

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPROCHE COMBINATOIRE DES AMAS PAR LES
ÉLÉMENTS TRIÉS DES GROUPES DE COXETER

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN-PHILIPPE LABBÉ

AOÛT 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je désire tout d'abord remercier mon directeur Christophe Hohlweg. Il m'a initié à la théorie des groupes de Coxeter au tout début de ma maîtrise et j'en suis bien heureux, car j'ai découvert une théorie qui rassemble bien des notions qui m'intéressent. Je suis aussi reconnaissant pour son engagement dans mon apprentissage théorique et sa patience quant à mes réflexions et documents souvent chaotiques. Grâce à lui, j'ai fait la connaissance de professeurs allemands dont Carsten Lange et Günter Ziegler. J'ai abordé des notions importantes de mon mémoire avec Carsten Lange et donné un séminaire à l'Université Technique de Berlin organisé par Günter Ziegler lors d'un court séjour à Berlin au mois de février 2010. Ces rencontres ont eu un impact important pour ma compréhension de la théorie.

Je remercie profondément le professeur Srečko Brlek. D'abord, pour m'avoir donné l'occasion de faire de la recherche au LaCIM avant d'entamer ma maîtrise, pour sa générosité et sa présence dans des moments difficiles.

Merci à Lise Tourigny, secrétaire du LaCIM, avec qui j'ai eu d'innombrables discussions très agréables.

Je remercie aussi Jérôme Tremblay et Franco Saliola. Ils ont eu un impact important sur ma culture informatique. Grâce à eux, j'ai découvert et approfondi mes connaissances du logiciel Sage et de la librairie *TikZ*, avec laquelle j'ai créé les images de ce mémoire.

Je veux dire merci aux professeurs Christophe Reutenauer, François Bergeron et Pierre Bouchard pour leurs nombreux conseils et discussions mathématiques enrichissantes. Et un merci particulier aux professeurs Reutenauer et Bergeron de m'avoir épaulé dans mon travail de démonstrateur.

Merci au personnel du LaCIM pour leur accueil. Y vivre et y rechercher est une expérience des plus agréable.

Merci à Ariane Garon, Jonathan Lortie et Laure Lejeune, mes fidèles camarades d'études. J'ai beaucoup apprécié les moments en votre compagnie.

Merci à mes amis et particulièrement à Carolan, Guillaume, Philippe, Jean-Christophe, Quentin, Maxime, et Jean-Marie.

Merci à ma famille : Jean, Madeleine, Sébastien et mon deuxième frère Olaf. Merci pour votre appui constant et votre présence pour moi.

Finalement, merci à Stéphanie, pour sa présence dans ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xi
RÉSUMÉ	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
COMBINATOIRE DES GROUPES DE COXETER	5
1.1 Systèmes de racines et groupes de réflexions	6
1.2 Systèmes de Coxeter	14
1.3 Classification des groupes de Coxeter finis	23
1.4 Géométrie des groupes de Coxeter	27
1.5 Permutoèdre et treillis de l'ordre faible	35
CHAPITRE II	
ÉLÉMENTS TRIÉS ET ÉLÉMENTS SINGLETONS	39
2.1 Éléments de Coxeter	39
2.1.1 Généralités	39
2.1.2 Nouvelle caractérisation des éléments de Coxeter	41
2.1.3 Conjugaison circulaire	45
2.2 Éléments triés	49
2.3 Treillis Cambriens	52
2.4 Éléments singletons	55
CHAPITRE III	
AMAS ET ÉLÉMENTS TRIÉS	59
3.1 Historique	59
3.2 Les amas combinatoires	60
3.3 Correspondance de N. Reading	65
3.4 Démonstration de la correspondance de N. Reading	67
3.5 Énumération des éléments triés	70

CHAPITRE IV	
COMPLEXES DES AMAS ET ÉLÉMENTS SINGLETONS	73
4.1 Associaèdres généralisés	73
4.2 Complexes des amas	79
4.3 Réalisation du complexe des amas utilisant les éléments singletons	82
CONCLUSION	85
APPENDICE A	
TREILLIS CAMBRIENS	87
APPENDICE B	
NOMBRES DE COXETER-NARAYANA	89
INDEX	91
BIBLIOGRAPHIE	93

LISTE DES FIGURES

1.1	Groupe diédral	7
1.2	Groupe symétrique S_2	8
1.3	Groupe symétrique S_3	8
1.4	Groupe hyperoctaédral B_2	9
1.5	Groupe hyperoctaédral B_3	9
1.6	Quelques systèmes de racines	11
1.7	Système positif et négatif	12
1.8	Quelques systèmes de racines	13
1.9	Diagramme de Hasse de $A_2, I_2(4)$ et $I_2(\infty)$	21
1.10	Diagramme de Hasse de l'ordre faible et l'ordre d'inclusion des inversions	22
1.11	Graphes de Coxeter des groupes de Coxeter irréductibles finis	25
1.12	Graphes de Coxeter des groupes de Coxeter affines	26
1.13	Simplexes de basses dimensions	28
1.14	Réalisation simpliciale de complexes abstraits	29
1.15	Treillis faciaux	29
1.16	Complexe dual	31
1.17	Charpente de dimension 1 d'un complexe	31

1.18	Chambre du groupe A_2	33
1.19	Complexe de Coxeter de A_2 et B_2	34
1.20	Complexe de Coxeter de A_3 et B_3	34
1.21	Treillis de l'ordre faible et Permutoèdre de A_2	36
1.22	Treillis de l'ordre faible et Permutoèdre de A_3	37
2.1	Treillis Cambrien de A_2	53
2.2	Treillis Cambrien de A_3 , $c = s_1 s_2 s_3$	53
2.3	Treillis Cambrien de A_3 , $c = s_2 s_1 s_3$	54
2.4	Treillis des singletons de A_2	56
2.5	Treillis des singletons de A_3	57
4.1	Bijection entre triangulation et parenthésage	75
4.2	Triangulations du pentagone et parenthésages de $abcd$	76
4.3	Réalisation polytopale de l'associaèdre de C. H. Lee	76
4.4	Réalisation polytopale du cycloèdre B_2	77
4.5	Charpente de dimension 1 du cycloèdre B_3	77
4.6	Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta(A_3)$	78
4.7	Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_1 s_2}(A_3)$	80
4.8	Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_1 s_2 s_3}(A_3)$	80
4.9	Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_2 s_1 s_3}(A_3)$	81
4.10	Réalisation polytopale du complexe des amas $\nabla_{s_1 s_2 s_3}(A_3)$	83

4.11 Réalisation polytopale du complexe des amas $\nabla_{s_2s_1s_3}(A_3)$	84
A.1 Treillis Cambrien de A_3 , $c = s_1s_2s_3$	87
A.2 Treillis Cambrien de A_3 , $c = s_2s_1s_3$	88

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Tableaux d'invariants de groupe de Coxeter irréductible fini	41
3.1	Nombres de Coxeter-Catalan	70
3.2	Nombres de Coxeter-Catalan positifs	71
4.1	Nombres de Catalan	74
B.1	Nombres de Coxeter-Narayana	89

RÉSUMÉ

La combinatoire de Coxeter-Catalan est très jeune. Elle s'est développée dans les deux dernières décennies en lien avec des phénomènes combinatoires reliés aux nombres de Catalan. Entre autres, elle permet d'interpréter certains résultats de la théorie des algèbres amassées, une théorie très vivante ces dernières années. En 2007, N. Reading a donné une interprétation combinatoire des générateurs des algèbres amassées – les *amas* – à l'aide des groupes de Coxeter et certains éléments – appelés *éléments triés* – ayant des propriétés combinatoires particulières. Le présent texte rassemble les notions essentielles sur les groupes de Coxeter et la combinatoire sous-jacente, afin de démontrer l'interprétation de N. Reading et d'illustrer certaines conséquences de celle-ci. Tout en introduisant les notions, une attention particulière est accordée à la perspective actuelle des résultats et au cheminement de ceux-ci. Le texte est parsemé d'images pour un apport visuel accru. Celles-ci ont été réalisées à l'aide de la librairie *TikZ* de \LaTeX .

INTRODUCTION

Durant l'année 2000, afin d'étudier les bases canoniques duales et la positivité totale dans les groupes semi-simples, S. Fomin et A. Zelevinsky ont initié l'étude d'une nouvelle classe d'algèbres commutatives, nommément les *algèbres amassées* (cf. (Fomin et Zelevinsky, 2002)). Après quoi, ils ont introduit un *complexe simplicial* appelé *associaèdre généralisé* ; il est utilisé pour classifier les algèbres amassées de *type fini* (cf. (Fomin et Zelevinsky, 2003a) et (Fomin et Zelevinsky, 2003b)). L'associaèdre a d'abord été introduit par J. Stasheff, c'est pourquoi on l'appelle aussi polytope de Stasheff. Il s'avère que la classification des algèbres amassées de type fini est nul autre que la classification de Cartan-Killing pour les algèbres de Lie semi-simples. Ensuite, F. Chapoton, S. Fomin et A. Zelevinsky ont donné une réalisation polytopale du complexe simplicial ; auparavant, plusieurs réalisations avaient été produites pour les types A et B (cf. (Chapoton, Fomin et Zelevinsky, 2002) et les références incluses). En 2005, N. Reading a amorcé l'étude des congruences dans les *treillis* de l'ordre faible des groupes de Coxeter. Ces congruences donnent naissance aux treillis Cambriens, une généralisation des treillis de Tamari, (cf. (Reading, 2005a),(Reading, 2005b)). Par la suite, il a émis la conjecture qu'il existe, pour chaque treillis Cambrien, un polytope possédant sa structure combinatoire (cf. (Reading, 2006)). Subséquemment, dans le but de relier les « partitions non croisées » aux *amas* (les générateurs des algèbres amassées), il a introduit certains éléments - appelés *éléments triés* - des groupes de Coxeter (cf. (Reading, 2007a)). Ces éléments sont nuls autres que les éléments formant les treillis Cambriens (cf. (Reading, 2007b)). C. Hohlweg et C. Lange ont ensuite construit un polytope simple, appelé *associaèdre Coxeter-généralisé*, d'abord pour le type A et B (cf. (Hohlweg et Lange, 2007)) et ensuite pour chaque type avec l'aide de H. Thomas (cf. (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007)). Cet associaèdre Coxeter-généralisé, qui résout la conjecture de N. Reading, possède la combinatoire de l'associaèdre généralisé de S. Fomin et A. Zelevinsky, ce qui ouvre la porte à une étude

plus approfondie de l'associaèdre à l'aide de la combinatoire des groupes de Coxeter.

En 2003, R. Marsh, M. Reineke et A. Zelevinsky ont donné une interprétation de l'associaèdre généralisé via la représentation des carquois (cf. (Marsh, Reineke et Zelevinsky, 2003)). Alternativement, la construction de C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas fait appel à certains éléments triés appelés éléments *singletons* (faisant référence à la congruence de N. Reading). Ils ont obtenu une définition simple de ces éléments en utilisant une écriture particulière de l'élément le plus long pour un groupe fixé. Cette définition permet d'amorcer l'étude de l'associaèdre généralisé, et par conséquent des algèbres amassées, en utilisant seulement la combinatoire des groupes de Coxeter et les récents développements découlant de cette approche. Sur cette base, ce mémoire propose une introduction aux amas à l'aide de la combinatoire des groupes de Coxeter. D'un point de vue global, il constituerait un point de départ pour l'étude générale des algèbres amassées par la théorie des groupes de Coxeter, laquelle reste encore à faire.

Le mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, les groupes de Coxeter sont présentés suivant les livres de J. Humphreys (Humphreys, 1992) et A. Björner et F. Brenti (Björner et Brenti, 2005). Les systèmes de racines et les groupes de réflexions sont d'abord introduits. Diverses notions combinatoires et géométriques sont présentées en deuxième lieu, dont les mots réduits, l'ordre faible et le permutoèdre. Les lecteurs familiers avec les groupes de Coxeter peuvent parcourir rapidement le premier chapitre et s'y référer au besoin. Le deuxième chapitre présente d'abord les éléments de Coxeter et ensuite les développements récents de N. Reading dans la combinatoire des groupes de Coxeter essentiels pour la suite du mémoire (cf. (Reading, 2007a), (Reading, 2007b)). Afin d'introduire simplement la théorie, les définitions adoptées suivront l'article de C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas, bien que N. Reading ait introduit certaines notions. Le troisième chapitre porte sur la correspondance de N. Reading entre les amas et les éléments triés (cette correspondance est présentée dans l'article (Reading, 2007a)). D'abord, les algèbres amassées sont présentées concisément (cf. (Fomin et Zelevinsky, 2003a), (Fomin et Reading, 2007), (Reading, 2007a)). Puis, les résultats nécessaires à la correspondance sont exposés. Par la suite, la démonstration de la correspondance de N.

Reading est abordée en détails. Enfin, quelques conséquences de la correspondance sont explicitées, telle l'énumération des éléments triés et la réinterprétation des amas via les éléments triés. Finalement, le dernier chapitre explore la construction du complexe des amas à l'aide des éléments singletons obtenus par C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas (cf. (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007)). Pour ce faire, l'associaèdre et le complexe des amas sont présentés suivant une perspective historique (cf. (Stasheff, 1963), (Fomin et Reading, 2007), (Fomin et Zelevinsky, 2003b), (Reading, 2006), (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007)). En définitive, les amas et le complexe associé auront été exposés grâce à la combinatoire des groupes de Coxeter. Tout le long du mémoire, des remarques accompagnent le texte afin de donner un aperçu actuel de la théorie.

Pour faciliter la lecture, des conventions d'écriture sont utilisées dans le texte : les termes non définis apparaissent entre guillemets « », les termes restant à définir apparaissent en *italique* et les termes définis apparaissent en caractère sans-sérial.

CHAPITRE I

COMBINATOIRE DES GROUPES DE COXETER

L'objectif de ce chapitre est de fournir une introduction générale à la théorie des groupes de Coxeter. Nous présentons ici plusieurs notions de base. Dans cette section, la plupart des résultats sont présentés sans démonstration ; nous réservons l'usage de celle-ci lorsqu'elle présente un intérêt particulier pour la compréhension du lecteur ou pour la suite du texte. Ce chapitre s'adresse particulièrement aux lecteurs non familiers qui désirent connaître les fondements de cette théorie. Nous conseillons aux néophytes de bien assimiler cette section avant de poursuivre la lecture. De plus, ceux qui désirent explorer davantage ces résultats peuvent le faire en consultant d'abord le livre de J. Humphreys (Humphreys, 1992) qui présente une introduction approfondie des groupes de réflexions et de la théorie générale des groupes de Coxeter avec plusieurs exercices éducatifs. Ensuite, les lecteurs pourront approfondir davantage avec le livre de A. Björner et F. Brenti (Björner et Brenti, 2005) exposant la combinatoire des groupes de Coxeter en plus d'y inclure des problèmes plus complexes et des problèmes ouverts. Pour les lecteurs aguerris, ce présent chapitre leur rappellera la théorie et établira les conventions utilisées tout le long du texte. Ces derniers lecteurs peuvent passer rapidement sur ce chapitre et s'y référer ultérieurement. La première section explore les systèmes de racines ; l'outil combinatoire classique pour étudier les groupes de réflexions. Ensuite, les deux sections suivantes introduisent les systèmes de Coxeter et leurs classifications. Les résultats de ces trois premières sections sont présentés à la manière du livre de J. Humphreys cité ci-dessus et de la section 2.1 et 2.2 de la thèse de D. Armstrong (Armstrong, 2009). La

quatrième section a pour titre « Géométrie des groupes de Coxeter ». Dans cette section, nous désirons apporter aux lecteurs une intuition géométrique des groupes de Coxeter souvent laissée de côté au profit du langage des groupes. L'outil principal présenté est le *complexe simplicial* et sa réalisation géométrique. Le récent livre de A. V. et A. Borovik (Borovik et Borovik, 2009) ramène une perspective géométrique à la théorie des groupes de réflexions que nous tenterons de présenter. Finalement, le chapitre s'achève par la présentation du permutoèdre, un objet géométrique renfermant plusieurs informations importantes d'un groupe de réflexions.

1.1 Systèmes de racines et groupes de réflexions

Tout d'abord, fixons quelques conventions afin d'aborder le sujet. L'ensemble des nombres réels, des nombres rationnels, des nombres entiers et naturels sont notés par \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} et \mathbb{N} respectivement. Nous notons par $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Notre étude se situe principalement dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. Nous utilisons la lettre n pour la dimension de l'espace V , ainsi $n \in \mathbb{N}$. Nous écrivons les vecteurs de V en utilisant l'alphabet grec $\{\alpha, \beta, \lambda, \dots\}$ et 0 désignera l'origine de V . L'espace V est muni d'une forme bilinéaire (\cdot, \cdot) symétrique et définie positive, ce qui fait du couple $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace euclidien réel. Dans l'intention d'alléger l'écriture, nous désignerons l'espace euclidien par V .

Une réflexion est un endomorphisme linéaire s_α de V qui associe à un certain vecteur α , son opposé $-\alpha$ et qui fixe l'hyperplan $\mathcal{H}_\alpha := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$ orthogonal à α . Par abus de notation, nous noterons parfois $s = s_\alpha$. La formule pour une réflexion s_α est

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Cette formule nous permet de vérifier rapidement que les réflexions sont des transformations orthogonales, c'est-à-dire que $(s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\mu)) = (\lambda, \mu)$ pour tout $\lambda, \mu \in V$. De plus, nous vérifions par le calcul que les réflexions sont des involutions, donc des éléments d'ordre deux dans le groupe $O(V)$ des transformations orthogonales de V . Naturellement, nous appelons groupes de réflexions les sous-groupes de $O(V)$ engendrés par des réflexions

et nous les noterons¹ par W . Nous adopterons la notation e pour identifier l'identité de W .

Nous présentons immédiatement quelques groupes de réflexions qui serviront d'exemples à plusieurs reprises durant le texte.

Exemple 1.1 (Type $I_2(m)$, $(m \geq 3)$) Le groupe diédral $D(m)$ ($m \geq 3$) formé des transformations orthogonales qui préserve un polygone régulier à m côtés dans le plan (voir la figure 1.1). Le groupe $D(m)$ possède m rotations et m réflexions selon les axes de symétrie du polygone. Les rotations sont engendrées par la rotation ρ d'angle $2\pi/m$. La rotation ρ s'obtient par la composition de deux réflexions dont les axes de symétrie forment un angle de π/m . Ainsi, le groupe diédral est un groupe de réflexions.

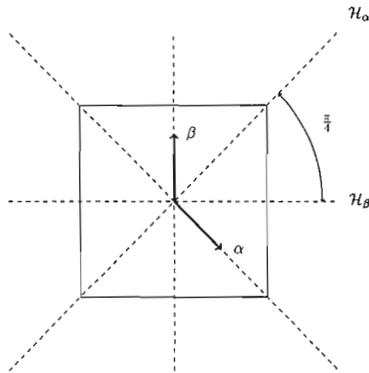


Figure 1.1 Le groupe diédral $D(4)$ engendré par deux réflexions d'hyperplan \mathcal{H}_α et \mathcal{H}_β .

Exemple 1.2 (Type A_{n-1} , $(n \geq 2)$) Le groupe symétrique S_n agit sur l'espace V en permutant les vecteurs $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ d'une base de V . Le groupe symétrique est engendré par des réflexions de la façon suivante : la transposition $(i, i+1)$ (avec $1 \leq i \leq n-1$) envoie le vecteur $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ à son vecteur opposé $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ et fixe l'hyperplan orthogonal à ce vecteur. Puisque les transpositions $(i, i+1)$ génèrent le groupe symétrique,

1. La plupart des groupes de réflexions sont en fait des groupes de Weyl, qui sont reliés à l'étude des algèbres de Lie semi-simples

le groupe symétrique est alors un groupe de réflexions. Les figures 1.2 et 1.3 illustrent les hyperplans qui engendrent les groupes symétriques S_2 et S_3 .

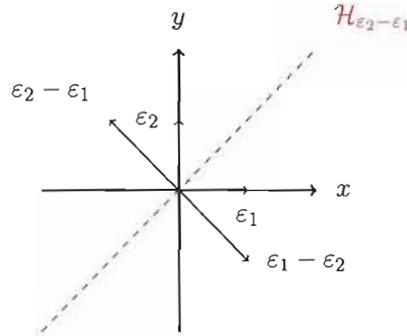


Figure 1.2 Le groupe symétrique S_2 engendré par la réflexion selon l'hyperplan $\mathcal{H}_{\epsilon_2 - \epsilon_1}$.

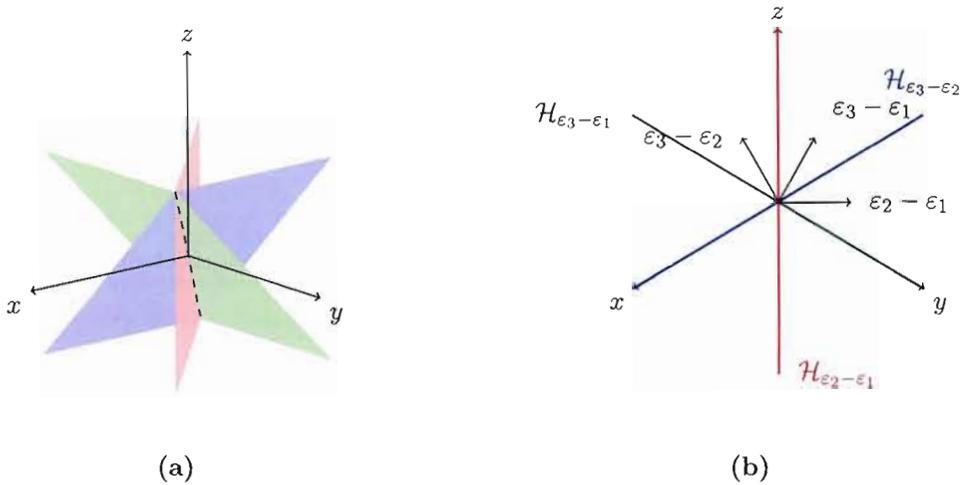


Figure 1.3 Le groupe symétrique S_3 est engendré par trois hyperplans. Dans la figure (a), nous voyons que la droite en pointillé reste fixe lorsque S_3 agit sur \mathbb{R}^3 . Dans la figure (b), nous voyons les trois hyperplans en regardant par la droite $x = y = z$. En général, S_n fixe toujours la droite $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, c'est pourquoi nous considérons l'action de S_n dans un espace de dimension $n - 1$, expliquant la notation A_{n-1} .

Exemple 1.3 (Type $B_n, (n \geq 2)$) Le groupe hyperoctaédral $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ s'obtient à partir de S_n en ajoutant les réflexions associant au vecteur ϵ_i , son vecteur opposé $-\epsilon_i$

(voir les figures 1.4 et 1.5).

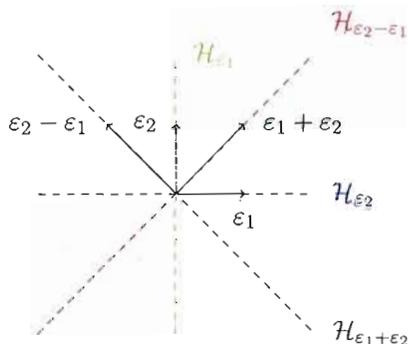


Figure 1.4 Le groupe hyperoctaédral B_2 est engendré par les réflexions selon les hyperplans $\mathcal{H}_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}$ et $\mathcal{H}_{\varepsilon_2}$. Il possède 4 réflexions.

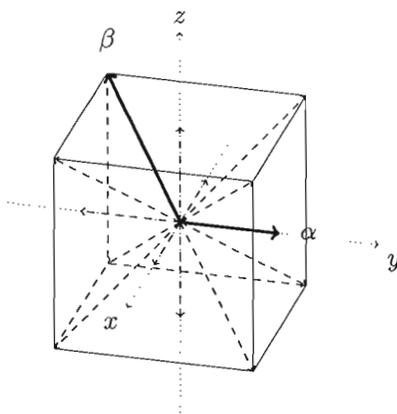


Figure 1.5 Le groupe hyperoctaédral B_3 est engendré par les réflexions selon les hyperplans $\mathcal{H}_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_2}$ et $\mathcal{H}_{\varepsilon_3}$. Il possède 9 réflexions.

En général, le nombre de réflexions d'un groupe de réflexions W est beaucoup plus grand que le nombre de réflexions qui génèrent le groupe. L'exemple 1.1 du groupe diédral témoigne bien de ce fait, car il est engendré par deux réflexions, mais il possède m réflexions. Le lemme suivant, présent à la section 1.2 du livre (Humphreys, 1992), nous aide à reconnaître toutes les réflexions d'un groupe.

Lemme 1.4 Si $t \in O(V)$ et α est un vecteur non nul de V , alors $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$.

En particulier, si W est engendré par un ensemble de réflexions S , alors les réflexions de W sont données par $T := \{wsw^{-1} | w \in W, s \in S\}$. À l'origine, les *systèmes de racines* ont été utilisés par É. Cartan et W. Killing pour classifier les algèbres de Lie semi-simples. Alternativement, ils permettent de caractériser les groupes engendrés par des réflexions, puisque ceux-ci sont caractérisés par les vecteurs utilisés pour les réflexions. Ces vecteurs forment un système de racines.

Définition 1.5 Un système de racines Φ est un ensemble fini de vecteurs non nuls de V satisfaisant les conditions :

$$(R1) \quad \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\} \text{ pour tout } \alpha \in \Phi;$$

$$(R2) \quad s_\alpha \Phi = \Phi \text{ pour tout } \alpha \in \Phi.$$

Les éléments de Φ sont alors appelés des racines.

