

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA RETROUVABILITÉ DE JORDAN

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

BENJAMIN DEQUÊNE

JANVIER 2024

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

RÉSUMÉ

Mes travaux se trouvent à l'intersection entre la théorie des représentations des algèbres, et notamment les carquois, et la combinatoire algébrique. Dans des travaux récents, Alexander Garver, Rebecca Patrias et Hugh Thomas ont introduit la notion de retrouvabilité de Jordan, et un raffinement de cette notion appelé canonique retrouvabilité de Jordan, pour des sous-catégories de représentations d'un carquois (Garver *et al.*, 2023). Cette notion vient d'une traduction algébrique de travaux de Emden Gansner (Gansner, 1981a), et trouve de nombreux liens avec la combinatoire algébrique, comme notamment la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth.

Ma thèse par articles est dédiée à l'étude de cette notion, afin d'étendre un résultat précis (Garver *et al.*, 2023, Théorème 1.3) de deux façons différentes. Dans le premier article, nous étudions les sous-catégories engendrées additivement par les représentations indécomposables à support sur un sommet fixé d'un carquois à relations aimables. Nous donnons une caractérisation combinatoire de celles parmi elles qui sont retrouvables de Jordan, ainsi qu'une autre permettant de caractériser celles parmi elles qui sont canoniquement retrouvables de Jordan. Dans le deuxième article, nous exhibons une caractérisation combinatoire de toutes les catégories canoniquement retrouvables de Jordan parmi les sous-catégories de représentations de n'importe quel carquois de type A . Nous verrons également que cette caractérisation se traduit en une caractérisation algébrique.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
TABLE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	viii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DE CARQUOIS	3
1.1 Algèbre de chemins d'un carquois.....	3
1.1.1 Vocabulaire combinatoire	3
1.1.2 Définition et quelques premières propriétés	5
1.2 Représentations d'un carquois	7
1.2.1 Définitions et premières structures	8
1.2.2 Les représentations indécomposables	10
1.3 Algèbres quotients et carquois à relations.....	18
1.3.1 Définitions	18
1.3.2 Propriétés	21
1.3.3 Représentations	23
1.4 Le carquois d'Auslander–Reiten.....	25
1.4.1 Familles de représentations particulières.....	25
1.4.2 Définition théorique.....	28
1.4.3 Quelques exemples	30
CHAPITRE 2 LA RETROUVABILITÉ DE JORDAN	34
2.1 La donnée générique de Jordan	34
2.2 L'invariant de Greene–Kleitman	37
2.3 Lien avec la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth	38

2.3.1	Définition classique	39
2.3.2	Définition « à la Greene–Kleitman »	42
2.3.3	Quand RSK et GK coïncident	45
2.4	La retrouvabilité de Jordan	46
2.5	Un raffinement : la retrouvabilité de Jordan canonique	47
2.6	Lien avec la décomposition de Kac	53
2.7	Vers les articles	54
CHAPITRE 3 ARTICLE 1 : JORDAN RECOVERABILITY OF SOME SUBCATEGORIES OF MODULES OVER GENTLE ALGEBRAS		55
3.1	Introduction (en français).....	55
3.1.1	Carquois à relations cordes, localement aimables et aimables	55
3.1.2	Représentations	56
3.1.3	Morphismes des représentations cordes.....	66
3.1.4	Résultats principaux et esquisse de preuve	72
3.2	The article.....	73
3.2.1	Introduction.....	73
3.2.2	Background	80
3.2.3	Proof of the main results	99
3.2.4	To go further	125
3.2.5	Acknowledgments	127
CHAPITRE 4 ARTICLE 2 : CANONICALLY JORDAN RECOVERABLE CATEGORIES FOR MODULES OVER THE PATH ALGEBRA OF A_n TYPE QUIVERS		129
4.1	Introduction (en français).....	129
4.1.1	Les représentations d’un carquois de type A_n	129

4.1.2	Les ensembles d'intervalles adjacent-évitant	130
4.1.3	Esquisse de preuve du résultat principal	131
4.2	The article.....	132
4.2.1	Introduction.....	132
4.2.2	Some generalities about A_n type quiver representations	136
4.2.3	Jordan recoverability and canonical Jordan recoverability	141
4.2.4	Storability.....	148
4.2.5	Operations preserving canonical Jordan recoverability.....	153
4.2.6	Adjacency-avoiding interval sets	156
4.2.7	Proof of the main result	165
4.2.8	To go further.....	171
4.2.9	Acknowledgments	175
	CONCLUSION	176
	BIBLIOGRAPHIE	179

TABLE DES FIGURES

Figure 2.1	Illustration des calculs de $\text{RSK}(A)$. La case encadrée à la ligne k est celle ajoutée via l’insertion (par ligne) de Schensted appliquée pour aller de $P(k-1)$ à $P(k)$. Les cases en gris sont les cases modifiées en allant de $P(k-1)$ à $P(k)$ en suivant le processus d’insertion.	42
Figure 2.2	Illustration des calculs de $\text{RSK}(A)$ à la “Greene–Kleitman”.	44
Figure 2.3	Affichage des suites de partages obtenues dans le calcul de RSK à la “Greene–Kleitman” .	44
Figure 2.4	Le carquois Q de type A_3 considéré (à gauche) et son carquois d’Auslander–Reiten (à droite).....	47
Figure 2.5	Calculs pour obtenir $\text{GenJF}(X)$ pour $X \in \mathcal{C}_{Q,2}$ dans l’Exemple 2.24.	47
Figure 2.6	Illustration de la configuration décrite pour étudier la retrouvabilité de Jordan canonique de $\mathcal{C}_{Q,2}$ de l’Exemple 2.27. Notons que $Y_\alpha(u_i) = 0$ pour $i > a + b$, et $Y_\beta(u_i) = 0$ pour $i > a + c$, via les relations de carrés commutatifs.	50
Figure 2.7	Illustration de la configuration obtenue pour tout $Y \in \Omega$, une fois les changements de bases effectués dans l’Exemple 2.27	52
Figure 3.1	Illustration de la définition du morphisme $\varphi_{(\sigma, \sigma')}$ dans la cas où $\sigma = \sigma'$	70
Figure 3.2	Description des morphismes de $\text{Hom}(M(\mu), M(\rho))$ de l’Exemple 3.24 (TB1).....	70
Figure 3.3	Description des morphismes de $\text{End}(M(\rho))$ de l’Exemple 3.24 (TB2).	71
Figure 4.1	The quiver \vec{A}_5 , its Auslander–Reiten quiver and a choice of a representation X seen as a <i>filling</i> of the AR-quiver. We label $[[i, j]]$ the vertex corresponding to the isomorphism classes of the indecomposable representation $X_{[[i, j]]}$ in $\text{rep}(\vec{A}_5)$. The dashed arrows correspond to the action of the Auslander–Reiten translation τ	143
Figure 4.2	Explicit way to calculate $\max_{\Pi_3^t} \text{wt}_X(\gamma)$ for the representation X defined in Figure 4.1.....	143
Figure 4.3	The A_3 type quiver considered (on the left) and its Auslander–Reiten quiver (on the right).	146
Figure 4.4	The rectangle corresponds to indecomposable representations that are in $\mathcal{C}_{Q,m}$ for $m = 1, 2, 3$ from left to right. We use it as in Figure 4.2 to get $\text{GenJF}(X)$ for $X \in \mathcal{C}_1$ in Example 4.24.	146
Figure 4.5	The way to get $\text{GenJF}(X)$ for $X \in \mathcal{C}_2$ in Example 4.24.....	147

Figure 4.6 Illustration of the configuration described to study the canonical Jordan recoverability of \mathcal{C}_2 . Note that $Y_\alpha(u_i) = 0$ and $Y_\beta(w_i) = 0$ for $i > b$ by square commutativity relations. 148

Figure 4.7 Illustration of storability of (λ, μ) 149

Figure 4.8 Illustration of the four storability configurations of (λ, μ, ν) 150

Figure 4.9 Illustration of the local operations to calculate $\text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$ 151

LISTE DES TABLEAUX

Table 3.1	Calcul des cordes au-dessus et en-dessous des cordes ρ et μ données en Exemple 3.24 (TB1).	68
Table 3.2	Calcul des cordes au-dessus et en-dessous de la corde ρ données en Exemple 3.24 (TB2). Notons que les deux dernières cordes de $\text{Bot}(\rho)$ apparaissent deux fois en-dessous de ρ . Si un tel cas se produit, il est bon de distinguer les différentes copies d'une corde σ en-dessous d'une corde ρ	69

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, j'aimerais remercier les rapporteurs, et, plus largement, toutes les personnes pour le temps qu'elles consacreront à la lecture de cette thèse.

Merci à mon encadrant, M. Hugh THOMAS. Je lui suis très reconnaissant pour tout ce temps passé à travailler sur ce sujet. Merci pour sa patience, pour ses efforts, chaque jour, ses conseils avisés, son appui, et son travail. Merci également pour toutes ces discussions mathématiques et personnelles que j'ai beaucoup appréciées. Beaucoup de choses avec lui ont formé le mathématicien que je suis aujourd'hui, et je le remercierai jamais assez pour cela. Je serai heureux de travailler de nouveau avec lui à l'avenir.

Bien que ma présence à l'UQAM a été plusieurs fois perturbée, notamment à cause de la période pandémique que nous avons traversée, je remercie les professeurs et les post-doctorants du LACIM que j'ai rencontrés, avec qui j'ai pu discuter longuement, et qui m'ont soutenu. En particulier : Gabriel FRIEDEN, Christophe HOHLWEG, GaYee PARK, Christophe REUTENAUER, Franco SALIOLA, Florian SCHREIER-AIGNER.

Particulièrement, j'adresse une grande gratitude envers M. François BERGERON pour les innombrables discussions, ponctuées d'anecdotes, et riches de connaissances mathématiques notamment en combinatoire. Je repense aussi à ces discussions en distanciel — « in vitro », comme il aime dire —, et en présentiel — « in vivo » —, n'hésitant pas à passer du temps pour expliquer des notions. Je revois ces heures de cours parsemées de jeux de mots et de blagues dont j'ai souvent été bon public. J'aimerais que soit davantage mise en valeur ses indiscutables qualités d'enseignant et de chercheur. Merci pour tout.

Puis, je remercie tous les professeurs et chercheurs de mathématiques (hors UQAM) que j'ai pu rencontrer, et pour certains, avec qui j'ai pu travailler. Pour en citer quelques uns : M. Jacques BOULANGER, M. David CHATAUR, M. Fabien DURAND, Mme Mélodie LAPOINTE, M. Lionel NICLI, M. Vincent PILAUD, M. Pierre-Guy PLAMONDON, M. Jason ROYAL, M. Ralf SCHIFFLER, M. Vincent VAN KERCKHOVE et M. Jérôme YGÉ.

Avec une attention particulière, je remercie M. Yann PALU pour la complicité mathématique développée depuis ma deuxième année de maîtrise, pour mes premiers pas dans la théorie des représentations de carquois, et pour son soutien. Je serai ravi de continuer à travailler avec lui.

Je salue mes camarades doctorants de Montréal venant du LACIM. Pour en citer quelques uns également : Antoine ABRAM, Nathan CHAPELIER, Nicolas ENGLAND, Yan LANCIAULT, Florence MAAS-GARIÉPY, Carole PORRIER, Adrien SEGOVIA et Étienne TÉTREAUULT. Je salue aussi mes camarades doctorants d'Amiens venant du LAMFA, car, suite à la pandémie, j'ai également passé beaucoup de temps au sein de l'Université de Picardie Jules Verne. En particulier : Henry FALLET, Arthur et Owen GARNIER, Yohan HOSTEN, Clément LEFÈVRE, Alice MASSET, Ismail RAZACK et Michael SCHOONHEERE.

Je tiens à remercier plus particulièrement mes deux camarades de bureau à Montréal : Ludovic D'ANJOU-MADORE pour sa bonne humeur et ces belles discussions, et Julien DALPAYRAT-GLUTRON pour notre très bonne entente dès les premiers contacts, et nos longues discussions, de tout et de rien, durant jusqu'à parfois cinq heures, enrichissantes culturellement et mathématiquement.

À mes parents, merci pour votre soutien sans faille, et pour m'avoir permis d'arriver jusque là où j'en suis. Je n'oublie pas d'où je viens, et mon parcours de mathématicien, c'est aussi à vous que je le dois.

Merci à mes amis de longue date, comme Vincent, Paul-Aymar, Valentin et Lucien, pour leur soutien tout aussi indéfectible.

