UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES ORBIFOLDS TORIQUES ET LA FORMULE DE GUILLEMIN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

GABRIEL PAINCHAUD

JANVIER 2007

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier spécialement mon directeur de recherche et correcteur, Monsieur Vestislav Apostolov. Sans son aide, son soutien, ses nombreux conseils et sa grande disponibilité, mon travail n'aurait jamais eu lieu. Je remercie aussi MM Olivier Collin et Steven Lu qui ont aussi lu et évalué mon mémoire. Leurs remarques ont permis d'apporter davantage de clarté au résultat final. Finalement, un merci au FQRNT et au CRSNG qui m'ont appuyé financièrement lors des deux dernières de ma recherche. Cette aide m'a permis de me concentrer davantage sur mon travail.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Dans la première partie de ce mémoire nous introduisons toute la théorie nécessaire à une bonne compréhension de la théorie des variétés et orbifolds toriques. Dans la deuxième partie nous présentons la construction de Delzant d'une variété torique. Finalement, le troisième chapitre présente deux preuves différentes de la formule de Guillemin. Mots clés : géométrie kählérienne, orbifold, variété torique, polytope de Delzant.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de donner une vue d'ensemble sur les orbifolds toriques, surtout du point de vue de la théorie de Delzant. Le chapitre 1 se verra comme un rappel ou une introduction à toute la terminologie utilisée dans les chapitres suivants et à l'élaboration de résultats nécessaires pour une meilleure compréhension de ceux-ci. Dans le chapitre 2, la construction d'une variété torique à partir d'un polytope de Delzant sera élaborée. Cette construction nous permet d'établir une correspondance bijective entre les polytopes de Delzant et les variétés toriques. La construction de Delzant peut se généraliser aux polytopes rationnels de Delzant (Lerman et Tolman, (1997)) et nous allons montrer de quelle façon le choix d'un réseau influence l'orbifold construite (Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman, (2004)). Comme exemple principal d'orbifold torique nous donnerons celui des espaces projectifs à poids. Ces derniers sont des orbifolds toriques obtenues par la construction généralisée de Delzant à partir d'un simplexe rationnel. Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'élaboration de deux preuves différentes de la formule de Guillemin (Guillemin, (1994))(Calderbank, David et Gauduchon (2002)). Cette formule permet de décrire en terme de l'application moment, une métrique kählérienne canoniquement associée à chaque orbifold torique.

CHAPITRE I

RAPPELS

Dans ce premier chapitre nous rappelerons toutes les notions nécéssaires à l'élaboration de la théorie de Delzant, qui sera discutée dans le chapitre 2. Nous introduirons aussi tous les concepts utiles pour avoir une bonne compréhension de la formule de Guillemin. En outre, nous introduirons les notions de variété symplectique, groupe de Lie, algèbre de Lie, action adjointe et co-adjointe, orbifolds, structure kählérienne, connexions et plusieurs autres. Cependant, nous allons prendre pour acquis les définitions de variété différentiable et de fibré vectoriel. Nous utiliserons la convention habituelle $\Gamma(E)$ pour désigner l'ensemble des sections C^∞ de E, où $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel ainsi que $C^\infty(M)$ pour l'ensemble des fonctions réelles lisses sur M.

1.1 Orbifolds

Définition 1.1.1. Une *orbifold* M est la donnée d'un espace topologique $|M|$ et d'un atlas $\mathcal{U}$ de cartes uniformisantes : $\mathcal{U} = \left\{(\tilde{U}, \Gamma, \phi)\right\}$ où $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, Γ est un groupe fini qui agit linéairement sur $\tilde{U}$ et $\phi : \tilde{U} \to |M|$ est une application continue qui induit un homéomorphisme, encore noté ϕ, de $\tilde{U}/\Gamma$ vers $V \subset |M|$.
Les ouverts $\phi(\tilde{U})$ doivent satisfaire les conditions de compatibilité suivantes :

(1) pour tout $x \in |M|$, il existe $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$ une carte uniformisante de $\mathcal{U}$ telle que $x \in \phi(\tilde{U})$.

(2) pour toutes cartes uniformisantes $(\tilde{U}, \Gamma, \phi), (\tilde{U}', \Gamma', \phi')$ et pour tout point x de $\phi(\tilde{U}) \cap \phi'(\tilde{U}')$ il existe une carte uniformisante $(\tilde{U}'', \Gamma'', \phi'')$ telle que x est dans

$\phi''(\tilde{U}'') \subset \phi(\tilde{U}) \cap \phi'(\tilde{U}')$.

(3) pour toute paire de cartes uniformisantes $(\tilde{U}, \Gamma, \phi), (\tilde{U}', \Gamma', \phi')$ telles que $\phi(\tilde{U}) \subset \phi'(\tilde{U}')$, il existe une injection $\lambda : (\tilde{U}, \Gamma, \phi) \longrightarrow (\tilde{U}', \Gamma', \phi')$ et un homomorphisme de groupe $\gamma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ tels que λ est équivariante i.e. : $\lambda(gx) = \gamma(g)\lambda(x)$ pour tout x dans $\tilde{U}$ et pour tout g dans Γ.

Remarque 1.1.2. (1) Deux atlas sont équivalents s'il existe un atlas qui contient les deux. Plus précisément, une orbifold M est la donnée d'un espace topologique $|M|$ et d'un atlas maximal selon cette relation d'équivalence. L'atlas maximal doit bien sûr satisfaire les propriétés (1) à (3) précédentes.

(2) On notera souvent une carte uniformisante $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$ par l'ouvert $\tilde{U}$ qui la défini.

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des atlas maximaux sur $|M|$ et $|N|$ respectivement. Une *application entre orbifolds* $f : M \longrightarrow N$ est la famille d'objets suivante :

(1) Une application continue $f : |M| \longrightarrow |N|$.

(2) Pour toute carte uniformisante $\tilde{U}$ on a une application lisse $f_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$ équivariante par rapport à l'action de Γ sur $\tilde{U}$ et par rapport à un homomorphisme $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ où $\tilde{V} = f(\tilde{U}) \in \mathcal{V}$.

(3) Pour toute injection $\lambda : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{U}'$, on a une application $f_\lambda : f(\tilde{U}) \longrightarrow f(\tilde{U}')$ qui satisfait $f_\lambda \circ f_{\tilde{U}} = f_{\tilde{U}'} \circ \lambda$.

Remarque 1.1.4. Une application $f : M \longrightarrow N$ est une *immersion* si les $f_{\tilde{U}}$ sont des immersions. Un *plongement* est une immersion telle que l'application continue entre $|M|$ et $|N|$ est un homéomorphisme sur l'image. Un *difféomorphisme* est un plongement surjectif.

Définition 1.1.5. Soit $x \in M$ et soit $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$ une carte uniformisante telle que $x \in \phi(\tilde{U}/\Gamma)$. Le *groupe de structure* de x est le groupe d'isotropie (le stabilisateur), noté Γ_x, de tout $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tel que $\phi(\tilde{x}) = x$.

Remarque 1.1.6. Ce groupe est bien défini c'est-à-dire que ce groupe ne dépend pas du $\tilde{x}$ choisi.

Définition 1.1.7. L'espace tangent de $\tilde{U}$ en $\tilde{x}$ est appelé l'*espace tangent uniformisé en* x. Il est noté $\tilde{T}_x M$. Le quotient $\tilde{T}_x M/\Gamma_x$ est $T_x M$. Le *fibré tangent* de M est le fibré pour lequel la fibre en x est $T_x M$.

Définition 1.1.8. Un *champ de vecteurs* ξ sur M est un champ de vecteurs Γ-invariant $\tilde{\xi}_{\tilde{U}}$ sur chaque carte uniformisante $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$. Le champ doit bien se recoller sur chaque intersection. Plus précisément, si $\lambda : (\tilde{U}, \Gamma, \phi) \to (\tilde{U}', \Gamma', \phi')$ est une injection alors $\lambda_*(\tilde{\xi}_{\tilde{U}}) = \tilde{\xi}_{\tilde{U}'}$.

Définition 1.1.9. Une *1-forme différentielle* ω sur M est une 1-forme différentielle Γ-invariante $\tilde{\omega}_{\tilde{U}}$ sur chaque carte uniformisante $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$. La 1-forme doit bien se recoller sur chaque intersection. Plus précisément, si $\lambda : (\tilde{U}, \Gamma, \phi) \to (\tilde{U}', \Gamma', \phi')$ est une injection alors $\lambda^*(\tilde{\omega}_{\tilde{U}'}) = \tilde{\omega}_{\tilde{U}}$.

Remarque 1.1.10. On étend cette définition aux n-formes différentielles, aux champs de tenseurs, aux métriques riemanniennes, aux formes symplectiques, etc.

Définition 1.1.11. Un *revêtement orbifoldien* est une application entre orbifolds $\rho : \hat{M} \to M$ qui possède les propriétés suivantes :

(1) pour tout point x de $|M|$ il existe une carte uniformisante assez petite $(\tilde{U}, \Gamma, \phi)$ telle que x est dans $V := \phi(\tilde{U})$ et pour chaque composante connexe V_i de $\rho^{-1}(V)$ on a $V_i \cong \tilde{U}/\Gamma_i$ via ϕ où $\Gamma_i \leq \Gamma$

(2) $\rho|_{V_i} : V_i \to V$ correspond à la projection naturelle i.e. $\rho|_{V_i} \circ \phi_i = \phi \circ \pi$ où $\phi : \tilde{U}/\Gamma \xrightarrow{\cong} V$, $\phi_i : \tilde{U}/\Gamma_i \xrightarrow{\cong} V_i$ et $\pi : \tilde{U}/\Gamma_i \to \tilde{U}/\Gamma$ est la projection naturelle.

Remarque 1.1.12. Deux revêtements $\rho_1 : \hat{M}_1 \to M$ et $\rho_2 : \hat{M}_2 \to M$ sont équivalents s'il existe un difféomorphisme $f : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ tel que $\rho_2 \circ f = \rho_1$.

Définition 1.1.13. Un revêtement orbifoldien $\rho : \tilde{M} \to M$ est *universel* si pour tout revêtement orbifoldien de M, $\tau : \hat{M} \to M$, il existe un revêtement orbifoldien $\alpha : \tilde{M} \to \hat{M}$ tel que $\tau \circ \alpha = \rho$.

Théorème 1.1.14. *(Thurston, (1997)) Toute orbifold M possède un unique revêtement universel à équivalence près. Il est noté $\tilde{M}$.*

Pour une preuve de ce théorème on peut consulter (Thurston, (1997)) (théorème 13.2.4). Dans les sections et chapitres qui suivront nous définirons les concepts sur une variété en sachant que ces concepts se généralisent de manière naturelle sur une orbifold. Dans les cas où des précisions seront nécessaires, elles seront apportées.

1.2 Groupes et algèbres de Lie

Définition 1.2.15. Un *groupe de Lie* G est un groupe abstrait muni d'une structure de variété différentiable, telle que la prise d'inverse et la multiplication abstraite soient des applications C^∞ i.e. :

$$\Phi : G \times G \to G : (g,h) \mapsto g \cdot h \qquad \text{et}$$

$$\Psi : G \to G : g \mapsto g^{-1}$$

sont C^∞.

Remarque 1.2.16. Les applications

$$L_g : G \to G : h \mapsto g \cdot h \qquad \text{et}$$

$$R_g : G \to G : h \mapsto h \cdot g$$

sont des difféomorphismes de G. Ces difféomorphismes induisent des applications linéaires

$$(L_g)_* : T_hG \to T_{gh}G \quad \text{et} \quad (R_g)_* : T_hG \to T_{hg}G \quad \forall h \in G.$$

Définition 1.2.17. Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

qui possède les propriétés suivantes :

(1) $[x,y] = -[y,x]$ (antisymétrie)

(2) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ (identité de Jacobi)

On dit alors que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ est une *algèbre de Lie.*

Exemple 1.2.18. Étant donnée une variété lisse M, on va définir le crochet de Lie de champs de vecteurs $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$. Ce dernier munira $\Gamma(TM)$ d'une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

Soit $\phi : U \to V : p \mapsto (\phi_1(p), \ldots, \phi_2(p))$ une carte autour d'un point p de M. Posons $x_i := \phi_i(p)$. Localement, on peut écrire $X|_U = \sum_{i=1}^{n} X^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ où $X^i \in C^\infty(\phi(U))$. Étant donnée $f \in C^\infty(M)$, $L_X(f) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(M)$. Ici, on fait un abus de notation car en fait c'est $f \circ \phi^{-1}$ qu'on dérive par rapport à x_i. On a les deux résultats suivants :

Proposition 1.2.19. *Soit $X \in \Gamma(TM)$. Pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(M)$ et pour tous réels a, b on a*

(1) $L_X(af + bg) = aL_X f + bL_X g$

(2) $L_X(fg) = (L_X f)g + f(L_X g)$

Proposition 1.2.20. *Si $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satisfait (1) et (2) alors il existe une unique section lisse X de TM telle que $L = L_X$.*

Définition 1.2.21. $[L_X, L_Y] = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$

Remarque 1.2.22. On peut vérifier que $[L_X, L_Y]$ satisfait (1) et (2).

Définition 1.2.23. $[X, Y]$ est l'unique champ de vecteurs qui satisfait $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.

Proposition 1.2.24. $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : (X, Y) \mapsto [X, Y]$ *défini une structure d'algèbre de Lie sur* $\Gamma(TM)$.

Définition 1.2.25. Soit G un groupe de Lie. On dit qu'un champ de vecteurs X sur G est *invariant à gauche* s'il est laissé fixe par les difféomorphismes $(L_g)_*$, i.e.

$$(L_g)_*(X)_h = X_{L_g h} \quad \forall g, h \in G.$$

Définition 1.2.26. Pour un groupe de Lie G on définit l'*algèbre de Lie* de G comme suit :

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} := \{X : G \to TG \,|(L_g)_* X_h = X_{L_g h}, \forall g, h \in G\}$$

On a la proposition suivante qui peut s'avérer très utile :

Proposition 1.2.27. *Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche. Nous avons les propriétés suivantes :*

(1) L'application $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X_e$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en particulier $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = dim_{\mathbb{R}}(G) = n$.

(2) Chaque élément X de $\mathfrak{g}$ est lisse.

(3) Le sous-espace $\mathfrak{g} \subset \Gamma(TG)$ est invariant sous le crochet de Lie de $\Gamma(TG)$ et donc ce dernier fournit une structure d'algèbre de Lie à $\mathfrak{g}$.

Définition 1.2.28. Une *action lisse* d'un groupe de Lie sur une variété différentiable est une application lisse

$$a : G \times M \to M : (g, x) \mapsto g \cdot x$$

telle que

(1) pour tout élément g de G, $a_g : M \to M : x \mapsto g \cdot x$ est un élément du groupe $\text{Diff}(M) = \{\phi : M \to M | \, \phi \, \text{est un difféomorphisme de} \, M\}$

(2) $a_e = \text{Id}_M$ si $e = \text{Id}_G$.

Définition 1.2.29. (1) Définissons l'action de G sur $\mathfrak{g}$ de la manière suivante :

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (g, \xi) = Ad_g\xi \quad \text{où} \quad Ad_g\xi = (R_{g^{-1}})_{*(g)} \circ (L_g)_{*(e)}(\xi)$$

Cette action est communément appelée l'*action adjointe* de G.

(2) Grâce à cette action on peut définir une action de G sur $\mathfrak{g}^*$ de la manière suivante :

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* : (g, \eta) = Ad_g^*\eta$$

où $Ad_g^*\eta(\xi) = \eta(Ad_g\xi)$ pout tout vecteur ξ de $\mathfrak{g}$. Cette action est communément appelée l'*action co-adjointe* de G.

Définition 1.2.30. Une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est *effective* si le seul élément du groupe qui laisse fixe tout les points de M est e, l'identité du groupe.

De manière équivalente, l'action de G sur M est effective si et seulement si l'homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$ est injectif.

Remarque 1.2.31. Si G est compact et l'action de G sur M est effective on a que les orbites de cette action forment une stratification de M, c'est-à-dire que $M = \bigcup_p Gp$. On dira qu'une orbite Gp est générique si $\dim(T_pGp)$ est maximale. On peut voir (Audin, (1991)) (proposition 2.2.4) que l'ensemble des points pour lesquels l'orbite est générique est un ensemble dense dans M.

1.3 Actions hamiltoniennes et application moment

Définition 1.3.32. Soit M une variété lisse. Un *groupe à un paramètre de difféomorphismes* est une application lisse $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ qui satisfait les trois propriétés suivantes :

(1) $\Phi_t : M \to M$ est un difféomorphisme pour tout $t \in \mathbb{R}$

(2) $\Phi_0 = Id_M$

(3) $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$

où on a posé on $\Phi_t := \Phi(t, \cdot)$

Définition 1.3.33. Un *groupe infinitésimal à un paramètre de difféomorphismes* (ou simplement un *groupe infinitésimal de difféomorphismes*) est une application lisse

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M$$

qui vérifie les propriétés (1)-(3) pour tous s,t tels que $s + t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Soit Φ_t un groupe infinitésimal de difféomorphismes et p un point de M. On lui associe $\Phi_t(p)$, une courbe lisse. On a $\Phi_0(p) = p$ et $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t(p) \in T_pM$. En faisant un abus de notation on considère que $\Phi_t : M \to TM : p \mapsto (p, \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t(p))$ est une section lisse. De telle façon on associe à chaque groupe infinitésimal Φ_t une section $X \in \Gamma(TM)$.

Si M est compact alors, grâce au théorème fondamental des équations différentielles ordinaires, on peut renverser cette correspondance en associant à chaque section lisse X de TM un groupe infinitésimal Φ_t^X tel que $\Phi_0^X(p) = p$ et $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t^X(p) = X(p)$.

Définition 1.3.34. Φ_t^X est appelé le *flot* du champ de vecteurs X.

Définition 1.3.35. Une *variété symplectique* (M, ω) est une variété différentiable M munie d'une 2-forme différentielle ω qui est fermée et non-dégénérée.

Remarque 1.3.36. (1) Si M est une variété symplectique alors $\dim_{\mathbb{R}}(M) = n = 2m$. En effet, pour un point p de M considérons T_pM et sont dual T_p^*M. Étant donné b dans $\wedge^2(T_p^*M)$ il existe une base $\{f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ de T_p^*M telle que $b = f_1^* \wedge f_2^* + \ldots + f_{2m-1}^* \wedge f_{2m}^*$ et cet entier m ne dépend que de b (Guillemin et Sternberg (2), (1984)). Considérons maintenant la base dual $\{f_1, \ldots, f_n\}$ et prenons $b = \omega$. On trouve que $\omega_{f_1} = \omega(f_1, \cdot) = f_2^*$, $\omega_{f_2} = \omega(f_2, \cdot) = -f_1^*, \ldots, \omega_{f_{2m-1}} = \omega(f_{2m-1}, \cdot) = f_{2m}^*$, $\omega_{f_{2m}} = \omega(f_{2m}, \cdot) = -f_{2m-1}^*$ alors que $\omega_{f_k} = \omega(f_k, \cdot) = 0$ si $k > 2m$. Mais $\omega_v = \omega(v, \cdot) = 0$ si et seulement si $v = 0$. Donc $n = 2m$.

(2) Comme la 2-forme ω est non-dégénérée elle fournit un isomorphisme :

$$\omega : T_pM \to T_p^*M : v \mapsto \omega_v$$

où ω_v est l'unique élément de T_p^*M qui satisfait $\omega_v(u) = \omega(v, u)$ pour tout u dans T_pM. On notera $\omega^{-1} : T_p^*M \to T_pM : v \mapsto \omega^{-1}(v)$ l'isomorphisme inverse. On remarque que $\omega^{-1}(v)$ est l'unique élément de T_pM qui satisfait $v(u) = \omega(\omega^{-1}(v), u)$ pour tout u dans T_pM.

Définition 1.3.37. Une application $f : (M, \omega) \to (N, \eta)$ est un *symplectomorphisme* si f est un difféomorphisme et si f préserve les formes symplectiques i.e. $f^*\eta = \omega$.

Définition 1.3.38. Un champ de vecteurs X est un *champ symplectique* si $(\Phi_t^X)^*(\omega) = \omega$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ou, de manière équivalente, si $L_X\omega = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\Phi_t^X)^*(\omega) = 0$.

Définition 1.3.39. Soit $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur une variété symplectique. Considérons dH, qui est une 1-forme sur M. Alors, par définition, $\omega^{-1}(dH)$ est un *champ de vecteurs hamiltonien* sur M.

Remarque 1.3.40. Chaque champ de vecteurs hamiltonien est un champ symplectique. En effet, soit $X_F = \omega^{-1}(dF)$ un champ de vecteurs hamiltonien. Alors

$$L_{X_F}\omega = \iota_{X_F} d\omega + d(\iota_{X_F}\omega) = d(\omega(X_F, \cdot)) = d(\omega(\omega^{-1}(dF), \cdot)) = d(dF) = 0$$

Définition 1.3.41. Soit (M,ω) une variété symplectique et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Notons par g_H^t le groupe à un paramètre de difféomorphismes associé au champ de vecteurs $\omega^{-1}(dH)$. On défini le *crochet de Poisson* de deux fonctions lisses $F, G : M \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$\{F,G\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(g_H^t(x)) = dF(X_H) = \omega(X_F, X_H).$$

où $X_F = \omega^{-1}(dF)$ et $X_H = \omega^{-1}(dH)$.