Remarque 1.6 Il est possible d'ajouter la condition suivante pour obtenir un système de racines cristallographiques :

$$(R3) \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \Phi.$$

Exemple 1.7 Voici quelques systèmes de racines (voir la figure 1.6).

$$(a) \text{ Type } A_1 : \quad \Phi = \{\alpha, -\alpha\}, \text{ avec } \alpha \in V;$$

$$(b) \text{ Type } A_2 : \quad \Phi = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, -\alpha, -\beta, -\alpha - \beta\}, \text{ avec } \alpha, \beta \text{ de même longueur dans } V \\ \text{et formant un angle de } 2\pi/3.$$

$$(c) \text{ Type } B_2 : \quad \Phi = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, -\alpha, -\beta, -\alpha - \beta, -2\alpha - \beta\}, \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \in V \\ \text{formant un angle de } 3\pi/4 \text{ et tels que } \sqrt{2}|\alpha| = |\beta|.$$

Étant donné un système de racines Φ , considérons le groupe W engendré par les réflexions s_α avec $\alpha \in \Phi$. Nous dirons que W est le groupe de réflexion associé au système de racines Φ . Si la cardinalité de Φ est finie, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que le groupe W est fini puisqu'il est un sous-groupe du groupe des permutations

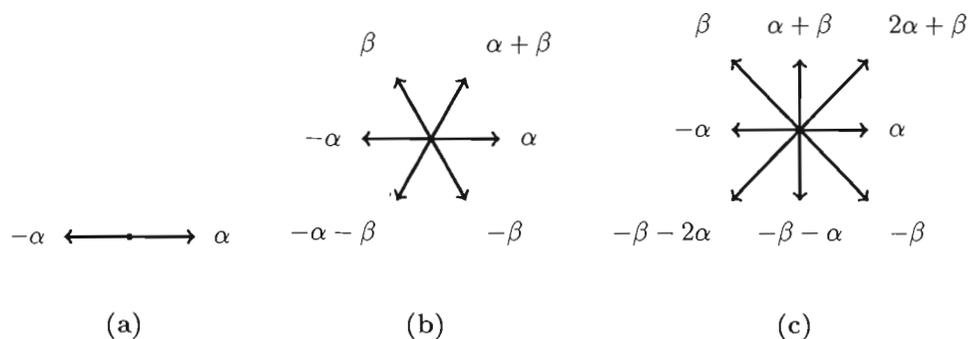


Figure 1.6 Quelques systèmes de racines : (a) Type A_1 (b) Type A_2 (c) Type B_2 .

de l'ensemble Φ . À partir d'un système de racines Φ , nous obtenons un groupe de réflexions W ; inversement tout groupe de réflexions s'obtient de cette façon.

Lemme 1.8 Soit $W \leq O(V)$ un groupe de réflexions et T son ensemble de réflexions, alors il existe un système de racines Φ tel que les réflexions s_α avec $\alpha \in \Phi$ sont précisément les réflexions de T .

Ce lemme (présent par exemple dans le livre (Humphreys, 1992) à la section 1.2) nous permet essentiellement d'étudier les groupes de réflexions à l'aide des systèmes de racines. En affirmant que deux systèmes de racines sont isomorphes s'ils sont reliés par des transformations orthogonales ou par des homothéties, nous faisons correspondre bijectivement les classes d'isomorphisme des groupes de réflexions aux classes d'isomorphisme de systèmes de racines. Ainsi, pour classifier les groupes de réflexions, il suffit de classifier les systèmes de racines. Pour ce faire, nous avons besoin de deux notions plus fines associées aux systèmes de racines :

Étant donné un système de racines Φ et un hyperplan \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap \Phi = \{0\}$, l'hyperplan \mathcal{H} partitionne l'ensemble Φ en deux sous-ensembles,

$$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-.$$

Nous appelons les racines de Φ^+ (respectivement de Φ^-) les racines positives (resp. les

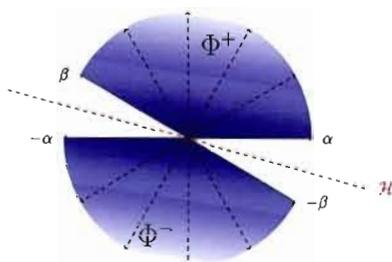


Figure 1.7 Division d'un système de racines en système positif et négatif.

racines négatives) et Φ^+ un système positif. À l'aide de Φ^+ , nous créons l'ensemble $C(\Phi^+)$ des vecteurs égaux à une combinaison linéaire positive des vecteurs de Φ^+ ;

$$C(\Phi^+) := \{ \lambda \in V \mid \lambda = \sum_{\alpha_i \in \Phi^+} c_i \alpha_i, \text{ où } c_i > 0 \}.$$

L'ensemble $C(\Phi^+)$ forme ce qu'on appelle un « cône »². La figure 1.7 montre le cône $C(\Phi^+)$ et le cône $C(\Phi^-)$ en teinte bleutée. Le cône $C(\Phi^-)$ est en fait l'ensemble des vecteurs opposés $-C(\Phi^+)$ de $C(\Phi^+)$. Par la définition de $C(\Phi^+)$ et $C(\Phi^-)$, nous déduisons que le système de racines Φ est contenu dans l'union du cône $C(\Phi^+)$ et $-C(\Phi^+) = C(\Phi^-)$. Maintenant, considérons un ensemble Δ des racines de Φ^+ qui forme une base de la frontière de $C(\Phi^+)$. Assez intuitivement, cet ensemble Δ engendre le cône $C(\Phi^+)$.

Lemme 1.9 L'ensemble $\Delta \subset \Phi^+$ est un système simple pour Φ :

- (i) chaque racine de Φ s'exprime comme une combinaison linéaire de racines dans Δ dont les coefficients sont tous positifs ou tous négatifs ;
- (ii) Δ est une base du sous-espace vectoriel de V engendré par Φ .

Pour démontrer que Δ satisfait le lemme, on démontre d'abord que l'angle entre deux racines de Δ est obtus et ensuite que les racines de Δ sont linéairement indépendantes. Les détails de cette démonstration sont présents dans la section 8.4 du livre (Borovik

2. Pour la définition formelle d'un cône polyédral, voir le livre de Günter Ziegler (Ziegler, 1995)

et Borovik, 2009). Si $\alpha \in \Delta$, la réflexion $s_\alpha \in W$ est appelée réflexion simple et la cardinalité de l'ensemble Δ est appelée le rang de Φ . Étant donné un système positif Φ^+ , l'ensemble Δ est uniquement déterminé. La réciproque est vraie, à chaque système simple correspond un unique système positif Φ^+ . La démonstration de l'unicité est présentée dans la section 1.3 du livre (Humphreys, 1992).

Exemple 1.10 Le système de racines (a) de la figure 1.6 est de rang 1. Les systèmes de racines (b) et (c) de la figure 1.6 quant à eux sont de rang 2 avec système simple $\Delta = \{\alpha, \beta\}$. Les systèmes de racines de la figure 1.8 constituent les seuls autres systèmes de racines cristallographiques de rang 2. De même, ils ont comme système simple l'ensemble $\Delta = \{\alpha, \beta\}$.

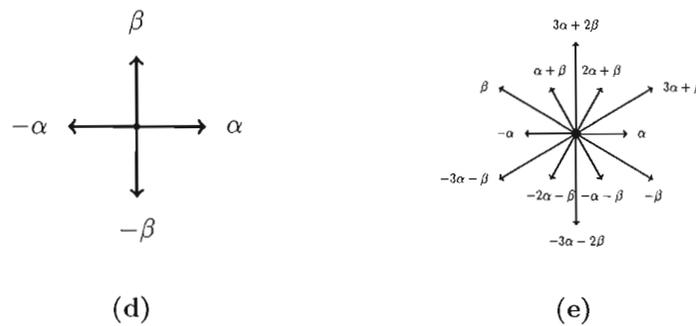


Figure 1.8 Quelques systèmes de racines : (d) Type $A_1 \times A_1$ (e) Type $I_2(6)$.

Voici d'autres résultats importants concernant les systèmes positifs et simples présents dans les sections 1.4 et 1.5 du livre (Humphreys, 1992).

Théorème 1.11 Deux systèmes positifs (resp. simples) de Φ sont conjugués par W .

Théorème 1.12 Soit Δ un système simple associé à un système de racines Φ . Le groupe de réflexions W associé à Φ est engendré par les réflexions s_α avec $\alpha \in \Delta$.

Ainsi, nous pouvons interpréter les systèmes simples comme un ensemble de générateurs du groupe W . C'est ce qui nous amène à la prochaine section, dans laquelle nous verrons

une présentation des systèmes de Coxeter.

1.2 Systèmes de Coxeter

Nous poursuivons notre histoire en abordant les systèmes de Coxeter. Nous verrons rapidement que ces systèmes sont intimement liés aux systèmes de racines. Considérons un groupe W engendré par un certain ensemble fini d'éléments S suivant les relations :

$$(st)^{m(s,t)} = e,$$

où $m(s,s) = 1, m(s,t) = m(t,s) \in \{2, 3, 4, \dots, \infty\} \quad \forall s \neq t \in S$. Nous lui donnons souvent la présentation suivante :

$$\langle S : (st)^{m(s,t)} = e \quad \forall s, t \in S \rangle.$$

Si $m(s,t) = \infty$, cela veut dire qu'il n'y a pas de relation pour l'élément st . Nous remarquons rapidement que si $m(s,t) = 2$, les générateurs s et t commutent. De plus, si on suppose que chaque élément s n'est pas égal à e , alors $m(s,t)$ est exactement l'ordre de l'élément st . Si un groupe W engendré par un ensemble S respecte ces conditions, le groupe W est appelé un groupe de Coxeter, la matrice symétrique $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ est appelée matrice de Coxeter. Le rang d'un groupe de Coxeter est le nombre d'éléments de S .

Exemple 1.13 (Type $I_2(m), (m \geq 3)$) Le groupe diédral est un groupe de Coxeter. Il se réalise de la façon suivante :

$$\langle s, t : s^2 = t^2 = (st)^m = e \rangle.$$

La matrice de Coxeter de $I_2(m)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.14 (Type $I_2(\infty)$) Le groupe diédral infini est un groupe de Coxeter. Il se réalise de la façon suivante :

$$\langle s, t : s^2 = t^2 = e \rangle.$$

La matrice de Coxeter de $I_2(\infty)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.15 (Type A_{n-1} , $(n \geq 2)$) Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter. Les transpositions composent son ensemble de générateurs. On note $s_i = (i, i + 1)$ pour $i \in \{1, n - 1\}$, et S devient $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ et obéissant aux relations :

$$\begin{aligned} s_i^2 &= e & \forall i \in \{1, \dots, n - 1\} \\ (s_i s_{i+1})^3 &= e & \forall i \in \{1, 2, \dots, n - 2\} \\ (s_i s_j)^2 &= e & \text{si } |i - j| \geq 2. \end{aligned}$$

La matrice de Coxeter de dimension $n - 1 \times n - 1$ de A_{n-1} est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \cdots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étant donné un groupe de Coxeter W , si nous pouvons partitionner l'ensemble S en deux sous-ensembles S_1 et S_2 tels que les éléments de S_1 commutent avec tous les éléments de S_2 , alors le groupe W est réductible, auquel cas,

$$W = \langle S_1 \rangle \times \langle S_2 \rangle, \quad \text{où } \langle S_1 \rangle \text{ et } \langle S_2 \rangle \text{ sont deux groupes de Coxeter.}$$

Sinon, W est irréductible. L'exemple suivant nous montre qu'un groupe de Coxeter peut posséder plus d'une représentation à l'aide d'un ensemble de générateurs, c'est pourquoi nous parlons d'un système de Coxeter (W, S) , au lieu du seul groupe de Coxeter W .

Exemple 1.16 Le groupe diédral à 12 éléments se réalise de deux façons différentes comme un groupe de Coxeter :

$$\langle s, t : s^2 = t^2 = (st)^6 = e \rangle,$$

$$\langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (ac)^2 = (bc)^2 = e \rangle.$$

Le premier est irréductible de rang 2 et on le note $I_2(6)$. Le second est réductible de rang trois et est isomorphe au produit direct $A_1 \times A_2$.

Afin de montrer que les groupes de Coxeter sont en fait des groupes de réflexions d'un espace euclidien, nous allons construire une *représentation géométrique* pour chaque groupe.

Étant donné un système de Coxeter (W, S) , fixons un espace euclidien réel V engendré par des vecteurs $\{\alpha_s | s \in S\}$ et ayant la forme bilinéaire symétrique

$$B(\alpha_s, \alpha_t) := -\cos \frac{\pi}{m(s, t)},$$

définie pour chaque paire dans $S \times S$ et en fixant $B(\alpha_s, \alpha_t) = -1$ si $m(s, t) = \infty$. Maintenant, pour chaque générateur $s \in S$, nous définissons la transformation linéaire de V ,

$$\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s.$$

nous l'appelons *réflexion simple*, pour une raison qui devrait sembler évidente dans quelques lignes.

Maintenant, la représentation géométrique est

$$\begin{aligned} \rho : W &\hookrightarrow GL(V) \\ s &\mapsto \sigma_s. \end{aligned}$$

L'étape plus difficile de la construction consiste à montrer que cette représentation est « fidèle » (ρ définit un homomorphisme injectif). De plus, l'image est un sous-groupe de $O(V)$, c'est-à-dire que les transformations linéaires conservent la forme bilinéaire B . Finalement, cette représentation est « irréductible » (V ne possède pas de sous-espace fixé par l'action de W). Pour simplifier la notation, nous notons par W l'image $\rho(W)$ et $w(\alpha)$ au lieu de $\rho(w)(\alpha)$. Ainsi, le groupe W est isomorphe à un sous-groupe de $O(V)$.

Mais, rappelons-nous, que les générateurs de W sont des involutions, donc le groupe W est un groupe de réflexions. L'image des générateurs $s \in S$ forme un système simple pour le système de racines associé. Nous venons d'esquisser les grandes lignes de la démonstration du fait que les groupes de Coxeter sont des groupes de réflexions. En 1934, suivant le travail de A. Möbius, L. Schläfli, É. Goursat et É. Cartan, H. Coxeter a démontré que les groupes de réflexions sont aussi des groupes de Coxeter (cf. le théorème 8 de l'article (Coxeter, 1934)). Pour un historique détaillé sur les groupes engendrés par des réflexions, nous conseillons la lecture du chapitre 26 du livre de N. Bourbaki (Bourbaki, 1974).

Il existe un outil bien utile pour représenter un groupe de Coxeter : le *graphe de Coxeter*. Nous repoussons à la prochaine section l'exposition de la classification des groupes qui s'appuie sur les graphes de Coxeter. Pour la suite de cette section, nous nous attardons à la présentation de la combinatoire des éléments des groupes de Coxeter.

À partir de maintenant, nous supposons que le groupe W et l'ensemble de générateurs S sont finis, excepté lorsque mentionné explicitement. Étant donné un système de Coxeter (W, S) , chaque élément $w \in W$ s'écrit comme un produit de générateurs de S , disons $w = s_1 s_2 \dots s_r$, avec $s_i \in S$, que nous appellerons mot ou expression. Le plus petit entier r pour lequel une telle expression existe est appelé la longueur de w et nous le notons $\ell(w)$. Par convention, $\ell(e) = 0$. De plus, si $r = \ell(w)$, nous appelons le mot $s_1 s_2 \dots s_r$ une expression réduite pour w .

L'ensemble des inversions (à gauche) d'un élément w est l'ensemble $T(w) := \{t \in T \mid \ell(tw) < \ell(w)\}$ et l'ensemble des descentes (à droite) de w est l'ensemble $D(w) = T(w^{-1}) \cap S = \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$. Une réflexion descendante d'un élément w est une réflexion $t \in T$ telle que $tw = ws$ pour une certaine descente s de w . Le lemme suivant est présent à la section 1.3 du livre (Björner et Brenti, 2005).

Lemme 1.17 Étant donné une expression $s_1 s_2 \dots s_k$ avec les $s_i \in S$, on définit les réflexions $t_i := s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1$ pour $1 \leq i \leq k$. Si $w = s_1 s_2 \dots s_k$ est une expression réduite de w , alors $t_i \neq t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq k$.

Voici quelques propriétés de la fonction longueur. Voir par exemple la section 1.4 du livre (Björner et Brenti, 2005).

Proposition 1.18 Étant donnés $u, w \in W$, on a

- (i) $\ell(uw) \equiv \ell(u) + \ell(w) \pmod{2}$;
- (ii) $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$, pour tout $s \in S$;
- (iii) $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$;
- (iv) $\ell(s) = 1 \Leftrightarrow s \in S$;
- (v) $\ell(u) - \ell(w) \leq \ell(uw) \leq \ell(u) + \ell(w)$;

Proposition 1.19 Si $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ est une expression réduite et $t \in T$, alors les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) $\ell(tw) < \ell(w)$;
- (ii) $tw = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$, pour un certain indice $i \in [k]$, où le chapeau désigne l'omission du terme surmonté ;
- (iii) $t = t_i$, pour un certain indice $i \in [k]$ (cf. lemme 1.17).

De plus, l'entier i est unique dans les énoncés (ii) et (iii).

Corollaire 1.20 Soit $w \in W$. Alors, $\ell(w) = |T(w)|$.

Exemple 1.21 Les éléments du groupe symétrique A_2 possèdent les expressions réduites suivantes $\{e, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2\}$. L'ensemble des réflexions de A_2 est $T = \{s_1, s_2, s_1 s_2 s_1\}$. La longueur d'un élément est donnée par son nombre d'inversions.

$$\begin{aligned}
 T(e) &= \{\} \\
 T(s_1) &= \{s_1\} \\
 T(s_2) &= \{s_2\} \\
 T(s_1 s_2) &= \{s_1, s_1 s_2 s_1\} \\
 T(s_2 s_1) &= \{s_2, s_1 s_2 s_1\} \\
 T(s_1 s_2 s_1) &= \{s_1, s_2, s_1 s_2 s_1\}.
 \end{aligned}$$

Les groupes de Coxeter possèdent deux propriétés exceptionnelles : la propriété d'échange et la propriété de réduction.

CONDITION D'ÉCHANGE. Étant donné une expression réduite $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ avec $s_i \in S$ et un élément $s \in S$. Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors $sw = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$.

CONDITION DE RÉDUCTION. Si $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ et $\ell(w) < r$, alors il existe des indices $1 \leq i < j \leq r$ telles que $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r$.

Ces deux conditions sur des mots formés sur un ensemble de générateurs sont à leurs tours deux autres façons équivalentes de décrire les groupes de Coxeter (voir par exemple la section 1.5 du livre (Björner et Brenti, 2005)).

Théorème 1.22 Les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) (W, S) est un système de Coxeter ;
- (ii) (W, S) possède la propriété d'échange ;
- (iii) (W, S) possède la propriété de réduction.

À l'aide de la représentation géométrique, chaque élément $w \in W$ peut être vu comme une permutation des racines du système de racines Φ associé à W . En fait, il est possible d'interpréter la fonction longueur $\ell : W \mapsto \mathbb{N}$ à l'aide de cette représentation (voir la section 5.6 du livre (Humphreys, 1992)).

Proposition 1.23 On se donne un système de Coxeter (W, S) et un système positif Φ^+ associé aux racines simples $\{\alpha_s | s \in S\}$. Alors, pour tout $w \in W$, la longueur de w , $\ell(w)$, est donnée par

$$\ell(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ | w(\alpha) \in \Phi^-\}|.$$

Autrement dit, la longueur de w est donnée par le nombre de racines positives envoyées par w sur des racines négatives.

L'action du groupe W sur les systèmes simples (ou positifs) de Φ est simplement transitive, c'est-à-dire que chaque système simple est envoyé sur un autre via l'action d'un unique

élément de W . Pour les détails de ce résultat, voir la section 1.8 du livre (Humphreys, 1992). Si W est fini, il existe un unique élément $w_o \in W$ qui envoie Φ^+ sur Φ^- . Cet élément est de longueur maximale, car $\ell(w_o) = |\Phi^+|$. En particulier, $w_o = w_o^{-1}$, car c'est le seul élément de cette longueur.

Exemple 1.24 Pour le groupe A_2 , nous avons vu à l'exemple 1.21 que $w_o = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. L'élément le plus long du groupe diédral $I_2(6)$ est $w_o = ststst = tststs$.

Nous venons de voir que dans un groupe de Coxeter fini, il existe un élément de longueur maximale w_o . Nous avons déjà un élément de longueur minimale en l'identité e . Les informations, telle la longueur, concernant les éléments d'un groupe se figurent à l'aide d'ordres partiels. Les éléments d'un groupe de Coxeter, possiblement infini, peuvent être ordonnés principalement selon deux ordres : l'« ordre de Bruhat » et l'*ordre faible*. Nous n'exposerons pas l'ordre de Bruhat dans ce texte. Nous référons le lecteur au livre (Björner et Brenti, 2005), où les auteurs présentent en profondeur les ordres définis sur les groupes de Coxeter. Le nom ordre *faible* vient du fait qu'il est plus grossier que l'ordre de Bruhat ; la relation d'ordre faible possède moins d'éléments. Nous donnons maintenant la définition.

Définition 1.25 Étant donné un système de Coxeter (W, S) et deux éléments $u, v \in W$, on définit $u \leq v$ lorsque $v = u s_1 s_2 \cdots s_k$ avec $s_i \in S$, et $\ell(u s_1 s_2 \cdots s_i) = \ell(u) + i$, $0 \leq i \leq k$.

Voici quelques propriétés de l'ordre faible \leq (voir par exemple la section 3.1 du livre (Björner et Brenti, 2005)).

Proposition 1.26 Étant donné deux éléments $u, w \in W$, on a

- (i) $u \leq w \Leftrightarrow \ell(u) + \ell(u^{-1}w) = \ell(w)$;
- (ii) Si W est fini, $w \leq w_o$ pour tout $w \in W$;
- (iii) PROPRIÉTÉ DU PRÉFIXE. $u \leq w \Leftrightarrow$ il existe des expressions réduites $u = s_1 s_2 \cdots s_k$ et $w = s_1 s_2 \cdots s_k s'_1 s'_2 \cdots s'_q$;

- (iv) PROPRIÉTÉ DE CHÂÎNES. Si $u \leq w$, alors il existe une suite $u = x_0 < x_1 < \dots < x_k = w$ telle que $\ell(x_i) = \ell(u) + i$, pour $1 \leq i \leq k$;
- (v) Soit $s \in D(u) \cap D(w)$. Alors, $u \leq w \Leftrightarrow su \leq sw$;
- (vi) $u \leq w \Leftrightarrow T(u) \subseteq T(w)$.

La dernière propriété a cela d'intéressant qu'elle permet de caractériser l'ordre faible en terme des ensembles d'inversions des éléments (voir la figure 1.10 qui montre la correspondance entre l'ordre faible et l'ordre d'inclusion des ensembles d'inversions pour le groupe A_3). Afin de représenter l'ordre faible, nous utilisons les diagrammes de Hasse. La figure 1.9 présente le diagramme de Hasse de quelques groupes de Coxeter.

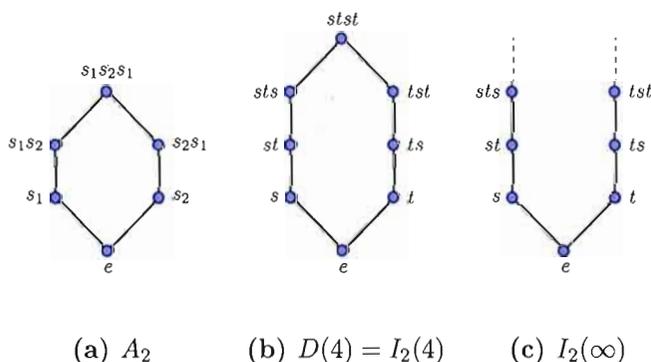


Figure 1.9 Les diagrammes de Hasse de A_2 , $I_2(4)$ et $I_2(\infty)$.

Dans un ensemble partiellement ordonné (E, \leq) , nous appelons un élément z l'infimum d'un sous-ensemble $S \subseteq E$ si les conditions suivantes sont respectées :

- (i) $z \leq y$ pour tout $y \in S$;
- (ii) Si $u \leq y$ pour tout $y \in S$, alors $u \leq z$.

Par la définition, si l'infimum d'un ensemble existe, il est unique. Dans ce cas, on le note par $\bigwedge A$ ou $x \wedge y$, si $A = \{x, y\}$. Par ailleurs, nous définissons le supremum d'un ensemble $S \subseteq E$ en inversant les relations d'ordre. Le supremum d'un ensemble S est noté $\bigvee A$ ou $x \vee y$, si $S = \{x, y\}$. De même, si le supremum existe, il est unique.

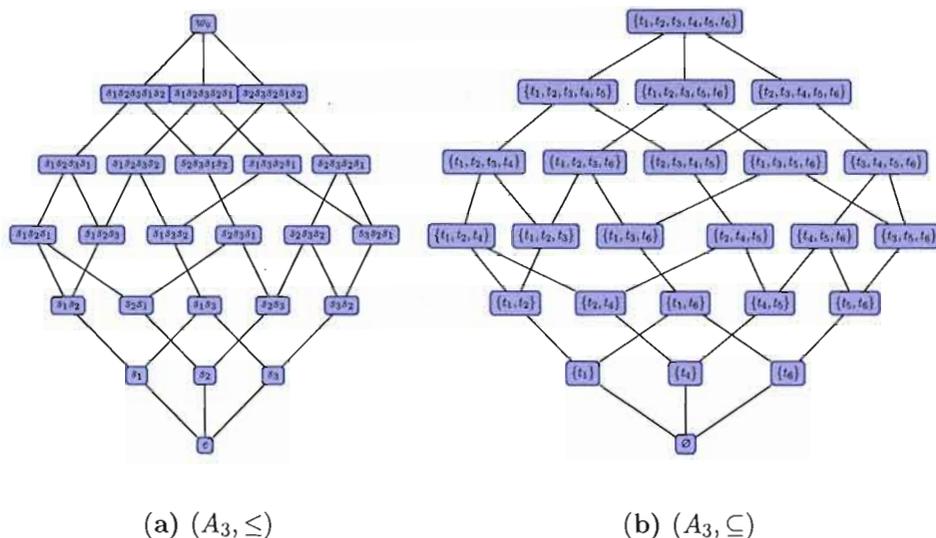


Figure 1.10 Correspondance entre l'ordre faible et l'inclusion des ensembles d'inversions. L'ensemble des réflexions de A_3 est $T = \{s_1, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1, s_2, s_2s_3s_2, s_3\}$. Dans la figure (b), l'inversion t_i désigne la i^e réflexion de l'ensemble T . Par exemple, $t_5 = s_2s_3s_2$.

