

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ASPECTS ALGÈBRIQUES DES POLYNÔMES DE
MACDONALD

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

YANNIC VARGAS

DÉCEMBRE 2009

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement n°8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, François Bergeron, pour m'avoir guidé et encouragé au sujet tout au long de la maîtrise. Son enthousiasme pour raconter des "histoires mathématiques" sera toujours apprécié. Aussi, je remercie à Christophe Hohlweg pour avoir co-dirigé ce mémoire et pour son appui généreux en tout moment.

Je remercie vivement tous les professeurs du LACIM et du CIRGET pour avoir fait de mon stage à l'UQAM une expérience très agréable. L'ambiance chaleureuse du LACIM a été très stimulante pendant toutes mes études à Montréal.

Pendant mon stage de maîtrise j'ai eu la chance de sympathiser et d'échanger des idées avec de nombreux étudiants et chercheurs. Je remercie très particulièrement Adolfo Rodriquez, pour son amitié et son enthousiasme contagieux pour les mathématiques.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Élisabeth Rancourt pour m'avoir aidé à rédiger ce mémoire. Avec ses parents Gilles et Manon, je les remercie pour tout son appui et sa gentillesse.

Enfin, j'ai une grande pensée pour mes parents Rodolfo et Lisbeth, ma soeur Nathalie et mon frère David, je leur témoigne ici toute mon affection.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
DÉFINITIONS DE BASE	3
1.1 Diagrammes de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	3
1.2 Partages et diagrammes de Ferrer	5
1.3 Compositions	7
1.4 Tableaux de Young	7
1.5 Monômes	9
1.6 Le groupe symétrique	10
CHAPITRE II	
THÉORIE DE LA REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS	15
2.1 Résultats principaux de la théorie des représentations	19
2.2 Caractere d'une représentation	19
2.3 L'espace des fonctions centrales	22
2.4 La représentation régulière	23
2.5 Représentations irréductibles du groupe symétrique	26
2.6 Nombres de Kostka	33
CHAPITRE III	
FONCTIONS SYMÉTRIQUES	37
3.1 Polynômes et fonctions symétriques	38
3.2 Fonctions antisymétriques	44
3.3 Fonctions de Schur	46
3.4 Substitution pléthystique	53
3.5 Transformée de Frobenius	57
3.6 Espaces des polynômes harmoniques	61
3.7 Représentations graduées	63

CHAPITRE IV	
POLYNÔMES DE MACDONALD	67
4.1 Introduction	67
4.2 Polynômes de Macdonald	68
4.3 L'opérateur ∇	72
CHAPITRE V	
REPRÉSENTATIONS DE GARSIA-HAIMAN	75
5.1 Représentations bigraduées	75
5.2 La conjecture de positivité de Macdonald	77
5.3 Déterminants de diagrammes	78
5.4 Modules de Garsia-Haiman	79
5.5 Espace des harmoniques diagonaux	81
CHAPITRE VI	
CERTAINS PROBLÈMES OUVERTS	85
6.1 L'opérateur nabla	85
6.2 Espaces fermés par opérateurs de dérivation	87
6.3 Espaces \mathbf{d} -harmoniques	89
6.4 Modules de Garsia-Haiman troués	91
6.5 Une base à 1000 dollars	97
BIBLIOGRAPHIE	99

RÉSUMÉ

L'introduction des polynômes de Macdonald (Macdonald, 1988) comme des vecteurs propres associés à certains opérateurs reliés à la physique et comme une généralisation de quelques-unes des bases les plus importantes de l'anneau des fonctions symétriques, a donné lieu à un nombre remarquable de résultats dans divers domaines de l'algèbre, la combinatoire et la géométrie algébrique, entre autres. Ce travail présente un des liens entre la théorie des fonction symétriques et la théorie des représentations des groupes, donné par les polynômes de Macdonald et les modules de Garsia-Haiman.

Mots clés : Combinatoire algébrique, combinatoire énumérative, fonctions symétriques, modules de Garsia-Haiman, polynômes de Macdonald, théorie des représentations.

INTRODUCTION

Un des blocs fondateurs de la théorie des fonctions symétriques moderne fut l'introduction, en 1988, des polynômes de Macdonald (Macdonald, 1988). Ceux-ci généralisaient la plupart des fonctions symétriques classiques. De plus, ils représentèrent aussi de nouveaux défis théoriques pour la combinatoire algébrique. Après quelques rénormalisations de sa définition originale, Macdonald présenta une décomposition des polynômes de Macdonald en termes de fonctions de Schur. Il énonça une conjecture voulant que les coefficients qui accompagnent les fonctions de Schur, a priori des fonctions rationnelles en deux paramètres, doivent être des polynômes à coefficients non négatifs. Ces polynômes sont maintenant désignés sous le nom de coefficients de Kostka-Macdonald puisqu'ils généralisent les nombres de Kostka et q -Kostka, largement étudiés dans le domaine de la combinatoire et de la théorie des représentations des groupes.

Dans les années 1990, ces développements constituèrent un des focus de la recherche dans les domaines de l'algèbre et la combinatoire algébrique. Parmi les approches qui surgirent, celle de Garsia et Haiman se démarqua. Ces derniers introduirent des modules bigradués qui, via l'isomorphisme de Frobenius, sont en connexion avec les polynômes de Macdonald. Près de dix ans plus tard, Haiman démontra la conjecture posée par Macdonald, connue aujourd'hui comme la (ex) conjecture de positivité de Macdonald, en utilisant des outils de la géométrie algébrique.

Le présent mémoire raconte en partie cette histoire, mais, surtout, se penche sur des développements récents d'un point de vue purement algébrique. Une version combinatoire de l'histoire en question peut être trouvée dans (Rodriguez, 2008).

Dans le premier chapitre, on introduit les définitions de bases qui seront fondamentales dans les chapitres suivants. Les notions de diagramme, partage d'un nombre, tableau

et permutation y sont discutées. Ensuite, dans le deuxième et troisième chapitre, on enchaîne avec une introduction à la théorie des représentations des groupes et des fonctions symétriques, respectivement. Bien que quelques-uns de ces résultats soient démontrés dans cette monographie, on dirige le lecteur vers les principales références de ces domaines pour la plupart des preuves. Le quatrième chapitre est entièrement dédié aux polynômes de Macdonald ainsi qu'à leurs caractéristiques de bases. Quant au cinquième chapitre, on y présente un exposé général des résultats de Garsia-Haiman sur l'étude des polynômes de Macdonald. Finalement, le sixième chapitre introduit une série de conjectures dérivant de la théorie générale et quelques essais formulés par Bergeron et al qui donnent une approche différente de la géométrie algébrique pour résoudre la conjecture de positivité de Macdonald.

CHAPITRE I

DÉFINITIONS DE BASE

Dans ce chapitre, on introduit des notions de base concernant les permutations et les partages, outils importants pour la démarche des prochains chapitres. Dans notre contexte, les partages sont définis via la notion de diagramme sur le plan positif, ce qui permettra à la fin de ce mémoire de réaliser des généralisations sur cet objet.

Dans ce qui suit, on dénote par $\mathbb{N} := \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ l'ensemble des nombres entiers non négatifs.

1.1 Diagrammes de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Définition 1.1.1. *Un diagramme est un sous-ensemble fini $\mathbf{d} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Les éléments de \mathbf{d} sont appelés les cases de \mathbf{d} . Si le diagramme \mathbf{d} a n cases, on dit que \mathbf{d} est un n -diagramme.*

Une case (a, b) d'un diagramme correspond à un carré unitaire dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, avec sommets $(a, b), (a, b + 1), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)$ (voir Figure 1.1).

Définition 1.1.2. *Soit \mathbf{d} un diagramme. Le diagramme conjugué de \mathbf{d} est l'ensemble*

$$\mathbf{d}' := \{(b, a) : (a, b) \in \mathbf{d}\}$$

Il est clair que l'opération de conjugaison est une involution, c'est-à-dire $(\mathbf{d}')' = \mathbf{d}$.

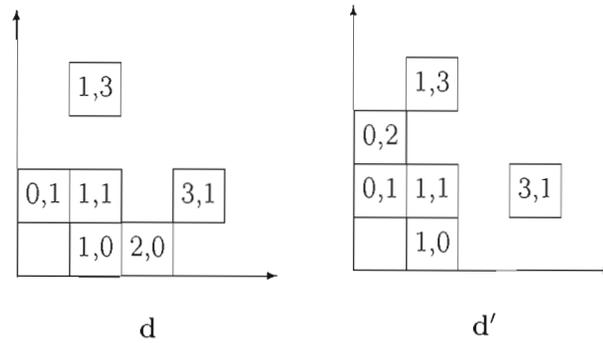


Figure 1.1 Représentation du diagramme $d = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 1)\}$ et de son diagramme conjugué d' .

Ordre sur les cases d'un diagramme

On peut ordonner les cases d'un diagramme de la façon suivante :

$$\boxed{(a_1, b_1) <_{\text{lex}} (a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad a_1 < a_2 \quad \text{ou} \quad [a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 < b_2]} \quad (1.1)$$

On appelle cet ordre l'**ordre lexicographique**.

Aussi, on peut considérer l'**ordre de lecture** :

$$\boxed{(a_1, b_1) <_{\text{lec}} (a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad b_1 > b_2 \quad \text{ou} \quad [b_1 = b_2 \quad \text{et} \quad a_1 < a_2]} \quad (1.2)$$

Exemple 1.1.1. Dans la figure 1.1, le diagramme d est décrit par l'ordre lexicographique. Une description par l'ordre de lecture est

$$(1, 3), (0, 1), (1, 1), (3, 1), (1, 0), (2, 0).$$

1.2 Partages et diagrammes de Ferrer

Définition 1.2.1. Soit n dans \mathbb{N} . Un *partage*¹ de n est une suite d'entiers $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ vérifiant :

- (1) $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r \geq 1$;
- (2) $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$.

On écrit $\mu \vdash n$ lorsque μ est un partage de n . La *longueur* $\ell(\mu)$ de μ est le nombre r . Si la suite d'entiers est nulle, on dénote par \emptyset le partage associé et on l'appelle *partage vide*.

On peut décrire les partages à l'aide de la notation exponentielle : si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ est un partage de n et r_m est le nombre de fois que le nombre m apparaît dans (μ_1, μ_2, \dots) , on écrit

$$\mu = 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots n^{r_n}.$$

Par exemple, si $(6, 3, 1, 1) \vdash 11$, alors $(6, 3, 1, 1) = 1^2 3^1 6^1$.

Diagramme associé à un partage

Tout partage $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ de n définit un diagramme sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mu = \{(a, b) : 0 \leq a \leq \ell(\mu), 0 \leq b \leq \mu_{a+1} - 1\}} \quad (1.3)$$

Par abus de notation, on dénotera par μ le diagramme obtenu du partage μ . Il est courant dans la littérature d'utiliser la terminologie de **diagramme de Ferrer** pour le diagramme d'un partage.

¹On dit aussi partition du nombre n .

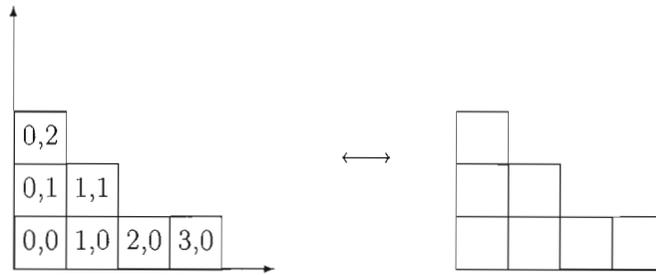


Figure 1.2 Le diagramme de Ferrer $\mu = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (0,2), (1,1)\}$ associé au partage $\mu = (4,2,1)$ et son diagramme de Ferrer.

Ordres sur les partages

On introduit des ordres entre partages qui seront considérés dans les chapitres suivants.

1. Ordre d'inclusion

Un partage λ est **contenu** dans le partage μ si leurs diagrammes associés satisfont $\lambda \subseteq \mu$, où \subseteq est l'inclusion par sous-ensembles. Par abus de notation, on dénote par \subseteq l'ordre d'inclusion sur les partages.

2. Ordre de dominance

On dit que le partage λ **domine** le partage μ si $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$, pour tout $k \geq 0$. On écrit $\lambda \preceq \mu$ lorsque λ domine μ .

3. Ordre lexicographique

On écrit $\lambda < \mu$ si la première différence non nulle $\mu_i - \lambda_i$ est positive.

Soit \mathbf{d} un diagramme. Dans les chapitres suivants nous considérerons le paramètre suivant :

$$n(\mathbf{d}) := \sum_{(i,j) \in \mathbf{d}} i. \quad (1.4)$$

1.3 Compositions

Définition 1.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une **composition** \mathbf{c} de n est une suite finie (c_1, c_2, \dots, c_k) d'entiers non-négatifs tels que

$$c_1 + \dots + c_k = n.$$

Si $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ est une composition de n on écrit $\mathbf{c} \models n$. Le nombre $|\mathbf{c}| := n$ est appelé la **taille** de \mathbf{c} , tandis que k est la **longueur** de \mathbf{c} , dénotée par $\ell(\mathbf{c})$. Les nombres c_1, c_2, \dots, c_k sont les **parties** de \mathbf{c} . On appelle **composition vide** celle dont son nombre de parties est $n = 0$. On dira que la composition \mathbf{c} est **positive** si ses parties sont tous des nombres entiers positifs non-nuls.

Exemple 1.3.1. Trois exemples de compositions du nombre 11 sont :

$$\mathbf{c}_1 = (3, 0, 3, 4, 0, 1) \quad , \quad \mathbf{c}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 5, 3, 0) \quad , \quad \mathbf{c}_3 = (4, 5, 2)$$

On trouve que :

$$\ell(\mathbf{c}_1) = 6 \quad , \quad \ell(\mathbf{c}_2) = 9 \quad , \quad \ell(\mathbf{c}_3) = 3.$$

La seule composition positive est \mathbf{c}_3 .

Partage associé à une composition

Étant donné $\mathbf{c} \models n$, on peut produire un partage de n en ordonnant de façon décroissante les parties non-nulles de \mathbf{c} . Cette procédure est bien définie car même si la longueur de \mathbf{c} est infinie, son nombre de parties non-nulles doit être fini puisque n est un nombre fini.

On dénote par $\widehat{\mathbf{c}}$ le partage obtenu à partir de \mathbf{c} et on l'appelle **partage dérivé** de \mathbf{c} .

Exemple 1.3.2. Les partages dérivés des compositions de l'exemple ci-dessus sont :

$$\widehat{\mathbf{c}}_1 = (4, 3, 3, 1) \quad , \quad \widehat{\mathbf{c}}_2 = (5, 3, 1, 1, 1) \quad , \quad \widehat{\mathbf{c}}_3 = (5, 4, 2).$$

1.4 Tableaux de Young

Si n est un entier non-négatif, on pose

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Définition 1.4.1. Soit $\mu \vdash k$. Un *tableau de Young* de forme μ et à valeur dans $[n]$ est une fonction injective

$$t : \mu \longrightarrow [n]. \quad (1.5)$$

Graphiquement, un tableau de Young est un diagramme de Ferrer construit à partir du partage sous-jacent tel que ses cases sont remplies avec des éléments de l'ensemble $[n]$.

Définition 1.4.2. Un tableau de Young $t : \mu \rightarrow [n]$ est dit *semi-standard* si les nombres placés dans ses cases sont en ordre croissant pour chaque ligne et strictement croissant pour chaque colonne, c'est-à-dire

$$t(a, b) \leq t(a + 1, b) \quad , \quad t(a, b) < t(a, b + 1).$$

Dans le cas où $\mu \vdash n$ et les nombres placés dans les cases de t sont en ordre strictement croissant pour chaque ligne et chaque colonne, on dit que t est un *tableau de Young standard*. Dans ce cas, on a :

$$n = \sum_i \mu_i,$$

$$t(a, b) < t(a + 1, b) \quad , \quad t(a, b) < t(a, b + 1).$$

On dénote par $\mathcal{SST}_\mu[n]$ (respectivement $\mathcal{ST}_\mu[n]$) l'ensemble des tableaux semi-standard (respectivement standards) de forme μ et à valeur dans $[n]$.

Définition 1.4.3. Soit t un tableau de Young. Le *contenu* $\alpha(t)$ de t est

$$\alpha(t) := 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots$$

où m_i est la multiplicité de l'entier i dans t .

Exemple 1.4.1. Pour le tableau t_2 de la figure 1.3, on a

$$\begin{aligned} \alpha(t_2) &= 1^0 2^0 3^3 4^1 5^1 6^2 7^0 8^1 9^0 10^1 \\ &= 3^3 4^1 5^1 6^2 8^1 10^1 \end{aligned}$$

Il est clair que si $t \in \mathcal{ST}_\mu$, alors $\alpha(t) = 1 2 3 \dots |\mu|$.

5			
1	6		
3	8		
4	11	3	7

t_1

10			
6	8		
4	6		
3	3	3	5

t_2

6			
3	9		
2	8		
1	4	5	7

t_3

Figure 1.3 Exemple de différents types de tableaux de forme $(4, 2, 2, 1)$. De gauche à droite : un tableau de Young à valeur dans $[12]$, un tableau semi-standard à valeur dans $[10]$ et un tableau standard à valeur dans $[9]$.

1.5 Monômes

Soit $\mathbf{x} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une famille de variables commutatives. Il sera important dans la démarche des chapitres suivants de travailler avec des monômes de l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ associés aux définitions décrites jusqu'à maintenant.

Monômes associés aux tableaux

Soit $t : \lambda \rightarrow [n]$ un tableau. Le **pois monomial** associé à t est

$$\mathbf{x}_t := \prod_{(a,b) \in \mu} x_{t(a,b)}. \quad (1.6)$$

Si le tableau t est standard, on définit son **pois monomial standard** associé comme étant

$$\mathbf{x}^t := \prod_{(a,b) \in \mu} x_{t(a,b)}^b. \quad (1.7)$$

Exemple 1.5.1. Pour le tableau t_3 de la figure 1.3, on a

$$\mathbf{x}_{t_3} = \prod_{i=1}^9 x_i \quad , \quad \mathbf{x}^{t_3} = x_2 x_8 x_3^2 x_9^2 x_6^3.$$

Monômes associés aux compositions

Si $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ est une composition, on lui associe le poids

$$\mathbf{x}^{\mathbf{c}} := \begin{cases} x_1^{c_1} \cdots x_k^{c_k} & \text{si } k \leq n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Cette notion peut être étendue aux partages, en les considérant comme des compositions positives décroissantes.

Exemple 1.5.2. Pour $\mathbf{c} = (0, 4, 1, 2, 0, 1, 0)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10})$ on a :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{c}} = x_2^4 x_3 x_4^2 x_6.$$

1.6 Le groupe symétrique

Définition 1.6.1. Soit $n \in \mathbb{Z}^+$. Une *permutation* d'un ensemble fini A est une bijection de A . L'ensemble des permutations de l'ensemble

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

est un groupe ayant comme produit la composition de fonctions. On l'appelle le **groupe symétrique** \mathfrak{S}_n .

L'ordre de \mathfrak{S}_n est $n!$. On représente toute permutation σ de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Une permutation σ est dite **cyclique** s'ils existent $a_1, a_2, \dots, a_r \in [n]$ différents tels que σ envoie a_1 vers a_2 , puis a_2 vers a_3 , ..., a_{r-1} vers a_r et enfin a_r vers a_1 , tandis que les $n - r$ éléments restants de l'ensemble $[n]$ sont fixés par σ . On écrit

$$\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r).$$

Avec cette notation on a

$$(a_1 a_2 \cdots a_r) = (a_2 a_3 \cdots a_r a_1) = \dots$$

Le nombre r est la **longueur du cycle**. On appelle σ un **r-cycle**. L'ordre d'un r-cycle est donc simplement égal à r . On appelle **transposition** une permutation à 2-cycle.

En général, la composition de permutations n'est pas commutative. Par contre, elle l'est entre **cycles disjoints**, c'est-à-dire deux cycles $(a_1 a_2 \dots a_r)$ et $(b_1 b_2 \dots b_s)$ tels que $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \emptyset$.

Décomposition des permutations

Il existe plusieurs façons de décomposer une permutation. Ces décompositions peuvent être uniques ou non. On présente ici deux décompositions classiques.

1. Par transposition

Pour toute permutation σ , il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ transpositions telles que $\sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_i$. Dans cette décomposition, les transpositions σ_i et le nombre m ne sont pas nécessairement uniques. Or, la **parité** du nombre de transpositions demeure la même dans chaque décomposition en produit de transpositions. On dit que σ est **paire** (respectivement **impaire**) s'il y a un nombre pair (respectivement impair) de transpositions nécessaires pour représenter cette permutation. On appelle **signature** de σ l'application

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire;} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire.} \end{cases}$$

2. Par cycles disjoints

Toute permutation peut s'écrire de façon unique comme produit de cycles disjoints. Pour chaque orbite de σ dans \mathfrak{S}_n , on construit un cycle en suivant l'ordre de succession des éléments de l'orbite par itération de σ . Ainsi, $\sigma = \prod_{i=1}^r \sigma_i$ où chaque σ_i est un λ_i -cycle, avec λ_i égal au nombre d'éléments de l'orbite associée à σ_i . Puisque les cycles commutent entre eux, on peut supposer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 1$. On dénote la séquence

$$\tau(\sigma) := (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

et on l'appelle le **type cyclique** de la permutation σ . Si \mathcal{O} dénote l'ensemble

des orbites, par l'équation de classes provenant de la théorie des groupes, on obtient :

$$n = |[n]| = \sum_{X \in \mathcal{O}} |X| = \sum_{i=1}^r \lambda_i.$$

Cette dernière observation permet de démontrer le résultat suivant :

Lemme 1.6.1. *Le type cyclique d'une permutation de \mathfrak{S}_n est un partage de n .*

Exemple 1.6.1. Considérons la permutation de \mathfrak{S}_6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

On peut écrire σ de façon unique comme la décomposition en cycles disjoints suivante :

$$\sigma = (2 \ 5 \ 6) (1 \ 3) (4)$$

et ainsi le type cyclique de σ est $(3, 2, 1) \vdash 6$. On peut aussi décomposer σ comme les produits de transpositions :

$$\begin{aligned} \sigma &= (2 \ 5) (5 \ 6) (1 \ 3) \\ &= (2 \ 6) (5 \ 6) (2 \ 6) (1 \ 3) (5 \ 6). \end{aligned}$$

La signature de σ est donc $\tau(\sigma) = (-1)^3 = (-1)^5 = -1$.

