soit w un mot de Christoffel non trivial dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Alors $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1}$ est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans le groupe libre F_2 engendré par x et y.*

DÉMONSTRATION Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur la longueur de w. Le plus court mot de Christoffel non trivial est xy. La factorisation standard de xy est $(x)(y)$ et on a bien que $xyx^{-1}y^{-1}$ est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans F_2. Soit w un mot de Christoffel de longueur au moins 3. Par la proposition 2.1.12, la factorisation standard de

w est $(u)(uv)$ ou $(uv)(v)$ avec u et v des mots de Christoffel. Considérons d'abord le cas où $w = uuv$. On a que uv est un mot de Christoffel dont la factorisation standard est $(u)(v)$ et dont la longueur inférieure à celle de w. Donc, par récurrence, $uvu^{-1}v^{-1}$ est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans F_2. Puisque $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1} = uuvu^{-1}(uv)^{-1} = u(uvu^{-1}v^{-1})u^{-1}$, on a que $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1}$ est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans F_2. Maintenant, si $w = uvv$, alors $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1} = uvv(uv)^{-1}v^{-1} = uvu^{-1}v^{-1}$ qui est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans F_2 par récurrence. □

Définition 2.1.15. Soit a et b deux entiers strictement positifs tels que $a \perp b$. Considérons S le segment de droite de $(0,0)$ à (a,b). Le **mot d'intersection** (a,b) est l'élément de $\{x,y\}^*$ défini de la façon suivante : en parcourant $S \setminus \{(0,0),(a,b)\}$, on écrit x chaque fois que la première coordonnée est entière et y lorsque la seconde coordonnée est entière. Puisque a et b sont premiers entre eux, les deux coordonnées ne sont jamais entières simultanément et il n'y a donc aucune confusion sur la lettre à inscrire.

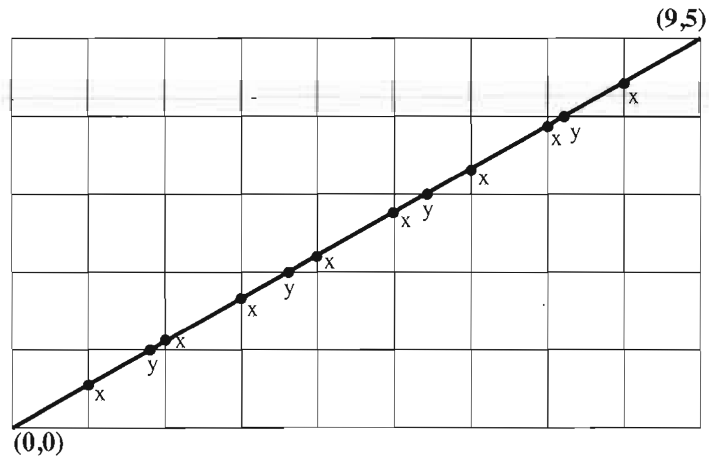

Figure 2.10 Le mot d'intersection (9,5) est xyxxyxxyxxyx.

On voit aisément que si on effectue sur S une rotation d'un demi-tour par rapport au point $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ on obtient S. Ainsi, on peut constater que si p est le mot d'intersection (a,b), alors p est un palindrome (Lothaire, 2002). De plus, xpy est le mot de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$.

Définissons l'homomorphisme μ du monoïde libre $\{x,y\}^*$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ de la façon suivante : $\mu x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mu y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 2.1.16. *Soit w un mot de Christoffel, Alors $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) = \mu(w)_{12}$.*

Si de plus w est de longueur au moins 2 et de factorisation standard $w_1 w_2$, on a

$$\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) = \mu(w)_{12} = \mu(w_1)_{11}\mu(w_2)_{12} + \mu(w_1)_{12}\mu(w_2)_{22}$$

avec $\mu(w_1)_{11}$, $\mu(w_2)_{12}$, $\mu(w_1)_{12}$ et $\mu(w_2)_{22}$ des entiers strictement positifs.

DÉMONSTRATION On peut d'abord remarquer que pour les deux cas particuliers $w = x$ et $w = y$, le résultat est évident. Considérons donc w comme un mot de Christoffel non trivial de pente $\frac{b}{a}$, où a et b sont premiers entre eux. On peut alors écrire $w = xw_1y$ où w_1 est le mot d'intersection (a, b). Puisque w_1 est un palindrome et que μx et μy sont symétriques, μw_1 est symétrique et on peut poser $\mu w_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mu w) &= \mathrm{Tr}(\mu x \mu w_1 \mu y) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 10a + 9b + 2c & 4a + 4b + c \\ 5a + 7b + 2c & 2a + 3b + c \end{pmatrix}\right) \\
&= 12a + 12b + 3c \\
&= 3\mu(w)_{12}. \\
&= 3(\mu(w_1)\mu(w_2))_{12} \\
&= 3(\mu(w_1)_{11}\mu(w_2)_{12} + \mu(w_1)_{12}\mu(w_2)_{22})
\end{aligned}$$

Puisque les matrices $\mu(x)$ et $\mu(y)$ ne contiennent que des entiers strictement positifs, les matrices résultantes d'un produit de ces deux dernières ne contiennent aussi que des entiers strictement positifs. D'où le résultat. $\square$

2.2 Triplets de Markoff

Définition 2.2.1. Un **triplet de Markoff** est un multi-ensemble $\{a, b, c\}$ d'entiers strictement positifs qui satisfont l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc.$$

Un triplet de Markoff est dit **propre** si a,b et c sont distincts, sinon il est dit **impropre**. Les nombres qui composent un triplet de Markoff sont appelés **nombres de Markoff**.

Proposition 2.2.2. *(Cusick et Flahive, 1989) Les seuls triplets de Markoff impropres sont* $\{1, 1, 1\}$ *et* $\{1, 1, 2\}$.

DÉMONSTRATION Soit $\{x, y, z\}$ un triplet de Markoff impropre. Sans perte de généralité on peut supposer que $x = y$. Alors, on a $2x^2 + z^2 = 3x^2z$. De cette équation on obtient que x^2 divise z^2 et donc que x divise z. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z = kx$. Donc,

$$\begin{aligned} & 2x^2 + k^2x^2 = 3x^3k \\ \Rightarrow\ & 2 + k^2 = 3kx \\ \Rightarrow\ & k|2 \\ \Rightarrow\ & k \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Si $k = 1$, alors $x = y = z$. Ainsi, $3x^2 = 3x^3$ et donc $\{x, y, z\} = \{1, 1, 1\}$. Si $k = 2$, alors $6x^2 = 6x^3$. Ainsi, $\{x, y, z\} = \{1, 1, 2\}$. □

Lemme 2.2.3. *Soit* $\{a, b, c\}$ *un triplet de Markoff tel que* $a < b < c$. *Alors* $\{a, b, 3ab-c\}$ *est un triplet de Markoff tel que* $0 < 3ab - c < b$.

DÉMONSTRATION Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff tel que $a < b < c$. Vérifions d'abord que $\{a, b, 3ab - c\}$ est un triplet de Markoff.

$$a^2 + b^2 + (3ab - c)^2 = a^2 + b^2 + 9a^2b^2 - 6abc + c^2$$

$$\begin{aligned}
&= 3abc + 9a^2b^2 - 6abc \\
&= 9a^2b^2 - 3abc \\
&= 3ab(3ab - c)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $0 < 3ab - c < b$. D'abord, puisque a et b sont des entiers strictement positifs, on a $a^2 + b^2 + (3ab - c)^2 > 0$ et donc $3ab(3ab - c) > 0$. On obtient ainsi que $3ab - c > 0$. De plus, puisque $b > a$ et $b > 1$, on a $a^2 < ab < ab^2$. Aussi, $a \geq 1$ donne que $2b^2 \leq 2ab^2$. Avec ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}
2b^2 + a^2 < 3ab^2 &\Rightarrow 2b^2 + a^2 - 3ab^2 < 0 \\
&\Rightarrow b^2 - 3ab^2 + a^2 + b^2 + c^2 - c^2 < 0 \\
&\Rightarrow b^2 - b(3ab - c) - bc + c(3ab - c) < 0 \\
&\Rightarrow (b - c)(b - (3ab - c)) < 0 \\
&\Rightarrow b - (3ab - c) > 0 \text{ puisque } b - c < 0 \\
&\Rightarrow b > 3ab - c
\end{aligned}$$

D'où $\{a, b, 3ab - c\}$ est un triplet de Markoff tel que $0 < 3ab - c < b$. □

Exemple. Le triplet de Markoff $\{1, 2, 5\}$ donne le triplet de markoff impropre $\{1, 1, 2\}$ alors que $\{1, 5, 13\}$ donne $\{1, 2, 5\}$. Notez que $\{2, 5, 29\}$ donne aussi $\{1, 2, 5\}$.

CHAPITRE III

BIJECTION ENTRE LES MOTS DE CHRISTOFFEL ET LES TRIPLETS DE MARKOFF

La bijection entre les mots de Christoffel et les triplets de Markoff que je décris dans ce chapitre a été présentée par Christophe Reutenauer dans l'article *Christoffel words and Markoff triples* (Reutenauer, 2009) ainsi que dans l'article de Bombieri (Bombieri, 2007) sous une autre terminologie.