On peut vérifier que $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ est une algèbre de Lie.

Lemme 1.3.42. *Définissons*

$$\Pi : C^\infty(M) \to \Gamma(TM) : H \mapsto \omega^{-1}(dH).$$

On a que cette application est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. Pour $H \in C^\infty(M)$ on pose $X_H := \omega^{-1}(dH)$. On doit montrer que $\Pi(\{H,G\}) = [X_H, X_G]$. Soit $F := \{H,G\}$. L'identité de Jacobi nous donne

$$\{A,F\} = \{\{A,H\}G\} - \{\{A,G\},H\}.$$

Donc, $L_{X_F} = L_{X_G}L_{X_H} - L_{X_H}L_{X_G}$. Mais $L_{X_G}L_{X_H} - L_{X_H}L_{X_G} = L_{[X_H,X_G]}$. Alors $L_{X_F} = L_{[X_H,X_G]}$. On conclut donc que $X_F = [X_H, X_G]$ ce qui nous donne le résultat voulu. □

Corollaire 1.3.43. *L'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.*

Soit $G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie compact et connexe G sur une variété symplectique (M,ω) et supposons que cette action laisse ω fixe. Soit ξ un élément de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. On veut associer à ξ un champ de vecteurs sur M. Soit x un point de M et $f_x : G \to M : g \mapsto gx$. Considérons aussi $(df_x)_e : \mathfrak{g} \to T_xM$. En faisant varier x, on obtient, pour un ξ donné, un champ de vecteurs

$$\xi_M : M \to TM : x \mapsto \xi_M(x) = (df_x)_e(\xi).$$

Définition 1.3.43. On appele le champ de vecteurs ξ_M, le *champ de vecteurs fondamental* associé à ξ.

Définition 1.3.44. Soit $G \times M \longrightarrow M$ une action lisse d'un groupe de Lie compact et connexe G sur une variété symplectique (M, ω). L'action est *faiblement hamiltonienne* si pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, il existe $\phi^\xi \in C^\infty(M)$ telle que $\xi_M = \omega^{-1}(d\phi^\xi)$.

Définition 1.3.45. Soit $G \times M \longrightarrow M$ une action lisse d'un groupe de Lie compact et connexe G sur une variété symplectique (M, ω). L'action est *hamiltonienne* si pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, il existe $\phi^\xi \in C^\infty(M)$ telle que $\xi_M = \omega^{-1}(d\phi^\xi)$ et l'application $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M) : \xi \mapsto \phi^\xi$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie (où la structure d'algèbre de Lie de $C^\infty(M)$ est donnée par le crochet de Poisson).

L'application $\xi \mapsto \xi_M$ est injective si l'action de G est effective.

Définition 1.3.46. On peut alors définir l'*application moment* comme suit :

$$\Phi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^* : p \mapsto \Phi(p) \quad \text{où} \quad \langle \Phi(p), \xi \rangle = \phi^\xi(p).$$

On note que cette application est G-équivariante. On dira aussi que (M, ω) est un G-espace hamiltonien.

On peut aussi donner la définition équivalente suivante d'une action hamiltonienne :

Définition 1.3.47. Soit G un groupe de Lie compact connexe qui agit sur une variété symplectique (M, ω) de manière effective. L'action de G sur M est hamiltonienne s'il existe une application (appelée application moment) $\Phi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ qui soit G-équivariante et telle que $\omega(\xi_M, \cdot) = -\langle d\Phi, \xi \rangle$ pour tout vecteur ξ de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.3.48. *Les deux définitions d'application moment sont équivalentes.*

Démonstration. En effet, si on considère la première définition d'une action hamiltonienne on a $\omega(\xi_M, \cdot) = \omega_{\xi_M} = \omega_{\omega^{-1}(d\phi^\xi)} = d\phi^\xi$. Donc pour tout point p de M on a

$\omega(\xi_M(p), \cdot) = d\phi^\xi(p) = d(\langle\Phi(p), \xi\rangle)$. En évaluant cette 1-forme sur un vecteur Y_p de T_pM on obtient $\omega(\xi_M(p), Y_p) = d(\langle\Phi(p), \xi\rangle)(Y_p)$. Pour retrouver la deuxième définition il suffit donc de montrer que $d(\langle\Phi(p), \xi\rangle)(Y_p) = \langle d\Phi(p)(Y_p), \xi\rangle$. Mais cette égalité est claire puisque dériver Φ après l'avoir évalué sur un vecteur de $\mathfrak{g}$ est équivalent à dériver d'abord Φ et ensuite l'évaluer sur un vecteur ξ de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, si on a une application $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ qui satisfait $\omega(\xi_M, \cdot) = -\langle d\Phi, \xi\rangle$ pour tout vecteur ξ de $\mathfrak{g}$ alors, pour un vecteur ξ de $\mathfrak{g}$ on défini $\phi^\xi(p) := \langle\Phi(p), \xi\rangle$. □

Considérons (M, ω) un G-espace hamiltonien où G est abélien . Étant G-équavariante, l'application moment défini un homomorphisme d'algèbres de Lie. Sans perte de généralité on peut supposer que G est connexe et que l'action de G sur M est effective (dans le cas contraire on n'a qu'à quotienter G par le noyau de l'action pour avoir une action effective). On a alors le théorème suivant(Atiyah,(1982)) :

Théorème 1.3.49. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit G un groupe de Lie compact, connexe et abélien qui agit de manière effective et hamiltonienne sur M. Si* $\dim M = 2n$ *alors* $n \geq \dim G$.

Démonstration. Soit p un point pour lequel l'orbite Gp est générique. Un tel point existe (Audin, (1991)) (proposition 2.2.4). Puisque G est compact, connexe et abélien on a que G est un tore. On peut montrer, en utilisant la théorie de Morse, qu'une orbite générique d'une action effective et hamiltonienne d'un tore a la dimension du tore (Atiyah,(1982)). Montrons que la restriction de ω à $T_p(Gp)$ est nulle i.e. si $X, Y \in \Gamma(T(Gp))$ alors $\omega(X, Y) = 0$. Puisque G est abélien on a $[\xi, \eta] = 0$ pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Si on considère $\Theta : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : \xi \mapsto \phi^\xi$ alors $\Theta([\xi, \eta]) = 0$. Mais $\Theta([\xi, \eta]) = \{\phi^\xi, \phi^\eta\}$. On obtient donc $\omega(X_{\phi^\xi}, X_{\phi^\eta}) = 0$. Cependant, pour tout $X \in \Gamma(T(Gp))$ il existe un élément ξ de $\mathfrak{g}$ tel que $X = X_{\phi^\xi}$. Donc il existe ξ et η dans $\mathfrak{g}$ tels que $\omega(X, Y) = \omega(X_{\phi^\xi}, X_{\phi^\eta}) = 0$. Donc $\dim T_p(Gp) \leq n$. Ce qui nous donne le résultat voulu. □

En vertu de ce théorème nous allons nous intéresser au cas où $\dim M = 2\dim G$.

Définition 1.3.50. Si $G = T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ agit sur (M, ω) de manière hamiltonienne et effective et si $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ alors on dit que la variété M est *torique.*

Définition 1.3.51. Une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est *localement libre* s'il existe un voisinage U_ϵ de l'identité tel que l'action de U_ϵ sur M soit libre.

Remarque 1.3.52. Soit M une variété munie d'une action localement libre d'un groupe de Lie compact. Alors $x \in M$ a un stabilisateur fini. Sinon on a que l'identité de G est un point d'accumulation du stabilisateur de $g^{-1} \cdot x$ où g est un point d'accumulation du stabilisateur de x ($\mathrm{Stab}_x(G)$ étant infini sur un compact). On a donc que l'action n'est pas localement libre.

1.4 Géométrie kählérienne

Définition 1.4.53. Une *variété riemannienne* (M, g) est une variété lisse M munie d'une section $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ qui est symétrique et définie positive en chaque point i.e. pour chaque point p de M

$$g_p(u_p, v_p) = g_p(v_p, u_p), \quad \forall u_p, v_p \in T_pM \text{ et}$$

$$g_p(u_p, u_p) > 0, \quad \forall u_p \in T_pM \setminus \{0\}\,.$$

Remarque 1.4.54. On se sert de g pour définir un isomorphisme entre T_pM et T_p^*M.

(1) $\flat : T_pM \to T_p^*M : v \mapsto v^\flat$ où $v^\flat$ est l'unique élément de T_p^*M qui satisfait $v^\flat(u) = g(v, u) \quad \forall u \in T_pM$.

(2) $\sharp : T_p^*M \to T_pM : w \mapsto w^\sharp$ où $w^\sharp$ est l'unique élément de T_pM qui satisfait $g(w^\sharp, u) = w(u) \quad \forall u \in T_pM$.

Définition 1.4.55. Soit $X \in \Gamma(TM)$ et Φ_t^X le flot de X. On dit que X est une *isométrie infinitésimale* (ou *un champ de Killing*) de (M, g) si $(\Phi_t^X)^* g = g$ pour tout t dans $(-\epsilon, \epsilon)$. On note le groupe des isométries infinitésimales par $\mathrm{Isom}(M, g)$.

Remarque 1.4.56. Si (M,g) est compacte on a que $\mathrm{Isom}(M,g)$ est compact (Kobayashi et Nomizu, (1996))(section 4).

Définition 1.4.57. Soit M une variété différentiable de dimension réelle $2n$ et soit J une section de $\mathrm{End}(TM)$ telle qu'en chaque point, $J^2 = -\mathrm{Id}$ alors J est une *structure presque-complexe* sur M.

Définition 1.4.58. Soit (M,g,ω) une variété riemannienne et symplectique de dimension $2n$. Soit J une structure presque-complexe sur M. Si $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$ alors on dit que la variété M est *presque-kählérienne.*

Soit M une variété différentiable de dimension réelle $2n$ et soit $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification du fibré tangent TM. Soit $T^*_{\mathbb{C}}M = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification du fibré cotangent T^*M. On considère l'algèbre extérieure $\wedge T^*_{\mathbb{C}}M$ et on pose $\Omega^r(M) := \Gamma(\wedge^r T^*_{\mathbb{C}}M)$ qui sont les formes différentielles de degré r à valeurs complexes. La dérivée extérieure d agit sur les formes différentielles réelles et peut être étendue par linéarité complexe sur les formes différentielles à valeurs complexes. On a la suite suivante :

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

avec $d^2 = 0$. Cette suite est appelé le complexe de DeRham

Supposons que (M,J) est une variété différentiable munie d'une structure presque-complexe. L'endomorphisme J est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire sur chaque fibre de $T_{\mathbb{C}}M$ et possède $\pm i$ comme valeurs propres. Soit $TM^{1,0}$ le fibré des espaces propres correspondant à la valeur propre i de J et soit $TM^{0,1}$ le fibré des espaces propres correspondant à la valeur propre $-i$ de J. On défini la conjugaison complexe sur $T^*M_{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

$$Q : T^*M_{\mathbb{C}} \to T^*M_{\mathbb{C}} : v \otimes \alpha \mapsto v \otimes \bar{\alpha}.$$

Une telle conjugaison envoie $TM^{1,0}$ dans $TM^{0,1}$ et vice-versa.

En chaque point x de M, $J_x : T_xM \to T_xM$ satisfait $J_x^2 = -\mathrm{Id}$. Cet endomorphisme nous permet d'induire une multiplication par les nombres complexes sur T_xM.

En effet, posons $s + it(v_x) = sv_x + tJ_x(v_x)$ où $v_x \in T_xM$ et de cette manière T_xM devient un espace vectoriel complexe noté T_xM_J. Notons TM_J le fibré sur M pour lequel la fibre en un point x est T_xM_J. On a que TM_J est canoniquement isomorphe à $TM^{1,0}$. L'isomorphisme est donné par $v \otimes \alpha \mapsto \alpha v$ où α est un nombre complexe.

Soit $T^*M^{1,0}$ (resp. $T^*M^{0,1}$) le fibré dual sur $\mathbb{C}$ du fibré $TM^{1,0}$ (resp. $TM^{0,1}$). Considérons les fibrés algèbres extérieures $\wedge T^*_{\mathbb{C}}M$, $\wedge T^*M^{1,0}$ et $\wedge T^*M^{0,1}$. On a que $\wedge T^*_{\mathbb{C}}M = \wedge T^*M^{1,0} \oplus \wedge T^*M^{0,1}$. Considérons le fibré $\wedge^{p,q}T^*_{\mathbb{C}}M$ où la fibre en un point x est $\wedge^p T^*_x M^{1,0} \oplus \wedge^q T^*_x M^{0,1}$. Une section de ce fibré est une forme différentielle de type (p, q) sur M à valeur dans $\mathbb{C}$. L'ensemble de ces sections est noté $\Omega^{p,q}(M)$. De plus, on a que :

$$\Omega^r(M) = \underset{p+q=r}{\oplus} \Omega^{p,q}(M)$$

Soit $\{w_1, \ldots, w_n\}$ une base trivialisante du fibré $T^*M^{1,0}$ pour un ouvert U de M (i.e. pour tout x dans U, $\{w_1(x), \ldots, w_n(x)\}$ est une base de $T^*_xM^{1,0}$). Il s'ensuit que $\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n\}$ est une base trivialisante du fibré $T^*M^{0,1}$ pour le même ouvert. Une base trivialisante pour le fibré $\wedge^{p,q}T^*M_{\mathbb{C}}$ dans l'ouvert U est donc donnée par

$$\{w^I \wedge \bar{w}^J | w^I = w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_p} \,\text{et}\, w^J = w_{j_1} \wedge \ldots \wedge w_{j_q}\}$$

où $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$.

On a alors que n'importe quelle section s de $\Omega^{p,q}(M)$ restreinte à U s'écrit comme $s = \sum_{|I|=p,|J|=q} a_{IJ} w^I \wedge \bar{w}^J$ où a_{IJ} est une fonction C^∞ sur U. Notons que

$$ds = \sum_{|I|=p,|J|=q} da_{IJ} \wedge (w^I \wedge \bar{w}^J) + a_{IJ} d(w^I \wedge \bar{w}^J).$$

Soit (p, q) tels que $p + q = r$. On a alors la projection naturelle suivante :

$$\pi_{p,q} : \Omega^r(M) \to \Omega^{p,q}(M).$$

En restreignant d à $\Omega^{p,q}(M)$, on obtient :

$$d : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+q+1}(M) = \underset{t+s=p+q+1}{\oplus} \Omega^{t,s}(M)$$

On défini $\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$ en posant $\partial := \pi_{p+1,q} \circ d$ et $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$ en posant $\bar{\partial} := \pi_{p,q+1} \circ d$. On étend ∂ et $\bar{\partial}$ à tout $\Omega^*(M) = \sum_{r=1}^{\dim M} \Omega^r(M)$ par linéarité complexe. En général, $d : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+q+1}(M)$ se décompose comme suit :

$$d = \sum_{s+t=p+q+1} \pi_{s,t} \circ d.$$

En particulier, cette décomposition comprend $\partial + \bar{\partial}$.

Définition 1.4.59. Si $d = \partial + \bar{\partial}$ alors on dit que la structure presque-complexe est *intégrable.*

Définition 1.4.60. Soit (M, g, ω) une variété presque-kählérienne. Soit J une structure presque-complexe sur M. Si J est intégrable alors M est une variété *kählérienne.*

Remarque 1.4.61. (1) On peut voir (McDuff et Salamon, (1995)) (théorème 4.12) qu'une structure presque-complexe est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis définit comme suit :

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y])$$

est identiquement nul.

(2) De plus, si J est une structure presque-complexe qui provient d'un atlas de cartes holomorphes alors $d = \partial + \bar{\partial}$ (Wells, (1980))(théorème 3.7).

(3) Le célèbre théorème de Newlander-Nirenberg affirme que $N(X,Y) = 0$ si et seulement si $d = \partial + \bar{\partial}$ si et seulement si la structure presque-complexe J provient d'un atlas de cartes holomorphes.

Définition 1.4.62. Soit (M^{2n}, g, ω) une variété presque-kählérienne alors $\Phi_t : (M^{2n}, g, \omega) \to (M^{2n}, g, \omega)$ est un *groupe infinitésimal d'isométries hamiltoniennes* si Φ_t est le flot d'un champ hamiltonien $\omega^{-1}(dH)$ et de plus Φ_t est dans $\mathrm{Isom}(M^{2n}, g, \omega)$.

Définition 1.4.63. Soit M une variété lisse de dimension m. Une *sous-variété* (N, ϕ) est une variété lisse N et une application lisse $\phi : N \to M$ telle que

(1) ϕ est injective,

(2) $\phi_* : T_aN \to T_{\phi(a)}M$ est injective pour tout point a de N.

Remarque 1.4.64. Par le lemme 1.3.42 et puisque les champs de Killing forment une algèbre de Lie ((Gallot, Hulin et Lafontaine (1987))), l'ensemble des champs de Killing hamiltoniens sur une variété presque-kählérienne (M^{2n}, g, ω) est une sous-algèbre de Lie des champs de Killing de (M^{2n}, g, ω) c'est-à-dire de Lie(Isom(M, g)). On peut donc lui associer un sous-groupe de Lie $\mathrm{Isom}_0(M, g, \omega) \subset \mathrm{Isom}(M, g, \omega)$. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.65. *Soit G un groupe de Lie avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un unique sous-groupe de Lie $(H, \phi) < G$ tel que $\phi^*(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.*

1.5 Connexions

Définition 1.5.66. Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel sur une variété différentiable. Une *connexion* $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ est une application lisse qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\nabla_X(\lambda s_1 + \mu s_2) = \lambda \nabla_X s_1 + \mu \nabla_X s_2$,

(2) $\nabla_{fX+gY} s = f(\nabla_X s) + g(\nabla_Y s)$,

(3) $\nabla_X(fs) = df(X)s + f(\nabla_X s)$,

où $X, Y \in \Gamma(TM), s_1, s_2, s \in \Gamma(E), f, g \in C^\infty(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.5.67. Soient (E, ∇^E) et (F, ∇^F) deux fibrés munis de connexions. Si $s \in \Gamma(E)$ alors $\nabla^E s \in \Gamma(T^*M \otimes E)$. Si $s_1, s \in \Gamma(E), s_2 \in \Gamma(F), s^* \in \Gamma(E^*)$ alors :

(1) $(E \oplus F, \nabla^{E+F})$ où $\nabla^{E+F}(s_1 + s_2) := \nabla^E(s_1) + \nabla^F(s_2)$

(2) $(E \otimes F, \nabla^{E \otimes F})$ où $\nabla_X^{E \otimes F}(s_1 \otimes s_2) := (\nabla_X^E s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^F s_2)$

(3) (E^*, ∇^{E^*}) où $(\nabla_X^{E^*} s^*)s := L_X \langle s^*, s \rangle - \langle s^*, \nabla_X s \rangle$

sont tous des fibrés munis de connexions. On peut donc conclure que ∇^E induit une connexion sur le fibré $\underbrace{E^* \otimes \ldots \otimes E^*}_{q-\text{fois}} \otimes \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{p-\text{fois}}$. Par abus de notation on note encore cette connexion ∇^E.

Définition 1.5.68. Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une métrique riemannienne i.e une section $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ qui est symétrique et définie positive. Une connexion ∇ est *métrique* si $\nabla g = 0$.

Remarque 1.5.69. De telles connexions existent.

Définition 1.5.70. Soit M une variété riemanienne et (TM, ∇) le fibré tangent muni d'une connexion. La *torsion* de la connexion est $T^{\nabla}(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ où $X, Y \in \Gamma(TM)$. T^{∇} est une section du fibré $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$.

Définition 1.5.71. Une connexion est *sans torsion* si $T^{\nabla} = 0$

Théorème 1.5.72. *(Levi-Civita) Sur chaque variété riemannienne (M, g) il existe une unique connexion D qui est à la fois métrique et sans torsion. Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita.*

Pour une preuve de ce théorème on peut voir (Gallot, Hulin et Lafontaine (1987)).

Lemme 1.5.73. *Soit K un champ de vecteurs lisse sur une variété riemannienne M munie de la connexion de Levi-Civita. Alors K est un champ de Killing si et seulement si $(dK^\flat)(X,Y) = 2(D_X K^\flat)(Y)$*

Rappelons premièrement deux faits :

(1) Si g est une métrique riemannienne sur M et D est sa connexion de Levi-Civita, alors

$$(D_X g)(Y,Z) - (L_X g)(Y,Z) = -g(D_Y X, Z) - g(Y, D_Z X)$$

D'ici on obtient $(L_X g)(Y,Z) = -g(D_Y X, Z) - g(Y, D_Z X)$.