Margaux, pour faire, de chaque jour, une nouvelle raison de se donner au maximum pour réussir, depuis plus de dix ans, je te dois énormément.

INTRODUCTION

La théorie des représentations est une branche des mathématiques se basant sur l'étude de structures algébriques abstraites en représentant ses éléments comme des transformations linéaires entre des espaces vectoriels. Dans cette thèse, nous allons nous pencher plus précisément sur une sous-branche de cette théorie, celle des représentations d'algèbres.

Les outils de cette sous-branche nous permettent de voir les algèbres associatives comme des quotients appropriés d'algèbres de chemins d'un graphe orienté, appelé généralement carquois. Dans ce carquois, remplacer chaque sommet par un espace vectoriel, et chaque flèche par une application linéaire, revient exactement à considérer un module sur cette algèbre; cela définit une représentation du carquois. Nous pouvons également définir des morphismes entre ces représentations, ce qui les munit d'une structure de catégorie.

La combinatoire est une autre branche des mathématiques se basant sur l'étude des configurations d'ensembles finis, leurs dénombrements et leurs interactions. Une de ses sous-branches qui nous intéressera dans cette thèse est la combinatoire algébrique, qui se spécialise dans l'étude des structures algébriques qui sont soit finies, soit engendrées par un ensemble fini d'éléments.

Mon travail se focalise sur une interaction entre la théorie des représentations d'algèbres et la combinatoire algébrique. Cette thèse est consacrée à l'étude d'une notion récemment introduite dans (Garver *et al.*, 2023), appelée la retrouvabilité de Jordan.

Le principe est le suivant. Étant donné un carquois et une représentation, c'est-à-dire une collection d'espaces vectoriels et d'applications linéaires respectant éventuellement des relations, nous étudions le comportement des endomorphismes nilpotents de la représentation, via leur forme de Jordan. Nous entendons ici que nous étudions le comportement des collections d'applications linéaires nilpotentes, une pour chaque espace vectoriel de la représentation, respectant une certaine structure, via la forme de Jordan de chacune de ces applications nilpotentes. Dans un cadre général, il existe un comportement générique parmi ces endomorphismes nilpotents et nous définissons la donnée générique de Jordan de la représentation comme la donnée des tailles des blocs de Jordan d'un endomorphisme nilpotent générique. Précisément, cette donnée générique de Jordan s'écrit comme un uplet de partages d'entiers où chaque partage mémorise la taille des

blocs de Jordan de la forme de Jordan de chaque application linéaire nilpotente.

Maintenant, si nous nous restreignons à l'étude des représentations parmi celles d'une sous-catégorie, la question est de savoir si, connaissant cette donnée, nous sommes capables de retrouver la représentation à isomorphisme près. Si tel est le cas, la sous-catégorie en question est dite retrouvable de Jordan. Il y a aussi un procédé qui peut permettre de passer de la donnée des tailles des blocs de Jordan à la représentation. Si ce procédé aboutit à la reconstitution de la représentation, dans une certaine sous-catégorie fixée, à partir de sa donnée générique de Jordan, alors cette sous-catégorie est dite canoniquement retrouvable de Jordan.

Le premier chapitre de cette thèse sera consacré à des rappels élémentaires sur la théorie des représentations de carquois, et la réintroduction des outils essentiels pour comprendre le contenu de la thèse.

Le deuxième chapitre se focalisera sur la notion titre de cette thèse, en mettant en avant ses aspects et intérêts à la fois combinatoires et algébriques.

Le troisième chapitre se consacrera au contenu de mon premier article (Dequêne, 2023). D'abord, l'introduction en français se concentre sur les carquois à relations cordes et à relations aimables. Ensuite, l'article expose des résultats de caractérisation combinatoire de la retrouvabilité de Jordan et de la canonique retrouvabilité de Jordan dans le cadre des algèbres aimables. Cette caractérisation s'exprime parmi les sous-catégories additivement engendrées par les représentations indécomposables à support sur un sommet fixé.

Le quatrième et dernier chapitre se consacrera au contenu de mon deuxième article. Après une courte introduction en français sur les représentations d'un carquois de type Dynkin A , l'article montre une caractérisation combinatoire de toutes les sous-catégories canoniquement retrouvables de Jordan de n'importe quel carquois de type Dynkin A .

CHAPITRE 1

PREMIERS PAS DANS LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DE CARQUOIS

Le but de ce chapitre est de motiver l'étude de la théorie des représentations de carquois. Nous allons donner les définitions de base, donner les résultats importants afin de mettre en lumière l'intérêt de cette théorie.

1.1 Algèbre de chemins d'un carquois

1.1.1 Vocabulaire combinatoire

Dans cette sous-section, nous donnons toute la terminologie combinatoire nécessaire pour la suite.

Définition 1.1. Un *carquois* est la donnée d'un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où :

- Q_0 est un ensemble, dit *ensemble des sommets de Q* ;
- Q_1 est un ensemble, dit *ensemble des flèches de Q* ;
- $s : Q_0 \rightarrow Q_1$ est une fonction appelée *fonction source* ;
- $t : Q_0 \rightarrow Q_1$ est une fonction appelée *fonction but*.

Un carquois Q est dit *fini* si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis.

Remarque 1.2. Notons que la donnée d'un carquois fini correspond à la donnée d'un graphe orienté : un ensemble de sommets reliés entre eux par un ensemble de flèches. Nous admettons ici la possibilité d'avoir des flèches ayant une source et un but identique, ou des flèches distinctes ayant une même source et un même but. Ainsi, nous présenterons souvent le carquois en terme de graphe.

Exemples 1.3.

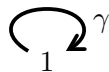
(Q1) Dans ce qui suit, le carquois $Q = (\{1, 2\}, \{\alpha\}, s, t)$ tel que $s(\alpha) = 1$ et $t(\alpha) = 2$ se présentera comme suit.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

(Q2) Le carquois $Q = (\{1, 2, 3\}, \{\alpha, \beta\}, s, t)$ tel que $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 2 = s(\beta)$ et $t(\beta) = 3$ comme suit.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

(Q3) Et le carquois $Q = (\{1\}, \{\gamma\}, s, t)$ tel que $s(\gamma) = t(\gamma) = 1$ comme suit.



┘

Définition 1.4. Soit Q un carquois. Un **chemin paresseux** (ou *trivial*) dans Q est un élément formel e_q indicé par $q \in Q_0$. Un **chemin** dans Q est :

- soit un chemin paresseux e_q pour un $q \in Q_0$;
- soit une suite finie de flèches, éléments de Q_1 , $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ telle que $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$.

Un chemin $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ se dénote aussi plus simplement $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$. Notons $\text{Ch}(Q)$ l'ensemble des chemins de Q .

Notons que le chemin paresseux e_q , pour tout $q \in Q_0$, peut être vu comme le chemin où nous restons au sommet q .

Exemples 1.5. Pour les Exemples 1.3, nous donnons les listes de chemins suivantes.

(Q1) Les chemins possibles sont e_1, e_2 et α .

(Q2) Les chemins possibles sont $e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta$ et $\beta\alpha$.

(Q3) Les chemins possibles sont $e_1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^k, \dots$

┘

Remarque 1.6. Soulignons que les flèches d'un chemin apparaissent de droite à gauche, comme cela est habituel pour les compositions de fonctions.

Nous étendons les notions de source et but aux chemins de Q , en posant :

- si $\Gamma = e_q$, $s(e_q) = q = t(e_q)$;
- si $\Gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$, $s(\Gamma) = s(\alpha_1)$ et $t(\Gamma) = t(\alpha_n)$.

Définition 1.7. La **longueur** d'un chemin Γ , noté $\ell(\Gamma)$, se définit de la manière suivante :

- $\ell(\Gamma) = 0$ si $\Gamma = e_q$ pour un certain $q \in Q_0$;
- $\ell(\Gamma) = n$ si $\Gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$.

Définition 1.8. Soit Q un carquois. Pour Γ_1 et Γ_2 deux chemins de Q tels que $s(\Gamma_2) = t(\Gamma_1)$, nous définissons la **concaténation** de Γ_1 suivi de Γ_2 comme étant le chemin $\Gamma_2 \Gamma_1$.

Définition 1.9. Soit Q un carquois. Pour toute flèche $\alpha \in Q_1$, nous désignons par α^{-1} l'*inverse formelle* de α dans le carquois. Nous posons alors $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ et $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$.

Ainsi l'inverse formelle d'une flèche peut être considéré comme la lecture inversée d'une flèche α – de son but vers sa source.

Définition 1.10. Une *marche* dans Q est :

- soit un chemin paresseux e_q pour $q \in Q_0$;
- soit une suite finie de flèches ou d'inverses de flèche $(\beta_n, \dots, \beta_1)$ telle que $s(\beta_{i+1}) = t(\beta_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Si une suite $(\beta_n, \dots, \beta_1)$ forme une marche dans Q , nous noterons cette marche plus simplement $\beta_n \dots \beta_1$.

Nous étendons naturellement les fonctions source et but, ainsi que la notion de concaténation, aux marches d'un carquois de manière similaire aux chemins.

Définition 1.11. Un carquois Q est dit *connexe* si pour toute paire de sommets $(q, r) \in (Q_0)^2$ il existe une marche μ dans Q telle que $s(\mu) = q$ et $t(\mu) = r$.

Définition 1.12. Un *cycle* dans Q est une marche c non-paresseuse $c = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in Q_1$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $s(c) = t(c)$;
- pour $1 \leq i < k$, si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$;
- si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_k$, alors $\alpha_1 \neq \alpha_k$.

Un tel cycle est dit *orienté* si $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k$.

Nous disons qu'un carquois Q est *acyclique* si Q n'admet pas de cycle orienté.

1.1.2 Définition et quelques premières propriétés

Nous introduisons ici la notion de l'algèbre de chemin d'un carquois, et nous donnons quelques premières propriétés importantes sur sa structure.

Définition 1.13. Pour un carquois Q et un corps \mathbb{K} , la *\mathbb{K} -algèbre des chemins de Q* , notée $(\mathbb{K}Q, +, *, \cdot)$, est le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré formellement en tant que base par tous les chemins sur Q , muni de la

multiplication induite de manière bilinéaire par la concaténation des chemins en posant, pour Γ_1 et Γ_2 deux chemins dans Q ,

$$\Gamma_2 \star \Gamma_1 = \begin{cases} \Gamma_2 \Gamma_1 & \text{si } s(\Gamma_2) = t(\Gamma_1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les exemples à suivre, pour $C \subset \text{Ch}(Q)$, nous notons $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(C)$ le sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathbb{K}Q$ engendré par les chemins dans C .

Exemples 1.14. Pour les Exemples 1.3, nous obtenons ce qui suit.

(Q1) Pour ce premier carquois, nous avons $\mathbb{K}Q = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, e_2, \alpha)$ avec la table de multiplication suivante :

\star	e_1	e_2	α
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	α
α	α	0	0

(Q2) Pour ce deuxième carquois, nous avons $\mathbb{K}Q = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \beta\alpha)$ avec la table de multiplication suivante :

\star	e_1	e_2	e_3	α	β	$\beta\alpha$
e_1	e_1	0	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	α	0	0
e_3	0	0	e_3	0	β	$\beta\alpha$
α	α	0	0	0	0	0
β	0	β	0	$\beta\alpha$	0	0
$\beta\alpha$	$\beta\alpha$	0	0	0	0	0

(Q3) Pour le troisième carquois, nous avons $\mathbb{K}Q = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^k, \dots)$ avec les règles de multiplication suivantes :

\star	e_1	γ^k avec $k \geq 1$
e_1	e_1	γ^k
γ^m avec $m \geq 1$	γ^m	γ^{k+m}

Nous pouvons remarquer deux choses :

- L'algèbre $\mathbb{K}Q$ est de dimension infinie car le nombre de chemins dans Q est infini ;
- Nous avons un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{K}Q$ et l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[X]$ défini en posant $e_1 \mapsto 1$ et $\gamma \mapsto X$. ┘

Proposition 1.15. *Pour Q un carquois fini, et \mathbb{K} un corps, nous avons que $(\mathbb{K}Q, +, *, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre.*

Dans la suite, pour $C \subset \text{Ch}(Q)$, nous notons $\langle C \rangle$ l'idéal bilatère engendré de $\mathbb{K}Q$ engendré par les chemins dans C . Nous pourrions généraliser la notation pour tout ensemble R de combinaisons \mathbb{K} -linéaires formelles de chemins de Q .

Avant de donner quelques résultats structurels élémentaires sur ces algèbres, rappelons les définitions suivantes.

Pour A une algèbre, un élément $c \in A$ est dit **central** si c commute avec tous les éléments de A . Un élément $e \in A$ est dit **idempotent** si $e^2 = e$.