Lemme 3.0.4. *Soit w un mot de Christoffel non trivial dont la factorisation standard est $w = w_1w_2$. Alors $\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\}$ est un triplet de Markoff propre.*

Démonstration Posons $a = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)$, $b = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)$ et $c = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)$.

1. Montrons d'abord que $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff. Posons $A = \mu(w_1)$ et $B = \mu(w_2)$. On a alors $AB = \mu(w)$. En utilisant l'identité de Fricke (théorème 1.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
9a^2 + 9b^2 + 9c^2 &= \mathrm{Tr}(\mu(w_1))^2 + \mathrm{Tr}(\mu(w_2))^2 + \mathrm{Tr}(\mu(w))^2 \\
&= \mathrm{Tr}(\mu(w_1)\mu(w_2)\mu(w_1)^{-1}\mu(w_2)^{-1}) + 2 + \mathrm{Tr}(\mu(w_1))\mathrm{Tr}(\mu(w_2))\mathrm{Tr}(\mu(w)) \\
&= \mathrm{Tr}(\mu(w_1)\mu(w_2)\mu(w_1)^{-1}\mu(w_2)^{-1}) + 2 + 27abc.
\end{aligned}$$

Puisque $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1}$ est conjugué à $xyx^{-1}y^{-1}$ dans F_2 (proposition 2.1.14) on peut écrire $w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1} = zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1}$ avec $z \in \{x, y\}^*$. On obtient alors

$$\mathrm{Tr}(\mu(w_1)\mu(w_2)\mu(w_1)^{-1}\mu(w_2)^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mu(w_1w_2w_1^{-1}w_2^{-1}))$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Tr}(\mu(zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mu(z)\mu(xyx^{-1}y^{-1})\mu(z^{-1})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mu(z)\mu(z^{-1})\mu(xyx^{-1}y^{-1})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mu(xyx^{-1}y^{-1})) \\
&= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 11 & -24 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}\right) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

On a donc $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 = 27abc$ et ainsi $\{a, b, c\}$ est un triplet de Markoff.

2. Montrons maintenant que a, b et c sont distincts. Considérons d'abord le cas où $w = xy$. On a alors $w_1 = x$ et $w_2 = y$. Donc, $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$.

Si w est un mot de Christoffel de longueur au moins 3, alors $w_1 = uw_2$ ou $w_2 = w_1v$ avec u et v des mots de Christoffel (proposition 2.1.12). Par la propostion 2.1.16, on a

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\mu w_1) \\
&= \mu(u)_{11}\mu(w_2)_{12} + \mu(u)_{12}\mu(w_2)_{22} \\
&= \mu(u)_{11}b + \mu(u)_{12}\mu(w_2)_{22} \quad \text{avec } \mu(u)_{11},\ \mu(u)_{12} \text{ et } \mu(w_2)_{22} \text{ des entiers strictement positifs.}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\mu w_2) \\
&= \mu(w_1)_{11}\mu(v)_{12} + \mu(w_1)_{12}\mu(v)_{22} \\
&= \mu(w_1)_{11}\mu(v)_{12} + a\mu(v)_{22} \quad \text{avec } \mu(w_1)_{11},\ \mu(v)_{12} \text{ et } \mu(v)_{22} \text{ des entiers strictement positifs.}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $a > b$ ou $b > a$. De plus, on obtient de la même façon l'équation $c = \mu(w_1)_{11}b + a\mu(w_2)_{22}$ et ainsi $c > a, b$. $\{a, b, c\}$ est donc un triplet de Markoff propre. $\square$

Lemme 3.0.5. *Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff propre. Alors il existe un mot de Christoffel w tel que $\{a, b, c\} = \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\}$, où $w = w_1w_2$ est la factorisation standard de w.*

DÉMONSTRATION Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff propre tel que $a < b < c$. Pour démontrer l'existence du mot de Christoffel, nous allons procéder par récurrence sur la somme $a + b + c$.

Commençons par vérifier le cas de base. Par le lemme 2.2.3, on a que $\{a, b, 3ab - c\}$ est un triplet de Markoff tel que $0 < 3ab - c < b$. Ainsi $a + b + 3ab - c < a + b + c$. Si on prend la somme $a + b + c$ minimale, le triplet de Markoff $\{a, b, 3ab - c\}$ est donc impropre. Puisque $a \neq b$ et que les deux seuls triplets de Markoff impropres sont $\{1, 1, 1\}$ et $\{1, 1, 2\}$, on a que $\{a, b, 3ab - c\} = \{1, 1, 2\}$. Puisque $a < b$, on a $a = 1$, $b = 2$ et $3ab - c = 1$ et donc $\{a, b, c\} = \{1, 2, 5\}$. Soit $w = xy$, alors

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\} &= \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu x), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu y), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu xy)\right\} \\ &= \{1, 2, 5\}\end{aligned}$$

Alors xy est le mot de Christoffel associé à $\{1, 2, 5\}$, qui est le triplet de Markoff de somme minimale.

Si la somme $a + b + c$ n'est pas minimale, alors $\{a, b, 3ab - c\}$ est un triplet de Markoff propre et par récurrence $\{a, b, 3ab - c\} = \{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\}$ avec w un mot de Christoffel de factorisation standard w_1w_2. Par la propostion 2.1.16, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) &= \mu(w_1)_{11}\mu(w_2)_{12} + \mu(w_1)_{12}\mu(w_2)_{22} \\ &> \mu(w_1)_{12} \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Tr}(\mu w) > \mathrm{Tr}(\mu w_1)$ et de la même façon, $\mathrm{Tr}(\mu w) > \mathrm{Tr}(\mu w_2)$. Ainsi, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) = b$.

1. Si $a = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)$ et $3ab - c = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)$, alors la proposition 1.2.2 avec $A = w_1$ et $B = w_2$ donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu(w_1w_1w_2)) &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)\mathrm{Tr}(\mu w_1w_2) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)\\ &= 3ab - (3ab - c)\\ &= c\end{aligned}$$

2. Si $a = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)$ et $3ab - c = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)$, alors la proposition 1.2.2 avec $A = w_1$ et $B = w_2$ donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu(w_1w_2w_2)) &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)\mathrm{Tr}(\mu w_1w_2) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)\\ &= 3ab - (3ab - c)\\ &= c\end{aligned}$$

Par la proposition 2.1.13, $w_1w_1w_2$ et $w_1w_2w_2$ sont des mots de Christoffel. Alors, le mot de Christoffel associé à $\{a, b, c\}$ est $w_1w_1w_2$ ou $w_1w_2w_2$. □

Lemme 3.0.6. *Soit w un mot de Christoffel non trivial dont la factorisation standard est w_1w_2, alors les triplets de Markoff associés aux mots de Christoffel $(w_1)(w_1w_2)$ et $(w_1w_2)(w_2)$ sont différents. C'est-à-dire que*

$$\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1w_1w_2)\right\} \neq \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1w_2w_2)\right\}.$$

DÉMONSTRATION Considérons d'abors le cas où $w_1 = x$ et $w_2 = y$. Puisque $\mu(xy) = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\mu(xxy) = \begin{pmatrix} 31 & 13 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$ et $\mu(xyy) = \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 41 & 17 \end{pmatrix}$, alors le triplet associé à

$(x)(xy)$ est $\{1, 5, 13\}$ et celui associé à $(xy)(y)$ est $\{5, 2, 29\}$. On remarque donc qu'ils sont différents.

Maintenant, si $w_1 \neq x$ ou $w_2 \neq y$ alors w est de longueur au moins 3. Par la proposition 2.1.11, on a donc que w_1 est préfixe de w_2 ou que w_2 est suffixe de w_1.

1. Si w_1 est préfixe de w_2, alors $w_2 = w_1 v$ où $v \in \{x, y\}^*$. Puisque les éléments des matrices μw_1 et μv sont des entiers strictement positifs, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mu w_2) &= \mathrm{Tr}(\mu w_1 v) \\
&= \mathrm{Tr}(\mu w_1 \mu v) \\
&= (\mu w_1)_{11}(\mu v)_{11} + (\mu w_1)_{12}(\mu v)_{21} + (\mu w_1)_{21}(\mu v)_{12} + (\mu w_1)_{22}(\mu v)_{22} \\
&> (\mu w_1)_{11} + (\mu w_1)_{22} \\
&= \mathrm{Tr}(\mu w_1).
\end{aligned}$$

En appliquant la proposition 1.2.2 avec $A = \mu w_1$ et $B = \mu w_2$, on obtient

$$\mathrm{Tr}((\mu w_1)^2 \mu w_2) = \mathrm{Tr}(\mu w_1)\mathrm{Tr}(\mu w) - \mathrm{Tr}(\mu w_2) \tag{3.1}$$

et

$$\mathrm{Tr}(\mu w_1 (\mu w_2)^2) = \mathrm{Tr}(\mu w_2)\mathrm{Tr}(\mu w) - \mathrm{Tr}(\mu w_1). \tag{3.2}$$

Alors $\mathrm{Tr}((\mu w_1)^2 \mu w_2) < \mathrm{Tr}(\mu w_2)\mathrm{Tr}(\mu w) - \mathrm{Tr}(\mu w_1) = \mathrm{Tr}(\mu w_1(\mu w_2)^2)$. Or, comme vu dans la démonstration du lemme 3.0.4, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}((\mu w_1)^2 \mu w_2)$ et $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1(\mu w_2)^2)$ sont les plus grands éléments des deux triplets de Markoff. Ainsi, les deux triplets sont différents.