(2) Si α est une 1-forme différentielle alors

$$(d\alpha)(X,Y) = (D_X \alpha)(Y) - (D_Y \alpha)(X)$$

où D est une connexion sans torsion. En effet, pour α une p-forme différentielle sur une variété différentiable M on a la formule suivante (Gallot, Hulin et Lafontaine

(1987))(corollaire 1.122) :
$d\alpha(X_0,\ldots,X_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i L_{X_i}(\alpha(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p))+$

$$\sum_{0\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p)$$

où $X_0,\ldots,X_p$ sont des champs de vecteurs lisses sur M. Si α est une 2-forme et X,Y sont des champs de vecteurs lisses sur M on obtient :

$$d\alpha(X,Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$$

Puisque la connexion D est sans torsion on trouve que $D_XY - D_YX = [X,Y]$. Donc, on obtient que
$d\alpha(X,Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha(D_XY - D_YX)$

$$= (L_X(\alpha(Y)) - \alpha(D_XY)) - (L_Y(\alpha(X)) - \alpha(D_YX))$$

Cette dernière expression est précisément $(D_X\alpha)(Y) - (D_Y\alpha)(X)$.

Démonstration. Si K est un champ de Killing alors par (1)

$$0 = (L_Kg)(X,Y) = -g(D_XK,Y) - g(X,D_YK) = g(D_XK,Y) + g(X,D_YK).$$

Mais par définition, $g(D_XK,ZY) = (D_XK)^\flat(Y) = (D_XK^\flat)(Y)$ et $g(X,D_YK) = (D_YK)^\flat(X) = (D_YK^\flat)(X)$. Donc, $(D_XK^\flat)(Y) = -(D_YK^\flat)(X)$.

Par (2) on a $(dK^\flat)(X,Y) = (D_XK^\flat)(Y) - (D_YK^\flat)(X) = 2(D_XK^\flat)(Y)$.

Si $(dK^\flat)(X,Y) = 2(D_XK^\flat)(Y)$ alors par (2), $(D_XK^\flat)(Y) = -(D_YK^\flat)(X)$ et donc $(D_XK^\flat)(Y) + (D_YK^\flat)(X) = 0$. Conséquemment,

$$-g(D_XK,Y) - g(X,D_YK) = -(D_XK^\flat)(Y) - (D_YK^\flat)(X) = 0$$

et pour conclure $(L_Kg)(X,Y) = -g(D_XK,Y) - g(X,D_YK) = 0$ i.e. K est un champ de Killing. $\square$

1.6 Transformée de Legendre

Soit $y = f(x)$ une fonction convexe deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$ i.e. $f''(x) > 0$ pour tout réel x. Soit $U = \{p \in \mathbb{R} | \exists x \in R \quad \text{avec} f(x) = p\}$. Soit p dans U. Considérons $x = x(p) =$ le maximum par rapport à x de la fonction $F(p, x) = xp - f(x)$.

Définition 1.6.74. Posons $g(p) = F(p, x(p))$, alors $g(p)$ est la *transformée de Legendre* de f.

Maintenant, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse convexe par rapport au vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i.e. $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_x\right) > 0$ pour tout point x de $\mathbb{R}^n$. Soit

$$U = \left\{p \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists x \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x\right\}$$

Définition 1.6.75. La *transformée de Legendre* de f est une fonction $g : U \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$g : U \to \mathbb{R} : p \mapsto F(p, x(p)) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} F(p, x)$$

où $F(p, x) = \langle x, p \rangle - f(x)$. Cette fonction est bien définie car si on fixe p la fonction $F(p, x)$ aura un maximum par rapport à x en $x(p)$ si et seulement si $p = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x(p)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x(p)}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{x(p)}\right)$.

1.7 Distributions et le théorème de Frobenius

Définition 1.7.76. Une *distribution* C^∞ sur une variété lisse M est une correspondance

$$a \mapsto D(a) \subset T_a M$$

où $a \in M$. Cette correspondance doit satisfaire les propriétés suivantes :

(1) pour tout point a de M $\dim_{\mathbb{R}}(D(a)) = p = \text{rang}(D)$,

(2) pour tout point a de M il existe un voisinage U_a contenant a et des sections $X_1, \ldots, X_p$ de $\Gamma(TM)$ telles que

$$D(b) = \text{span}_{\mathbb{R}} \{X_1, \ldots, X_p\} \quad \forall b \in U_a$$

Définition 1.7.77. On dit que (N, ϕ) est une *sous-variété intégrale* de (M, D) si $\phi_*(TN) \subset D$.

Définition 1.7.78. On dit que D est une *distribution complètement intégrable* si pour tout $a \in M$ il existe une sous-variété intégrale (N_a, ϕ_a) telle que $\dim N = p = \text{rang}(D)$ et $a \in \phi_a(N_a)$.

Définition 1.7.79. Une distribution D est dite *involutive* si pour tout point a de M il existe un voisinage U_a de a et des champs de vecteurs lisses $\{X_1, \ldots, X_n\}$ sur U_a tels que pour tout $b \in U_a$:

(1) $\text{span}_{\mathbb{R}} \{X_1(b), \ldots X_p(b)\} = D(b)$,

(2) $[X_i, X_j](b) \in D(b)$.

Notons que (2) ne dépend pas des choix de vecteurs dans (1).

Théorème 1.7.80. ***(Frobenius)****(Narasimhan (1985))Une distribution lisse D de rang p est complètement intégrable si et seulement si elle est involutive.*

Définition 1.7.81. Soit (M, ω) une variété symplectique et $N \subset M$ une sous-variété. Alors N est une *sous-variété isotrope* si et seulement si la forme symplectique ω, restreinte à TN, est nulle.

Remarque 1.7.82. Soit $N \subset M^{2n}$ une sous-variété isotrope. Alors $\dim N \leq n$.

Définition 1.7.83. Si $\dim N = n$ alors on dit que N est une *sous-variété lagrangienne.*

1.8 Fibrations et fibrés principaux

Définition 1.8.84. Soient E, B et F des variétés différentiables et $p : E \to B$ une application lisse. On dit que p est une fibration de base B de fibre F et d'espace total E si :

(1) l'application p est surjective,

(2) il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de B et des difféomorphismes

$$h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$$

tels que $h_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times F$ pour tout x dans U_i.

Définition 1.8.85. Dans le cas où la fibre est isomorphe à un groupe G qui agit librement sur l'espace total E on dit que p est une G-fibration principale.

CHAPITRE II

THÉORIE DE DELZANT

Dans ce chapitre nous présenterons la construction de Delzant dans le cas d'un polytope de Delzant. Une construction similaire est proposée par (Lerman et Tolman, (1997)) dans le cas d'un polytope rationnel. Notons que la construction de Delzant décrite dans ce mémoire est tirée essentiellement de (Guillemin, (1994)).

2.1 Principe de réduction de Marsden-Weinstein et quotients symplectiques

Théorème 2.1.1. *(Guillemin, (1994))(théorème 1.4)Soient G un groupe de Lie compact qui agit de manière hamiltonienne sur M, Φ son application moment et c un élément de $\Phi(M)$. Soit $M_c = \Phi^{-1}(c)$. Alors M_c est G-invariant ce qui nous permet de définir une action de G sur M_c. De plus, c est une valeur régulière de Φ si et seulement si l'action de G en tout point $p \in M_c$ est localement libre.*

Remarque 2.1.2. On aura que M_c est une sous-variété de M , de codimension $\dim G$, si et seulement si c est une valeur régulière de Φ.

Supposons que G agit librement sur M_c. On a que l'espace des orbites

$$B := M_c/G$$

est une variété lisse et par définition, l'application

$$\pi : M_c \to B : p \mapsto [p]_G$$

est une G-fibration principale. Soit $\iota : M_c \to M$ l'inclusion.

Théorème 2.1.3. *Il existe une forme symplectique ω_B sur B telle que*

$$\iota^*\omega_M = \pi^*\omega_B$$

Une preuve de ce théorème sera donnée dans le théorème 2.1.7.

Remarque 2.1.4. On peut généraliser ce résultat dans le cas où l'action de G sur M_c est localement libre au lieu d'être libre. Dans le cas d'une action qui est localement libre on obtient que $B = M_c/G$ est une orbifold symplectique.

Définition 2.1.5. Si l'action est libre alors $M//_cG = \Phi^{-1}(c)/G$ est une variété symplectique appelée *quotient symplectique* ou *réduction symplectique* de M par G. Plus généralement, si l'action est localement libre alors $M//_cG$ est une orbifold symplectique.

Théorème 2.1.6. *Soit G un groupe de Lie compact et N un sous-groupe de Lie fermé. Supposons que $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ est un G-espace hamiltonien avec application moment $\Phi : \tilde{M} \to \mathfrak{g}^*$ et $\Phi_N = \iota^* \circ \Phi : \tilde{M} \to \mathfrak{n}^*$ est l'application moment induite de l'action hamiltonienne de N, où ι^* est l'adjointe de $\iota : \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}$. Supposons de plus que N est un sous-groupe normal dans G, que $\tilde{c} \in \mathfrak{g}^*$ est invariant sous l'action co-adjointe de G et que $c = \iota^*(\tilde{c})$ est une valeur régulière de Φ_N telle que l'action de N sur $\Phi_N^{-1}(c)$ est localement libre. Alors $M = \tilde{M}//_cN$ est un G/N-espace hamiltonien dont l'application moment, vue comme une application N-invariante sur $\Phi_N^{-1}(c)$, est la restriction de $\Phi - \tilde{c}$ à $\Phi_N^{-1}(c)$.*

Démonstration. L'action d'un élément $[g]$ du groupe quotient G/N sur une classe $[z]$ de M est donnée par $[g] \cdot [z] = [g \cdot z]$. Il faut voir que cette action est bien définie i.e. on doit montrer que $g \cdot z$ est dans $\Phi_N^{-1}(c)$. On a que les points z de $\Phi_N^{-1}(c)$ sont caractérisés par $\langle \Phi(z) - \tilde{c}, \xi \rangle = 0$ pour tout vecteur ξ de $\mathfrak{n}$. On a que $\tilde{c}$ est invariante par l'action co-adjointe et Φ est G-équivariante par définition. Donc,

$$\langle \Phi(g \cdot z) - \tilde{c}, \xi \rangle = \left\langle Ad_g^*(\Phi(z)) - Ad_g^*\tilde{c}, \xi \right\rangle = \left\langle \Phi(z) - \tilde{c}, Ad_{g^{-1}}\xi \right\rangle = 0.$$

Donc $g \cdot z$ est dans $\Phi_N^{-1}(c)$.

Puisque N est un sous-groupe normal, $[g \cdot z]$ ne dépend que de $[g]$ et $[z]$. En effet, si on prend gh un représentant de la classe gN et $\tilde{z} = \tilde{h} \cdot z$ un élément de l'orbite Nz alors $[g \cdot z] = [(gh) \cdot (\tilde{h} \cdot z)]$ (il suffit de prendre $\bar{h} = g \cdot (h\tilde{h})^{-1} g^{-1} \in N$ et on obtient $\bar{h}((gh) \cdot (\tilde{h} \cdot z)) = g \cdot z)$.

Le fait que $\langle \Phi(z) - \tilde{c}, \xi \rangle = 0$ pour tout point z de $\Phi_N^{-1}(c)$ et pour tout vecteur ξ de $\mathfrak{n}$ implique que $\nu := (\Phi - \tilde{c})|_{\Phi_N^{-1}(c)}$ est à valeur dans $\mathfrak{n}^0 =$ annulateur de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}^*$. On peut identifier $\mathfrak{n}^0$ à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. En effet, $\mathfrak{n}^0 = \{l \in \mathfrak{g}^* | \langle l, x \rangle = 0 \forall x \in \mathfrak{n}\}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^* = \{l : \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{R} | \, l \text{ est linéaire}\}$. Puisque l ne dépend pas du représentant choisi, l s'annule sur tout élément de $\mathfrak{n}$. On obtient donc un isomorphisme entre $\mathfrak{n}^0$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. En se servant de cet isomorphisme on peut considérer ν comme étant à valeur dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. On veut démontrer que $\nu(g \cdot z) = \nu(z)$ pour tout g élément du groupe N. Soit ξ un vecteur dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$:

$$\langle \nu(g \cdot z), \xi \rangle = \langle \Phi(g \cdot z) - \tilde{c}, \xi \rangle = \left\langle Ad_g^*(\Phi(z) - \tilde{c}), \xi \right\rangle$$

$$= \left\langle \Phi(z) - \tilde{c}, Ad_{g^{-1}}(\xi) \right\rangle = \left\langle \nu(z), Ad_{g^{-1}}(\xi) \right\rangle = \langle \nu(z), \xi \rangle$$

car $g \in N$(ici on considère plutôt $Ad_{[g^{-1}]_N}$ qui agit bien sûr comme l'identité sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$). Ceci montre que l'application $\nu : M \longrightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$ est bien définie. Il suffit de voir que $\langle d\nu, [\xi] \rangle = -\omega(\cdot, [\xi]_M)$ où ω est une forme différentielle qui nous est donnée par le théorème 2.1.3 (ici $i : \Phi^{-1}(c) \longrightarrow \tilde{M}$ est l'inclusion) et on aura que ν est l'application moment de l'action de G/N sur M. Si ξ est un vecteur de $\mathfrak{g}$ et Y_p est dans $T_p\Phi^{-1}(c)$, on obtient

$$\pi^* \langle d\nu, [\xi] \rangle (Y_p) = \langle d\nu(\pi_*(Y_p)), [\xi] \rangle$$

$$= \langle d\Phi(i_*(Y_p)), \xi \rangle = -\tilde{\omega}(\iota_*(Y_p), \iota_*(\xi_M(p)))$$

$$= -\iota^* \tilde{\omega}(Y_p, \xi_M(p)) = -\pi^* \omega(Y_p, \xi_M(p)).$$

On conclut donc que $\langle d\nu, [\xi] \rangle = -\omega(\cdot, [\xi]_M)$. □

On a le théorème suivant (Futaki, (1987))(section 2) qui nous permet essentiellement de descendre la structure kählérienne si l'espace quotienté possède une structure kählérienne. Dans ce théorème on considère à la fois l'algèbre de Lie comme une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur M et comme l'espace tangent à l'identité du groupe.

Théorème 2.1.7. *Soit (M, ω, J, g) une orbifold kählérienne munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact et connexe K. Supposons de plus que l'action préserve la structure complexe de M. Si 0 est une valeur régulière de l'application moment Φ alors $M_K = \Phi^{-1}(0)/K$ est une orbifold kählérienne.*

Démonstration. Posons $Z = \Phi^{-1}(0)$. Soit ξ un vecteur de $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$. Pour tout point p de M considérons $\mathfrak{k}_p = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\xi_{\mathrm{M}}(\mathrm{p})$. Soit p un point de Z, Y un vecteur de T_pZ et X dans $\mathfrak{k}_p$ alors

$$g(JX, Y) = \omega(X, Y) = d\Phi_X(Y) = \Phi_*(Y)(X) = 0,$$

où $\Phi_X : M \to \mathbb{R} : p \mapsto \langle \Phi(p), X \rangle$. En effet, puisque $Y \in T_pZ$ on a que $\Phi_*(Y) = 0$. Soit $\{\xi^1, \ldots, \xi^{\mathrm{dimK}}\}$ des éléments de $\mathfrak{k}$ tels que $\mathfrak{k} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{\xi^1, \ldots, \xi^{\mathrm{dimK}}\}$. Puisque $\operatorname{codim} Z = \dim K$ et $g(JX, Y) = 0$ si Y est dans T_pZ on conclut que

$$T_pM = T_pZ \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim K} J\mathfrak{k}_p^i \right)$$

où $\mathfrak{k}_p^i = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\xi^i_{\mathrm{M}}(\mathrm{p})$. Soit E_p le complément orthogonal à $\left(\bigoplus_{i=1}^{\dim K} \mathfrak{k}_p^i \right)$ dans T_pZ par rapport à la métrique g. On obtient donc

$$T_pM = E_p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim K} \mathfrak{k}_p^i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim K} \mathfrak{J}k_p^i \right)$$

Si W_p est dans E_p alors JW_p est dans E_p. Donc E_p est J-invariant. On a de plus que la distribution $E = \mathrm{span}\,\{E_p | p \in Z\}$ est K-invariante. Puisque E est J-invariante on a la décomposition suivante de $E \otimes \mathbb{C}$:

$$E \otimes \mathbb{C} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$$

où $E^{1,0}$ (resp. $E^{0,1}$) est l'espace propre associé à i (resp. $-i$). On a que

$$E^{1,0} = T^{1,0}M|_Z \cap (TZ \otimes \mathbb{C})$$

En effet, en chaque point p de Z on a que $E_p^{1,0} \subset T_pZ \otimes \mathbb{C}$ et $E_p^{1,0} \subset T_p^{1,0}M|_Z$ donc $E^{1,0} \subset T^{1,0}M|_Z \cap (TZ \otimes \mathbb{C})$. Il reste donc à voir que $T^{1,0}M|_Z \cap (TZ \otimes \mathbb{C}) \subset E^{1,0}$.

Soit p un point de Z et soit X_p dans $T_p^{1,0}M|_Z \cap (T_pZ \otimes \mathbb{C})$. On veut voir que X_p est dans $E_p^{1,0}$. Remarquons d'abord que $E^{1,0} = \{X - iJX | X \in E\}$. En effet $J(X - iJX) = JX + iX = i(X - iJX)$. On veut donc voir que $X_p = Y_p - iJY_p$ avec $Y_p \in E_p$. On a que X_p appartient à $T_p^{1,0}M$ alors $X_p = W_p - iJW_p$ où W_p est un élément de T_pM. On a que X_p est dans $T_pZ \otimes C$ alors $X_p = (a + ib)V_p$ pour un V_p dans T_pZ. Donc $X_p = W_p - iJW_p = (a+ib)V_p = aV_p + ibV_p$. Conséquemment, $W_p = aV_p$ et $-JW_p = bV_p$. On veut voir que W_p appartient à E_p. Mais

$$g(W_p, JK_i(p)) = g(aV_p, JK_i(p)) = 0$$

car $aV_p \in T_pZ$. De plus,

$$g(W_p, K_i(p)) = g(JW_p, JK_i(p)) = -g(bV_p, JK_i(p)) = 0$$

car $bV_p \in T_pZ$. Donc W_p est un élément de E_p par définition de E_p.

Cette décomposition nous montre que $E^{1,0}$ est complètement intégrable. En effet, si X, Y sont des champs de vecteurs de $T^{1,0}M|_Z$ alors $[X, Y] \in T^{1,0}M|_Z$ et on a le même résultat pour des champs de vecteurs dans $TZ \otimes \mathbb{C}$. Donc, par le théorème 1.7.80 on conclut que $E^{1,0}$ est complètement intégrable. Soit $\pi : Z \to M_K$ la projection alors $d\pi|_{E_p}$ induit un isomorphisme entre E_p et $T_{\pi(p)}M_K$. On définit une structure presque-complexe J_K sur M_K de telle sorte que l'équation suivante est satisfaite :

$$d\pi|_E \circ J = J_K \circ d\pi|_E .$$

Une telle application peut être définie car l'action de K sur M préserve J. On a que J_K est intégrable.

En effet, soient s_1 et s_2 deux sections de $T^{1,0}M_K$ et s_1' et s_2' les uniques sections K-invariantes de $E^{1,0}$ telles que $d\pi(s_i') = s_i$ $(i = 1, 2)$. Puisque $E^{1,0}$ est intégrable on a que $[s_1', s_2']$ est une section K-invariante de $E^{1,0}$. Alors $d\pi[s_1', s_2'] = [s_1, s_2]$ est une section de $T^{1,0}M_K$ car $d\pi|_E$ est un isomorphisme sur son image. Donc J_K est intégrable. En effet, puisque s_1, s_2 sont dans $\Gamma(T^{1,0}M_K)$ on a qu'il existe X_1, X_2 deux champs de vecteur réels tels que $s_j = X_j - iJ_KX_j$ pour $j = 1, 2$. Posons

$$Z = [s_1, s_2] = [X_1, X_2] - i[X_1, J_KX_2] - i[J_KX_1, X_2] - [J_KX_1, J_KX_2].$$

Donc

$$\frac{1}{4}(Z+iJ_KZ)=\frac{1}{4}\{[X_1,X_2]-i[X_1,J_KX_2]-i[J_KX_1,X_2]-[J_KX_1,J_KX_2]\}$$
$$+\frac{1}{4}\{iJ_K[X_1,X_2]+J_K[X_1,J_KX_2]+J_K[J_KX_1,X_2]-iJ_K[J_KX_1,J_KX_2]\}$$
$$=\frac{1}{4}\{[X_1,X_2]+J_K[J_KX_1,X_2]+J_K[X_1,J_KX_2]-[J_KX_1,J_KX_2]\}$$
$$+\frac{1}{4}\{-iJ_K[J_KX_1,J_KX_2]-i[J_KX_1,X_2]-i[X_1,J_KX_2]+iJ_K[X_1,X_2]\}$$
$$=-N(X_1,X_2)-iJ_K(N(X_1,X_2)).$$

Puisque $Z\in\Gamma(T^{1,0}M_K)$ on a $Z=Z_1-iJ_KZ_1$ avec Z_1 un champ de vecteurs réel. Donc

$$Z+iJ_KZ=(Z_1-iJ_KZ_1)+iJ_K((Z_1-iJ_KZ_1)=Z_1-iJ_KZ_1=iJ_KZ_1-Z_1=0$$

Donc $N(X_1,X_2)=0$ pour tout $X_1,X_2\in\Gamma(TM_K)$ car on avait choisi s_1,s_2 quelconques.