Définition 1.6.2. *Soient $\sigma, \theta \in \mathfrak{S}_n$. La conjuguée de σ par θ est la permutation $\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1}$. L'ensemble des conjuguées de σ est*

$$C(\sigma) = \{\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1} \mid \theta \in \mathfrak{S}_n\}.$$

On l'appelle la **classe de conjugaison** de σ . On définit le **centralisateur** de σ comme l'ensemble

$$Z(\sigma) := \{\theta \in \mathfrak{S}_n : \theta \circ \sigma \circ \theta^{-1} = \sigma\}.$$

La conjuguée d'un r -cycle par toute permutation reste un r -cycle. Plus précisément, si $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)$ et $\theta \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\theta \sigma \theta^{-1} = (\theta(a_1) \theta(a_2) \dots \theta(a_r)).$$

Pour le cas général d'une permutation π , un élément θ de $C(\pi)$ est tel que sa décomposition en produit de cycles disjoints a la même structure que celle de π . Plus précisément, on a le résultat :

Théorème 1.6.1. *Deux permutations sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si elles ont le même type cyclique. En plus, si σ est une permutation de \mathfrak{S}_n de la forme $(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, n^{r_n})$ et $z_\sigma := |Z(\sigma)|$ on a*

$$z_\sigma = 1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!$$

Donc, la classe de conjugaison de type $(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, n^{r_n})$ a $n!/z_\sigma$ éléments.

Exemple 1.6.2. Les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_4 sont :

σ	$C(\sigma)$	$ C(\sigma) $
1^4	$\{1\}$	$\frac{4!}{1^4 4!} = 1$
$2 1^2$	$\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$	$\frac{4!}{1^2 2! 2! 1!} = 6$
2^2	$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$	$\frac{4!}{2^2 2!} = 3$
$3 1$	$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$	$\frac{4!}{1^1 1! 3! 1!} = 8$
4	$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$	$\frac{4!}{4! 1!} = 1$

La notion de tableau peut être généralisée pour n'importe quel diagramme.

Définition 1.6.3. *Soit \mathbf{d} un diagramme. Un **tableau** de forme \mathbf{d} à valeurs dans $[n]$ est une fonction injective $t : \mathbf{d} \rightarrow [n]$.*

Définition 1.6.4. *Soit ν un partage et soient μ et λ deux partages tels que $\lambda \subseteq \mu$. Considérons les tableaux associés à chacun de ces partages. Le tableau ν est dit **tableau gauche** si $\nu \cup \mu = \lambda$. On écrit $\nu = \mu/\lambda$. Si $\lambda \not\subseteq \mu$, nous posons $\mu/\lambda = \emptyset$.*

Les notions de tableau semi-standard et tableau standard se transposent naturellement aux contextes de tableaux génériques et tableaux gauches.

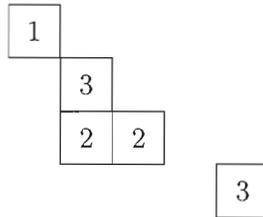


Figure 1.4 Un tableau semi-standard gauche $5321/411$ à valeur dans $[3]$.

CHAPITRE II

THÉORIE DE LA REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts et résultats principaux de la théorie des représentations des groupes finis. Un des concepts important à voir dans ce chapitre sont la représentation régulière et les nombres de Kostka, dont des généralisations de ces deux objets feront partie importante des prochains chapitre. Des preuves plus détaillées de la plupart des résultats de ce chapitre peuvent êtres trouvées dans (James, Liebeck, 2001) et (Sagan 2001).

Définition 2.0.5. *Soit G un groupe fini. Une **représentation** de G sur \mathbb{C} est un couple (\mathcal{V}, ρ) constitué d'un \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{V} de dimension finie et d'un homomorphisme*

$$\rho : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$$

*où $GL(\mathcal{V})$ est le groupe des transformations linéaires inversibles de \mathcal{V} . On dit que \mathcal{V} est l'**espace de la représentation** et que la dimension de \mathcal{V} est le **degré de la représentation**.*

On considérera toujours des espaces vectoriels \mathcal{V} de dimension finie. Lorsque ρ sera donnée, par abus de langage, on fera référence à \mathcal{V} comme la représentation (\mathcal{V}, ρ) de G .

Définition 2.0.6. *Un homomorphisme ψ entre deux représentations (\mathcal{V}, ρ_1) et (\mathcal{W}, ρ_2) de G est une transformation linéaire $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ telle que*

$$\psi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \psi$$

pour tout $g \in G$. Si ψ est bijective, on est en présence d'un isomorphisme de représentations.

Chaque représentation (\mathcal{V}, ρ) de G induit une **action linéaire**¹ $\theta : G \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ en posant

$$\theta(g, v) := \rho(g)(v).$$

Il est usuel de dénoter $\theta(g, v)$ par $g \cdot v$.

Définition 2.0.7. *Soit \mathcal{V} un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On dit que \mathcal{V} est un G -module s'il existe une action linéaire de G sur \mathcal{V} .*

Ainsi, toute représentation (\mathcal{V}, ρ) induit une structure de G -module sur \mathcal{V} . Réciproquement, si \mathcal{V} est un G -module, on peut définir une représentation (\mathcal{V}, ρ) de G en posant $\rho(g)(v) := g \cdot v$, pour tout $v \in \mathcal{V}$ et $g \in G$. Donc, les concepts de représentations de groupes et de modules sur un groupe sont équivalents. Dans ce qui suit, on utilisera ces deux définitions de manière interchangeable.

¹C'est-à-dire, une fonction $\theta : G \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ qui satisfait

$$\theta(e, v) = v,$$

$$\theta(g, \lambda v + \beta w) = \lambda \theta(g, v) + \beta \theta(g, w),$$

$$\theta(gh, v) = \theta(g, \theta(h, v)),$$

pour tout $g, h \in G$ et pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Exemple 2.0.3. On décrit ci-dessous des exemples classiques de représentations.

1. L'homomorphisme $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$, défini par $\rho(g) := Id$ pour tout $g \in G$, où Id est la fonction identité, est une représentation. Si $\dim(\mathcal{V}) = 1$, alors ρ est appelée la **représentation triviale** de G .
2. On construit une représentation (\mathbb{C}, ρ) de \mathfrak{S}_n , dite **représentation alternée**, en posant $\rho(\sigma) := \text{sgn}(\sigma)$.
3. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini et \mathfrak{S}_X l'ensemble des permutations de X . Une **action** de G sur X est un homomorphisme de groupes

$$\theta : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X.$$

Par abus de notation, on dénote $g \cdot x$ l'image de x par $\theta(g)$.

Considérons $\mathbb{C}X$ l'espace vectoriel engendré par X sur \mathbb{C} :

$$\mathbb{C}X := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\} \quad (2.1)$$

On définit une représentation $(\mathbb{C}X, \text{perm})$ de G en posant

$$\text{perm}(g) \left(\sum_{x \in X} \lambda_x x \right) := \sum_{x \in X} \lambda_x (g \cdot x) \quad (2.2)$$

pour tout g dans G . On appelle cette représentation la **représentation par permutation** associée à X . Puisque $\mathbb{C}X \simeq \mathbb{R}^n$, le degré de cette représentation est n .

Définition 2.0.8. *Un sous-espace G -invariant d'un G -module \mathcal{V} est un sous-espace \mathcal{U} tel que $G \cdot \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$. On peut considérer l'espace \mathcal{U} comme une représentation lui-même, en utilisant la restriction $\rho|_{\mathcal{U}} : G \rightarrow GL(\mathcal{U})$ définie comme*

$$\rho|_{\mathcal{U}}(g)(u) = \rho(g)(u).$$

Une paire $(\mathcal{U}, \rho|_{\mathcal{U}})$ est dite une **sous-représentation** de la représentation (\mathcal{V}, ρ) .

Il y a plusieurs façons d'obtenir une représentation de G à partir de deux représentations données.

Définition 2.0.9. Soient (\mathcal{V}, ρ_1) et (\mathcal{W}, ρ_2) deux représentations de G . On définit deux nouvelles représentations de G comme suit :

1. La **somme directe** $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow GL(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$ définie par

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g),$$

$$\text{où } (\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1 + v_2) = \rho_1(g)v_1 + \rho_2(g)v_2.$$

2. Le **produit tensoriel** $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow GL(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$ défini par

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

$$\text{où } (\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2).$$

Étant donné une représentation (\mathcal{V}, ρ) de G et un sous-groupe H de G , on peut obtenir deux représentations en utilisant les notions suivantes.

Définition 2.0.10. La **représentation restreinte** de \mathcal{V} sur H est la représentation $\mathcal{V} \downarrow_H^G := (\mathcal{V}, \rho')$, où $\rho' := \rho|_H$ est la restriction au sous-espace H .

L'ensemble

$$\text{Ind}_H^G \mathcal{V} := \{f : G \rightarrow \mathcal{V} \mid f(hg) = \rho(h)f(g), \forall g \in G, \forall h \in H\}.$$

est un G -module avec l'action

$$g \cdot f : G \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$(g \cdot f)(x) := f(xg)$$

pour tout $g, x \in G$. On l'appelle la **représentation induite** $\mathcal{V} \uparrow_H^G$ de H vers G .

2.1 Résultats principaux de la théorie des représentations

Définition 2.1.1. Une représentation (\mathcal{V}, ρ) de G est dite *irréductible* si \mathcal{V} n'a pas de sous-espace G -invariant distinct à l'espace nul et à \mathcal{V} . La représentation est *complètement réductible* si \mathcal{V} s'écrit comme une somme directe de sous-espaces G -invariants irréductibles.

Soit \mathcal{V} un G -module, Un des résultats les plus importants de cette théorie est le théorème de décomposition canonique d'une représentation en sous-représentations irréductibles :

Théorème 2.1.1 (Maschke). Toute représentation \mathcal{V} d'un groupe fini G se décompose de façon unique, sauf isomorphisme, comme :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{V}_i^{\oplus m_i} \quad (2.3)$$

où $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ sont des représentations irréductibles distinctes de G et $\mathcal{V}_i^{\oplus m_i}$ dénote la somme directe

$$\underbrace{\mathcal{V}_i \oplus \mathcal{V}_i \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_i}_{m_i \text{ fois}}.$$

De plus, les multiplicités m_i sont uniques.

2.2 Caractère d'une représentation

Toute représentation peut être décrite sous forme matricielle. En effet, si \mathcal{V} est un espace vectoriel de dimension n et on choisit une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pour \mathcal{V} , la représentation (\mathcal{V}, ρ) peut être donnée comme suit : pour chaque $g \in G$, on considère la matrice inversible

$$R_g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

où les $g_{i,j}$ sont des scalaires uniques tels que

$$g \cdot v_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j} v_i.$$

Chaque matrice $\{R_g\}_{g \in G}$ satisfait

$$\det(R_g) \neq 0 \quad , \quad R_{gh} = R_g \cdot R_h$$

pour tout $g, h \in G$. Inversement, les données de matrices inversibles R_g vérifiant les propriétés ci-dessus définissent une représentation linéaire ρ de G dans \mathcal{V} .

Exemple 2.2.1. Considérons l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 avec base canonique $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, où

$$v_1 = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad v_2 = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad v_3 = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad v_4 = (0, 0, 0, 1).$$

On définit une action $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ en posant

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}).$$

Calculons les matrices de permutations des éléments $g := (13)$ et $h = (124)$. On a :

$$g \cdot v_1 = v_3 \quad , \quad g \cdot v_2 = v_2 \quad , \quad g \cdot v_3 = v_1 \quad , \quad g \cdot v_4 = v_4.$$

$$h \cdot v_1 = v_4 \quad , \quad h \cdot v_2 = v_1 \quad , \quad h \cdot v_3 = v_3 \quad , \quad h \cdot v_4 = v_2.$$

Alors :

$$R_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.2.1. Soit (\mathcal{V}, ρ) une représentation de G . Le *caractère* de la représentation (\mathcal{V}, ρ) est la fonction $\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\chi_\rho(g) = \text{trace}(R_g)$$

pour tout $g \in G$.

Exemple 2.2.2. Dans cet exemple, on calcule les caractères des représentations définies dans l'exemple (2.0.3).

- Puisque la représentation identité et la représentation alternée sont de degré 1, alors leurs caractères sont précisément $\chi_{\text{Id}} = 1$ et $\chi_{\text{alt}}(-) = \text{sgn}(-)$.
- Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble muni d'une action $G \times X \rightarrow X$ et soit $\mathcal{V} = \mathbb{C}X$ le $\mathbb{C}G$ -module de permutation correspondant. Alors, X est une base de \mathcal{V} . Considérons la matrice de l'opérateur linéaire $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ($v \mapsto g \cdot v$) par rapport à la base X . L'entrée (i, i) de cette matrice est différente de zéro si et seulement si $g \cdot x_i = x_i$. Donc cette entrée est égale à 1 au cas où elle est non-nulle. On appelle ces matrices **matrices de permutation**. Ainsi, $\chi_{\mathcal{V}}(g)$ est égale au nombre de points fixés par g dans X .

Dans l'exemple (2.2.1), on constate que les caractères des matrices de permutation de $(12)(3)(4)$ et $(134)(2)$ sont bien 2 et 1.

Propriétés de base des caractères

Soit (\mathcal{V}, ρ) une représentation de G de degré n et soit χ_ρ son caractère. On a les propriétés suivantes :

1. $\chi_\rho(e) = n$, où e est l'élément neutre du groupe G .
2. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$, où \bar{z} désigne le conjugué du nombre complexe z .
3. Soient $g, h \in G$. Si g et h sont conjugués alors $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$.

2.3 L'espace des fonctions centrales

Définition 2.3.1. Une *fonction centrale* du groupe G est une fonction $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(g) = \varphi(h)$, pour tout g et h dans la même classe de conjugaison.

On dénote $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions centrales de G . Notons qu'on peut écrire

$$\mathcal{C}(G) = \{\varphi : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(g) = \varphi(hgh^{-1}), \forall g, h \in G\}$$

par un simple changement de variables. Il est facile de prouver que la somme et le produit de fonctions des classes sont fermés. Donc, $\mathcal{C}(G)$ est une algèbre.

Une fonction φ est constante si et seulement si elle est constante sur chacune des classes de conjugaisons. Ainsi, φ est déterminé par ses valeurs c_i sur les classes C_i , lesquelles peuvent être choisies arbitrairement. Une base naturelle pour $\mathcal{C}(G)$ se compose donc des fonctions $\{1_i\}_{i=1}^k$, où k est le nombre de classes de conjugaison et $1_i(c_j) = \delta_{i,j}$ pour $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ un ensemble de représentants des classes. On a donc démontré le résultat suivant

Proposition 2.3.1. La dimension de $\mathcal{C}(G)$ est égale au nombre de classes de conjugaison de G .

Le caractère comme fonction centrale

On introduit sur l'algèbre des fonctions centrales un produit scalaire défini par

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)}. \quad (2.4)$$

La propriété 3 des caractères énoncés ci-dessus implique que les caractères sont des fonctions centrales. On dit que le caractère associé à une représentation est **irréductible** si la représentation est irréductible. Un résultat classique de la théorie des caractères affirme que l'ensemble des caractères irréductibles de G forment une base orthonormale de l'espace $\mathcal{C}(G)$ pour le produit scalaire défini ci-dessus. Or, on a vu que la dimension de $\mathcal{C}(G)$ est égal aux nombres de classes de conjugaisons de G . On a ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 (Classique). *Le nombre de classes de conjugaison de G est égal au nombre de caractères irréductibles de G (à équivalence près).*

Caractères et décomposition des représentations

Théorème 2.3.2 (Classique). *Soit (\mathcal{V}, ρ) une représentation d'un groupe fini G . Considérons la décomposition*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{V}_i^{\oplus m_i} \quad (2.5)$$

de \mathcal{V} comme une somme de représentations irréductibles de G donné par le théorème de Maschke. Soient $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ les caractères associés aux représentations $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$. Alors :

1. $\chi_\rho = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \dots + m_k\chi_k$.
2. $m_i = \langle \chi_\rho, \chi_i \rangle$.
3. $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$.
4. Le caractère χ_λ est irréductible si et seulement si $\langle \chi_\rho, \chi_\lambda \rangle = 1$.
5. Soit ϕ une représentation de G . Alors, ϕ et ρ sont isomorphes si et seulement si $\chi_\phi = \chi_\rho$.

Donc chaque représentation (\mathcal{V}, ρ) de G est déterminé par son caractère.

2.4 La représentation régulière

Considérons l'action du groupe G sur lui-même définie par

$$g \cdot h := gh.$$

Posons $\mathbb{C}[G] := \mathbb{C}G$. On peut définir une multiplication entre les vecteurs de cet espace en posant :

$$\sum_{g \in G} a_g g \cdot \sum_{g' \in G} b_{g'} g' := \sum_{h \in G} c_h h$$

avec $c_h = \sum_{g,g'} a_g b_{g'}$, où les indices de cette somme sont des éléments de G tels que $gg' = h$. Cet espace vectoriel a donc une structure d'algèbre connue classiquement comme l'**algèbre du groupe** G sur \mathbb{C} .

Posons reg l'homomorphisme perm considéré sur $X = G$:

$$\text{reg} := \text{perm} : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}[G]). \quad (2.6)$$

On appelle

$$\mathcal{R} := (\mathbb{C}[G], \text{reg})$$

la **représentation régulière** de G .

Puisque seul l'élément identité e de G fixe tout les points de $\mathbb{C}[G]$, en vertu de l'exemple (2.2.2), on obtient :

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & , \text{ si } g = e; \\ 0 & \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

En général, si $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i \mathcal{V}_i^{\otimes m_i}$ est une décomposition de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ en modules irréductibles alors :

$$m_i \stackrel{(*)}{=} \langle \chi_{\text{reg}}, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{reg}}(g) \chi_i(g^{-1}) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{|G|} \chi_{\text{reg}}(e) \chi_i(e) = \dim(\mathcal{V}_i),$$

où l'égalité $(*)$ provient du théorème (2.3.2) et $(**)$ est dû à l'équation (2.7). On a donc démontré une partie du théorème suivant.

Théorème 2.4.1 (Classique). *La représentation régulière d'un groupe fini G contient toutes les représentations irréductibles de G (à isomorphisme près). Chaque représentation irréductible \mathcal{V} de G apparaît $\dim(\mathcal{V}_i)$ fois dans \mathcal{R} . En plus, si d_1, d_2, \dots, d_k sont les dimensions des représentations irréductibles de G , alors :*

$$\sum_{i=1}^k d_i^2 = |G|. \quad (2.8)$$

Table de caractères

La **table de caractères** d'un groupe G est un tableau dont les rangées sont indexées par les caractères irréductibles et les colonnes par les classes de conjugaison de G . Cette table est carrée puisque le nombre de classes de conjugaison est le même que celui des représentations irréductibles non-isomorphes (ce résultat sera démontré dans les sections suivantes). Par convention, la première ligne de la table de caractère correspond au caractère trivial, tandis que la première colonne correspond à la classe de l'identité du groupe $\{e\}$.

Exemple 2.4.1. Calculons la table de caractères pour \mathfrak{S}_3 . Puisque les classes de conjugaison sont caractérisées par le type cyclique des permutations, on peut choisir $\{(1), (12), (123)\}$ comme ensemble de représentants des classes. Posons χ_1, χ_2, χ_3 les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_3 .

	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Figure 2.1 Table de caractères de \mathfrak{S}_3 .

Les représentations triviales et alternantes sont en général des représentations irréductibles non-isomorphes. En effet :

$$\begin{aligned} \langle \text{Id}, \text{sgn} \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_3|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \text{Id}(\sigma) \overline{\text{sgn}(\sigma)} \\ &= \frac{1}{6} (\text{sgn}(\text{id}) + \text{sgn}(12) + \text{sgn}(13) + \text{sgn}(23) + \text{sgn}(123) + \text{sgn}(132)) \\ &= \frac{1}{6} (1 + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)^2 + (-1)^2) = 0 \neq 1, \end{aligned}$$

et ainsi les représentations triviales et alternantes ne sont pas isomorphes en vertu du théorème (2.3.2). Posons donc $\chi_1 = \text{Id}$ et $\chi_2 = \text{sgn}$. Par le théorème (2.4.1), on a $6 = \sum_i d_i^2$, où d_i est le degré de la représentation irréductible χ_i . Puisque χ_1 et

χ_2 ont degré 1, on doit avoir que

$$6 = 1^2 + 1^2 + d^2.$$

Ceci implique que le caractère irréductible χ_3 doit être de degré 2. La représentation χ_3 est obtenue à partir de l'action de \mathfrak{S}_3 sur l'espace

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Une base pour cet espace est $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$. Ainsi $\chi_3((1)) = \dim(\mathcal{V}) = 2$. Appelons $\sigma_2 := (12)$ et $\sigma_3 := (123)$. Alors :

$$\begin{cases} \sigma_2 \cdot (1, -1, 0) = (-1, 1, 0) = -1(1, -1, 0) + 0(1, 0, -1); \\ \sigma_2 \cdot (1, 0, -1) = (0, 1, -1) = -1(1, -1, 0) + 1(1, 0, -1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_3 \cdot (1, -1, 0) = (0, 1, -1) = -1(1, -1, 0) + 1(1, 0, -1); \\ \sigma_3 \cdot (1, 0, -1) = (-1, 1, 0) = -1(1, -1, 0) + 0(1, 0, -1). \end{cases}$$

Donc

$$\chi_3(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_3(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la troisième ligne de la figure (2.1).

2.5 Représentations irréductibles du groupe symétrique

Dans cette section on construira toutes les représentations irréductibles \mathcal{S}^λ du groupe symétrique. Typiquement, il existe deux façons de construire ces représentations irréductibles :

- la méthode de Frobenius-Young, où les modules \mathcal{S}_λ apparaissent comme les idéaux à gauche minimaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$; et
- la méthode de Specht qui, elle, construit explicitement les modules \mathcal{S}_λ comme des sous-modules de l'espace \mathcal{M}^μ . Cette dernière nous servira à décrire les \mathfrak{S}_n -modules irréductibles.

Une description détaillée de ces méthodes peuvent être trouvés dans (Macdonald, 1995), (Sagan 2001). Pour une description très complète de ces méthodes et autres, voir (Musili, 1993).

Nous aurons besoin de quelques définitions de base avant d'arriver à la construction de Specht.