2. De manière analogue, si w_2 est suffixe de w_1, on peut montrer que les deux triplets sont différents. □

Théorème 3.0.7. *(Bombieri, 2007)(Reutenauer, 2009) Un ensemble $\{a, b, c\}$ est un triplet de Markoff propre si et seulement si il est égal à $\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\}$ pour un unique mot de Christoffel non trivial w dont la factorisation standard est $w_1 w_2$.*

DÉMONSTRATION Étant donné les lemmes 3.0.4 et 3.0.5, il reste seulement à démontrer l'unicité.

Montrons d'abord que l'unique mot de Christoffel associé au triplet de Markoff $\{1,2,5\}$ est xy. On sait déjà que $\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu x), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu y), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu xy)\right\} = \{1,2,5\}$. Considérons w un mot de Christoffel de longueur au moins 3 dont la factorisation standard est w_1w_2, et montrons que $\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\} \neq \{1,2,5\}$. On sait que $w = xvy$ avec $v \in \{x,y\}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu x \mu v \mu y) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mu v \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mu v\right) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mu v\right) \\
&= \frac{1}{3}(12(\mu v)_{11} + 7(\mu v)_{21} + 5(\mu v)_{12} + 3(\mu v)_{22}) \\
&> \frac{1}{3}(27) \text{ car tous les éléments de } \mu v \text{ sont des entiers strictement positifs} \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Donc, $\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)\right\} \neq \{1,2,5\}$.

Considérons maintenant u et v deux mots de Christoffel de longueur au moins 3 qui sont associés au triplet de Markoff $\{a,b,c\}$, avec $a < b < c$. Notons u_1u_2 et v_1v_2 les factorisations standard de u et v respectivement. Par la proposition 2.1.11, on peut avoir les 4 situations suivantes :

1. u_1 est préfixe de u_2 et v_1 est préfixe de v_2 ;
2. u_1 est préfixe de u_2 et v_2 est suffixe de v_1 ;
3. u_2 est suffixe de u_1 et v_1 est préfixe de v_2 ;

4. u_2 est suffixe de u_1 et v_2 est suffixe de v_1.

1. Puisque u_1 est préfixe de u_2, on a $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u_1) < \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u_2)$. Donc, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u_1) = a$, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u_2) = b$ et $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u) = c$. Aussi, on peut écrire $u_2 = u_1 u_2'$ et $v_2 = v_1 v_2'$, avec u_2' et v_2' des mots de Christoffel. Ainsi, le triplet de Markoff associé à $u_1 u_2'$ est $\{a, \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u_2'), b\}$. En appliquant la proposition 1.2.2 avec $A = \mu u_1$ et $B = \mu u_2'$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mu u_2') &= \mathrm{Tr}(\mu u_1)\mathrm{Tr}(\mu u_1 \mu u_2') - \mathrm{Tr}(\mu u_1 \mu u_1 \mu u_2') \\
&= 3a3b - 3c \\
&= 3(3ab - c).
\end{aligned}$$

Alors le triplet de Markoff associé à $u_1 u_2'$ devient $\{a, 3ab - c, b\}$. De la même façon, le triplet de Markoff associé à $v_1 v_2'$ est $\{a, 3ab - c, b\}$. Puisque $u_1 u_2'$ et $v_1 v_2'$ sont plus courts que u et v et sont associés au même triplet de Markoff, alors par récurrence on a que $u_1 u_2' = v_1 v_2'$. Puisque la factorisation d'un mot de Christoffel en deux mots de Christoffel est unique, on a $u_1 = v_1$ et $u_2' = v_2'$. Donc, $u = v$.

2. De la même façon qu'en 1, on peut écrire $u_2 = u_1 u_2'$ et on obtient que le triplet de Markoff associé à $u_1 u_2'$ est $\{a, 3ab - c, b\}$. De plus, puisque v_2 est suffixe de v_1, on a $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v_2) < \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v_1)$. Donc, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v_2) = a$, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v_1) = b$ et $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v) = c$. Aussi, on peut écrire $v_1 = v_1' v_2$, avec v_1' un mot de Christoffel. Ainsi, le triplet de Markoff associé à $v_1' v_2$ est $\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v_1'), a, b\}$. En appliquant la proposition 1.2.2 avec $A = \mu v_1'$ et $B = \mu v_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mu v_1') &= \mathrm{Tr}(\mu v_1' \mu v_2)\mathrm{Tr}(\mu v_2) - \mathrm{Tr}(\mu v_1' \mu v_2 \mu v_2) \\
&= 3b3a - 3c \\
&= 3(3ab - c).
\end{aligned}$$

Alors le triplet de Markoff associé à $v_1' v_2$ devient $\{3ab - c, a, b\}$. Donc, par récurrence, on a $u_1 u_2' = v_1' v_2$ et donc $u_1 = v_1'$ et $u_2' = v_2$. On a alors

$$u = u_1 u_2 = u_1 u_1 u_2' = v_1' v_1' v_2 \tag{3.3}$$

et

$$v = v_1 v_2 = v_1' v_2 v_2. \tag{3.4}$$

Ainsi, les mots $v_1' v_1' v_2$ et $v_1' v_2 v_2$ sont associés au même triplet de Markoff. Par le lemme 3.0.6, on a une contradiction. Le cas 2 est donc impossible.

Pour les cas 3 et 4 on procède de façon analogue. $\square$

Ainsi, tout nombre de Markoff est de la forme $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)$, avec w un mot de Christoffel non trivial. La question de l'unicité de ce mot reste toujours sans réponse.

CHAPITRE IV

ARBRE DE STERN-BROCOT

4.1 Définitions

Nous allons maintenant introduire un arbre binaire infini qui contient toutes les fractions réduites $\frac{m}{n}$ positives, nulle ou infinie. Cet arbre se nomme l'**arbre de Stern-Brocot**. La notation $\frac{m}{n}$ désigne en fait le couple (m, n). Comme nous le verrons à la proposition 4.2.4, m et n seront toujours des entiers naturels premiers entre eux, et cet abus de notation sera justifié. Les résultats du présent chapitre proviennent du livre de Graham, Knuth et Patashmik (Graham, Knuth et Patashnik, 1994).

On va construire l'arbre récursivement à l'aide des suites suivantes. Notons s_0 la suite $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, où la fraction $\frac{1}{0}$ représente l'infini. Pour $i > 0$, s_i est construite à partir de s_{i-1} en ajoutant entre les fractions consécutives $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ le **médiant** de celles-ci, c'est-à-dire $\frac{m+m'}{n+n'}$. Voici les quatres premières suites.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0} \qquad (s_0)$$

$$\frac{0}{1}, \mathbf{\frac{1}{1}}, \frac{1}{0} \qquad (s_1)$$

$$\frac{0}{1}, \mathbf{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1}, \mathbf{\frac{2}{1}}, \frac{1}{0} \qquad (s_2)$$

$$\frac{0}{1}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}, \mathbf{\frac{2}{3}}, \frac{1}{1}, \mathbf{\frac{3}{2}}, \frac{2}{1}, \mathbf{\frac{3}{1}}, \frac{1}{0} \qquad (s_3)$$

On en déduit l'arbre de Stern-Brocot de la façon suivante. Les sommets du niveau i dans l'arbre sont les fractions nouvellement créées dans la suite s_i (fractions en gras dans l'exemple précédent). De plus, un sommet du niveau i est l'enfant gauche, respectivement droit, d'un sommet du niveau $i-1$ si et seulement si dans s_i, le sommet du niveau i est le voisin gauche, respectivement droit, du sommet du niveau $i-1$. La figure 4.1 illustre les cinq premiers niveaux de l'arbre de Stern-Brocot.

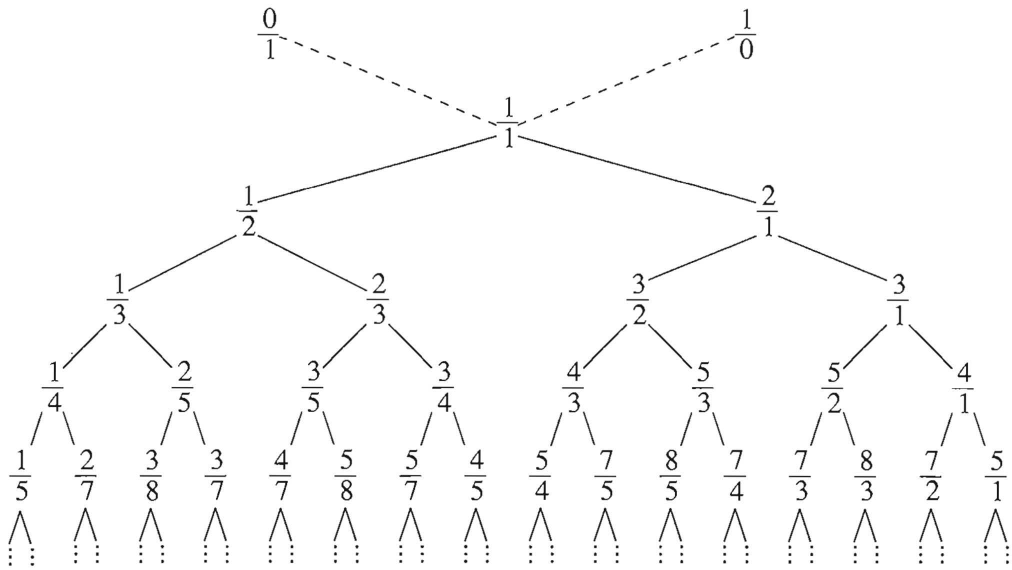

Figure 4.1 Arbre de Stern-Brocot

Définition 4.1.1. Considérons un arbre binaire complet infini. On lui ajoute deux sommets à l'infini, un à gauche et un à droite, qu'on note G et D. Soit s un des sommets de l'arbre. On définit l'**ancêtre gauche** et l'**ancêtre droit** de s par

1. G et D si s est la racine ;
2. G et t si s est sur la branche extrême gauche, où t est le père de s ;
3. t et D si s est sur la branche extrême droite, où t est le père de s ;
4. dans les autres cas, on considère le chemin de s vers la racine. L'ancêtre gauche, respectivement droit, est l'extrémité de la première arête qui va vers la gauche, respectivement droite, sur ce chemin.