Définissons une métrique riemannienne g_K sur M_K par la propriété suivante :

$$g(X_p,Y_p)=g_K(d\pi(X_p),d\pi(Y_p)),$$

pour tous vecteurs X_p et Y_p de E_p. On a que g_K est J_K-invariante. Posons

$$\omega_K(X,Y)=g_K(J_KX,Y).$$

Nous allons montrer que $\pi^*\omega_K=\iota^*\omega$ où $\iota:K\to M$ est l'inclusion. Soient X' et Y' les uniques sections K-invariantes de E telles que $d\pi(X')=X$ et $d\pi(Y')=Y$. On a

$$\pi^*\omega_K(X',Y')=g_K(J_Kd\pi(X'),d\pi(Y'))\circ\pi$$
$$g_K(d\pi(JX'),d\pi(Y'))\circ\pi$$
$$g(JX',Y')=\iota^*\omega(X',Y').$$

Si X' est un vecteur de $T_p(Kp)$ alors $\pi^*\omega_K(X',Y')=0$ pour tout Y'. D'un autre côté pour le même X' on a que $\iota^*\omega(X',Y')=g(JX',Y')=0$ car JX' est perpendiculaire à TZ ($T_pM=T_pZ\oplus\left(\overset{\dim K}{\underset{i=1}{\oplus}}J\mathfrak{k}^i_p\right)$). Ceci montre que $\pi^*\omega_K=\iota^*\omega$. Il reste juste à voir que ω_K est fermée (et donc g_K sera une métrique kählérienne).

Puisque $\pi^*\omega_K=\iota^*\omega$ et ω est fermée $\pi^*d\omega_K=\iota^*d\omega=0$. Mais π est surjective et donc π^* est injective ce qui implique $d\omega_K=0$. □

2.2 Construction de Delzant

Définition 2.2.8. Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel et Λ un réseau de $\mathfrak{g}$. Soit $\Delta \subset \mathfrak{g}^*$ un polytope convexe. On dit que Δ est un polytope de Delzant par rapport au réseau Λ si

(1) En chaque sommet p se rencontrent n arêtes.

(2) Les arêtes qui se rencontrent en chaque sommet sont entières, i.e. chaque arête est de la forme $p + tv_i \quad 0 \leq t \leq \infty \quad$ avec $\quad v_i \in \Lambda^*$.

(3) Les v_i forment une base sur $\mathbb{Z}$ de Λ^*.

Remarque 2.2.9. (1) On peut décrire un polytope de Delzant de la manière suivante :

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{x \in \mathfrak{g}^* \,|\langle x, u_i \rangle \geq \lambda_i\} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et $u_i \in \Lambda$ est le vecteur normal, pointant vers l'intérieur de la i$^{\text{eme}}$ face de co-dimension un. Sans perte de généralité, on suppose que les u_i sont primitifs i.e. $u_i \neq ku_i^{'}$ pour $u_i^{'}$ dans Λ et $k \neq \pm 1$.

(2) Le fait que les u_i soient primitifs implique que les normales des n faces de codimension 1 qui s'intersectent en un sommet forment une base sur $\mathbb{Z}$ de Λ.

Définition 2.2.10. Un polytope $\Delta \subset \mathfrak{g}^*$ est dit polytope de Delzant *rationnel* par rapport au réseau Λ si

(1) En chaque sommet p se rencontrent n arêtes

(2) Les arêtes qui se rencontrent en chaque sommets sont entières, i.e. chaque arête est de la forme $p + tv_i \quad 0 \leq t \leq \infty \quad$ avec $\quad v_i \in \Lambda^*$.

(3) Les v_i forment une base sur $\mathbb{Q}$ de Λ^*.

Remarque 2.2.11. Les normales aux n faces qui s'intersectent en un sommet forment une base sur $\mathbb{Q}$ de Λ. On a toutefois qu'en chaque sommet ces normales engendrent (sur $\mathbb{Z}$) un sous-réseau de Λ.

Comme cas particulier on peut considérer $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. On retrouve ainsi la définition usuelle de polytope de Delzant :

Définition 2.2.12. Un polytope convexe $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ est de *Delzant* si :

(1) En chaque sommet p se rencontrent n arêtes

(2) Les arêtes qui se rencontrent en chaque sommets sont entières, i.e. chaque arête est de la forme $p + tv_i \quad 0 \leq t \leq \infty \quad$ avec $\quad v_i \in (\mathbb{Z}^n)^*$.

(3) Les v_i forment une base sur $\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{Z}^n)^*$.

On a cette fois-ci que :

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\langle x, u_i\rangle \geq \lambda_i\} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et $u_i \in \mathbb{Z}^n$ est le vecteur normal, pointant vers l'intérieur de la i$^{\text{eme}}$ face de codimension un avec les u_i primitifs i.e. $u_i \neq ku_i^{'}$ pour $u_i^{'}$ dans $\mathbb{Z}^n$ et $k \neq \pm 1$. Le fait que les u_i soient primitifs implique que les normales des n faces qui s'intersectent en un sommet forment une base sur $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}^n$.

Définition 2.2.13. Soit F_i une face de codimension un de Δ. On pose

$$\text{int}(F_i) = \{x \in F_i | \, x \in F_j \quad \text{alors} \quad i = j\}.$$

Nous allons maintenant expliquer la construction de Delzant, qui associe à un polytope de Delzant une variété symplectique qui dépend uniquement du polytope. Sans perte de généralité $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ et $\Lambda = \mathbb{Z}^n$. Soit $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ un polytope de Delzant, donc

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{N} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\langle x, u_i\rangle \geq \lambda_i\} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et $u_i \in \mathbb{Z}^n$ est le vecteur normal de la i$^{\text{eme}}$ face de codimension un. Soit $e_1, \ldots, e_N$ la base standard de $\mathbb{R}^N$ et soit $\omega : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^n : e_i \mapsto u_i$. On note aussi $\omega : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ son extension. Soit $\omega_{\mathbb{T}} : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^n$ l'application induite sur le quotient $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N$. Soit $K = \ker(\omega_{\mathbb{T}})$, on obtient donc la suite exacte courte suivante :

$$0 \to K \to \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^n \to 0$$

On a $\mathbb{R}^{2N} \cong \mathbb{C}^N$. Considérons la forme symplectique $\sum_{j=1}^{N} 2dx_j \wedge dy_j = i \sum_{j=1}^{N} dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Le tore $\mathbb{T}^N$ agit sur $\mathbb{C}^N$ de la manière suivante

$$\mathbb{T}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : ((e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}), (z_1, \ldots, s_N)) \mapsto (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_N} z_N)$$

Il est facile de vérifier que cette action est hamiltonienne avec application moment

$$\Phi : \mathbb{C}^N \to (\mathbb{R}^N)^* : z \mapsto (|z_1|^2, \ldots, |z_N|^2) + c$$

où $c \in (\mathbb{R}^n)^*$ est une constante arbitraire. Pour des fins de simplification nous allons poser $c = \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.

Soit $\iota : K \to \mathbb{T}^N$ l'inclusion. Cette inclusion induit un morphisme d'algèbres de Lie qu'on notera aussi $\iota : \mathfrak{k} \to \mathbb{R}^N$. Soit $\iota^* : (\mathbb{R}^N)^* \to \mathfrak{k}^*$ la transposée de ι. Soit $K \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ l'action de $\mathbb{T}^N$ restreinte à K. On a que l'application moment de cette action est $\Phi_K = \iota^* \circ \Phi$. La preuve du théorème suivant peut être trouvée dans (Guillemin, (1994)).

Théorème 2.2.14. *$\Phi_K^{-1}(0)$ est compact dans $\mathbb{C}^N$ et K agit librement sur ce compact.*

Démonstration. 1^re^ étape :

Considérons la courte suite exacte

$$0 \to \mathfrak{k} \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}^n \to 0$$

et la suite exacte duale

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\omega^*} (\mathbb{R}^N)^* \xrightarrow{\iota^*} \mathfrak{k}^* \to 0$$

On a $\ker(\iota^*) = \mathrm{Im}(\omega^*)$. Soit $\Delta' = \omega^*(\Delta)$. Puisque ω^* est injective on conclut que $\Delta' \cong \Delta$.

Montrons que $\Phi_K^{-1}(0) = \Phi^{-1}(\Delta')$. On a $\Phi_K^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^N | \Phi_K(z) = 0\}$ et $\Phi^{-1}(\Delta') = \{z \in \mathbb{C}^N | \Phi(z) \in \Delta'\}$. Si z est dans $\Phi_K^{-1}(0)$ alors $\iota^*(\Phi(z)) = 0$. Donc, $\Phi(z)$ appartient à $\ker(\iota^*)$ et alors $\Phi(z)$ est un élément de $\mathrm{Im}(\omega^*)$. Donc, $\Phi(z)$ est dans Δ'. Conséquemment, z est un point de $\Phi^{-1}(\Delta')$.

Si z est dans $\Phi^{-1}(\Delta')$ alors $\Phi(z)$ est dans Δ' et donc on a qu'il existe un vecteur x de

$(\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\Phi(z) = \omega^*(x)$. Donc $\iota^*(\Phi(z)) = \iota^*(\omega^*(x)) = 0$. On en déduit que z est un point de $(\iota^* \circ \Phi)^{-1}(0) = \Phi_K^{-1}(0)$. On conclut que $\Phi^{-1}(\Delta') = \Phi_K^{-1}(0)$.

2e étape :

Soit $z = (z_1, \ldots, z_N)$ un élément de $\mathbb{C}^N$, $I = \{i |\, z_i = 0\}$ et

$$\mathbb{R}^I = \left\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N | x_i = 0 \,\text{pour}\, i \notin I\right\}.$$

Soit $\mathbb{T}^I$ l'image de $\mathbb{R}^I$ dans $\mathbb{T}^N$. Le stabilisateur d'un tel z est $\mathbb{T}^I$. En effet,

$$(z_1, \ldots, z_N) = z = e^{i\theta} z = (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_N} z_N)$$

si et seulement si $\theta_j \in \mathbb{R}$ lorsque $j \in I$ et $\theta_j = 0$ lorsque $j \notin I$.

3e étape :

D'après l'étape 1, z est dans $\Phi_K^{-1}(0)$ si et seulement si $\Phi(z) = \omega^*(p)$ pour un certain point p de Δ. Montrons que si p est dans $\text{int}(\Delta)$ alors $\mathbb{T}^N$ agit librement sur $\{z | \Phi(z) = \omega^*(p)\}$.

En effet, posons $x = \omega^*(p) = \Phi(z)$. Notons que p est dans $\text{int}(\Delta)$ si et seulement si $\langle p, u_i \rangle > \lambda_i$ pour tout i. On en déduit que $\langle x, e_i \rangle = \omega^*(p)(e_i) = p(\omega(e_i)) = p(u_i) > \lambda_i$ pour tout i et $\langle x, e_i \rangle = x_i = \frac{|z_i|^2}{2} + \lambda_i =$ la i^{eme} composante de $\Phi(z)$. Donc, pour tout i on a $\frac{|z_i|^2}{2} + \lambda_i > \lambda_i$. Conséquemment, $z_i \neq 0$ pour tout i. La deuxième étape implique que $I = \emptyset$ alors $\mathbb{T}^I = \mathbb{T}^\emptyset = \{e\}$. Donc $\mathbb{T}^N$ agit librement sur $\{z | \Phi(z) = \omega^*(p)\}$.

4e étape :

Si p fait parti de la frontière de Δ, $p \in \bigcap_{i \in I} \{x \in \Delta \,| \langle x, u_i \rangle = \lambda_i\}$, alors $\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(z) = \mathbb{T}^I$ pour tout z tel que $\Phi(z) = \omega^*(p)$.

En effet, soit $x = \omega^*(p) = \Phi(z)$, alors p est dans $\bigcap_{i \in I} \{x \in \Delta \,| \langle x, u_i \rangle = \lambda_i\}$ si et seulement si $\langle p, u_i \rangle = \lambda_i$ pour tout i dans I. Donc $\langle x, e_i \rangle = \lambda_i$ pour tout i dans I. Mais, $\langle x, e_i \rangle = x_i = \frac{|z_i|^2}{2} + \lambda_i =$ la i^{eme} composante de $\Phi(z)$ et donc $\frac{|z_i|^2}{2} + \lambda_i = \lambda_i$. Conséquemment, $\frac{|z_i|^2}{2} = 0$ i.e $z_i = 0$. Encore une fois, par l'étape 2, on a que $\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(z) = \mathbb{T}^I$.

5e étape :

Considérons le cas où p est un sommet de Δ. Sans perte de généralité on prend $p = 0$

et on suppose que les hyperplans qui s'intersectent en p sont donnés par les équations $\langle y, u_i \rangle = 0 \quad i = 1, \ldots, n$. Nous allons utiliser l'hypothèse de Delzant qui dit que (modulo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$) $u_1, \ldots, u_n$ est la base standard de $\mathbb{R}^n$. Donc l'application $\omega : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n : e_i \mapsto u_i$ envoie le sous-espace $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\}$ bijectivement sur $\mathbb{R}^n$ et envoie le tore correspondant $\mathbb{T}^I$ sur $\mathbb{T}^n$. Puisque $K = \ker(\omega)$, $\mathbb{T}^I \cap K = e \subset \mathbb{T}^N$. Mais par l'étape 4, on a que $\mathbb{T}^I = \mathrm{Stab}_{\mathbb{T}^N}(z)$ donc K agit librement sur $\{z | \Phi(z) = p\}$.

Nous avons donc montré que K agit librement sur $\Phi_K^{-1}(0)$. Il ne reste qu'à voir que $\Phi_K^{-1}(0)$ est compact. Ceci résulte du fait que $\Phi_K^{-1}(0) = \Phi^{-1}(\Delta')$. L'application Φ étant propre et Δ' étant compact on en conclut que $\Phi_K^{-1}(0)$ est compact. $\square$

Par le théorème 2.1.6 on a que $\Phi_K^{-1}(0)/K$ est une variété munie d'une action hamiltonienne de $\mathbb{T}^N/K \cong \mathbb{T}^n$ et son application moment est $\nu = \Phi|_{\Phi_K^{-1}(0)}$ qui est vue comme une application K-invariante allant de $\Phi_K^{-1}(0)$ vers $(\mathrm{Lie}(\mathbb{T}^N)/\mathrm{Lie}(K))^* \cong (\mathrm{Lie}(\mathbb{T}^n))^* \cong (\mathbb{R}^n)^*$.

Théorème 2.2.15. $\nu(M) = \Delta$

Démonstration. Par l'étape 1 du théorème précédent, on a $\Delta \cong \Delta' = \omega^*(\Delta)$. Soit donc x un point de Δ et $\tilde{x}$ l'élément correspondant dans Δ'. On a aussi par l'étape 1 que $\Phi_K^{-1}(0) = \Phi^{-1}(\Delta')$. Donc $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \subset \Phi_K^{-1}(0)$. Soit y dans $\Phi^{-1}(\tilde{x})$ alors $\nu(y) = \tilde{x} \mapsto x$. $\square$

On a donc associé à un polytope de Delzant $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ une variété torique dont l'image par l'application moment est Δ. Réciproquement, (Atiyah,(1982)) (théorème 1) et (Guillemin et Sternberg (1), (1982)) (théorème 4) ont montré que l'image par l'application moment d'une variété torique est un polytope convexe. Résumons donc le tout dans le théorème suivant dû à Delzant :

Théorème 2.2.16. *Soit (M, ω) une variété compacte connexe de dimension $2n$ munie d'une action hamiltonienne de $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}$ et soit $\Phi : M \to \mathfrak{t}^*$ l'application moment de cette action. Alors l'image $\Delta \subset \mathfrak{t}$ de Φ est un polytope de Delzant par rapport au réseau Λ, où Λ est le réseau qui satisfait $\mathbb{T} = \mathfrak{t}/\Lambda$. De plus, la variété torique construite par* *la construction de Delzant à partir de ce polytope est isomorphe à M comme $\mathbb{T}$-espace hamiltonien.*

Remarque 2.2.17. Dans leur article (Lerman et Tolman, (1997)) (théorème 8.1) ont généralisé la construction de Delzant au cas où le polytope est un polytope rationnel par rapport à un réseau Λ. Dans ce cas on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.18. *À chaque orbifold torique $(M, \omega, \mathbb{T})$ on associe de manière unique le couple (Λ, Δ) où Λ est le réseau de $\mathfrak{t}$ tel que $\mathbb{T} = \mathfrak{t}/\Lambda$ et Δ est le polytope rationel de Delzant de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\Phi(M) = \Delta$. Réciproquement, pour chaque tel couple (Λ, Δ) il existe une unique (à un symplectomorphisme équivariant près) orbifold torique $(M, \omega, \mathbb{T})$ avec $\Phi(M) = \Delta$ et $\mathbb{T} = \mathfrak{t}/\Lambda$.*

La preuve de ce théorème est semblable à la preuve de Guillemin pour la construction de la variété torique. Cependant Lerman et Tolman calculent le groupe de structure des points de l'orbifold construite.

2.3 Réseaux minimaux et orbifolds toriques

Dans cette section nous expliquerons en quoi le réseau dans lequel on considére les normales aux faces de codimension 1 influence l'orbifold torique obtenu par la construction de Delzant généralisée. Par le fait même nous obtiendrons une classification en terme de réseau des orbifolds toriques ayant le même polytope de Delzant. Cette section explicite certains résultats établies par (Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman, (2004))(section 1).

Remarque 2.3.19. Dans le théorème qui suit on considère le tore qui agit sur l'orbifold comme un sous-groupe des difféomorphismes de l'orbifold et son algèbre de Lie comme une algèbre de Lie de champs de vecteurs qui commutent sous le crochet de Lie. De plus l'algèbre de Lie vue comme une algèbre de Lie de champs de vecteurs est une algèbre de Lie de champs de Killing par rapport à la métrique induite par la métrique plate de $\mathbb{C}^N$ qui passe au quotient dans la construction de Delzant. Nous verrons même dans le prochain chapitre que Guillemin a donnée une formule explicite pour cette métrique. Mais tout d'abord montrons les deux lemmes suivants.

Lemme 2.3.20. *Soit X, Y des champs de vecteur hamiltoniens sur une orbifold kählérienne M. Alors $[X,Y]=0$ si et seulement si $\{f_X, f_Y\}=c$ où f_X (resp. f_Y) est une fonction telle que $X = Jgrad_g(f_X)$ (resp. $Y = Jgrad_g(f_Y)$) et c est une constante.*

Démonstration. Soit $\Theta : C^\infty(M) \to \text{Hamil}(M,\omega) : f \mapsto \omega^{-1}(df)$ où $\text{Hamil}(M,\omega)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens sur M. On a que Θ est un homomorphisme d'algèbres (lemme 1.3.42) et

$$\ker(\Theta) = \{c : M \to \mathbb{R} |\, c \quad \text{est la fonction constante égale à}\, c\}.$$

Si $\{f_X, f_Y\} = c$, alors $[X,Y]=0$ car c est dans $\ker(\Theta)$ et Θ est un homomorphisme. Si $[X,Y]=0$, on a $[X,Y] = \omega^{-1}(d\{f_X, f_Y\})$. Mais ω^{-1} est un isomorphisme ce qui implique que $d\{f_X, f_Y\}=0$ et donc $\{f_X, f_Y\}$ est constante. □

Lemme 2.3.21. *Soit G un groupe abélien qui agit sur (M,ω) de manière faiblement hamiltonienne. Si M est compacte alors l'action de G sur M est hamiltonienne.*

Démonstration. Puisque G est abélien, pour montrer que l'action de G sur M est hamiltonienne il suffit de montrer que $\{f_X, f_Y\}=0$ pour tout potentiel de champs hamiltoniens. Soit $p_0 = \max_{p\in M} f_X(p)$ où f_X est le potentiel d'un champ hamiltonien X. Par le lemme qui précède on a $\omega_{p_0}(X(p_0), Y(p_0)) = \{f_X, f_Y\}(p) = c$ mais $\omega_{p_0}(X(p_0), Y(p_0)) = df_X(Y)|_{p_0} = 0$. Donc $c=0$. L'action de G sur M est donc hamiltonienne. □

Théorème 2.3.22. *Soit $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n)$ une orbifold torique compacte et connexe de dimension $2n$ avec polytope de Delzant (Δ, Λ). Soit $\rho : \hat{M} \to M$ un revêtement orbifoldien compact de M alors $\hat{M}$ est une orbifold torique et le polytope de Delzant rationnel de $\hat{M}$ est $(\Delta, \hat{\Lambda})$ avec $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$.*

Remarque 2.3.23. L'existence d'une structure kählérienne sur chaque orbifold torique est démontrée.