Si chaque couple (x, y) d'un ensemble partiellement ordonné (E, \leq) possède un infimum (ou un supremum), le couple (E, \leq) est appelé un demi-treillis. En outre, si chaque sous-ensemble $S \subset E$ possède un infimum (ou un supremum), le demi-treillis est dit complet par rapport à l'infimum (ou au supremum). Par ailleurs, si chaque couple (x, y) possède un supremum et un infimum, le couple (E, \leq) est appelé un treillis. Nous obtenons le résultat suivant pour l'ordre faible sur un groupe de Coxeter, ce résultat est présent à la section 3.2 du livre (Björner et Brenti, 2005).

Théorème 1.27 Étant donné un groupe de Coxeter W (possiblement infini), alors

- (i) Le couple (W, \leq) est un demi-treillis complet par rapport à l'infimum ;
- (ii) Si W est fini, le couple (W, \leq) est un treillis complet.

Étant donné un système simple Δ et un sous-ensemble $I \subseteq S$, le sous-groupe parabolique standard $W_I \leq W$ est engendré par les $s \in I$. Pour un sous-groupe parabolique standard W_I , le système simple correspondant est $\Delta_I := \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$. Par exemple,

si $I = \emptyset$, alors $W_\emptyset = \{e\}$ et si $I = S$, alors $W_S = W$. En transformant le système simple Δ en $w\Delta$, nous obtenons au lieu de W_I le conjugué wW_Iw^{-1} et ce groupe est appelé sous-groupe parabolique. Cette terminologie est en accord avec celle utilisée dans les livres (Bourbaki, 1981), (Humphreys, 1992) et l'article (Reading, 2007a). Nous notons Φ_I pour l'intersection de Φ et le sous-espace réel V_I de V engendré par Δ_I et $W^I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \text{ pour tout } s \in I\}$. L'ensemble W^I est appelé l'ensemble des *représentants minimaux des classes* wW_I . La proposition suivante vient justifier cette appellation (cf. la section 1.10 du livre (Humphreys, 1992)).

Proposition 1.28 Soient Δ un système simple, S l'ensemble correspondant aux réflexions simples et $I \subset S$. Alors,

- (i) Φ_I est un système de racines de V (resp. de V_I), avec le système simple Δ_I et le groupe de réflexions correspondant W_I (resp. W_I limité à V_I).
- (ii) si W_I est considéré comme un groupe de réflexions avec la fonction longueur ℓ_I correspondant au système simple Δ_I , alors $\ell = \ell_I$ dans W_I .
- (iii) si $w \in W$, alors il existe un unique couple $(u, v) \in W^I \times W_I$, tel que $w = uv$ et satisfaisant l'équation $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$. De plus, u est l'unique élément de longueur minimal dans la classe wW_I .

Cette dernière proposition termine notre étude de la combinatoire des groupes de Coxeter.

1.3 Classification des groupes de Coxeter finis

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous pouvons représenter un système de Coxeter à l'aide d'un graphe. Ce graphe est apparu dans l'article de Harold S.M. Coxeter (Coxeter, 1934), où il classe tous les groupes de Coxeter. Il est défini de la façon suivante : à chaque générateur de $s \in S$ nous associons un sommet du graphe. Pour chaque paire (s, t) de générateurs, nous mettons une arête entre s et t si $m(s, t) \geq 3$ et si $m(s, t) \geq 4$ nous ajoutons l'étiquette $m(s, t)$ à cette arête. Ainsi, il est facile de reconnaître si deux générateurs commutent : ils n'ont pas d'arête entre eux. Un groupe de Coxeter est irréductible si son graphe est connexe, il est réductible sinon. Dans le cas des

groupes irréductibles finis, d'autres propriétés plus sophistiquées sont observables : les graphes n'ayant pas de sommet de degré 3 ou plus donnent les groupes de symétries de polytopes réguliers et les groupes de Weyl sont donnés par les graphes dont les relations $m(s, t)$ sont dans l'ensemble $\{2, 3, 4, 6\}$. Pour arriver à classifier les groupes de réflexions, Coxeter a utilisé le résultat suivant, qui se trouve dans son article (Coxeter, 1932).

Every group of real orthogonal substitutions on m variables, having as fundamental region a simplex all of whose dihedral angles are submultiples of π , is either the whole group of symmetries of some m -dimensional uniform polytope, or a sub-group thereof.

Dans cet article, il a classifié les « simplexes sphériques et euclidiens » dont les angles intérieurs sont des sous-multiples de π . La classification des groupes de Coxeter présente dans son article (Coxeter, 1934) fait directement appel à ce résultat. Les angles dont Coxeter fait référence peuvent être vus comme les angles entre les racines dans un système de racines. La figure 1.11 donne la classification des groupes de Coxeter irréductibles finis et la figure 1.12 donne celle des groupes de Coxeter affines.

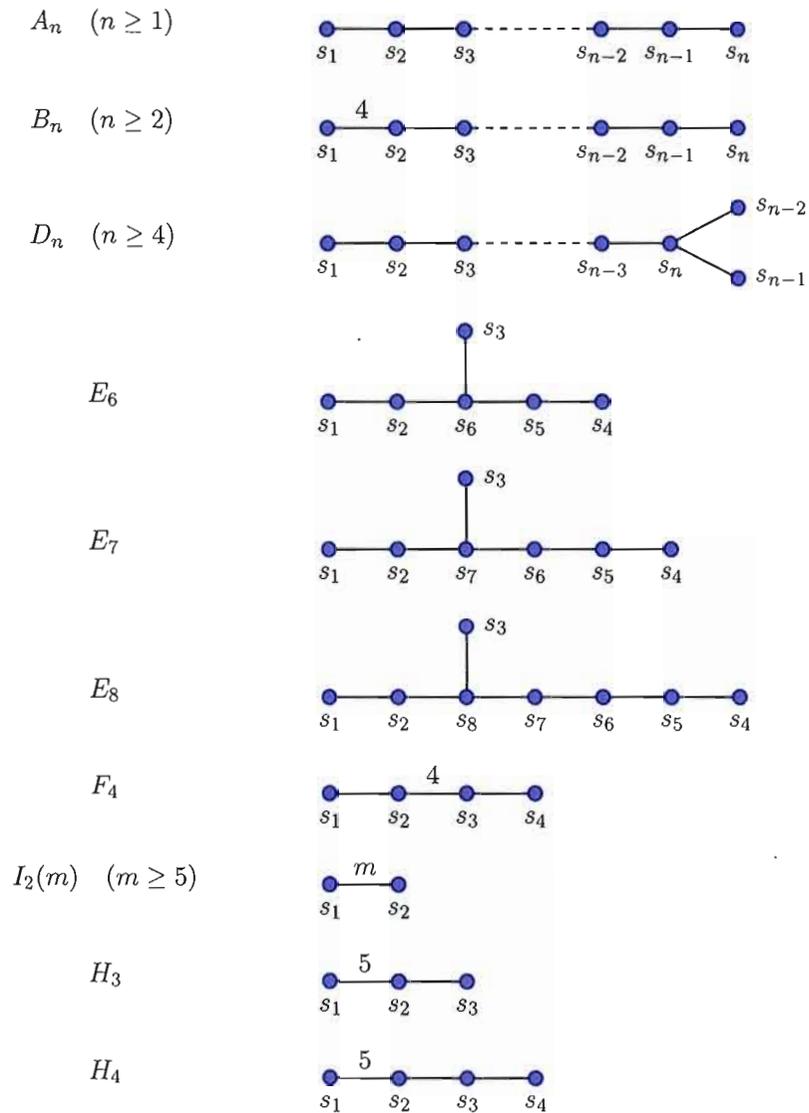


Figure 1.11 Graphe de Coxeter des groupes de Coxeter irréductibles finis. Les groupes de types A, B et D sont souvent appelés les familles infinies et les autres sont appelés groupes exceptionnels.

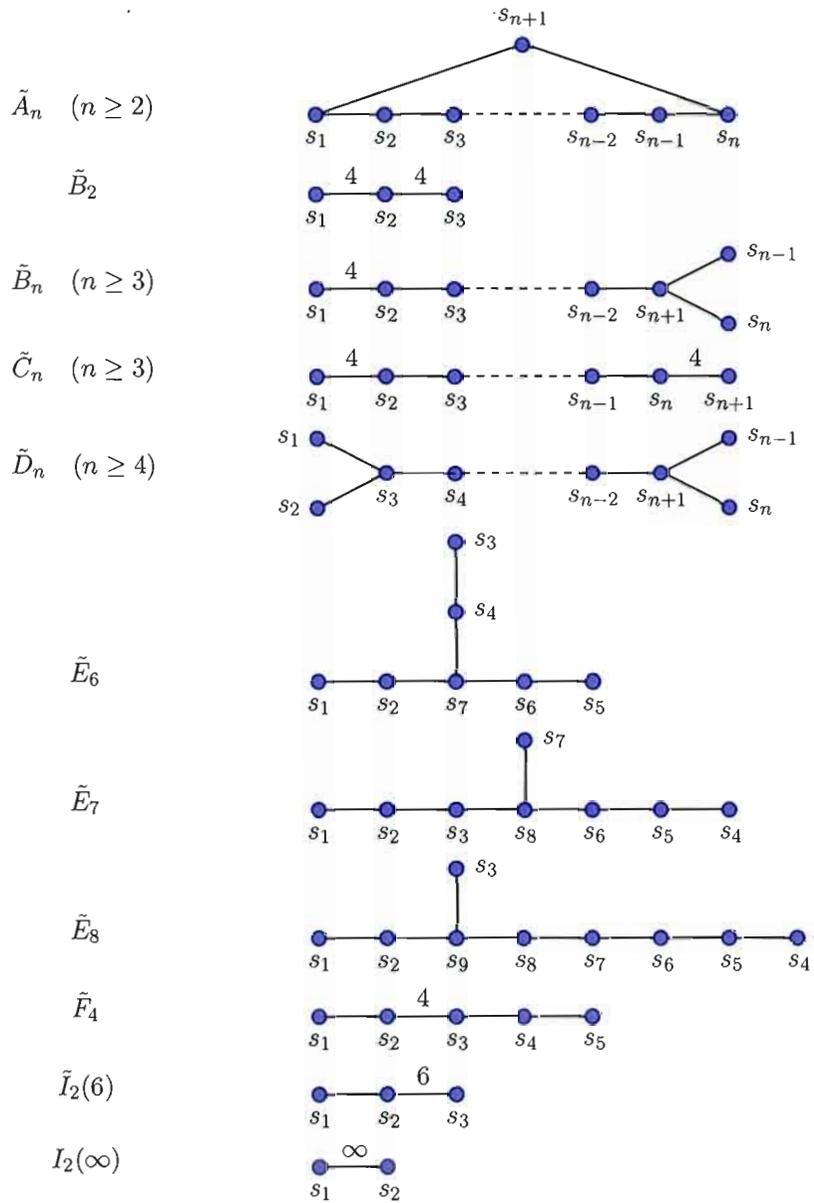


Figure 1.12 Graphe de Coxeter des groupes de Coxeter irréductibles affines.

1.4 Géométrie des groupes de Coxeter

Cette section se dissocie du cheminement effectué jusqu'à maintenant pour introduire des notions géométriques pratiques pour développer une seconde intuition des groupes de Coxeter. Les références principales qui concernent cette section sont le livre de J. Munkres (Munkres, 1996), celui de P. Abramenko et K. Brown (Abramenko et Brown, 2008) et celui de A. V. Borovik et A. Borovik (Borovik et Borovik, 2009).

Nous commençons par une définition essentielle.

Définition 1.29 Un complexe Σ sur un ensemble de points P est une famille non vide d'ensembles finis - appelés faces - qui est close sous l'opération d'inclusion ; si $F' \in \Sigma$ et $F \subseteq F'$, alors $F \in \Sigma$.

Puisqu'un complexe Σ est toujours non vide, $\emptyset \in \Sigma$. La dimension d'une face est définie par $\dim F = |F| - 1$. Les faces de dimension 1 sont appelées segments. Un complexe est pur de dimension d , si chaque face est contenu dans une face de dimension d . Dans ce cas, les faces de dimension d (resp. $d - 1$) sont appelées facettes (resp. panneaux). L'ensemble des facettes est noté $\mathcal{F}(\Sigma)$. Deux faces C et C' de dimension k sont adjacentes si $\dim(C \cap C') = k - 1$.

Exemple 1.30 Soit l'ensemble $P_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Alors

$$\Sigma_1 = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$$

forme un complexe pur de dimension 1, puisque chaque face est incluse dans une face de dimension 1. L'ensemble des facettes est $\mathcal{F}(\Sigma_1) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$.

Exemple 1.31 Soit l'ensemble $P_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Alors

$$\Sigma_2 = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

forme un complexe. Il ne peut être pur, car la face $\{x_1, x_2, x_3\}$ est la seule de dimension 2 et la face $\{x_2, x_4\}$ n'est pas incluse dans une face de dimension 2, par exemple.

Exemple 1.32 Soit l'ensemble $P_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Alors

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = & \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \\ & \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \\ & \{x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}, \{x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \\ & \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_5, x_6\}\} \end{aligned}$$

forme un complexe pur de dimension 2, puisque chaque face est incluse dans une face de dimension 2. L'ensemble des facettes est

$$\mathcal{F}(\Sigma_3) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}.$$

Nous poursuivons en nous plaçant dans un espace réel de dimension n .

Définition 1.33 Un simplexe de dimension d est l'enveloppe convexe de $d + 1$ points linéairement indépendants de \mathbb{R}^n ($n \geq d$). La figure 1.13 illustre des simplexes de basses dimensions.

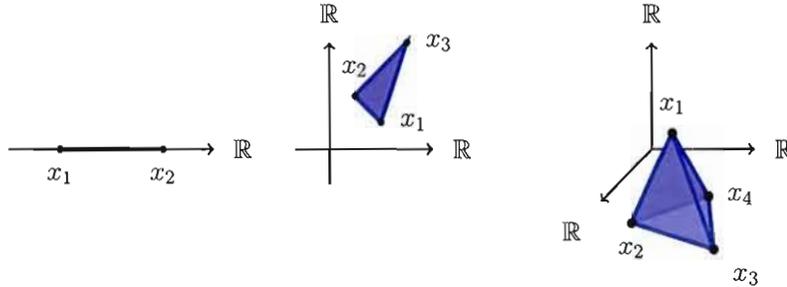


Figure 1.13 Simplexes de dimension 1, 2 et 3.

Nous pouvons représenter un complexe par des simplexes dans l'espace. La figure 1.14 montre la réalisation simpliciale des complexes des trois exemples précédents. La définition usuelle de « complexe simplicial » diffère quelque peu de celle vue ici. Pour obtenir une définition détaillée, voir les trois premières sections du premier chapitre du livre

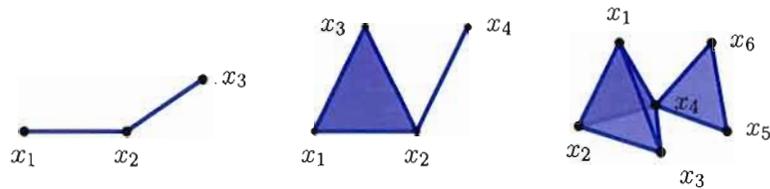


Figure 1.14 Exemples de réalisations simpliciales de complexes sur des ensembles à 3, 4 et 6 éléments respectivement.

(Munkres, 1996). Cependant, notre étude ne nécessite pas cet objet, nous utiliserons seulement les complexes et simplexes tels que définis.

Définition 1.34 Le treillis facial $L(\Sigma)$ d'un complexe Σ est formé de l'ensemble des faces de Σ ordonnées par l'inclusion.

Exemple 1.35 La figure 1.15 montre les diagrammes de Hasse des treillis faciaux du complexe Σ_1 de l'exemple 1.30 et du complexe du triangle.

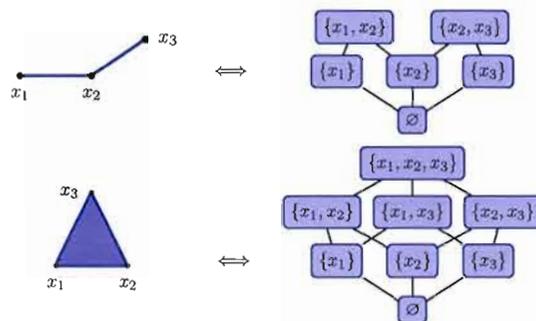


Figure 1.15 Treillis faciaux de complexes.

Afin de définir la dualité d'un complexe sans utiliser tout l'attirail de la théorie des polytopes, nous allons simplement lui donner une définition combinatoire.³

3. Pour obtenir plus de détails sur les polytopes voir le livre de Günter Ziegler (Ziegler, 1995)

Définition 1.36 Le complexe dual Σ^* d'un complexe Σ pur de dimension d est formé d'un ensemble de points P^* correspondant aux facettes de Σ et ses faces sont formées à partir de la relation d'adjacences sur les faces de Σ ; un ensemble de points de P^* formeront une face de Σ^* , si les facettes associées dans Σ possèdent une intersection non nulle.

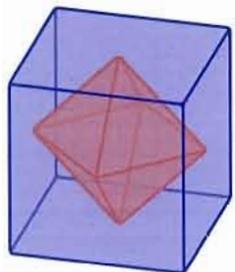
De cette façon, nous avons la correspondance suivante entre un complexe Σ et son dual Σ^* .

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma & \longleftrightarrow & \Sigma^* \\
 \hline
 \emptyset & \longleftrightarrow & \Sigma \\
 \text{points} & \longleftrightarrow & \text{facettes} \\
 \text{segments} & \longleftrightarrow & \text{panneaux} \\
 \dots & \longleftrightarrow & \dots \\
 \text{panneaux} & \longleftrightarrow & \text{segments} \\
 \text{facettes} & \longleftrightarrow & \text{points} \\
 \Sigma & \longleftrightarrow & \emptyset
 \end{array}$$

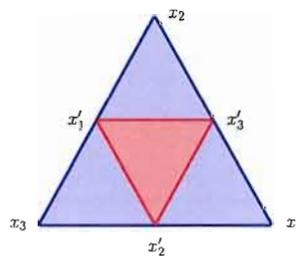
Exemple 1.37 En considérant le complexe du cube, nous obtenons son complexe dual : l'octaèdre. Le complexe du triangle est auto-dual : son complexe dual est exactement le même complexe à réétiquetage près. La figure 1.16 montre une réalisation simpliciale du cube et du triangle avec leur complexe dual associé.

On définit le treillis facial inverse $L^{-1}(\Sigma)$ d'un complexe Σ en renversant l'ordre d'inclusion. Étant donné un complexe Σ , le treillis facial $L(\Sigma^*)$ du complexe dual Σ^* est exactement $L^{-1}(\Sigma)$. La charpente de dimension k d'un complexe est l'union de ses faces de dimension k (voir la figure 1.17).

À l'aide de ces définitions, nous nous tournons maintenant à la construction du complexe de Coxeter $\Sigma(W)$ d'un groupe de Coxeter W . Fixons un système de racines Φ , un système positif Φ^+ , le système simple associé Δ et finalement (W, S) le système de Coxeter associé. À chaque racine α_t de Φ^+ correspond une réflexion $t \in T$ et donc un



(a) Le cube et son dual



(b) Le triangle et son dual

Figure 1.16 La figure (a) montre le complexe du cube et son complexe dual - l'octaèdre. La figure (b) montre le triangle et son dual; aussi un triangle.

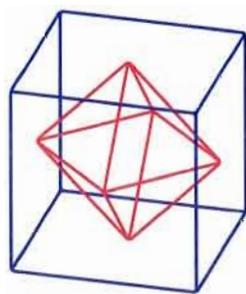


Figure 1.17 Charpente de dimension 1 du complexe du cube et de l'octaèdre.

hyperplan $\mathcal{H}_{\alpha_t} = \{v \in V \mid (v, \alpha_t) = 0\}$ de V .

Remarque 1.38 Cette correspondance sera utilisée plus tard au chapitre 3 pour démontrer la bijection entre les *amas* et les *éléments triés*.

L'ensemble des hyperplans $\mathcal{A} := \{\mathcal{H}_{\alpha_t} \mid t \in T\}$ est appelé *arrangement de Coxeter*. Bien qu'il ne soit pas en lui-même d'une grande importance pour le présent texte, l'arrangement de Coxeter fait toutefois l'objet de maintes recherches.

Chaque hyperplan \mathcal{H}_t sépare V en deux ensembles ouverts $A_{\alpha_t}^+ := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_t) > 0\}$ et $A_{\alpha_t}^- := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_t) < 0\}$. Nous définissons l'ensemble $C := \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_{\alpha}^+$. Puisque C est l'intersection d'ensembles ouverts convexes, il est aussi ouvert et convexe. De plus, C est clos sous la multiplication par un scalaire positif. Nous déduisons de cela que C forme un cône ouvert. Les murs de C sont formés des hyperplans \mathcal{H}_{α} (avec $\alpha \in \Delta$). Finalement, nous notons par D la fermeture de C ; $D := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta\}$. L'ensemble D est convexe, fermé et forme un cône. Un sous-ensemble de V est fondamental par rapport à l'action de W s'il est possible d'obtenir n'importe quel vecteur λ de V par l'action d'un unique $w \in W$ sur un vecteur μ de l'ensemble D . Nous avons le résultat suivant (voir par exemple la section 1.12 du livre (Humphreys, 1992)).

Proposition 1.39 Soient Φ^+ un système positif, Δ son système associé et D le domaine défini ci-haut. Alors,

- (i) tout vecteur $\lambda \in V$ est contenu dans l'orbite sous l'action de W d'un vecteur $\mu \in D$.
De plus, $\mu - \lambda$ est une combinaison linéaire positive de vecteurs dans Δ ;
- (ii) si $w\lambda = \mu$ et $\lambda, \mu \in D$, alors $\lambda = \mu$ et w est un produit de réflexions simples qui fixe λ . En particulier, si $\lambda \in C$, alors aucun $w \in W$ ne fixe λ ;
- (iii) D est un domaine fondamental de l'action de W sur V .

Le complément $V \setminus \bigcup_{t \in T} \mathcal{H}_{\alpha_t}$ est formé de cônes ouverts de V , appelés *chambres*. Chacune de ces chambres est conjuguée au cône C , c'est pourquoi nous appelons C la *chambre fondamentale*. Nous commençons maintenant la construction du complexe qui renferme la

structure géométrique d'un groupe de Coxeter. Supposons que $|\Delta| = n = \dim V$, donc Δ engendre l'espace V . Pour chaque sous-ensemble $I \in S$ nous assignons un cône

$$C_I := \{\lambda \in D \mid (\lambda, \alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta_I, (\lambda, \alpha) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta \setminus \Delta_I\}.$$

Ainsi, C_I est une intersection de certains hyperplans \mathcal{H}_{α_i} et d'ensembles ouverts $A_{\alpha_i}^+$. Par exemple, $C_\emptyset = C, C_S = \{0\}$. La dimension d'un cône C_I est $n - |I|$. De plus, l'ensemble des C_I donne une partition du domaine fondamental D . Puisque D est un domaine fondamental, l'ensemble \mathcal{C} des cônes wC_I avec $w \in W$ et $I \subseteq S$ partitionne l'espace V . Le complexe de Coxeter $\Sigma(W)$ du groupe W est formé à partir de l'ensemble \mathcal{C} . Les points de $\Sigma(W)$ sont les cônes wC_I , où $|I| = n - 1$, et un ensemble de points forme une face de $\Sigma(W)$ si les classes à gauche associées aux points ont une intersection non vide (voir la figure 1.18). Ce complexe est pur de dimension $n - 1$.

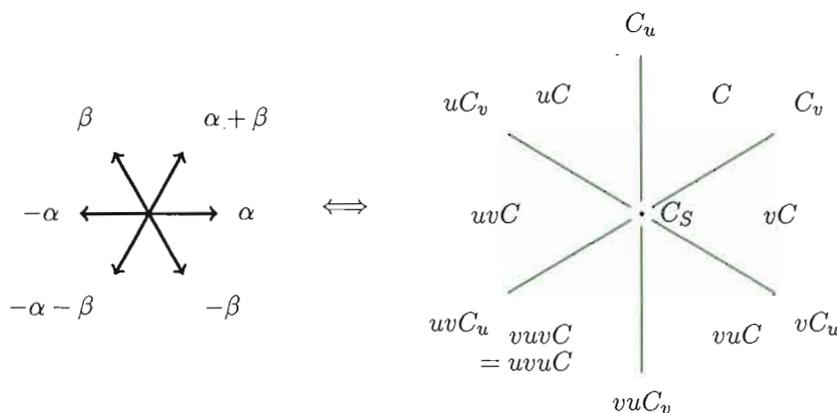
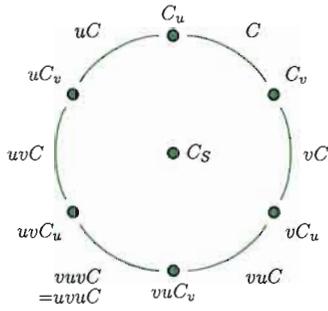
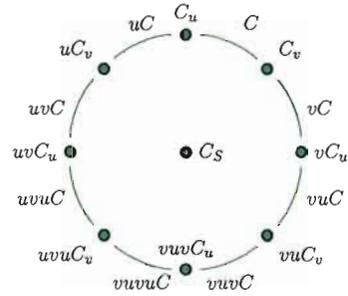


Figure 1.18 À gauche, le système de racines de A_2 . À droite le complexe formé à l'aide des cônes wC_I , où $u = s_\alpha$ et $v = s_\beta$.