Proposition 1.16. *Soit Q un carquois fini et \mathbb{K} un corps.*

- 1) $\mathbb{K}Q$ est commutative si, et seulement si, les composantes connexes de Q sont des points isolés, ou des boucles.
- 2) $\mathbb{K}Q$ est de dimension finie si, et seulement si, Q est acyclique.
- 3) Q est un carquois connexe si, et seulement si, les seuls éléments centraux idempotents de $\mathbb{K}Q$ sont 0 et 1.

La définition suivante s'ensuit de la Proposition 1.16 3).

Définition 1.17. Une algèbre A est dite **connexe** si, et seulement si, ses seuls éléments centraux idempotents sont 0 et 1.

1.2 Représentations d'un carquois

Dans cette section, nous allons discuter des représentations d'un carquois Q et de la notion de représentations indécomposables. Nous verrons plus tard (Section 1.3) le lien fondamental entre ces objets et les modules

(à gauche) sur l'algèbre $\mathbb{K}Q$. Ce résultat sera énoncé dans le cadre des carquois à relations et de certaines algèbres quotients de $\mathbb{K}Q$.

1.2.1 Définitions et premières structures

Commençons par une première définition.

Définition 1.18. Soit Q un carquois et \mathbb{K} un corps. Une **représentation de Q sur \mathbb{K}** est la donnée d'un couple de uplets $M = ((M_q)_{q \in Q_0}, (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ où :

- Pour tout $q \in Q_0$, M_q est un \mathbb{K} -espace vectoriel ;
- Pour tout $\alpha \in Q_1$, $M_\alpha : M_{s(\alpha)} \longrightarrow M_{t(\alpha)}$ est une application linéaire.

Nous disons qu'une représentation M est de **dimension finie** si :

(DF1) l'ensemble $\{q \in Q_0 \mid M_q \neq 0\}$ est fini

(DF2) pour tout $q \in Q_0$, $\dim M_q < \infty$.

Si Q est fini, pour qu'une représentation soit de dimension finie, il suffit qu'elle satisfasse (DF2). Dans ce cas, si M est de dimension finie, nous posons $\mathbf{dim}(M) = (\dim M_q)_{q \in Q_0}$. C'est le **vecteur dimension** de M . Nous noterons $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$, ou plus simplement $\text{Rep}(Q)$ l'ensemble des représentations de Q , et $\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$, ou plus simplement $\text{rep}(Q)$, l'ensemble des représentations de Q de dimension finie.

Remarque 1.19. Il est très pratique de considérer une représentation d'un carquois comme le remplacement de chaque sommet de Q par un espace vectoriel et de chaque flèche de Q par une application linéaire. Nous décrivons, par la suite, les applications linéaires entre les espaces vectoriels de dimension finie en terme de leur matrice sur les bases standards des espaces vectoriels en jeu.

Exemples 1.20. Dans le tableau ci-après nous retrouvons : en première colonne, des exemples de carquois ; en deuxième colonne, la forme générale d'une représentation quelconque du carquois considéré ; en troisième colonne, un exemple précis de représentation du carquois considéré.

Carquois Q	Forme des représentations de Q	Un exemple de représentation
$1 \xrightarrow{\alpha} 2$	$E \xrightarrow{f} F$	$\mathbb{K} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{K}$
$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$	$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$	$\mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$
$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\gamma}$	$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ E \end{array} \xrightarrow{\varphi}$	$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K}[X] \end{array} \xrightarrow{X}$
$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} 2$	$E \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} F$	$\mathbb{K}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array} \mathbb{K}$

┘

Définition 1.21. Soit Q un carquois, \mathbb{K} un corps, et M, N deux représentations de Q sur \mathbb{K} . Un **morphisme de représentations** $\phi : M \rightarrow N$ est la donnée d'une famille de transformations linéaires $\phi = (\phi_q : M_q \rightarrow N_q)_{q \in Q_0}$ telle que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$, nous avons $N_\alpha \phi_{s(\alpha)} = \phi_{t(\alpha)} M_\alpha$; autrement dit, pour toute flèche $\alpha \in Q_1$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{M_\alpha} & M_{t(\alpha)} \\
 \phi_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\
 N_{s(\alpha)} & \xrightarrow{N_\alpha} & N_{t(\alpha)}
 \end{array}$$

Pour U, V, W trois représentations de Q sur \mathbb{K} , $\phi = (\phi_q)_{q \in Q_0} : U \rightarrow V$ et $\psi = (\psi_q)_{q \in Q_0} : V \rightarrow W$ deux morphismes de représentations, nous définissons la composition $\psi \circ \phi : U \rightarrow W$ par $\psi \circ \phi = (\psi_q \circ \phi_q)_{q \in Q_0}$. Un morphisme $\phi : M \rightarrow N$ est un **isomorphisme** si ϕ est inversible : s'il existe un morphisme $\psi : N \rightarrow M$ tel que $\phi \circ \psi = \text{Id}_N$ et $\psi \circ \phi = \text{Id}_M$. Notons que ϕ est un isomorphisme de M vers N , si, et seulement si, pour tout $q \in Q_0$, $\phi_q : M_q \rightarrow N_q$ est un isomorphisme (au sens des applications linéaires).

Si un tel isomorphisme existe, nous dirons que M et N sont **isomorphes**, et nous notons cela $M \cong N$.

Nous noterons $\text{Hom}(M, N)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des (homo)morphismes de représentations de M vers N .

Nous noterons $\text{End}(M)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des (endo)morphismes de la représentation M .

Exemple 1.22. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considérons le carquois Q et les représentations X et Y suivantes.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \qquad X = \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \qquad Y = \mathbb{C} \xrightarrow{0} 0$$

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \text{Hom}(X, Y)$. Tout d'abord, nous avons forcément $\phi_2 = 0$. Comme $\phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application \mathbb{C} -linéaire, nous avons $\phi_1 = \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}}$. Reste à vérifier le carré commutatif donné par la flèche $\alpha : 0 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ 1 = 0$. Nous concluons alors que $\text{Hom}(X, Y) = \{\lambda(\text{Id}, 0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$. Notons que $X \not\cong Y$: il n'y a pas d'isomorphismes de X vers Y .

Par un raisonnement similaire, nous pouvons conclure qu'il n'y a pas de morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ non nul. Donc $\text{Hom}(Y, X) = 0$. Ci-dessous sont représentés le carré commutatif que doit respecter tout morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ et à droite celui que doit respecté tout morphisme $\psi : Y \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{C} & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow 0 \\ Y = \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y = \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\ X = \mathbb{C} & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \end{array}$$

┘

Proposition 1.23. Soit Q un carquois et \mathbb{K} un corps. L'ensemble $\text{Rep}(Q)$ des représentations de Q , munies de l'ensemble des morphismes de représentations, forment une catégorie ; et $\text{rep}(Q)$ en est une sous-catégorie pleine.

Nous allons voir dans ce qui suit que cette catégorie admet notamment une structure abélienne.

1.2.2 Les représentations indécomposables

Définition 1.24. Soit Q un carquois fini et $X, Y \in \text{Rep}(Q)$. La **somme directe de X et Y** , notée $X \oplus Y$ est la représentation $E = ((E_q)_{q \in Q_0}, (E_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ définie par :

- Pour tout sommet $q \in Q_0$, $E_q = X_q \oplus Y_q$;
- Pour toute flèche $\alpha \in Q_1$, nous avons $\forall x \in X_{s(\alpha)}, y \in Y_{s(\alpha)}, E_\alpha(x + y) = X_\alpha(x) + Y_\alpha(y)$. En terme matriciel, nous pouvons écrire :

$$E_\alpha = \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{bmatrix} = X_\alpha \oplus Y_\alpha$$

Exemple 1.25. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Reprenons le carquois Q suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Soit les représentations X et Y ci-dessous.

$$X = \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{C} \quad Y = \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{C}^3$$

Alors, nous obtenons,

$$X \oplus Y = \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{C}^4$$

┘

Définition 1.26. Soit Q un carquois fini. Une représentation E est dite *non nulle* s'il existe $q \in Q_0$ telle que $E_q \neq 0$. Une représentation non nulle E de Q est dite **indécomposable** si, et seulement si, chaque fois que nous avons $X, Y \in \text{Rep}(Q)$ tels que $E \cong X \oplus Y$, alors $X = 0$ ou $Y = 0$.

Notons $\text{Ind}_{\mathbb{K}}(Q)$, ou plus simplement $\text{Ind}(Q)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations dans $\text{rep}(Q)$ qui sont indécomposables.

Un carquois Q est dit **de type de représentation finie** si $\#\text{Ind}(Q) < \infty$.

Exemple 1.27. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considérons notre carquois favori.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Les représentations indécomposables sont isomorphes à l'une des trois représentations ci-dessous.

$$X = \mathbb{C} \longrightarrow 0 \quad Y = 0 \longrightarrow \mathbb{C} \quad Z = \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que X , Y et Z sont des représentations indécomposables deux à deux non-isomorphes.

Pour montrer que ce sont bien les seules, nous allons utiliser la décomposition usuelle de toute application linéaire.

Pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$, nous définissons la *coimage* de f , notée $\text{Coim}(f)$, comme étant l'espace vectoriel quotient $E/\text{Ker}(f)$, et le *conoyau* de f , noté $\text{Coker}(f)$ comme étant $F/\text{Im}(f)$. Par construction, $E \cong \text{Ker}(f) \oplus \text{Coim}(f)$ et $F \cong \text{Im}(f) \oplus \text{Coker}(f)$. En décomposant l'action de f par rapport aux différentes composantes, nous obtenons

$$E \xrightarrow{f} F \cong \left(\text{Ker}(f) \longrightarrow 0 \right) \oplus \left(\text{Coim}(f) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Im}(f) \right) \oplus \left(0 \longrightarrow \text{Coker}(f) \right)$$

$$\cong X^{\dim(\text{Ker}(f))} \oplus Z^{\dim(\text{Im}(f))} \oplus Y^{\dim(\text{Coker}(f))}$$

Rappelons que, pour deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F , deux applications \mathbb{K} -linéaires $f, g : E \rightarrow F$ sont dites *équivalentes* s'il existe $\phi : E \rightarrow E$ et $\psi : F \rightarrow F$ des applications \mathbb{K} -linéaires bijectives telles que $\psi f = g\phi$. Notons que dans la dernière égalité exprimée ci-dessus, nous avons utilisé le fait que tout isomorphisme entre espaces vectoriels est équivalent au morphisme identité : ceci explique particulièrement l'isomorphisme de représentations déduit pour le terme du milieu. \lrcorner

Remarque 1.28. Dans l'exemple précédent, le choix du corps n'a que peu d'importance. En effet, deux représentations X et Y sont isomorphes si $X_1 \cong Y_1$, $X_2 \cong Y_2$, et, X_α et Y_α sont équivalents. Or, les classes d'équivalence des matrices $n \times m$ à coefficients dans \mathbb{K} sont décrites par les matrices de la forme suivante

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cela suffit à permettre la décomposition donnée plus haut. Nous verrons plus loin (Remarque 1.32) que le choix du corps peut avoir une certaine importance pour déterminer si une représentation est indécomposable ou non.

Exemple 1.29. Considérons le carquois suivant.

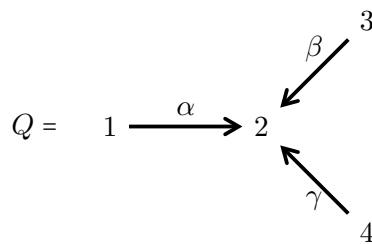
$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

Ci-dessous sont données les représentations indécomposables deux à deux non isomorphes qui représentent les éléments de $\text{Ind}(Q)$.

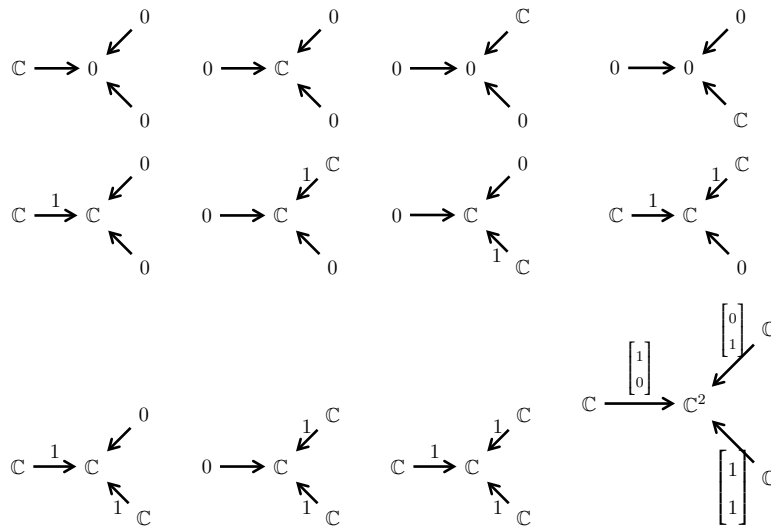
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \longleftarrow 0 & 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longleftarrow 0 & 0 \longrightarrow 0 \longleftarrow \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \longleftarrow 0 & 0 \longrightarrow \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C} & \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C} \end{array}$$

┌

Exemple 1.30. Soit le carquois suivant.