Démonstration. Grâce à $\rho : \hat{M} \to (M, \omega, g, J)$ on peut définir $(\rho^*(J), \rho^*(\omega), \rho^*(g)) = (\hat{J}, \hat{\omega}, \hat{g})$. Ici, $\rho^*(J) = (\rho_*)^{-1}J(\rho_*)$. Ce triplet défini une structure kählérienne sur $\hat{M}$. Il nous faut maintenant définir une structure torique sur $\hat{M}$, i.e. on doit définir une action hamiltonienne d'un tore sur $\hat{M}$.
Si K est un champ de Killing hamiltonien sur M alors $K = J\text{grad}_g f$ où $f \in C^\infty(M)$ car K est hamiltonien. On défini $\hat{K} = \hat{J}\text{grad}_{\hat{g}}(f \circ \rho)$. Ce dernier est un champ hamiltonien sur $\hat{M}$. Il reste à voir que $\hat{K}$ est un champ de Killing. Pour qu'un champ de vecteurs K soit champ de Killing il faut que l'équation $(dK^\flat)(X, Y) = 2(D_X K^\flat)(Y)$ soit satisfaite autour d'un point p de M. Puisque K est un champ de Killing sur M et que ρ est une isométrie locale on a que $\hat{K}$ va satisfaire à l'équation $(d\hat{K}^\flat)(\hat{X}, \hat{Y}) = 2(\hat{D}_{\hat{X}}\hat{K}^\flat)(\hat{Y})$ où $\hat{D}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $\hat{g}$ et $\hat{X}, \hat{Y}$ sont des champs de vecteurs, définis autour de chaque point de la pré-image de p, qui sont envoyés sur Xet$Y$.

En considérant $\{K_1, \ldots, K_n\}$, n champs de Killing linéairement indépendants qui engendrent $\mathfrak{t} = \text{Lie}(\mathbb{T}^n)$, on peut construire $\left\{\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_n\right\}$ qui sont n champs de Killing hamiltoniens sur $(\hat{M}, \hat{g}, \hat{\omega})$. On a de plus que $[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = 0$ car ρ est un difféomorphisme local et $\rho_*(\hat{K}_i) = K_i$. Considérons $\hat{\mathfrak{t}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\left\{\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_n\right\}$. On a que $\hat{\mathfrak{t}} \subset \text{Lie}(\text{Isom}(\hat{M}, \hat{g}))$. Considérons donc G l'unique sous groupe connexe de $\text{Isom}(\hat{M}, \hat{g})$ qui satisfait $\text{Lie}(G) = \hat{\mathfrak{t}}$. On a que G est abélien car $\hat{\mathfrak{t}} = \text{Lie}(G)$ est abélienne. Soit $\bar{G}$ la fermeture topologique abélienne de G dans $\text{Isom}(\hat{\text{M}}, \hat{\mathfrak{g}})$. On a que $\bar{G}$ est compact car $\text{Isom}(\hat{M}, \hat{g})$ est compact. Donc $\bar{G} = \mathbb{T}^l$ car $\bar{G}$ est compact abélien et connexe. De plus, $l \geq n$ car $\text{Lie}(\bar{G}) = \bar{\mathfrak{t}} \supset \hat{\mathfrak{t}}$ et $\hat{\mathfrak{t}}$ contient au moins n vecteurs linéairement indépendants.

Montrons que $n \geq l$. Pour ce faire il suffit de montrer que l'action de $\bar{G}$ sur $\hat{M}$ est hamiltonienne. Par le théorème 1.3.49 on conclura que la dimension maximale de $\bar{G}$ est n. En effet, si $\hat{p}$ est un point dont l'orbite est générique i.e. $T_{\hat{p}}(\bar{G}\hat{p})$ a la dimension maximale, alors puisque l'action est hamiltonienne on a que $\hat{\omega}(X, Y) = 0$ pour tout vecteurs X et Y de $T_{\hat{p}}(\bar{G}\hat{p})$. Ceci veut dire que $T_{\hat{p}}(\bar{G}\hat{p})$ est un sous-espace lagrangien de $T_{\hat{p}}\hat{M}$. Donc $\dim \bar{\mathfrak{t}} = \dim T_{\hat{p}}(\bar{G}\hat{p}) \leq n$.

Pour voir que l'action de $\bar{G}$ sur $\hat{M}$ est hamiltonienne il suffit de montrer que cette action est faiblement hamiltonienne et d'utiliser le lemme 2.3.21. Pour montrer que l'action de $\bar{G}$ sur $\hat{M}$ est faiblement hamiltonienne, on va utiliser le théorème suivant dû à Frankel (McDuff et Salamon, (1995))(théorème 5.5) ou (Gauduchon, (2006)) :

Théorème 2.3.23. *Soit G un groupe qui agit sur une orbifold kählérienne compacte. Soit K est un champ de Killing de cette action qui satisfait $L_K J = 0$. Il existe $f_K \in C^\infty(M)$ telle que $K = Jgrad_g(f_K)$ si et seulement si K possède un zéro.*

Démonstration. S'il existe $f_K \in C^\infty(M)$ telle que $K = J\mathrm{grad}_g(f_K)$ alors, puisque M est compact, on a que f_K atteint son maximum en x_0 et donc $\mathrm{grad}_g(f_K(x_0)) = 0$. Pour la réciproque on peut consulter (McDuff et Salamon, (1995))(théorème 5.5). □

Par la construction de Delzant, on a que $(\Phi \circ \rho)^{-1}(x)$ est un ensemble fini de points fixes de l'action de $\bar{G}$ si x est un sommet de Δ. Donc les champs de vecteurs engendrés par cette action s'annulent en ces points. Si $\hat{K}$ est un de ces champs il pourra donc s'écrire comme $\hat{K} = \hat{J}\mathrm{grad}_{\hat{g}}(f_{\hat{K}})$.

Considérons $\hat{\Phi} = \rho^*(\Phi) = \Phi \circ \rho$.
On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[r, "\hat{\Phi}"] \arrow[d, "\rho"] & \Delta \\ M \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Donc, $\hat{\Phi}(\hat{M}) = \Phi(\rho(\hat{M})) = \Phi(M) = \Delta$.

Il nous reste maintenant à montrer que $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$. Notons d'abord que $\mathfrak{t} \cong \hat{\mathfrak{t}}$ via ρ_*. Soit $\hat{\xi}$ un vecteur de $\hat{\mathfrak{t}} \cap \hat{\Lambda}$ alors toute les orbites de $\hat{\xi}$ sont fermées dans $\hat{M}$. Conséquemment, $X = \rho_*(\hat{\xi})$ possède des orbites fermées dans M. Soit p un point de M qui est générique pour l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M i.e. $\mathbb{T}^n p$ est une sous-variété de dimension n. Soit $\mathbb{T}^n p$ l'orbite d'un tel point. On a $\gamma(t) = \exp(tX) \subset \mathbb{T}^n$. Considérons $F : \mathbb{T}^n \times M \to M$ l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M alors $F(\gamma(t), p)$ est l'orbite de X en p qu'on dénote aussi Xp. Cette orbite est fermée. On a de plus que F fournit un difféomorphisme entre $\mathbb{T}^n \times p$ et $\mathbb{T}^n p$ et donc un difféomorphisme entre $(\gamma(t), p)$ et son image par F qui elle est fermée. On a donc que $\gamma(t)$ est fermée dans $\mathbb{T}^n$. Mais puisque les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ qui ont des orbites fermées sont des éléments du réseau Λ on conclut que $X \in \Lambda$. En effet, si $X \in \mathfrak{t}$ possède des orbites fermées dans M alors sans perte de généralité on a $F(\gamma(0), p) = F(\gamma(1), p)$ i.e $\Gamma : [0,1] \to M : t \mapsto F(\gamma(t), p)$ est une courbe fermée dans M. Mais alors ceci implique que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Donc, par définition de γ on trouve que

$$\exp(\mathrm{X}) = \exp(1\mathrm{X}) = \exp(0\mathrm{X}) = \exp(0) = \mathrm{Id}.$$

Donc $X \in \Lambda$. □

Soit $\Delta = \bigcap_{i=1}^{N} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\langle x, u_i\rangle \geq \lambda_i\}$ un polytope de Delzant rationnel. Dans la suite on prendra pour acquis l'existence d'une structure kählérienne sur M.

Théorème 2.3.24. *Soit (M, Δ, Λ) une orbifold torique construite à partir d'un polytope de Delzant rationnel pour lequel les normales aux faces de codimension un sont considérées dans le réseau Λ. Soit $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$ et $(\Delta, \hat{\Lambda})$ le même polytope rationnel de Delzant mais avec les normales considérées dans le réseau $\hat{\Lambda}$. Alors $\hat{M}/(\Lambda/\hat{\Lambda}) = M$ où $\hat{M}$ est l'orbifold torique construite à partir de Δ pour lequel les normales sont considérées dans $\hat{\Lambda}$*

Démonstration. Soit $\hat{M} = \mathbb{C}^N//\hat{K}$ et $M = \mathbb{C}^N//K$. Pour M on considère Λ plutôt que $\hat{\Lambda}$ dans la construction de Delzant.
Il suffit de montrer que $K \cong \hat{K} \times (\Lambda/\hat{\Lambda})$ et on aura alors

$$M = \mathbb{C}^N//K \cong \mathbb{C}^N//(\hat{K} \times \Lambda/\hat{\Lambda}) = (\mathbb{C}^N//\hat{K})/(\Lambda/\hat{\Lambda}) = \hat{M}/(\Lambda/\hat{\Lambda})$$

Lemme 2.3.25. *Dans la construction de Delzant pour les orbifolds toriques considérons séparément $\hat{\omega}_{\mathbb{T}} : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}^n/\hat{\Lambda}$ et $\omega_{\mathbb{T}} : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ où $\hat{\Lambda} \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ sont deux réseaux contenant les normales aux faces de codimension un de Δ. Alors il existe $p : \mathbb{R}^n/\hat{\Lambda} \to$*

$\mathbb{R}^n/\Lambda$ *qui rend le diagramme suivant commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \hat{K} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Id"] & \mathbb{T}^N \arrow[r, "\hat{\omega}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "Id"] & \mathbb{R}^n/\hat{\Lambda} \arrow[d, "p"] \\ K \arrow[r, "i"] & \mathbb{T}^N \arrow[r, "\omega_{\mathbb{T}}"] & \mathbb{R}^n/\Lambda \end{tikzcd}$$

Ici, i dénote l'inclusion. De plus, p est surjective et pour tout élément $[(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$ *de* $\mathbb{R}^n/\Lambda$ $\quad p^{-1}([(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda) \cong \Lambda/\hat{\Lambda}$.

Démonstration. Soit $p : \mathbb{R}^n/\hat{\Lambda} \to \mathbb{R}^n/\Lambda : [(x_1, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}} \mapsto [(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$.
Montrons d'abord que p est bien définie i.e. si j'ai un représentant $(y_1, \ldots, y_n)$ de $[(x_1, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}}$alors je dois voir que $(y_1, \ldots, y_n)$ est un représentant de $[(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$. Mais si $(y_1, \ldots, y_n)$ est dans $[(x_1, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}}$ alors $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$ est dans $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$. Donc, $(y_1, \ldots, y_n)$ est un représentant de $[(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$ et donc p est bien définie. On a que $p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}}(x) = [\hat{\omega}(x)]_\Lambda = [\omega(x)]_\Lambda = \omega_{\mathbb{T}}(x)$.
L'application p est clairement surjective car pour obtenir $[(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$ il suffit de considérer $[(x_1, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}}$ et on a que $p([(x_1, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}}) = [(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$.
Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ des vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ tels que $\Lambda = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{u_1, \ldots, u_n\}$. Puisque $\Lambda/\hat{\Lambda}$ est un groupe fini on a que $\Lambda/\hat{\Lambda} \cong \mathbb{Z}_{i_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{i_s} \quad 1 \leq s \leq n$ où $\mathbb{Z}_{i_s} = \mathbb{Z}/i_s\mathbb{Z}$. On considère $n_j = ||\text{span}_{\mathbb{Z}} \{u_j\} / \hat{\Lambda}_j||$ où $\hat{\Lambda}_j$ est le sous-réseau maximal de dimension 1 de $\hat{\Lambda}$ contenu dans $\text{span}_{\mathbb{Z}} \{u_j\}$. On a qu'il existe n_{j_k} tel que $i_k = n_{j_k}$ pour tout k compris entre 1 et s. Considérons $\mathbb{Z}_{n_{j_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_{j_s}}$. Ce groupe agit sur $p^{-1}([(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda)$ de manière transitive. Pour voir ceci il suffit de remarquer que $p([(x_1, \ldots, x_{j_1} + m_{j_1}u_{j_1}, \ldots, x_{j_s} + m_{j_s}u_{j_s}, \ldots, x_n)]_{\hat{\Lambda}}) = [(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda$ où $m_{j_k} \in \{0, 1, \ldots, n_{j_k} - 1\}$ et $1 \leq k \leq s$. On conclut donc que $p^{-1}([(x_1, \ldots, x_n)]_\Lambda) \cong \Lambda/\hat{\Lambda}$. $\square$

(retour à la preuve du théorème)

On a $K = ker(\omega_{\mathbb{T}}) \cong ker(p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}})$. Il ne reste à montrer que $ker(p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}}) \cong \hat{K} \times (\Lambda/\hat{\Lambda})$. Pour voir ceci on remarque que 0 est un point de $\mathbb{R}^n/\Lambda$ qui possède $|\Lambda/\hat{\Lambda}|$ pré-images dans $\mathbb{R}^n/\hat{\Lambda}$. Soient $0, b_2, \ldots, b_{|\Lambda/\hat{\Lambda}|}$ ces $|\Lambda/\hat{\Lambda}|$ pré-image et soit $D_r = \hat{\omega}_{\mathbb{T}}^{-1}(b_r)$. Puisque $\mathbb{T}^N/\hat{N} \cong \mathbb{R}^n/\hat{\Lambda}$ on a $\hat{K} \cong D_r$. De plus $p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}}(D_r) = 0$ pour tout r compris entre 1 et

$|\Lambda/\hat{\Lambda}|$. Conséquemment, $D_r \subset ker(p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}})$ pour tout r compris entre 1 et $|\Lambda/\hat{\Lambda}|$. Donc $\ker(p \circ \hat{\omega}_{\mathbb{T}}) \cong \hat{K} \times (\Lambda/\hat{\Lambda})$. □

Le lemme 2.3.25 nous donne le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.26. *K est connexe si et seulement si Λ est minimal i.e $\Lambda = \Lambda_{min} = span_{\mathbb{Z}}\{u_1, \ldots, u_N\}$ où u_i est la normale à la i^{eme} face de codimension un.*

Démonstration. Montrons que si Λ est minimal alors K est connexe.
Considérons l'application $\omega_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^N \to \Lambda_{min} : e_i \mapsto u_i$. Cette application est surjective donc $K = ker(\omega_{\mathbb{T}}) \cong ker(\omega)/ker(\omega_{\mathbb{Z}})$. On a bien sûr que $ker(\omega)/ker(\omega_{\mathbb{Z}})$ est connexe (quotient d'un espace vectoriel par un réseau), donc K est connexe. Montrons la réciproque i.e. K connexe $\Rightarrow$ Λ est minimal.
Supposons que Λ ne soit pas minimal. Donc, il existe $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tel que Λ_0 est minimal. Donc K_0 est connexe. De plus, $K \cong K_0 \times (\Lambda/\Lambda_0)$, mais $K_0 \times (\Lambda/\Lambda_0)$ n'est pas connexe sauf si $\Lambda/\Lambda_0 \cong 1$ donc $K \cong K_0$. Donc Λ est minimal. □

On en conclut donc qu'en considérant $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$ pour construire $(\hat{M}, \Delta)$ on a que $\hat{M}$ est un revêtement orbifoldien de M.

Théorème 2.3.27. *Soit $(M_{min}, \Delta, \Lambda_{min})$ alors $\pi_1(M_{min}) = \{1\}$.*

Démonstration. Soit $\Lambda \supset \Lambda_{min}$ un réseau de $\mathfrak{t}^*$. Alors $(M_{min}, \Delta, \Lambda_{min})$ est un revêtement orbifoldien de (M, Δ, Λ). De plus, $(M_{min}, \Delta, \Lambda_{min})$ est aussi revêtement orbifoldien de $(\hat{M}, \Delta, \hat{\Lambda})$ pour tout réseau $\hat{\Lambda}$ tel que $\Lambda_{min} \subset \hat{\Lambda} \subset \Lambda$. Donc $(M_{min}, \Delta, \Lambda_{min})$ est le revêtement universel de (M, Δ, Λ). On en déduit que $\pi_1(M_{min}) = \{1\}$. □

Corollaire 2.3.28. *Soit $M = (M, \Delta, \Lambda)$. Si $\pi_1(M) = \{1\}$ alors Λ est minimal.*

Démonstration. Supposons que Λ ne soit pas minimal alors il existe $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ qui soit le réseau minimal contenant les normales $\{u_i\}$. On a alors que $\rho_0 : (M_0, \Delta, \Lambda_0) \rightarrow (M, \Delta, \Lambda)$ est le revêtement universel. Mais alors, $M_0 = M$ car M est le revêtement universel de M au sens des orbifolds (M étant simplement connexe et par unicité du revêtement universel). Donc on conclut que $\Lambda_0 = \Lambda$. Conséquemment Λ est minimal. $\square$

2.4 Espaces projectifs à poids

Soit $\mathbb{C}^{n+1} = \{(z_1, ..., z_{n+1}) \,|\, z_i \in \mathbb{C}\}$ et $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ un élément de $\mathbb{N}^{n+1}$. On défini l'action ρ_a de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ de la manière suivante :

$$\rho_a : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} : (t, (z_1, \ldots, z_{n+1})) \mapsto (t^{a_1} z_1, \ldots, t^{a_{n+1}} z_{n+1})$$

Considérons aussi cette action restreinte à S^1.

Définition 2.4.29. On appelle *espace projectif à poids* (de poids a) le quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par cette action de $\mathbb{C}^*$. Il est noté $\mathbb{C}P^n_a$.

Proposition 2.4.30. *$S^{2n+1}/S^1 \cong \mathbb{C}P^n_a$ où S^{2n+1}/S^1 est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ définie ci-haut restreinte à l'action de S^1.*

Démonstration. On a que

$$\phi : S^{2n+1}/S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n_a : [(z_1, ..., z_{n+1})]_{S^1_a} \mapsto [(z_1, ..., z_{n+1})]_a$$

est un isomorphisme. De plus ϕ est bien définie et est injective. Il ne reste qu'à montrer que ϕ est surjective.

Soit $[z_1, \ldots, z_{n+1}]_a$ un point de $\mathbb{C}P^n_a$. Nous affirmons qu'il existe un unique réel t tel que $\sum_{i=1}^{n+1} t^{2a_i} |z_i|^2 = 1$. En effet, si on considère $[z_1, \ldots, z_{n+1}]_a$ fixé et si on considère le polynôme réel $p(t) = \sum_{i=1}^{n+1} t^{2a_i} |z_i|^2 - 1$ on peut montrer que $p(t)$ possède un zéro sur l'intervalle $(0, \infty)$.

En effet, $p'(t) = 2a_1 c_1 t^{2a_1 - 1} + \ldots + 2a_{n+1} c_{n+1} t^{2a_{n+1} - 1}$ et donc $p'(t) > 0$ si $t > 0$. Donc $p(t)$ est strictement croissant sur $(0, \infty)$. De plus, $p(0) = -1$ et $\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$. Par le théorème de la valeur intermédiaire on a que $p(t)$ possède un zéro sur $(0, \infty)$ et il est unique car $p(t)$ est strictement croissant sur $(0, \infty)$. On a que

$$\phi([t^{2a_1} z_1, \dots, t^{2a_{n+1}} z_{n+1}]_{S^1_a}) = [(t^2)^{a_1} z_1, \dots, (t^2)^{a_{n+1}} z_{n+1}]_a = [z_1, \dots, z_{n+1}]_a$$

où t est l'unique réel qui satisfait $\sum_{i=1}^{n+1} t^{2a_i} |z_i|^2 = 1$. Donc ϕ est surjective. On en conclut que ϕ est un isomorphisme. □

Théorème 2.4.31. *Chaque espace projectif à poids est une orbifold torique simplement connexe obtenue par la construction de Delzant à partir d'un simplexe dont les normales aux faces de codimension 1* $\{u_1, \dots, u_N\}$ *sont considérées dans* $\Lambda_{min} = span_{\mathbb{Z}} \{u_1, \dots, u_N\}$.

Démonstration. Soit $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ un simplexe. Le simplexe Δ possède $n+1$ faces de codimension un. Dans la construction de Delzant, on prend donc $N := n+1$. On a que K est connexe et $\dim(K) = (n+1) - n = 1$. Donc $K \cong S^1$. De plus $\Phi_K^{-1}(0)$ est isomorphe à la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. L'action de S^1 sur cette sphère correspond à l'action qui détermine un espace projectif à poids. □

CHAPITRE III

FORMULE DE GUILLEMIN

Soit M une variété torique. On a vu, au chapitre précédent que M possède une structure kählérienne. Dans ce chapitre nous élaborerons deux preuves différentes de la formule de Guillemin. La première sera faite dans le cas des variétés toriques (Guillemin, (1994)) et la deuxième sera plus générale et s'appliquera aux orbifolds toriques (Calderbank, David et Gauduchon (2002)). Cette formule permet de définir sur chaque variété torique une métrique kählérienne naturelle.