Souvent, pour obtenir $\Sigma(W)$, nous prenons l'intersection de l'ensemble \mathcal{C} avec la sphère $S = \{\lambda \in V \mid |\lambda| = 1\}$. Afin de respecter la définition, on ajoute l'origine pour représenter l'ensemble vide. L'arrangement de Coxeter \mathcal{A} est simplement l'union des wC_I avec $I \neq \emptyset$. Pour l'illustrer on utilise souvent d'autres formes géométriques (voir la figure 1.19 et la figure 1.20)

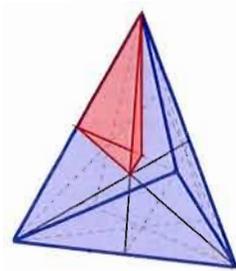


(a) Complexe de Coxeter de A_2

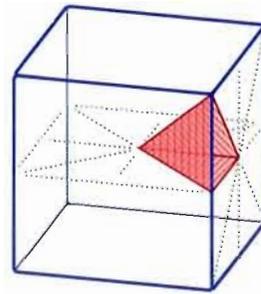


(b) Complexe de Coxeter de B_2

Figure 1.19 Complexes de Coxeter obtenus en utilisant la sphère.



(a) Complexe de Coxeter de A_3



(b) Complexe de Coxeter de B_3

Figure 1.20 Complexes de Coxeter obtenus en utilisant un tétraèdre et un cube.

1.5 Permutoèdre et treillis de l'ordre faible

Définition 1.40 Le permutoèdre $\Sigma^*(W)$ d'un groupe de Coxeter W est un complexe dont les points sont les éléments de W et ses faces sont les classes à gauche wW_I ($w \in W$ et $I \subseteq S$). Pour être bien défini, on ajoute aussi la face vide \emptyset .

Exemple 1.41 Soit le groupe symétrique A_2 . Son permutoèdre est

$$\begin{aligned} \Sigma^*(A_2) = & \{ \emptyset, \{e\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_1s_2\}, \{s_2s_1\}, \{s_1s_2s_1\}, \{e, s_1\}, \{s_2, s_2s_1\}, \\ & \{s_1s_2, s_1s_2s_1\}, \{e, s_2\}, \{s_1, s_1s_2\}, \{s_2s_1, s_2s_1s_2\}, \{s_2s_1, s_1s_2s_1\}, W \}. \end{aligned}$$

Le fait que le permutoèdre est bel et bien un complexe se vérifie aisément par sa définition. Avec cette définition, nous obtenons directement un résultat assez intéressant. La charpente de dimension 1 du permutoèdre et le diagramme de Hasse de l'ordre faible sont isomorphes. En effet, les faces de dimension 1 du permutoèdre sont formées par les éléments d'une classe à gauche $wC_{\{s\}} = \{w, ws\}$. Mais chacune de ces faces correspondent à une arête du diagramme de Hasse.

Pour montrer un exemple de ce résultat, nous voyons d'abord que le permutoèdre se réalise géométriquement comme un « polytope ». Étant donné un groupe de Coxeter W et un point $x \in C$ du cône fondamental. Nous formons l'ensemble $P^x := \{w(x) | w \in W\}$ formé de l'orbite du point x par l'action de W sur l'espace V . L'action de W est simplement transitive sur l'ensemble des chambres; dans chaque chambre il y a exactement un point $w(x)$ et l'élément w est uniquement déterminé. Nous obtenons maintenant une définition équivalente du permutoèdre d'un groupe W (voir par exemple la section 1.2 de l'article (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007)).

Proposition 1.42 Le permutoèdre $\Sigma^*(W)$ est un polytope « régulier » formé en prenant l'enveloppe convexe de l'ensemble P^x .

Nous donnons une esquisse de la démonstration. Pour plus de détails, voir la section 2.1

de l'article (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007).

DÉMONSTRATION. D'abord les points de $\Sigma^*(W)$ correspondent aux éléments de l'ensemble P^x . Les segments $wW_s = \{w, ws\}$ de $\Sigma^*(W)$ correspondent aux segments reliant deux points $w(x)$ et $ws(x)$, où s est une réflexion simple. Les facettes $wW_{S \setminus \{s\}}$ de $\Sigma^*(W)$ correspondent à des hyperplans $\mathcal{H}(w, s)$ de V et les faces de dimensions inférieures s'obtiennent en prenant l'intersection des hyperplans qui les contiennent. ■

Les figures 1.21 et 1.22 montre l'isomorphisme entre le treillis de l'ordre faible et la charpente de dimension 1 du permutoèdre polytopal.

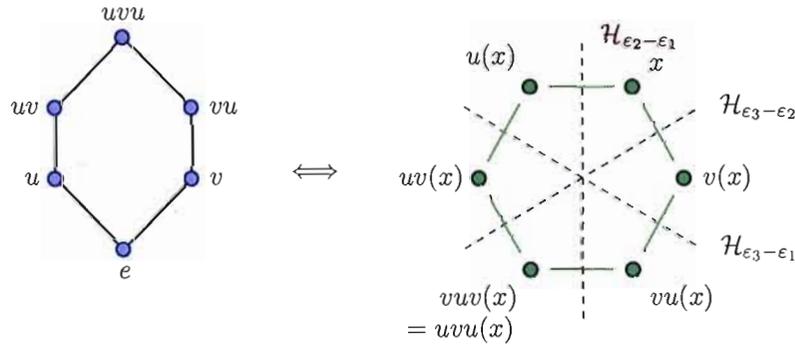
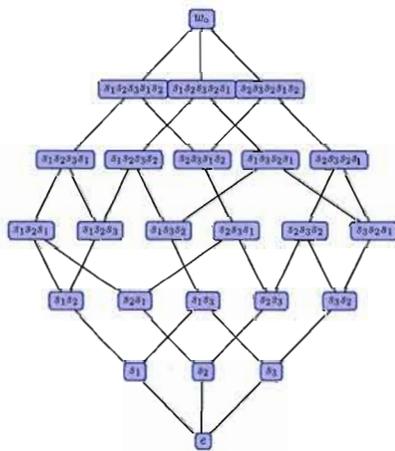


Figure 1.21 Treillis de l'ordre faible et charpente de dimension 1 du permutoèdre de A_2 .

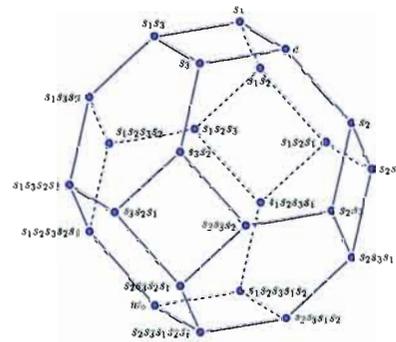
Nous terminons par démontrer que le permutoèdre $\Sigma^*(W)$ est dual au complexe de Coxeter $\Sigma(W)$, ce qui justifie notre choix de notation.

Théorème 1.43 Étant donné un groupe de Coxeter W , le permutoèdre $\Sigma^*(W)$ est dual au complexe de Coxeter.

DÉMONSTRATION. À chaque facette wC de $\Sigma(W)$, on associe le point w de $\Sigma(W)$. De même, les facettes $(wW_{S \setminus \{s\}})$, avec $s \in S$ et $w \in W$ de $\Sigma^*(W)$ sont associées aux cônes $wC_{S \setminus \{s\}}$. À l'aide de la relation d'inclusion, nous obtenons aisément la correspondance des autres faces. ■



(a) Treillis de A_3



(b) Charpente de dimension 1 de $\Sigma^*(A_3)$

Figure 1.22 Treillis de l'ordre faible et charpente de dimension 1 du permutoèdre de A_3 .

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS TRIÉS ET ÉLÉMENTS SINGLETONS

Fixons un système de Coxeter (W, S) et son ensemble de réflexions T . Nous notons l'ensemble $S \setminus \{s\}$ par $\langle s \rangle$.

2.1 Éléments de Coxeter

Les éléments de Coxeter sont à la base de l'interprétation de N. Reading. Nous verrons d'abord quelques résultats concernant ceux-ci et terminerons la section par des lemmes sur la conjugaison circulaire qui serviront à démontrer un résultat nécessaire à la démonstration de la correspondance de N. Reading.

2.1.1 Généralités

Définition 2.1 Un élément de Coxeter c de W est le produit des générateurs de $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ dans un certain ordre.

H. Coxeter a introduit ces éléments dans son article (Coxeter, 1934) en remarquant qu'ils possèdent des propriétés invariantes pour les groupes de réflexions. Nous présentons ci-dessous certains de ces résultats.

Lemme 2.2 Dans un groupe de Coxeter W , les éléments de Coxeter sont tous conjugués.

Corollaire 2.3 Dans un groupe de Coxeter W , les éléments de Coxeter sont tous de même ordre. Nous notons l'ordre par h et il est appelé le nombre de Coxeter du groupe W .

Lemme 2.4 Si un groupe de Coxeter W irréductible contient l'inversion par l'origine $-\text{Id}$, alors h est pair et $-\text{Id} = c^{h/2} = w_\circ$.

Remarque 2.5 Dans le lemme précédent, l'inversion $-\text{Id} = c^{h/2}$ est bien définie à la vue du lemme 2.2.

Lemme 2.6 Si un groupe de Coxeter W irréductible agit sur un espace euclidien de dimension n , le nombre de réflexions de W est $\frac{nh}{2}$.

Ce dernier lemme est assez surprenant, en effet, si le groupe W agit sur un espace de dimension impaire, alors le nombre de Coxeter est forcément pair et puisque $h = \frac{2|\Gamma|}{n}$, n divise le nombre de réflexions du groupe, ce qui n'est pas du tout évident au départ. De plus, en combinant ce résultat avec la proposition 1.23 nous obtenons la longueur de w_\circ :

$$\ell(w_\circ) = |\{\alpha \in \Phi^+ | w_\circ(\alpha) \in \Phi^-\}| = |\Phi^+| = \frac{nh}{2}.$$

L'action de c sur l'espace V nous mène à déterminer ses valeurs propres. Ces valeurs propres sont de la forme $e^{2mi\pi/h}$, où m est un entier positif plus petit que h . Les n valeurs de m qui forment les valeurs propres sont appelées exposants de W . Nous les notons e_1, e_2, \dots, e_n et nous les ordonnons en ordre croissant. Ces nombres apparaissent à plusieurs endroits dans l'étude des groupes de Coxeter. Par exemple, l'ordre de W s'exprime en terme de ceux-ci :

$$|W| = \prod_{i=1}^n (e_i + 1).$$

Finalement, un autre groupe de nombres est intimement lié aux groupes de Coxeter. Afin de définir ces nombres, nous avons besoin du polynôme de Poincaré

$$P(W) = \sum_{w \in W} q^{\ell(w)}.$$

Ce polynôme possède la factorisation suivante

$$P(W) = \prod_{i=1}^n \frac{q^{d_i} - 1}{q - 1}.$$

Nous appelons les entiers d_i les degrés de W et nous les ordonnons en ordre croissant. Les exposants et les degrés sont intimement liés, car en fait $e_i = d_i - 1$ pour chaque $i \in [n]$. Voici un tableau qui regroupe plusieurs invariants numériques pour les groupes de Coxeter irréductibles finis.

W	d_1, \dots, d_n	e_1, \dots, e_n	h	$ \Phi^+ = \ell(w_o)$	$ W $
A_n	$2, 3, \dots, n+1$	$1, 2, \dots, n$	$n+1$	$n(n+1)/2$	$(n+1)!$
B_n	$2, 4, 6, \dots, 2n$	$1, 3, 5, \dots, 2n-1$	$2n$	n^2	$2^n n!$
D_n	$2, 4, 6, \dots, 2(n-1), n$	$1, 3, 5, \dots, 2n-3, n-1$	$2(n-1)$	$n(n-1)$	$2^{n-1} n!$
E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	12	36	$2^7 3^4 5$
E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	18	63	$2^{10} 3^4 5 \cdot 7$
E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	30	120	$2^{14} 3^5 5^2 7$
F_4	$2, 6, 8, 12$	$1, 5, 7, 11$	12	24	$2^7 3^2$
H_3	$2, 6, 10$	$1, 5, 9$	10	15	$2^3 3 \cdot 5$
H_4	$2, 12, 20, 30$	$1, 11, 19, 29$	30	60	$2^6 3^2 5^2$
$I_2(m)$	$2, m$	$1, m-1$	m	m	$2m$

Tableau 2.1 Degrés, exposants, nombre de Coxeter, ordre de w_o et ordre des groupes de Coxeter irréductibles finis

2.1.2 Nouvelle caractérisation des éléments de Coxeter

Une question naturelle à se poser est la suivante : combien y a-t-il d'éléments de Coxeter ? Dans cette section, nous donnons une caractérisation qui, à ma connaissance, est nouvelle. Notons par $c(W)$ l'ensemble des éléments de Coxeter d'un groupe W . J.-J. Shi dans son article (Shi, 1997) donne la correspondance entre les éléments de Coxeter d'un groupe W et les orientations acycliques du graphe de W . Lorsque W est fini, son graphe est un arbre, alors le nombre d'orientations acycliques est simplement 2^{n-1} , où n est le nombre de sommets ; donc $n-1$ est le nombre d'arêtes. Dès lors, il est possible d'obtenir une liste des éléments de Coxeter pour un groupe donné. Nous fournissons ici une nouvelle alternative pour trouver les éléments de Coxeter. Pour ce faire, nous avons besoin de certaines classes de permutation.

Définition 2.7 Une permutation montagne π d'un ensemble ordonné $\{1, 2, \dots, n\}$ satisfait $\pi(1) < \pi(2) < \pi(3) < \dots < \pi(i-1) < \pi(i) > \pi(i+1) > \dots > \pi(n)$ pour un certain entier $1 \leq i \leq n$.

L'élément $\pi(i)$ est le sommet de la permutation π . Nous notons l'ensemble des permutations montagnes de l'ensemble $[n]$ par $\mathcal{M}(n)$.

Lemme 2.8 Le nombre de permutations montagnes de $[n]$ est 2^{n-1} .

DÉMONSTRATION. Soit $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ un sous-ensemble de $[n-1]$ tel que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. À l'ensemble I , nous associons la permutation montagne

$$\pi_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & n & j_{n-1-k} & \dots & j_2 & j_1 \end{pmatrix},$$

où $[n-1] \setminus I = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-1-k}\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1-k}$. On a donc une fonction des sous-ensembles de $[n-1]$ (noté $\mathfrak{P}([n-1])$) vers les permutations montagnes.

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{P}([n-1]) &\rightarrow \mathcal{M}(n) \\ I &\mapsto \pi_I \end{aligned}$$

La fonction Ψ est clairement surjective. De plus, si I et I' sont des sous-ensembles de $[n-1]$, par notre construction, nous avons facilement que $I = I'$ si et seulement si $\pi_I = \pi_{I'}$. Ainsi, la fonction Ψ est une bijection entre les sous-ensembles de $[n-1]$ et les permutations montagnes, d'où le résultat. ■

Pour obtenir une bijection entre les permutations montagnes et les éléments de Coxeter, le seul sacrifice nécessaire est de faire un *bon* choix pour étiqueter les générateurs.

Définition 2.9 Soient Γ un arbre connexe à n sommets, E un ensemble totalement ordonné à n éléments et M le maximum de E . Un étiquetage croissant de Γ est un étiquetage des sommets de Γ par l'ensemble E tel que chaque chemin d'un sommet quelconque s vers le sommet étiqueté par le maximum M forme une suite croissante d'étiquette.

Remarque 2.10 Si un arbre Γ est muni d'un étiquetage croissant, alors le sommet étiqueté par l'minimum I de l'ensemble E est un sommet de degré un ; c'est une feuille de l'arbre. Supposons en effet que I possède au moins deux sommets adjacents, v et u . Puisque Γ est un arbre, il existe un chemin unique allant de v vers le maximum M de E , ce chemin ne peut passer par I , car le chemin ne serait pas croissant. Il en est de même pour le chemin de u vers M . Mais alors, il existe deux chemins distincts allant de I vers M , en passant par chacun des voisins u et v . C'est impossible, puisque Γ est un arbre. Ceci force le sommet étiqueté par I à être une feuille de l'arbre.

D'après mes recherches, ce résultat semble nouveau :

Théorème 2.11 Soient W un groupe de Coxeter irréductible, $S = \{s_1 < s_2 < \dots < s_n\}$ son ensemble de générateur et Γ son graphe de Coxeter. Si Γ est un arbre muni d'un étiquetage croissant au moyen de l'ensemble S , alors la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_n : \mathcal{M}(n) &\rightarrow c(W) \\ \sigma &\mapsto c = s_{\sigma(1)}s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

est une bijection entre les permutations montagnes et les éléments de Coxeter de W .

DÉMONSTRATION. Nous démontrons la bijection par récurrence sur $|S| = n$. On notera que les permutations montagnes de $\{2, \dots, n\}$ sont en bijection avec celle de $\{1, \dots, n-1\}$ au moyen d'une standardisation. L'hypothèse de récurrence pourra donc s'appliquer plus aisément.

Si $|S| = 1$, la fonction Φ_1 est clairement bijective. Supposons maintenant que Φ_{n-1} est bijective et montrons que Φ_n est bijective.

D'abord, remarquons que si π est une permutation montagne de $[n]$, alors $\pi^{-1}(1) \in \{1, n\}$. Pour commencer, nous montrons l'injectivité de Φ_n . Prenons $c = s_{\sigma(1)}s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} = s_{\tau(1)}s_{\tau(2)} \cdots s_{\tau(n)} = c'$ avec σ et τ deux permutations montagnes de $\mathcal{M}(n)$ et montrons que $\sigma = \tau$. Il y a deux cas : **1**) $\sigma^{-1}(1) = \tau^{-1}(1)$ **2**) $\sigma^{-1}(1) \neq \tau^{-1}(1)$.

Cas 1 $\sigma^{-1}(1) = \tau^{-1}(1) \in \{1, n\}$. Supposons que $\sigma^{-1}(1) = \tau^{-1}(1) = 1$. Le cas $\sigma^{-1}(1) = \tau^{-1}(1) = n$ s'effectue de la même façon au moyen d'une standardisation supplémentaire. La restriction des permutations σ et τ à l'ensemble $\{2, \dots, n\}$ donne deux permutations montagnes σ' et τ' de $\mathcal{M}(n-1)$ à standardisation près. L'égalité devient alors $s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} = s_{\tau(2)} \cdots s_{\tau(n)}$ et l'élément en question appartient au sous-groupe parabolique standard $W' := W_{(s_1)}$. Grâce à la remarque 2.10, W' est un groupe de Coxeter irréductible avec ensemble de générateur $S' = \{s_2, \dots, s_n\}$ et son graphe Γ' est un arbre muni d'un étiquetage croissant. Par notre hypothèse de récurrence, l'égalité $s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} = s_{\tau(2)} \cdots s_{\tau(n)}$ implique alors que $\sigma' = \tau'$ d'où le fait que $\sigma = \tau$.

Cas 2 $\sigma^{-1}(1) \neq \tau^{-1}(1)$. Sans perte de généralité, supposons que $\sigma(1) = 1$ et $\tau(1) = n$ et écrivons $c = s_1 s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} = s_1 u$ et $c' = s_{\tau(1)} \cdots s_{\tau(n-1)} s_1 = v s_1$, où u et v sont des éléments de Coxeter de $W' = W_{(s_1)}$. Les éléments u et v sont de longueur $n-1$ et $v = s_1 u s_1$. Nous appliquons la condition de réduction à l'expression $s_1 u s_1$ de v ; deux réflexions doivent être enlever à $s_1 u s_1$ pour obtenir une expression réduite. Par la partie b) du théorème 5.5 du livre (Humphreys, 1992), on obtient $v = \widehat{s}_1 u \widehat{s}_1$. Alors $u = s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} = s_{\tau(1)} \cdots s_{\tau(n-1)} = v$, ce qui implique $\sigma(2) \cdots \sigma(n) = \tau(1) \cdots \tau(n-1)$ par l'hypothèse de récurrence. L'égalité devient donc $s_1 u = u s_1$. À nouveau, grâce à la remarque 2.10, il existe un unique générateur $s_{\sigma(i)}$, avec $2 \leq i \leq n$, qui ne commute pas avec s_1 . En appliquant les relations où s_1 commute dans les expressions $s_1 u$ et $u s_1$ et finalement en éliminant les préfixes et suffixes communs, l'égalité devient

$$\begin{aligned} s_1 s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(i-1)} s_{\sigma(i)} \cdots s_{\sigma(n)} &= s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} s_1, \\ s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(i-1)} s_1 s_{\sigma(i)} \cdots s_{\sigma(n)} &= s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)} s_1, \\ s_1 s_{\sigma(i)} \cdots s_{\sigma(n)} &= s_{\sigma(i)} \cdots s_{\sigma(n)} s_1, \\ s_1 s_{\sigma(i)} \cdots s_{\sigma(n)} &= s_{\sigma(i)} s_1 s_{\sigma(i+1)} \cdots s_{\sigma(n)}, \\ s_1 s_{\sigma(i)} &= s_{\sigma(i)} s_1, \end{aligned}$$

ce qui constitue une contradiction avec le fait que s_1 ne commute pas avec $s_{\sigma(i)}$. Donc, ce cas est impossible.

Finalement, démontrons que Φ_n est surjective. Soit c un élément de Coxeter de W . Comme nous l'avons remarqué précédemment, il existe un unique générateur $s_i \in S$ qui ne commute pas avec le générateur s_1 , puisque s_1 est une feuille de l'arbre Γ . Selon l'ordre où s_1 et s_i apparaissent dans c , on utilise les relations de commutations pour envoyer s_1 au début ou à la fin de c . Si s_1 apparaît avant s_i , on aura $c = s_1 c'$ et si s_i apparaît avant s_1 , on aura $c = c' s_1$, où c' est un élément de Coxeter du sous-groupe parabolique W' . Par notre hypothèse de récurrence sur W' , l'élément de Coxeter c' s'écrit comme une permutation montagne π de l'ensemble $\{2, 3, \dots, n\}$. Mais alors, l'élément de Coxeter c s'écrit $s_1 s_{\pi(2)} \cdots s_{\pi(n)}$ ou bien $s_{\pi(2)} \cdots s_{\pi(n)} s_1$. Dans les deux cas, cette écriture donne une permutation montagne de $[n]$. ■

Remarque 2.12 Les permutations montagnes sont en fait un modèle combinatoire pour une « forme normale » des éléments de Coxeter. Cependant, elle ne correspond pas à la « première expression réduite »¹ des éléments de Coxeter. Par exemple, pour le groupe A_4 , la première expression réduite de $c = s_2 s_4 s_1 s_3$ est $c = s_2 s_1 s_4 s_3$, mais la permutation montagne qui correspond est $c = s_2 s_4 s_3 s_1$. Cette nouvelle forme normale constitue une nouvelle méthode computationnelle pour obtenir les éléments de Coxeter dans le cas où le graphe du groupe est un arbre. Il est facile d'étendre le résultat dans le cas où W est réductible et où chaque composante du graphe est un arbre. Il serait intéressant de trouver un modèle combinatoire à l'aide de permutations ou de mots pour les éléments de Coxeter dans le cas où le graphe contient un cycle. Ce faisant, nous pourrions réinterpréter les formules explicites obtenues par J.-J. Shi pour les groupes hyperboliques.

2.1.3 Conjugaison circulaire

Les résultats de cette section constituent le point de départ vers la démonstration de la correspondance de Reading. Ils seront utilisés pour démontrer le lemme 3.2, étape importante pour démontrer la correspondance. Pour un élément de Coxeter c ,

1. *lexicographically first reduced expression*, en anglais.

un générateur $s \in S$ est une lettre initiale de c s'il existe une expression réduite de c commençant par s . Similairement, un générateur $s \in S$ est une lettre finale de c s'il existe une expression réduite de c finissant par s . Si s est une lettre initiale de c , alors s est une lettre finale de l'élément de Coxeter scs .

Le résultat suivant est présent dans le livre (Geck et Pfeiffer, 2000). Il est aussi démontré dans l'article (Bernstein, Gelfand et Ponomarev, 1973) au point (1) du théorème 1.2. La notion de conjugaison par permutations circulaires a été introduite dans l'article (Broué et Michel, 1997) (cf. Définition 3.16). Nous avons étendu les conditions du résultat aux groupes dont le graphe est un arbre, grâce à la notion de permutations montagnes.

Lemme 2.13 Soient deux éléments de Coxeter c et c' d'un groupe de Coxeter W irréductible dont le graphe est un arbre. Alors il existe une suite $c = c_0, c_1, \dots, c_k = c'$ et une lettre initiale s_{i-1} de c_{i-1} telle que $c_i = s_{i-1}c_{i-1}s_{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. On dit alors que c et c' sont conjugués par permutations circulaires (p.p.c.).