Les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables sur \mathbb{C} de Q sont les suivantes.



┌

Une question naturelle qui s'ensuit est de déterminer les carquois Q de type de représentation fini. Il se trouve que ce n'est pas une question évidente. Nous allons voir à travers deux exemples que la forme des carquois de type de représentation fini est très restreinte.

Exemple 1.31. Soit Q le carquois suivant.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2$$

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et considérons $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Soit les représentations suivantes.

$$X = \mathbb{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\lambda} \end{array} \mathbb{C} \quad Y = \mathbb{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\mu} \end{array} \mathbb{C}$$

Nous pouvons montrer facilement que X et Y sont indécomposables. Montrons que X et Y sont isomorphes si, et seulement si, $\lambda = \mu$.

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme.

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\lambda} \end{array} & \mathbb{C} \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ Y = \mathbb{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\mu} \end{array} & \mathbb{C} \end{array}$$

Étant donné que φ_1 et φ_2 sont des applications linéaires entre des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension 1, alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi_1 = a \text{Id}$ et $\varphi_2 = b \text{Id}$. Comme φ est un morphisme de représentations, il doit respecter les carrés commutatifs donnés par les flèches α et β . En suivant α , nous obtenons que $a = b$. et en suivant β , nous avons $b\lambda = \mu a$. Alors deux possibilités :

- soit $a = b = 0$ et alors la deuxième égalité est respectée trivialement. Cela nous donne $\varphi = 0$;
- soit $a = b \neq 0$, et la deuxième égalité implique que $\lambda = \mu$. Mais alors $X = Y$. Dans ce cas,

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{End}(X) = \{a \text{Id}_X \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}.$$

En conclusion :

- si $\lambda \neq \mu$, $\text{Hom}(X, Y) = 0$;
- sinon, $X = Y$ et $\text{Hom}(X, Y) = \text{End}(X) = \{a \text{Id}_X \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.

Ceci permet de conclure que X et Y sont isomorphes si, et seulement si, $\lambda = \mu$.

Ainsi, il n'y a pas de morphisme non nul (et donc pas d'isomorphismes) entre X et Y si, et seulement si, $\lambda \neq \mu$. En conséquence, la famille de représentations

$$\mathbb{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\lambda} \end{array} \mathbb{C}$$

paramétrée par $\lambda \in \mathbb{C}$ donne une famille infinie de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes. Cela implique que $\# \text{Ind}(Q) = \infty$. ┘

De cet exemple, nous pouvons montrer, de façon similaire, que si Q admet un cycle (orienté ou non), alors $\# \text{Ind}(Q) = \infty$.

Remarque 1.32. Considérons les représentations suivantes.

$$E = \mathbb{K}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{I_n} \\ \xrightarrow{A} \end{array} \mathbb{K}^n \quad F = \mathbb{K}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{I_n} \\ \xrightarrow{B} \end{array} \mathbb{K}^n$$

Nous avons que $E \cong F$ si, et seulement si, A et B sont des matrices semblables. Or la description des classes de similitudes des matrices dépend du corps sur lequel nous travaillons, et donc certaines représentations peuvent être indécomposables pour un corps et pas pour un autre. Pour illustrer ce propos, la représentation

$$\mathbb{K}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{I_2} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array} \mathbb{K}^2$$

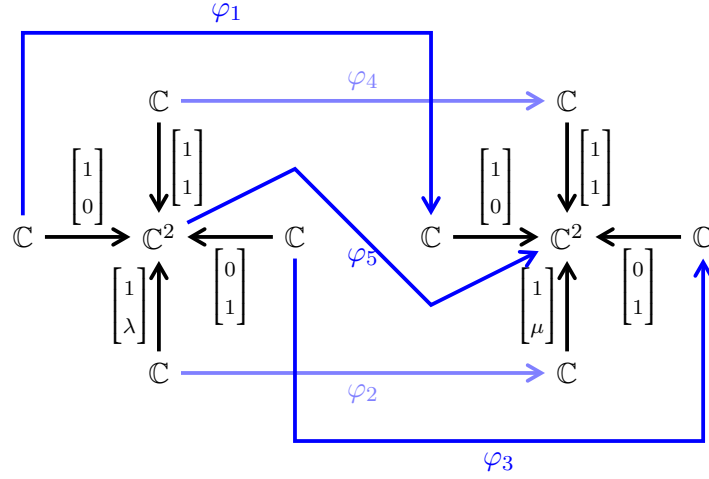
est indécomposable sur \mathbb{R} , mais ne l'est pas sur \mathbb{C} .

Exemple 1.33. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Considérons Q le carquois, X et Y les représentations de Q ci-dessous.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \downarrow \delta & & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 5 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \\ & & \uparrow \beta & & \\ & & 2 & & \end{array} \quad X = \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C} & & \\ & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} & & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array} \quad Y = \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C} & & \\ & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} & & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array}$$

Pour montrer que X et Y sont indécomposables, nous pouvons nous inspirer de l'unique représentation indécomposable du carquois de l'Exemple 1.30 qui admet au sommet central un espace vectoriel de dimension 2. Montrons que X et Y sont isomorphes si, et seulement si, $\lambda = \mu$.

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme de représentation.



Tout d'abord, nous pouvons écrire que $\varphi_1 = a \text{Id}$, $\varphi_2 = b \text{Id}$, $\varphi_3 = c \text{Id}$, $\varphi_4 = d \text{Id}$ et $\varphi_5 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, avec toutes les indéterminées étant des nombres complexes. Faisons le tour des carrés commutatifs à respecter :

- flèche $\alpha : a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies e = a \text{ et } g = 0$
- flèche $\gamma : c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & f \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies f = 0 \text{ et } h = c$
- flèche $\delta : d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies a = c = d \text{ d'où } \varphi_5 = a \text{Id}_{\mathbb{C}^2}$
- flèche $\beta : b \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} \implies b = a \text{ et } b\lambda = a\mu$

Nous voyons que nous retombons dans la même configuration que pour l'Exemple 1.31. Par un raisonnement similaire, soit $\lambda \neq \mu$ et donc $\text{Hom}(X, Y) = 0$, ou $\lambda = \mu$ et alors $a = b = c = d = e = h$ et $f = g = 0$ et donc $\text{Hom}(X, X) = \{a \text{Id}_X \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$. Ce qui permet de conclure le résultat voulu.

Comme pour l'Exemple 1.31, nous concluons que nous avons une famille infinie, paramétrée par $\lambda \in \mathbb{C}$, de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes. Donc $\# \text{Ind}(Q) = \infty$. \square

De manière analogue, nous pouvons montrer que si un carquois Q sans cycle (orienté ou non) et connexe admet, soit un sommet avec au moins 4 flèches incidentes, soit au moins deux sommets ayant chacun 3 flèches incidentes, alors $\# \text{Ind}(Q) = \infty$.

À travers ces exemples, nous avons pu nous rendre compte que les conditions pour qu'un carquois Q soit tel que $\#\text{Ind}(Q) < \infty$ sont très strictes. Le théorème de Gabriel exhibe les formes de carquois exactes qui admettent un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de Q . Avant de donner son énoncé, nous avons besoin d'une petite définition.

Définition 1.34. Un carquois Q est dit *de type Dynkin ADE* si son graphe sous-jacent est de l'une des formes suivantes :

- $1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n$ (type $A_n, n \geq 1$)

- $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n \\ \diagup \\ 1 \end{array}$ (type $D_n, n \geq 4$)

- $\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \end{array}$ (type E_6)

- $\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \end{array}$ (type E_7)

- $\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \text{ --- } 8 \end{array}$ (type E_8)

Voilà son énoncé.

Théorème 1.35 ((Gabriel, 1972)). *Soit Q un carquois fini connexe. Alors $\#\text{Ind}(Q) < \infty$ si, et seulement si, Q est de type Dynkin ADE.*

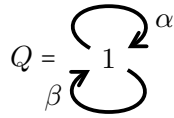
Nous avons déjà effectué les premiers pas de la démonstration de ce théorème. L'idée de la preuve de Gabriel passe par les racines positives du système de Coxeter associé au carquois, qui sont en correspondance avec les représentations indécomposables de Q . S'ensuit alors une forme quadratique, dite de Tits, qui caractérise

la finitude du nombre de racines positives via sa définie positivité suivant le carquois Q en jeu. Puis, via quelques calculs, on en extrait les formes listées en Définition 1.34.

Nous ne détaillerons pas la preuve de ce résultat ici, mais nous invitons le lecteur à se reporter aux références suivantes : (Gabriel, 1972), (Gabriel, 1974), ou plus récemment (Hale, 2021)

1.3 Algèbres quotients et carquois à relations

Pour motiver cette partie, nous pouvons nous demander si l'algèbre $\mathbb{K}[X, Y]$ des polynômes à deux variables à coefficients sur un corps \mathbb{K} peut se décrire à l'aide d'un carquois. En s'inspirant de l'Exemples 1.3 (Q3), dont l'algèbre de chemins correspond à $\mathbb{K}[X]$ comme étudié en Exemple 1.14 (Q3), nous pouvons avoir en tête le carquois suivant.



Malheureusement, $\mathbb{K}Q$ n'est pas commutatif : $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Qu'importe ! Nous allons imposer la commutativité. Comment ? En quotientant par le bon idéal. Ici, nous pouvons considérer l'idéal (bilatère) engendré par $\alpha\beta - \beta\alpha$: $I = \langle \alpha\beta - \beta\alpha \rangle$. Ainsi, par les propriétés de quotient $\mathbb{K}Q/I$, nous avons $\mathbb{K}[X, Y] \cong \mathbb{K}Q/I$.

En introduisant les algèbres quotients, nous pourrions espérer décrire davantage d'algèbres à l'aide des carquois.

Remarque 1.36. L'algèbre $\mathbb{K}Q$ correspond en fait à l'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{K}\langle X, Y \rangle$.

1.3.1 Définitions

Définition 1.37. Soit Q un carquois fini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons $\mathbb{K}Q_{\geq n}$ l'idéal engendré par tous les chemins de Q de longueur plus grande ou égale à n . Notons également $\mathbb{K}Q_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les chemins de Q de longueur exactement n .

Remarquons que $\mathbb{K}Q = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}Q_n$ est une algèbre *graduée* : en effet $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}Q_i \mathbb{K}Q_j \subseteq \mathbb{K}Q_{i+j}$.

Définition 1.38. Soit Q un carquois fini. Un idéal $I \subseteq \mathbb{K}Q$ est dit *admissible* si, et seulement si,

$$\exists N \geq 2, \mathbb{K}Q_{\geq N} \subseteq I \subseteq \mathbb{K}Q_{\geq 2}.$$

Exemples 1.39.

(Q1) Considérons Q le carquois suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Alors l'idéal $I = \langle \beta\alpha \rangle$ est admissible pour $\mathbb{K}Q$.

(Q12) Considérons le carquois Q suivant.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \\ 1 & \xrightarrow{\gamma} & & \xrightarrow{\epsilon} & 3 \\ & \searrow \delta & 4 & & \end{array}$$

Alors $I = \langle \beta\alpha - \epsilon\delta \rangle$ est un idéal admissible $\mathbb{K}Q$, mais pas $J = \langle \beta\alpha - \gamma \rangle$ car $\beta\alpha - \gamma \notin \mathbb{K}Q_{\geq 2}$.

(Q13) Considérons le carquois Q suivant.

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \\ 1 & & & & 3 \\ & \searrow \gamma & 4 & \xrightarrow{\delta} & 5 \\ & & & & \nearrow \epsilon \end{array}$$

Alors $I = \langle \beta\alpha - \epsilon\delta\gamma \rangle$ est un idéal admissible.