3.1 Deux constructions équivalentes d'une même variété

Soit M une variété torique. On a alors l'application moment $\Phi : M \to \mathbb{R}^n$. On a que M est obtenue par la construction de Delzant à partir d'un polytope de Delzant comme un quotient symplectique.

Soit $\Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ le polytope de Delzant associé à M. On a

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{N} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\langle x, u_i\rangle \geq \lambda_i\} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et $u_i \in \mathbb{Z}^n$ est le vecteur normal de la i^{eme} face de codimension un. Soit $e_1, \ldots, e_N$ la base standard de $\mathbb{R}^N$ et soit $\omega : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^n : e_i \mapsto u_i$. On note aussi $\omega : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ son extension. Soit $k = \ker\omega$, et $\iota : k \to \mathbb{R}^N$ l'inclusion, on a alors la suite exacte courte suivante :

$$0 \to k \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}^n \to 0$$

et par dualité on a aussi :

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\omega^*} (\mathbb{R}^N)^* \xrightarrow{\iota^*} k^* \to 0$$

Soit $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n/2\pi i\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N/2\pi i\mathbb{Z}^N$. L'application linéaire ω s'étend en une application $\omega_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$. Cette dernière envoie $2\pi i\mathbb{Z}^N$ sur $2\pi i\mathbb{Z}^n$ de manière surjective et elle induit donc une application entre tores complexes qui sera encore notée $\omega_{\mathbb{C}}$:

$$\omega_{\mathbb{C}} : \mathbb{T}^N_{\mathbb{C}} \to \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$$

Soit $K_{\mathbb{C}}$ le noyau de cette application. La première suite exacte nous donne la suite exacte de groupes suivante :

$$0 \to K_{\mathbb{C}} \to \mathbb{T}^N_{\mathbb{C}} \to \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} \to 0$$

Soit $\kappa : \mathbb{T}^N_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Gl}(N, \mathrm{C})$ l'action linéaire de $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}^N$ définie par $\kappa(\exp w)z = ((\exp w_1)z_1, \ldots, (\exp w_N)z_N)$ et soit κ_1 cette action restreinte à $K_{\mathbb{C}}$.

Pour chaque multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_r)$, $1 \leq i_1 <, \ldots, < i_r \leq N$, posons

$$\mathbb{C}^N_I = \{(z_1, \ldots, z_N) | z_i = 0 \quad \text{ssi} \quad i \in I\}.$$

On a que $\mathbb{C}^N_I$ est une $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$-orbite et chaque $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$-orbite est de cette forme. Donc la correspondance $I \longleftrightarrow \mathbb{C}^N_I$ définie une correspondance bijective entre les $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$-orbites dans $\mathbb{C}^N$ et les multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_r)$, $1 \leq i_1 <, \ldots, < i_r \leq N$. Soit F une face de Δ de codimension r définie par un système d'égalités $\langle x, u_i \rangle = \lambda_i$, pour i dans I, où I est un multi-indice de longueur r. Posons

$$\mathbb{C}^N_F = \mathbb{C}^N_I$$

En particulier, si $F = \mathrm{int}(\Delta)$ alors $\mathbb{C}^N_F = \{(z_1, \ldots, z_N) | z_i \neq 0 \,\forall\, i\}$. En d'autres mots $\mathbb{C}^N_F$ est la $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte dans $\mathbb{C}^N$. Posons maintenant

$$\mathbb{C}^N_\Delta = \bigcup_F \mathbb{C}^N_F$$

Théorème 3.1.1. *$\mathbb{C}^N_\Delta$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^N$. De plus, $K_\mathbb{C}$ agit librement sur $\mathbb{C}^N_\Delta$; et l'espace des orbites $X = \mathbb{C}^N_\Delta / K_\mathbb{C}$ est une variété compacte.*

Démonstration. Nous montrerons d'abord la première partie du théorème 3.1.1. La compacité de X sera la conséquence directe d'un théorème ultérieur.

Soit

$$\mathbb{C}^N_I = \{(z_1, \ldots, z_N) | z_i = 0 \quad \text{ssi} \quad i \in I\}.$$

une orbite de l'action de $\mathbb{T}^N_\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^N$. Puisque $\mathbb{T}^N_\mathbb{C}$ est abélien les stabilisateurs de deux points distincts de cette orbite sont égaux. On a $\kappa(\exp w)z = ((\exp w_1)z_1, \ldots, (\exp w_N)z_N)$ pour tout $\exp w = (\exp w_1, \ldots, \exp w_n) \in \mathbb{T}^N_\mathbb{C}$ et pour tout z dans C^N_I. Donc par la définition de $\mathbb{C}^N_I$ on a que le stabilisateur d'un point de cette orbite est défini par la condition suivante :

$$\kappa(\exp w)z = z \Leftrightarrow \exp w_i = 1 \, \text{si} \, i \notin I$$

On va dénoter ce stabilisateur par $(\mathbb{T}^N_\mathbb{C})_I$.
Pour chaque face F de Δ de codimension s il y a un multi-indice I de longueur s tel que les équations :

$$\langle x, u_i \rangle = \lambda_i, \quad i \in I$$

définissent F. Posons $I = I_F$ et pour chaque $I = I_F$ posons $\mathbb{C}^N_F = \mathbb{C}^N_I$ et $(\mathbb{T}^N_\mathbb{C})_F = (\mathbb{T}^N_\mathbb{C})_I$. Par définition on a

$$\mathbb{C}^N_\Delta = \bigcup_F \mathbb{C}^N_F$$

1e étape :

Montrons que $\mathbb{C}^N_\Delta$ est ouvert.

Soit z dans $\mathbb{C}^N_I$ avec $I = I_F$, alors

$$P = \{z = (z_1, \ldots, z_N) | z_j \neq 0 \, \text{si} \, j \notin I_F\}$$

est un voisinage ouvert de z qui est inclu dans $\mathbb{C}^N_\Delta$.
Montrons que z est dans P, i.e $z_j \neq 0$ si $j \notin I = I_F$. Soit $j \notin I_F$ alors $z_j \neq 0$ par

définition de $\mathbb{C}_I^N$. Donc z est dans P.

Montrons que $P \subset \mathbb{C}_\Delta^N$. Soit z un point de P alors $z = (z_1, \ldots, z_N)$ avec $z_k \neq 0$ si $k \notin I_F$. Soit $J = (j_1, \ldots, j_r)$ $\quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq N$ le multi-indice tel que $z_{j_1} = \ldots = z_{j_r} = 0$. On a $J \subset I_F$. Donc le multi-indice J décrit bien une face de Δ. Alors $z \in \mathbb{C}_J^N$. Donc $P \subset \mathbb{C}_\Delta^N$. Bien sûr P est ouvert puisqu'un point de P possède un voisinage ouvert inclu dans P (la condition d'avoir des coordonnées prédéterminées différentes de 0 est une condition ouverte).

2$^{\text{e}}$ étape :

Montrons maintenant que $K_\mathbb{C}$ agit librement sur $\mathbb{C}_\Delta^N$.

Nous avons vu plus haut que le stabilisateur d'un point z de $\mathbb{C}_F^N$ est $(\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_F$. Donc il suffit de montrer que

$$K_\mathbb{C} \cup (\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_F = \{e\}$$

pour toute face F de Δ. Si $I' \subset I$ alors $(\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_{I'} \subset (\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_I$. Il suffit donc de le montrer pour un I de longueur maximale. Ce multi-indice correspondra à un sommet de Δ. Soit p un sommet de Δ qui est défini par les équations

$$\langle x, u_i \rangle = \lambda_i, \quad i \in I$$

où $I = (i_1, \ldots, i_n)$. Puisque Δ est un polytope de Delzant, $u_{i_1}, \ldots, u_{1_n}$ est une base de $\mathbb{Z}^n$. Donc l'application $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \to (u_{i_1}, \ldots, u_{1_n})$ envoie le sous-réseau de $\mathbb{Z}^N$ engendré par $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ bijectivement sur $\mathbb{Z}^n$. Par la définition de $(\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_I$ on a que si $i \in I$ alors $\exp w_i$ est libre de prendre n'importe quelle valeur. Donc l'application ω dans la courte suite exacte

$$0 \to K_\mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \mathbb{T}_\mathbb{C}^N \xrightarrow{\omega} \mathbb{T}_\mathbb{C}^n \to 0$$

envoie $(\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_I$ bijectivement sur $\mathbb{T}_\mathbb{C}^n$. Puisque la suite est exacte on a que $K_\mathbb{C} \cup (\mathbb{T}_\mathbb{C}^N)_F = \{e\}$. $\square$

Remarque 3.1.2. (1) X possède une structure complexe naturelle qui provient de la structure complexe de $\mathbb{C}^N$.

(2) Par la suite exacte des groupes on a que $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$. Donc il y a une action naturelle de $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ sur X et les orbites de cette action sont les images par l'application quotient des orbites de l'action de $\mathbb{T}^N_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}^N_{\Delta}$. Par la définition de $\mathbb{C}^N_{\Delta}$ ces orbites sont les ensembles $\mathbb{C}^N_F$ donc leur images sont $\mathbb{C}^N_F/K_{\mathbb{C}}$. Conséquemment, les $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$-orbites dans X sont en bijection avec les faces de Δ.

(3) L'orbite correspondant à $\text{int}(\Delta)$ est l'unique orbite ouverte et $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ agit librement sur cette orbite.

La construction de Delzant présentée au Chapitre 2 nous permet d'associer à chaque polytope de Delzant Δ une unique variété torique à symplectomorphisme équivariant près. Puisqu'elle a été construite en utilisant le principe de réduction de Marsden-Weinstein, cette variété possède une structure symplectique naturelle, structure symplectique qui satisfait $\pi^*\omega_M = \iota^*\omega_{\mathbb{C}^N}$. Le théorème 2.1.7 implique que cette variété est une variété kählérienne. Considérons

$$Z = \Phi_K^{-1}(0)$$

dans la construction de Delzant et $M = Z/K$.

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. *Z est contenu dans $\mathbb{C}^N_{\Delta}$ et chaque $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathbb{C}^N_{\Delta}$ intersecte Z en une K-orbite.*

Démonstration. Montrons d'abord que $Z \subset \mathbb{C}^N_{\Delta}$.

Considérons l'application $v : Z \to (\mathbb{R}^n)^*$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "v"'] & \mathbb{C}^N \arrow[d, "\phi"] \\ (\mathbb{R}^n)^* \arrow[r, "\omega^*"'] & (\mathbb{R}^N)^* \end{tikzcd}$$

Nous allons montrer le lemme suivant et un corollaire de ce lemme nous donnera le résultat voulu.

Lemme 3.1.4. *L'application v est une application surjective de Z vers Δ et $v(z)$ est dans F si et seulement si z est dans $\mathbb{C}_F^N \cap Z$*

Démonstration. On a que

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{C}^N | \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} |z_k|^2 \alpha_k = -\lambda \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C}^N | \iota^*(\sum_{k=1}^{N}(\frac{1}{2} |z_k|^2 + \lambda_k)e_k^*) = 0 \right\}$$

Ce dernier ensemble s'écrit comme

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^N | \exists x \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\, \omega^*(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} |z_k|^2 + \lambda_k \right\}$$

De l'injectivité de ω^*, il résulte que x est unique. Cependant puisque $u_k = \omega(e_k)$ les équations décrivant cet ensemble peuvent être réécrites comme suit :

$$\langle x, u_k \rangle = \frac{1}{2} |z_k|^2 + \lambda_k$$

Donc si z est dans Z alors $x = v(z)$ satisfait $\langle x, u_k \rangle = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k$ et donc $v(z)$ est dans Δ. Conséquemment, $v(Z) \subset \Delta$. L'équivalence des systèmes d'équations définissant l'ensemble Z nous donne la surjectivité de v. De plus, le système $\langle x, u_k \rangle = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k$ nous donne que $v(z)$ est dans F si et seulement si z appartient à $\mathbb{C}_F^N \cap Z$.

En effet, si z est un point de $\mathbb{C}_F^N \cap Z$ alors $z = (z_1, \ldots, z_N)$ avec $z_i = 0$ si et seulement si $i \in I_F$. Donc il existe x dans $(\mathbb{R}^n)^* \cap \Delta$ tel que $\omega^* x = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} |z_k|^2 + \lambda_k$ et donc $\langle x, u_k \rangle = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k$ avec $z_k = 0$ si et seulement si $k \in I_F$. On conclut que $x = v(z)$ appartient à F.

Si $v(z) = x$ est dans F alors $\langle x, u_k \rangle = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k$ où $z_k = 0$ si et seulement si $k \in I_F$. On conclut que z est un point de $\mathbb{C}_F^N \cap Z$. □

Corollaire 3.1.5. *$Z \subset \mathbb{C}_\Delta^N$. De plus pour toute face $F \subset \Delta$, $Z \cap \mathbb{C}_F^N$ n'est pas vide.*

Démonstration. Si z appartient à Z alors $v(z)$ est dans Δ. Donc $v(z)$ est dans au moins une face de Δ, disons $v(z)$ est un élément de F_0. Donc z est dans $\mathbb{C}_{F_0}^N \cap Z$ ce qui donne que z appartient à $\mathbb{C}_\Delta^N$. Conséquemment, $Z \subset \mathbb{C}_\Delta^N$. Supposons maintenant qu'il existe une face $F \subset \Delta$ telle que $\mathbb{C}_F^N \cap F = \emptyset$. Il en résulte que pour tout z dans Z, $v(z) \notin F$, ce qui est une contradiction avec le fait que v est surjective. $\square$

Pour ce qui est du reste de la preuve, c'est-à-dire pour montrer que chaque $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathbb{C}_\Delta^N$ intersecte Z en une K-orbite, nous allons seulement en donner les grandes lignes. Pour plus de détails on peut consulter (Guillemin, (1994))(annexe 1).

Remarquons d'abord que pour obtenir le résultat voulu, il suffit de montrer les deux assertions suivantes.

Assertion 1. Chaque $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathbb{C}_\Delta^N$ intersecte Z.

Assertion 2. L'intersection d'une $K_{\mathbb{C}}$-orbite avec Z est une K-orbite.

Ces deux assertions découlent d'une troisième assertion que voici : Par définition,

$$\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^N = \mathbb{C}^N/2\pi i\mathbb{Z}^N = \mathbb{R}^N \oplus i\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$$

En posant $A = K_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^N$, nous avons

$$K_{\mathbb{C}} = KA$$

(i.e. $K_{\mathbb{C}}$ est le produit du tore K avec l'espace vectoriel A). Donc les **Assertions 1** et **2** sont conséquences de l'assertion suivante :

Assertion 3. Chaque A-orbite dans $\mathbb{C}_\Delta^N$ intersecte Z en un et un seul point.

Remarque 3.1.6. Nous allons montrer que l'**Assertion 3** entraîne les **Assertions 1** et **2**. En effet, montrons que l'**Assertion 3** implique l'**Assertion 1**

Soit Az une A-orbite dans $\mathbb{C}_\Delta^N$. On a $Az \cap Z \neq \emptyset$. Supposons que $K_{\mathbb{C}}z \cap Z = \emptyset$. Alors en particulier $Az \cap Z = \emptyset$. On obient alors une contradiction et donc $K_{\mathbb{C}}z \cap Z \neq \emptyset$.

Montrons que l'**Assertion 3** entraîne l'**Assertion 2**

Soit $Az \cap Z = \{y\}$ l'intersection d'une A-orbite avec Z. On a alors

$$K_{\mathbb{C}}z \cap Z = (KA)z \cap Z = K(Az) \cap Z = K(\{z\}).$$

Donc l'intersection d'une $K_{\mathbb{C}}$-orbite avec Z est une K-orbite.

Considérons maintenant l'application moment

$$\Phi_K : \mathbb{C}^N \to \mathfrak{k}^*$$

et rappelons nous que $Z = (\Phi_K)^{-1}(0)$. Donc l'**Assertion 3** est une conséquence des assertions suivantes :

Assertion 4. Soit Y une A-orbite dans $\mathbb{C}^N_\Delta$. Alors Φ_K envoie Y de manière difféomorphe dans un ouvert convexe de $\mathfrak{k}^*$.

Assertion 5. Si deux A-orbites sont dans la même strate $\mathbb{C}^N_F$ de $\mathbb{C}^N_\Delta$ alors leur image par Φ_K sont identiques.

En effet, soit $Y = Az$ une A-orbite de $\mathbb{C}^N_\Delta$. Si 0 est un point de $\Phi_K(Y)$ alors $(\Phi_K|_Y)^{-1}(0) \subset Y$ et donc $Z \cap Y \neq \emptyset$. Mais puisque $\Phi_K|_Y$ est un difféomorphisme 0 est atteint au plus une fois. Donc $\|Az \cap Z\| \leq 1$.

Supposons qu'il existe Az telle que $Az \cap Z = \emptyset$. Soit $\mathbb{C}^N_F$ telle que z est dans $\mathbb{C}^N_F$. On a $Az \subset \mathbb{C}^N_F$. On a que $Z \cap \mathbb{C}^N_F \neq \emptyset$. Soit y dans $Z \cap \mathbb{C}^N_F$. On a $Ay \subset \mathbb{C}^N_F$. Donc par l'**Assertion 5**, $\Phi_K(Ay) = \Phi_K(Az)$. Mais 0 est dans $\Phi_K(Ay)$ donc 0 appartient à $\Phi_K(Az)$ et donc $Z \cap A \neq \emptyset$.

Pour montrer les **Assertions 4** et **5** il suffit de trouver une formule explicite pour la restriction de Φ_K à une A-orbite. Nous ne ferons pas cette construction ici. Pour plus de détails on peut voir (Guillemin, (1994))(annexe 1). □

Remarque 3.1.7. Le théorème 2.2.14 et le théorème 3.1.3 nous donnent que X est une variété compacte. On a en effet $X \cong M = (\Phi_K)^{-1}(0)/K$ et cette dernière est compacte.

3.2 Formule de Guillemin

Revenons sur la construction de la variété complexe X.

Soit $\sigma : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : z \mapsto \bar{z}$. Puisque $\kappa(\exp w)z = ((\exp w_1)z_1, \ldots, (\exp w_N)z_N)$ on a que

$$\kappa(\overline{\exp a})(\sigma(z)) = \sigma(\kappa(\exp \bar{a})(z)).$$

Conséquemment σ envoie la $K_{\mathbb{C}}$-orbite de z dans la $K_{\mathbb{C}}$-orbite de $\sigma(z)$ et donc induit une involution sur l'espace des orbites :

$$\gamma : X \to X.$$

Nous allons dénoter par X_r l'ensemble des points fixes de γ et on dira que c'est la partie réelle de X.

La restriction de Φ à X_r est un revêtement ramifié

$$\psi : X_r \to \Delta$$

à 2^n feuilles au-dessus de $\mathrm{int}(\Delta)$ et ces feuilles sont envoyées de manière difféomorphe sur $\mathrm{int}(\Delta)$ par ψ. Comme sous-variété de X chacune de ces composantes possède une métrique riemannienne. Nous allons maintenant montrer le théorème suivant qui nous servira à établir une formule explicite pour la forme symplectique de M.

Théorème 3.2.8. *Soit X_r^ϵ une des 2^n composantes connexes de $\psi^{-1}(int(\Delta))$ où $\epsilon \in \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) | \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$. La métrique sur X_r^ϵ provenant de la métrique de X est égale au pullback par ψ de la forme bilinéaire symétrique*

$$1/2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(dl_i)^2}{l_i}$$

sur $int(\Delta)$, où $l_i : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, u_i \rangle - \lambda_i$.

Pour ce faire nous allons montrer trois résultats préliminaires.

Soit $\sigma : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : z \mapsto \bar{z}$. Par définition $Z = \Phi_K^{-1}(0)$ est fixe sous σ. Soit Z_r l'ensemble des points fixes de la restriction de σ à Z. On obtient donc l'application

$$\pi : Z_r \mapsto X_r$$

Remarque 3.2.9. Ici on considère $X_r \subset X$ où X est une variété complexe.

Théorème 3.2.10. *L'application $\pi : Z_r \to X_r$ est un revêtement à 2^{N-n} feuilles et son groupe de transformations est*

$$\{a \in K \mid a^2 = 1\}$$

Démonstration. On a $\dim \mathfrak{k}^* = N - n$. Donc $\operatorname{codim} 0 = N - n$ et alors $\operatorname{codim} \Phi_K^{-1}(0) = N - n$ ce qui implique que $\dim(Z_r) = N + n$. Mais

$$Z_r = \left\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \sum |x_i|^2 \alpha_i^* - \lambda = 0\right\}$$

et donc il y a 2^{N-n} points différents de Z_r qui sont envoyés sur un point de X_r. Si $f : Z_r \to Z_r$ est tel que $\pi(f(z)) = \pi(z)$ alors en particulier on a $||f(z)|| = ||z||$ et z et $f(z)$ sont tout les deux dans $\mathbb{R}^N$. Puisque les automorphismes de Z_r sont des "multiplications" par des nombres complexes (l'action de K sur Z_r est une action composantes à composantes), les nombres qui satisfont $||wz|| = ||z||$ sans changer le fait que z et wz soient dans $\mathbb{R}^N$ sont ± 1 i.e. chaque composante de w est ± 1. Donc le groupe de transformations du revêtement est $\{a \in K | a^2 = 1\}$. □

Un point $z = x + iy$ de $\mathbb{C}^N$ est fixé par σ si et seulement si $y = 0$. Donc on a $Z_r \subset \mathbb{R}^N$ et on peut décrire Z_r de la manière suivante

$$Z_r = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \alpha_i = -\lambda\right\}$$

où $\alpha_i = \iota^*(e_i^*)$ et $\lambda = \sum \lambda_k \alpha_k$.