Action sur les tableaux bijectifs

Dans cette section, on introduit la notion de tableaux bijectifs à l'aide de laquelle on construira les \mathfrak{S}_n -modules irréductibles de \mathfrak{S}_n .

Définition 2.5.1. Soit \mathbf{d} un n -diagramme. Un *tableau bijectif* est une fonction $t : \mathbf{d} \rightarrow [n]$ bijective.

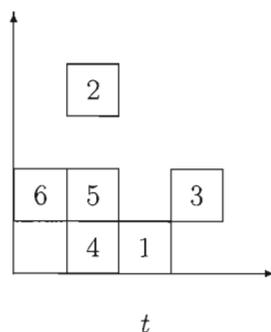


Figure 2.2 Un tableau bijectif construit à partir du diagramme $\mathbf{d} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 1)\}$.

On rappelle qu'on peut associer à un tableau t le monôme

$$\mathbf{x}^t := \prod_{(a,b) \in \mathbf{d}} x_{i(a,b)}^b.$$

Le groupe symétrique agit sur ces monômes par l'action

$$\sigma \cdot \mathbf{x}^t := \prod_{(a,b) \in \mathbf{d}} x_{\sigma(t(a,b))}^b$$

Soit \mathbf{d} un n -diagramme et soit t un tableau bijectif de forme \mathbf{d} . Le groupe symétrique agit sur les tableaux bijectifs par l'action

$$(\sigma \cdot t)(c) := \sigma(t(c)) \quad (2.9)$$

pour toute case $c \in \mathbf{d}$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Il est clair que $\sigma \cdot \mathbf{x}^t = \mathbf{x}^{\sigma \cdot t}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Donc, l'action de \mathfrak{S}_n sur les tableaux bijectifs est compatible avec l'action sur les monômes.

Définition 2.5.2. *Étant donné un partage μ de n , on définit le \mathfrak{S}_n -module*

$$\mathcal{M}^\mu := \mathbb{C}[\mathbf{x}^t : t \text{ est un tableau bijectif de forme } \mu.] \quad (2.10)$$

Soit t_μ le tableau bijectif fixé de forme μ défini comme

$$t_\mu(a, b) := \mu_1 + \dots + \mu_{b-1} + a + 1$$

pour chaque $(a, b) \in \mu$. On appelle ce tableau le **tableau de lecture par lignes** de μ . Graphiquement, ce tableau se construit en lisant les cases du diagramme de gauche à droite et de bas en haut, tout en remplissant chaque case par son nombre assigné selon l'ordre suivi. En guise d'exemple, le tableau de lecture du partage $\mu = (4, 3, 1)$ est décrit dans la figure 2.3. On peut démontrer que pour

10				
6	7	8	9	
1	2	3	4	5

Figure 2.3 Tableau de lecture du partage $(4,3,1)$.

tout monôme \mathbf{x}^t dans \mathcal{M}^μ il existe une permutation σ tel que $\sigma \cdot \mathbf{x}^{t_\mu} = \mathbf{x}^t$. Ainsi,

on peut réécrire² le module \mathcal{M}_μ comme

$$\boxed{\mathcal{M}^\mu = \mathcal{L}[\sigma \cdot \mathbf{x}^{t_\mu} : \sigma \in \mathfrak{S}_n]} \quad (2.11)$$

où, en général, $\mathcal{L}[A]$ le sous-espace des combinaisons linéaires finies d'éléments de A , pour tout sous-ensemble A de \mathbb{Q} .

Propriétés de l'espace \mathcal{M}^μ

1. \mathcal{M}^μ est un \mathfrak{S}_n -module **cyclique**, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathcal{M}^\mu$ tel que

$$\mathcal{M}^\mu = \mathcal{L}[\sigma \cdot v : \sigma \in \mathfrak{S}_n].$$

Ceci vient de l'expression (2.11).

2. Si $\mu = (n)$, alors $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{L}[1] = \mathbb{C}$ et donc $\dim(\mathcal{M}^{(n)}) = 1$.
3. Pour $\mu = (1^n)$, alors $\mathcal{M}^{(1^n)} = \mathcal{L}[\sigma \cdot \mathbf{x}^\delta : \sigma \in \mathfrak{S}_n]$, où $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. Une base pour cet espace est l'ensemble $\{\sigma \cdot \mathbf{x}^\delta\}_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$, d'où

$$\dim(\mathcal{M}^{(1^n)}) = n!$$

4. Plus généralement, si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \vdash n$ on a

$$\dim(\mathcal{M}^\mu) = \frac{n!}{\mu_1! \cdots \mu_k!}$$

5. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\lambda = \tau(\sigma)$ sont type cyclique. Si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ posons ρ^μ la représentation associé au \mathfrak{S}_n -module \mathcal{M}^μ . Alors

$$\rho^\mu(\sigma)(\mathbf{x}^t) = \sigma \cdot \mathbf{x}^t = \mathbf{x}^{\sigma \cdot t}$$

²Le choix du tableau de lecture pour décrire l'espace \mathcal{M}^μ est purement esthétique.

pour tout \mathbf{x}^t dans \mathcal{M}^μ . Donc, le caractère associé à $\rho^\mu(\sigma)$ doit être égal au nombre de points fixés par l'action de σ sur tous les monômes \mathbf{x}^t où t est un tableau de Young standard de forme μ . Or \mathbf{x}^t est laissé fixé par σ si et seulement si chaque cycle de σ agit sur une seule ligne du tableau t .

Si on pose

$$\lambda^k := \{\lambda_j : \text{les éléments du cycle } \lambda_j \text{ se trouvent dans la ligne } \mu_k\} \quad (2.12)$$

alors le caractère de $\rho^\mu(\sigma)$ est égal au nombre de partitions ordonnés $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m)$ tels que

$$\bigsqcup_i \lambda^i = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{a \in \lambda^i} a \vdash \mu_i, \forall i. \quad (2.13)$$

Cette description de ρ^μ sera utile plus tard pour décrire les fonctions symétriques de Schur d'un point de vue algébrique.

Sous-groupes de Young

Définition 2.5.3. Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ un partage de n . Le *sous-groupe de Young* de \mathfrak{S}_n associé à μ est

$$\mathfrak{S}_\mu := \mathfrak{S}_{\{1, 2, \dots, \mu_1\}} \times \mathfrak{S}_{\{\mu_1+1, \mu_1+2, \dots, \mu_1+\mu_2\}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\{n-\mu_r+1, n-\mu_r+2, \dots, n-\mu_r+\mu_r\}}.$$

En général, les groupes $\mathfrak{S}_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)}$ et $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \mathfrak{S}_{\mu_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_r}$ sont isomorphes. Soit t un diagramme bijectif. Une **ligne** (respectivement **colonne**) du tableau t est un ensemble de cases placées sur le même axe horizontal (respectivement vertical). On utilisera les ordres de lecture et lexicographique pour ordonner les lignes et colonnes.

Exemple 2.5.1. Dans la figure (2.2), les ensemble ligne et colonne sont :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{2\} \quad , \quad R_2 = \{3, 5, 6\} \quad , \quad R_3 = \{1, 4\} \\ C_1 &= \{6\} \quad , \quad C_2 = \{2, 4, 5\} \quad , \quad C_3 = \{1\} \quad , \quad C_4 = \{3\}. \end{aligned}$$

Définition 2.5.4. Soit t un tableau bijectif. Soient R_1, R_2, \dots, R_l ses ensembles lignes et C_1, C_2, \dots, C_k ses ensembles colonnes. Les sous-groupes de Young

$$R_t := \mathfrak{S}_{R_1} \times \mathfrak{S}_{R_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{R_l}$$

$$C_t := \mathfrak{S}_{C_1} \times \mathfrak{S}_{C_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{C_k}$$

sont appelés les *stabilisateurs de lignes* et *stabilisateur de colonnes*, respectivement.

Plus précisément, R_t (resp. C_t) est le sous-groupe des permutations de \mathfrak{S}_n qui fixent les lignes (resp. colonnes) du tableau bijective t .

Exemple 2.5.2. Les stabilisateurs de lignes et de colonnes du diagramme de la figure 2.2 sont

$$R_t = \mathfrak{S}_{\{2\}} \times \mathfrak{S}_{\{3,5,6\}} \times \mathfrak{S}_{\{1,4\}}$$

$$C_t = \mathfrak{S}_{\{6\}} \times \mathfrak{S}_{\{2,4,5\}} \times \mathfrak{S}_{\{1\}} \times \mathfrak{S}_{\{3\}}.$$

Les stabilisateurs de lignes et colonnes d'un tableau satisfont

$$R_{\sigma \cdot t} = \sigma R_t \sigma^{-1} \quad , \quad C_{\sigma \cdot t} = \sigma C_t \sigma^{-1} \quad (2.14)$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Soit $\mu \vdash n$. Pour chaque tableau bijectif t de forme μ , on définit le polynôme

$$\Delta_t(\mathbf{x}) := \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma \cdot \mathbf{x}^t \quad (2.15)$$

Exemple 2.5.3. Pour le tableau t de lecture de la figure (2.2), on

$$\Delta_t(\mathbf{x}) = (x_1 - x_6)(x_1 - x_{10})(x_6 - x_{10})(x_2 - x_7)(x_3 - x_8)(x_4 - x_9)$$

On peut démontrer qu'en général, $\Delta_t(\mathbf{x})$ est égal au produit de tous les possibles facteurs $x_i - x_j$, où i et j sont pris dans la même colonne de t et $i < j$.

Définition 2.5.5. Soit μ un partage de n . Le module de Specht associé à μ est

$$\mathcal{S}^\mu := \mathcal{L}[\Delta_t(x) : t \in \mathcal{ST}_\mu[n]].$$

L'action du groupe symétrique sur les tableaux bijectifs est compatible avec l'action sur les polynômes Δ_t tout comme elle l'est sur le monôme associé à t :

$$\sigma \cdot \Delta_t(\mathbf{x}) = \Delta_{\sigma \cdot t}(\mathbf{x}).$$

Donc on peut réécrire le module de Specht comme

$$\boxed{\mathcal{S}^\mu := \mathcal{L}[\sigma \cdot \Delta_{t_\mu}(x) : \sigma \in \mathfrak{S}_n]} \quad (2.16)$$

Les modules de Specht satisfont les propriétés suivantes ;

1. Pour tout $\mu \vdash n$, le \mathfrak{S}_n -module \mathcal{S}^λ est irréductible.
2. \mathcal{S}^λ est isomorphe à \mathcal{S}^μ , si et seulement si $\lambda = \mu$.
3. $\{\mathcal{S}^\mu\}_{\mu \vdash n}$ est un système complet de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n .
4. L'ensemble $\{\Delta_t(\mathbf{x}) : t \in \mathcal{ST}_\mu[n]\}$ est une base pour \mathcal{S}^μ . Donc :

$$\dim(\mathcal{S}^\mu) = \text{nombre de tableaux de Young standards de forme } \mu.$$

5. Règle de Branchement

Si λ est un partage, on appellera **coin de λ** à toute case (a, b) dans λ tel que, quand on l'enlève du diagramme λ , celui-ci reste un tableau de Ferrer. Tout partage obtenu de λ en enlevant une de ses cases est dénoté par λ^- . Dans le même ordre d'idées, on définit une **case extérieur à λ** toute case (a, b) en dehors du partage λ (vu comme un diagramme) tel que $\lambda \cup \{(a, b)\}$ est un diagramme de Ferrer. On dénote par λ^+ tout partage obtenu par ce processus.

Soit \mathcal{S}^λ une représentation irréductible de \mathfrak{S}_n . Intuitivement, retirer ou ajouter une case au diagramme λ aide à comprendre la restriction de \mathcal{S}^λ à \mathfrak{S}_{n-1}

ou l'induction à \mathfrak{S}_{n+1} , respectivement. Plus précisément, on a :

$$\mathcal{S}^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}} \simeq \bigoplus_{\lambda^-} \mathcal{S}^{\lambda^-}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{S}^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}} \simeq \bigoplus_{\lambda^+} \mathcal{S}^{\lambda^+}. \quad (2.18)$$

Exemple 2.5.4. Soit $\lambda = (3, 2)$. L'ensemble des possibles λ^+ est :

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & & \\ \hline \square & \square & & \bullet \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \bullet \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \right\}$$

tandis que l'ensemble des λ^- est :

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \times \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \times & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \right\}$$

Les symboles \bullet , \times représentent une case ajouté et retiré, respectivement. En vertu de la règle de branchement on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(3,2)} \downarrow_{\mathfrak{S}_4} &\simeq \mathcal{S}^{(2,2)} \oplus \mathcal{S}^{(3,1)}, \\ \mathcal{S}^{(3,2)} \uparrow^{\mathfrak{S}_6} &\simeq \mathcal{S}^{(4,2)} \oplus \mathcal{S}^{(3,3)} \oplus \mathcal{S}^{(3,2,1)}. \end{aligned}$$

2.6 Nombres de Kostka

On finit ce chapitre par décrivant une propriété liant les espaces \mathcal{M}^μ et \mathcal{S}^μ .

Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux G -modules avec \mathcal{V} irréductible. On définit

$$\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} / f \text{ est un } G\text{-homomorphisme}\}.$$

Il s'ensuit de la théorie des représentations des groupes que la multiplicité de \mathcal{S}^λ dans \mathcal{M}^μ est $\dim(\text{Hom}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{M}^\mu))$. Aussi, on peut trouver une base³ de l'espace $\text{Hom}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{M}^\mu)$ indexé par les tableaux semi-standard de forme λ et de type μ . On obtient ainsi la décomposition suivante :

³Voir (Sagan 2001) pour une description complète de cette base.

Théorème 2.6.1 (Règle de Young).

$$\mathcal{M}^\mu \simeq \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} K_{\lambda, \mu} \mathcal{S}^\lambda.$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le nombre de tableaux de Young semi-standard de forme λ et de contenu $1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \dots k^{\mu_k}$. On appelle ces nombres les **nombre de Kostka**.

Exemple 2.6.1. Soit $\lambda = 1^3, 2^2, 3^2$. Les possibles $\mu \preceq \lambda$ et les tableaux associés de forme λ et de type μ sont :

$$\mu_1 = (7) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_2 = (6, 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_3 = (5, 2) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_4 = (4, 3) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_5 = (5, 1, 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_6 = (4, 2, 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_7 = (3, 3, 1) : \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu = (3, 2, 2) : \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}^{(3,2,2)} = \mathcal{S}^{(7)} \oplus 2\mathcal{S}^{(6,1)} \oplus 3\mathcal{S}^{(5,2)} \oplus 2\mathcal{S}^{(4,3)} \oplus \mathcal{S}^{(5,1,1)} \oplus 2\mathcal{S}^{(4,2,1)} \oplus \mathcal{S}^{(3,3,1)} \oplus \mathcal{S}^{(3,2,2)}.$$

Propriétés

1. $K_{(n),\mu} = 1$, pour tout partage μ . En effet, il n'y a qu'une seule façon d'ordonner une collection de nombre en ordre faiblement croissant.
2. Soit t un tableau semi-standard de forme et contenu λ . Alors, pour que t reste semi-standard, toutes les cases de la ligne i de t doivent être remplies de la même valeur i , pour chaque i . Ainsi, $K_{\lambda,\lambda} = 1$.
3. $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda,\mu'}$.
4. $\mu \preceq \lambda$ si et seulement si $K_{\lambda,\mu} > 0$. Voir par exemple (Rodriguez, 2008) pour une preuve détaillée.
5. Soit $\lambda \vdash n$. On dénote par f^λ le nombre de tableaux de Young standards de forme μ . Comme t est un tableau de Young standard de forme λ si et seulement si $\alpha(t) = 1^1 2^1 3^1 \dots n^1$, on a $K_{\lambda,1^n} = f^\lambda$. Frame, Robinson et Thrall prouvent dans (Frame, Robinson, Thrall, 1954) que

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} a(c) + \ell(c) + 1}$$

Les nombres $a(c)$ et $\ell(c)$ correspondents au **bras** et **jambe** de la case $c \in \lambda$ (voir figure (4.1) du chapitre 4).

CHAPITRE III

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Ce chapitre présente un bref exposé de la théorie des polynômes et fonctions symétriques. Le but ici est d'arriver à la définition des polynômes de Schur pour lesquels on développera une généralisation dans les chapitres suivants. Pour ce faire, on utilisera la substitution pléthystique, outil qui rendra plus facile la manipulation de certaines formules concernant les polynômes symétriques. Le livre (Macdonald, 1995) offre une description très complète de cette théorie.

Notre point de départ dans cette section est l'anneau des polynômes $\mathcal{Q} := \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ dans les variables $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$. On écrit ses éléments sous la forme

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{c}} a_{\mathbf{c}} x^{\mathbf{c}}$$

où la somme est prise sur toutes les compositions, et les coefficients $a_{\mathbf{c}}$ appartiennent à \mathbb{Q} . Le **degré** de f est la plus grande valeur de $|\mathbf{c}|$ pour laquelle $a_{\mathbf{c}} \neq 0$. Un polynôme est dit **homogène** de degré d s'il est de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{c}|=d} a_{\mathbf{c}} x^{\mathbf{c}}$$

avec au moins un $a_{\mathbf{c}}$ différent de zéro. Pour $d \geq 0$, soit \mathcal{Q}_d l'ensemble des polynômes dans \mathcal{Q} de degré d . Il est courant de décrire l'espace \mathcal{Q}_d par la transformation linéaire

$$\pi_d(\mathbf{x}^{\mathbf{c}}) := \begin{cases} \mathbf{x}^{\mathbf{c}} & \text{si } |\mathbf{c}| = d; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fait étendre linéairement cette définition à tout polynôme dans \mathcal{Q} . Si $f(\mathbf{x})$ est homogène degré d alors $\pi_d(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. Donc

$$\mathcal{Q}_d = \pi_d(\mathcal{Q}).$$

Puisque tout polynôme $f(\mathbf{x})$ se décompose uniquement de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \pi_0(f(\mathbf{x})) + \pi_1(f(\mathbf{x})) + \dots + \pi_d(f(\mathbf{x})),$$

où d est le degré de f , on a la décomposition

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{Q}_d. \quad (3.1)$$

Avec la propriété additionnelle $\mathcal{Q}_d \mathcal{Q}_k \subseteq \mathcal{Q}_{d+k}$, l'anneau \mathcal{Q} est gradué par rapport au degré.

On définit une action $\mathfrak{S}_n \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ en posant

$$\sigma \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad (3.2)$$

On définit l'espace des polynôme invariants par \mathfrak{S}_n comme étant

$$\mathcal{Q}^{\mathfrak{S}_n} := \{f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q} : \sigma \cdot f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n\}. \quad (3.3)$$

Cet espace sera l'objet d'étude principal dans la prochaine section.

3.1 Polynômes et fonctions symétriques

Définition 3.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme $f(\mathbf{x})$ dans \mathcal{Q} est dit *symétrique* si $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}^{\mathfrak{S}_n}$.

La somme et le produit de polynômes symétriques sont à nouveau des polynômes symétriques. Une autre observation est que si

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{c}} a_{\mathbf{c}} \mathbf{x}^{\mathbf{c}}$$

est symétrique, alors

$$\widehat{\mathbf{c}}_1 = \widehat{\mathbf{c}}_2 \Rightarrow a_{\mathbf{c}_1} = a_{\mathbf{c}_2}.$$

Ainsi, tout polynôme symétrique de degré d s'écrit de la forme :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \vdash d} a_\lambda \sum_{\widehat{\mathbf{c}}=\lambda} \mathbf{x}^{\mathbf{c}}.$$

Ainsi, tout polynôme symétrique peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes symétriques monomiaux. En plus, un polynôme symétrique a des coefficients entiers positifs si et seulement si cette combinaison linéaire s'écrit avec des coefficient entiers positifs.

Proposition 3.1.1. *Si $\lambda \vdash k$ et $\ell(\lambda) \leq n$, les polynômes $\sum_{\widehat{\mathbf{c}}=\lambda} x^{\mathbf{c}}$ forment une base de l'espace des polynômes symétriques homogènes de degré k . Donc*

$$\dim(\pi_k(\mathcal{Q}^{\mathcal{S}^n})) = p(k)$$

où $p(k)$ est le nombre de partages de k .

Définition 3.1.2. *Soit λ un partage. Le polynôme symétrique monomial indexé par λ est*

$$m_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{\widehat{\mathbf{c}}=\lambda} \mathbf{x}^{\mathbf{c}}. \quad (3.4)$$

Par exemple :

$$m_{(5,2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 x_2^2 + x_1^5 x_3^2 + x_2^5 x_1^2 + x_2^5 x_3^2 + x_3^5 x_1^2 + x_3^5 x_2^2.$$

L'écriture d'un polynôme symétrique en terme des polynômes symétriques monomiaux ne dépend pas du nombre de variables dans la mesure où ce nombre est plus grand que le degré du polynôme. On peut donc considérer des polynômes monomiaux définis sur un nombre infini de variables et ainsi étendre la notion de polynôme symétrique.

Définition 3.1.3. Soit $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ l'anneau des séries formelles dans les variables x_1, x_2, \dots . On définit l'espace des **fonctions symétriques**¹ $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par la famille $\{m_\lambda(x_1, x_2, \dots) : \lambda \vdash n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Cet espace est un anneau avec la multiplication de séries formelles. Pour une construction explicite de l'espace Λ en terme des $\{Q^{\mathfrak{S}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, voir (Macdonald, 1995). On dénote par Λ_d l'ensemble des fonctions symétriques de degré d . Alors, l'espace Λ se décompose comme :

$$\Lambda := \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda_d.$$

Les polynômes symétriques apparaissent donc comme des sommes partielles de fonctions symétriques. Dans le reste de ce chapitre on étudiera des notions sur les fonctions symétriques, en se restreignant sur les polynômes symétriques dans quelques cas. On omettra la famille de variables (x_1, x_2, \dots) dans l'écriture des fonctions symétriques sauf nécessaire.

Exemple 3.1.1. Considérons la fonction symétrique monomial sur le partage $(2, 1)$:

$$m_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \dots$$

Si on se restreint aux variables (x_3, x_7) , on obtient le polynôme symétrique

$$m_{(2,1)} = x_3^2 x_7 + x_3 x_7^2.$$

Fonctions symétriques classiques

Parmi les autres familles de fonctions symétriques qui seront considérés dans les chapitres suivants, on présente dans cette section trois familles classiques qui seront définis par indexation sur les nombres entiers positifs avant de les considérer sur les partages. Ceci rendra plus claire la propriété de multiplicativité de ces familles de fonctions.

¹Bien que ce sont des séries formelles, on les appelle plutôt fonctions par des raisons historiques.