DÉMONSTRATION. Nous démontrons le résultat par récurrence sur le rang de W . Si $|S| = 1$, alors le résultat est obtenu trivialement. Supposons le résultat vrai pour les groupes de rang $n - 1$ et démontrons que le résultat est vrai pour les groupes de rang n . En considérant un étiquetage valide du graphe de W (afin d'appliquer le théorème 2.11), s_1 est un sommet de degré 1. On écrit c à l'aide d'une permutation montagne, alors $c = s_1m$ ou $c = ms_1$, où m est un élément de Coxeter du sous-groupe parabolique $W_{(s_1)}$. Il est clair que les mots s_1m et ms_1 sont conjugués p.p.c. Similairement, $c' = s_1m'$ ou $c' = m's_1$, où m' est un élément de Coxeter du sous-groupe parabolique $W_{(s_1)}$. De même, les mots s_1m' et $m's_1$ sont conjugués p.p.c.. Par notre hypothèse de récurrence, m et m' sont conjugués p.p.c.; il existe une suite d'éléments de Coxeter du sous-groupe parabolique $W_{(s_1)}$, $m = m_0, m_1, \dots, m_k = m'$ et des lettres initiales u_i de m_i telles que $m_i = u_{i-1}m_{i-1}u_{i-1}$. La dernière étape est de démontrer que s_1m_i et s_1m_{i+1} sont conjugués p.p.c. pour tout i . Ainsi, $s_1m = s_1m_0$ et $s_1m' = s_1m_k$ seront conjugués p.p.c. et donc c et c' par conséquent. Fixons l'entier $0 \leq i \leq k - 1$. Alors $s_1m_{i+1} = s_1u_i m_i u_i$ est un élément de Coxeter de W . En conjuguant par u_i , on obtient un autre

élément de Coxeter $u_i s_1 u_i m_i$ de W . Ce dernier élément possède une écriture comme une permutation montagne. Donc s_1 doit commuter avec u_i ou bien avec $u_i m_i$. Dans le premier cas, $u_i s_1 u_i m_i = s_1 m_i$ et dans le dernier $u_i s_1 u_i m_i = m_i s_1$. Mais alors, $s_1 m_i$ est conjugué p.p.c à $s_1 m_{i+1}$. La démonstration de la récurrence se termine en se rappelant que $s_1 m_i$ et $m_i s_1$ sont conjugués par s_1 . ■

Le graphe d'un groupe de Coxeter fini est biparti ; ses sommets peuvent être séparés en deux ensembles S^+ et S^- tels que deux sommets du même ensemble commutent. Étant donné une telle partition, un élément de Coxeter biparti est le produit $c_- c_+$, où

$$c_+ := \prod_{s \in S_+} s \text{ et } c_- := \prod_{s \in S_-} s.$$

Puisque chaque paire d'éléments de S_ε ($\varepsilon \in \{+, -\}$) commute, le produit est bien défini. Le lemme suivant est une conséquence du lemme 1.3.4 de l'article (Bessis, 2003).

Lemme 2.14 Supposons que W est irréductible et prenons une réflexion t de T . L'orbite de t par la conjugaison du groupe engendré par $\langle c_-, c_+ \rangle$ contient un élément de S .

DÉMONSTRATION. Fixons $c = c_- c_+$. Rappelons-nous qu'une réflexion $t \in T$ s'écrit comme $ws w^{-1}$ avec $w \in W$ et $s \in S$. Pour obtenir le résultat, on considère les orbites des éléments de S par conjugaison par l'élément c . Nous comptons la cardinalité des orbites et nous verrons que la somme des cardinalités nous donne la cardinalité de T . Ainsi chaque réflexion $t \in T$ apparaît dans une certaine orbite. Considérons l'orbite $\text{Orb}_c(s_i)$ d'une réflexion simple s_i . Nous savons bien, par le théorème de Lagrange, que la cardinalité de l'orbite doit diviser l'ordre de c , qui est égale à h . On a alors que $|\text{Orb}(s_i)| \leq h$.

Par l'exercice 2 du chapitre V du livre (Bourbaki, 1981), si $m < \lfloor h/2 \rfloor$, alors

$$c^m = (c_- c_+)^m$$

est une expression réduite. Cette affirmation se vérifie de la façon suivante. Supposons que $c = c_- c_+ = s_1 s_2 \dots s_n$, pour tout $u \in \mathbb{Z}$ on définit \mathcal{H}_u comme l'hyperplan orthogonal à s_u , on étend la définition par $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}_k$ si $u \equiv k \pmod{n}$. À l'aide de

calculs, nous vérifions que les hyperplans des réflexions de T sont $s_1 s_2 \cdots s_{u-1} \mathcal{H}_u$ pour $u = 1, 2, \dots, nh/2$. Mais alors, si h est impair, $s_1 s_2 \cdots s_u$ est un préfixe de $c^{\frac{h-1}{2}} c_-$. Sinon $s_1 s_2 \cdots s_u$ est préfixe de $c^{\frac{h}{2}}$. Mais l'ensemble des inversions de $c^{\frac{h-1}{2}} c_-$ (ou $c^{\frac{h}{2}}$) est T tout entier. Alors c^m est réduit si $m < \lfloor h/2 \rfloor$.

Prenons ensuite deux réflexions simples s_i et s_j . Supposons qu'elles apparaissent dans une même orbite ; c'est-à-dire que $s_i = c^m s_j (c^m)^{-1}$ pour un certain entier m avec $c = c_- c_+$. Nous montrons ensuite que l'entier m doit être plus grand que $\lfloor h/2 \rfloor$. Supposons le contraire, donc que $m < \lfloor h/2 \rfloor$. Alors $c^m = (s_1 s_2 \cdots s_n)^m$ est une expression réduite et alors c^{m+1} a pour expression réduite $c_+ c^m c_-$.

Supposons que s_i fait partie de c_- . Alors $s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_n c^{m-1}$ est une expression réduite de $s_i c^m$. De même, $c^{m-1} s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_n$ est une expression réduite de $c^m s_j$. Nous obtenons une contradiction, car la multiplication par s_i à gauche de $s_i c^m$ augmente la longueur de $s_i c^m$ tandis qu'elle diminue la longueur de $c^m s_j$. Maintenant, supposons que s_i appartient à c_+ , alors $s_i c^m = c^m s_j$ est une expression réduite et s_j apparaît dans c_- . L'expression $s_i c^m s_j$ est réduite, car elle peut être vue comme une sous-expression de l'expression réduite $c^{m+1} = c_+ c^m c_-$, nous obtenons une contradiction, car $s_i c^m s_j$ et c^m nous donnent deux expressions réduites de longueurs différentes d'un même élément.

Donc $m \geq \lfloor h/2 \rfloor$. Cela force $|\text{Orb}_c(s_i)| \geq h/2 |\text{Orb}_c(s_i) \cap S|$. Les seules valeurs possibles sont donc h et $h/2$. Elle sera égale à $h/2$ si l'orbite n'a qu'une réflexion simple, elle sera égale à h si elle possède deux réflexions simples. En effectuant la somme des cardinalités, on obtient donc $nh/2$ qui correspond à la cardinalité de T . ■

Lemme 2.15 (Lemme 1.10, (Reading, 2007a)) Soient $W' \leq W$ un sous-groupe parabolique non nécessairement standard avec l'ensemble de générateurs canonique $S' \neq \emptyset$ et c un élément de Coxeter de W . Il existe une suite s_0, s_1, \dots, s_k de générateurs de W , telle que :

- (i) s_0 est une lettre initiale de c ;
- (ii) s_i est une lettre initiale de $s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_0 c s_0 \cdots s_{i-2} s_{i-1}$, $\forall 1 \leq i \leq k$;
- (iii) s_k appartient à l'ensemble $s_{k-1} s_{k-2} \cdots s_0 S' s_0 \cdots s_{k-2} s_{k-1}$.

DÉMONSTRATION. Écrivons l'ensemble $S'_i := s_{i-1}s_{i-2} \cdots s_0 S' s_0 \cdots s_{i-2}s_{i-1}$, pour $i \geq 1$ afin d'alléger l'écriture. Le lemme 2.13, nous assure qu'il existe une suite s_0, s_1, \dots, s_{j-1} de générateurs telle que s_i est une lettre initiale de c_i pour $i = 0, 1, \dots, j-1$ et telle que c_j est un élément de Coxeter biparti par rapport à une certaine partition $S = S_+ \cup S_-$. Maintenant, à l'aide de cette suite, on vérifie si $s_i \in S'_i$ pour un certain entier i auquel cas le lemme est démontré. Sinon, puisque c_j est biparti, le lemme 2.14 nous affirme qu'en conjuguant l'ensemble S'_j par les éléments c_- et c_+ , à un certain stade, l'ensemble conjugué $c^m S'_j (c^{-1})^m$ contiendra une réflexion simple s . Pour obtenir la suite désirée fixons une écriture de c_- et c_+ , on commence par s_0, s_1, \dots, s_j obtenus précédemment et ensuite on adjoint les lettres de $c_- c_+ \cdots c_{\text{sgn}((-1)^m}$. La dernière lettre de la suite obtenue s_0, \dots, s_k sera s et cette suite possède la propriété recherchée. ■

2.2 Éléments triés

Comme nous l'avons déjà noté, les éléments d'un groupe de Coxeter W ont souvent plusieurs expressions réduites. Un problème classique de la théorie est de savoir quand deux éléments du groupe sont égaux. Pour ce faire, nous fixons une écriture particulière pour chacun des éléments. Ensuite, il devient très simple de savoir si deux éléments sont égaux, il suffit de comparer les expressions obtenues. Deux éléments seront égaux si et seulement s'ils ont la même expression. Il y a plusieurs écritures possibles qui résolvent ce problème, nous avons déjà mentionné la forme normale d'une expression, une autre possibilité s'appuie sur le choix d'un élément de Coxeter.

Définition 2.16 Étant donné un élément de Coxeter c de W , on note c^∞ le mot infini $cccc \cdots = a_1 a_2 a_3 \cdots$ avec $a_i \in S$. Soient $w \in W$, l'expression triée $\mathbf{w} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell(w)}}$ de w par rapport à c est le premier sous-mot de c^∞ donnant une expression réduite de w . C'est-à-dire que la suite d'indices $i_1, i_2, \dots, i_{\ell(w)}$, de l'expression réduite de w , est la plus petite dans l'ordre lexicographique des nombres naturels telle que $w = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell(w)}}$.

Si $I \subset S$, le sous-mot de c formé en considérant seulement les réflexions dans I est un élément de Coxeter de W_I , on le note $c_{(I)}$. En écrivant $c = s_1 s_2 \cdots s_n$ et le mot infini $c^\infty =$

$cccc \cdots = s_1 s_2 \cdots s_n s_1 s_2 \cdots s_n s_1 s_2 \cdots s_n \cdots$, l'expression triée \mathbf{w} de w s'exprime comme une suite de sous-mots de c . Afin de bien situer les sous-mots, nous écrivons le mot c^∞ et les expressions triées à l'aide de séparateurs $|$; $c^\infty = s_1 s_2 \cdots s_n | s_1 s_2 \cdots s_n | s_1 s_2 \cdots s_n | \cdots$ et $w = s_1 s_2 s_3 | s_1 s_2 | s_1$ par exemple.

Comme nous venons de le voir, chaque expression triée \mathbf{w} s'écrit comme un produit d'éléments de Coxeter de sous-groupes paraboliques :

$$\mathbf{w} = c_{(K_1)} c_{(K_2)} \cdots c_{(K_p)} \quad \text{avec } K_i \subseteq S, \quad |K_i| \neq 0 \quad (\forall 1 \leq i \leq p)$$

$$\text{et } \ell(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^p |K_i|.$$

La suite d'ensemble K_1, K_2, \dots, K_p est appelé la factorisation de w par rapport à c .

Exemple 2.17 Étant donné le groupe A_2 et l'élément de Coxeter $c_1 = s_1 s_2$, les expressions triées par rapport à c_1 des éléments sont $\{e, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 | s_1, s_1 s_2 | s_1\}$. Pour l'élément de Coxeter $c_2 = s_2 s_1$ les expressions triées deviennent $\{e, s_1, s_2, s_1 | s_2, s_2 s_1, s_2 s_1 | s_2\}$. La factorisation de l'élément $s_1 s_2$ par rapport à c_2 est $\{s_1\}, \{s_2\}$ et celle de $s_1 s_2 s_1$ par rapport à c_1 est $\{s_1, s_2\}, \{s_1\}$.

Un élément w est trié par rapport à un élément de Coxeter c si la suite d'ensembles de générateurs K_i est décroissante par rapport à l'inclusion; $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots \supseteq K_p$. De façon équivalente, un élément est trié si le sous-mot $c_{(K_i)}$ est un sous-mot de $c_{(K_{i-1})}$ pour $2 \leq i \leq p$. Si w est un élément trié et c est un préfixe de son expression triée \mathbf{w} , on dit que w est de support complet. Lorsque le contexte sera clair nous dirons simplement qu'un élément est trié pour alléger le texte.

Exemple 2.18 Poursuivant l'exemple précédent, les éléments triés par rapport à c_1 sont $\{e, s_1, s_2, s_1 s_2, s_1 s_2 | s_1\}$. Les éléments à support complet sont $\{s_1 s_2, s_1 s_2 | s_1\}$.

Les deux lemmes suivants seront utiles lors d'une récurrence dans la démonstration de la correspondance de N. Reading présentée à la section 3.3 du chapitre 3. Le premier donne une définition équivalente pour qu'un élément soit trié (en fixant l'identité e comme étant toujours trié).

Lemme 2.19 (Lemme 2.4-5, (Reading, 2007a)) Soit s une lettre initiale d'un élément de Coxeter c et $w \in W$.

- (i) Si $\ell(sw) > \ell(w)$, alors w est trié par rapport à c si et seulement si w est trié par rapport à sc dans $W_{(s)}$.
- (ii) Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors w est trié par rapport à c si et seulement si sw est trié par rapport à scs .

DÉMONSTRATION. Par la définition, si $\ell(sw) > \ell(w)$ et w est trié, alors $w = c_{(K_1)}c_{(K_2)} \cdots c_{(K_p)}$ et $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots \supseteq K_p$. Mais alors $sc_{(K_1)}c_{(K_2)} \cdots c_{(K_p)}$ est une expression réduite de sw et, puisque s est une lettre initiale de c , $s \notin K_i$ pour tout i . Ainsi w est trié par rapport à sc dans $W_{(s)}$. L'autre direction est directe. Maintenant, si $\ell(sw) < \ell(w)$ et w est trié, alors $w = c_{(K_1)}c_{(K_2)} \cdots c_{(K_p)}$ et $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots \supseteq K_p$. Puisque s est une lettre initiale de c , alors on peut écrire l'expression triée de w commençant par s . Ensuite, en multipliant l'expression triée w à gauche par s on obtient $sw = c_{(K_1 \setminus \{s\})}c_{(K_2)} \cdots c_{(K_p)}$. Si s n'apparaît plus dans l'expression il est clair que sw est trié par rapport à scs , sinon puisque s est initiale on peut faire passer s d'un ensemble K_i à un ensemble K_{i-1} et obtenir une expression triée pour sw par rapport à scs , bien sûr sw sera trié par rapport à scs . Le sens inverse s'obtient en faisant l'action inverse. ■

Ce lemme est intimement liée aux mutations de « carquois » utilisées dans l'article (Marsh, Reineke et Zelevinsky, 2003). L'opération scs sur un élément de Coxeter correspond à une mutation d'un carquois associé à l'élément c . N. Reading a démontré le prochain lemme pour les types A, B et D en utilisant la notion d'élément « aligné » et l'a vérifié par ordinateur pour les groupes exceptionnels. Il serait très intéressant pour la théorie de trouver une nouvelle démonstration de ce résultat.

Lemme 2.20 (Lemme 6.7, (Reading, 2007a)) Soient s une lettre finale d'un élément de Coxeter c et w un élément trié par rapport à c . Alors $\ell(sw) < \ell(w)$ si et seulement si s est une réflexion descendante de w .

2.3 Treillis Cambriens

Dans un article paru en 2006, N. Reading a introduit les treillis Cambriens². Ces treillis forment une large généralisation des treillis de Tamari. Afin de conserver une approche combinatoire de la théorie, nous ne donnerons pas la définition utilisée au départ par N. Reading qui utilise la notion de congruence; nous utiliserons plutôt les éléments triés pour définir les treillis Cambriens. Pour obtenir plus de détails voir les articles (Reading, 2006) et (Reading, 2007b).

Théorème et Définition 2.21 (Théorème 1.2, (Reading, 2007b)) Soient W un groupe de Coxeter et c un élément de Coxeter de W . Les éléments de W triés par rapport à c forment un sous-treillis \mathcal{C}_c du treillis de l'ordre faible appelé treillis Cambrien.

Au départ, N. Reading avait défini une congruence « Cambrienne » du treillis de l'ordre faible de W . Il a ensuite démontré que chaque classe de congruence du treillis possède un unique élément minimal. Ces éléments forment un ensemble naturel de représentants de la congruence. Il s'avère que ces éléments minimaux sont en fait des éléments triés par rapport à un certain élément de Coxeter. Ainsi, les éléments triés forment un modèle combinatoire pour les treillis Cambriens obtenus à partir de la congruence.

Les figures 2.1, 2.2 et 2.3 montrent des treillis Cambriens pour les groupes A_2 et A_3 . Les treillis Cambriens de A_3 sans les classes d'équivalences figurent dans l'appendice A.

Le résultat suivant est une version plus faible d'un théorème obtenu par C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas (cf. Théorème 3.4 de l'article (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007)).

Théorème 2.22 Étant donné un treillis Cambrien \mathcal{C}_c , il existe un polytope - appelé *associaèdre Coxeter-généralisé* - dont la charpente de dimension 1 est le diagramme de Hasse de \mathcal{C}_c .

2. Pour en connaître davantage sur les treillis Cambriens, voir le mémoire de maîtrise de J. Chauvin étudiante de l'UQAM dirigée par C. Hohlweg.

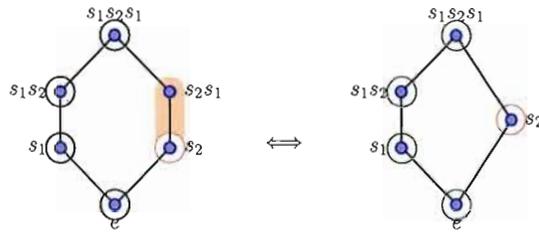


Figure 2.1 Le treillis Cambrien pour A_2 et l'élément de Coxeter $c = s_1 s_2$. Les éléments triés sont entourés d'un cercle sur fond blanc. Les classes d'équivalence sont indiquées par une ombre orangée.

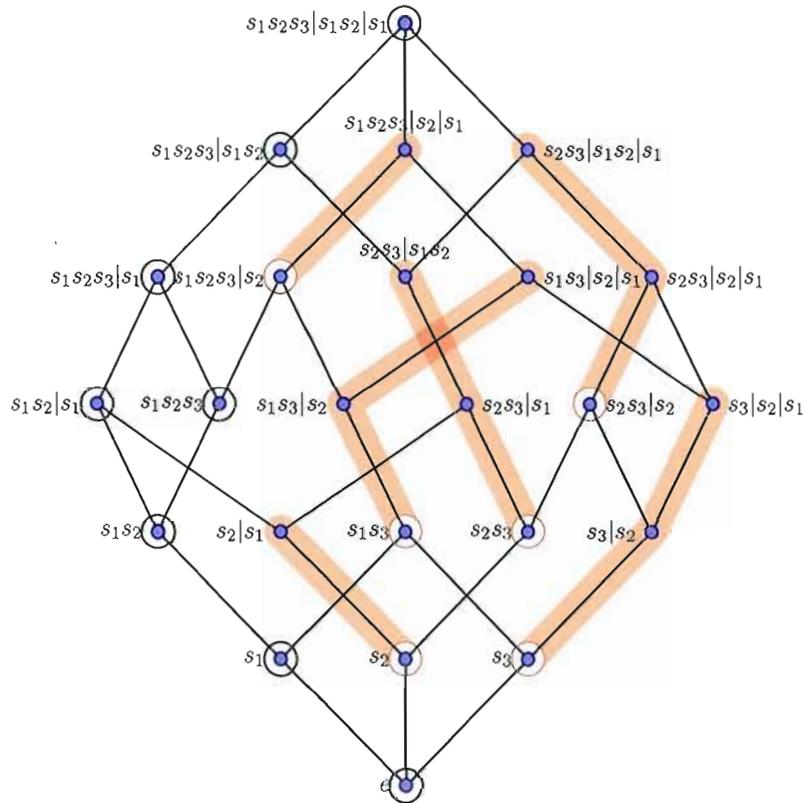


Figure 2.2 Le treillis Cambrien pour A_3 et l'élément de Coxeter $c = s_1 s_2 s_3$. Les éléments triés sont entourés d'un cercle sur fond blanc. Les classes d'équivalence sont indiquées par une ombre orangée.

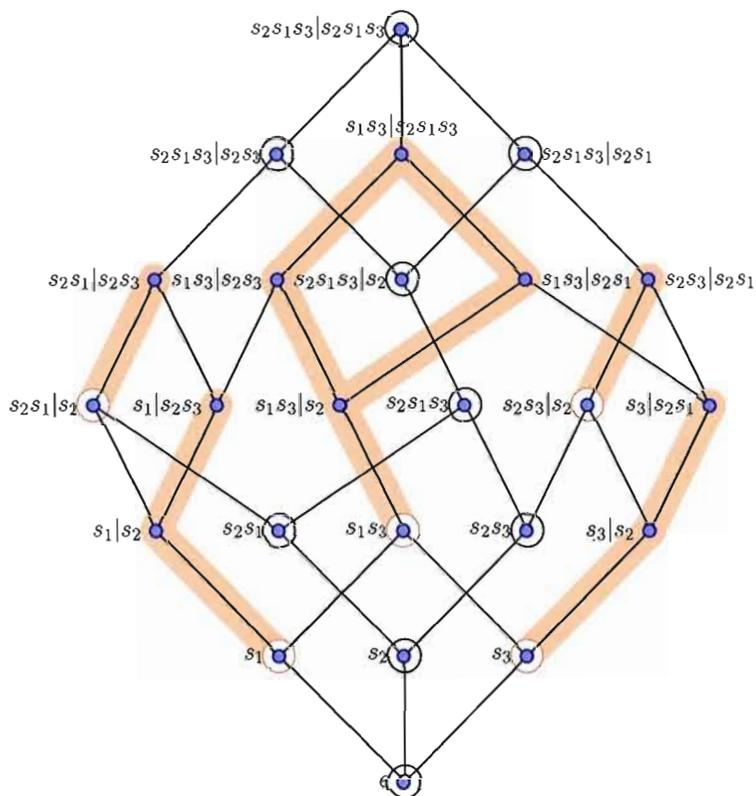


Figure 2.3 Le treillis Cambrien pour A_3 et l'élément de Coxeter $c = s_2s_1s_3$. Les éléments triés sont entourés d'un cercle sur fond blanc. Les classes d'équivalence sont indiquées par une ombre orangée.

Non seulement ce résultat donne une réponse à la conjecture de N. Reading, en outre il généralise l'associaèdre. L'associaèdre est un objet important pour l'étude des algèbres amassées. De plus, le résultat fournit une méthode alternative pour le définir. Pour arriver au résultat, C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas introduisent les éléments *singletons* qui ont des propriétés combinatoires importantes mais encore méconnues.

2.4 Éléments singletons

L'approche à l'aide des éléments triés des treillis Cambrien nous permet d'obtenir combinatoirement certains éléments, qui sont d'une grande importance pour la construction de l'associaèdre généralisé de Hohlweg, Lange et Thomas. Ces éléments sont les éléments singletons.

Définition 2.23 Un élément w est un singleton si son expression triée \mathbf{w} est un préfixe de l'expression triée \mathbf{w}_o de w_o à commutations près. C'est-à-dire que l'expression triée \mathbf{w} peut être réordonnée en utilisant les relations où deux générateurs commutent pour obtenir une nouvelle expression qui est un préfixe de l'expression triée \mathbf{w}_o de w_o .

Exemple 2.24 Pour le groupe A_2 et l'élément de Coxeter $c = s_1 s_2$, l'expression triée de w_o est $\mathbf{w}_o = s_1 s_2 | s_1$. Les singletons sont $\{e, s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 | s_1\}$. Pour A_3 et l'élément de Coxeter $c = s_1 s_2 s_3$, l'expression triée de w_o est $\mathbf{w}_o = s_1 s_2 s_3 | s_1 s_2 | s_1$. Les singletons sont $\{e, s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 s_3, s_1 s_2 | s_1, s_1 s_2 s_3 | s_1, s_1 s_2 s_3 | s_1 s_2, s_1 s_2 s_3 | s_1 s_2 | s_1\}$. Remarquons l'utilisation de la commutation pour obtenir le singleton $s_1 s_2 | s_1$.

Le prochain théorème vient justifier l'appellation singleton.

Proposition 2.25 (Théorème 1.2, (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007))

Soit $w \in W$ un élément trié. Alors w est un singleton si et seulement s'il est seul dans sa classe de congruence Cambrienne.

Exemple 2.26 Dans les figures 2.1, 2.2 et 2.3, les éléments singletons sont les éléments entourés d'un cercle noir. Ceux entourés d'un cercle orange ne sont pas seuls dans leur

classe d'équivalence.

Dans l'article (Speyer, 2009), D. Speyer donne une méthode pour trouver les singletons en utilisant des mutations de carquois et des suites « admissibles ». Tout comme C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas dans leur article, D. Speyer a démontré que les éléments singletons forment un treillis distributif, c'est-à-dire que \vee est distributive sur \wedge (ou de façon équivalente, \wedge est distributive sur \vee).

Proposition 2.27 (Proposition 1.5, (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007))

Les éléments singletons forment un treillis distributif.

Les figures 2.4 et 2.5 montre les diagrammes de Hasse des treillis distributifs des singletons pour les groupes A_2 et A_3 .

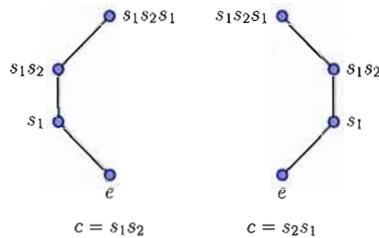


Figure 2.4 Treillis des singletons de A_2 .