Considérons sur Z_r la restriction de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^N$ et sur X_r la restriction de la métrique kählérienne de X. De cette façon Z_r et X_r sont des variétés riemanniennes.

Théorème 3.2.11. *Le revêtement $\pi : Z_r \to X_r$ est une isométrie locale.*

Démonstration. Soit p un point de Z_r quelconque et $q = \pi(p)$. Soit T_p^{vert} l'espace tangent à la $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathbb{C}^N$ qui contient p (i.e. $K_{\mathbb{C}}p$) et soit T_p^{hor} son complément orthogonal par rapport au produit hermitien de $T_p\mathbb{C}^N$.

(1) $T_p^{\text{hor}} \subset T_pZ$.

En effet, considérons

$$\{K_1, \ldots, K_{N-n}\}$$

une base de $T_p(Kp)$ alors

$$\{K_1, \ldots, K_{N-n}, JK_1, \ldots, JK_{N-n}\}$$

est une base de T_p^{vert}. On a

$$\Phi_K|_Z : Z \to 0$$

donc

$$(\Phi_K)_{*(p)} : T_pZ \to 0$$

Donc T_pZ vu comme sous-espace de $T_p\mathbb{C}^N$ est dans le noyau de $(\Phi_K)_{*(p)}$. Mais $\dim(\ker((\Phi_K)_{*(p)})) = \dim(T_pZ)$ donc $T_pZ = \ker((\Phi_K)_{*(p)})$. On a $(\Phi_K)_{*(p)}(K_i(p)) = 0$. Conséquemment, $\text{span}_{\mathbb{R}}\{K_1(p), \ldots, K_{N-n}(p)\} \subset T_pZ$. On peut alors écrire

$$T_pZ = \text{span}_{\mathbb{R}}\{K_1(p), \ldots, K_{N-n}(p)\} \oplus E_p$$

où E_p est le complément orthogonale à $\text{span}_{\mathbb{R}}\{K_1(p), \ldots, K_{N-n}(p)\}$ dans T_pZ. Pour prouver que $E_p = T_p^{\text{hor}}$ il suffit de vérifier que $JK_i(p) \perp T_pZ$. En effet, on a $\dim(T_pZ) = N - n$ et si $JK_i(p) \perp T_pZ$ il y aura donc un sous-espace de T_pZ de dimension $2n$ qui sera complémentaire à la fois à

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{K_1(p), \ldots, K_{N-n}(p)\}$$

et à

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{JK_1(p), \ldots, JK_{N-n}(p)\}.$$

Mais T_p^{hor} satisfait précisément cette propriété. On aura donc $T_p^{\text{hor}} \subset T_pZ$. Pour ce faire considérons $X(p)$ un vecteur de $T_pZ = \ker((\Phi_K)_{*(p)})$ on a

$$\langle JK_i, X\rangle = \omega(K_i, X) = ((\Phi_K)_{*(p)}(X(p)))_i$$

où $((\Phi_K)_{*(p)}(X(p)))_i$ est la i$^{\text{eme}}$ coordonnée de $(\Phi_K)_{*(p)}(X(p))$. Mais puisque $X(p)$ est dans $\ker((\Phi)_{*(p)})$ on obtient le résultat voulu.

(2) $d\sigma_p(T_p^{\text{vert}}) = T_p^{\text{vert}}$ et $d\sigma_p(T_p^{\text{hor}}) = T_p^{\text{hor}}$. Puisque $d\sigma_p$ préserve la métrique kälhérienne sur $T_p\mathbb{C}^N$ il suffit de vérifier que $d\sigma_p(T_p^{\text{vert}}) = T_p^{\text{vert}}$. Mais $\sigma(p) = p$ alors on a que σ envoie la $K_{\mathbb{C}}$-orbite contenant p sur elle-même.

(3) L'application $d\pi_p : T_pZ \to T_qX$ envoie T_p^{hor} bijectivement sur T_qX. On a que $d\pi_p$ est surjective. De plus $\dim_{\mathbb{R}}(T_p^{\text{hor}}) = \dim_{\mathbb{R}}X = 2n$. Il suffit donc de voir que si v_p est un vecteur de $(T_p^{\text{hor}})^{\perp} \cap T_pZ$ alors $d\pi_p(v_p) = 0$ et on aura le résultat voulu. Soit v_p dans $(T_p^{\text{hor}})^{\perp} \cap T_pZ$. On a $(T_p^{\text{hor}})^{\perp} \cap T_pZ = T_p(Z \cap K_{\mathbb{C}}p) = T_p(Kp)$. Donc v_p appartient à $T_p(Kp)$ et on conclut donc que $d\pi_p(v_p) = 0$.

(4) T_pZ_r est l'ensemble des points fixes de l'application $d\sigma_p : T_p^{\text{hor}} \to T_p^{\text{hor}}$. Montrons que $T_pZ_r \subset \text{Fix}(d\sigma_p)$. On a $Z_r \subset \text{Fix}(\sigma)$, alors σ agit comme l'identité sur Z_r. Donc $d\sigma_p(v_p) = v_p$ pour tout élément v_p de T_pZ_r. Il en résulte que $T_pZ_r \subset \text{Fix}(d\sigma_p)$. Soit v_p un vecteur de $\text{Fix}(d\sigma_p)$. On a que v_p est dans T_p^{hor}. De plus, v_p est un vecteur réel de T_pZ puisqu'il est fixé par $d\sigma_p$. Conséquemment, v_p appartient à T_pZ_r. Donc, $\text{Fix}(d\sigma_p) \subset T_pZ_r$

(5) $d\pi_p : T_pZ_r \to T_qX_r$ est une bijection. On a $\dim_{\mathbb{R}}X = 2n$ donc $\dim_{\mathbb{R}}X_r = n$. Par définition Z_r est une variété réelle de dimension n. Il suffit donc de montrer que $d\pi_p$ est une surjection, mais par définition de π $d\pi_p$ est surjective.

Identifions $T_p\mathbb{C}^N$ à $\mathbb{C}^N$ et soit $J_p :\ T_p\mathbb{C}^N \to T_p\mathbb{C}^N$ la multiplication par $\sqrt{-1}$

(6) J_p envoie T_p^{hor} dans T_p^{hor} et T_p^{vert} dans T_p^{vert}. Puisque J_p préserve la métrique kälhérienne de $T_p\mathbb{C}^N$ il suffit de le vérifier pour T_p^{vert}. Mais comme T_p^{vert} est l'espace tangent d'une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^N$ alors J_p laisse bien T_p^{vert} invariant.

(7) On a l'application bijective $d\pi_p\ :\ T_p^{\text{hor}} \to T_qX$. Définissons $J_q\ :\ T_qX \to T_qX$ de la manière suivante $J_q(w_q) = d\pi_p(J_p(v_p))$ où v_p est l'unique vecteur tel que $w_q = d\pi_p(v_p)$. La structure complexe de T_qX est J_q.

(8) T_p^{hor} est muni d'une structure symplectique ω_p (restriction de la structure symplectique de $T_p\mathbb{C}^N$) et $d\pi_p : T_p^{\text{hor}} \to T_qX$ est une application symplectique (par le théorème 2.1.3) i.e. $\omega_q(d\pi_p(v_1), d\pi_p(v_2)) = \omega_p(v_1, v_2)$.

(9) Par les points (6)-(8), on conclut que $d\pi_p : T_p^{\text{hor}} \to T_qX$ est une application qui préserve les structures kähleriennes des espaces de départ et d'arrivée.

Donc par les points (9) et (2)-(5) on conclut que l'application $\pi : Z_r \to X_r$ est une isométrie en p. $\square$

Maintenant, restreignons la métrique euclidienne $\sum_{i=1}^{N}(dx_i)^2$ à l'un des 2^N orthants ouvert

$$\{(x_1, \ldots, x_N) | \epsilon_1 x_1 > 0, \ldots, \epsilon_N x_N > 0 \quad \epsilon_i = \pm 1\}.$$

Si on fait le changement de coordonnées $s_i = \frac{x_i^2}{2}$, $i = 1, \ldots, N$, alors sur l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_N) | \epsilon_1 x_1 > 0, \ldots, \epsilon_N x_N > 0 \quad \epsilon_i = \pm 1\}$ la métrique $\sum_{i=1}^{N}(dx_i)^2$ devient $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(ds_i)^2}{s_i}$. Soit $Z_r^\epsilon = Z_r \cap \{(x_1, \ldots, x_N) | \epsilon_1 x_1 > 0, \ldots, \epsilon_N x_N > 0 \quad \epsilon_i = \pm 1\}$. Dans les coordonnées s, $Z_r^\epsilon = \{(s_1, \ldots, s_N) | s_i > 0\} \cap \left\{(s_1, \ldots, s_N) | \sum_{i=1}^{N} s_i \alpha_i = -\lambda\right\}$. De plus l'application moment $\phi : \mathbb{C}^N \to (\mathbb{R}^N)^*$ restreinte à Z_r s'écrit maintenant $\phi((x_1, \ldots, x_N)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 e_k^* + \lambda$. Si on considère cette application restreinte à Z_r^ϵ dans les nouvelles coordonnées on trouve $\phi((s_1, \ldots, s_N)) = \sum_{k=1}^{N} s_k + \lambda_k e_k^*$

Théorème 3.2.12. *L'application ϕ restreinte à Z_r^ϵ est un difféomorphisme entre Z_r^ϵ et $\omega^*(int(\Delta))$.*

Démonstration. On a la suite exacte suivante

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\omega^*} (\mathbb{R}^N)^* \xrightarrow{\iota^*} k^* \to 0$$

Comme $\alpha_i = \iota^*(e_i^*)$ pour tout s dans Z_r^ϵ alors

$$\iota^*(\phi(s)) = \iota^*(\sum_{k=1}^{N} s_k + \lambda_k e_k^*) = \sum_{k=1}^{N} s_k + \lambda_k \alpha_k = 0.$$

Par l'exactitude de la suite on trouve qu'il existe un vecteur x de $(\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\phi(s) = \omega^*(x)$. Cependant, par définition de ϕ on a

$$\langle \omega^*(x), e_i \rangle = s_i + \lambda_i > \lambda_i$$

puisque $s_i > 0$. D'un autre côté on a

$$\langle \omega^*(x), e_i \rangle = \langle x, \omega(e_i) \rangle = \langle x, u_i \rangle$$

Donc $\langle x, u_i \rangle > \lambda_i$ ce qui implique que x appartient à $\mathrm{int}(\Delta)$. Il en résulte que ϕ est un difféomorphisme entre Z_r^ϵ et $\omega^*(\mathrm{int}(\Delta))$. $\square$

Considérons $l_i : \mathrm{int}(\Delta) \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, u_i \rangle - \lambda_i$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.2.13. *En vertu de l'isomorphisme $\psi : X_r^\epsilon \xrightarrow{\cong} \mathrm{int}(\Delta)$, la métrique riemannienne de X_r^ϵ s'écrit comme $\psi^*(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(dl_i)^2}{l_i})$, où ψ est l'application moment restreinte à X_r^ϵ.*

Démonstration. Puisque ω^* est injective on peut regarder ϕ comme un difféomorphisme entre Z_r^ϵ et $\mathrm{int}(\Delta)$. On a $l_i(\phi(s)) = l_i(\sum\limits_{k=1}^{N} s_k + \lambda_k e_k^*) = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{N} s_k + \lambda_k e_k^*, u_i \right\rangle - \lambda_i = s_i + \lambda_i - \lambda_i = s_i$. Donc $l_i \circ \phi = s_i$. Un calcul simple utilisant la définition de ϕ nous donne alors que $\phi^*(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(dl_i)^2}{l_i}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(ds_i)^2}{s_i}$. Considérons l'application $\pi : Z_r \to X_r$ et soit $X_r^\epsilon = \pi(Z_r^\epsilon)$. Soit ψ la restriction de Φ à X_r^ϵ. La construction de Delzant nous permet de dire qu'il existe $v : Z \to (\mathbb{R}^n)^*$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "v"] & \mathbb{C}^N \arrow[d, "\phi"] \\ (\mathbb{R}^n)^* \arrow[r, "\omega^*"'] & (\mathbb{R}^N)^* \end{tikzcd}$$

Grâce a cette application on peut maintenant considérer Φ l'application moment de l'action de $\mathbb{T}^n$ sur $Z/K = X$. Cette dernière est l'unique application qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "v"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ & (\mathbb{R}^n)^* \end{tikzcd}$$

Puisque ϕ est une application allant de Z_r^ϵ vers $(\mathbb{R}^n)^*$ on a que $\phi = v$. Donc, en considérant ψ au lieu de Φ, ϕ au lieu de g, Z_r^ϵ au lieu de Z, $\mathrm{int}(\Delta)$ au lieu de $(\mathbb{R}^n)^*$ et X_r^ϵ au lieu de X, on trouve le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z_r^\epsilon \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"'] & X_r^\epsilon \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathrm{int}(\Delta) \end{tikzcd}$$

Puisque π est une isométrie locale et ϕ est un difféomorphisme on en déduit que ψ est un difféomorphisme. Considérons alors $\psi = \phi \circ (\pi|_{Z_r^\epsilon})^{-1}$ et puisque $\phi^*(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(dl_i)^2}{l_i}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(ds_i)^2}{s_i}$, on trouve que $\psi^*(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(dl_i)^2}{l_i}) = ((\pi|_{Z_r^\epsilon})^{-1})^*(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(ds_i)^2}{s_i})$. Cette dernière est précisément la métrique sur X_r^ϵ car π est une isométrie locale. □

Soit $M := \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ et soit l'action $\mathbb{T}^n \times M \to M : (y,z) \mapsto z + iy$. Soit ω une forme kählérienne $\mathbb{T}^n$-invariante sur M. Supposons que l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M est hamiltonienne et soit $\Phi : M \to (\mathbb{R}^n)^*$ l'application moment associée à cette action. On a qu'il existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\omega = 2i\partial\bar{\partial}F$ (Guillemin, (1994)) (annexe 2). En réalité F est une fonction définie sur M mais comme elle est $\mathbb{T}^n$-invariante on dira que c'est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ (l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M ne fait que changer la partie imaginaire des éléments de M). On a le théorème suivant (Guillemin, (1994)) (annexe 2) :

Théorème 3.2.14. *À une constante près c, Φ est la transformée de Legendre associée à F, i.e. $\Phi(x+iy) = \frac{\partial F}{\partial x} + c$ où c est un point de $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Remarque 3.2.15. (1) On peut dériver selon la variable x car $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.

(2) On peut éliminer la constante c en remplaçant F par $F - \sum_{i=1}^{n} c_k x_k$, ce qui ne modifie pas ω.

Par la remarque 3.1.2 on peut identifier la $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte de X avec $M = \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$. Donc dans la suite on remplace M par la $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte de X qu'on notera M_0. Comme forme kählérienne sur M_0 on considère ω, la restriction de la forme kählérienne de X. On considére $\Phi : M_0 \to (\mathbb{R}^n)^*$ la restriction de l'application moment de l'action de $\mathbb{T}^n$ sur X. On a que

$$\omega = 2i\partial\bar{\partial}F = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}F = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

où on a remplacé F par $(\frac{1}{4})F$ et par le théorème 3.2.14 on peut normaliser F de telle sorte qu'elle satisfasse $\Phi(x+iy) = \frac{\partial F}{\partial x}(x)$.

Soit X_r la partie réelle de X. On a $X_r \cap M_0 = \mathbb{R}^n \oplus \pi i(\mathbb{Z}^n/(2\mathbb{Z})^n)$ et en particulier $\mathbb{R}^n$ est une composante connexe de cet ensemble. La restriction à $\mathbb{R}^n$ de la métrique kählérienne $\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ est la métrique riemannienne

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Nous allons pouvoir obtenir une formule explicite pour F et par le fait même une formule explicite pour la restriction de ω à M_0.
Notons que $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{(dl_i)^2}{l_i}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial y_k} dy_j dy_k$$

où

$$G = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} l_k(y) \ln l_k(y).$$

En effet,

$$\frac{\partial G}{\partial y_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i}{\partial y_k} \ln l_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i}{\partial y_k}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial G}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 l_i}{\partial y_j \partial y_k} \ln l_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i}{\partial y_k} \frac{1}{l_i} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 l_i}{\partial y_j \partial y_k}.$$

Mais $\frac{\partial^2 l_i}{\partial y_j \partial y_k} = 0$. Donc $\frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i}{\partial y_k} \frac{1}{l_i} \frac{\partial l_i}{\partial y_j}$, ce qui nous donne le résultat voulu.

Théorème 3.2.16. *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait $\Phi(x+iy) = \frac{\partial F}{\partial x}(x)$. Alors, la transformée de Legendre $y \mapsto \frac{\partial H}{\partial y}(y) = x$ est l'inverse de la transformée de Legendre $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x)$, où $H = G + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ et les a_i sont des constantes.*

Démonstration. Soit $\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$, la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} | y = \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right\},$$

le graphe de la transformée de Legendre $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x)$. On a que Γ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$ et puisque l'application $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x)$ est un difféomorphisme les 1-formes différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ et $dy_1, \ldots, dy_n$ sont indépendantes sur Γ. De plus, grâce au théorème 3.2.14, on a que la restriction à Γ de la métrique $\sum dx_i dy_i$ peut s'écrire comme

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

ou encore

$$\sum \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} dy_i dy_j$$

Alors en posant $x = x(y)$ on peut aussi écrire la restriction de $\sum dx_i dy_i$ à Γ comme

$$\frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right) dy_i dy_j.$$

Donc, en comparant les deux expressions précédentes on trouve

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Cependant, puisque Γ est lagrangienne un calcul simple nous donne

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} - \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0$$

et donc $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial y_i}$. Ce qui veut dire que

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial y_i} + a_i; \quad i = 1, \ldots, n$$

où les a_i sont des constantes. En posant $H = G + \sum a_i y_i$ on conclu que

$$x = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

et on obtient le résultat voulu. □

Théorème 3.2.16. *Sur la $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte de X la forme kählérienne ω est égale à*

$$i\partial\bar{\partial}\Phi^*\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_k (\ln l_k) + l_\infty\right)$$

où $l_\infty : int(\Delta) \to \mathbb{R} : y \mapsto \left\langle y, \sum_{i=1}^{N} u_k e_k \right\rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspond à l'évaluation d'une forme linéaire sur un vecteur.

Démonstration. Puisque F et H sont des transformées de Legendre qui sont les inverses l'une de l'autre on peut dire que

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - H(y)$$

si on évalue le côté droit en $y = \frac{\partial F}{\partial x}$. Cependant, comme une fonction de y, le côté droit de l'égalité est égal à

$$\sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i} - H(y)$$

ou bien à

$$\sum y_i \frac{\partial G}{\partial y_i} - G(y)$$

car $H = G + \sum a_i y_i$ et x_i est aussi égal à $\frac{\partial G}{\partial y_i}$. Puisque $G = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{N} l_k(y) \ln l_k(y)$ le premier terme de l'équation qui précède peut être réécrit de la manière suivante

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} y_i \left(\frac{\partial l_k}{\partial y_i} \ln l_k + \frac{\partial l_k}{\partial y_i} \right) \right)$$

et puisque $l_k(y) = \langle y, u_k \rangle - \lambda_k$ cette dernière équation peut être réécrite comme

$$\frac{1}{2}(\sum (l_k + \lambda_k) \ln l_k + l_\infty)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(\sum (l_k(y) + \lambda_k) \ln l_k + l_\infty(y)) - G(y) \\ &= \frac{1}{2}(\sum (l_k(y) + \lambda_k) \ln l_k(y) + l_\infty(y)) - \frac{1}{2} \sum l_k(y) \ln l_k(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum \lambda_k \ln l_k(y) + l_\infty(y) \end{aligned}$$

où $y = \frac{\partial F}{\partial x}$. En remplaçant $\frac{\partial F}{\partial x}$ par $\Phi(x)$ on trouve que

$$F = \frac{1}{2} \Phi^* (\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \ln l_k + l_\infty)$$

On obtient donc que

$$\omega = i \partial \bar{\partial} \Phi^* (\sum_{k=1}^{N} \lambda_k (\ln l_k) + l_\infty).$$

□

3.3 Autre preuve de la formule de Guillemin

Plaçons nous sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.1.6. Supposons que G agit librement sur $\tilde{M}$ et que $\dim G = 1/2 \dim \tilde{M}$. Alors l'application moment $\Phi : \tilde{M} \to \mathfrak{g}^*$ est un G-fibré principal sur $\Phi(\tilde{M})$. Si $\tilde{g}$ est une métrique riemannienne G-invariante compatible avec $\tilde{\omega}$ alors on obtient une unique métrique riemannienne $\tilde{g}_{\text{red}}$ sur $\text{Im}(\Phi) = \Delta'$ qui fait que Φ est une submersion riemannienne de $\tilde{g}$ vers $\tilde{g}_{\text{red}}$.