(Q14) Considérons le carquois Q suivant.

$$Q = \begin{array}{c} \alpha \\ \circlearrowright \\ 1 \\ \circlearrowleft \\ \beta \end{array}$$

Alors $I = \langle \alpha\beta - \beta\alpha \rangle$ n'est pas admissible. En effet, bien que $I \subseteq \mathbb{K}Q_{\geq 2}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n \notin I$, et donc $I \not\subseteq \mathbb{K}Q_{\geq n}$.

(Q15) Considérons le carquois Q suivant.

$$Q = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\alpha}$$

Alors $I = \langle \alpha^3 - \alpha^2 \rangle$ est admissible.

┘

Proposition 1.40. Soit Q un carquois fini acyclique. Tout idéal $I \subseteq \mathbb{K}Q_{\geq 2}$ est admissible.

Après ces différents exemples, nous pouvons nous demander les raisons qui nous amènent à considérer cette notion. Premièrement, elle permet de garder un certain contrôle sur l'algèbre – notamment, nous verrons que l'algèbre quotient $\mathbb{K}Q/I$ est de dimension finie si I est admissible – mais aussi de préserver la structure du carquois correspondant à l'algèbre de chemins que nous considérons.

Par exemple, pour un carquois Q , et un sommet q de Q , si nous considérons $I = \langle e_q \rangle$, alors toutes les flèches α telles que $s(\alpha) = e_q$ ou $t(\alpha) = e_q$ sont nulles dans le quotient $\mathbb{K}Q/I$. Pour le carquois Q , cela reviendrait à effacer le sommet q ainsi que toutes les flèches qui lui sont incidentes.

Un autre exemple : si $I = \langle \alpha \rangle$ avec α une flèche de Q , alors le quotient $\mathbb{K}Q/I$ annulera α . Sur Q , cela revient tout bonnement à supprimer la flèche α .

Définition 1.41. Soit Q un carquois fini et \mathbb{K} un corps. Une **relation** sur Q est une combinaison \mathbb{K} -linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

avec, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $w_i \in \text{Ch}(Q)$ tel que $\ell(w_i) \geq 2$ et, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, w_i et w_j ont la même source et le même but.

Si $m = 1$, une telle relation est dite **monomiale**. Pour $w_1, w_2 \in \text{Ch}(Q)$ tels que $\ell(w_1), \ell(w_2) \geq 2$, $s(w_1) = s(w_2)$ et $t(w_1) = t(w_2)$, l'expression $w_1 - w_2$ est une relation dite de **commutativité**.

Un **carquois à relations** est une paire (Q, R) où Q est un carquois, et R est un ensemble de relations sur Q .

Exemples 1.42.

- Tous les exemples d'idéaux admissibles donnés en Exemples 1.39 sont des idéaux engendrés par une relation de Q .

- Dans (Q12), $\beta\alpha - \gamma$ n'est pas une relation, mais dans (Q14), $\alpha\beta - \beta\alpha$ en est une de commutativité.
- Dans (Q13), $\beta\alpha - \varepsilon\delta\gamma$ est une relation (de commutativité). Par contre, ni $\beta\alpha - \varepsilon\delta$ ni $\beta\alpha - \delta\gamma$ ne le sont car pour le premier $s(\beta\alpha) \neq s(\varepsilon\delta)$, et pour le second $t(\beta\alpha) \neq t(\delta\gamma)$. \lrcorner

1.3.2 Propriétés

Rappelons que dans cette section, ce qui nous motive est de tenter d'élargir l'éventail des algèbres que nous pourrions réaliser à l'aide d'un carquois via un idéal admissible. L'avantage d'avoir considéré des idéaux admissibles, et non des idéaux quelconques, est de pouvoir garder un contrôle sur ce qui se produit sur le carquois.

Le résultat suivant montre que nous arrivons à conserver une certaine structure en quotientant une algèbre de chemins par un idéal admissible.

Proposition 1.43. *Soit Q un carquois fini et I un idéal admissible de $\mathbb{K}Q$. Alors $\mathbb{K}Q/I$ est connexe si, et seulement si, Q est connexe.*

Le résultat suivant implique que le fait de travailler avec des quotients d'algèbres de chemin par des idéaux admissibles nous amène à nous pencher sur les algèbres de dimension finie, ce qui était, d'une certaine manière, le but de la définition d'idéal admissible.

Proposition 1.44. *Soit Q un carquois fini et I un idéal admissible de $\mathbb{K}Q$. Alors l'algèbre $\mathbb{K}Q/I$ est de dimension finie.*

Bien que nous avons laissé de côté les algèbres de dimension infinie, nous allons être gagnants à la fin de l'histoire. Avant d'énoncer un résultat fondamental qui peut être une motivation principale à l'étude de la théorie des représentations de carquois, mettons en avant un fait remarquable par la proposition suivante.

Proposition 1.45. *Soit Q un carquois fini. Alors pour tout idéal admissible I de $\mathbb{K}Q$, il existe un ensemble fini de relations R tel que $I = \langle R \rangle$.*

Définition 1.46. Soit A une algèbre. Deux éléments idempotents $e, f \in A$ sont dits *orthogonaux* si $ef = fe = 0$. Un élément $e \in A$ est dit *primitif* si nous ne pouvons pas écrire que $e = e_1 + e_2$ avec $e_1, e_2 \in A$ deux éléments non nuls idempotents orthogonaux. Un ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'éléments idempotents primitifs de

A est dit **complet** si $A = e_1A \oplus e_2A \oplus \dots \oplus e_nA$.

Une algèbre A est dite **basique** si elle admet un ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ complet d'éléments primitifs orthogonaux tel que $e_jA \not\cong e_iA$ pour tout $i \neq j$.

Exemple 1.47. Considérons $A = T_3(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices 3×3 triangulaires supérieures à valeurs dans \mathbb{C} . En notant $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est en i -ème ligne et j -ème colonne, et vaut 1, posons $e_1 = E_{1,1}$, $e_2 = E_{2,2}$ et $e_3 = E_{3,3}$. Alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ forme un ensemble complet d'éléments primitifs orthogonaux de A . En effet :

- $e_1A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\};$
- $e_2A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid d, e \in \mathbb{C} \right\};$
- $e_3A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \mid f \in \mathbb{C} \right\};$

Ainsi, nous avons bien que $A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A$. Nous concluons que A est basique. ┘

Supposer qu'une algèbre est basique n'est pas une grande perte. En effet, toute algèbre A qui admet un ensemble fini complet d'idempotents primitifs orthogonaux est *Morita équivalente* à son « algèbre basique associée » A^b . Autrement dit, il existe une équivalence de catégorie entre la catégorie des A -modules et la catégorie des A^b -modules. Pour un énoncé complet, nous invitons le lecteur à se reporter à la référence suivante : (Assem *et al.*, 2006, Section I.6).

Proposition 1.48. Soit (Q, R) un carquois fini à relations. Posons $I = \langle R \rangle$. L'algèbre $\mathbb{K}Q/I$ est basique.

Énonçons un résultat des plus importants.

Théorème 1.49. Soit A une \mathbb{K} -algèbre basique connexe de dimension finie. Alors il existe un carquois à relations (Q, R) fini tel que $A \cong \mathbb{K}Q/I$ avec $I = \langle R \rangle$.

Exemple 1.50. Un carquois à relations (Q, R) tel que $\mathbb{K}Q/I \cong T_3(\mathbb{K})$, avec $I = \langle R \rangle$, est donné par le carquois

$$Q = \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

et l'ensemble $R = \emptyset$. Nous pourrions effectuer la correspondance suivante :

- $e_i = E_{i,i}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$;

- $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Via cette correspondance, nous pourrions noter que

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

qui donne bien le dernier élément qui engendre, en tant qu'espace vectoriel, $T_3(\mathbb{K})$. ┘

Remarque 1.51. En général, étant donnée une algèbre basique connexe de dimension finie A , il est difficile de déterminer si nous pouvons construire un carquois à relations (Q, R) tel que $\mathbb{K}Q/I \cong A$, avec $I = \langle R \rangle$.

1.3.3 Représentations

Dans cette partie, nous allons étendre la définition de représentations de carquois aux carquois à relations, et nous allons mettre en avant le lien avec les modules (à gauche) de l'algèbre quotient associée.

Définition 1.52. Soit (Q, R) un carquois fini à relations. Pour $X \in \text{rep}(Q)$, $k \geq 1$ et $c = \alpha_k \dots \alpha_1 \in \text{Ch}(Q)$, posons $X_c = X_{\alpha_k} \circ \dots \circ X_{\alpha_1}$. Une **représentation de** (Q, R) $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ est une représentation de Q telle que,

$$\forall \rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \in R, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i X_{w_i} = 0.$$

Exemple 1.53.

- Considérons le carquois à relations (Q, R) suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \qquad R = \{\beta\alpha\}$$

Soit $X \in \text{rep}(Q)$ la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Alors X est bien une représentation de (Q, R) , car

$$X_\beta X_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0].$$

┘

Proposition 1.54. *Soit (Q, R) un carquois à relations et \mathbb{K} un corps. L'ensemble $\text{Rep}(Q, R)$ des représentations de (Q, R) sur \mathbb{K} munies de l'ensemble des morphismes entre elles, forment une catégorie. C'est une sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(Q)$. De même, $\text{rep}(Q, R)$ est une sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$.*

La catégorie $\text{Rep}(Q, R)$ est, de plus, en lien étroit avec celle des modules sur l'algèbre quotient $\mathbb{K}Q/I$ avec $I = \langle R \rangle$. Le résultat suivant donne précisément ce lien.

Pour Λ une \mathbb{K} -algèbre, nous notons $\Lambda - \text{Mod}$ la catégorie des Λ -modules (à gauche) et $\Lambda - \text{mod}$ la sous-catégorie pleine de $\Lambda - \text{Mod}$ engendrée par les Λ -modules de dimension finie sur \mathbb{K} .

Théorème 1.55. *Soit Q un carquois fini et I un idéal admissible de $\mathbb{K}Q$. Posons R un ensemble fini de relations tel que $I = \langle R \rangle$ (possible via Proposition 1.45). Alors nous avons l'équivalence de catégorie suivante.*

$$(\mathbb{K}Q/I) - \text{Mod} \xrightarrow{\cong} \text{Rep}(Q, R)$$

qui se restreint à l'équivalence de catégorie $(\mathbb{K}Q/I) - \text{mod} \xrightarrow{\cong} \text{rep}(Q, R)$

Voici un exemple explicite illustrant cette équivalence de catégorie sur les objets.

Exemple 1.56. Considérons le carquois à relations (Q, R) suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \quad R = \{\beta\alpha\}$$

Soit $X \in \text{rep}(Q, R)$ la représentation suivante.

$$X = \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Via une décomposition de X , nous pouvons extraire des bases ordonnées (x) , (y_1, y_2, y_3) et (z) respectivement de X_1 , X_2 et X_3 tel que :

- $X_\alpha(x) = y_1$;
- $X_\beta(y_1) = X_\beta(y_2) = 0$;
- $X_\beta(y_3) = z$.

Posons $I = \langle R \rangle$. Le $\mathbb{K}Q/I$ -module M_X correspondant à X s'obtient comme le $\mathbb{K}Q$ -espace vectoriel formellement engendré par x, y_1, y_2, y_3 et z muni de la structure de $\mathbb{K}Q$ -modules suivante :

- $e_1 \cdot x = x, \quad \alpha \cdot x = y_1,$
- $e_2 \cdot y_i = y_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\},$
- $\beta \cdot y_3 = z, \quad e_3 \cdot z = z,$
- $e_2 \cdot x = e_3 \cdot x = \beta \cdot x = \beta\alpha \cdot x = 0,$
- $\alpha \cdot y_i = e_1 \cdot y_i = e_3 \cdot y_i = \beta\alpha \cdot y_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$
- $\beta \cdot y_1 = \beta \cdot y_2 = 0,$
- $e_1 \cdot z = e_2 \cdot z = \alpha \cdot z = \beta \cdot z = \beta\alpha \cdot z = 0.$

┘

1.4 Le carquois d'Auslander–Reiten

Dans cette partie, nous allons introduire brièvement des outils qui permettent de comprendre la structure de la catégorie des représentations d'un carquois à relations (Q, R) , en étudiant les classes d'isomorphisme de ses représentations indécomposables, ainsi que les morphismes entre eux. C'est ce qui forme le *carquois d'Auslander–Reiten*.

Le carquois d'Auslander–Reiten est beaucoup utilisé dans la suite de cette thèse.