C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas ont remarqué qu'il serait intéressant d'obtenir une interprétation combinatoire de l'expression trié w_o de w_o pour obtenir les singletons facilement. Les suites admissibles de D. Speyer donnent une réponse à cette question. Par contre, l'étude des suites admissibles montre l'importance d'une certaine fonction ϕ sur les générateurs S du groupe W . Cette fonction est apparue dans l'article (Kleiner et Pelley, 2007) de M. Kleiner et A. Pelley. Obtenir une formule explicite pour ϕ nous permettrait d'obtenir une autre interprétation qui n'utilise pas la théorie des carquois.

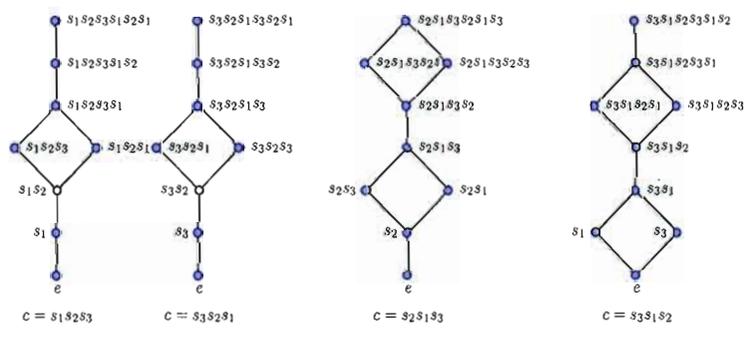


Figure 2.5 Treillis des singletons de A_3 .

CHAPITRE III

AMAS ET ÉLÉMENTS TRIÉS

Fixons un système de Coxeter (W, S) , T son ensemble de réflexions et c un élément de Coxeter de W .

3.1 Historique

En 2002, S. Fomin et A. Zelevinsky ont amorcé l'étude d'une certaine classe d'algèbres commutatives contenues dans le corps des fonctions rationnelles sur \mathbb{Q} . Ces algèbres sont engendrées par des ensembles de « variables de base » appelés amas algébriques¹, c'est pourquoi les algèbres sont appelées algèbres amassées. La méthode pour former les amas algébriques fait appel à une relation de « compatibilité » sur les variables de base. Lorsqu'une algèbre amassée est engendrée par un nombre fini d'amas, on dit qu'elle est de type fini. Étant donné un amas x d'une algèbre amassée \mathcal{A} ², nous pouvons l'altérer d'une certaine façon pour obtenir un autre amas x' de cette algèbre \mathcal{A} . Cette altération permet d'obtenir plusieurs autres amas. En fait, nous les obtenons tous de cette façon lorsque l'algèbre est de type fini. Dans ce cas, on forme un « graphe d'échanges » qui relie deux amas si une mutation les lie. Pour classifier les algèbres amassées de type

1. Nous utilisons ce terme afin de distinguer avec les amas *combinatoires* obtenus à l'aide des groupes de Coxeter

2. Nous utilisons la même notation que l'arrangement de Coxeter. Selon le contexte, aucune ambiguïté ne sera possible.

fini, S. Fomin et A. Zelevinsky ont classifié les graphes d'échanges possibles. Il s'avère que la classification est la même que celle de Cartan-Killing pour les algèbres de Lie semi-simples. De plus, les graphes d'échanges généralisent l'*associaèdre* (ou polytope de Stasheff) (cf. (Stasheff, 1963)). Pour cette raison le graphe d'échanges est souvent appelé *associaèdre généralisé*. Pour une présentation élémentaire des algèbres amassées voir le survol de S. Fomin et N. Reading (Fomin et Reading, 2007). Pour en apprendre davantage sur les fondements de la théorie, les lecteurs plus expérimentés pourront lire les articles (Fomin et Zelevinsky, 2002), (Fomin et Zelevinsky, 2003b) et (Fomin et Zelevinsky, 2003a).

Comme vous l'aurez remarqué, nous n'avons donné aucune définition formelle jusqu'à maintenant. Nous désirons adopter une approche combinatoire de la théorie et nous verrons qu'elle correspond à celle de la théorie « classique ». Cependant, il faut noter que bien des notions de la théorie des algèbres amassées ne possèdent pas encore une interprétation combinatoire à l'aide des groupes de Coxeter. L'approche que nous avons choisie est celle de N. Reading provenant de la section 7 de son article (Reading, 2007a).

3.2 Les amas combinatoires

Définissons l'ensemble $-S := \{-s \mid s \in S\}$ des réflexions négatives formelles et l'ensemble des réflexions presque positives $T_{\geq -1} := T \cup (-S)$. Étant donné un sous-ensemble $J \subseteq S$, notons par T_J l'ensemble $T \cap W_J$ et $(T_J)_{\geq -1}$ l'ensemble $T_J \cup (-J)$. Pour chaque $s \in S$, on définit une involution $\sigma_s : T_{\geq -1} \rightarrow T_{\geq -1}$,

$$\sigma_s(t) := \begin{cases} -t & \text{si } t = \pm s \\ t & \text{si } t \in -S \setminus \{-s\} \\ sts & \text{si } t \in T \setminus \{s\}. \end{cases}$$

Exemple 3.1 Considérons le groupe A_2 . Les réflexions presque positives sont $T_{\geq -1} = \{-s_1, -s_2, s_1, s_2, s_1s_2s_1\}$. Le schéma suivant illustre les involutions σ_{s_1} et σ_{s_2} .

$$\begin{array}{ccccccc} -s_1 & \xleftrightarrow{\sigma_{s_1}} & s_1 & \xleftrightarrow{\sigma_{s_2}} & s_1s_2s_1 & \xleftrightarrow{\sigma_{s_1}} & s_2 & \xleftrightarrow{\sigma_{s_2}} & -s_2 \\ \circlearrowleft & & & & & & & & \circlearrowleft \\ \sigma_{s_2} & & & & & & & & \sigma_{s_1} \end{array}$$

Le lemme suivant est obtenu en utilisant les lemmes sur la conjugaison circulaire. Il permet d'associer chaque réflexion presque positive à une réflexion négative à l'aide d'une suite obtenue par des conjugaisons circulaires. C'est une propriété importante dont nous verrons l'utilité chez la correspondance de Reading.

Lemme 3.2 (Lemme 7.1, (Reading, 2007a)) Soient $t \in T_{\geq -1}$ et c un élément de Coxeter de W . Il existe une suite s_0, s_1, \dots, s_k de générateurs de W , telle que :

- (i) s_0 est une lettre initiale de c ;
- (ii) s_i est une lettre initiale de $s_{i-1}s_{i-2} \cdots s_0cs_0 \cdots s_{i-2}s_{i-1}$, $\forall 1 \leq i \leq k$;
- (iii) $\sigma_{s_{k-1}} \circ \sigma_{s_{k-2}} \circ \cdots \circ \sigma_{s_0}(t) = -s_k$.

DÉMONSTRATION. Afin d'alléger l'écriture, si $i \geq 1$, nous notons l'élément $\sigma_{s_{i-1}} \circ \sigma_{s_{i-2}} \circ \cdots \circ \sigma_{s_0}(t)$ par t_i . Si $t = -s$ et s est une lettre initiale de c , alors la suite désirée n'a qu'un seul élément s . Si $t = -s$ et $s \in S$ n'est pas une lettre initiale de c , alors on définit un autre élément de Coxeter c' ayant s comme lettre initiale. Par le lemme 2.13, nous savons que c' et c sont conjugués p.p.c. ; il existe une suite s_0, \dots, s_k , telle que $t_k = t_{k-1} = \cdots = t_0 = -s_k = -s$ avec s_i une lettre initiale de c_i , pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$. Cette suite satisfait exactement les exigences du lemme.

Finalement, si $t \notin -S$, nous utilisons le lemme 2.15 afin d'arriver au résultat. Fixons W' comme étant le sous-groupe parabolique engendré par t . L'ensemble des générateurs canoniques S' de W' est alors $S' = \{t\}$ et W' possède 2 éléments. Le lemme 2.15 nous assure l'existence d'une suite s_0, s_1, \dots, s_k telle que s_i est une lettre initiale de c_i , pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$ et $t_i = s_{i-1}t_{i-1}s_{i-1} = \sigma_{s_{i-1}}(t_{i-1})$ pour chaque $i \in [k]$ et telle que le dernier terme est $s_k = t_k$. Alors $t_{k+1} = \sigma_{s_k}(t_k) = -s_k$. Bien sûr, c'est la suite recherchée. ■

Nous notons $\mu_c(t)$ le plus petit entier k tel qu'il existe une suite s_0, s_1, \dots, s_k satisfaisant le lemme 3.2. En particulier, $\mu_c(t) = 0$ si et seulement si $t = -s$ et s est une lettre initiale de c .

Exemple 3.3 Considérons l'exemple précédent en fixant l'élément de Coxeter $c = s_1s_2$,

nous obtenons par le calcul que $\mu_c(-s_1) = 0$, $\mu_c(s_1) = 1$, $\mu_c(s_1s_2s_1) = 7$, $\mu_c(s_2) = 3$ et $\mu_c(-s_2) = 5$.

Nous introduisons maintenant la relation de compatibilité par rapport à un élément de Coxeter.

Proposition 3.4 Il existe une famille unique de relations symétriques \parallel_c , c élément de Coxeter, sur l'ensemble $T_{\geq -1}$, ayant les propriétés suivantes.

(i) Soient $s \in S, t \in T_{\geq -1}$. Alors

$$-s \parallel_c t \text{ si et seulement si } t \in (T_{\langle s \rangle})_{\geq -1}.$$

(ii) Soient $t_1, t_2 \in T_{\geq -1}$ et une lettre initiale s de c . Alors

$$t_1 \parallel_c t_2 \text{ si et seulement si } \sigma_s(t_1) \parallel_{scs} \sigma_s(t_2).$$

Dans ce cas, nous dirons que t_1 et t_2 sont compatibles.

Puisque \parallel_c est symétrique, l'énoncé (ii) est équivalent au même énoncé mais avec une lettre finale s de c au lieu d'une lettre initiale.

Nous voyons l'importance du lemme 3.2 pour que les relations \parallel_c soient uniques. L'ordinateur a été utilisé pour vérifier la proposition dans le cas où W est un groupe non cristallographique (cf. proposition 7.2, (Reading, 2007a)). Cette relation est détaillée dans l'article (Marsh, Reineke et Zelevinsky, 2003).

Proposition 3.5 Soient $J \subseteq S$ et $t_1, t_2 \in T_{\geq -1}$. De plus, fixons c' l'élément de Coxeter de $W_{\langle s \rangle}$ obtenu de c en enlevant la lettre s . Alors, $t_1 \parallel_c t_2$ si et seulement si $t_1 \parallel_{c'} t_2$.

Encore une fois, l'ordinateur a été utilisé pour démontrer cette proposition dans le cas cristallographique (cf. proposition 7.3, (Reading, 2007a)). Obtenir une démonstration directe de ces propositions apporterait beaucoup à la théorie. Cependant, la correspondance de Reading donne une alternative assez efficace pour la compatibilité, comme nous le verrons bientôt.

Remarque 3.6 Cette proposition montre comment obtenir la relation de compatibilité à partir des sous-groupes paraboliques. La démonstration de la correspondance de Reading se base sur une récurrence à l'aide des sous-groupes paraboliques. De là l'importance de cette proposition.

Un sous-ensemble $U \subseteq T_{\geq -1}$ est compatible par rapport à c si tous les éléments de U sont compatibles. Un amas combinatoire (par rapport à c) est un sous-ensemble compatible ayant un maximum d'éléments. Un amas est positif s'il ne contient pas d'élément de $-S$. Lors de la définition des systèmes de racines, nous avons constaté que chaque réflexion $t \in T$ correspond à une racine de Φ^+ . Nous formons l'ensemble des racines presque positives $\Phi_{\geq -1} := \Phi^+ \cup (-\Delta)$ comme étant l'union des racines positives et les inverses des racines simples. La correspondance entre l'ensemble $\Phi_{\geq -1}$ et $T_{\geq -1}$ est directe. Et ainsi, nous pouvons voir un amas combinatoire à la fois comme un sous-ensemble de $\Phi_{\geq -1}$ ou de $T_{\geq -1}$ selon le contexte.

Remarque 3.7 Nous connaissons déjà une interprétation combinatoire de cette compatibilité pour les groupes du type A, B et D à l'aide de certains diagrammes planaires. Récemment, N. Reading dans son article (Reading, 2009) utilise un nouvel outil le « plan de Coxeter » pour interpréter la compatibilité. Les critères pour la compatibilité dans les groupes exceptionnels restent *ad hoc*, mais il semble que le plan de Coxeter constitue une voie prometteuse afin d'apporter une nouvelle interprétation de la compatibilité.

Exemple 3.8 Si $W = A_2$ et $c = s_1s_2$, alors $T_{\geq -1} = \{-s_1, -s_2, s_1, s_2, s_1s_2s_1\}$ et les amas combinatoires sont :

$$\{-s_1, -s_2\}, \{s_1, -s_2\}, \{-s_1, s_2\}, \{s_1, s_1s_2s_1\}, \{s_2, s_1s_2s_1\}.$$

Si $W = A_3$ et $c = s_1s_2s_3$, alors

$$T_{\geq -1} = \{-s_1, -s_2, -s_3, s_1, s_2, s_3, s_1s_2s_1, s_2s_3s_2, s_1s_2s_3s_2s_1\}$$

et les amas combinatoires sont :

$$\begin{aligned}
& \{-s_1, -s_2, -s_3\}, & \{s_1, -s_2, -s_3\}, & \{-s_1, s_2, -s_3\}, \\
& \{-s_1, -s_2, s_3\}, & \{s_1, s_1s_2s_1, -s_3\}, & \{s_1, -s_2, s_3\}, \\
& \{-s_1, s_2, s_2s_3s_2\}, & \{s_2, s_1s_2s_1, -s_3\}, & \{s_1, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
& \{-s_1, s_3, s_2s_3s_2\}, & \{s_2, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1\}, & \{s_1, s_3, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
& \{s_2, s_2s_3s_2, s_1s_2s_3s_2s_1\}, & \{s_3, s_2s_3s_2, s_1s_2s_3s_2s_1\}.
\end{aligned}$$

Les amas s'obtiennent par le calcul à l'aide des deux dernières propositions. Le calcul de la fonction $\mu_c(t)$ nous permet de connaître le nombre de σ_s à appliquer à une réflexion pour nous permettre d'utiliser le premier point de la proposition 3.4. Nous verrons que ces calculs ne seront plus nécessaire à l'aide de la correspondance de N. Reading.

Remarque 3.9 La fonction μ_c est directement reliée à la relation de compatibilité. S. Fomin et A. Zelevinsky ont introduit le « degré de compatibilité » relié à la fonction μ_c . Il serait intéressant de trouver une interprétation plus simple pour la fonction μ_c .

Pour caractériser les algèbres amassées de type fini, S. Fomin et A. Zelevinsky les ont codées à l'aide de matrices. Il s'avère qu'en effectuant certaines opérations sur ces matrices, elles correspondent aux matrices de Cartan associées aux systèmes de racines cristallographiques. Ainsi, les algèbres amassées de type fini sont classifiées à l'aide des types de Cartan. La classification s'appliquait d'abord pour le cas cristallographique et maintenant, à l'aide de résultats récents de N. Reading et S. Fomin (cf. (Fomin et Reading, 2007)), la conjecture de N. Reading, présentée dans l'article (Reading, 2006), résolue par Hohlweg, Lange et Thomas (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007), les graphes d'échanges (ou de façon équivalente, les associaèdres) sont classifiés par les types de groupes de Coxeter. Mais encore, la construction décrite dans l'article (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007) offre une généralisation maintenant au niveau des éléments de Coxeter pour l'associaèdre.

Remarque 3.10 Récemment, N. Bergeron et al. ont déterminé les classes d'isométrie de l'associaèdre Coxeter-généralisé dans leur article (Bergeron et al., 2009). Cette classification fait appel aux groupes d'automorphisme des graphes de Coxeter.

Si nous connaissons les amas combinatoires pour un groupe de Coxeter donné, la fonction suivante nous permet d'obtenir les amas algébriques de l'algèbre amassée associée.

Théorème 3.11 (Théorème 1.9, (Fomin et Zelevinsky, 2003a))

Soient $\Phi_{\geq -1}$ l'ensemble des racines presque positives d'un groupe de Coxeter W , χ l'ensemble des variables de base d'une algèbre amassée de type correspondant et $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ un système simple. Si $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n \in \Phi_{\geq -1}$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_{\geq -1} &\rightarrow \chi \\ \alpha &\mapsto \frac{P_t((x_1, \dots, x_m))}{x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}}, \end{aligned}$$

où P_t est un polynôme ayant comme variables x_1, \dots, x_m et un terme constant non nul, est une bijection entre $\Phi_{\geq -1}$ et χ .

Pour obtenir les amas algébriques classiques générant une algèbre amassée de type fini, il suffit maintenant de regarder l'image des amas combinatoires par cette fonction et de déterminer le polynôme P_t . En revanche, la caractérisation de ce dernier n'est pas simple.

3.3 Correspondance de N. Reading

Dans cette section, nous présentons le résultat principal du présent texte. Il s'agit de la correspondance entre les amas combinatoires et les éléments triés.

Définition 3.12 Soit $s \in S$, w un élément trié et $\mathbf{w} = a_1 a_2 \cdots a_k$ son expression triée. Alors la dernière réflexion $\text{Lr}_s^T(w)$ de s dans w est

$$\text{Lr}_s^T(w) := \begin{cases} a_1 a_2 \cdots a_j a_{j-1} \cdots a_1 & \text{si } s \text{ apparaît dans } \mathbf{w}, \text{ et } a_j \text{ est la dernière} \\ & \text{occurrence de } s \text{ dans } \mathbf{w}; \\ -s & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3.13 Si $W = A_2$ et $c = s_1 s_2$, alors les dernières réflexions sont :

$$\begin{aligned}
\text{Lr}_{s_1}^T(e) &= -s_1, & \text{Lr}_{s_2}^T(e) &= -s_2, \\
\text{Lr}_{s_1}^T(s_1) &= s_1, & \text{Lr}_{s_2}^T(s_1) &= -s_2, \\
\text{Lr}_{s_1}^T(s_2) &= -s_1, & \text{Lr}_{s_2}^T(s_2) &= s_2, \\
\text{Lr}_{s_1}^T(s_1s_2) &= s_1, & \text{Lr}_{s_2}^T(s_1s_2) &= s_1s_2s_1, \\
\text{Lr}_{s_1}^T(s_1s_2s_1) &= s_2, & \text{Lr}_{s_2}^T(s_1s_2s_1) &= s_1s_2s_1.
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient la racine correspondante dans Φ :

$$\text{Lr}_s^\Phi(w) := \begin{cases} a_1 \cdots a_{j-1}(\alpha_s) & \text{si } s \text{ apparaît dans } \mathbf{w}, \text{ et } a_j \text{ est la dernière} \\ & \text{occurrence de } s \text{ dans } \mathbf{w}; \\ -\alpha_s & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3.14 Si $W = A_2$ et $c = s_1s_2$, alors les dernières réflexions sont :

$$\begin{aligned}
\text{Lr}_{s_1}^\Phi(e) &= -\alpha, & \text{Lr}_{s_2}^\Phi(e) &= -\beta, \\
\text{Lr}_{s_1}^\Phi(s_1) &= \alpha, & \text{Lr}_{s_2}^\Phi(s_1) &= -\beta, \\
\text{Lr}_{s_1}^\Phi(s_2) &= -\alpha, & \text{Lr}_{s_2}^\Phi(s_2) &= \beta, \\
\text{Lr}_{s_1}^\Phi(s_1s_2) &= \alpha, & \text{Lr}_{s_2}^\Phi(s_1s_2) &= \alpha + \beta, \\
\text{Lr}_{s_1}^\Phi(s_1s_2s_1) &= \beta, & \text{Lr}_{s_2}^\Phi(s_1s_2s_1) &= \alpha + \beta.
\end{aligned}$$

Dénotons par $\text{cl}_c(w)$ l'ensemble des dernières réflexions d'un élément trié w . Voici la correspondance de N. Reading.

Théorème 3.15 (Théorème 8.1, (Reading, 2007a)) La fonction qui envoie un élément trié w vers son ensemble de dernières réflexions $\text{cl}_c(w)$ est une bijection entre les éléments triés et les amas. De plus, cl_c détermine une bijection entre les éléments à support complet et les amas positifs.

Exemple 3.16 Si $W = A_3$ et $c = s_1s_2s_3$, alors les ensembles de dernières réflexions des éléments triés correspondent aux amas combinatoires donnés à l'exemple 3.8.

$$\begin{aligned}
\text{cl}_c(e) &= \{-s_1, -s_2, -s_3\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_1) &= \{s_2, s_1s_2s_1, -s_3\}, \\
\text{cl}_c(s_1) &= \{s_1, -s_2, -s_3\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_3) &= \{s_1, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
\text{cl}_c(s_2) &= \{-s_1, s_2, -s_3\}, & \text{cl}_c(s_2s_3s_2) &= \{-s_1, s_3, s_2s_3s_2\}, \\
\text{cl}_c(s_3) &= \{-s_1, -s_2, s_3\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_3s_1) &= \{s_2, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
\text{cl}_c(s_1s_2) &= \{s_1, s_1s_2s_1, -s_3\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_3s_2) &= \{s_1, s_3, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
\text{cl}_c(s_1s_3) &= \{s_1, -s_2, s_3\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_3s_1s_2) &= \{s_2, s_2s_3s_2, s_1s_2s_3s_2s_1\}, \\
\text{cl}_c(s_2s_3) &= \{-s_1, s_2, s_2s_3s_2\}, & \text{cl}_c(s_1s_2s_3s_1s_2s_1) &= \{s_3, s_2s_3s_2, s_1s_2s_3s_2s_1\}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.17 La bijection entre les éléments triés et les amas suggère une autre caractérisation de la compatibilité. Deux réflexions t_1 et t_2 de $T_{\geq -1}$ sont compatibles si et seulement s'il existe un élément trié w tel que $t_1, t_2 \in \text{cl}_c(w)$. Même dans le cas infini, cette fonction associe à chaque élément trié un sous-ensemble à n éléments. En s'aidant de cette définition, N. Reading a remarqué que la compatibilité peut maintenant être considérée pour les groupes infinis.

3.4 Démonstration de la correspondance de N. Reading

Nous venons de couvrir les résultats nécessaires à la démonstration de la correspondance de Reading. Nous mettons un terme à la préparation en montrant deux faits utilisés à maintes reprises dans la démonstration du théorème.

Lemme 3.18 (Lemme 8.5, (Reading, 2007a)) Soient s une lettre initiale de c et w un élément trié. Si $\ell(sw) > \ell(w)$, alors $\text{cl}_c(w) = \{-s\} \cup \text{cl}_{sc}(w)$. Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors $\text{cl}_c(w) = \sigma_s(\text{cl}_{scs}(sw))$.

DÉMONSTRATION. Comme nous l'avons fait précédemment au lemme 2.19, on utilise une expression réduite de l'élément c qui débute par la lettre s . Si l'expression triée $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\dots\mathbf{w}_n$ de w n'avait pas la lettre s , alors w est trié par rapport à sc et $\text{Lr}_s^T(w) = -s$. Donc $\text{cl}_c(w) = \{-s\} \cup \text{cl}_{sc}(w)$. Si l'expression triée de w commence par s , alors on supprime cette lettre pour obtenir l'expression triée $\mathbf{sw} = \mathbf{w}_2\dots\mathbf{w}_n$ de sw par rapport à scs . Si s n'apparaît pas dans sw , alors $\text{Lr}_s^T(w) = \sigma_s(\text{Lr}_s^T(sw)) = \sigma_s(-s) = s$. Si une lettre

u n'apparaît pas ni dans w ni dans sw , alors $\text{Lr}_u^T(w) = \sigma_s(\text{Lr}_u^T(sw)) = -u$. Finalement, si lettre $u \neq s$ apparaît dans w et sw alors $\text{Lr}_u^T(sw) = \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_i \bar{u} \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_1$, où \bar{u} est la dernière occurrence de u dans sw . Mais alors, $\sigma_s(\text{Lr}_u^T(sw)) = s \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_i \bar{u} \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_1 s = \text{Lr}_u^T(w)$. ■

Lemme 3.19 (Lemme 8.6, (Reading, 2007a)) Soient s une lettre finale de c et w un élément trié. Alors, $\ell(sw) < \ell(w)$ si et seulement si $s \in \text{cl}_c(w)$.