La figure 4.2 illustre le dernier cas.

Remarques 4.1.2.

1. Dans l'arbre de Stern-Brocot, la racine est $\frac{1}{1}$ et ses ancêtre gauche et droit sont $G = \frac{0}{1}$ et $D = \frac{1}{0}$ respectivement.

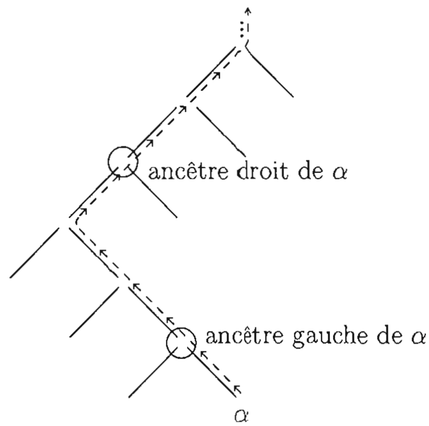

Figure 4.2 Ancêtres gauche et droit d'un sommet.

2. Pour tout sommet de l'arbre de Stern-Brocot autre que la racine, son ancêtre gauche ou son ancêtre droit est son père.

Exemple. Dans l'arbre de Stern-Brocot, considérons le sommet $\frac{7}{3}$. À l'aide de la figure 4.1, on voit aisément que l'ancêtre droit de $\frac{7}{3}$ est $\frac{5}{2}$ et que le gauche est $\frac{2}{1}$. Si on considère maintenant le sommet $\frac{1}{4}$, on voit que son ancêtre droit est $\frac{1}{3}$ et que son ancêtre gauche est $\frac{0}{1}$.

4.2 Propriétés

Nous allons maintenant démontrer qu'un sommet de l'arbre de Stern-Brocot est le médiant de son ancêtre gauche et de son ancêtre droit. Mais nous allons d'abord constater ce résultat de façon intuitive.

Notons d'abord que les sommets reliés par des pointillés sont considérés comme se trouvant à l'infini. Si on garde jusqu'au niveau i de l'arbre et qu'on effectue une projection, on peut constater deux choses. D'abord, les voisins gauche et droit d'une fraction sont ses ancêtres gauche et droit. Aussi, la suite obtenue est précisément s_i. Par exemple, la figure 4.3, nous montre ce qu'on obtient en effectuant la projection avec les niveaux 0 à 4 de l'arbre.

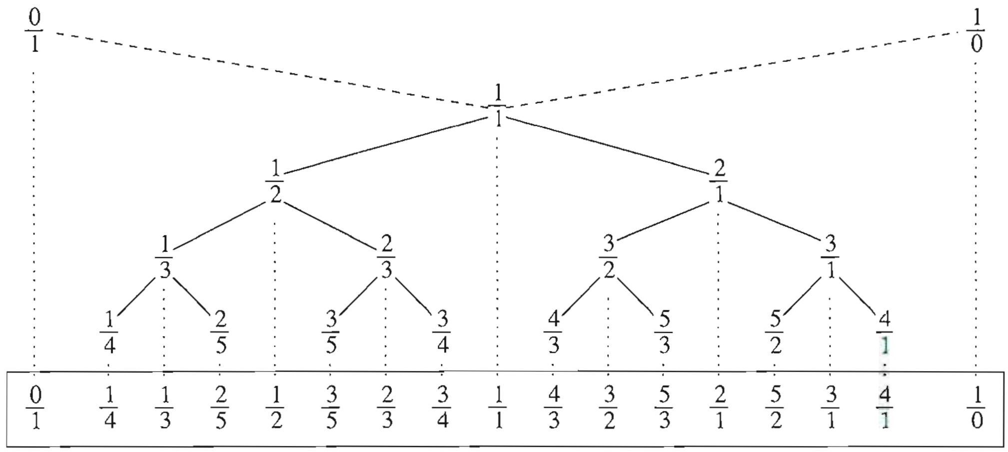

Figure 4.3 Projection des niveaux 0 à 4 de l'arbre de Stern-Brocot

La suite obtenue correspond bien à s_4 et chaque fraction est bien entourée de ses ancêtres gauche et droit.

Proposition 4.2.1. *Soit $\frac{a}{a'}$ un sommet du niveau $i \geq 1$ de l'arbre de Stern-Brocot et $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ ses ancêtres gauche et droit. Alors $s_i = (..., \frac{b}{b'}, \frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}, ...)$.*

DÉMONSTRATION Nous allons montrer le résultat par récurrence. D'abord, le sommet de niveau 1 est $\frac{1}{1}$. Ses ancêtres gauche et droit sont $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ et on a $s_1 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$.

Maintenant, soit $\frac{a}{a'}$ un sommet du niveau $i > 1$ de l'arbre de Stern-Brocot et $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ ses ancêtres gauche et droit. Considérons d'abord le cas où $\frac{b}{b'}$ est le père de $\frac{a}{a'}$. À l'aide de la figure 4.4, on voit que $\frac{c}{c'}$ est l'ancêtre droit de $\frac{b}{b'}$.

Par récurrence, on a donc $s_{i-1} = (..., \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, ...)$. Mais puisque $\frac{a}{a'}$ est l'enfant droit de $\frac{b}{b'}$, il est son voisin droit dans s_i et on a donc $s_i = (..., \frac{b}{b'}, \frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}, ...)$.

De façon symétrique, on peut montrer le résultat si $\frac{c}{c'}$ est le père de $\frac{a}{a'}$. □

Corollaire 4.2.2. *Soit $\frac{a}{a'}$ un sommet de l'arbre de Stern-Brocot et $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ ses ancêtres gauche et droit. Alors*

$$a = b + c \text{ et } a' = b' + c'.$$

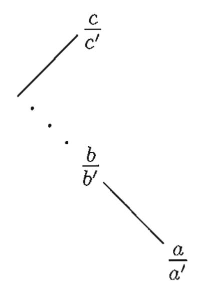

Figure 4.4 $\frac{c}{c'}$ est l'ancêtre droit de $\frac{b}{b'}$.

DÉMONSTRATION Si $\frac{a}{a'}$ est un sommet du niveau i de l'arbre de Stern-Brocot, alors par la proposition 4.2.1, on a

$$\ldots, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \ldots \quad (s_{i-1})$$
$$\ldots, \frac{b}{b'}, \frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}, \ldots \quad (s_i)$$

Donc, $\frac{a}{a'}$ est le médiant de $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$. D'où le résultat. □

On va maintenant montrer que l'arbre de Stern-Brocot contient toutes les fractions positives une et une seule fois et qu'elles sont écrites sous forme réduite.

Lemme 4.2.3. *Soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions consécutives de s_i, $i \geq 0$. Alors on a $m'n - mn' = 1$.*

DÉMONSTRATION Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur l'indice de la suite. Puisque $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, le résultat est vrai pour s_0. Soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions consécutives de s_i, $i > 0$. On a deux situations possibles, soit (1) $\frac{m}{n}$ est une fraction de s_{i-1} et pas $\frac{m'}{n'}$ ou (2) $\frac{m'}{n'}$ est une fraction de s_{i-1} et pas $\frac{m}{n}$.