1.4.1 Familles de représentations particulières

Définition 1.57. Soit A une \mathbb{K} -algèbre. Un A -module (à gauche) P est dit **projectif** si pour tout morphisme surjectif $\sigma : M \rightarrow N$ de A -modules, et pour tout morphisme $f : P \rightarrow N$, il existe un morphisme $f_\circ : P \rightarrow M$ tel que $f = \sigma f_\circ$. Dualement, un A -module I est dit **injectif** si pour tout morphisme injectif $\iota : L \hookrightarrow M$, et pour tout morphisme $g : L \rightarrow I$, il existe un morphisme $g^\circ : M \rightarrow I$ tel que $g^\circ \iota = g$. Voilà deux dessins qui récapitulent visuellement ces définitions.



Si $A = \mathbb{K}Q/I$ avec (Q, R) un carquois fini à relations et $I = \langle R \rangle$, alors un module projectif indécomposable se traduit en une représentation projective indécomposable dépendant d'un sommet $q \in Q_0$, dénotée P_q , définie par :

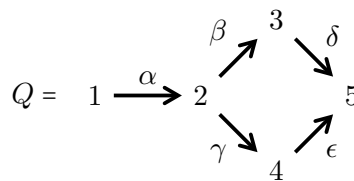
- $(P_q)_i = \mathbb{K}^{c(q,i)}$ où $c(q, i)$ correspond au nombre de chemins γ distincts allant de q vers i , modulo les relations R .
- Les morphismes $(P_q)_\alpha$ sont induits par les chemins allant de q vers $s(\alpha)$ et les chemins allant de q vers $t(\alpha)$, modulo les relations R .

Dualement, un module injectif indécomposable se traduit en une représentation injective indécomposable dépendant d'un sommet $q \in Q_0$, que nous noterons I_q , définie par :

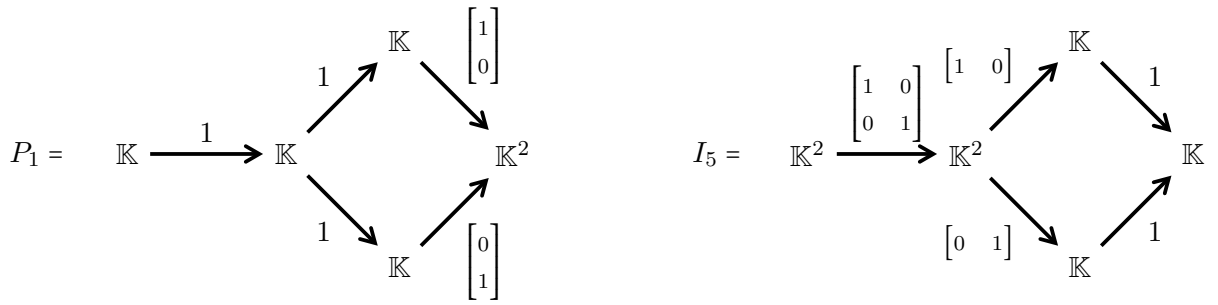
- $(I_q)_i = \mathbb{K}^{c(i,q)}$ où $c(i, q)$ correspond au nombre de chemins γ distincts allant de i vers q , modulo les relations R .
- Les morphismes $(I_q)_\alpha$ sont induits par les chemins allant de $s(\alpha)$ vers q et les chemins allant de $t(\alpha)$ vers q , modulo les relations R .

Exemples 1.58.

- Considérons le carquois Q sans relations suivant.

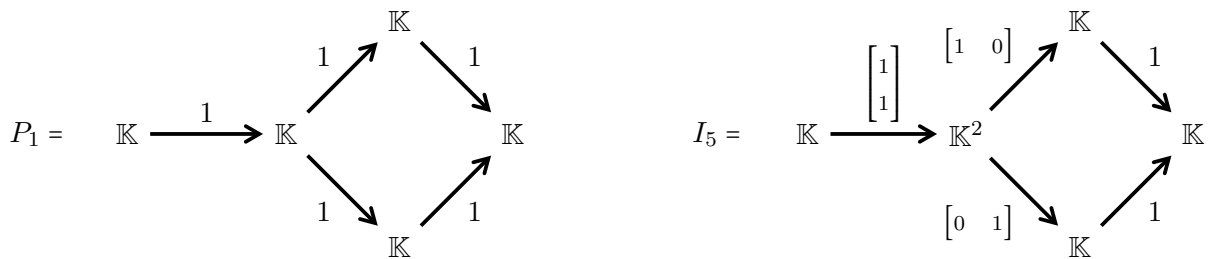


Alors nous avons P_1 et I_5 comme ci-dessous.

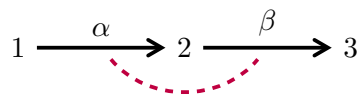


Notons que les morphismes de P_q se déduisent de la manière suivante : nous ordonnons tous les chemins allant de q vers $s(\alpha)$ et ceux allant de q vers $t(\alpha)$. Ces chemins forment une base de chacun des espaces vectoriels en $s(\alpha)$ et $t(\alpha)$. Le morphisme $(P_q)_\alpha$ se définit via une base comme la concaténation (à gauche) du chemin par α . Pour $(I_q)_\alpha$, il s'agira d'une « simplification » du chemin par α à gauche : si Γ est un chemin allant de $s(\alpha)$ vers q tel que $\Gamma = \alpha\Delta$, alors $(I_q)_\alpha(\Gamma) = \Delta$, sinon $I_q(\Gamma) = 0$.

D'autre part, pour le même carquois, si nous avons $R = \{\delta\beta\alpha - \epsilon\gamma\alpha\}$, alors nous obtenons les représentations P_1 et I_5 suivantes.



- Considérons le carquois à relations (Q, R) suivant.



Les pointillés indiquent que $R = \{\beta\alpha\}$. Désormais, toute relation monomiale qui s'écrit $w = \beta\alpha$ sera

représenté directement sur le graphe par un arc en pointillés reliant α avec β . Les représentations P_1 et I_3 sont les suivantes.

$$P_1 = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0 \quad I_3 = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

Notons que $P_1 = I_2$ et que $I_3 = P_2$. ┘

Remarque 1.59. Pour les algèbres de dimension finie (autrement dit avec un carquois à relations (Q, R) tel que $I = \langle R \rangle$ est un idéal admissible de $\mathbb{K}Q$), les représentations indécomposables projectives et injectives sont de dimension finie. Notons qu'il est possible de considérer des représentations projectives et injectives hors du cadre des représentations de dimension finie, mais nous l'éviterons.

Définition 1.60. Soit A une \mathbb{K} -algèbre. Un A -module S est dit *simple* si S est non nul et si les seuls sous-modules de S sont 0 ou S . Si A est de dimension finie, ces modules se traduisent également très bien dans le cadre des représentations, et dépendent également d'un sommet q . Notons S_q la représentation simple définie par $(S_q)_i = 0$ si $i \neq q$ et $(S_q)_q = \mathbb{K}$. Il est simple de noter que $(S_q)_\alpha = 0$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Remarque 1.61. Notons que les représentations indécomposables projectives, injectives et simples ne permettent pas de décrire toutes les représentations d'un carquois à relations (Q, R) .

1.4.2 Définition théorique

Pour décrire le carquois d'Auslander–Reiten, nous avons besoin de la notion de *morphisme irréductible*.

Définition 1.62. Soit (Q, R) un carquois fini à relations et $X, Y \in \text{rep}(Q, R)$.

(1) Un morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ est une *section* si ϕ admet une inverse à gauche :

$$\exists \psi : Y \longrightarrow X \mid \psi\phi = \text{Id}_X .$$

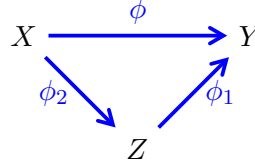
(2) Un morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ est une *rétraction* si ϕ admet une inverse à droite :

$$\exists \psi : Y \longrightarrow X \mid \phi\psi = \text{Id}_Y .$$

(3) Un morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ est *irréductible* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- ϕ n'est ni une section, ni une rétraction ;

- S'il existe $Z \in \text{rep}(Q, R)$, $\phi_1 : Z \rightarrow Y$ et $\phi_2 : X \rightarrow Z$ telle que $\phi = \phi_1 \phi_2$ alors soit ϕ_1 est une rétraction, soit ϕ_2 est une section.



Malheureusement, l'ensemble des fonctions irréductibles entre deux représentations d'un carquois à relations ne forment pas un espace vectoriel. Pour pallier cette difficulté, nous allons introduire la notion de *radical de la catégorie* $\text{rep}(Q, R)$ du « premier » et du « deuxième » ordre qui permettront de prendre la mesure du nombre de morphismes irréductibles entre deux représentations indécomposables.

Définition 1.63. Soit (Q, R) un carquois à relations. Nous définissons $\text{rad}_{\text{rep}(Q, R)} = \text{rad}_{(Q, R)}$ le **radical (de Jacobson) du premier ordre de la catégorie** $\text{rep}(Q, R)$ comme étant l'idéal bilatère défini par

$$\text{rad}_{(Q, R)}(X, Y) = \{f \in \text{Hom}(X, Y) \mid \text{Id}_X - gf \text{ est inversible pour tout } g \in \text{Hom}(Y, X)\}.$$

Nous définissons $\text{rad}_{(Q, R)}^2$ le **radical du deuxième ordre** de $\text{rep}(Q, R)$, en prenant, pour tout $X, Y \in \text{rep}(Q, R)$, $\text{rad}_{(Q, R)}^2(X, Y)$ comme étant le sous-espace vectoriel de $\text{rad}_{(Q, R)}(X, Y)$ donné par des sommes finies de morphismes de la forme gf avec $g \in \text{rad}_{(Q, R)}(X, Z)$ et $f \in \text{rad}(Z, Y)$, pour un certain $Z \in \text{rep}(Q, R)$.

Le lemme suivant met en avant que la notion de radical est bien celle à considérer pour décrire les morphismes irréductibles entre des représentations indécomposables.

Lemme 1.64. Soit (Q, R) un carquois à relations. Soit $X, Y \in \text{Ind}(Q, R)$. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est irréductible si, et seulement si, $f \in \text{rad}_{(Q, R)}(X, Y) \setminus \text{rad}_{(Q, R)}^2(X, Y)$.

Ce résultat permet de définir, pour tout $X, Y \in \text{Ind}(Q, R)$, l'**espace vectoriel des morphismes irréductibles de X vers Y** comme étant l'espace quotient suivant.

$$\text{Irr}_{(Q, R)}(X, Y) = \text{rad}_{(Q, R)}(X, Y) / \text{rad}_{(Q, R)}^2(X, Y)$$

Cette espace permet de « mesurer » le nombre de morphismes irréductibles de X vers Y .

Nous pouvons maintenant donner la définition centrale de cette section.

Définition 1.65. Soit (Q, R) un carquois fini à relation. Le *carquois d'Auslander–Reiten de* (Q, R) , noté $\Gamma(Q, R)$, est le carquois (Γ_0, Γ_1) tel que :

- L'ensemble Γ_0 des sommets de Γ correspond aux éléments de $\text{Ind}(Q, R)$: ce sont les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables de (Q, R) .
- L'ensemble Γ_1 des flèches de Γ correspond aux morphismes irréductibles qui existent entre les représentations indécomposables : plus précisément, si X et Y sont deux représentations indécomposables, alors le nombre de flèches entre la classe d'isomorphisme de X et celle de Y correspond aux éléments qui engendrent, en tant que base, le \mathbb{K} -espace vectoriel $\text{Irr}_{(Q,R)}(X, Y)$.

Nous illustrons comment construire le carquois d'Auslander–Reiten par des exemples.