DÉMONSTRATION. Si s est une lettre finale de c et $s \in \text{cl}_c(w)$, par la définition de cl_c , s doit être la première lettre de l'expression triée de w , ainsi $\ell(sw) < \ell(w)$. Étant donné un élément trié w et son expression triée $\mathbf{w} = a_1 a_2 \cdots a_k$, supposons que s est une lettre finale de c et $\ell(sw) < \ell(w)$. Si $k = 1$, alors $\text{Lr}_s^T(w) = s$ et donc $s \in \text{cl}_c(w)$. Supposons maintenant que c'est vrai pour w' , tel que $\ell(w') = k - 1$. En particulier, c'est vrai pour $w' = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$, alors il existe une lettre u telle que $\text{Lr}_u^T(w') = s = a_1 a_2 \cdots a_i a_{i-1} \cdots a_1$ pour un certain entier $1 \leq i \leq k - 1$. Remarquons que $a_i = u$. Si $a_k \neq u$ c'est terminé, car $\text{Lr}_u^T(w) = a_1 a_2 \cdots a_i a_{i-1} \cdots a_1 = s$. Sinon, nous montrons qu'il y a une contradiction. En effet, nous montrons que $u = a_i$ commute avec a_j si $i < j \leq k$ et ainsi le mot $a_1 a_2 \cdots a_k$ n'est pas réduit. Nous démontrons que $sw = wu$ et que a_j commute avec a_i si $j > i$ par récurrence sur la différence $k - i$. Si $k = i$, il n'y a rien à démontrer. Par la suite, notre hypothèse de récurrence nous affirme que $sw' = w'u$. Ainsi en remplaçant de chaque côté par wa_k nous trouvons que $sw = w(a_k u a_k)$. Par le lemme 2.20, $a_1 a_2 \cdots a_i a_{i-1} \cdots a_1 w = a_1 a_2 \cdots \hat{a}_i \cdots a_k = w s'$ pour un certain $s' \in S$. Ce qui fait que $a_k a_i a_k \in S$. Ainsi a_i commute avec a_k , de sorte que $s' = a_i$ et $sw = wu$. Ainsi a_j commute avec a_i si $i < j \leq k$ et la récurrence est terminée. ■

La démonstration de ce dernier lemme est un peu plus simple que celle donné par N. Reading. Nous donnons maintenant la démonstration que N. Reading a obtenu du théorème 3.15. Bien que la démonstration de certains lemmes peuvent être simplifiés, la démonstration du théorème reste assez technique et difficilement simplifiable.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.15 (CORRESPONDANCE DE N. READING) Nous vé-

rifions d'abord par récurrence sur le rang de W que l'ensemble $\text{cl}_c(w)$ est un amas, si w est un élément trié. Étant donné un élément trié w et une lettre initiale s de c , si $\ell(sw) > \ell(w)$, alors w est un élément trié de $W_{(s)}$ par rapport à sc par le lemme 2.19. Par hypothèse de récurrence sur le rang de W , $\text{cl}_{sc}(w)$ est un amas par rapport à sc . La proposition 3.5 implique que $\text{cl}_{sc}(w)$ est un sous-ensemble d'éléments compatibles par rapport à c de $T_{\geq -1}$. Cet ensemble est de cardinalité maximale dans $(T_{(s)})_{\geq -1}$. Par le lemme 3.18 et la propriété (i) de la compatibilité, l'ensemble $\text{cl}_c(w)$ est un amas par rapport à c . Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors $\text{cl}_c(w) = \sigma_s(\text{cl}_{scs}(sw))$, par le lemme 3.18. Par récurrence sur la longueur de w , l'ensemble $\text{cl}_{scs}(sw)$ est un amas par rapport à l'élément de Coxeter scs et par la propriété (ii) de la compatibilité, l'ensemble $\text{cl}_c(w)$ est un amas par rapport à c .

Soient C un amas, $\mu_c(C)$ l'entier minimal parmi les $\mu_c(t)$, avec $t \in C$. Nous montrons maintenant par récurrence sur $\mu_c(C)$ qu'il existe un unique élément trié w par rapport à c tel que $\text{cl}_c(w) = C$. Si $\mu_c(C) = 0$, alors il existe une certaine réflexion négative $-s \in C$ telle que s est une lettre initiale de c . En particulier, $w \in W_{(s)}$ si w est un élément trié par rapport à c . Par le lemme 3.18, l'ensemble $\text{cl}_{sc}(w)$ est égal à l'ensemble $C - \{-s\}$, lequel, par la proposition 3.5, est un amas de $W_{(s)}$ par rapport à l'élément sc . Par récurrence sur le rang de W , il existe un unique élément $w \in W_{(s)}$, trié par rapport à sc , tel que $\text{cl}_{sc}(w) = C - \{-s\}$. Cet élément est trié par rapport à c par le lemme 2.19 et son image est $\text{cl}_c(w) = C$ par le lemme 3.18.

Si $\mu_c(C) > 0$, alors on définit une suite $s_0, s_1, \dots, s_{\mu_c(C)}$ satisfaisant les conditions du lemme 3.2 pour un certain $t \in C$ pour lequel $\mu_c(t) = \mu_c(C)$. Soit $s = s_0$ et considérons l'amas $C' = \sigma_s(C)$ par rapport à l'élément scs . Ainsi $\mu_{scs}(C') = \mu_c(C) - 1$. Alors par récurrence, il existe un unique élément w , trié par rapport à scs , tel que $\text{cl}_{scs}(w) = C'$. Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors par le lemme 3.19, $s \in \text{cl}_{scs}(w) = C'$. Cela implique que $\sigma_s(s) \in \sigma_s(C')$, autrement dit, $-s \in C$, ce qui contredit l'hypothèse que $\mu_c(C) > 0$. Par cette contradiction, nous concluons que $\ell(sw) > \ell(w)$ et par le lemme 2.19, sw est un élément trié par rapport à c . Le lemme 3.18 affirme que $\text{cl}_c(sw) = \sigma_s(\text{cl}_{scs}(sw)) = C$. Maintenant, prenons un élément quelconque trié x par rapport à c , tel que $\text{cl}_c(x) = C$. Puisque $-s \notin C$, $\ell(sx) < \ell(x)$ et ainsi sx est un élément trié par rapport à scs tel

que $\text{cl}_{scs}(sx) = \sigma_s(C) = C'$. Par l'unicité de w , $sx = w$, et donc $x = sw$. Ainsi, sw est le seul élément trié dont l'image par cl_c est C .

Finalement, en examinant la définition d'amas positif, l'image d'un élément trié w contient des réflexions négatives si une lettre s de S n'apparaît pas dans l'expression triée de w . Ainsi, si w est à support complet, l'amas sera positif. ■

3.5 Énumération des éléments triés

Les nombres de Catalan sont connus pour compter une multitude d'objets combinatoires dans divers domaines des mathématiques et la théorie des groupes de Coxeter n'y fait pas exception. Il s'avère que les nombres de Catalan sont une spécialisation des nombres de Coxeter-Catalan pour le type A . Ces nombres sont définis pour chaque type de groupe de Coxeter et ils sont obtenus grâce à la formule :

$$\text{Cat}(W) := \prod_{i=1}^n \frac{e_i + h + 1}{e_i + 1} = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^n (h + d_i), \quad (3.1)$$

où les e_i sont les exposants de W , les d_i sont les degrés de W et h est le nombre de Coxeter. Le tableau 3.1 donne les valeurs des nombres de Coxeter-Catalan pour chaque type.

A_{n-1}	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	H_3	H_4	$I_2(m)$
$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$	$\binom{2n}{n}$	$\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$	833	4160	25080	105	32	280	$m + 2$

Tableau 3.1 Les nombres de Coxeter-Catalan pour chaque groupe de Coxeter irréductible fini.

Parmi les nombres reliés aux nombres de Coxeter-Catalan, deux types ont un intérêt particulier pour nous. Le nombre de Coxeter-Catalan positif associé à un groupe de Coxeter W est

$$\text{Cat}_+(W) := \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^n (h + d_i - 2), \quad (3.2)$$

où les d_i sont les degrés de W et h son nombre de Coxeter. Le tableau 3.2 donne les valeurs des nombres de Coxeter-Catalan positifs pour chaque type.

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	H_3	H_4	$I_2(m)$
$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$	$\binom{2n-1}{n}$	$\frac{3n-4}{2n-2} \binom{2n-2}{n}$	418	2431	17342	66	21	232	$m - 1$

Tableau 3.2 Les nombres de Coxeter-Catalan positifs pour chaque groupe de Coxeter irréductible fini.

Le deuxième type est un ensemble de nombres appelés nombres de Coxeter-Narayana aussi associé à un groupe de Coxeter W . Ces nombres forment une généralisation des nombres de Narayana au niveau des groupes de Coxeter. Bien que l'on connaisse les valeurs de ces nombres, une formule uniforme semblable aux équations (3.1) et (3.2) n'est pas encore connue. Un tableau contenant les nombres de Coxeter-Narayana pour les groupes de Coxeter irréductibles finis figure dans l'appendice B. Pour plus de détails sur ces nombres, voir la section 3.5 de la thèse (Armstrong, 2009) et l'article (Fomin et Reading, 2005).

Selon S. Fomin et N. Reading, la première apparition de ces nombres est due à Djoković (cf. l'article (Djoković, 1980)). Ces dernières années, ces nombres ont fait l'objet de beaucoup d'études (cf. Section 5 de l'article (Fomin et Reading, 2007) et Chapitre 1 de la thèse (Armstrong, 2009) et les références incluses). Il se trouve que les nombres de Coxeter-Catalan comptent le nombre d'éléments triés pour les groupes de Coxeter. Le théorème 3.15 a établi ce résultat pour la première fois via des bijections avec les partitions non croisées et les amas. En plus de ce résultat, la bijection de N. Reading permet de relier des notions concernant les amas aux éléments triés. Par exemple, il obtient des résultats sur les amas positifs et démontre que sa bijection respecte la spécialisation aux nombres de Narayana. En conséquence, plusieurs propriétés des éléments triés sont dévoilées grâce à cette correspondance.

Théorème 3.20 (Théorème 9.1, (Reading, 2007a)) Pour tout élément de Coxeter c de W , les éléments triés de W sont comptés par les nombres de Coxeter-Catalan.

Corollaire 3.21 (Corollaire 9.2, (Reading, 2007a)) Pour tout élément de Coxeter c de W , les éléments triés de W à support complet sont comptés par les nombres de

Coxeter-Catalan positifs.

Corollaire 3.22 (Corollaire 9.3, (Reading, 2007a)) Pour tout élément de Coxeter c de W , les éléments triés de W ayant exactement k descentes sont comptés par les k -ième nombres de Coxeter-Narayana.

Remarque 3.23 Lorsque S. Fomin et A. Zelevinsky ont démontré dans leur article (Fomin et Zelevinsky, 2003b) que les nombres de Coxeter-Catalan comptent les amas algébriques, ils ont obtenu des formules pour chaque type et c'est F. Chapoton qui leur a mentionné que leurs résultats pouvaient être remplacés par la formule unificatrice (3.1) et que ces nombres comptent les partitions non croisées et non empilées. (cf. texte suivant le Théorème 1.9 de l'article (Fomin et Zelevinsky, 2003b)) Bien que nous savons que les nombres de Coxeter-Catalan interviennent dans plusieurs contextes, nous ne connaissons pas encore d'explications unifiées pour la formule (3.1).

CHAPITRE IV

COMPLEXES DES AMAS ET ÉLÉMENTS SINGLETONS

4.1 Associaèdres généralisés

J. Stasheff est à l'origine de ce qu'on appelle *associaèdre*. Le document le plus ancien faisant référence au terme associaèdre serait un document manuscrit de M. Haiman¹, datant de 1984, cependant selon M. Haiman, G. Kalai serait à l'origine du terme². Au départ, J. Stasheff voulait étudier les espaces projectifs munis d'une multiplication qui ne serait pas nécessairement « associative ». Il a introduit la notion d'associativité « à homotopie près » dans son article (Stasheff, 1963). La motivation derrière cette étude était de voir comment engendrer un espace projectif sur les octonions. Une construction de J. Milnor amenait une réponse à cette question, mais sa construction dépendait de l'associativité du groupe topologique qui sert de base à l'espace. Si un espace possède une multiplication qui est associative à homotopie près, l'espace est dite espace de Hopf. Afin de construire son espace, il a introduit un complexe K_i qui remplace le cube I^i qui servait de modèle pour l'homologie singulière. Depuis cela, le complexe K_i est devenu un objet assez étudié. Des réalisations polytopales ont été construites indépendamment par I. Gelfand, M. Kapranov et A. Zelevinsky (cf. (Gelfand, Kapranov et Zelevinsky, 2008)) et par C. W. Lee (cf. (Lee, 1989)). Ensuite, un associaèdre pour le type B a d'abord

1. Ce document est disponible sur son site web personnel : <http://math.berkeley.edu/~mhaiman/>

2. Communication personnelle.

été étudié par R. Bott et C. H. Taubes dans leur article (Bott et Taubes, 1994). J. Stasheff l'a nommé *cycloèdre*. Ensuite, R. Simion a donné une construction combinatoire alternative dans l'article (Simion, 2000) et finalement M. Markl (cf. (Markl, 1999)) et R. Simion (cf. (Simion, 2003)) ont donné deux réalisations polytopales différentes. La construction de R. Simion pour le type B est similaire à celle de C. H. Lee. Ensuite, S. Fomin et A. Zelevinsky ont généralisé l'associaèdre pour chaque type de système de racines cristallographiques. Finalement, F. Chapoton, S. Fomin et A. Zelevinsky ont réalisé l'associaèdre généralisé géométriquement à l'aide d'une toute nouvelle construction, différente des précédentes. Pour une historique détaillée sur l'associaèdre voir l'article (Chapoton, Fomin et Zelevinsky, 2002) la thèse de D. Armstrong (Armstrong, 2009) et les références incluses.

Voyons d'abord une construction combinatoire de l'associaèdre de type A . Nous abordons d'abord deux structures qui sont énumérées par les nombres de Catalan : les triangulations de polygones et les parenthésages d'un produit non associatif. Les premiers nombres de Catalan sont compilés dans le tableau 4.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	...

Tableau 4.1 Les nombres de Catalan C_n comptent le nombre de triangulations d'un polygone à $n + 2$ et les parenthésages de l'expression $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}$.

Pour chaque triangulation, nous en obtenons une autre par une mutation en supprimant une diagonale, pour former un quadrilatère et rajouter l'autre diagonale du quadrilatère formé. De même, pour les parenthésages, cela revient à utiliser l'axiome d'associativité sur un triplet consécutif. La figure 4.1 démontre comment passer d'un parenthésage à une triangulation et vice-versa.

Définition 4.1 Étant donné un polygone P à $n + 3$ côtés, $n \geq 1$, l'associaèdre de type A_n , noté $\delta(A_n)$, est un complexe dont les points correspondent aux triangulations du polygone P , les faces correspondent aux triangulations partielles de P (obtenues en

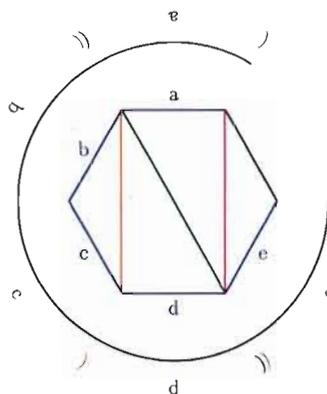


Figure 4.1 Correspondance entre la triangulation d'un polygone et le parenthésage d'un produit non associatif.

prenant des diagonales), les facettes correspondent aux diagonales de P et les segments de l'associaèdre correspondent aux changements d'une diagonale de P .

Puisqu'il y a exactement n diagonales dans une triangulation d'un polygone à $n+3$ côtés, l'associaèdre de type A est un complexe pur de dimension $n-1$. Il possède $\frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$ points et

$$\binom{n+3}{2} - (n+3) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$

facettes. Deux facettes partagent une face si les diagonales associées ne s'intersectent pas. Le complexe K_i de J. Stasheff correspond exactement à l'associaèdre de type A_n , mais il avait utilisé les parenthésages au lieu des triangulations. Au départ, le dual de l'associaèdre a davantage été étudié. Le dual de l'associaèdre possède l'ensemble des diagonales d'un polygone comme ensemble de points et les facettes correspondent aux triangulations du polygone. La figure 4.2 montre une réalisation polytopale de l'associaèdre pour le type A_2 .

En général, l'associaèdre de type A se réalise comme un polytope. La figure 4.3 montre la réalisation polytopale du dual de l'associaèdre obtenu par C. H. Lee présentée dans l'article (Lee, 1989).

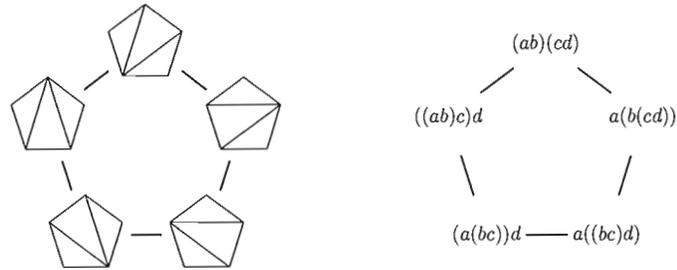


Figure 4.2 Associaèdre du type A_2 formé par les triangulations du pentagone et des parenthésages de $abcd$. On le note $\delta(A_2)$.

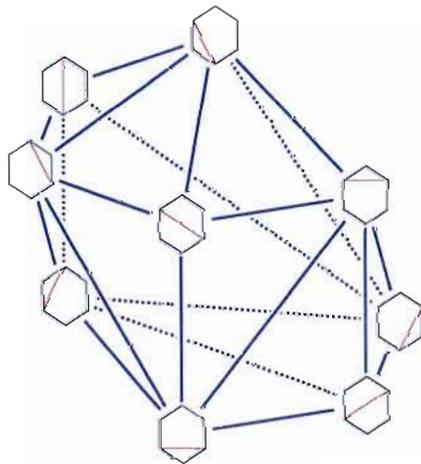


Figure 4.3 Réalisation polytopale du dual de l'associaèdre de type A_3 obtenu par C. H. Lee.

À l'aide des triangulations symétriques d'un polygone à $2n + 2$ côtés, nous construisons un autre complexe de la même façon que l'associaèdre de type A . Ce complexe est appelé cycloèdre, ou associaèdre de type B . La figure 4.4 montre une réalisation polytopale du cycloèdre B_2 et la figure 4.5 montre la charpente de dimension 1 du cycloèdre B_3 .

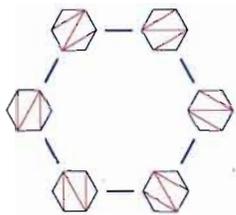


Figure 4.4 Réalisation polytopale du cycloèdre B_2 .

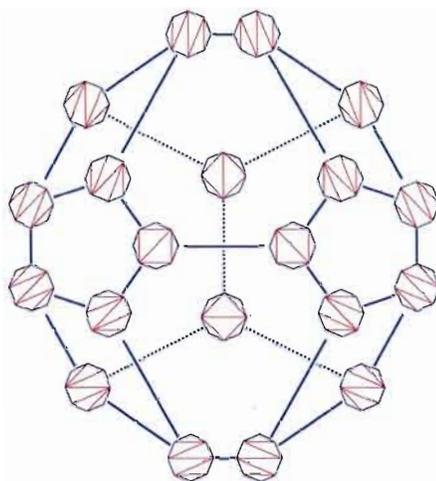


Figure 4.5 Charpente de dimension 1 du cycloèdre B_3 .

La charpente de dimension 1 de l'associaèdre généralisé de S. Fomin et A. Zelevinsky est le graphe d'échanges de l'algèbre amassée du type correspondant. Rappelons que le graphe d'échanges d'une algèbre amassée est obtenu grâce aux mutations d'amas ; deux amas sont reliés s'ils sont obtenus par une mutation de l'autre. Au départ, l'associaèdre généralisé était défini pour chaque type de système de racines cristallographiques.

Définition 4.2 Étant donné un système de racines cristallographiques Φ , l'associaèdre

généralisé de S. Fomin et A. Zelevinsky est un complexe dont les points correspondent aux amas algébriques, les faces correspondent aux ensembles compatibles, les facettes correspondent à une variable de base. Les segments correspondent aux mutations d'amas. On le note $\Delta(\Phi)$.

La figure 4.6 montre la réalisation polytopale de F. Chapoton, S. Fomin et A. Zelevinsky obtenue dans l'article (Chapoton, Fomin et Zelevinsky, 2002) de l'associaèdre généralisé.

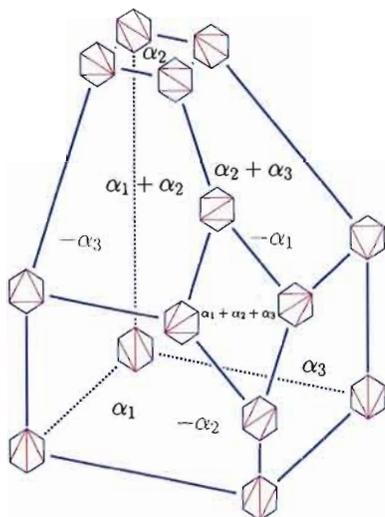


Figure 4.6 Réalisation polytopale de Chapoton-Fomin-Zelevinsky de l'associaèdre $\Delta(A_3)$. Les facettes sont étiquetées par les racines presque positives.

Avec son travail sur les « éventails Cambriens », N. Reading a démontré que le treillis des éléments triés correspond à la charpente de dimension 1 de $\Delta(\Phi)$ (cf. (Reading, 2006) et (Reading et Speyer, 2009)). C. Hohlweg et C. Lange ont construit un polytope ayant le treillis des éléments triés comme charpente de dimension 1 pour le type A et B ensuite avec l'aide de H. Thomas pour chaque groupe de Coxeter. Ainsi, ils donnent une nouvelle réalisation polytopale de l'associaèdre généralisé. Avec ce travail, il était maintenant

possible de construire un associaèdre pour les groupes H_3, H_4 et $I_2(m)$ ³. Dans l'article (Reading et Speyer, 2009), N. Reading et D. Speyer ont démontré qu'avec le bon choix d'élément de Coxeter, cet associaèdre est linéairement isomorphe à celui de F. Chapoton, S. Fomin et A. Zelevinsky. Les autres sont simplement isomorphes combinatoirement.

Définition 4.3 L'associaèdre Coxeter-généralisé $\Delta_c(W)$ de C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas est un complexe dont les points correspondent aux amas combinatoires (et donc aux éléments triés), les faces aux ensembles de dernières réflexions compatibles, les facettes correspondent à une réflexion presque positive.

L'associaèdre $\Delta_c(W)$ dépend d'un élément de Coxeter. Ils l'obtiennent à partir de la réalisation polytopale du permutoèdre en conservant les hyperplans possédant un élément singleton, ces hyperplans sont dits admissibles. Ainsi, pour différent élément de Coxeter, il existe plusieurs réalisations de l'associaèdre ayant toute la même combinatoire, mais les associaèdres réalisés ne sont pas tous isométriques. N. Bergeron et al. ont classifié les associaèdres $\Delta_c(W)$ à isométries près dans l'article (Bergeron et al., 2009). La figure 4.7 montre l'associaèdre $\Delta_{s_1 s_2}(A_2)$ et les figures 4.8 et 4.9 illustrent les associaèdres $\Delta_{s_1 s_2 s_3}(A_3)$ et $\Delta_{s_2 s_1 s_3}(A_3)$ qui ne sont pas isométriques.

Nous verrons comment obtenir les amas combinatoires grâce à la construction de l'associaèdre généralisé de C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas.

4.2 Complexes des amas

Le *complexe des amas* a d'abord été défini pour les amas algébriques, cependant il se définit aussi à l'aide des racines ou des réflexions presque positives. Le complexe est évidemment le même, mais avec un étiquetage différent. Cette définition permet d'avoir un complexe des amas pour les systèmes de racines non cristallographiques.

3. Une autre définition a aussi été décrite par S. Fomin et N. Reading, voir Section 5.3 de l'article (Fomin et Reading, 2007)

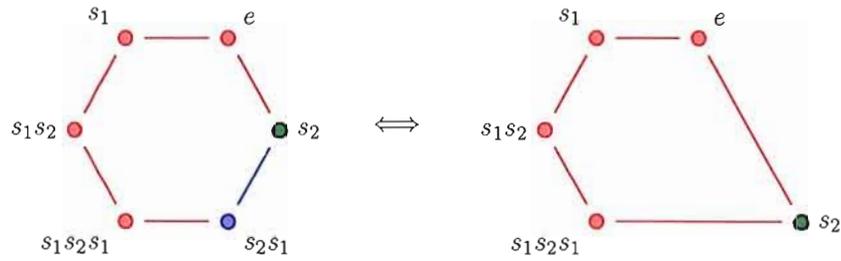


Figure 4.7 Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_1, s_2, s_3}(A_3)$. Les points en rouge sont les singletons, en vert les éléments triés restant et en bleu les éléments qui ne sont pas triés. Les hyperplans admissibles sont rouges tandis que ceux non admissibles sont bleus.

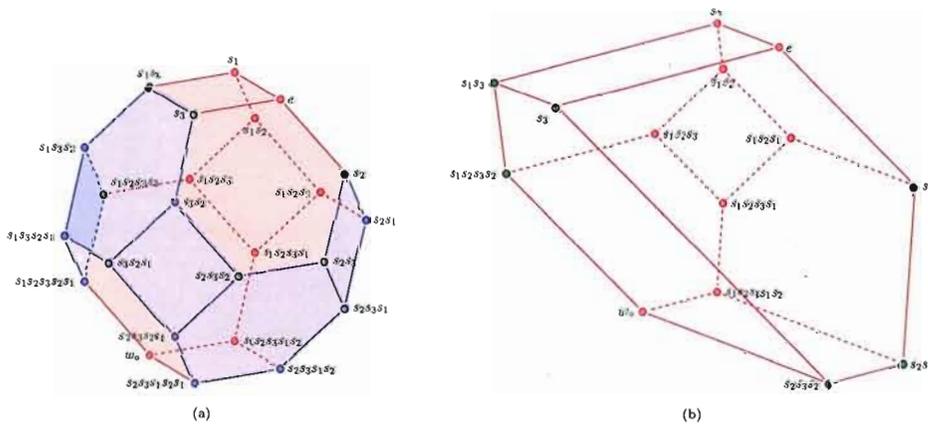


Figure 4.8 Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_1, s_2, s_3}(A_3)$. Les points en rouge sont les singletons, en vert les éléments triés restant et en bleu les éléments qui ne sont pas triés. Les hyperplans admissibles sont rouges tandis que ceux non admissibles sont bleus.