Définition 3.1.4. Soit k un entier positif. Les fonctions homogènes complètes, fonctions élémentaires et les fonctions de sommes de puissances indexées par k sont définies en termes de fonctions symétriques monomiales comme suit :

$$h_k := \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (3.5)$$

$$e_k := m_{(1^k)} = \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (3.6)$$

$$p_k := m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots \quad (3.7)$$

où $(1^k) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ fois}}$.

Les polynômes h_k , p_k et e_k sont tous homogènes de degré k . On définit des formes plus génériques pour ces polynômes, maintenant indexés par des partages $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, en posant

$$h_\lambda = \prod_{i=1}^r h_{\lambda_i}; \quad (3.8)$$

$$e_\lambda = \prod_{i=1}^r e_{\lambda_i}; \quad (3.9)$$

$$p_\lambda = \prod_{i=1}^r p_{\lambda_i}. \quad (3.10)$$

Contrairement aux fonctions monomiales, les familles h_λ , e_λ et p_λ sont multiplicatives par construction.

Soit ζ une variable formelle. On peut trouver des relations explicites entre ces familles de polynômes en utilisant la notion de fonction génératrice. Pour chacune de ces trois familles de polynômes, on définit :

$$H(\zeta) := \sum_{k \geq 0} h_k \zeta^k; \quad (3.11)$$

$$E(\zeta) := \sum_{k \geq 0} e_k \zeta^k; \quad (3.12)$$

$$P(\zeta) := \sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \zeta^k. \quad (3.13)$$

En manipulant chaque série on obtient les formules suivantes :

$$H(\zeta) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i \zeta}; \quad (3.14)$$

$$E(\zeta) = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i \zeta) = \frac{1}{H(-\zeta)}; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= \sum_{i \geq 1} \left(x_i \zeta + \frac{x_i^2 \zeta^2}{2} + \frac{x_i^3 \zeta^3}{3} + \dots \right) \\ &= \sum_{i \geq 1} \log \left(\frac{1}{1 - x_i \zeta} \right) \\ &= \log \left(\prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i \zeta} \right) = \log(H(\zeta)); \end{aligned} \quad (3.16)$$

À partir du codage des fonctions symétriques h, p, e par leurs séries génératrices respectives, on peut découvrir des nombreuses relations qui relient ces fonctions. Par exemple, l'équation 3.15 implique que $E(-\zeta)H(\zeta) = 1$, d'où on obtient une première relations entre les fonctions élémentaires et les fonction homogènes :

$$\boxed{\sum_{i=0}^k (-1)^i e_k h_{k-i} = 0, \text{ pour } k > 0.} \quad (3.17)$$

Une manipulation similaire de l'équation $E(\zeta) = H(-\zeta)^{-1} = e^{-P(-\zeta)}$ implique :

$$\boxed{e_k = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k-l(\lambda)} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}} \quad (3.18)$$

où z_λ est défini comme dans la section 1.5.

D'autre part, l'équation 3.16 implique :

$$H(\zeta) = e^{P(\zeta)} = \sum_{r \geq 0} \frac{P(\zeta)^r}{r!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{c_1 + \dots + c_r = k} \frac{p_{c_1} \dots p_{c_r}}{c_1 \dots c_r r!} \zeta^k$$

où les nombres c_1, \dots, c_r sont des entiers positifs. En les ordonnant de façon décroissante, on peut indexer la dernière somme par des partages. Ainsi :

$$H(\zeta) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, j^{m_j}) \vdash k} \binom{\ell(\lambda)}{m_1, \dots, m_j} \frac{p_\lambda}{1^{m_1} \dots j^{m_j} \ell(\lambda)!} \zeta^k$$

où i^{m_i} dans l'indice de la somme est simplement autre façon d'écrire $\underbrace{i, \dots, i}_{m_i \text{ fois}}$. Alors,

$$H(\zeta) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \zeta^k.$$

C'est-à-dire

$$\boxed{h_k = \sum_{\lambda \vdash k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}} \quad (3.19)$$

On remarque par les équations 3.18 et 3.19 la similarité entre les fonctions symétriques élémentaire et homogènes. Ceci s'explique en définissant l'opérateur linéaire et multiplicatif $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ défini par

$$\omega(p_k) := (-1)^{k-1} p_k. \quad (3.20)$$

Par ces mêmes équations on obtient que $\omega(h_k) = e_k$ et $\omega(e_k) = h_k$.

Les relations entre les fonction génératrices 3.14, 3.15 et 3.16 montrent que ces trois familles de polynômes engendrent multiplicativement le même espace. Le **théorème fondamental des fonctions symétriques** démontre que l'espace engendré est exactement l'espace des fonctions symétriques.

Théorème 3.1.1 (Théorème fondamental des fonctions symétriques). *Toute fonction symétrique peut être écrit en termes des fonction e_k , $k = 1, 2, 3, \dots$*

Pour une preuve de ce théorème voir (Macdonald, 1995).

3.2 Fonctions antisymétriques

Définition 3.2.1. *Un polynôme $p \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ est dit **antisymétrique** ou **alternant** si $\sigma \cdot p(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\sigma)p(\mathbf{x})$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*

On obtient donc les polynômes alternants à partir de l'action alternante sur $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$.

Un exemple classique de polynôme alternant est donné par la notion de déterminant. Le **déterminant de Vandermonde** est

$$\Delta_n(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{n-1} x_{\sigma(2)}^{n-2} \cdots x_{\sigma(n)}^{n-n}. \quad (3.22)$$

Ce polynôme est alternant puisque

$$\begin{aligned} \tau \cdot \Delta_n(\mathbf{x}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\tau \circ \sigma(1)}^{n-1} x_{\tau \circ \sigma(2)}^{n-2} \cdots x_{\tau \circ \sigma(n)}^{n-n} \\ &= \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\tau^{-1} \theta) x_{\theta(1)}^{n-1} x_{\theta(2)}^{n-2} \cdots x_{\theta(n)}^{n-n} \\ &= \text{sgn}(\tau^{-1}) \cdot \Delta_n(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\tau) \cdot \Delta_n(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$.

Exemple 3.2.1.

$$\begin{aligned} \Delta_3(x_1, x_2, x_3) &= \det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - x_3^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_2^2 x_1 \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

On peut démontrer que le déterminant de Vandermonde peut s'écrire comme

$$\boxed{\Delta_n(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}. \quad (3.23)$$

On remarque d'après ce résultat que le degré de $\Delta_n(\mathbf{x})$ est $\binom{n}{2}$. L'importance du déterminant de Vandermonde se justifie avec la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$ divise à tout polynôme alternant.*

Démonstration. Premièrement, on a

$$p(\mathbf{x}) \text{ est un polynôme alternant} \iff (x_j - x_i) \text{ divise } p(\mathbf{x}), \text{ pour tout } i < j.$$

En effet, soit $p(\mathbf{x})$ un polynôme alternant et soient $1 \leq i < j \leq n$ fixés. Considérons la transposition $\sigma = (ij)$. Alors on a

$$p(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = \sigma \cdot p(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\sigma)p(\mathbf{x}) = -p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Si on considère le monôme x_j comme une variable et x_i comme une constante, alors

$$p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)|_{x_j \leftarrow x_i} = 0,$$

et ainsi $p(\mathbf{x}) = (x_j - x_i)q(\mathbf{x})$, pour un certain $q \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ de degré strictement inférieur à p .

Puisque $(x_j - x_i)$ divise $p(\mathbf{x})$, pour tout $i < j$, on a que $\Delta_n(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ divise $p(\mathbf{x})$. \square

Corollaire 3.2.0.1. *Si $p(\mathbf{x})$ est alternant, le quotient $p(\mathbf{x})/\Delta_n(\mathbf{x})$ est un polynôme symétrique.*

Démonstration. On a

$$\sigma \cdot \frac{p(\mathbf{x})}{\Delta_n(\mathbf{x})} = \frac{p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})}{\Delta_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})} = \frac{\text{sgn}(\sigma)p(\mathbf{x})}{\text{sgn}(\sigma)\Delta_n(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x})}{\Delta_n(\mathbf{x})}$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. \square

Ceci démontre que $\Delta(\mathbf{x})$ est le polynôme alternant non nul de degré plus petit de l'espace $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ (à multiplication par constante près).

3.3 Fonctions de Schur

Une quatrième base pour l'anneau Λ est présentée dans cette section. Il s'agit des fonctions de Schur, Son importance est due à sa connexion avec la théorie des représentations du groupe symétrique et du groupe linéaire général et la combinatoire. On les appelle fonctions de Schur. On verra une première relation des fonctions de Schur avec les caractères irréductibles du groupe symétrique. Ce lien sera plus clair dans les sections à venir, quand on définira l'isomorphisme de Frobenius.

Étant donné une suite $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ d'entiers tous distincts, on y associe un polynôme alternant défini comme :

$$\Delta_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} x_1^{c_1} & x_1^{c_2} & \cdots & x_1^{c_n} \\ x_2^{c_1} & x_2^{c_2} & \cdots & x_2^{c_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{c_1} & x_n^{c_2} & \cdots & x_n^{c_n} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

En particulier, si on dénote

$$\delta := (n-1, n-2, \dots, 1, 0),$$

alors $\Delta_{\delta}(\mathbf{x})$ correspond au déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$.

Puisque le déterminant d'une matrice demeure le même lorsqu'on permute ses colonnes, on peut supposer sans perte de généralité que $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$.

Considérons la suite d'entiers

$$\lambda := \mathbf{c} - \delta.$$

Par construction, λ est un partage de longueur $\ell(\lambda) \leq n$.

Définition 3.3.1. Soit λ un partage de n . Le *polynôme de Schur* est

$$s_\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\Delta_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{\Delta_n(\mathbf{x})} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})}{\det(x_i^{n-j})} \quad (3.25)$$

Exemple 3.3.1.

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\Delta_3(x_1, x_2, x_3)} \det \begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 x_2 x_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &= x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

L'introduction des polynômes de Schur faite ici est la même telle que Cauchy formulait pour la première fois en 1815. Cependant, dans la démarche des prochaines sections on utilisera une définition équivalente de la fonction de Schur, qui utilise la notion des tableaux. Cette nouvelle présentation offre une façon plus commode d'explicitier les fonctions de Schur.

Définition 3.3.2. Soit λ/μ un partage gauche. La *fonction de Schur gauche* $s_{\lambda/\mu}$ dans les variables (x_1, x_2, \dots) est

$$s_{\lambda/\mu} := \sum_t \mathbf{x}_t,$$

où la somme est prise sur tous les tableaux de Young semi-standards de type λ/μ et \mathbf{x}_t est le poids monomial de t défini en (1.6). Si $\mu = \emptyset$, alors on a $\lambda/\mu = \lambda$. Dans ce cas, on appelle s_λ la *fonction de Schur* de type λ .

Cette façon de décrire les fonctions de Schur est due à Littlewood. Les fonctions de Schur gauches forment une base de l'espace des fonction symétriques. Une idée de la preuve est de définir, pour chaque i , une involution $\varphi_i : T \mapsto T'$ entre tableaux semi-standards tel que le nombre de i et de $(i+1)$ sont interchangés quand on compare T et T' , tandis que les autres indices restent les mêmes. Ceci fait que

$(i, i + 1) \cdot s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}$ et ainsi les fonctions de Schur gauches sont symétriques, puisque toute permutation se décompose en produit de transposition. Pour une preuve plus détaillé, voir (Knuth, 1970).

Exemple 3.3.2. Les tableaux semi-standards de forme $\lambda = (2, 2, 1)$ sur $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Donc :

$$s_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2.$$

On obtient donc le résultat de l'exemple (3.3.1).

Exemple 3.3.3. Les tableaux semi-standards de forme $\lambda = (2, 2, 1)$ sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1^2 x_2^2 x_3 \\ &\quad + 2 x_1^2 x_2 x_3 x_4 \\ &\quad + 5 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \end{aligned}$$

Propriétés des fonctions de Schur

1. Soit $\lambda \vdash n$. Par la définition combinatoire des fonctions de Schur, on a

$$s_\lambda = \sum_{\mathbf{c}} K_{\lambda, \mathbf{c}} \mathbf{x}^{\mathbf{c}}$$

où la somme est faite sur tous les compositions faiblement décroissantes. Puisque les fonctions de Schur sont symétriques et les nombres de Kostka sont des entiers positifs, on obtient

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda, \mu} m_\mu \quad (3.26)$$

Exemple 3.3.4. Posons $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et $\lambda = (2, 2, 1)$. Par l'exemple (3.3.3), on confirme qu'il y a un tableau de forme λ et de contenu $1^2 2^2$, deux de contenu $1^2 2^1 3^1 4^1$ et 5 de contenu $1^1 2^1 3^1 4^1 5^1$. Ainsi,

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = m_{(2,2,1)}(\mathbf{x}) + 2 m_{(2,1^3)}(\mathbf{x}) + 5 m_{(1^5)}(\mathbf{x}).$$

2. Formules de Jacobi-Trudi :

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq \ell(\lambda)} \quad , \quad s_{\lambda'} = \det(e_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq \ell(\lambda)}$$

où $h_k = e_k = 0$ si $k < 0$. En particulier :

$$s_{(n)} = h_n \quad , \quad s_{(1^n)} = e_n.$$

Exemple 3.3.5. Si on considère le partage $\lambda = (2, 2, 1)$ et son conjugué $\lambda' = (3, 2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} s_{(2,1,1)} &= \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{-1} & h_0 & h_1 \end{pmatrix} \\ &= h_1 h_2^2 + h_1 h_4 - h_2 h_3 - h_1^2 h_3 \\ &= h_{(2,1,1)} + h_{(4,1)} - h_{(3,2)} - h_{(3,1^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{(3,2)} &= \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} \\
&= e_{(3,2)} - e_{(4,1)}.
\end{aligned}$$

3. $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$.

4. Considérons la famille de variable $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$. Alors :

$$s_\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} s_\lambda(\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y})$$

d'où en particulier :

$$\begin{aligned}
h_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^n h_k(\mathbf{x}) h_{n-k}(\mathbf{y}), \\
e_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^n e_k(\mathbf{x}) e_{n-k}(\mathbf{y}), \\
h_n[\mathbf{x} - \mathbf{y}] &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} h_k(\mathbf{x}) h_{n-k}(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

5. Fonctions de Schur et caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n

Dans ce paragraphe on décompose les fonctions de Schur en termes des fonctions de puissance. Une conséquence remarquable de ceci est un lien explicite entre les fonctions de Schur et les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n .

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ un partage, avec $\ell = \ell(\lambda)$. Considérons l'expansion

$$p_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda, \mu} \mathbf{x}^\mu.$$

Soit μ un partage fixé et $r = \ell(\mu)$. Puisque $p_\lambda = \prod_i (x_1^{\lambda_i} + x_2^{\lambda_i} + \dots)$, le coefficient $a_{\lambda, \mu}$ s'obtient en choisissant un terme $x_{i_j}^{\lambda_j}$ de chaque facteur $\sum x_i^{\lambda_i}$ tel que $x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \dots = \mathbf{x}^\mu$.

Pour chaque $k \geq 0$ posons $B_k := \{j : i_j = k\}$. Alors (B_1, \dots, B_r) est une partition ordonnée de $[\ell]$ tel que

$$\sum_{i \in B_j} \lambda_i = \mu_j, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (3.27)$$

Donc $a_{\lambda,\mu}$ est égal au nombre de partitions ordonnées (B_1, \dots, B_r) qui satisfont la propriété (3.27)

Ceci coïncide avec le caractère du \mathfrak{S}_n -module \mathcal{H}^μ décrit dans (2.13). C'est-à-dire, $a_{\lambda,\mu} = \rho^\mu(\pi)$ où $\lambda = \tau(\pi)$. Puisque

$$K_{\lambda,\mu} = \langle \rho^\mu, \chi^\lambda \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \rho^\mu(\pi) \chi^\lambda(\pi),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \sum_{\mu} K_{\lambda,\mu} m_\mu \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \rho^\mu(\pi) \chi^\lambda(\pi) \right) m_\mu \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{\mu} \rho^\mu(\pi) m_\mu \right) \chi^\lambda(\pi) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} p_{\tau(\pi)} \chi^\lambda(\pi). \end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat comme

$$s_\lambda = \sum_{\mu} \chi^\lambda(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

Exemple 3.3.6. À l'aide de la table des caractères irréductibles de \mathfrak{S}_3 (2.4.1) on est en condition de pouvoir calculer s_λ pour $\lambda \vdash 3$:

$$\begin{aligned} s_3 &= \chi_3(1^3) \frac{p_1^3}{6} + \chi_3(21) \frac{p_1 p_2}{2} + \chi_3(3) \frac{p_3}{3} \\ &= \frac{p_1^3}{6} + \frac{p_1 p_2}{2} + \frac{p_3}{3}; \\ s_{(21)} &= \chi_{21}(1^3) \frac{p_1^3}{6} + \chi_{21}(21) \frac{p_1 p_2}{2} + \chi_{21}(3) \frac{p_3}{3} \\ &= \frac{p_1^3}{3} - \frac{p_3}{3}; \\ s_{(13)} &= \chi_{13}(1^3) \frac{p_1^3}{6} + \chi_{13}(21) \frac{p_1 p_2}{2} + \chi_{13}(3) \frac{p_3}{3} \\ &= \frac{p_1^3}{6} - \frac{p_1 p_2}{2} + \frac{p_3}{3}. \end{aligned}$$

6. Une conséquence de la décomposition décrite ci-dessus est la description de h_k et e_k en termes des fonctions de puissances :

$$\boxed{h_k = s_{(k)} = \sum_{\mu} \chi^{\lambda}(\mu)} \quad (3.28)$$

7. Puisque les $\{p_{\lambda}\}_{\lambda \vdash n}$ forment une base de Λ_n on peut formellement introduire un produit scalaire en posant :

$$\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle := \begin{cases} z_{\lambda} & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Ce produit est appelé le **produit scalaire de Hall**. En décomposant les fonctions de Schur en fonctions de puissance on obtient :

$$\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda, \mu}.$$

Ainsi, les fonctions de Schur forment une base orthonormale de Λ .

8. **Règle de Littlewood-Richardson :**

$$\boxed{s_{\lambda} s_{\mu} = \sum_{\theta \vdash |\lambda| + |\mu|} c_{\lambda\mu}^{\theta} s_{\theta}}$$

où les $c_{\lambda\mu}^{\theta}$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson. Comme cas particuliers, on a les **formules de Pieri** :

$$\boxed{h_k s_{\mu} = \sum_{\theta} s_{\theta}} \quad , \quad \boxed{e_k s_{\mu} = \sum_{\theta} s_{\theta}} \quad (3.30)$$

où la première somme est faite sur l'ensemble des partages θ telles que θ/μ est une bande horizontale de k cases, tandis que la deuxième somme est faite sur les θ telles que θ/μ est une bande verticale de k cases.

Une autre façon de présenter les règles de Pieri est avec la notion d'opérateur adjoint. Plus précisément, étant donné une fonction symétrique homogène f ,

on définit f^\perp l'opérateur adjoint par rapport au produit scalaire des fonctions symétriques. C'est-à-dire

$$\langle g, f h \rangle = \langle f^\perp g, h \rangle \quad (3.31)$$

pour toute fonction symétrique g et h . En considérant les cas $f = h_k$ et $f = e_k$, on peut donc réécrire les formules (3.30) comme

$$\boxed{h_k^\perp s_\mu = \sum_{\theta} s_\theta} \quad , \quad \boxed{e_k^\perp s_\mu = \sum_{\theta} s_\theta} \quad (3.32)$$

où maintenant la première somme (respectivement deuxième somme) est faite sur l'ensemble des partages θ qui peuvent être obtenues à partir de μ en lui enlevant une bande horizontale (respectivement verticale) de longueur k .

3.4 Substitution pléthystique

Pour cette section, on suit de près (Bergeron, 2008) et (Haglund, 2008).

L'opération dit **pléthysme**² a été introduite par Littlewood dans ses études des λ -anneaux. La notation pléthystique permet notamment de simplifier et manipuler les fonctions symétriques. Considérons $\mathbf{z} = z_1, z_2, \dots$ un ensemble de variables et A une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(\mathbf{z})$. On dénote par $p_k[A]$ l'opération qui remplace z_i par z_i^k dans A . Autrement dit,

$$p_k[A] := A|_{z_i \rightarrow z_i^k}.$$

Par exemple,

$$p_k \left[\frac{x + y^2 + 4}{z} + z \right] = \frac{x^k + y^{2k} + 4}{z^k} + z^k.$$

Ceci entraîne les relations

$$p_k[r] = r, \quad (3.33)$$

²Du grec *plethysmos* ($\pi \lambda \nu \theta \nu \sigma \mu \acute{o} \zeta$) et signifiant *multiplier*.

$$p_k[A + B] = p_k[A] + p_k[B] \quad , \quad p_k[AB] = p_k[A] p_k[B]. \quad (3.34)$$

Ces relation impliquent, par exemple, que

$$p_k[rA] = p_k[r] p_k[A] = r p_k[A], \quad (3.35)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$. On peut étendre l'opérateur $p_k[-]$ à tout Λ .

Définition 3.4.1. Soient $A \in \mathbb{R}(\mathbf{z})$ une fraction rationnelle et $f = \sum_{\lambda} a_{\lambda} p_{\lambda}$ une fonction symétrique exprimée en termes de sommes de puissances. **La substitution pléthystique de A dans f est**

$$f[A] := \sum_{\lambda} a_{\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}[A].$$

Une première conséquence de cette définition est

$$(f + g)[A] = f[A] + g[A] \quad , \quad (f \cdot g)[A] = f[A] g[A]. \quad (3.36)$$

La substitution pléthystique est donc une opération linéaire et multiplicative.

Considérons $\mathbf{z} = z_1, z_2, \dots$ une famille de variables. On a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (z_1^{\lambda_i} + z_2^{\lambda_i} + \dots) \\ &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}[z_1 + z_2 + \dots] = f[z_1 + z_2 + \dots] \end{aligned} \quad (3.37)$$

On utilisera cette identité très souvent dans les prochains chapitres pour faire des calculs³.

Posons

$$H[A; \zeta] := \sum_{k \geq 0} h_k[A] \zeta^k, \quad E[A; \zeta] = \sum_{k \geq 0} e_k[A] \zeta^k \quad \text{et} \quad P[A; \zeta] := \sum_{k \geq 1} p_k[A] \frac{\zeta^k}{k}.$$

³Cette identité est en fait très utilisé dans la littérature et amène à quelques auteurs à définir un ensemble de variables comme $\mathbf{z} := z_1 + z_2 + \dots$.