1.4.3 Quelques exemples

Exemple 1.66. Considérons le carquois suivant.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Nous avons décrit les représentations indécomposables de Q précédemment en Exemple 1.27. En étudiant les morphismes que nous avons entre les représentations indécomposables, et en notant facilement que ces morphismes sont irréductibles, nous en arrivons au carquois d'Auslander–Reiten suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 & [\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}] & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 [0 \longrightarrow \mathbb{K} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{K} \longrightarrow 0]
 \end{array}$$

Les flèches bleues désignent les morphismes irréductibles entre représentations indécomposables. Plus précisément, rappelons qu'une flèche $X \rightarrow Y$ désigne un morphisme f formant une base de l'espace vectoriel $\text{Hom}(X, Y)$. La flèche en pointillés désigne l'action de la *translation d'Auslander–Reiten*¹ sur les repré-

1. voir (Assem *et al.*, 2006) pour plus de détails sur cette notion.

séquences indécomposables, et les crochets désignent les orbites, où la représentation au crochet de gauche correspond à une représentation projective, et celle de droite correspond à une représentation injective. \square

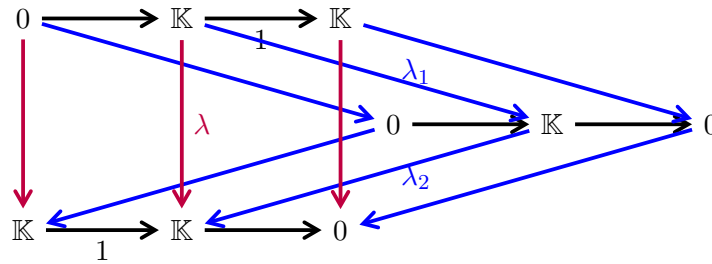
Exemple 1.67. Considérons le carquois à relations (Q, R) suivant.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \qquad R = \{\beta\alpha\}$$

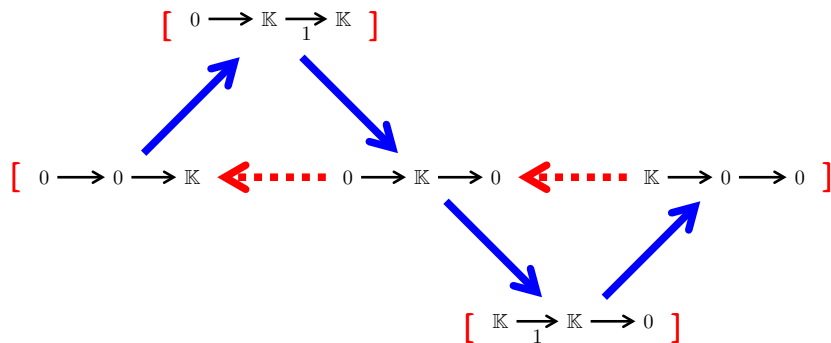
Les représentations indécomposables de (Q, R) sont les suivantes.

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K} \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Cet exemple se démarque car, parmi tous les morphismes que nous pouvons décrire, seul un type de morphismes n'est pas irréductible, à savoir celui ci-dessous.



Ainsi le morphisme rougeâtre se décompose en ceux dessinés en bleu si $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$. Nous pouvons vérifier que le premier (avec λ_1) n'est pas une section (il n'admet pas d'inverse à gauche) et le second (avec λ_2) n'est pas une rétraction (il n'admet pas d'inverse à droite). Nous en déduisons le carquois d'Auslander–Reiten suivant.



Encore une fois, le carquois a été décoré pour mettre en avant les orbites données par l'action de la translation d'Auslander–Reiten et par les représentations projectives et injectives. ┘

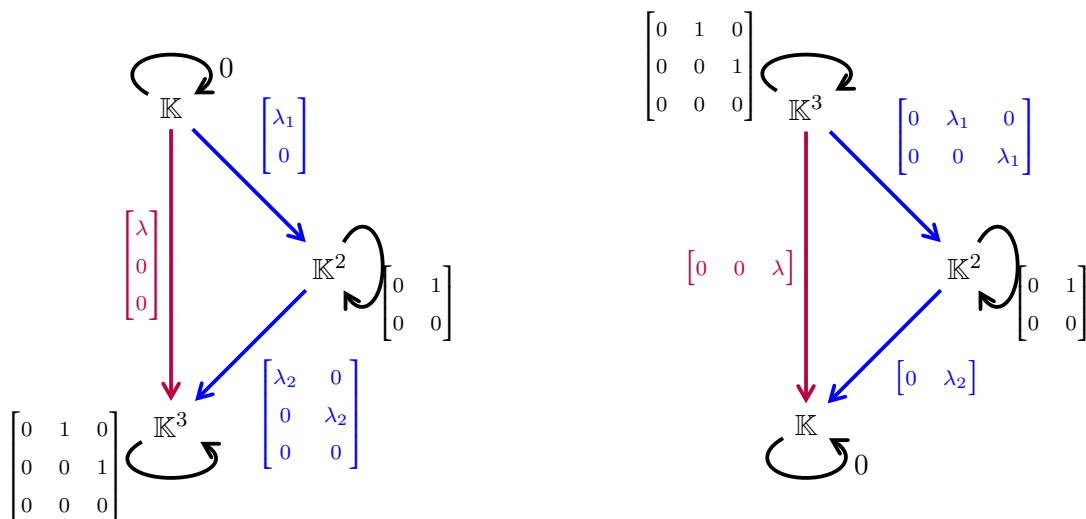
Exemple 1.68. Considérons le carquois à relations (Q, R) suivant.

$$Q = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K} \\ \curvearrowleft \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\gamma} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K}^2 \\ \curvearrowleft \\ 0 \end{array} \quad R = \{\gamma^3\}$$

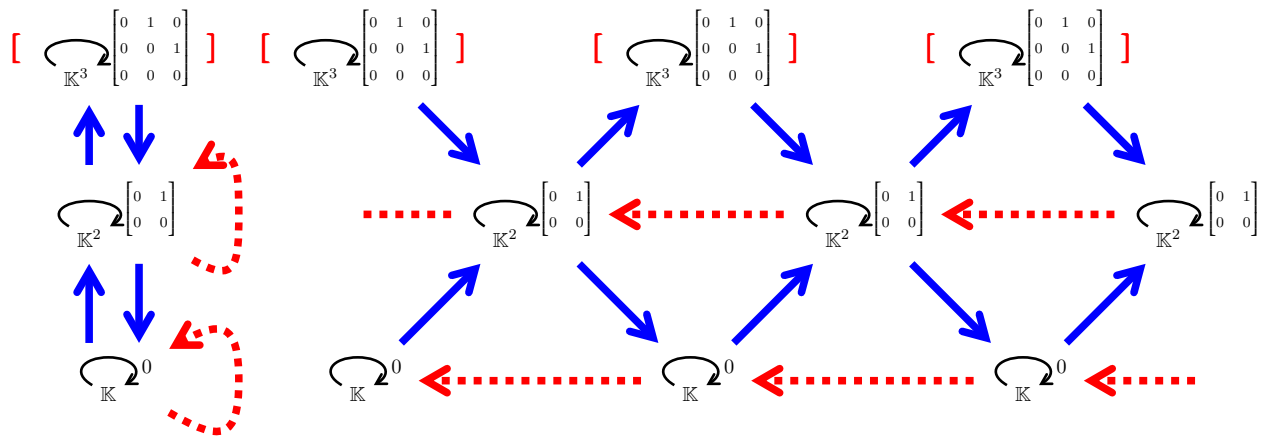
Les représentations indécomposables de (Q, R) , à isomorphisme près, sont les suivantes.

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K} \\ \curvearrowleft \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K}^2 \\ \curvearrowleft \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{K}^3 \\ \curvearrowleft \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

À la suite de l'étude des morphismes entre les représentations indécomposables, nous trouvons six types de morphismes non-nuls distincts. Toutefois, deux d'entre eux ne sont pas irréductibles. Ils sont représentés ci-dessous.



Dans les deux cas, le morphisme rougeâtre correspond à la composition des deux morphismes en bleu si $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$. Avec cela nous concluons que le carquois d'Auslander–Reiten est le suivant.



À droite est la version dite « dépliée » du carquois d’Auslander–Reiten. Cette version peut s’obtenir en calculant les τ -orbites, et en les plaçant en ligne, quitte à ré-écrire à plusieurs reprises la même représentation. Cela donne une forme qui peut être plus pratique pour visualiser les extensions ou les morphismes non-nuls entre les représentations indécomposables en général. Cette forme montre de plus la réalisation (le fait de pouvoir le dessiner) de ce carquois d’Auslander–Reiten dans un cylindre. Ce phénomène est possible en particulier dans le cas d’étude des carquois à relations dites « cordes » donnant une algèbre de dimension finie. Nous allons rencontrer ces carquois à relations dans le Chapitre 3. ┘

CHAPITRE 2

LA RETROUVABILITÉ DE JORDAN

Dans ce chapitre, nous allons expliquer la notion centrale de cette thèse.

Pour résumer, l'idée est d'étudier le comportement « générique » des endomorphismes nilpotents des représentations d'un carquois à relations, en présentant les matrices (ou les endomorphismes) dans leur forme de Jordan, grâce à un choix adéquat de base. Ceci nous donne un invariant sur $\text{rep}(Q, R)$ que nous appellerons la donnée générique de Jordan. La question sera alors de savoir s'il est possible de retrouver la représentation à partir de cette donnée, en se restreignant à des sous-catégories de $\text{rep}(Q, R)$.

2.1 La donnée générique de Jordan

Soit (Q, R) un carquois à relations. Considérons $X \in \text{rep}(Q, R)$. Un endomorphisme $N = (N_q)_{q \in Q_0}$ de X est dit *nilpotent* si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. Cela revient à dire que pour tout $q \in Q_0$, N_q est une application linéaire nilpotente. Notons $\text{NEnd}(X)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de X .

Un *partage* λ est une suite finie décroissante d'entiers naturels non nuls. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, alors k est la *longueur de* λ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = |\lambda|$ est la *taille de* λ . Nous dirons que λ est un partage d'un entier $n \in \mathbb{N}$ si $|\lambda| = n$. Dans ce cas, nous écrivons $\lambda \vdash n$.

Pour tout $N = (N_q)_{q \in Q_0} \in \text{NEnd}(X)$, nous pouvons considérer $\text{JF}(N)$ la *donnée de Jordan de* N comme étant le $\#Q_0$ -uplet de partages d'entiers $\lambda = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ où λ^q enregistre la taille des blocs de Jordan dans la réduction de Jordan classique dans \mathbb{K} de N_q , pour tout $q \in Q_0$.

La question qui se pose est de savoir si, parmi les endomorphismes nilpotents d'une représentation $X \in \text{rep}(Q, R)$, il existe un ensemble ouvert dense (au sens de Zariski) tel que tous les endomorphismes nilpotents de X ont la même donnée de Jordan. Si tel est le cas, la donnée de Jordan générique sera définie comme étant la donnée de Jordan d'un endomorphisme nilpotent dans cet ensemble ouvert dense.

Voyons ce qu'il en est sur un exemple précis.

Exemple 2.1. Considérons le carquois suivant.

$$Q = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Soit $E \in \text{rep}(Q)$ la représentation suivante.

$$E = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}$$

Nous allons décrire $\text{NEnd}(E)$. Pour cela, nous avons besoin de la décomposition de E .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} \\ & & \oplus & & \\ E \cong 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Considérons des bases (x) , (y_1, y_2, y_3) et (z) de, respectivement, E_1 , E_2 et E_3 adaptées à cette décomposition; autrement dit $E_\alpha(x) = y_3$, $E_\beta(y_3) = E_\beta(y_2) = 0$ et $E_\beta(y_1) = z$. Soit $N \in \text{NEnd}(E)$. Alors, comme E_1 et E_3 sont unidimensionnelles, $N_1 = 0$ et $N_3 = 0$. Comme N doit respecter les relations de carrés commutatifs, et par nilpotence de N_2 , nous obtenons une description de N_2 sur la base (y_1, y_2, y_3) .

Tout d'abord, nous avons $N_2(y_3) = E_\alpha(N_1(x)) = 0$. Ensuite, nous savons que $E_\beta(N_2(y_2)) = N_3(E_\beta(y_2)) = 0$, donc $N_2(y_2) \in \text{Ker}(E_\beta) = \langle y_2, y_3 \rangle$; si nous écrivons que $N_2(y_2) = ay_3 + a'y_2$, nous aurions que $N_2^2(y_2) = a'N_2(y_2)$ et donc si $N_2(y_2) \neq 0$, alors a' serait une valeur propre de N_2 pour le vecteur propre $N_2(y_2)$; on conclut que $a' = 0$ et donc que $N_2(y_2) = ay_3$ avec $a \in \mathbb{K}$. Enfin, comme $N_2(y_1) \in \text{Ker}(E_\beta)$, nous avons que $N_2(y_1) = by_2 + cy_3$ avec $b, c \in \mathbb{K}$.

Nous concluons que les endomorphismes nilpotents de E sont, à un changement de base près, de la forme ci-dessous, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \\
& & \downarrow & & \\
\mathbb{K} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} \\
\downarrow 0 & & \downarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & a & 0 \end{bmatrix} & & \downarrow 0 \\
\mathbb{K} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} \\
& & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & &
\end{array}$$

Ainsi, dans $\text{NEnd}(E)$, il existe un ensemble ouvert dense Ω dans lequel tous les endomorphismes nilpotents ont la même forme de Jordan. En effet, dans notre cas précis, Ω peut être décrit par les endomorphismes nilpotents de forme ci-dessus avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

La donnée de Jordan générique de E est alors « l’empreinte » de la forme de Jordan des endomorphismes nilpotents dans Ω , c’est-à-dire, le 3-uplet de partages qui enregistre les tailles des blocs de Jordan de chaque N_q pour $q \in \{1, 2, 3\}$. Nous écrivons $\text{GenJF}(E) = ((1), (3), (1))$. ┘

Il se trouve que le calcul fait dans cet exemple se généralise.