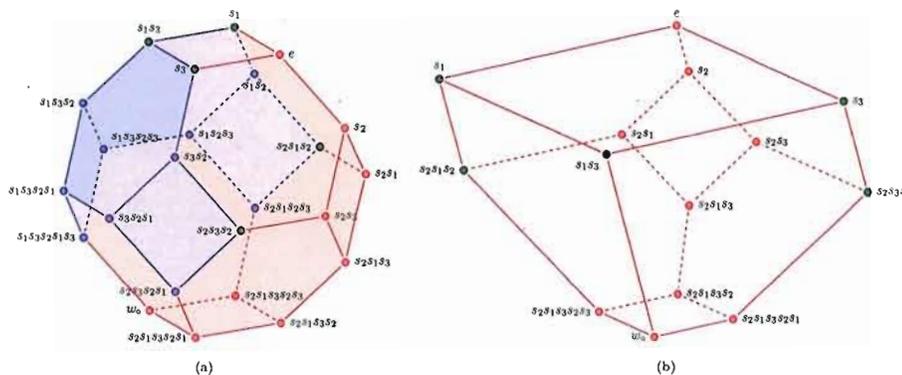


Figure 4.9 Réalisation polytopale de l'associaèdre $\Delta_{s_2 s_1 s_3}(A_3)$. Les points en rouge sont les singletons, en vert les éléments triés restant et en bleu les éléments qui ne sont pas triés. Les hyperplans admissibles sont rouges tandis que ceux non admissibles sont bleus.

Définition 4.4 Soit un groupe de Coxeter fini W et un élément de Coxeter c . Le complexe des amas $\nabla_c(W)$ est un complexe dont les points correspondent aux réflexions presque positives, les faces correspondent aux ensembles de réflexions presque positives compatibles et les facettes aux amas combinatoires.

Exemple 4.5 Les points de $\nabla_{s_1 s_2}(A_2)$ sont $T_{\geq -1} = \{-s_1, -s_2, s_1, s_2, s_1 s_2 s_1\}$. Les faces restantes (les facettes) de $\nabla_c(W)$ sont

$$\mathcal{F}(\nabla_c(W)) = \{\{-s_1, -s_2\}, \{s_1, -s_2\}, \{-s_1, s_2\}, \{s_1, s_1 s_2 s_1\}, \{s_2, s_1 s_2 s_1\}\}.$$

De la définition, nous obtenons que le complexe des amas est dual à l'associaèdre généralisé.

Exemple 4.6 L'associaèdre $\Delta_{s_1 s_2}(A_2)$ est le complexe dont les points sont les amas combinatoires

$$\{-s_1, -s_2\}, \{s_1, -s_2\}, \{-s_1, s_2\}, \{s_1, s_1 s_2 s_1\}, \{s_2, s_1 s_2 s_1\}$$

et les facettes sont

$$\mathcal{F}(\nabla_c(W)) = \{\{-s_1\}, \{-s_2\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_1 s_2 s_1\}\}.$$

Les points de $\nabla_{s_1 s_2}(A_2)$ sont les facettes de $\Delta_{s_1 s_2}(A_2)$ (les réflexions presque positives) et les facettes de $\nabla_{s_1 s_2}(A_2)$ correspondent aux points de $\Delta_{s_1 s_2}(A_2)$ (les amas combinatoires).

Récemment, S. Fomin et N. Reading ont défini un complexe simplicial $\nabla^{(k)}(W)$ ($k \in \mathbb{N}$) qui généralise le complexe des amas de S. Fomin et A. Zelevinsky (cf. (Fomin et Reading, 2005)). Il fait apparaître un lien avec les nombres de Fuss-Catalan. Pour le type A , nous pouvons décrire le complexe simplement, à l'aide d'une dissection d'un polygone à $kn + 2$ côtés à l'aide de polygones à $k + 2$ côtés. N. Fuss a démontré le résultat suivant en 1791 :

Théorème 4.7 (Équation 3.14, (Armstrong, 2009)) Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Le nombre de dissection d'un polygone à $kn + 2$ côtés à l'aide de polygones à $k + 2$ côtés est égal au nombre de Fuss-Catalan

$$\text{Cat}^{(k)}(n) := \frac{1}{n} \binom{(k+1)n}{n-1}.$$

Cette généralisation amène plusieurs nouveaux problèmes liés à la combinatoire des groupes de Coxeter. Nous ne donnons malheureusement pas les détails ici (plus de détails sont disponibles dans la thèse (Armstrong, 2009)).

4.3 Réalisation du complexe des amas utilisant les éléments singletons

Avec la construction de l'associaèdre généralisé $\Delta_c(W)$, nous obtenons une réalisation polytopale du complexe des amas pour chaque groupe de Coxeter irréductible fini. La construction, présentée dans l'article (Hohlweg, Lange et Thomas, 2007), débute par la réalisation polytopale du permuttoèdre $\Sigma^*(W)$. Rappelons qu'à chaque point w , nous avons des hyperplans $\mathcal{H}(w, s)$ qui déterminent une facette pour chaque réflexion $s \in S$. Ces facettes correspondent aux classes à gauche $wC_{(s)}$ du complexe de Coxeter $\Sigma(W)$. Supposons que nous avons un permuttoèdre $\Sigma^*(W)$, un élément de Coxeter c et l'expression triée \mathbf{w}_o de w_o . À l'aide de \mathbf{w}_o , nous obtenons facilement les singletons. Maintenant, l'associaèdre est obtenu en conservant les hyperplans $\mathcal{H}(w, s)$ passant par un singleton w et associé à une réflexion simple s . Ainsi, pour chaque singleton w et chaque réflexion

simple $s \in S$, on étiquète la facette engendrée par l'hyperplan $\mathcal{H}(w, s)$ par $Lr_s^\Phi(w)$. Ensuite, on étend cet étiquetage aux faces de l'associaèdre $\Delta_c(W)$ comme suit : une face formée de l'intersection des facettes F_1, F_2, \dots, F_k sera étiquetée par l'union des racines presque positives assignées aux facettes F_1, F_2, \dots, F_k . De cette façon, les points de l'associaèdre seront étiquetés par les amas combinatoires. Mais souvenons-nous que ces points sont aussi étiquetés par les éléments triés. Ainsi l'associaèdre $\Delta_c(W)$ permet d'interpréter la correspondance de N. Reading d'une façon géométrique.

Le treillis facial de $L(\Delta_c(W))$ est exactement le treillis facial inverse $L^{-1}(\nabla_c(W))$ du complexe des amas. Les figures 4.10 et 4.11 illustrent la réalisation polytopale du complexe des amas du type A_3 pour deux associaèdres non isométriques. Notons que ces réalisations ressemblent beaucoup au dual de l'associaèdre réalisé par C. H. Lee (cf. figure 4.3).

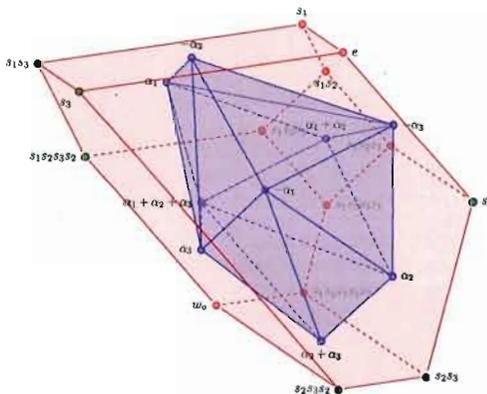


Figure 4.10 Réalisation polytopale du complexe des amas $\nabla_{s_1 s_2 s_3}(A_3)$ (en bleu).

La compatibilité peut être réinterprétée de la façon suivante à l'aide de l'associaèdre. Un ensemble de racines presque positives est compatible si et seulement s'il est obtenu comme l'intersection de facettes de $\Delta_c(W)$.

Remarque 4.8 Cette réalisation demande une expression triée w_\circ . Par contre, cette expression n'est pas obtenue facilement. Vu l'importance de cette expression pour obtenir le complexe des amas, il serait intéressant de trouver une méthode simple pour l'obtenir.

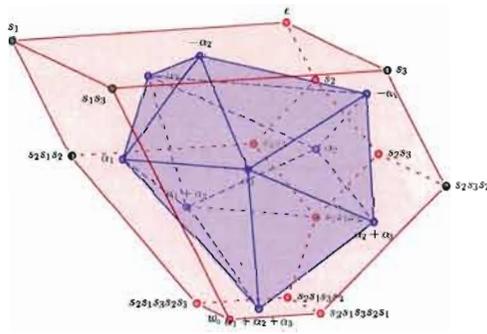


Figure 4.11 Réalisation polytopale du complexe des amas $\nabla_{s_2s_1s_3}(A_3)$ (en bleu).

CONCLUSION

La combinatoire des groupes de Coxeter est riche. Nous avons développé une théorie à l'aide de mots, d'ordres partiels, de complexes, etc. afin d'ajouter à la structure de groupe déjà bien fournie en propriétés. Bien que les groupes de Coxeter sont déjà étudiés depuis plus de 70 ans, certaines propriétés n'ont été découvertes que récemment. Certaines de ces propriétés nous ont permis d'établir une correspondance entre les éléments triés des groupes de Coxeter aux amas combinatoires. Cette correspondance fait apparaître la combinatoire de Coxeter-Catalan d'une nouvelle façon, d'une part chez les groupes de Coxeter, d'autre part chez les algèbres amassées. Vu la richesse combinatoire des groupes de Coxeter, plusieurs comportements à l'intérieur des algèbres amassées risquent d'être encodés dans les groupes de Coxeter. Certains objets trouvent déjà une interprétation chez les groupes de Coxeter, tel les amas positifs.

Grâce à ce texte, plusieurs notions auparavant éparpillées dans une vingtaine d'articles sont rassemblées dans un ordre qui se veut le plus simple. Certaines pistes ont été explorées, sans obtenir des résultats majeurs. Parmi les pistes intéressantes se trouvent une nouvelle forme normale pour les éléments de Coxeter des groupes de Coxeter dont le graphe est un arbre.

Pour conclure ce mémoire, des questions demeurent en suspens :

- a) Est-ce que la conjugaison circulaire des éléments de Coxeter pourrait être simplifiée à l'aide des permutations montagnes ?
- b) Pour les groupes de Coxeter dont le graphe possède un cycle, est-ce que les éléments de Coxeter possèdent une interprétation sous forme de mots ?
- c) Quelles sont les valeurs atteintes par la fonction μ_c , liée à la relation de compatibilité ? Quel est son comportement ?

- d) Quelles sont les améliorations possibles au plan de Coxeter de N. Reading?
- e) Quelle importance possède le groupe d'automorphisme d'un groupe sur ces éléments singletons?
- f) Combien y-a-t'il d'éléments singletons étant donné un groupe W et un élément de Coxeter c ?

Face à la nouvelle utilisation des singletons pour obtenir une réalisation de l'associaèdre, il serait intéressant d'obtenir plus d'informations sur ceux-ci à la fois d'un point de vue géométrique et algébrique.

APPENDICE A

TREILLIS CAMBRIENS

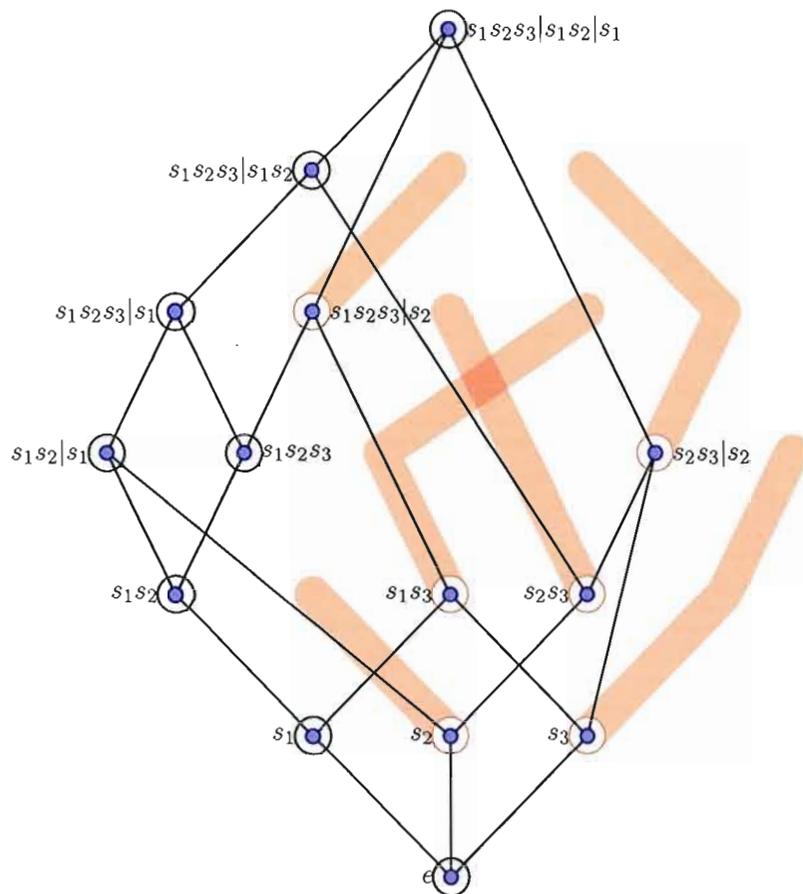


Figure A.1 Le treillis Cambrien pour A_3 et l'élément de Coxeter $c = s_1s_2s_3$. Il donne la charpente de dimension 1 de l'associaèdre $\Delta_{s_1s_2s_3}(A_3)$.

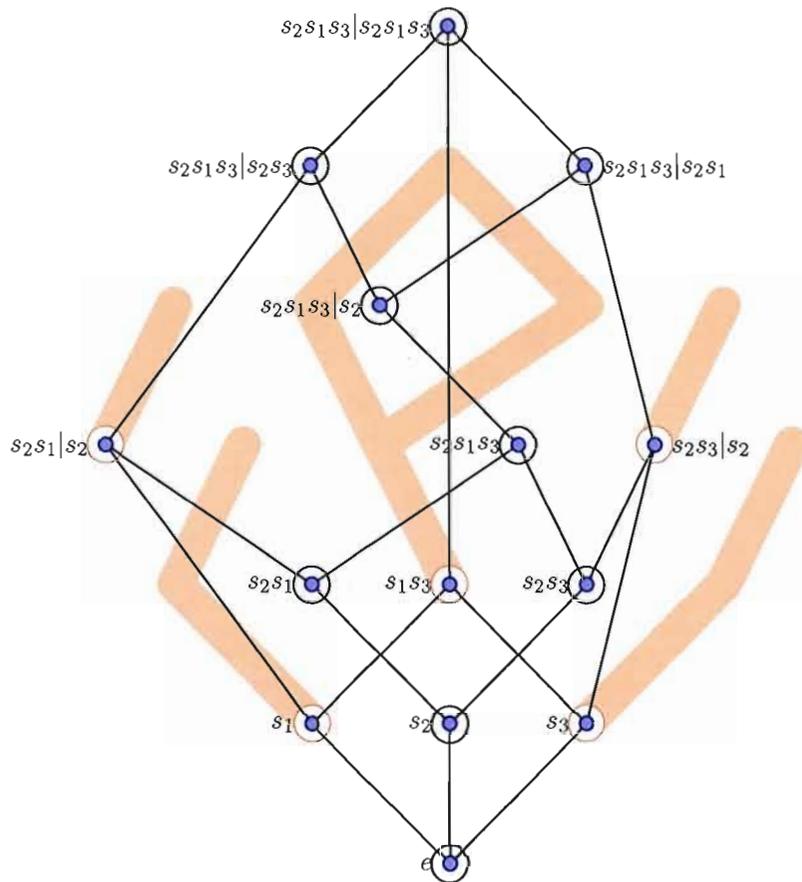


Figure A.2 Le treillis Cambrien pour A_3 et l'élément de Coxeter $c = s_2s_1s_3$. Il donne la charpente de dimension 1 de l'associaèdre $\Delta_{s_2s_1s_3}(A_3)$.

APPENDICE B

NOMBRES DE COXETER-NARAYANA

W	$\text{Nar}(W, k)$, pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$
A_n	$\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}$
B_n	$\binom{n}{i}^2$
D_n	$\binom{n}{k} \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-2}{k} \binom{n}{n-k}$
E_6	1, 36, 204, 351, 204, 36, 1
E_7	1, 63, 546, 1470, 1470, 546, 63, 1
E_8	1, 120, 1540, 6120, 9518, 6120, 1540, 120, 1
F_4	1, 24, 55, 24, 1
H_3	1, 15, 15, 1
H_4	1, 60, 158, 60, 1
$I_2(m)$	1, m , 1

Tableau B.1 Les nombres de Coxeter-Narayana pour chaque groupe de Coxeter irréductible fini. Pour un groupe de Coxeter, la somme des nombres $\text{Nar}(W, k)$ donne le nombre de Coxeter-Catalan.

INDEX

- algèbre amassée, 59
- amas
 - algébriques, 59
 - combinatoire, 63
 - positif, 63
- arrangement de Coxeter, 32
 - chambre, 32
 - fondamentale, 32
 - mur, 32
- associaèdre
 - de type A_n , 74
 - de type B , 77
 - généralisé, $\Delta(\Phi)$, 78
 - Coxeter- \sim , $\Delta_c(W)$, 79
- chambre, voir arrangement de Coxeter
- charpente, voir complexe
- complexe, Σ , 27
 - auto-dual, 30
 - charpente, 30
 - de Coxeter, $\Sigma(W)$, 33
 - des amas, $\nabla_c(W)$, 81
 - dual, Σ^* , 30
 - face, 27
 - adjacentes, 27
 - facette, 27
 - panneau, 27
 - pur, 27
 - segment, 27
 - treillis facial, $L(\Sigma)$, 29
 - inverse, $L^{-1}(\Sigma)$, 30
- demi-treillis, 22
 - complet, 22
- descentes, $D(w)$, 17
- élément
 - compatible, 62
 - de Coxeter, c , 39
 - biparti, 47
 - lettre finale, 46
 - lettre initiale, 46
 - trié, 50
 - à support complet, 50
- ensemble
 - compatible, 63
 - fondamental, 32
- espace de Hopf, 73
- étiquetage croissant, 42
- expression, 17
 - réduite, 17
 - triée, 49
- face, voir complexe
- facette, voir complexe
- factorisation (d'un élément), 50
- groupe
 - de Coxeter, W , 14
 - degrés, 41
 - exposants, 40
 - irréductible, 15
 - réductible, 15
 - de réflexions, 6

- diédral, $D(m)$, 7
- exceptionnel, 25
- hyperoctaédral, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, 8
- symétrique, S_n , 7
- hyperplan admissible, 79
- infimum, 21
- inversion, $T(w)$, 17
- longueur, $\ell(w)$, 17
- matrice de Coxeter, 14
- mot, voir expression
- mur, voir arrangement de Coxeter
- nombre
 - de Coxeter, h , 39
 - de Coxeter-Catalan, $\text{Cat}(W)$, 70
 - positif, $\text{Cat}_+(W)$, 70
- ordre faible, \leq , 20
- panneau, voir complexe
- permutation montagne, 42
 - sommet, 42
- permutoèdre, $\Sigma^*(W)$, 35
- racine, 10
 - négative, 12
 - positive, 11
 - presque positive, $\Phi_{\geq -1}$, 63
- rang
 - groupe de Coxeter, 14
 - système de racines, 13
- réflexion, s_α , 6
 - dernière \sim , $\text{Lr}_s^T(w)$, 65
 - descendante, 17
 - presque positive, $T_{\geq -1}$, 60
 - simple, 13
- relation de compatibilité, $\|_c$, 62
- segment, voir complexe
- simplexe, 28
- singleton, 55
- sous-groupe parabolique, wW_Iw^{-1} , 23
 - standard, W_I , 22
- supremum, 21
- système
 - de Coxeter, (W, S) , 15
 - de racines, Φ , 10
 - cristallographiques, 10
 - isomorphes, 11
 - positif, Φ^+ , 12
 - simple, Δ , 12
- treillis
 - Cambrien, \mathcal{C}_c , 52
 - distributif, 56
 - facial, voir complexe

BIBLIOGRAPHIE

- Abramenko, P. et K. S. Brown. 2008. *Buildings*. Springer.
- Armstrong, D. 2009. *Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups*. AMS Bookstore.
- Bergeron, N., C. Hohlweg, C. Lange, et H. Thomas. 2009. « Isometry classes of generalized associahedra », *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, vol. 61A, p. Art. B61Aa, 13.
- Bernstein, I. N., I. M. Gelfand, et V. A. Ponomarev. 1973. « Coxeter functors and gabriel's theorem », *Russian Mathematical Surveys*, vol. 28, no. 2, p. 17–32.
- Bessis, D. 2003. « The dual braid monoid », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 36, no. 5, p. 647–683.
- Björner, A. et F. Brenti. 2005. *Combinatorics of coxeter groups*. Springer.
- Borovik, A. V. et A. Borovik. 2009. *Mirrors and Reflections : The Geometry of Finite Reflection Groups*. Springer, 1 édition.
- Bott, R. et C. Taubes. 1994. « On the self-linking of knots », *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35, no. 10, p. 5247–5287. Topology and physics.
- Bourbaki, N. 1974. *Éléments d'histoire des Mathématiques*. Coll. « Histoire de la pensée », no 4. Paris : Hermann.
- . 1981. *Éléments de mathématique. Groupes et algèbre de lie, chapitres 4, 5 et 6*. Dunod.
- Broué, M. et J. Michel. 1997. *Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées*. Coll. « Finite reductive groups (Luminy, 1994) ». T. 141, série *Progr. Math.*, p. 73–139. Boston, MA : Birkhäuser Boston.
- Chapoton, F., S. Fomin, et A. Zelevinsky. 2002. « Polytopal realizations of generalized associahedra », *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 45, no. 4, p. 537–566.
- Coxeter, H. S. M. 1932. « The polytopes with Regular-Prismatic vertex figures », *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-34, no. 1, p. 126–189.
- . 1934. « Discrete groups generated by reflections », *The Annals of Mathematics*, vol. 35, no. 3, p. 588–621.

- Djoković, D. Z. 1980. « On conjugacy classes of elements of finite order in compact or complex semisimple lie groups », *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 80, no. 1, p. 181–184.
- Fomin, S. et N. Reading. 2005. « Generalized cluster complexes and coxeter combinatorics », *Int Math Res Notices*, vol. 2005, no. 44, p. 2709–2757.
- . 2007. *Root systems and generalized associahedra*. Coll. « Geometric combinatorics ». T. 13, série *IAS/Park City Math. Ser.*, p. 63–131. Providence, RI : Amer. Math. Soc.
- Fomin, S. et A. Zelevinsky. 2002. « Cluster algebras I : Foundations », *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 15, no. 2, p. 497–529.
- . 2003a. « Cluster algebras II : finite type classification », *Inventiones Mathematicae*, vol. 154, no. 1, p. 63–121.
- . 2003b. « Y-Systems and generalized associahedra », *The Annals of Mathematics*, vol. 158, no. 3, p. 977–1018.
- Geck, M. et G. Pfeiffer. 2000. *Characters of Finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*. Oxford University Press.
- Gelfand, I. M., M. M. Kapranov, et A. V. Zelevinsky. 2008. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Coll. « Modern Birkhäuser Classics ». Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc. Reprint of the 1994 edition.
- Hohlweg, C., C. Lange, et H. Thomas. 2007. « Permutahedra and generalized associahedra », *0709.4241*.
- Hohlweg, C. et C. E. Lange. 2007. « Realizations of the associahedron and cyclohedron », *Discrete & Computational Geometry*, vol. 37, no. 4, p. 517–543.
- Humphreys, J. E. 1992. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press.
- Kleiner, M. et A. Pelley. 2007. « Admissible sequences, preprojective representations of quivers, and reduced words in the weyl group of a Kac-Moody algebra », *International Mathematics Research Notices. IMRN*, no. 4, p. 13–28.
- Lee, C. W. 1989. « The associahedron and triangulations of the n-gon », *European Journal of Combinatorics*, vol. 10, no. 6, p. 551–560.
- Markl, M. 1999. *Simplex, associahedron, and cyclohedron*. Coll. « Higher homotopy structures in topology and mathematical physics (Poughkeepsie, NY, 1996) ». T. 227, série *Contemp. Math.*, p. 235–265. Providence, RI : Amer. Math. Soc.
- Marsh, R., M. Reineke, et A. Zelevinsky. 2003. « Generalized associahedra via quiver representations », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 355,

no. 10, p. 4171–4186.

Munkres, J. R. 1996. *Elements Of Algebraic Topology*. Westview Press.

Reading, N. 2005a. « Lattice congruences, fans and hopf algebras », *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 110, no. 2, p. 237–273.

———. 2005b. « Lattice congruences of the weak order », *Order*, vol. 21, no. 4, p. 315–344.

———. 2006. « Cambrian lattices », *Advances in Mathematics*, vol. 205, no. 2, p. 313–353.

———. 2007a. « Clusters, coxeter-sortable elements and noncrossing partitions », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 359, no. 12, p. 5931–5958.

———. 2007b. « Sortable elements and cambrian lattices », *Algebra universalis*, vol. 56, no. 3-4, p. 411–437.

———. 2009. « Noncrossing partitions, clusters and the coxeter plane », *0912.5028*.

Reading, N. et D. E. Speyer. 2009. « Cambrian fans », *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, vol. 11, no. 2, p. 407–447.

Shi, J. 1997. « The enumeration of coxeter elements », *Journal of Algebraic Combinatorics. An International Journal*, vol. 6, no. 2, p. 161–171.

Simion, R. 2000. « Noncrossing partitions », *Discrete Mathematics*, vol. 217, no. 1-3, p. 367–409. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997).

———. 2003. « A type-B associahedron », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 30, no. 1-2, p. 2–25. Formal power series and algebraic combinatorics (Scottsdale, AZ, 2001).

Speyer, D. E. 2009. « Powers of coxeter elements in infinite groups are reduced », *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 137, no. 4, p. 1295–1302.

Stasheff, J. D. 1963. « Homotopy associativity of H-Spaces. I-II », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 108, no. 2, p. 275–292.

Ziegler, G. M. 1995. *Lectures on polytopes*. Springer.