Propriétés du plethysme

1. On veut trouver une expression simple pour la substitution pléthystique $f[x]$. Il est évident que pour le cas de sommes de puissances, on a $p_k[x] = x^k$. Donc, si $f = \sum_{\lambda} a_{\lambda} p_{\lambda}$ est une fonction symétrique écrite en terme des sommes de puissances, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f[x] &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} p_{\lambda}[x] \\
 &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} x^{|\lambda|} \\
 &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \left(p_{\lambda}(z_1, z_2, \dots) \Big|_{\substack{z_1=x \\ z_i=0, i>1}} \right) \\
 &= \left(\sum_{\lambda} a_{\lambda} p_{\lambda}(z_1, z_2, \dots) \right) \Big|_{\substack{z_1=x \\ z_i=0, i>1}} \\
 &= f(\mathbf{z}) \Big|_{\substack{z_1=x \\ z_i=0, i>1}}
 \end{aligned}$$

Par la définition de la fonction symétrique monomial (voir (3.4) et définition (3.1.3)), on a $m_{\lambda}[x] = 0$ pour tout partage λ telle que $\ell(\lambda) \geq 2$. Aussi, à partir des définitions des fonctions symétriques élémentaires et homogènes on déduit facilement que $h_n[x] = x^n$ pour tout n et que $e_n[x] = 0$ pour tout $n \geq 2$. Notons qu'on peut aussi obtenir ces deux dernières expressions via les fonctions génératrices $H(\zeta)$ et $E(\zeta)$ et ses relations avec $P(\zeta)$ (voir (3.15) et (3.16)).

En particulier, comme $p_k[-1] = -1$ on obtient les expressions :

$$\begin{aligned}
 H[-1; \zeta] &= \exp \left(\sum_{k \geq 1} -\frac{\zeta^k}{k} \right) = 1 - t \\
 E[-1, \zeta] &= \exp \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\zeta^k}{k} \right) = \frac{1}{1+t},
 \end{aligned}$$

d'où les identités :

$$h_n[-1] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad e_n[-1] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Une conséquence immédiate de (3.35) est $f[-\mathbf{z}] = (-1)^d \omega(f(\mathbf{z}))$, si f est une fonction symétrique homogène de degré d . En particulier, on a $e_n[-\mathbf{z}] = (-1)^n h_n(\mathbf{z})$.
3. Dans la notation pléthystique, le traitement de symboles formels diffère de celui des quantités numériques. Si $Z = z_1 + z_2 + \dots$, alors

$$p_k[-Z] = -p_k[Z] = -p_k(\mathbf{z}).$$

On donne maintenant un sens à l'expression " $-\mathbf{z}$ ". Soit ε une variable formelle avec la propriété $\varepsilon^k = (-1)^k$, pour tout k . Alors

$$p_k[\varepsilon Z] = p_k[\varepsilon] p_k[Z] = \varepsilon^k p_k[Z] = (-1)^k p_k(\mathbf{z}) = -\omega(p_k(\mathbf{z}))$$

4. À partir de la décomposition de h_n en termes des fonctions de puissance, on obtient :

$$h_n \left[\frac{\mathbf{z}}{1-t} \right] = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{p_{\mu_i}(\mathbf{z})}{1-t^{\mu_i}}.$$

Cette formule sera utilisée pour des calculs dans le chapitre suivant.

3.5 Transformée de Frobenius

Considérons l'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$ des fonctions centrales sur \mathfrak{S}_n :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n) = \{ \varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \varphi(\sigma), \text{ pour tout } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \}.$$

L'ensemble des fonctions centrales sur \mathfrak{S}_n forme un espace vectoriel complexe.

Une base est donnée par la famille des fonctions suivantes :

$$c_\mu(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(\sigma) = \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On les appelle fonctions indicatrices de classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . La dimension de cet espace est le nombre de classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . Ainsi, $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$ est isomorphe à Λ_n .

Définition 3.5.1 (Frobenius). *La transformée de Frobenius est une fonction $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathfrak{S}_n) \rightarrow \Lambda_n$ défini par*

$$\mathcal{F}(\varphi) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \varphi(\sigma) p_{\tau(\sigma)} \quad (3.38)$$

où $p_\mu = p_\mu(\mathbf{z})$.

Remarque : La transformée de Frobenius d'une fonction centrale est une fonction symétrique à variables $\mathbf{z} = z_1, z_2, \dots$ lesquelles ne sont pas liées aux variables \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Puisque $\varphi(\tau^{-1}\sigma\tau) p_{\lambda(\tau^{-1}\sigma\tau)} = \varphi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}$ et comme le nombre de permutations dans \mathfrak{S}_n de forme μ est égal à $n!/z_\mu$, on peut réécrire l'équation (3.38) comme

$$\mathcal{F}(\varphi) := \sum_{\mu \vdash n} \varphi(\sigma_\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu} \quad (3.39)$$

où σ_μ est une permutation de type cyclique μ .

Propriétés de la transformée de Frobenius

1. En utilisant la description de la transformée de Frobenius donnée par l'équation (3.39), on a $\mathcal{F}(c_\mu) = p_\mu/z_\mu$.
2. L'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$ est muni du produit scalaire

$$\langle c_\mu, c_\tau \rangle = \begin{cases} 1/z_\mu & , \text{ si } \mu = \tau \\ 0 & , \text{ sinon .} \end{cases}$$

Le morphisme \mathcal{F} est alors une isométrie par rapport à ce produit scalaire.

En effet :

$$\langle \mathcal{F}(c_\mu), \mathcal{F}(c_\tau) \rangle = \left\langle \frac{p_\mu}{z_\mu}, \frac{p_\tau}{z_\tau} \right\rangle = \delta_{\mu,\tau} \frac{1}{z_\mu} = \langle c_\mu, c_\tau \rangle.$$

3. Soit χ^λ le caractère du \mathfrak{S}_n -module irréductible \mathcal{S}^λ . On a

$$\mathcal{F}(\chi^\lambda) = s_\lambda.$$

Ainsi, $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathfrak{S}_n) \rightarrow \Lambda_n$ envoie une base orthogonale vers une autre. C'est donc un isomorphisme entre espaces vectoriels.

4. Soit χ le caractère de la représentation régulière. Alors :

$$\mathcal{F}(\chi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma) p_{\tau(\sigma)} = \frac{1}{n!} (n! p_1^n) = p_1^n.$$

Anneau de Littlewood-Richardson

La notion de transformée de Frobenius peut être aussi définie à partir du point de vue de \mathfrak{S}_n -module comme suit. Soit R_n le groupe abélien des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{Q} de classes d'isomorphismes des représentations de \mathfrak{S}_n . Dans cet espace, l'isomorphisme entre représentations définit une relation d'équivalence. Si \mathcal{V} est une représentation de \mathfrak{S}_n , on dénote par $[\mathcal{V}]$ sa classe d'équivalence dans R_n . Puisque $\{S^\mu\}_{\mu \vdash n}$ est un système complet de représentations irréductibles

dans \mathfrak{S}_n , on écrira de manière équivalente \mathcal{S}^μ ou $[\mathcal{S}^\mu]$.

Chaque décomposition dans l'espace des \mathfrak{S}_n -modules

$$\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{\mu \vdash n} m_\mu \mathcal{S}^\mu \quad (3.40)$$

détermine la décomposition suivante dans R_n :

$$[\mathcal{V}] = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu \mathcal{S}^\mu. \quad (3.41)$$

Définition 3.5.2. *Considérons la suite R_0, R_1, R_2, \dots , où $R_0 := \mathbb{Q}$ et R_n est le groupe abélien des combinaisons linéaires de classes d'isomorphismes des représentations de \mathfrak{S}_n , pour $n \geq 1$. L'anneau de Littlewood-Richardson est l'ensemble*

$$R := \bigoplus_{n \geq 0} R_n$$

muni du produit $\circ : R_n \times R_m \rightarrow R_{n+m}$

$$[\mathcal{V}] \circ [\mathcal{W}] := [\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}].$$

Dans ce contexte, on considère le produit tensoriel $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ comme un $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ -module en posant

$$(\sigma \times \tau) \cdot (v \times w) := (\sigma \cdot v) \times (\tau \cdot w).$$

On définit un produit scalaire sur R comme étant :

$$\langle \mathcal{S}^\mu, \mathcal{S}^\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \lambda \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Donc, si $\mathcal{V} = \sum_{\mu} m_\mu \mathcal{S}^\mu$ et $\mathcal{W} = \sum_{\mu} k_\mu \mathcal{S}^\mu$ sont des représentations de \mathfrak{S}_n , on a

$$\langle [\mathcal{V}], [\mathcal{W}] \rangle = \sum_{\mu} m_\mu k_\mu.$$

Définition 3.5.3. *Soit \mathcal{V} un \mathfrak{S}_n -module. La caractéristique de Frobenius $\mathcal{F} : R \rightarrow \Lambda$ est le morphisme défini par*

$$\mathcal{F}([\mathcal{V}]) := \sum_{\mu} \chi_{\mathcal{V}}(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}, \quad (3.43)$$

où $\chi_{\mathcal{V}}$ est le caractère de la représentation \mathcal{V} .

Dorénavant, on écrira $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ au lieu de $\mathcal{F}([\mathcal{V}])$. On a vu que $\chi_{\mathcal{V}}$ est une fonction centrale et que α, β sont deux permutations conjugués si et seulement si $\tau(\alpha) = \tau(\beta) =: \mu$. On écrira par abus de langage $\chi_{\mathcal{V}}(\alpha) = \chi_{\mathcal{V}}(\beta) = \chi_{\mathcal{V}}(\mu)$. En plus, on fera pas de distinctions entre les deux notions de transformée de Frobenius.

La transformée de Frobenius satisfait les propriétés

$$\mathcal{F}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = \mathcal{F}(\mathcal{V}) + \mathcal{F}(\mathcal{W}) \quad , \quad \mathcal{F}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) = \mathcal{F}(\mathcal{V}) \mathcal{F}(\mathcal{W}).$$

La première propriété décrite ci-dessus a une remarquable conséquence. Celle-ci nous permettra de rendre plus claire la décomposition en irréductible d'un \mathfrak{S}_n -module \mathcal{V} , via l'expansion de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ en fonctions de Schur. Plus précisément, on aura

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda} s_{\lambda}. \quad (3.44)$$

Le coefficient a_{λ} dénote la multiplicité du \mathfrak{S}_n -module irréductible \mathcal{V}^{λ} dans \mathcal{V} . On voit donc que tout polynôme symétrique provenant du calcul de la transformée de Frobenius d'un certain \mathfrak{S}_n -module sera, par définition, une fonction Schur-positive. À titre d'exemple, rappelons la règle de Young introduit au chapitre 2 :

$$\mathcal{H}^{\mu} \simeq \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} K_{\lambda, \mu} \mathcal{S}^{\lambda}$$

En appliquant la transformée de Frobenius on obtient :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}^{\mu}) = \sum_{\lambda \succeq \mu} K_{\lambda, \mu} s_{\lambda} = h_{\mu} \quad (3.45)$$

On a donc confirmé la Schur-positivité des fonctions homogènes en présentant un \mathfrak{S}_n -module associé par la transformé de Frobenius.

Un examen plus minutieux de cette dernière formule nous montre que :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}^{1^n}) = \sum_{\lambda \vdash n} f^{\lambda} s_{\lambda} = p_1^n = h_1^n \quad (3.46)$$

Or, on savait déjà que $p_1^{\mathfrak{S}_n}$ est le Frobenius de la représentation régulière. La présentation de cet espace n'est pas fortuite. En effet, on verra dans les prochains chapitres que pour les polynômes de Macdonald, qui sont des fonctions symétriques ayant des coefficients dans $\mathbb{Z}[q, t]$, les \mathfrak{S}_n -modules associés par la transformée de Frobenius généralisent la représentation régulière. Cette généralisation est due au fait qu'on voudra associer à des fonctions symétriques avec deux poids q, t des \mathfrak{S}_n -modules, dit bigradués. La section 3.7 est une brève approche à la notion de module gradué, qui nous conduira naturellement à la notion de module bigradué.

3.6 Espaces des polynômes harmoniques

Une fonction h est dite **harmonique** si elle est solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} = 0. \quad (3.47)$$

De façon générale, un polynôme $p(\mathbf{x})$ est dit **\mathfrak{S}_n -harmonique** si pour tout polynôme symétrique homogène $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}^{\mathfrak{S}_n}$ de degré non nul on a

$$f(\partial_{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.48)$$

Puisque l'ensemble des polynômes symétriques de puissances forme une base de l'espace $\Lambda^{\mathfrak{S}_n}$, la condition ci-dessus devient équivalente à

$$\begin{aligned} (\partial_{x_1} + \cdots + \partial_{x_n}) p(\mathbf{x}) &= 0 \\ (\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2) p(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ (\partial_{x_1}^k + \cdots + \partial_{x_n}^k) p(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

où k est le degré de $p(\mathbf{x})$.

On dénote par \mathcal{H}_n l'espace des polynômes harmoniques sur \mathfrak{S}_n . Une première observation sur l'espace \mathcal{H}_n montre c'est un espace fermé par dérivation qui contient

le déterminant $\Delta_n(\mathbf{x})$. En effet, si $q(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \partial x_i^a \Delta_n(\mathbf{x})$ on a

$$\sigma \cdot q(\mathbf{x}) = \left(\sigma \cdot \sum_{i=1}^n \partial x_i^a \right) (\sigma \cdot \Delta_n(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \partial x_i^a (\operatorname{sgn}(\sigma) \Delta_n(\mathbf{x})) = \operatorname{sgn}(\sigma) q(\mathbf{x}),$$

pour tout $1 \leq a \leq \binom{n}{2}$. Donc, le polynôme $q(\mathbf{x})$ est alternant et son degré est plus petit que $\binom{n}{2} = \deg(\Delta_n(\mathbf{x}))$ par définition. Or ceci est une contradiction. Donc $q(\mathbf{x}) = 0$, d'où $\Delta_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_n$.

Considérons p un polynôme dans $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ et l'ensemble

$$\mathcal{L}_\partial[p(\mathbf{x})] := \{q(\partial_{\mathbf{x}})p(\mathbf{x}) \mid q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]\}.$$

Puisque $\Delta_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_n$, on a bien que $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{L}_\partial[\Delta_n(\mathbf{x})]$.

Considérons maintenant l'ensemble des $n!$ polynômes

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

pour $0 \leq a_i \leq n - i$. On a :

$$f_{\mathbf{a}}(\partial_{\mathbf{x}}) \Delta(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} \dots \partial_{x_n}^{a_n} \Delta(\mathbf{x}) = \alpha x_1^{n-1-a_1} x_2^{n-2-a_2} \dots x_n^{n-n-a_n} + \text{termes de degré inférieurs},$$

avec α une constante. Puisque tous les monômes dans l'expression ci-dessus ont différents, on conclut que l'espace \mathcal{H}_n est de dimension au moins $n!$.

1. $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}_\partial[\Delta_n(\mathbf{x})]$.

L'inclusion découle de la dernière propriété. L'inclusion contraire est un résultat de Steinberg (Steinberg, 1964).

2. L'ensemble $\{f_{\mathbf{a}}(\partial_{\mathbf{x}}) \Delta_n(\mathbf{x}) : 0 \leq a_i \leq n - i\}$ est une base de l'espace \mathcal{H}_n . En particulier, $\dim(\mathcal{H}_n) = n!$. Ainsi, cet espace est isomorphe à la représentation régulière \mathcal{R} .

Exemple 3.6.1. En calculant chaque $\partial_{x_i} \partial_{x_j} \Delta_3(\mathbf{x})$, on trouve une base \mathcal{B} pour l'espace $\mathcal{H}_3 = \mathcal{L}_\partial[\Delta_3(\mathbf{x})] = \mathcal{L}_\partial[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]$. On montre la caractéristique de Frobenius de chaque élément de la base :

\mathcal{B}	Transformée de Frobenius
$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_3)$	$s_{1,1,1}$
$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)$	$s_{2,1}$
$(x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2)$	$s_{2,1}$
$(x_1 - x_2)$	$s_{2,1}$
$(x_1 - x_3)$	$s_{2,1}$
1	s_3

L'espace des polynômes harmoniques \mathcal{H}_n possède une propriété algébrique intéressante et particulière : cet espace est une version graduée de la représentation régulière. Pour arriver à ce résultat, on aura besoin de la notion de représentations graduées.

3.7 Représentations graduées

Soit π_k l'opérateur linéaire qui projette un polynôme sur sa composante homogène de degré k . C'est-à-dire

$$\pi_k \left(\sum_r c_r \mathbf{x}^r \right) = \sum_{|r|=k} c_r \mathbf{x}^r.$$

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ est dit **homogène**, si pour tout k on a

$$\pi_k(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}.$$

L'espace \mathcal{V} est dit **gradué** s'il contient toutes les composantes homogènes de chacun de ses éléments. Dans ce cas, on a la décomposition

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{V}_k.$$

où $\mathcal{V}_k := \pi_k(\mathcal{V})$.

Si le sous-espace \mathcal{V} de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ gradué est invariant sous l'action triviale du groupe

symétrique, alors toutes ses composantes homogènes sont invariantes aussi. Dans ce cas, on introduit un q -analogue du caractère usuel d'une représentation :

Définition 3.7.1. Soit \mathcal{V} un sous-espace gradué de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$, invariant par l'action triviale du groupe symétrique. Le **caractère gradué** $\chi_{\mathcal{V}}(q) : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}[q]$ de \mathcal{V} est défini par

$$\chi_{\mathcal{V}}(q)(g) := \sum_{k \geq 0} \chi_k(g) q^k \quad (3.49)$$

où χ_k est la représentation associée au sous-module \mathcal{V}_k .

À chaque espace \mathcal{V} tel que défini précédemment, on peut associer une fonction symétrique via la **caractéristique de Frobenius graduée** :

$$\mathcal{F}_q(\mathcal{V}) := \mathcal{F}(\chi_{\mathcal{V}}(q)) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}(\chi_k) q^k$$

Exemple 3.7.1. Pour l'espace $\mathcal{V} = \mathcal{H}_3$ on a :

\mathcal{B}	Transformée de Frobenius graduée
$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_3)$	$q^3 s_{1,1,1}$
$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3),$ $(x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2)$	$q^2 s_{2,1}$
$(x_1 - x_2),$ $(x_1 - x_3)$	$q s_{2,1}$
1	s_3

Donc :

$$\mathcal{F}_q(\mathcal{H}_3) = s_3 + (q^2 + q)s_{2,1} + q^3 s_{1,1,1}.$$

On définit aussi sa **série de Hilbert**, qui représente une q -généralisation de la dimension de \mathcal{V} :

$$\text{Hilb}_q(\mathcal{V}) := \sum_{k \geq 0} \dim(\mathcal{V}_k) q^k,$$

Soit χ le caractère associé au \mathfrak{S}_n -module \mathcal{V} et χ^λ le caractère associé au \mathfrak{S}_n -module irréductible \mathcal{V}^λ . Puisque $\deg(\chi^\lambda) = \chi^\lambda(1) = \langle s_\lambda, p_1^n \rangle$ pour chaque λ , la dimension de \mathcal{V} est égale à $\langle \mathcal{F}(\chi), p_1^n \rangle$. Ainsi, la série de Hilbert du \mathfrak{S}_n -module \mathcal{V} est déterminée par la relation

$$\boxed{\text{Hilb}_q(\mathcal{V}) = \langle \mathcal{F}_q(\mathcal{V}), p_1^n \rangle} \quad (3.50)$$

Exemple 3.7.2. Pour l'espace des polynômes harmoniques \mathcal{H}_n , on a

$$\mathcal{F}_q(\mathcal{H}_n)(\mathbf{x}) = (1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q) h_n \left[\frac{\mathbf{x}}{1 - q} \right], \quad (3.51)$$

$$\text{Hilb}_q(\mathcal{H}_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^k}{1 - q}. \quad (3.52)$$

On peut exprimer la série $\mathcal{F}_q(\mathcal{V})$ en termes des fonctions de Schur :

$$\mathcal{F}_q(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda} d_{\lambda}(q) s_{\lambda} \quad (3.53)$$

où $d_{\lambda}(q)$ est une série en q à coefficients entiers positifs. Algébriquement, ces polynômes correspondent à la multiplicité de représentations irréductibles de S^λ dans les \mathcal{V}_k . Combinatoirement, il arrive que ces polynômes correspondent à une q -généralisation des polynômes de Kostka.

Espaces μ -harmoniques

Dans (Bergeron, Garsia, 1992), N. Bergeron et A. Garsia donnent une description algébrique de certains espaces, définis du point de vue de la géométrie algébrique, associés à une généralisation des polynômes de Kostka étudiée dans (Garsia, Procesi, 1992) par A. Garsia et C. Procesi. La description de Bergeron et Garsia permettait d'obtenir une première généralisation des fonctions \mathfrak{S}_n -harmoniques :

Définition 3.7.2 (Bergeron, Garsia). *Soit μ un partage de n . L'espace \mathcal{H}_μ des μ -harmoniques est*

$$\mathcal{H}_\mu := \mathcal{L}_\partial[\Delta_t(\mathbf{x}) : t \in ST(\mu)].$$

Cet espace est clairement \mathfrak{S}_n -invariant et homogène. Les coefficients $d_\lambda(q)$ du développement (3.53) de la caractéristique de Frobenius de \mathcal{H}_μ s'expriment comme

$$d_\lambda(q) = q^{n(\mu)} K_{\lambda,\mu}(q^{-1}) \tag{3.54}$$

où les polynômes $K_{\lambda,\mu}(q)$ sont les **polynômes de Kostka-Foulkes**. Pour une description plus précise de ces polynômes et de l'équation (3.54), voir (Bergeron, Garsia, 1992).

CHAPITRE IV

POLYNÔMES DE MACDONALD

4.1 Introduction

L'apparition de la fonction de Schur eut un impact significatif tant sur l'étude de la théorie des représentations du groupe \mathfrak{S}_n que sur celle du groupe linéaire général $GL_n(\mathbb{C})$. En étudiant ses propriétés, Hall et Littlewood découvrirent, de façon indépendante, une t -généralisation des fonctions de Schur, connue aujourd'hui comme polynômes de Hall-Littlewood. Les travaux de Green et de Macdonald relient ces polynômes à l'étude de la théorie des représentations de GL_n sur les corps finis et p -adiques.