De manière similaire, le groupe quotient G/K agit librement sur le quotient $M = \tilde{M}//_c K$ ce qui fait de $\nu : M \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ un G/K-fibré principal sur $\text{Im}(\nu) = \Delta$. Alors ν est une submersion riemannienne pour une unique métrique g_{red} sur Δ si M est munie de la métrique g induite par l'inclusion de $\Phi^{-1}(c)$ dans $\tilde{M}$. Posons $l = u^* + \tilde{c}$ l'application affine de Δ' dans Δ induite par l'inclusion naturelle $u^* : (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \to \mathfrak{g}^*$ et $\tilde{c}$ est telle que $\iota(\tilde{c}) = c$.

Lemme 3.3.17. *Les métriques réduites $\tilde{g}_{\text{red}}$ et g_{red} sont liées par la formule suivante :*

$$l^* \tilde{g}_{\text{red}} = g_{\text{red}}$$

Démonstration. Soit z un point de $\Phi_K^{-1}(c)$ et soit $\tilde{X} \in T_z\tilde{M}$ tel que $\tilde{X}$ est orthogonal à $T_z(GZ)$. Posons $x = \pi(z)$. Alors la projection X de $\tilde{X}$ dans T_xM est orthogonale à $T_x(G/Kx)$. On a donc

$$g_{\text{red}}(\nu_*(X), \nu_*(X)) = \nu^* g_{\text{red}}(X, X) = g(X, X) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{X})$$

$$= \tilde{g}_{\text{red}}(\Phi_*(\tilde{X}), \Phi_*(\tilde{X}))$$

Mais $\Phi(z) = l(\nu(x))$ et donc

$$(l^* \tilde{g}_{\text{red}})(\nu_*(X), \nu_*(X)) = \tilde{g}_{\text{red}}(l_* \circ \nu_*(X), l_* \circ \nu_*(X))$$

$$= \tilde{g}_{\text{red}}(\Phi_*(\tilde{X}), \Phi_*(\tilde{X})) = g_{\text{red}}(\nu_*(X), \nu_*(X))$$

□

Soit (M^{2n}, ω) une orbifold torique avec une application moment $x : M \to (\mathbb{R}^n)^*$ et soit (g, J) une structure kählérienne compatible. Soit

$$X = \{X_1, \ldots, X_n | X_i \in \Gamma(TM)\}$$

où les X_i sont les champs de Killing hamiltoniens qui satisfont

$$\omega(X_i, Y) = -dx(Y)_i$$

pour tout Y dans $\Gamma(TM)$ où $-dx(Y)_i$ est la $\mathrm{i}^{\mathrm{eme}}$ coordonnée de $-dx(Y)$ (on s'est choisi une base de $(\mathbb{R}^n)^*$). On peut écrire cet ensemble d'égalités sous une forme plus compacte de la manière suivante :

$$\omega(X, \ ) = -dx$$

On veut étudier la géométrie de M localement, sur un ouvert U, donc on va supposer que l'action du tore est libre sur cet ouvert. Alors JX est une famille de champs de vecteurs holomorphes et les composantes de X et de JX forment une base locale de champs de vecteurs qui commutent sous le crochet de Lie. Soit

$$\{X_1^*, \ldots, X_n^*, (JX_1)^*, \ldots (JX_n)^*\}$$

une base locale de T^*M. Une 1-forme h est fermée si et seulement si elle est exacte sur U. Donc si on considère $\alpha = (X_1^*, \ldots, X_n^*)$ et $J\alpha = -\alpha \circ J$ qui sont deux 1-formes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha(X) = Id_{\mathbb{R}^n}$ alors la 1-forme fermée sera une combinaison linéaire des composantes de ces 1-formes. Si on écrit localement $\alpha = dt$ et $J\alpha = -dy$ avec $y, t : M \to \mathbb{R}^n$ alors $y + it : M \to \mathbb{C}^n$ est une carte holomorphe sur U.

Les composantes de $J\alpha$ et de $\omega(X, \ )$ engendrent le même sous-fibré de rang n de T^*M : l'annulateur de l'espace tangent aux orbites de l'action du tore. En effet, soit p un point de M et soit $\mathbb{T}^n p$ son orbite. Soit $T_p(\mathbb{T}^n p) \subset T_pM$ alors l'annulateur de $T_p(\mathbb{T}^n p)$ est défini comme suit :

$$\mathrm{ann}(T_p(\mathbb{T}^n p)) = \left\{\eta \in T_p^*M | \eta(X_p) = 0 \quad \forall X_p \in T_p(\mathbb{T}^n p)\right\}$$

On peut montrer qu'en fait les composantes de $J\alpha$ sont les $(JX_i)^*$. Soit η un élément de $\text{span}_{\mathbb{R}} \{(JX_1)^*, \ldots, (JX_n)^*\}$ i.e.

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i (JX_i)^*$$

alors il faut voir que $\eta(X_p) = 0$ pour tout X_p dans $T_p(\mathbb{T}^n p)$. Mais si X_p est dans $T_p(\mathbb{T}^n p)$ alors $X_p = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i(p)$ donc $\eta(X_p) = 0$.

Soit η un vecteur de $\text{span}_{\mathbb{R}} \{\omega(X_1(p), \ ), \ldots, \omega(X_n(p), \ )\}$ i.e.

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega(X_i(p), \ )$$

alors il faut voir que $\eta(X_p) = 0$ pour tout X_p dans $T_p(\mathbb{T}^n p)$. Mais

$$\eta(X_p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega(X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j(p)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \omega(X_i(p), X_j(p)) = 0$$

Ceci implique qu'il existe deux fonctions

$$\mathbf{F} : M \to \text{Hom}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*)$$

et

$$\mathbf{G} : M \to \text{Hom}((\mathbb{R}^n)^*, \mathbb{R}^n)$$

qui satisfont

$$\omega(X, \ ) = \langle \mathbf{F}, J\alpha \rangle \quad \text{et} \quad \text{J}\alpha = \langle \mathbf{G}, \omega(\text{X}, \ ) \rangle$$

et qui sont mutuellement l'inverse l'une de l'autre c'est-à-dire pour tout point p de M, on a $(\mathbf{F}(p)^T)^{-1} = \mathbf{G}(p)$ et $(\mathbf{G}(p)^T)^{-1} = \mathbf{F}(p)$.

Puisqu'en chaque point p de M

$$g(X_p, X_p) = \omega(X_p, JX_p) = \langle \mathbf{F}(p)(JX_p), J\alpha_p(JX_p) \rangle = \mathbf{F}(p)$$

on obtient que $\mathbf{F}$ est, en chaque point de M, un élément symétrique et défini positif de $(\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$. En chaque point p de M on considère

$$\mathbf{F}(p) : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$

et

$$\mathbf{G}(p) : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$$

Si on choisi une base de $\mathbb{R}^n$ et la base duale pour $(\mathbb{R}^n)^*$ alors puisque $\mathbf{F}(p) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*)$ (resp. $\mathbf{G}(p) \in \mathrm{Hom}((\mathbb{R}^n)^*, \mathbb{R}^n)$), $\mathbf{F}(p)$ (resp. $\mathbf{G}(p)$) possède une représentation matricielle $F_{rs}(p)$ (resp. $G_{rs}(p)$). On a que $(G_{rs}(p)) = (F^T_{rs}(p))^{-1}$ où $F_{rs}(p)$ (resp. $G_{rs}(p)$ est vu comme une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $(\mathbb{R}^n)^*$). Mais on a $(F^T_{rs})^{-1} = (F_{sr})^{-1} = (F_{rs})^{-1}$. Donc $(G_{rs}) = (F_{rs})^{-1}$. Donc (G_{rs}) est aussi symétrique et définie positive comme élément de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Concrètement, si on choisi une base de l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^n$, par rapport à cette base, on obtient :

$$dx_r = \sum_{s=1}^{n} F_{rs} dy_s \quad \text{et} \quad dy_r = \sum_{s=1}^{n} G_{rs} dx_s$$

De plus, $\sum\limits_{s=1}^{n} G_{rs} dx_s$ est fermée si et seulement si G_{rs} est le Hessien par rapport à x d'une fonction G. L'implication $(\Leftarrow)$ est triviale. Pour voir l'autre implication on remarque que si

$$dy_r = \sum_{s=1}^{n} G_{rs} dx_s$$

est fermée alors par le lemme de Poincaré il existe une fonction $G^r : M \to \mathbb{R}$ telle que $dy_r = dG^r$. Soit

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} G^j dx_j$$

On a $d\eta = \sum\limits_{i<j} (\frac{\partial G^i}{\partial x_j} - \frac{\partial G^j}{\partial x_i}) dx_i \wedge dx_j = 0$ car $\frac{\partial G^i}{\partial x_j} = G_{ij} = G_{ji} = \frac{\partial G^j}{\partial x_i}$. Donc η est fermée ce qui implique que η est exacte. Encore par le lemme de Poincaré, il existe $G : M \to \mathbb{R}$ telle que $\eta = dG$. Donc G_{rs} est le Hessien par rapport à x de G. De la même manière $\sum\limits_{s=1}^{n} F_{rs} dy_s$ est fermée si et seulement si F_{rs} est le Hessien par rapport à y d'une fonction F.

On a donc deux fonctions F et G définies sur M telles que $x_r = \frac{\partial F}{\partial y_r}$ et $y_r = \frac{\partial G}{\partial x_r}$. Puisque $d(F + G - \langle x, y \rangle) = 0$ on en déduit que la fonction $F + G - \langle x, y \rangle$ est constante. Sans perte de généralité on la pose égale à 0. Donc les systèmes de coordonnées x et y

et les fonctions F et G sont liées par la transformée de Legendre

$$F+G=\langle x,y\rangle=\sum_{r=1}^{n}x_r\frac{\partial G}{\partial x_r}=\sum_{r=1}^{n}y_r\frac{\partial F}{\partial y_r}$$

F est un potentiel kählérien car $\omega=\sum\limits_{r,s=1}^{n}F_{rs}dy_s\wedge dt_r=dd^cF$. En effet, on a la formule générale suivante :

$$\omega=\sum_{r,s}\omega(\frac{\partial}{\partial t_r},\frac{\partial}{\partial y_s})dt_r\wedge dy_s.$$

Mais on a

$$F_{ij}(p)=\mathbf{F}(p)=\omega(X_p,JX_p)=\omega(X_i(p),JX_j(p)).$$

Donc on conclut que $\omega(X_i,JX_j)=F_{ij}$.

Remarque 3.3.18. Soit U et V des espaces vectoriels réels de dimension n et m respectivement. Soit $f:U\to V:x\mapsto Ax+p$ une application affine. Alors $f^*(dy_i)=A^*(dy_i)$ où $\{dy_1,\ldots,dy_m\}$ est une base de V^*.

En effet, si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ alors

$$f(x)=A(x)+p=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}x_i)\frac{\partial}{\partial y_j}+p_j$$

où $\{dy_1,\ldots,dy_m\}$ est une base de V en chaque point. On a $f^*\circ d=d\circ f^*$. Appliquons cet opérateur à la fonction

$$y_j:V\to\mathbb{R}:\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial}{\partial y_j}=v_j.$$

On obtient $f^*(dy_j)=d(y_j\circ f)$. Explicitons cette expression :

$$f^*(dy_j)=d(y_j(A(x)+p))=d(\sum_{i=1}^{n}A_{ji}x_i+p_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A_{ji}dx_i=A^*(dy_j)$$

Théorème 3.3.19. *Soit $(\tilde{M},\tilde{\omega})$ une variété kählérienne torique de dimension réelle $2N$. Dénotons par $\tilde{M}_0$ l'ouvert sur lequel la $\mathbb{T}^N$-action est libre de telle sorte que l'application moment $\Phi:\tilde{M}_0\to U\subset(\mathbb{R}^N)^*$ est un $\mathbb{T}^N$-fibré principal. Soit $K\subset\mathbb{T}^N$ un sous-groupe* *de codimension n avec application moment $\Phi_K = \iota^* \circ \Phi$ où $\iota : (\mathbb{R}^N)^* \to \mathfrak{k}^*$ est la transposée de l'inclusion. Soit $\tilde{c} \in (\mathbb{R}^N)^*$ tel que $c = \iota^*(\tilde{c})$ est une valeur régulière de Φ_K et telle que l'action de K sur $\Phi_K^{-1}(c)$ est localement libre. Soit $M = \Phi_K^{-1}(c)/K$ le quotient kählérien avec la métrique g et soit $\pi : \Phi_K^{-1}(c) \to M$ la projection naturelle. L'action de $\mathbb{T}^N$ sur $\tilde{M}$ fixe $\Phi_K^{-1}(c)$ et donc induit une action hamiltonienne du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^N/K$ sur M et l'application moment ν est définie par $\nu \circ \pi = \Phi - \tilde{c}$. Soit $\Delta_0 = \nu(M_0)$ où $M_0 = (\Phi_K^{-1}(c) \cap \tilde{M}_0)/K$. Alors la métrique réduite g_{red} sur Δ_0 est le tiré en arrière par l de la métrique réduite $\tilde{g}_{\text{red}}$ sur U et donc, si $\tilde{G} : U \to \mathbb{R}$ est un potentiel dual pour $\tilde{g}$ sur $\tilde{M}_0$ i.e. $\tilde{D}d(\tilde{G}) = \tilde{g}_{\text{red}}$, alors $G = \tilde{G} \circ l : \Delta_0 \to \mathbb{R}$ est un potentiel dual pour g sur M_0.*

Démonstration. On se retrouve sous les hypothèses du théorème 2.1.6 et donc on utilise le lemme 3.3.17 pour conclure que $l^*\tilde{g}_{\text{red}} = g_{\text{red}}$. Il reste juste à voir que $G = l^*\tilde{G}$ est un potentiel dual pour la métrique g sur M_0 i.e voir que $g_{\text{red}} = Dd(G)$. Ceci résulte du lemme 3.3.17 et de la remarque 3.3.18 étant donné que l est une application affine par rapport aux connexions D et $\tilde{D}$ de Δ_0 et U. En effet, pour les potentiels duaux on a

$$Dd(l^*\tilde{G}) = Dl^*(d\tilde{G}) = l^*(\tilde{D}d\tilde{G}) = l^*(\tilde{g}_{\text{red}}) = g_{\text{red}}$$

La deuxième égalité est obtenue grâce au fait que les bases $\{dy_1, \ldots, dy_N\}$ de $(\mathbb{R}^N)^*$ et $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ satisfont $\tilde{D}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} dy_j = 0$ et $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx_j = 0$. □

Il reste maintenant à calculer la métrique réduite $\tilde{g}_{\text{red}}$ sur $\phi(\mathbb{C}^N)$, le potentiel dual $\tilde{G}$ pour la structure kählérienne plate de $\mathbb{C}^N$ et son tiré en arrière par l. Ici, ϕ est l'application moment de l'action hamiltonienne de $\mathbb{T}^N$ sur $\mathbb{C}^N$. Le potentiel kählérien pourra être calculé par une transformée de Legendre. Le calcul de $\tilde{g}_{\text{red}}$ et de $\tilde{G}$ se fait par un simple changement de coordonnée : $z_j = r_j e^{i\theta_j}$. Les composantes de l'application moment ϕ sont $\phi_j = \frac{r_j^2}{2}$. Donc la métrique plate de $\mathbb{C}^N$ est

$$\sum_{j=1}^{N} dz_j d\bar{z}_j = \sum_{j=1}^{N} (dr_j^2 + r_j^2 d\theta_j^2) = \sum_{j=1}^{N} (\frac{d\phi_j^2}{2\phi_j} + 2\phi_j d\theta_j^2).$$

Donc $\tilde{g}_{\text{red}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{d\phi_j^2}{\phi_j}$ et on peut calculer qu'un potentiel dual est $\tilde{G} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \phi_j \ln \phi_j$.

Théorème 3.3.20. *Soit (M^{2n}, ω) une orbifold symplectique torique avec une application moment $\phi : M \to \Delta \subset (\mathbb{R}^n)^*$ où Δ est le polytope rationnel de Delzant donné par*

$$\Delta = \bigcap_{j=1}^{N} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* | l_j(x) \geq 0\}$$

où $l_j(x) = \langle u_j, x\rangle - \lambda_j$ pour $u_j \in \mathbb{Z}^n$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Considérons la métrique de Guillemin sur M (métrique obtenue par passage au quotient de la métrique kählérienne de $\mathbb{C}^N$). Alors la métrique réduite sur Δ_0 est donnée comme suit :

$$g_{\text{red}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{dl_j^2}{l_j}$$

et les potentiels dual et kählérien sont donnés par

$$G = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} l_j(x) \ln l_j(x)$$

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ln l_j(x) + l_j(x)$$

Démonstration. En utilisant le théorème précédent on trouve que la métrique réduite est

$$g_{\text{red}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{dl_j^2}{l_j}$$

et le potentiel dual est

$$G = \frac{1}{2}\sum_{j-1}^{N} l_j(x) \ln l_j(x)$$

en posant $\phi_j = l_j(x)$.

Il reste maintenant à calculer la transformée de Legendre de G pour trouver F. Celle-çi est donnée par

$$\begin{aligned} -G(x) + \langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} (((\langle u_j, x\rangle - l_j(x)) \ln l_j(x) + \langle u_j, x\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} (l_j(x) + \lambda_j + \lambda_j \ln l_j(x)) \end{aligned}$$

Cette dernière expression est égale à F à une constante près. $\square$

CONCLUSION

L'intérêt des orbifolds toriques est essentiellement qu'en étudiant une orbifold torique on est amené à étudier le polytope moment qui lui est associé. Ce fait simplifie grandement leur compréhension. Nous avons essayé d'être le plus clair possible dans la théorie développée dans les chapitres précédents. Sachant que nous n'avons pas pu toucher et mettre en lumière toutes les propriétés des orbifolds toriques, voici quelques autres avenues qui auraient pu être explorées dans le cadre de ce travail. Les métriques extrémales au sens de Calabi se calculent de manière explicite dans le cas des orbifolds toriques (Abreu, (2001)). Robert L. Bryant (Bryant, (2001)) a montré l'existence d'un certain type de métriques (de Bochner-Kähler) sur tous les espaces projectifs à poids. Tous ces travaux sur les variétés et orbifolds toriques font de ce domaine des mathématiques un domaine vibrant d'action et riche de nouveaux résultats.

BIBLIOGRAPHIE

Abreu, M. (2001). « Kähler metrics on toric orbifold ». J. Differential Geometry 58 (2001) 151-187.

Apostolov, V. Calderbank, D.M.J. Gauduchon, P. Tønnesen-Friedman, C.T. (2004). « Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry, II Global Classification ». J.Differential Geometry 68 (2004) 277-345.

Atiyah, M.F. (1982). « Convexity and commuting hamiltonians ». Bull. London Math. Soc. 14 (1982) 1-15.

Audin, M. (1991). « The topology of torus actions on symplectic manifolds ». Progress in Mathematics, Birkaüser-Boston, (1991).

Bryant, R.L. (2001).« Bochner-Kähler metrics ». J. Amer. Math. Soc. 14 (2001) 623-715.

Calderbank, D.M.J. David, L. Gauduchon, P. (2002).« The Guillemin formula and Kähler metrics on toric symplectic manifolds ». Journal of Symplectic Geometry, Vol. 1 Num. 4 (2002), 767-784,.

Futaki, A. (1987). « The Ricci curvature of symplectic quotients of Fano manifolds ». Tôhoku Math. Journ. 39 (1987), 329-339.

Gallot, S. Hulin, D. Lafontaine (1987). « Riemannian Geometry ». Berlin; Springer-Verlag, New York (1987).

Gauduchon, P. (2006). « Calabi's extremal Kähler metrics : an elementary introduction ». Notes de cours de Paris 7.

Guillemin, V. (1994). « Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces ». Birkhäuser Boston, 1994.

Guillemin, V. Sternberg, S. (1982).« Convexity properties of the moment mapping ». Invent. Math. Vol. 67 (1982) 491-513.

Guillemin, V. Sternberg, S. (1984). « Symplectic techniques in physics ». Cambridge University Press, Cambridge 1984.

Kobayashi, S. Nomizu, K. (1996). « Foundations of Differential Geometry ». vol. 1, Wiley Classics Library Edition.

Lerman, E. Tolman, S. (1997). « Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties ». Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 349, Num 10, Oct. 1997, 4201-4230.

Mcduff, D. Salamon, D. (1995). « Introduction to symplectic topology ». Oxford : Clarendon Press 1995.

Narasimhan, R. (1985) « Analysis on real and complex manifolds ». Amsterdam : North-Holland 1985.

Thurston, W.P. (1997). « Three-Dimensional geometry and topology ». vol.1, Princeton University Press 1997.

Wells, R.O. (1980).« Differential analysis on complex manifolds ». New-York Springer 1980.