(1) On a la situation suivante

$$\ldots, \frac{m}{n}, \frac{s}{t}, \ldots \quad (s_{i-1})$$
$$\ldots, \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{s}{t}, \ldots \quad (s_i)$$

où $m' = m + s$ et $n' = n + t$. Par récurrence, on a $sn - mt = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m'n - mn' &= (m+s)n - m(n+t) \\ &= mn + sn - mn - mt \end{aligned}$$

$$= sn - mt$$
$$= 1.$$

(2) On a la situation suivante

$$\ldots, \tfrac{s}{t}, \tfrac{m'}{n'}, \ldots \qquad (s_{i-1})$$
$$\ldots, \tfrac{s}{t}, \tfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}, \tfrac{m'}{n'}, \ldots \qquad (s_i)$$

où $m = s + m'$ et $n = t + n'$. Par récurrence, on a $m't - sn' = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m'n - mn' &= m'(t+n') - (s+m')n' \\ &= m't + m'n' - sn' - m'n' \\ &= m't - sn' \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.4. *Soit $\frac{m}{n}$ une fraction de l'arbre de Stern-Brocot. Alors m et n sont premiers entre eux.*

DÉMONSTRATION Par le lemme 4.2.3 et le lemme de Bezout, on peut conclure que m et n sont premiers entre eux. □

Proposition 4.2.5. *Soit $\frac{m}{n}$ une fraction positive telle que $m \perp n$. Alors $\frac{m}{n}$ apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot une et une seule fois.*

DÉMONSTRATION Afin de démontrer que chacune des fractions n'apparaît qu'une seule fois dans l'arbre, nous allons montrer que pour $i \geq 0$, s_i est une suite strictement croissante. Soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions consécutives de s_{i-1}, $i \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{m+m'}{n+n'} - \frac{m}{n} &= \frac{mn + m'n - mn - mn'}{(n+n')n} \\ &= \frac{m'n - mn'}{(n+n')n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+n')n} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{m+m'}{n+n'} - \frac{m'}{n'} &= \frac{mn' + m'n' - m'n - m'n'}{(n+n')n} \\
&= \frac{mn' - m'n}{(n+n')n} \\
&= \frac{-1}{(n+n')n} \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Alors, on a $\frac{m}{n} < \frac{m+m'}{n+n'} < \frac{m'}{n'}$. D'où le résultat qu'une même fraction ne peut se retrouver à deux endroits différents dans s_i. Il reste donc à montrer que toutes les fractions positives apparaîssent dans l'arbre. L'algorithme décrit ci-dessous nous permet d'avoir le résultat.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction positive telle que $a \perp b$. Au départ, on pose $\frac{m}{n} = \frac{0}{1}$ et $\frac{m'}{n'} = \frac{1}{0}$, donc $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$. On calcule alors $\frac{m+m'}{n+n'}$ et on a une des situations suivantes :

1. $\frac{a}{b} = \frac{m+m'}{n+n'}$, $\frac{a}{b}$ est donc dans l'arbre ;
2. $\frac{a}{b} < \frac{m+m'}{n+n'}$, on remplace alors m' par $m+m'$ et n' par $n+n'$;
3. $\frac{a}{b} > \frac{m+m'}{n+n'}$, on remplace alors m par $m+m'$ et n par $n+n'$.

Puisque $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont deux fractions consécutives d'un certain s_i, et ce pour tous les étapes de l'algorithme, alors par le lemme 4.2.3 on a $m'n - mn' = 1$. Aussi, puisque $\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0$ et $\frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0$ on a $an - bm \geq 1$ et $bm' - an' \geq 1$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
a + b &= (a+b)(m'n - mn') \\
&= am'n - amn' + bm'n - bmn' + bmm' - bmm' + ann' - ann' \\
&= (m'+n')(an - bm) + (m+n)(bm' - an') \\
&\geq m' + n' + m + n.
\end{aligned}
$$

Or, dans les cas 2 et 3, parmi m, n, m', n', au moins une valeur est augmentée de 1 ou plus. Ainsi, en au plus $a+b$ étapes $m'+n'+m+n$ ne sera plus inférieur ou égal à $a+b$ et on sera donc dans la situation 1. Donc $\frac{a}{b}$ sera dans l'arbre de Stern-Brocot. $\square$

Ainsi, les sommets de l'arbre de Stern-Brocot sont toutes les fractions positives écrites sous forme réduite et chacune apparaît une seule fois.

CHAPITRE V

COORDONNÉES DE FROBENIUS DES NOMBRES DE MARKOFF

On va maintenant définir une fonction p qui part de l'ensemble des couples d'entiers positifs premiers entre eux et qui va vers l'ensemble des nombres de Markoff. Pour ce faire on a besoin de quelques résultats supplémentaires sur l'arbre de Stern-Brocot.

Proposition 5.0.6. *(Frobenius, 1968) Soit (α, α') un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux. Alors il existe deux uniques couples (β, β') et (γ, γ') d'entiers tel que $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = -1$, $(0,0) < (\beta, \beta') < (\alpha, \alpha')$ et $(0,0) < (\gamma, \gamma') < (\alpha, \alpha')$. De plus, $\frac{\beta}{\beta'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ sont les ancêtres gauche et droit de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ dans l'arbre de Stern-Brocot.*

DÉMONSTRATION Ce résultat peut se démontrer en utilisant le lemme de Bezout et la division euclidienne mais nous allons ici le démontrer à l'aide de l'arbre de Stern-Brocot.

Nous allons d'abord démontrer l'existence de ces couples. Soit (α, α') un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux. On fait donc référence ici au sommet $\frac{\alpha}{\alpha'}$ de l'arbre de Stern-Brocot. Soit $\frac{\beta}{\beta'}$ son ancêtre gauche et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ son ancêtre droit. Par le corollaire 4.2.2, on a $\alpha = \beta + \gamma$ et $\alpha' = \beta' + \gamma'$. Puisqu'aucun couple de l'arbre n'est nul, on a donc $(0,0) < (\beta, \beta') < (\alpha, \alpha')$ et $(0,0) < (\gamma, \gamma') < (\alpha, \alpha')$. De plus, avec la proposition 4.2.1 et le lemme 4.2.3 on a $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ et $\alpha'\gamma - \alpha\gamma' = 1 \Rightarrow \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = -1$.

Maintenant, il ne reste qu'à démontrer l'unicité. Soit (x, x') un couple d'entiers tel que

$\alpha x' - \alpha' x = 1$ et $(0,0) < (x,x') < (\alpha,\alpha')$. On a donc

$$\begin{aligned}
\alpha x' - \alpha' x = \alpha\beta' - \alpha'\beta \;&\Rightarrow\; \alpha(x'-\beta') = \alpha'(x-\beta)\\
&\Rightarrow\; \alpha | x-\beta \text{ puisque } \alpha \bot \alpha'\\
&\Rightarrow\; |x-\beta| = 0 \text{ ou } |x-\beta| = \alpha, \quad \text{puisque } 0 \le x, \beta \le \alpha\\
&\Rightarrow\; x = \beta \;\text{ ou } x = \alpha \text{ et } \beta = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ et } \beta = \alpha
\end{aligned}$$

Si $x = \alpha$ et $\beta = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha x' - \alpha'\alpha = \alpha\beta' \;&\Rightarrow\; x' - \alpha' = \beta'\\
&\Rightarrow\; x' - \beta' = \alpha'\\
&\Rightarrow\; x' = \alpha' \text{ et } \beta' = 0, \quad \text{puisque } 0 \le x', \beta' \le \alpha'\\
&\Rightarrow\; (\beta,\beta') = (0,0), \;\text{ contradiction.}
\end{aligned}$$

Si $x = 0$ et $\beta = \alpha$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha x' = \alpha\beta' - \alpha'\alpha \;&\Rightarrow\; x' = \beta' - \alpha'\\
&\Rightarrow\; \beta' - x' = \alpha'\\
&\Rightarrow\; x' = 0 \text{ et } \beta' = \alpha', \quad \text{puisque } 0 \le x', \beta' \le \alpha'\\
&\Rightarrow\; (\beta,\beta') = (\alpha,\alpha'), \;\text{ contradiction.}
\end{aligned}$$

Donc $x = \beta$. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha x' - \alpha' x = \alpha\beta' - \alpha'\beta \;&\Rightarrow\; \alpha x' - \alpha'\beta = \alpha\beta' - \alpha'\beta\\
&\Rightarrow\; x' = \beta'.
\end{aligned}$$

D'où l'unicité de (β,β'). De façon analogue, on peut montrer l'unicité de (γ,γ'). $\square$

On va définir la fonction p, telle que présentée par Frobenius (Frobenius, 1968), par récurrence de la façon suivante. D'abord, $p_{10} = 1$, $p_{01} = 2$ et $p_{11} = 5$. Maintenant, soit (α, α') un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux. Considérons les couples (β, β') et (γ, γ') donnés par la proposition 5.0.6 et posons $\delta = |\beta - \gamma|$ et $\delta' = |\beta' - \gamma'|$. Alors $p_{\alpha\alpha'} = 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'}$.

Nous savons que $(0,0) < (\beta, \beta') < (\alpha, \alpha')$ et $(0,0) < (\gamma, \gamma') < (\alpha, \alpha')$ et donc que la définition de p par récurrence est correcte. De plus, nous savons que $\alpha = \beta + \gamma$ et $\alpha' = \beta' + \gamma'$. Pour montrer que la fonction est bien définie, il reste donc à montrer que $p_{\alpha\alpha'}$ est bien un nombre de Markoff.

Proposition 5.0.7. *(Frobenius, 1968) Soit (α, α') un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux. Alors $p_{\alpha\alpha'}$ est un nombre de Markoff.*

DÉMONSTRATION Soit (α, α') un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux. Soit $\frac{\beta}{\beta'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ les ancêtres gauche et droit de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ dans l'arbre de Stern-Brocot. Nous allons démontrer par récurrence sur le niveau maximum des trois fractions $\{\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}\}$ dans l'arbre de Stern-Brocot que $\{p_{\alpha\alpha'}, p_{\beta\beta'}, p_{\gamma\gamma'}\}$ est un triplet de Markoff.