Vers la fin des années soixante, Jack découvrit une autre généralisation des fonctions de Schur, différente de celle introduite par Hall et Littlewood. Ces polynômes généralisent de façon naturelle les polynômes Zonaux et sont reliés au groupe $GL_n(\mathbb{R})$. On les connaît maintenant sous le nom de polynômes de Jack.

En 1989, Macdonald unifia ces théories en définissant une famille de polynômes symétriques à deux paramètres. Dans cette section nous rappelons les notions de base des polynômes de Macdonald.

4.2 Polynômes de Macdonald

Dans le chapitre précédent, on a étudié les polynômes de Schur, lesquels sont uniquement déterminés par les conditions :

$$(1) \quad s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} c_{\lambda, \mu} m_\mu ;$$

$$(2) \quad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu.$$

En d'autres mots, les polynômes de Schur sont obtenus à partir de *l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt* appliqué à la base monomiale symétrique $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$. Cette dernière est ordonnée par l'ordre lexicographique \prec sur les partitions. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de Hall défini dans (3.29) :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \begin{cases} z_\lambda & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit Λ l'anneau des fonctions symétriques dans un ensemble de variables infini $\mathbf{z} = z_1, z_2, \dots$, avec coefficients dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(q, t)$, pour des paramètres q et t . La procédure appliquée ci-dessus pour définir les fonctions de Schur est utilisée de façon plus générique dans la littérature des fonctions symétriques pour définir des bases de l'espace Λ . Plus précisément, ces bases sont caractérisées par les axiomes suivants :

- orthogonalité par rapport à un certain produit scalaire ;
- la matrice de transition de ces bases par rapport aux fonctions monomiales est triangulaire.

Il est clair que les fonctions de Schur satisfont ces propriétés à partir des conditions (1) et (2). Parmi les autres bases classiques qui peuvent être définies par cette méthode, on trouve :

– Les polynômes Zonaux, orthogonaux entre eux par le produit scalaire

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_2 := \begin{cases} 2^{\ell(\lambda)} z_\lambda & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\ell(\lambda)$ est la longueur de λ ;

– Les polynômes de Jack, orthogonaux entre eux par le produit scalaire

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha := \begin{cases} \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

– Les fonctions de Hall-Littlewood, orthogonaux entre eux par le produit scalaire

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_t := \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda p_\lambda \left[\frac{1}{1-t} \right] = \begin{cases} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (1-t^{\lambda_i})^{-1} & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

Quand $\alpha = 1$, les polynômes de Jack se réduisent aux fonctions de Schur, tandis que pour $\alpha = 2$ on obtient les polynômes Zonaux. Lorsque $t \rightarrow 1$, le produit scalaire (4.3) défini pour obtenir les polynômes de Hall-Littlewood devient le produit de Hall, ce qui produit les fonctions de Schur a nouveau. Pour plus d'informations sur ces bases, voir (Macdonald, 1995).

Posons

$$Z_\lambda(q, t) := z_\lambda p_\lambda \left[\frac{1-q}{1-t} \right] = z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}$$

On introduit le produit scalaire suivant sur Λ , en termes de la base $\{p_\lambda\}_\lambda$ des fonctions symétriques de puissance :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \begin{cases} Z_\lambda(q, t) & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

Définition 4.2.1. Les *polynômes de Macdonald* sont les seuls polynômes symétriques $P_\mu = P_\mu(\mathbf{z}; q, t)$ tels que :

- (1) $P_\mu = m_\mu + \sum_{\lambda \prec \mu} c_{\mu\lambda}(q, t) m_\lambda$
- (2) $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0$, si $\lambda \neq \mu$

où $c_{\mu\lambda}(q, t)$ est un polynôme dans $\mathbb{Q}(q, t)$ et \prec est l'ordre de dominance des partitions.

Macdonald prouve que le produit scalaire avec lequel on définit ces polynômes est un q, t -analogue de celui qu'on utilise pour définir les fonction de Schur. C'est-à-dire, pour $q = t$, on obtient $P_\mu(\mathbf{z}; q, q) = s_\mu(\mathbf{z})$. En posant $q = t^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$) et $t \rightarrow 1$, on obtient les polynômes de Jack, et pour le cas particulier $\alpha = 2$, on obtient les polynômes Zonaux. En posant $q = 0$, on obtient les polynômes de Hall-Littlewood.

Exemple 4.2.1.

$$\begin{aligned}
P_{2,1,1}(\mathbf{z}; q, t) &= -1/4 \frac{(t+1)(t^2+1)(q-1)}{1-qt^3} p_4 + 1/3 \frac{(t^2+t+1)(q-t)}{1-qt^3} p_1 p_3 \\
&+ 1/8 \frac{(t+1)(t^2+1)(q-1)}{1-qt^3} p_2^2 + 1/4 \frac{(qt^3 - qt^2 + t^3 - qt + t^2 - q + t - 1)}{1-qt^3} p_1^2 p_2 \\
&- 1/24 \frac{(t-1)(3qt^2 + 2qt + t^2 + q + 2t + 3)}{1-qt^3} p_1^4
\end{aligned}$$

À partir de maintenant, on considère comme polynômes de Macdonald la renormalisation des P_μ via le pléthysme :

$$H_\mu = H_\mu(\mathbf{z}; q, t) := \prod_{c \in \mu} (q^{a(c)} - t^{\ell(c)+1}) P_\mu \left[\frac{\mathbf{z}}{1-t}; q, t^{-1} \right] \quad (4.5)$$

où $a(c)$ et $\ell(c)$ sont le **bras** et la **jambe** de la case c . Ces statistiques se définissent comme :

$$a(i, j) := \mu_j - i - 1$$

$$\ell(i, j) := \mu'_i - j - 1$$

pour chaque case (i, j) dans μ . Par définition, la jambe $\ell(i, j)$ est le bras de (i, j) dans μ' .

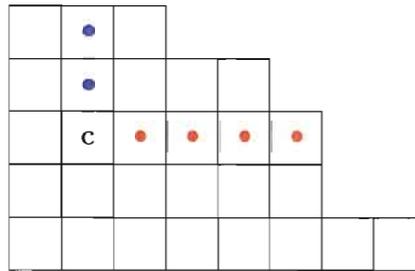


Figure 4.1 La case $c = (1, 2)$, avec $a(c) = 2$ et $\ell(c) = 4$.

Exemple 4.2.2.

$$\begin{aligned} H_{2,1,1} &= (1+t)(3t^2 + qt^2 + 2t + 2tq + 3q + 1) \frac{p_{1,1,1,1}}{24} \\ &+ (t^2 + t + q - qt^2 - tq - t^3 + 1 - qt^3) \frac{p_{2,1,1}}{4} \\ &+ (t-1)(1+t)(tq-1) \frac{p_{3,1}}{3} \\ &+ (t-1)(t^2+1)(-1+q) \frac{p_{2,2}}{8} \\ &- (1+t)(t-1)^2(-1+q) \frac{p_4}{4} \end{aligned}$$

On s'aperçoit que les coefficients du polynôme $H_{2,1,1}$ sont tous des polynômes dans $\mathbb{Z}[q, t]$. Lorsque qu'on exprime ce polynôme en termes des fonctions de Schur on obtient

$$H_{2,1,1} = s_4 + (t^2 + q + t) s_{3,1} + (qt + t^2) s_{2,2} + t(qt + t^2 + q) s_{2,1,1} + qt^3 s_{1,1,1,1}.$$

Donc, le polynôme $H_{2,1,1}$ se trouve dans $\mathbb{N}[q, t]\{s_\lambda\}_{\lambda \vdash 4}$. Il est remarquable que ce résultat soit vrai pour toutes les fonctions H_μ , comme on verra dans le prochain

chapitre. Cette observation a été faite pour la première fois par Macdonald dans (Macdonald, 1988).

On a les propriétés suivantes :

1. $H_\mu(\mathbf{z}; 0, 0) = s_n$, $H_\mu(\mathbf{z}; 0, 1) = h_\mu$, $H_\mu(\mathbf{z}; 1, 1) = s_1^n$.
2. $H_{\mu'}(\mathbf{z}; q, t) = H_\mu(\mathbf{z}; t, q)$
3. $H_\mu(\mathbf{z}; q, t) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} \omega(H_\mu(\mathbf{z}; q^{-1}, t^{-1}))$
4. $H_\mu(\mathbf{z}; q, 1) = H_{\mu_1}(\mathbf{z}; q, 1) \cdots H_{\mu_k}(\mathbf{z}; q, 1)$

En exprimant les polynômes de Macdonald dans la base des fonctions de Schur, on obtient les **nombre de q, t -Kostka** :

$$H_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda, \mu}(q, t) s_\lambda. \quad (4.6)$$

Les propriétés décrites ci-dessus pour les polynômes de Macdonald se traduisent en terme des $K_{\lambda, \mu}$ comme :

1. $K_{\lambda, \mu}(0, 0) = \delta_{\lambda, \mu}$, $K_{\lambda, \mu}(0, 1) = K_{\lambda, \mu}$, $K_{\lambda, \mu}(1, 1) = f^\lambda$.
2. $K_{\lambda, \mu}(q, t) = K_{\lambda, \mu'}(t, q)$
3. $K_{\lambda, \mu}(q, t) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} K_{\lambda', \mu}(q^{-1}, t^{-1})$

4.3 L'opérateur ∇

Afin de simplifier certaines formules où la caractéristique de Frobenius de fonctions symétriques était impliqué, F. Bergeron et A. Garsia introduis l'opérateur ∇ , dit "nabla" (Bergeron, Garsia, 1999). L'importance de cet opérateur se reflétera dans le dernier chapitre.

Définition 4.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et μ un partage de n . L'opérateur nabla ∇ est l'unique transformation linéaire dans le corps des fractions $\mathbb{Q}(q, t)$ telles que*

$$\nabla H_\mu = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} H_\mu$$

où $n(\mu) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\mu_i$ et μ' est le partage conjugué de μ .

Autrement dit, les polynômes de Macdonald modifiés sont les fonctions propres de l'opérateur ∇ . L'unicité de ∇ provient du fait que les polynômes H_μ forment une base linéaire sur l'anneau des fonctions symétriques.

CHAPITRE V

REPRÉSENTATIONS DE GARSIA-HAIMAN

Afin de démontrer la conjecture de positivité de Macdonald, Garsia et Haiman proposent un modèle de module bigradué qui pourrait être en liaison avec les polynômes de Macdonald par le caractère de Frobenius. Une partie de cette histoire est connue sous le nom de la formulation de la "conjecture $n!$ ", qui propose une interprétation combinatoire des fameux coefficients Kostka-Macdonald $K_{\lambda,\mu}(q, t)$ qui relient les polynômes de Macdonald aux les fonctions de Schur. Plus précisément, la conjecture $n!$ se divise en deux conjectures :

- Certains espaces quotients de l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ont dimension $n!$.
- Ces espaces quotients, vus comme des représentations doublement graduées du groupe symétrique, ont comme série de Hilbert les polynômes de Kostka-Macdonald, ce qui démontre la conjecture de positivité de Macdonald.

5.1 Représentations bigraduées

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ deux alphabets. On dénote $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ l'anneau des polynômes en $2n$ variables à coefficients rationnels. Le **bidegré** d'un monôme dans $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ est

$$\text{bideg}(\mathbf{x}^a \mathbf{y}^b) = (a, b),$$

où $a, b \in \mathbb{N}$. Soit $\pi_{m,k}$ l'opérateur linéaire qui projette un polynôme sur sa composante bihomogène de bidegré (m, k) . C'est-à-dire :

$$\pi_{m,k} \left(\sum_{r,s} c_{r,s} \mathbf{x}^r \mathbf{y}^s \right) = \sum_{|r|=m, |s|=k} c_{r,s} \mathbf{x}^r \mathbf{y}^s.$$

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ est dit **bihomogène**, si pour tout m et tout k ,

$$\pi_{m,k}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}.$$

L'espace \mathcal{V} est dit **bigradué** s'il contient toutes les composantes bihomogènes de chacun de ses éléments. Dans ce cas, on a la décomposition

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{m,k \geq 0} \mathcal{V}_{m,k}$$

où $\mathcal{V}_{m,k} := \pi_{m,k}(\mathcal{V})$.

On considère l'action diagonale de \mathfrak{S}_n sur l'anneau $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, définie par

$$\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}, \quad \sigma \cdot y_i = y_{\sigma(i)}.$$

Si le sous-espace \mathcal{V} bigradué est invariant sous cette action, alors toutes ses composantes bihomogènes sont invariantes aussi. Dans ce cas, on introduit un q, t -analogue du caractère d'une représentation.

Définition 5.1.1. Soit \mathcal{V} un sous-espace bigradué de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, invariant par l'action diagonale. Le caractère bigradué $\chi_{\mathcal{V}}(q, t) : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}[q, t]$ de \mathcal{V} est défini par

$$\chi_{\mathcal{V}}(q, t)(g) := \sum_{m,k \geq 0} \chi_{m,k}(g) q^k t^m \quad (5.1)$$

où $\chi_{m,k}$ est la représentation associée au sous-module $\mathcal{V}_{m,k}$.

À chaque espace \mathcal{V} , tel que vu précédemment, on peut associer une fonction symétrique via la caractéristique de Frobenius bigraduée :

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{V}) := \sum_{m,k \geq 0} \mathcal{F}(\chi_{m,k}) q^k t^m. \quad (5.2)$$

On définit aussi sa **série bigraduée de Hilbert** :

$$\text{Hilb}_{\mathcal{V}}(q, t) := \sum_{m, k \geq 0} \dim(\mathcal{V}_{m, k}) q^k t^m. \quad (5.3)$$

Soit χ le caractère associé au \mathfrak{S}_n -module \mathcal{V} et soit $\chi = \sum_{\lambda \vdash n} d_{\lambda} \chi^{\lambda}$ la décomposition de χ en caractères irréductibles. Comme $\deg(\chi^{\lambda}) = \chi^{\lambda}(1) = \langle s_{\lambda}, p_1^n \rangle$ pour chaque λ , la dimension de \mathcal{V} est égale à $\langle \mathcal{F}(\chi), p_1^n \rangle$. Ainsi, la série de Hilbert du \mathfrak{S}_n -module \mathcal{V} est déterminée par la relation

$$\boxed{\text{Hilb}_{\mathcal{V}}(q, t) = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(q, t), p_1^n \rangle} \quad (5.4)$$

Par construction, la série de Frobenius bigraduée est Schur-positve, puisque :

$$\chi_{\mathcal{V}}(q, t) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi^{\lambda} d_{\lambda, \mathcal{V}}(q, t), \quad (5.5)$$

où $d_{\lambda, \mathcal{V}}(q, t) := \sum_{m, k \geq 0} d_{m, k}(\lambda) q^k t^m$ et $d_{m, k}(\lambda)$ est la multiplicité de \mathcal{S}^{λ} dans $\mathcal{V}_{m, k}$. Ainsi,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(q, t) = \sum_{\lambda \vdash n} s_{\lambda} d_{\lambda, \mathcal{V}}(q, t). \quad (5.6)$$

C'est-à-dire :

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(q, t), s_{\lambda} \rangle \in \mathbb{N}[q, t]. \quad (5.7)$$

L'outil de base pour démontrer qu'une fonction symétrique est Schur-positve consiste à trouver un certain \mathfrak{S}_n -module. L'image de ce dernier par la caractéristique de Frobenius bigraduée doit être la fonction symétrique.

5.2 La conjecture de positivité de Macdonald

En principe, les $K_{\lambda\mu}(q, t)$ qui apparaissent dans l'expression (4.6) sont des fonctions rationnelles en q et t . Macdonald lui-même avait conjecturé qu'elles étaient des polynômes à coefficients non négatifs. Cette conjecture est connue comme la **conjecture de "positivité" de Macdonald**.

Afin de prouver cette conjecture, Garsia et Haiman (Garsia, Haiman, 1993) ont proposé un \mathfrak{S}_n -module tel que $K_{\lambda\mu}(q, t)$ soit la série de Frobenius de ce même module. Ce module est connu sous le nom de **module de Garsia-Haiman**. Avant de l'introduire, on doit voir la notion de diagramme dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

5.3 Déterminants de diagrammes

Soit $\mathbf{d} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ un diagramme du réseau carré. Le **déterminant du diagramme \mathbf{d}** est défini comme

$$\Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(x_k^j y_k^i)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (i,j) \in \mathbf{d}}} \quad (5.8)$$

On utilisera pour cette définition l'ordre lexicographique sur les cases des diagrammes de \mathbf{d} .

On a les propriétés suivantes :

1. Ce déterminant est nul s'il a au moins deux lignes ou deux colonnes égales. Donc, $\Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est non nul si et seulement si \mathbf{d} est constitué de n cases distinctes. Dans ce cas, c'est un polynôme bihomogène de degré $|a| = a_1 + \dots + a_n$ en \mathbf{x} et $|b| = b_1 + \dots + b_n$ en \mathbf{y} . L'ordre lexicographique permet d'associer à chaque diagramme un unique déterminant.
2. Dans le cas d'un partage μ , le déterminant du diagramme correspondant est noté Δ_{μ} . Pour la spécialisation $\mu = (1^n)$, on obtient le déterminant de Vandermonde sur l'alphabet \mathbf{x} , tandis que $\mu = (n)$ donne le Vandermonde sur \mathbf{y} .
3. $\Delta_{\mathbf{d}}$ est antisymétrique sous l'action diagonale de \mathfrak{S}_n .
4. $\Delta_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta_{\mu'}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

5.4 Modules de Garsia-Haiman

Définition 5.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et μ un partage de n . Le module de Garsia-Haiman associé au partage μ est l'espace*

$$\mathcal{H}_\mu = \mathcal{L}_\partial[\Delta_\mu]$$

où Δ_μ est le déterminant du diagramme induit par μ .

Ces modules correspondent à une q, t -généralisation des espaces μ -harmoniques introduits dans le chapitre 3 (voir définition (3.7.2)). On a les propriétés suivantes :

1. Cet espace est le plus petit espace de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ qui soit fermé par dérivations partielles et qui contient $\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il est aussi un sous-espace bihomogène invariant de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. On peut donc calculer la caractéristique de Frobenius bigraduée.
2. $\mathcal{H}_\mu \simeq \mathcal{H}_{\mu'}$.
3. $\pi_{0,0}(\mathcal{H}_n)$ induit la représentation triviale de \mathfrak{S}_n . En effet, l'espace $\pi_{0,0}(\mathcal{H}_n)$ est engendré par 1.
4. $\mathcal{H}_{(1^n)} \simeq_{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C} \cdot \mathfrak{S}_n \simeq \mathbb{C} \uparrow_1^{\mathfrak{S}_n}$
5. $\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu) = \mathcal{F}_{t,q}(\mathcal{H}_{\mu'})$
6. $\omega \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} \mathcal{F}_{q^{-1}t^{-1}}(\mathcal{H}_\mu)$

L'importance des modules de Garsia-Haiman est décrite par le théorème suivant.

Théorème 5.4.1 (Haiman, 2001). *Pour tout $\mu \vdash n$, on a*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu) = H_\mu. \tag{5.9}$$

Ce résultat permet de démontrer la conjecture de positivité de Macdonald.

Corollaire 5.4.1.1 (Positivité de Macdonald). *Les coefficients q, t -Kostka sont dans des polynômes dans $\mathbb{N}[q, t]$.*

Démonstration. Par la décomposition (5.6) du caractère bigradué de Frobenius :

$$K_{\lambda,\mu}(q, t) = \sum_{m,k \geq 0} \text{mult}(\mathcal{S}^\lambda, \pi_{m,k}(\mathcal{H}^\mu)) q^k t^m.$$

□

Puisque $K_{\lambda,\mu}(1, 1) = f^\lambda$, par l'équation (5.4) on obtient

$$\dim(\mathcal{H}_\mu) = \sum_{m,k \geq 0} \dim \pi_{m,k}(\mathcal{H}_\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda f^\lambda = n!. \quad (5.10)$$

Un fait remarquable (et pas évident) est l'équivalence du théorème (5.4.1) avec le résultat (5.10). Après d'avoir présenté les modules bigradués et formulé le théorème (5.4.1), Haiman prouve dans (Haiman 1999) que $\dim(\mathcal{H}_\mu) = n!$ implique que $\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu) = H_\mu$. Voilà pourquoi ces résultats étaient connus sous le nom de "conjecture $n!$ ".

Exemple 5.4.1. Si $\lambda = (2, 1)$, on a

$$\Delta_{(2,1)} = x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2$$

En calculant une base de l'espace $\mathcal{H}_{(2,1)}$ à partir de $\Delta_{(2,1)}$ on obtient

\mathcal{B}	Bidegré	Transformée de Frobenius
$\Delta_{(2,1)}$	(1, 1)	$s_{1,1,1}$
$(x_1 - x_2),$ $(x_1 - x_3)$	(1, 0)	$s_{2,1}$
$(y_1 - y_2),$ $(y_1 - y_3)$	(0, 1)	$s_{2,1}$
1	(0, 0)	s_3

On obtient :

$$H_{(2,1)} = s_3 + (q + t)s_{(2,1)} + qts_{(1,1,1)}$$

5.5 Espace des harmoniques diagonaux

Un résultat classique dans la théorie des invariants montre que chaque action de groupe fini dans l'anneau des polynômes a un espace de polynômes harmoniques associé, qui sont les solutions des opérateurs différentiels polynomiales invariants homogènes (non-triviales) correspondant (voir par exemple (Weyl, 1946)). Dans notre cas, l'action diagonale définie dans la section 1 permet de construire un espace des polynômes harmoniques en deux variables. L'espace en question est appelé **l'espace des harmoniques diagonaux**. Un résultat principal, qu'on démontrera dans le dernier chapitre, est que cet espace contient l'espace \mathcal{H}_μ . Une première question qui vient à l'étude de cet espace est de comparer les dimensions et transformé de Frobenius bigradués de deux espaces. Cette considération apportera des bonus algébriques et combinatoires, comme on verra dans la suite de cette section.

On rappelle que l'anneau des **polynômes \mathfrak{S}_n -invariants** est

$$\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^{\mathfrak{S}_n} := \{p \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] : \sigma \cdot p = p, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

Définition 5.5.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'idéal \mathcal{I}_n dans $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ engendré par tous les polynômes \mathfrak{S}_n -invariant sans terme constant.

On appelle **l'espace \mathfrak{S}_n -coinvariant** au quotient

$$R_{\mathfrak{S}_n} := \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \mathcal{I}_n$$

Si $p \in \mathcal{I}_n$, alors chacune de ses composantes homogènes appartient à \mathcal{I}_n . Alors, \mathcal{I}_n est un idéal bihomogène et R_n a une structure d'anneau bigradué :

$$R_{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{m,k \geq 0} R_{m,k} \tag{5.11}$$

où $R_{m,k} = \pi_{m,k}(R_{\mathfrak{S}_n})$

L'idéal \mathcal{I}_n est un \mathfrak{S}_n -sous-module de l'anneau $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Donc, on peut considérer l'action diagonale sur l'anneau quotient R_n . Comme l'action préserve le bidegré, chaque $(R_n)_{m,k}$ est un \mathfrak{S}_n -module.

Cette anneau est engendré par les polynômes

$$p_{m,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n x_i^m y_i^k, \quad 1 \leq m + k \leq n.$$

(c.f. (Weyl, 1946))

On s'intéresse à étudier l'espace de tous les dérivées de Δ_μ :

$$D_\mu := \{ p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_\mu : p \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \} \quad (5.12)$$

On définit le produit scalaire suivant sur $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$:

$$\langle p, q \rangle := p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}, \mathbf{y}=0} \quad (5.13)$$

L'effet de ce produit sur les monômes donne :

$$\langle \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta, \mathbf{x}^\gamma \mathbf{y}^\delta \rangle = \begin{cases} \alpha! \beta! & \text{si } \alpha = \gamma \text{ et } \beta = \delta \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (5.14)$$

Ainsi, cette forme est symétrique et non-dégénérée, pour chaque sous-espace homogène $\pi_{r,s}(\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$. Ceci implique que $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/\mathcal{I}_\mu$ est isomorphe, comme représentation bigraduée de \mathfrak{S}_n , au complément orthogonal J_μ^\perp .

Proposition 5.5.1 (Haiman, 1994). *Soit \mathcal{I}_μ l'idéal des polynômes $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ tels que $p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_\mu = 0$. Alors le quotient $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/\mathcal{I}_\mu$ est isomorphe à D_μ comme représentation de \mathfrak{S}_n doublement graduée.*

Démonstration. On a vu déjà que $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/\mathcal{I}_\mu \simeq \mathcal{I}_\mu^\perp$. On prétend que $D_\mu = \mathcal{I}_\mu^\perp$. Soit $f \in \mathcal{I}_\mu$. Alors $\langle f, \Delta_\mu \rangle = 0$ et $\Delta_\mu \in \mathcal{I}_\mu^\perp$.

Soit $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Puisque \mathcal{I}_μ est un idéal, le polynôme $f p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ appartient à \mathcal{I}_μ . Par définition du produit scalaire on a

$$0 = \langle p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f, \Delta_\mu \rangle = \langle f, p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_\mu \rangle$$

Donc \mathcal{I}_μ^\perp est fermé par dérivations et ainsi cet espace contient D_μ .

On définit :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \mathcal{I}_\mu &\longrightarrow D_\mu \\ p &\longmapsto p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_\mu\end{aligned}$$

Si $p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_\mu = 0$, alors par définition $p \in J_\mu$, d'où $\text{Ker}(\varphi) = J_\mu$. Il est clair que φ est aussi surjectif par définition de D_μ . C'est donc un isomorphisme d'espace vectoriel. Puisque \mathcal{I}_μ^\perp et D_μ sont des espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(\mathcal{I}_\mu^\perp) = \dim(\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \mathcal{I}_\mu) = \dim(D_\mu)$$

Comme $D_\mu \subseteq \mathcal{I}_\mu^\perp$, on doit avoir que ces deux espaces sont égaux. \square

Exemple 5.5.1. Pour $n = 2$, les polynômes harmoniques diagonaux sont les solutions polynomiales aux systèmes d'équations :

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{x_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \partial_{y_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{y_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \partial_{x_1, y_1}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{x_2, y_2}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \partial_{y_1}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{y_2}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0\end{aligned}$$

Après quelques calculs, on trouve qu'une base pour \mathcal{D}_2 est $\{1, x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$.

On voit donc que cet espace contient les espaces de Garsia-Haiman \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_{11} .

De plus, \mathcal{D}_n satisfait les conditions suivantes :

- a) \mathcal{D}_n est fermé pour les dérivations partielles ∂x_i et ∂y_i ;
- b) \mathcal{D}_n est fermé par rapport aux opérateurs

$$E_k := \sum_{i=1}^n y_i \partial x_i^k \quad , \quad F_\ell := \sum_{i=1}^n x_i \partial y_i^\ell. \quad (5.15)$$

Théorème 5.5.1 (Haiman, 2001). \mathcal{D}_n est le plus petit sous-espace de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ qui contient $\Delta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et satisfait les conditions a) et b) ci-dessus.

Théorème 5.5.2 (Haiman, 2001). $\dim(\mathcal{D}_n) = (n + 1)^{n-1}$

Comme l'espace \mathcal{D}_n est bihomogène et \mathfrak{S}_n -invariant, on peut considérer sa caractéristique de Frobenius bigraduée. Dans (Garsia, Haiman 1996a), Garsia et Haiman proposent une formule pour ce caractère. Or, la formule conjecturée, écrite en termes des polynômes de Macdonald, est plutôt compliquée. Cependant, avec l'introduction de l'opérateur nabla, cette formulation a une remarquable simplicité.

Théorème 5.5.3 (Haiman, 2001). *La caractéristique de Frobenius bigraduée de l'espace des harmoniques diagonaux est :*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_n) = \nabla(e_n).$$

CHAPITRE VI

CERTAINS PROBLÈMES OUVERTS

6.1 L'opérateur nabla

Dans les chapitres précédents, on a établi une interprétation algébrique pour les polynômes $\nabla(H_\mu)/q^{n(\mu')} t^{n(\mu)}$ et $\nabla(e_k)$. On a vu qu'ils sont reliés à des \mathfrak{S}_n -modules bigradués par la transformée de Frobenius, ou, de façon équivalente, que ce sont des polynômes Schur-positifs. Dans ce qui suit, on présente une brève discussion sur la Schur-positivité de l'opérateur nabla appliquée aux autres fonctions symétriques vues dans cette monographie.

Nabla des fonctions de Schur

Dans ce paragraphe nous suivons (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999). On étudie les propriétés des coefficients $a_{\lambda,\mu} = a_{\lambda,\mu}(q, t)$ dans l'expression

$$\nabla(s_\lambda) = \sum_{\mu} a_{\lambda,\mu} s_\mu$$

pour $\lambda, \mu \vdash n$. Pour mieux visualiser le comportement de $\nabla(s_\lambda)$, on écrira chaque polynôme $a_{\lambda,\mu}$ de façon matricielle. Par exemple :

$$t^3 q^3 (a + bq + cq^2 + dt + etq + ft^2) \longleftrightarrow t^3 q^3 \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

où les partages sont ordonnées par l'ordre lexicographique décroissant. On présente

à continuation les tables pour $n = 2$ et $n = 3$:

	s_2	$s_{1,1}$
$\nabla(s_2)$	0	$-tq$
$\nabla(s_1)$	1	$t + q$

	s_3	s_{21}	s_{111}
$\nabla(s_3)$	0	t^2q^2	$t^2q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\nabla(s_{21})$	0	$-tq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-tq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\nabla(s_{111})$	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Une première inspection des tables révèle que $\nabla(s_\mu)$ semble toujours être Schur-positive ou Schur-négative. En étudiant les tables pour $n \leq 6$, on trouve dans (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999) la conjecture suivante :

Conjecture 6.1.1 (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler). *Pour tout λ et μ , le polynôme*

$$(-1)^{\kappa(\lambda)} a_{\lambda, \mu} = (-1)^{\kappa(\lambda)} \langle \nabla(s_\lambda), s_\mu \rangle$$

a des coefficients entiers positifs, avec $\kappa(\lambda) = \binom{\ell(\lambda)}{2} + \sum_{\lambda'_i < i-1} (i-1-\lambda'_i)$.

Cette conjecture s'avère vraie pour le cas $t = 1$ (Lenart, 2000). Après des essais sur ordinateur, on voit que ce phénomène apparait aussi pour les fonctions monomiales et de puissance.

Conjecture 6.1.2 (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler). *Pour tout $n \geq 1$ et $\lambda, \mu \vdash$*

n , on a

$$(-1)^{n-\ell(\mu)} \langle \nabla(m_\mu), s_\lambda \rangle \in \mathbb{N}[q, t],$$

Dans le cas des fonctions de puissance, on trouve un étude combinatoire dans (Can, Loehr, 2006) qui prouve la proposition suivante.

Proposition 6.1.1 (Can, Loehr).

$$(-1)^{n-1} \langle \nabla(p_n), s_{1^n} \rangle \in \mathbb{N}[q, t].$$

6.2 Espaces fermés par opérateurs de dérivation

Dans cette section on suit (Bergeron, 2008).

Comme vu précédemment, l'espace $\mathcal{D}_n(\mathbf{x})$ se définit comme le plus petit sous-espace de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ qui contient le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\mathbf{x})$ et qui est fermé par les dérivées partielles et l'opérateur E_k . C'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_n(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\partial, E}[\Delta_n(\mathbf{x})].$$

La prochaine étape de cette étude consiste à développer la structure de l'espace $\mathcal{L}_{\partial, E}[A]$, pour un sous-espace A de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ engendré par un ensemble de vecteurs invariants. Un cas intéressant est de choisir A engendré par un ensemble qui contient des polynômes antisymétriques, comme $\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (dans ce cas, A devient un sous-espace de \mathcal{D}_n). Pour le cas d'une seule famille de variables \mathbf{x} , on peut commencer par choisir A comme étant l'espace engendré par les polynômes alternants $e_k(\mathbf{x})\Delta_n(\mathbf{x})$. Posons $\mathcal{D}_{n,k}(\mathbf{x})$ l'espace engendré résultant. Le cas $k = 0$ est déjà connu, puisque $\mathcal{D}_{n,0} \simeq \mathcal{D}_n$, on obtient :

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,0}) = \nabla(e_n) \tag{6.1}$$

Pour le cas $k = n$, il suffit de réaliser que les générateurs associés au diagramme troué $(n+1)/(0,0)$ sont $e_n(\mathbf{x})\Delta_n(\mathbf{x})$, d'où

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,n}) = s_1^\perp \nabla(e_{n+1}). \tag{6.2}$$

On construit une famille d'opérateurs $\{\mathbf{D}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sur l'espace des fonctions symétriques, défini par

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{D}_k f(\mathbf{z}) y^k := f[\mathbf{z} + M/y] E[-y] \quad (6.3)$$

où $M = (1-t)(1-q)$ et $E(\zeta) = \sum_{m \geq 0} e_m \zeta^m$. Il n'est pas difficile à voir que

$$\nabla^{-1} s_1^\perp \nabla = \frac{\mathbf{D}_{-1}}{M}$$

Ainsi, on a

$$s_1^\perp \nabla(e_{n+1}(\mathbf{z})) = \nabla \left(\frac{\mathbf{D}_{-1}(e_{n+1}(\mathbf{z}))}{M} \right).$$

Par la définition des \mathbf{D}_k , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \mathbf{D}_{-1}(e_{n+1}(\mathbf{z})) &= \left(\frac{1}{M} e_{n+1}[\mathbf{z} + M/u] E[-u] \right) \Big|_{u^{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{n+1} e_j[\mathbf{z}] e_{n+1-j}[M/u] E[-u] \right) \Big|_{u^{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{n+1} e_j[\mathbf{z}] \frac{e_{n+1-j}[M]}{u^{n+1-j}} \sum_{m \geq 0} (-u)^m e_m[\mathbf{z}] \right) \Big|_{u^{-1}} \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{m \geq 0} \sum_{j=0}^{n+1} e_j[\mathbf{z}] \frac{e_{n+1-j}[M]}{u^{n+1-j}} (-1)^m e_m[\mathbf{z}] u^{m-n+j-1} \right) \Big|_{u^{-1}}. \end{aligned}$$

Le choix $m - n + j - 1 = -1$ dans la série à droite est équivalent à prendre $m = n - j$, d'où l'égalité

$$\frac{1}{M} \mathbf{D}_{-1}(e_{n+1}(\mathbf{z})) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n-j} e_{n+1-j}[M] e_{n-j}[\mathbf{z}] e_j[\mathbf{z}]. \quad (6.4)$$

On peut vérifier que $e_n[M] = (-1)^{n-1} [n]_{q,t} M$. Ainsi :

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,n}) = \frac{1}{M} \mathbf{D}_{-1}(e_{n+1}(\mathbf{z})) = \sum_{j=0}^{n+1} [n+1-j]_{q,t} \nabla(e_{n-j}[\mathbf{z}] e_j[\mathbf{z}]). \quad (6.5)$$

Ce résultat amène à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 6.2.1 (Bergeron, F.).

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,k}) = \sum_{j=0}^k [k-j+1]_{q,t} \nabla(e_j e_{n-j})$$

pour tout $0 \leq k \leq n$.

Pour $k = 1$, on obtient :

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,1}) = (q+t+1)\nabla(e_n) + \nabla(e_1 e_{n-1})$$

Puisque $e_n = 0$ et $s_{2,1^{n-1}} = e_1 e_{n-1} - e_n$, on a

$$\boxed{\nabla(-s_{2,1^{n-1}}) = \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,1}) - (q+t+1)\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{D}_{n,0})} \quad (6.6)$$

Étant donné que $\mathcal{D}_n \oplus e_n(\mathbf{x})\mathcal{D}_n \oplus \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n,1}$, l'analogie de la formule ci-dessus avec cette inclusion et l'approche (6.2.1) amène à conjecturer la formule suivante :

Conjecture 6.2.2 (Bergeron). *Soit \mathcal{O}_n le complément orthogonal de l'espace $\mathcal{D}_{n,1}$ dans l'espace $\mathcal{D}_n \oplus e_n(\mathbf{x})\mathcal{D}_n \oplus \mathcal{D}_n$. Alors*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{O}_n) = \nabla(-s_{2,1^{n-1}})$$

6.3 Espaces d-harmoniques

Dans cette section et les suivantes on suit la référence (Bergeron, Bergeron, Garcia, Haiman, Tesler, 1999).

Si $P \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, on dénote par $P(\partial) = P(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}})$ l'opération de dérivation obtenue en remplaçant les variables x_i et y_i respectivement par ∂x_i et ∂y_i .

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, on note $\mathcal{L}_{\partial}[P]$ l'espace vectoriel engendré par toutes les dérivées partielles de P :

$$\mathcal{L}_{\partial}[P] = \mathbb{Q}[\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}]P. \quad (6.7)$$

À tout diagramme \mathbf{d} , on associe un espace $\mathcal{H}_{\mathbf{d}} := \mathcal{L}_{\partial}[\Delta_{\mathbf{d}}]$, appelé **l'espace des \mathbf{d} -harmoniques**. Puisque $\Delta_{\mathbf{d}}$ est bihomogène, ce module induit une bigraduation. On a donc la décomposition en somme directe suivante :

$$\mathcal{H}_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{r,s \geq 0} \pi_{r,s}(\mathcal{H}_{\mathbf{d}}).$$

Un analogue des sommes de puissances en deux variables est le polynôme

$$p_{h,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n x_i^h y_i^k,$$

où $h+k \geq 1$. Les propositions qui suivent étudient l'effet des opérateurs $p_{h,k}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}})$ sur l'espace des \mathbf{d} -harmoniques.

Soit $\mathbf{d} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ un diagramme à n cases. On rappelle que son déterminant est :

$$\Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma_1}^{b_1} \dots x_{\sigma_n}^{b_n} y_{\sigma_1}^{a_1} \dots y_{\sigma_n}^{a_n}.$$

Si on applique l'opérateur $p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}})$ au déterminant ci-dessus on obtient :

$$p(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial^h}{\partial x_i^h} \frac{\partial^k}{\partial y_i^k} (x_{\sigma_1}^{b_1} \dots x_{\sigma_n}^{b_n} y_{\sigma_1}^{a_1} \dots y_{\sigma_n}^{a_n}). \quad (6.8)$$

Supposons que $h \leq a_i, k \leq b_i$ pour tout $i \in [n]$. On définit $\mathbf{d}^{(i)}$ comme le diagramme obtenu de \mathbf{d} en remplaçant la case (a_i, b_i) par $(a_i - h, b_i - k)$. Alors :

$$p_{h,k}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(\sigma) \frac{a_i!}{(a_i - h)!} \frac{b_i!}{(b_i - k)!} \Delta_{\mathbf{d}^{(i)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Cependant, si la case $(a_i - h, b_i - k)$ coïncidait avec une des cases du diagramme \mathbf{d} , il y aurait deux colonnes répétées dans la matrice $(x_k^j y_k^i)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (i,j) \in \mathbf{d}^{(i)}}}$ et ainsi $\Delta_{\mathbf{d}^{(i)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Aussi, si $h > a_i$ ou $k > b_i$ pour un certain $i \in [n]$, alors l'expression (6.8) est nulle.

On a donc démontré le résultat suivant :

Proposition 6.3.1 (Bergeron *et al.*, 1999). *Soit \mathbf{d} un diagramme de n cases et $h, k \geq 0$ deux nombres entiers tels que $h + k \geq 1$. Alors :*

$$p_{h,k}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha(\mathbf{d}^{(i)}) \Delta_{\mathbf{d}^{(i)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.9)$$

où $\alpha(\mathbf{d}^{(i)})$ est un scalaire égal à :

- 0, si une des coordonnées du point $(a_i - h, b_i - k)$ est négative, ou si $(a_i - h, b_i - k)$ est une autre case de \mathbf{d} ; sinon
- $\text{sgn}(\sigma) \cdot \frac{a_i!}{(a_i - h)!} \cdot \frac{b_i!}{(b_i - k)!}$, où σ est une permutation qui ré-ordonne \mathbf{d} de façon à ce que la case (a_i, b_i) prenne la position que $(a_i - h, b_i - k)$ avait dans $\mathbf{d}^{(i)}$ par l'ordre lexicographique.

Corollaire 6.3.0.1. *L'espace \mathcal{H}_{μ} est contenu dans \mathcal{D}_{μ} .*

Démonstration. Soit μ un partage. Puisque bouger une case dans le diagramme μ implique ou bien la faire descendre vers l'axe négatif, ou bien la faire superposer avec une autre case de μ , on obtient que

$$p_{h,k}(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \Delta_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

pour tout $h + k \geq 1$ □

6.4 Modules de Garsia-Haiman troués

Il est naturel de se demander quelle est la caractéristique de Frobenius pour les espaces $H_{\mathbf{d}}$, pour n'importe quel diagramme \mathbf{d} dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Une première approche de ce problème consiste à considérer des diagrammes formés par des "partages troués." Toute cette section est basé sur les articles (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999) et (Bergeron, Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999). Les généralisation faites dans cette section nous permettrons de trouver une possible voie alternative à celle de Haiman pour démontrer la conjecture $n!$.

Définition 6.4.1. Soit μ un partage de $n + 1$. On dénote μ/ij le diagramme obtenu en enlevant la case (i, j) du diagramme de Ferrer de μ . Nous qualifierons μ/ij de *partage trouée*.

Soit μ un partage de n . Étant donné (i, j) une case du diagramme induit par μ , on définit l'ombre de (i, j) comme étant

$$\mathbf{Omb}(i, j) = \{(i', j') \in \mu \mid (i, j) \leq (i', j')\}.$$

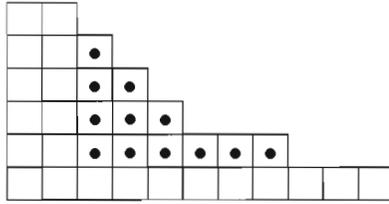


Figure 6.1 L'ombre de la case $(2, 1)$ dans le diagramme de Ferrer.

On a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{H}_{\mu/0,0} \simeq \mathcal{H}_{\mu}$
2. Soit (i, j) une case du partage μ . Alors, $\mathcal{H}_{\mu/i'j'} \subseteq \mathcal{H}_{\mu/ij}$, pour toute case (i', j') dans $\mathbf{Omb}(i, j)$.

Définition 6.4.2. Soit μ un partage de $n + 1$ et (i, j) une case fixe de μ . On considère la famille $\{H_{\mu/ij}\}_{i,j}$ de fonctions symétriques définies récursivement comme suit :

$$H_{\mu/ij} = \frac{t^{\ell} - q^{a+1}}{t^{\ell} - q^a} H_{\mu/i,j+1} + \frac{t^{\ell+1} - q^a}{t^{\ell} - q^a} H_{\mu/i+1,j} - \frac{t^{\ell+1} - q^{a+1}}{t^{\ell} - q^a} H_{\mu/i+1,j+1} \quad (6.10)$$

où a et ℓ dénotent le bras et la jambe de la case (i, j) , respectivement, avec les conditions de bords suivantes :

- (1) $H_{\mu/ij} = 0$, si (i, j) n'est pas dans μ ;
- (2) $H_{\mu/ij} = H_{\nu}$, si (i, j) est un coin de μ et en plus $\mu/i, j$ coïncide avec ν .

Exemple 6.4.1. Considérons le partage $(2, 2, 1) \vdash 5$. Les coins de ce partage sont $(1, 1)$ et $(0, 2)$. Par les conditions de bord, on a

$$H_{2,2,1/1,1} = H_{2,1,1} = s_4 + (t^2 + t + q) s_{3,1} + (tq + t^2) s_{2,2} + t(tq + q + t^2) s_{2,1,1} + qt^3 s_{1,1,1,1},$$

$$H_{2,2,1/0,1} = H_{2,2} = s_4 + (tq + q + t) s_{3,1} + (t^2 + q^2) s_{2,2} + qt(q + 1 + t) s_{2,1,1} + t^2 q^2 s_{1,1,1,1}.$$

Calculons $H_{2,2,1/0,1}$ à l'aide de la récurrence. On a :

$$H_{2,2,1/0,1} = \frac{t - q^2}{t - q} H_{2,2,1/0,2} + \frac{t^2 - q}{t - q} H_{2,2,1/1,2} - \frac{t^2 - q^2}{t - q} H_{2,2,1/1,2}$$

Puisque $(1, 2)$ n'est pas une case de $(2, 2, 1)$, le terme $H_{2,2,1/1,2}$ est nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned} H_{2,2,1/0,1} &= (q + t + 1)s_4 + (qt^3 + q^2 + 2tq + t^2q + q^2t + q + t + t^2) s_{3,1} \\ &\quad + (t^3 + q^3 + 2qt^2 + tq^2 + t^2) s_{2,2} + (q^3t + qt^2 + 2q^2t^2 + 2qt^3 + qt) s_{2,1,1} \\ &\quad + (q^3t^2 + t^3q^2 + qt^4) s_{1,1,1,1}. \end{aligned}$$

Bien que les solutions de la récurrence (6.4.2) s'écrivent en principe comme des $\mathbb{Q}(q, t)$ -combinaison linéaire, on trouve dans l'exemple que $H_{2,2,1/0,1}$ est Schur-positive. Ce résultat, loin d'être évident, semble être vrai pour tout $H_{\mu/i,j}$.