1. Considérons d'abord le cas où $\frac{\beta}{\beta'}$ est le parent de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ dans l'arbre et posons $\delta = |\beta - \gamma|$ et $\delta' = |\beta' - \gamma'|$. Alors, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ est l'ancêtre droit de $\frac{\beta}{\beta'}$ et notons $\frac{\eta}{\eta'}$ son ancêtre gauche. Ainsi,

$$\begin{aligned} \beta = \gamma + \eta \text{ et } \beta' = \gamma' + \eta' &\Rightarrow \eta = \beta - \gamma \text{ et } \eta' = \beta' - \gamma' \\ &\Rightarrow \eta = |\beta - \gamma| \text{ et } \eta' = |\beta' - \gamma'| \text{ puisque } \eta \text{ et } \eta' \text{ sont positifs} \\ &\Rightarrow \eta = \delta \text{ et } \eta' = \delta' \end{aligned}$$

Par récurrence, $\{p_{\beta\beta'}, p_{\gamma\gamma'}, p_{\delta\delta'}\}$ est donc un triplet de Markoff. Ainsi, $p_{\beta\beta'}^2 + p_{\gamma\gamma'}^2 + p_{\delta\delta'}^2 = 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}p_{\delta\delta'}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{\alpha\alpha'}^2 + p_{\beta\beta'}^2 + p_{\gamma\gamma'}^2 &= (3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'})^2 + p_{\beta\beta'}^2 + p_{\gamma\gamma'}^2 \\ &= 9p_{\beta\beta'}^2 p_{\gamma\gamma'}^2 + p_{\delta\delta'}^2 - 6p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}p_{\delta\delta'} + p_{\beta\beta'}^2 + p_{\gamma\gamma'}^2 \\ &= 9p_{\beta\beta'}^2 p_{\gamma\gamma'}^2 - 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}p_{\delta\delta'} \end{aligned}$$

$$= 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}(3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'})$$
$$= 3p_{\alpha\alpha'}p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}$$

Alors, $\{p_{\alpha\alpha'}, p_{\beta\beta'}, p_{\gamma\gamma'}\}$ est un triplet de Markoff.

2. De façon analogue, si $\frac{\gamma}{\gamma'}$ est le parent de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ dans l'arbre on peut montrer que $\{p_{\alpha\alpha'}, p_{\beta\beta'}, p_{\gamma\gamma'}\}$ est un triplet de Markoff.

Ainsi, $p_{\alpha\alpha'}$ est un nombre de Markoff. □

Notons P l'ensemble des couples d'entiers positifs premiers entre eux, M l'ensemble des nombres de Markoff et C l'ensemble des mots de Christoffel.

Théorème 5.0.8. *Soit w un mot de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$. Considérons les deux fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} g : C &\to P \\ w &\mapsto (a,b) \\ T : C &\to M \\ w &\mapsto \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w). \end{aligned}$$

Alors $p \circ g = T$, où $p(a,b) = p_{ab}$. C'est-à-dire que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{T} & M \\ g \downarrow & & \downarrow Id \\ P & \xrightarrow[p]{} & M \end{array}$$

DÉMONSTRATION Montrons d'abord que le résultat est vrai pour les mots de Christoffel x, y et xy. Rappelons que $\mu x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $p_{10} = 1$, $p_{01} = 2$ et $p_{11} = 5$. On a donc

$$(p \circ g)(x) = p_{10}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(p \circ g)(y) &= p_{01} \\
&= 2 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T(y)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(p \circ g)(xy) &= p_{11} \\
&= 5 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= T(xy)
\end{aligned}
$$

Nous allons démontrer par récurrence sur la longueur du mot de Christoffel w que $(p \circ i)(w) = T(w)$. Soit w un mot de Christoffel de longueur au moins 3, de pente $\frac{b}{a}$ et dont la factorisation standard est $w_1 w_2$. Soit (i, j) le point qui sépare le mot w en $(w_1)(w_2)$. L'étiquette de ce point est donc $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire que $\frac{ib-ja}{a} = \frac{1}{a}$. Posons $(\beta, \beta') = (i, j)$, $(\gamma, \gamma') = (a-i, b-j)$ et $(\delta, \delta') = (|2i-a|, |2j-b|)$. Alors, a et b sont des entiers premiers entre eux tels que

$$a\beta' - b\beta = -1,$$

$$\begin{aligned} & a\gamma' - b\gamma = 1, \\ & (0,0) < (\beta, \beta') < (a,b) \\ \text{et} \quad & (0,0) < (\delta, \delta') < (a,b). \end{aligned}$$

Ainsi, $p_{ab} = 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'}$.

Selon la proposition 2.1.11, w_1 est préfixe de w_2 ou w_2 est suffixe de w_1.

1. Si w_1 est préfixe de w_2, alors $w_2 = w_1 v$ avec v un mot de Christoffel. De plus, le nombre de x dans w_1 est inférieur à celui dans w_2, c'est-à-dire que $i < a - i$. De même pour le nombre de y, alors $j < b - j$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & 0 < a - 2i \text{ et } 0 < b - 2j \\ \Rightarrow \; & \delta = a - 2i \text{ et } \delta' = b - 2j. \end{aligned}$$

Puisque $w = w_1 w_1 v$ et que la pente de w_1 est $\frac{j}{i}$ alors la pente de v est $\frac{b-2j}{a-2i}$. De plus, puisque w_1, w_2 et v sont des mots de longueur inférieure à w, par récurrence on obtient que $(p \circ g)(w_1) = T(w_1)$, $(p \circ g)(w_2) = T(w_2)$ et $(p \circ g)(v) = T(v)$. Donc,

$$\begin{aligned} p_{\beta\beta'} &= p_{ij} \\ &= (p \circ g)(w_1) \\ &= T(w_1) \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\gamma\gamma'} &= p_{a-i,b-j} \\ &= (p \circ g)(w_2) \\ &= T(w_2) \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2) \end{aligned}$$

et

$$p_{\delta\delta'} = p_{a-2i,b-2j}$$

$$
\begin{aligned}
&= (p \circ g)(v) \\
&= T(v) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(p \circ g)(w) &= p_{ab} \\
&= 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'} \\
&= 3\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v) \\
&= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu w_1)\mathrm{Tr}(\mu w_1 v) - \mathrm{Tr}(\mu v)) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1^2 v) \text{ proposition 1.2.2} \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) \\
&= T(w).
\end{aligned}
$$

2. Si w_2 est suffixe de w_1, alors $w_1 = vw_2$ avec v un mot de Christoffel. De plus, le nombre de x dans w_2 est inférieur à celui dans w_1, c'est-à-dire que $i > a - i$. De même pour le nombre de y, alors $j > b - j$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&0 < 2i - a \text{ et } 0 < 2j - b \\
\Rightarrow\ &\delta = 2i - a \text{ et } \delta' = 2j - b.
\end{aligned}
$$

Puisque $w = vw_2w_2$ et que la pente de w_2 est $\frac{b-j}{a-i}$ alors la pente de v est $\frac{b-2(b-j)}{a-2(a-i)} = \frac{2j-b}{2i-a}$. De la même façon que précédemment, puisque w_1, w_2 et v sont des mots de longueur inférieure à w, par récurrence on obtient que $p_{\beta\beta'} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)$, $p_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2)$ et $p_{\delta\delta'} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v)$. Donc,

$$
(p \circ g)(w) = p_{ab}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'} \\
&= 3\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1)\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_2) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v) \\
&= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu v w_2)\mathrm{Tr}(\mu w_2) - \mathrm{Tr}(\mu v)) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v w_2^2) \text{ proposition 1.2.2} \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w) \\
&= T(w).
\end{aligned}
$$

□

Cette proposition nous dit donc que T et p sont essentiellement identiques. Puisque g est bijective et que T est surjective (théorème 3.0.7), on a que p est surjective. Ainsi, pour chaque nombre de Markoff m, nous avons l'existence d'un couple (α, α') d'entiers strictement positifs premiers entre eux tel que $p_{\alpha\alpha'} = m$. La fonction p a été introduite par Frobenius en 1913 et α et α' sont appelées **coordonnées de Frobenius** de m.

Comme mentionné au Chapitre 5, on sait que tous les nombres de Markoff sont de la forme $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)$, avec w un mot de Christoffel, mais on ne sait cependant pas si ce mot est unique. Le théorème précédent (théorème 5.0.8) nous permet de conclure que l'unicité de ce mot est équivalente à l'unicité des coordonnées de Frobenius pour un nombre de Markoff. Cette dernière question est la **conjecture d'injectivité des nombres de Markoff**.

CHAPITRE VI

ARBRE DE CHRISTOFFEL ET ARBRE DE MARKOFF

6.1 Arbre de Christoffel

On rencontre l'arbre de Christoffel à plusieurs endroits dans la littérature. Les résultats présentés ici sont inspirés de l'article de H. Cohn (Cohn, 1979), du livre de Berstel, Lauve, Reutenauer et Saliola (Berstel et al., 2008), du livre de Lothaire (Lothaire, 2002) et de l'article de Berstel et de Luca (Berstel et de Luca, 1997).

L'**arbre de Christoffel** est un arbre binaire complet infini où les sommets sont des couples de mots de $\{x, y\}^*$. La racine de l'arbre est (x, y) et les enfants gauche et droit du couple (u, v) sont (u, uv) et (uv, v) respectivement.