Conjecture 6.4.1 (Bergeron *et al.*, 1999). *Soit μ un partage et (i, j) une case de μ . Alors, $\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_{\mu \setminus \{i,j\}}) = H_{\mu/i,j}$.*

Selon ce résultat, la notion de modules de Garsia-Haiman trouvées a l'aire d'être une bonne voie pour construire une généralisation des travaux de Garsia-Haiman. Rappelons que si $\mu \vdash n$, alors

$$H_{\mu}[\mathbf{z}; 1, 1] = h_1^n,$$

où h_1^n est le caractère de la représentation régulière. On aimerait regarder le résultat analogue pour les modules $\mathcal{H}_{\mu/i,j}$ trouvés. En fait, on a la conjecture :

Conjecture 6.4.2 (Bergeron *et al.*, 1999). *Soit μ un partage de $n + 1$ et soit (i, j) une case de μ . Alors, le \mathfrak{S}_n -module $\mathcal{H}_{\mu/ij}$ se décompose en somme directe de $|\mathbf{Omb}(i, j)|$ copies de la représentation régulière. C'est-à-dire :*

$$\dim(\mathcal{H}_{\mu/ij}) = |\mathbf{Omb}(i, j)| \cdot n!.$$

Règle de Pieri généralisée

Rappelons que s_1^\perp dénote l'opérateur adjoint "multiplication par s_1 ", par rapport au produit scalaire usuel des fonctions symétriques. Une conséquence de la règle de Pieri est :

$$s_1^\perp s_\lambda = \sum_{\nu \rightarrow \lambda} s_\nu \quad (6.11)$$

où " $\nu \rightarrow \lambda$ " indique que le partage ν est obtenue de λ en lui enlevant un de ses coins. On peut généraliser la formule de Pieri en termes des polynômes de Macdonald comme suit :

Théorème 6.4.1 (Macdonald).

$$s_1^\perp H_\mu(\mathbf{z}; q, t) = \sum_{\nu \rightarrow \mu} c_{\mu\nu}(q, t) H_\nu(\mathbf{z}; q, t)$$

avec

$$c_{\mu\nu}(q, t) := \prod_{(i,j) \in \mathcal{R}_{\mu/\nu}} \frac{t^{\ell(i,j)} - q^{a(i,j)+1}}{t^{\ell(i,j)} - q^{a(i,j)}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{C}_{\mu/\nu}} \frac{t^{\ell(i,j)+1} - q^{a(i,j)}}{t^{\ell(i,j)} - q^{a(i,j)}}$$

où $\mathcal{R}_{\mu/\nu}$ (respectivement $\mathcal{C}_{\mu/\nu}$) représente l'ensemble des cases de ν qui sont sur la même ligne (respectivement colonne) que la case que nous devons retirer de μ pour obtenir ν . Notons aussi $\nu \rightarrow \mu$ pour indiquer que ν s'obtient de μ en enlevant un coin de cette dernière.

Il est démontré dans (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999) que la récurrence (6.10) est équivalente à la suivante conjecture :

Conjecture 6.4.3. *Soit (i, j) une case de μ . Alors, on a*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_{\mu/ij}) = \sum_{\rho \rightarrow \nu} c_{\mu\nu}(q, t) H_{\mu-\tau+\rho}(\mathbf{z}; q, t)$$

où τ est le diagramme de Ferrer contenu dans l'ombre de (i, j) et $\mu - \tau + \tau$ veut dire "remplacé τ par ρ dans l'ombre de (i, j) ".

Considérons, à mode d'exemple, le cas $(i, j) = (0, 0)$. Posons $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_{n+1}$ et $\mathbf{y}' = y_1, \dots, y_{n+1}$. Soit $\varphi : \mathbb{C}[\mathbf{x}', \mathbf{y}'] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ la transformation linéaire défini comme

$$\varphi(f(\mathbf{x}', \mathbf{y}')) := f(\mathbf{x}', \mathbf{y}')|_{x_{n+1}=y_{n+1}=0}$$

Cette fonction préserve le bidegré et vérifié que $\varphi(\Delta_\mu(\mathbf{x}')) = \Delta_{\mu/0,0}(\mathbf{x})$. L'espace \mathcal{H}_n peut être considéré un \mathfrak{S}_{n-1} -module en regardant \mathfrak{S}_{n-1} comme le sous-groupe de \mathfrak{S}_n qui laisse fixé les variables x_n et y_n . D'ici que

$$\mathcal{H}_n \simeq \varphi(\mathcal{H}_n)$$

et qu'on puisse considérer φ restreint au isomorphisme de \mathfrak{S}_n -module :

$$\varphi : \mathcal{H}_\mu \downarrow_{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mu/0,0}$$

en vertu de la règle de Littlewood-Richardson, on a

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu \downarrow_{\mathfrak{S}_n}) = s_1^\perp \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu)$$

Cette observations, unies à la formule de Pieri énoncé par Macdonald donne le résultat suivant :

Théorème 6.4.2 (Bergeron, Bergeron *et al.*, 1999). *Pout tout μ :*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_{\mu \setminus \{(0,0)\}}) = s_1^\perp \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_\mu).$$

En particulier, $\mathcal{H}_{\mu \setminus \{(0,0)\}}$ est la restriction de \mathfrak{S}_n de la \mathfrak{S}_{n+1} -représentation \mathcal{H}_μ et on a

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_{\mu/0,0}) = \sum_{\nu \rightarrow \mu} c_{\mu\nu}(q, t) H_\nu.$$

Ce dernier résultat, avec la conjecture (6.4.2) confirme de façon remarquable la généralisation des \mathfrak{S}_n -modules de Garsia-Haiman troués. En effet, si $\mu \vdash n + 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{H}_{\mu/0,0})|_{q=t=1} &= |\mathbf{Omb}(0,0)| h_1^n \\ &= (n+1) h_1^n \end{aligned}$$

Ainsi, $\dim(\mathcal{H}_{\mu/0,0}) = (n+1)!$. Or $\mathcal{H}_{\mu/0,0} \simeq \mathcal{H}_\mu$, d'où l'on obtiendrait une preuve de la conjecture $n!$.

Opérateur dérivation et conjecture $n!$

Une deuxième équivalence à la conjecture 6.3.1 faite dans (Bergeron, Garsia, Haiman, Tesler, 1999) est la suivante. Soit $\mu \vdash n + 1$. Pour toute case (i, j) de μ , on écrit $\mathcal{H}_{i,j}$ au lieu de $\mathcal{H}_{\mu/ij}$. Considérons les opérateurs

$$D_{\mathbf{x}}^{i,j} : \mathcal{H}_{i,j} \longrightarrow \mathcal{H}_{i+1,j} \quad , \quad D_{\mathbf{y}}^{i,j} : \mathcal{H}_{i,j} \longrightarrow \mathcal{H}_{i,j+1}$$

où $D_{\mathbf{x}}^{i,j} := \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}$ et $D_{\mathbf{y}}^{i,j} := \sum_{k=1}^n \partial_{y_k}$, avec $\mathcal{H}_{i,j}$ comme domaine.

Puisque les cases $(i, j+1)$ et $(i+1, j)$ sont dans l'ombre de (i, j) , on a $\mathcal{H}_{i,j+1}, \mathcal{H}_{i+1,j} \subseteq \mathcal{H}_{i,j}$. Donc, on a les inclusions des noyaux suivants :

$$\text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j+1}) \subseteq \text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j}) \quad , \quad \text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i+1,j}) \subseteq \text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i,j}) .$$

Considérons les espaces quotients suivants :

$$A_{\mathbf{x}}^{i,j} := \text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j}) / \text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j+1}) \quad , \quad A_{\mathbf{y}}^{i,j} := \text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i,j}) / \text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i+1,j}) .$$

Ces deux espaces quotients ont une structure de \mathfrak{S}_n -module, provenant de celles des $\mathcal{H}_{i,j}$. Alors, on a :

$$\mathcal{F}_{q,t}(A_{\mathbf{x}}^{i,j}) = \mathcal{F}_{q,t}(\text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j})) - \mathcal{F}_{q,t}(D_{\mathbf{x}}^{i,j+1}) \quad , \quad \mathcal{F}_{q,t}(A_{\mathbf{y}}^{i,j}) = \mathcal{F}_{q,t}(\text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i,j})) - \mathcal{F}_{q,t}(D_{\mathbf{y}}^{i+1,j}) .$$

En vertu de la surjectivité des opérateurs $D_{\mathbf{x}}^{i,j}$ et $D_{\mathbf{y}}^{i,j}$, on trouve les isomorphismes

$$\mathcal{H}_{i+1,j} \oplus \text{Ker}(D_{\mathbf{x}}^{i,j}) \cong \mathcal{H}_{i,j} \cong \mathcal{H}_{i,j+1} \oplus \text{Ker}(D_{\mathbf{y}}^{i,j}) .$$

En supposant vraie la conjecture (6.4.1) et en se rappelant que D_x et D_y diminuent les degrés de x et de y en 1, respectivement, on obtient les identités

$$t H_{i+1,j} + \mathcal{F}_{q,t}(Ker(D_x^{i,j})) = H_{i,j} = q H_{i,j+1} + \mathcal{F}_{q,t}(Ker(D_x^{i,j})).$$

En vertu de ces équations, on obtient que la récurrence (6.10) implique l'égalité :

$$\boxed{t^\ell \mathcal{F}_{q,t}(A_x^{i,j}) = q^a \mathcal{F}_{q,t}(A_y^{i,j})}$$

6.5 Une base à 1000 dollars

En 1999, lors du "CMS winter meeting in Montreal", Adriano Garsia offre une récompense de 1000 dollars au premier mathématicien qui puisse trouver une base explicite pour le module \mathcal{H}_n . Jusqu'à maintenant, ce problème est ouvert. Entre les approches existante pour arriver à ce résultat on trouve :

- L'explicitation de bases monomiales des espaces \mathcal{H}_μ , liée à l'étude de l'idéal annulateur de Δ_μ via des opérateurs de dérivation dits "opérateurs de sauts". (Aval, 2000).
- Plusieurs travaux concernant des bases pour \mathcal{H}_μ , où μ est une équerre, c'est-à-dire, un partage de la forme $(k, 1^{n-k})$. Voir par exemple (Garsia, Haiman, 1996b), (Stembridge, 1994), (Aval, 2000), (Adin, Remmel, Roichman, 2008) et (Allen, 2002).
- Plus récemment, Assaf et Garsia on trouvé une base pour l'espace \mathcal{H}_μ lorsque μ est un partage a deux colonnes (Assaf, Garsia, 2009.).

BIBLIOGRAPHIE

- Assaf, S., Garsia, A. «Towards a kicking basis for Garsia-Haiman modules.» Preprint.
<http://arxiv.org/pdf/0905.2333>
- Adin, R. M., Remmel, J. B., Roichman, Y. «The combinatorics of the Garsia-Haiman modules for hook shapes». *Electron. J. Combin.* 15(1) :Research Paper, 38-42.
- Allen, E. 2008. «Bitableaux bases for some Garsia-Haiman modules and other related modules.» *Electron. J. Combin.* 9(1) :Research Paper 36, 59 pp.
<http://www.emis.de/journals/EJC/Volume9/PDF/v9i1r36.pdf>
- Aval, J.C. 2000.«Monomial bases related to the $n!$ conjecture». *Discrete Math.*, 224 (2000), 15–35.
- Bergeron, F. 2008. *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*. To be published.
- Bergeron, F., N. Bergeron, A.M. Garsia, M. Haiman and G. Tesler. 1999. «Lattice Diagram Polynomials and Extended Pieri Rules». *Advances in Mathematics*, vol. 142, no. 2, p. 363-420.
- Bergeron, F. and A.M. Garsia. 1999. «Science fiction and Macdonald's polynomials, Algebraic Methods and q -Special Functions». *American Mathematical Society*, Floreanini, R. and L. Vinet (eds.), vol. 22, p. 1-52. «CRM Proceedings & Lecture Notes».
- Bergeron, F., Garsia A.M., Haiman, M. and Tesler, G.. 1999. «Identities and Positivity Conjectures for some Remarkable Operators in the Theory of Symmetric Functions». *Methods and Applications of Analysis*, vol. 6, p. 363-420.
- Bergeron, N. and Garsia, A.M. «On certain spaces of harmonic polynomials». In *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications* (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, vol. 138 (1992), 51-86.
- M. Can and N. Loehr «A proof of the q, t -square conjecture». *Theory Ser. A.113* (2006), 1419–1434.
- Frame J.F., Robinson G. de B., and Thrall R. M. «The hook graphs of the symmetric groups». *Canadian J. Math.*, 6 :316-324, 1954.

- Garsia, A.M. and J. Haglund. 2002. «A Proof of the q,t -Catalan positivity conjecture», LACIM 2000 conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC). *Discrete Math.*, vol. 256, p. 677-717.
- Garsia, A.M. and M. Haiman. 1993. «A graded representation model for Macdonald's polynomials». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 90, no. 8, p. 3607-3610.
- Garsia, A.M. and M. Haiman. 1996. «A remarkable q,t -Catalan sequence and q -Lagrange inversion». *J. Algebraic Combin.*, vol. 5, no. 3, 191-244.
- Garsia, A.M. and M. Haiman. 1996. «Some natural bigraded S_n -modules and q,t -Kostka coefficients». *Electron. J. Combin.*, vol 3, no. 2, Research Paper 24. «The Foata Festschrift». http://www.combinatorics.org/Volume3/volume3_2.html#R24.
- Garsia, A.M. and Procesi, C. «On certain graded S_n -modules and the q -Kostka polynomials». *Adv. in Math.*, 94 (1992), no. 1, 82-138.
- Grojnowski, I. and M. Haiman. 2007. «Affine Hecke algebras and positivity of LLT and Macdonald polynomials». Preprint.
- Haglund, J. 2008. «The q,t -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics». *AMS University Lecture Series*.
- Haglund, J., M. Haiman, N. Loehr, J.B. Remmel and A. Ulyanov. 2005. «A Combinatorial Formula for the Character of the Diagonal Coinvariants». *Duke Math. J.*, vol. 126, no. 2, p. 195-232.
- Haiman, M. 1994. «Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants». *J. Algebraic Combin.*, vol. 3, p. 17-76.
- Haiman, M. 1999. «Macdonald polynomials and geometry». In *New Perspectives in Geometric Combinatorics*, MSRI Publications, no. 37, p. 207-254.
- Haiman, M. 2001. «Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture». *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 14, p. 941-1006.
- Haiman, M. 2002. «Notes on Macdonald polynomials and the geometry of Hilbert schemes». In *Symmetric Functions 2001 : Surveys of Developments and Perspectives*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Cambridge, Fomin S., K. Dordrecht, p. 1-64.
- Haiman, M. 2003. «Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes». In *CDM 2002 : Current Developments in Mathematics in Honor of Wilfried Schmid & George Lusztig*, *International Press Books*, p. 39-112.
- Haiman, M. and Woo, A. 2007. «Geometry of q and q,t -analogs in combinatorial enumeration». *Geometric Combinatorics, IAS/Park City Math. Series*, vol.,

p. 207-248.

- James, G and Liebeck M. 2001. *Representations and Characters of Groups*. 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Knuth, D. E. 1970. «Permutations, matrices and generalized Young tableaux». *Pacific J. Math.* **34** (1970), 709-727.
- Lascoux, A. and M.P. Schutzenberger. 1978. «Sur une conjecture de H.O. Foulkes». *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris*, vol. 286A, p. 323-324.
- Lenart, C. 2000. «Lagrange Inversion and Schur Functions». *J. Algebraic Combin.* **11** (2000), 69-78.
- Loehr, N. A. and G. S. Warrington. 2007. «Square q, t -lattice paths and $\nabla(p_n)$ ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 649-669.
- Loehr, N. A. and G. S. Warrington. 2008. «Nested Quantum Dyck Paths and $\nabla(s_\lambda)$ ». Preprint. arXiv :0705.4608v1 [math.CO].
- Macdonald, I.G. 1988. «A new class of symmetric functions». Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 20e. *Séminaire Lotharingien*, p. 131-171.
- Macdonald, I.G. 1995. *Symmetric functions and Hall polynomials*. With contributions by Zelevinsky, A. 2nd edition. Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press. Oxford Science Publications, New York.
- Musili, C. 1993. *Representations of Finite Groups*. Hindustan Book Agency, Delhi.
- Rodríguez, A. 2008. «Combinatorial aspects of Macdonald polynomials». Mémoire de maîtrise, UQAM.
- Sagan, B. 2001. *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. 2nd edition. Springer-Verlag, New York.
- Stanley, R.P. 1999. *Enumerative Combinatorics*. Volumes 1 and 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- Stanley, R. P. 2003. «Recent progress in algebraic combinatorics». *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 40, 55-68.
- Stembridge, J. R. 1994. « Some particular entries of the two-parameter Kostka matrix». *Proc. Amer. Math. Soc.* **121**(2) :367-373.
- Steinberg, J. R. 1964. «Differential equations invariant under finite reflection groups», *Transaction of the American Mathematical Society*. **112** (1964), 392-400.
- Weyl, H. *The classical groups : their invariants and representations*. 2nd edition.

Princeton University Press, Princeton, NJ.

Index

- $<_{\text{lex}}$, voir ordre lexicographique sur les cases
- $<_{\text{lec}}$, voir ordre de lecture sur les cases
- \subseteq , voir ordre d'inclusion sur les partages
- \succeq , voir ordre de dominance sur les partages
- $<$, voir ordre lexicographique sur les partages
- action, 17
 - diagonale, 76
 - linéaire, 16
- algèbre de groupe, 24
- bihomogène
 - espace, 76
- caractère, 20
 - bigradué, 76
 - gradué, 64
 - irréductible, 22
 - table, 25
- $\mathbb{C}[G]$, voir algèbre de groupe
- composition, 7
 - longueur, 7
 - monôme associé, 10
 - partage associé, 7
- parties, 7
- positive, 7
- taille, 7
- $\Delta_t(\mathbf{x})$, 31
- diagramme, 3
 - n -diagramme, 3
 - associé à un partage, 5
 - case, 3
 - conjugué, 3
 - déterminant, 78
 - de Ferrer, 5
- \mathcal{F} , voir Frobenius, caractéristique
- \mathcal{F}_q , voir Frobenius gradué
- $\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{V})$, voir Frobenius, caractéristique bigraduée
- fonction
 - centrale, 22
 - de Hall-Littlewood, 69
 - harmonique, 61
 - symétrique, 40
 - élémentaire, 41
 - de Schur, 47
 - de Schur gauche, 47
 - de puissance, 41
 - homogène, 41

- monomiale, 39
- Frobenius
 - caractéristique bigraduée, 76
 - caractéristique de, 59
 - gradué, 64
 - transformée de, 57
- G -invariant, 17
- G -module, 16
- groupe symétrique, 10
- \mathcal{H}_n , 61
- \mathcal{H}_μ , voir espace μ -harmonique
- \mathcal{H}_μ , voir module de Garsia-Haiman
- \mathcal{H}_d , voir espace bd -harmonique
- Hall
 - produit scalaire, 52
- harmonique
 - d -harmonique, 90
 - fonction, 61
 - harmoniques diagonaux, 81
 - μ -harmonique, 66
- Hilb_q , voir Hilbert, série
- $\text{Hilb}_\nu(q, t)$, voir Hilbert, série bigraduée
- Hilbert
 - série, 64
 - série bigraduée, 77
- homogène
 - espace, 63
- Jacobi-Trudi
 - formule de, 49
- $K_{\lambda, \mu}$, voir nombres de Kostka
- $K_{\lambda, \mu}(q)$, voir polynôme de Kostka-Foulkes
- $K_{\lambda, \mu}(q, t)$, voir polynôme q, t -Kostka
- Kostka
 - nombres de, 34
- $\mathcal{L}[\]$, 29
- Λ , 68
- Littlewood-Richardson
 - anneau de, 59
 - règle de, 52
- \mathcal{M}^μ , 28
- Macdonald
 - conjecture de positivité, 77
- module de Garsia-Haiman, 79
- ∇ , voir Nabla
- Nabla, 72
- ordre
 - d'inclusion sur les partages, 6
 - de dominance sur les partages, 6
 - de lecture sur les cases, 4
 - lexicographique sur les cases, 4
 - lexicographique sur les partages, 6
- partage, 5
 - case extérieur d'un, 32
 - coin d'un, 32

- diagramme associé à, 5
- longueur, 5
- ombre, 92
- troué, 92
- partition
 - ordre, 6
- permutation, 10
 - cyclique, 10
 - matrice de, 21
 - type cyclique, 11
- Pieri
 - formule de, 52
- pléthysme, 53
- polynôme, 37
 - de Macdonald, 70
 - alternant, 44
 - de Jack, 69
 - degré, 37
 - homogène, 37
 - invariant, 38
 - Kostka-Foulkes, 66
 - q, t -Kostka, 72
 - \mathfrak{S}_n -harmonique, 61
 - symétrique, 38
 - Zonaux, 69
- représentation, 15
 - alternée, 17
 - degré, 15
 - gradué, 63
 - homomorphisme, 16
 - induite, 18
 - irréductible, 19
 - isomorphisme, 16
 - par permutation, 17
 - régulière, 24
 - restreinte, 18
 - sous-représentation, 17
 - triviale, 17
- Schur
 - fonction symétrique, 47
- sous-groupe de Young, 30
- Specht
 - module, 32
- $SST_\mu[]$, voir tableau de Young semi-standard
- $ST_\mu[]$, voir tableau de Young standard
- tableau
 - associé à un diagramme, 13
 - bijectif, 27
 - contenu, 8
 - de lecture, 28
 - de Young, 8
 - semistandard, 8
 - standard, 8
 - gauche, 13
 - poids monomial, 9

poids monomial standard, 9

stabilisateur de lignes, 31

théorème

fondamental des fonctions symétriques,

43

Vandermonde

déterminant, 44

ω , 43

$\chi_{\mathcal{V}}(q, t)$, voir caractère bigradué

z_{σ} , 13