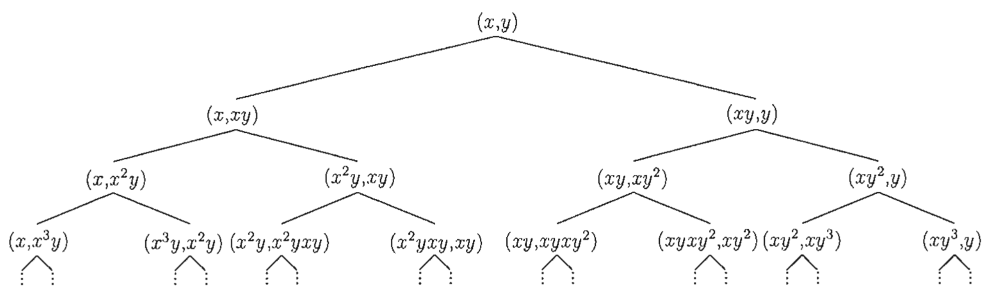

Figure 6.1 Arbre de Christoffel

Rappelons que la factorisation standard $w = uv$ d'un mot de Christoffel a été définie en 2.1.2. Nous l'identifions ici avec le couple (u, v).

Proposition 6.1.1. *Les sommets de l'arbre de Christoffel sont des factorisations stan-*

dard de mots de Christoffel.

DÉMONSTRATION De la proposition 2.1.13, on obtient que pour tout mot de Christoffel w dont la factorisation standard est w_1w_2, $w_1w_1w_2$ et $w_1w_2w_2$ sont des mots de Christoffel de factorisations standard $(w_1)(w_1w_2)$ et $(w_1w_2)(w_2)$. Ainsi, puisque xy est un mot de Christoffel de factorisation standard $(x)(y)$, les sommets de l'arbre de Christoffel sont bien des factorisations standard de mots de Christoffel. □

Proposition 6.1.2. *L'arbre de Christoffel contient exactement une fois la factorisation standard de chacun des mots de Christoffel.*

DÉMONSTRATION Il suffit de montrer que toutes les factorisations standard sont dans l'arbre une et une seule fois. Pour ce, nous allons montrer qu'il y a une bijection entre l'arbre de Christoffel et l'arbre de Stern-Brocot. Soit w_1w_2 un mot de Christoffel de pente $\frac{b}{a}$ et de factorisation standard w_1w_2. On définit f comme suit : $f(\frac{b}{a}) = (w_1, w_2)$. Autrement dit, $b = |w_1w_2|_y$ et $a = |w_1w_2|_x$. Cette fonction est bien une bijection entre les sommets de l'arbre de Stern-Brocot et les factorisations standard des mots de Christoffel. Il reste à vérifier que f conserve la structure de l'arbre, et nous allons le faire par récurrence.

D'abord, vérifions pour les deux premiers niveaux de l'arbre. Nous avons $f(\frac{1}{1}) = (x, y)$ avec $\frac{1}{1}$ la racine de l'arbre de Stern-Brocot et (x, y) est la racine de l'arbre de Christoffel. Aussi, $f(\frac{1}{2}) = (x, xy)$ et $f(\frac{2}{1}) = (xy, y)$ avec $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{1}$ les enfants gauche et droit de $\frac{1}{1}$ dans l'arbre de Stern-Brocot et (x, xy) et (xy, y) les enfants gauche et droit de (x, y) dans l'arbre de Christoffel.

Soit maintenant (w_1, w_2) un sommet de l'arbre de Christoffel tel que la pente de w_1w_2 est $\frac{b}{a}$. Nous allons vérifier que f établit bien une bijection entre les derniers niveaux des deux arbres illustrés à la figure 6.2.

Expliquons d'abord d'où vient le dernier niveau de l'arbre de gauche. Soit $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$ les ancêtres de $\frac{b}{a}$ dans l'arbre Stern-Brocot. On a donc les égalités suivantes :

$$\alpha + \beta = b$$
$$\alpha' + \beta' = a$$
$$\alpha + b = s$$
$$\alpha' + a = t$$
$$\beta + b = k$$
$$\beta' + a = l$$

D'où l'enfant gauche de $\frac{s}{t}$ est $\frac{s+\alpha}{t+\alpha'} = \frac{s-b+s}{t-a+t} = \frac{2s-b}{2t-a}$ et l'enfant droit est $\frac{s+b}{t+a}$. De la même façon, on obtient les enfants gauche et droit de $\frac{k}{l}$ et donc le niveau suivant de l'arbre de la figure 6.2.

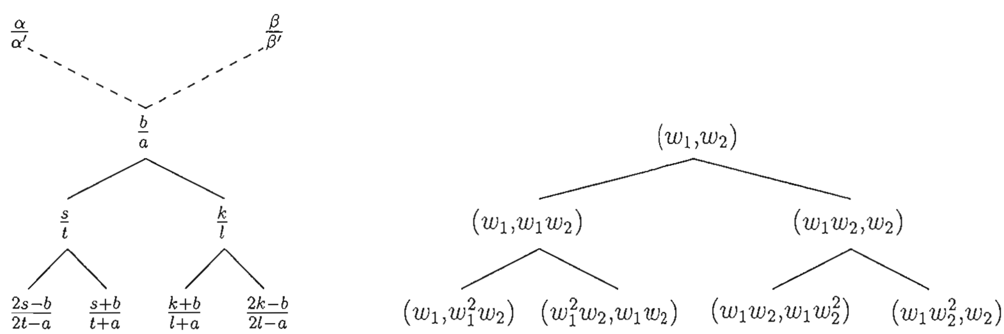

Figure 6.2 Bijection entre l'arbre de Stern-Brocot et l'arbre de Cristoffel.

Par récurrence, nous avons $f(\frac{b}{a}) = (w_1, w_2)$, $f(\frac{s}{t}) = (w_1, w_1w_2)$ et $f(\frac{k}{l}) = (w_1w_2, w_2)$. Donc,

$$b = |w_1w_2|_y \text{ et } a = |w_1w_2|_x,$$
$$s = |w_1^2w_2|_y \text{ et } t = |w_1^2w_2|_x,$$
$$k = |w_1w_2^2|_y \text{ et } l = |w_1w_2^2|_x,$$
$$s - b = |w_1|_y \text{ et } t - a = |w_1|_x,$$
$$k - b = |w_2|_y \text{ et } l - a = |w_2|_x.$$

Alors on obtient $|w_1w_1^2w_2|_y = |w_1|_y + |w_1^2w_2|_y = s - b + s = 2s - b$ et $|w_1w_1^2w_2|_x = |w_1|_x + |w_1^2w_2|_x = t - a + t = 2t - a$, d'où $f\left(\frac{2s-b}{2t-a}\right) = (w_1, w_1^2w_2)$. De la même façon, on a

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{s+b}{t+a}\right) = (w_1^2w_2, w_1w_2), \\
& f\left(\frac{k+b}{l+a}\right) = (w_1w_2, w_1w_2^2) \\
\text{et}\quad & f\left(\frac{2k-b}{2l-a}\right) = (w_1w_2^2, w_2).
\end{aligned}
$$

Les deux derniers niveaux sont donc en bijection. D'où la bijection entre l'arbre de Stern-Brocot et l'arbre de Christoffel. Puisque chaque fraction positive réduite se trouve une et une seule fois dans l'arbre de Stern-Brocot et que les mots de Christoffel sont en bijection avec les nombres rationnels strictement positifs, l'arbre de Christoffel contient exactement une fois la factorisation standard de chacun des mots de Christoffel. □

6.2 Arbre de Markoff

Dans cette section, nous allons introduire un arbre qui contient tous les triplets de Markoff ; cet arbre se nomme l'**arbre de Markoff**. Les résultats présentés ici sont inspirés du livre de Cusick et Flahive (Cusick et Flahive, 1989), mais la structure de l'arbre présentée ici est quelque peu différente afin d'avoir la bijection voulue avec l'arbre de Christoffel. Afin d'expliquer la structure de l'arbre, nous allons d'abord définir les voisins d'un triplet de Markoff.

Définition 6.2.1. Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff. Les multi-ensembles $\{3bc-a, b, c\}$, $\{a, 3ac-b, c\}$ et $\{a, b, 3ab-c\}$ sont appelés les **voisins** de $\{a, b, c\}$.

Proposition 6.2.2. *Les voisins d'un triplet de Markoff sont aussi des triplets de Markoff.*

DÉMONSTRATION Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff. Par le lemme 2.2.3 on a que $\{a, b, 3ab-c\}$ est un triplet de Markoff. De la même façon que dans la démonstration de ce lemme, on peut montrer que $\{3bc - a, b, c\}$ et $\{a, 3ac - b, c\}$ sont des triplets de Markoff. $\square$

Proposition 6.2.3. *Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff tel que $a < b < c$. Alors on a les inégalités suivantes :*

$$b < c < 3bc - a$$
$$a < c < 3ac - b.$$

Donc, $\{3bc - a, b, c\}$ et $\{a, 3ac - b, c\}$ sont des triplets de Markoff propres.

DÉMONSTRATION Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de Markoff tel que $a < b < c$. Puisque $b < c$ et que $b \geq 1$, on a $b^2 + 2c^2 < c^2 + 2c^2 \leq 3bc^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& b^2 + 2c^2 - 3bc^2 < 0 \\
\Rightarrow\ & 3abc - a^2 + c^2 - 3bc^2 < 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 3abc) \\
\Rightarrow\ & 3abc - a^2 + c^2 - 3bc^2 + ca - ca < 0 \\
\Rightarrow\ & (c - a)(c - (3bc - a)) < 0 \\
\Rightarrow\ & c - (3bc - a) < 0 \text{ puisque } c - a > 0 \\
\Rightarrow\ & c < 3bc - a.
\end{aligned}$$

De façon analogue, on peut montrer que $3ac - b > c$. $\square$

L'arbre de Markoff sera défini de la façon suivante. La racine de l'arbre est $\{1, 2, 5\}$ et ses enfants de gauche et de droite sont $\{1, 5, 13\}$ et $\{2, 5, 29\}$, respectivement. Par la suite, considérons le triplet $\{a, b, c\}$ tel que $a < b < c$. Si $\{a, b, c\}$ est un enfant de gauche alors ses enfants de gauche et de droite sont $\{a, c, 3ac - b\}$ et $\{b, c, 3bc - a\}$, respectivement. Si $\{a, b, c\}$ est un enfant de droite alors ses enfants de gauche et de droite sont $\{b, c, 3bc - a\}$ et $\{a, c, 3ac - b\}$, respectivement. Voir figure 6.3.

Par la proposition 6.2.3 et puisque $\{1, 2, 5\}$ est un triplet de Markoff propre, tous les sommets de l'arbre ont deux enfants différents, qui sont des triplets de Markoff propres.

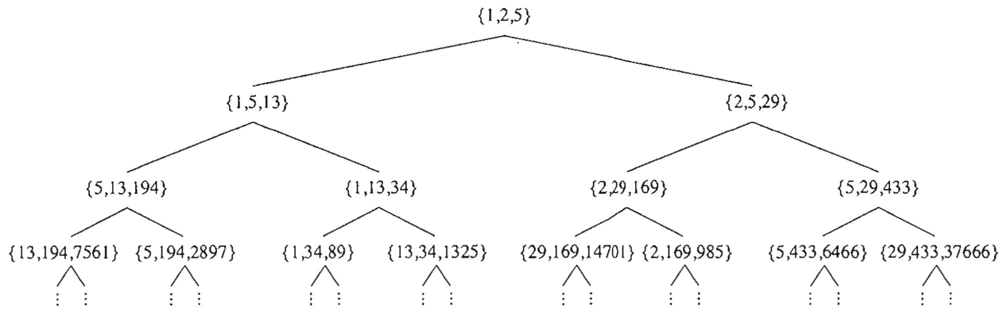

Figure 6.3 Arbre de Markoff

Proposition 6.2.4. *L'arbre de Markoff contient exactement une fois chaque triplet de Markoff propre.*

DÉMONSTRATION De la proposition 6.2.2, on obtient que tous les sommets de l'arbre sont bien des triplets de Markoff. Il reste donc à montrer que chaque triplet apparaît une et une seule fois dans l'arbre. Pour ce faire, nous allons montrer que l'arbre de Markoff est en bijection avec l'arbre de Christoffel. Considérons la fonction F qui part de l'ensemble des mots de Christoffel non triviaux et va vers l'ensemble des triplets de Markoff propres, définie comme suit, $F(u,v) = \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uv)\right\}$. Selon le théorème 3.0.7, F est une bijection. Il reste donc à montrer que cette bijection respecte la structure de l'arbre.

D'abord, $F(x,y) = \left\{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu x), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu y), \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu xy)\right\} = \{1,2,5\}$. Donc la racine de l'arbre de Christoffel est envoyée sur la racine de l'arbre de Markoff. On peut aussi vérifier que $F(x,xy) = \{1,5,13\}$ et $F(xy,y) = \{2,5,529\}$. Considérons la partie de l'arbre de Christoffel qui est illustrée à la figure 6.4. Nous allons considérer la branche de gauche et la branche de droite séparément.

Rappel : Si le mot w_1 est facteur du mot w, alors $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w_1) < \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu w)$.

(1) Commençons par la branche gauche. Posons

$$\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu u) = a,\ \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uv) = b \text{ et } \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uuv) = c.$$

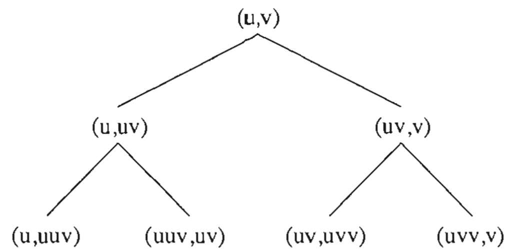

Figure 6.4 Section de l'arbre de Christoffel.

Alors, $F(u, uv) = \{a, b, c\}$ et $a < b < c$. Par récurrence nous présumons que F préserve la structure de l'arbre jusqu'au deuxième niveau de l'arbre considéré. Donc, $\{a, b, c\}$ est un enfant de gauche et ses enfants de gauche et de droite sont donc $\{a, c, 3ac - b\}$ et $\{b, c, 3bc - a\}$, respectivement. Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uuuv) &= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu u)\mathrm{Tr}(\mu uuv) - \mathrm{Tr}(\mu uv)) \text{ proposition 1.2.2}\\
&= \frac{1}{3}(3a3c - 3b)\\
&= 3ac - b\\
\text{et } \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uuvuv) &= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu uv)\mathrm{Tr}(\mu uuv) - \mathrm{Tr}(\mu u)) \text{ proposition 1.2.2}\\
&= \frac{1}{3}(3b3c - 3a)\\
&= 3bc - a,
\end{aligned}$$

on a bien que $F(u, uuv) = \{a, c, 3ac - b\}$ et que $F(uuv, uv) = \{b, c, 3bc - a\}$.

(2) Considérons maintenant la branche droite. Posons $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu v) = a$, $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uv) = b$ et $\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uvv) = c$. Alors, $F(uv, v) = \{b, a, c\}$ et $a < b < c$. Par récurrence, $\{a, b, c\}$ est un enfant de droite et ses enfants de gauche et de droite sont donc $\{b, c, 3bc - a\}$ et $\{a, c, 3ac - b\}$, respectivement. Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uvuvv) &= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu uv)\mathrm{Tr}(\mu uvv) - \mathrm{Tr}(\mu v)) \text{ proposition 1.2.2}\\
&= \frac{1}{3}(3b3c - 3a)\\
&= 3bc - a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et } \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mu uvvv) &= \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}(\mu v)\mathrm{Tr}(\mu uvv) - \mathrm{Tr}(\mu uv)) \text{ proposition 1.2.2}\\ &= \frac{1}{3}(3a3c - 3b)\\ &= 3ac - b,\end{aligned}$$

on a bien que $F(uv, uvv) = \{b, c, 3bc - a\}$ et que $F(uvv, v) = \{a, c, 3ac - b\}$.

Les deux derniers niveaux sont donc en bijection. D'où la bijection entre l'arbre de Christoffel et l'arbre de Markoff. Ainsi, l'arbre de Markoff contient exactement une fois chaque triplet de Markoff. □

BIBLIOGRAPHIE

A.Markoff. 1879. « Sur les formes quadratiques binaires indéfinies », *Math. Ann.*, vol. 15, no3, p. 381–406.

———. 1880. « Sur les formes quadratiques binaires indéfinies », *Math. Ann.*, vol. 17, no3, p. 379–399.

Berstel, J. et A. de Luca. 1997. « Sturmian words, Lyndon words and trees », *Theoretical Computer Science*, vol. 178, p. 171–203.

Berstel, J., A. Lauve, C. Reutenauer, et F. V. Saliola. 2008. *Combinatorics on Words (CRM Monograph Series)*. American Mathematical Society.

Bombieri, E. 2007. « Continued fractions and the Markoff tree », *Expositiones Mathematicae*, vol. 25, p. 187–213.

Borel, J.-P. et F. Laubie. 1993. « Quelques mots sur la droite projective réelle », *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 5, no1, p. 23–51.

Christoffel, E. 1875. « Observatio arithmetica », *Annali di Matematica*, vol. 6, p. 145–152.

Cohn, H. 1979. « Growth types of Fibonacci and Markoff », *Fibonacci Quarterly*, vol. 17, no2, p. 178–183.

Cusick, T. et M. Flahive. 1989. *The Markoff and Lagrange spectra*. American Mathematical Society.

Fricke, R. 1896. « Über die theorie der automorphen modulgruppen », *Nach. Akag. Wiss. Göttingen*, p. 91–101.

Frobenius, G. 1968. *Gesammelte Abhandlungen*. T. 3. Springer Verlag.

Graham, R. L., D. E. Knuth, et O. Patashnik. 1994. *Concrete mathematics : A foundation for computer science*. Addison-Wesley Professional.

Lothaire, M. 2002. *Algebraic Combinatorics on words*. T. 90, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.

PlanetMath. Mis en ligne le 19 novembre 2002, consulté le 6 février 2009. "proof of Pick's theorem". http ://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfPicksTheorem.html.

Reutenauer, C. 2009. « Christoffel words and Markoff triples », *Integers*, vol. 9, p. 327–332.

Index