Théorème 2.2 ((Garver *et al.*, 2023, Théorème 2.2)). *Soit (Q, R) un carquois à relations. Pour tout $E \in \text{rep}_{\mathbb{K}}(Q, R)$, $\text{NEnd}(E)$ est une variété algébrique irréductible. De plus, JF admet une valeur maximale (selon l’ordre de dominance étendu) dans $\text{NEnd}(E)$ et elle est atteinte dans un ensemble ouvert dense.*

Remarque 2.3.

- Le résultat ci-dessus est une reformulation de l’énoncé du résultat (Garver *et al.*, 2023, Théorème 2.2). L’énoncé original porte sur les ensembles d’endomorphismes nilpotents de A -modules de dimension finie (sur \mathbb{K}) pour une \mathbb{K} -algèbre A de dimension finie.
- Notons que certains carquois à relations (Q, R) donnent des algèbres quotients de dimension infinie. Une lecture attentive de la preuve de ce résultat dans l’article cité montre que l’hypothèse que la \mathbb{K} -algèbre A soit de dimension finie n’est pas nécessaire.

Définition 2.4. La *donnée générique de Jordan* de E est la valeur maximale de $\text{JF}(N)$ atteinte pour $N \in \text{NEnd}(E)$. Nous la noterons $\text{GenJF}(E)$.

Remarque 2.5. Si l'étude portait sur l'ensemble de tous les endomorphismes de E , alors il existerait encore un comportement générique, mais ce comportement ne permettrait pas d'extraire une information pertinente : en effet, il existerait un ensemble ouvert dense dans lequel tous les endomorphismes sont diagonalisables à valeurs propres distinctes.

En reconsidérant l'Exemple 2.1, nous avons l'impression que le calcul de cet invariant s'avère difficile. En fait, il existe une méthode combinatoire plus agréable, qui fonctionne dans certains cas, qui peut être implémentée à l'ordinateur, et qui rend le calcul plus efficace.

2.2 L'invariant de Greene–Kleitman

Dans cette section, nous allons introduire l'invariant de Greene–Kleitman dans le cadre restreint des carquois de type A .

Soit $n \geq 1$. Fixons Q un carquois de type A_n comme introduit en Définition 1.34. Rappelons que $\text{AR}(Q)$ désigne le carquois d'Auslander–Reiten de Q vu en Section 1.4.

Pour tout $q \in Q_0$, nous définissons $\mathcal{C}_{Q,q}$ la sous-catégorie de $\text{rep}(Q)$ additivement engendrée par les représentations indécomposables à support contenant q . Soit $E \in \text{rep}(Q)$. Nous décomposons E comme ci-dessous

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^r X(i)^{m(i)} \quad (*)$$

avec $X(1), \dots, X(r)$ désignant les facteurs indécomposables de E , et $m(1), \dots, m(r)$ désignant les multiplicités de ces facteurs indécomposables.

Considérons le sous-carquois plein de $\text{AR}(Q)$ dont les sommets sont les classes d'isomorphisme des représentations de Q dans $\mathcal{C}_{Q,q}$. Pour $\ell \geq 1$, notons Π_q^ℓ l'ensemble de tous les ℓ -uplets de chemins maximaux de ce sous-carquois. Remarquons que ces chemins débutent au sommet correspondant au projectif P_q et se terminent au sommet correspondant à l'injectif I_q . Pour tout ℓ -uplet de chemins $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell)$ dans $\text{AR}(Q)$, nous noterons $\text{Supp}(\gamma)$ l'ensemble des sommets qui sont traversés par au moins un des γ_i . Pour tout $\gamma \in \Pi_q^\ell$,

nous considérons un *poids*, dépendant de la décomposition $(*)$ de E , défini comme suit :

$$\text{wt}_E(\gamma) = \sum_{X(i) \in \text{Supp}(\gamma)} m(i).$$

Définition 2.6. L'*invariant de Greene–Kleitman* de E , noté $\text{GK}(E)$, est le n -uplet de partages $\lambda = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$

avec, pour tout $q \in Q_0$, λ^q défini par :

- $\lambda_1^q = \max_{\gamma \in \Pi_q^1} \text{wt}_E(\gamma)$;
- $\forall i \geq 2, \lambda_i^q = \max_{\gamma \in \Pi_q^i} \text{wt}_E(\gamma) - \max_{\gamma \in \Pi_q^{i-1}} \text{wt}_E(\gamma)$.

Remarque 2.7. Cette définition est une réécriture, déjà présente dans (Garver *et al.*, 2023), de (Greene et Kleitman, 1976).

Pour un exemple explicite de calcul, nous invitons le lecteur à consulter l'Exemple 4.19.

Remarque 2.8.

- Nous pouvons remarquer déjà que si $E \cong F$ alors $\text{GK}(E) = \text{GK}(F)$ par définition : le remplissage de $\text{AR}(Q)$ pour E et celui pour F sont les mêmes. Cela explique en quoi GK est bien un *invariant de rep*(Q).
- Toutefois, pour $n \geq 2$, il est facile de montrer que GK n'est pas *complet*. En effet, il existe $E, F \in \text{rep}(Q)$ tels que $E \not\cong F$ mais $\text{GK}(E) = \text{GK}(F)$. En notant $X_{[[1,2]]}$ l'unique représentation indécomposable dont le support est exactement $\{1, 2\}$, nous pouvons vérifier facilement que $\text{GK}(S_1 \oplus S_2) = \text{GK}(X_{[[1,2]])} = \lambda$, avec $\lambda^1 = \lambda^2 = (1)$ et $\lambda^q = (0)$ pour $q \geq 3$.

Le Théorème 4.22 met en avant que le calcul de cet invariant correspond exactement au calcul de la donnée générique de Jordan, pour toute représentation de n'importe quel carquois de type A .

2.3 Lien avec la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth

Il est remarquable qu'il y ait un lien entre l'invariant de Greene–Kleitman et la *correspondance de Robinson–Schensted–Knuth*. Rappelons d'abord la construction usuelle de cette correspondance, que nous pouvons retrouver dans (Stanley, 1999), ou dans (Fulton, 1996), avant de donner une autre réalisation de celle-ci via des calculs similaires à l'invariant de Greene–Kleitman donnée par (Gansner, 1981a).

Notons qu'il existe également un lien entre l'invariant de Greene–Kleitman et la correspondance de Hillman–Grassl. Nous n'allons pas développer ce lien dans cette thèse, mais si le lecteur est intéressé, nous l'invitons

à se reporter aux articles suivants : (Gansner, 1981b), (Garver *et al.*, 2023, Section 6).

2.3.1 Définition classique

Définition 2.9. Soit λ un partage d'entier. Le *diagramme de Ferrers* de λ est l'ensemble de points dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini par

$$\text{Fer}(\lambda) = \{(i, j) \mid \lambda_j \geq i\}.$$

Un *remplissage de* λ est une fonction $f : \text{Fer}(\lambda) \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Un *tableau de Young semi-standard, de forme* λ , est un remplissage f de λ tel que, pour tout $(i, j) \in \text{Fer}(\lambda)$:

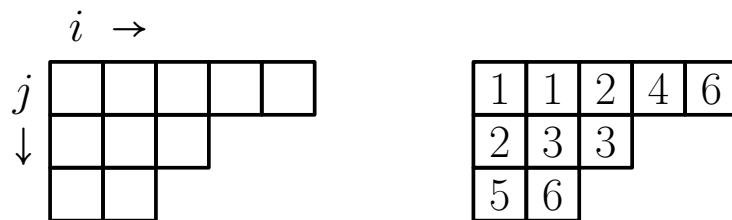
(SSYT1) Si $(i + 1, j) \in \text{Fer}(\lambda)$, alors $f(i + 1, j) \geq f(i, j)$,

(SSYT2) Si $(i, j + 1) \in \text{Fer}(\lambda)$, alors $f(i, j + 1) > f(i, j)$.

Si nous demandons une inégalité large en condition (SSYT2), nous disons que f est une *partition plane renversée de* λ .

Remarque 2.10. À chaque fois que nous parlerons de tableau de Young semi-standard, nous sous-entendrons qu'il s'agit bien d'un remplissage d'un certain partage λ qu'il n'est pas nécessaire de préciser. La *forme* d'un tableau de Young semi-standard est alors le partage λ en question.

Exemple 2.11. Ci-dessous sont représentés le diagramme de Ferrers (notation anglaise) du partage $\lambda = (5, 3, 2)$, à gauche, et un tableau de Young semi-standard de forme λ , à droite. ┘



Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'*insertion (par ligne) de Schensted de* k , notée $k \rightarrow -$ est une application sur les tableaux de Young semi-standard définie de la manière suivante. Soit f un tableau de Young semi-standard de forme λ . Alors le remplissage $k \rightarrow f = g$ s'obtient en suivant l'algorithme suivant :

- 1) posons $i' = 1$ et $x = k$;
- 2) s'il existe, soit j' le plus petit indice tel que $x < f(i', j')$, sinon nous posons $j' = \lambda_{i'} + 1$;

- 3) si $(i', j') \notin \text{Fer}(\lambda)$, alors nous posons $g(i', j') = x$ et pour $(i, j) \in \text{Fer}(\lambda)$ tel que $i \geq i'$, $g(i, j) = f(i, j)$, et nous avons terminé;
- 4) sinon, nous posons $g(i', j') = x$ et pour tout $j \neq j'$ tels que $(i', j) \in \text{Fer}(\lambda)$, nous posons $g(i', j) = f(i', j)$; nous posons $x = f(i', j')$, nous augmentons i' de 1, et nous revenons à l'étape 2.

Illustrons cette insertion via un exemple.

Exemple 2.12. Considérons le tableau de Young semi-standard f suivant.

1	2	2	3	3
3	3			

Alors nous obtenons $1 \rightarrow f$ en remplaçant la valeur dans la case $(1, 2)$ par 1, la valeur dans la case $(2, 1)$ par 2, et en ajoutant la case $(3, 1)$ tout en lui attribuant la valeur 3. Ci-dessous est représenté le remplissage obtenu suite à l'insertion de Schensted proposée. Nous avons grisé les cases modifiées, et encadré la case ajoutée.

1	1	2	3	3
2	3			
3				

Notons que ce nouveau remplissage est un tableau de Young semi-standard. ┘

Proposition 2.13. Soit f un tableau de Young semi-standard et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $k \rightarrow f$ est également un tableau de Young semi-standard.

La correspondance de Robinson–Schensted–Knuth est une bijection partant des matrices à coefficients entiers naturels vers les paires de tableaux semi-standard de Young de même forme. Cette correspondance s'effectue en plusieurs étapes :

- 1) à partir d'une matrice $A = (a_{i,j})$ d'entiers naturels de taille $n \times n$, nous lui associons une matrice à deux lignes

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s \\ j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

appelée aussi *bi-mot*, telle que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, il y a $a_{i,j}$ colonnes $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$, et toutes les colonnes sont rangées dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire :

- $i_1 \leq \dots \leq i_s$, et;
- si $i_p = i_{p+1}$, alors $j_p \leq j_{p+1}$.

2) Nous construisons deux suites de tableaux de Young semi-standard $(P(k))_{0 \leq k \leq s}$ et $(Q(k))_{0 \leq k \leq s}$ comme suit :

- Nous commençons avec $P(0) = Q(0) = \emptyset$;
- Pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$, nous obtenons $P(k)$ à partir de $P(k-1)$ par une insertion de Schensted de $j_k \rightarrow P(k-1)$
- pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$, nous obtenons $Q(k)$ à partir de $Q(k-1)$ en étiquetant i_k la case créée pour aller de $P(k-1)$ vers $P(k)$.

3) Nous définissons alors $\text{RSK}(A) = (P(s), Q(s))$.

Remarque 2.14. Généralement, la correspondance RSK est décrite comme une application partant des bi-mots vers les paires de tableau de Young semi-standards de même forme. Ici, nous avons décidé de l'introduire en partant de matrices à coefficients dans \mathbb{N} afin d'exhiber plus facilement le lien entre cette correspondance et le calcul des invariants de Greene–Kleitman (Section 2.3.2).

Exemple 2.15. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors nous obtenons le bi-mot

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En Figure 2.1, nous explicitons les calculs étape par étape de la suite de tableaux de Young semi-standard $(P(k), Q(k))_{1 \leq k \leq 9}$. Ici $\text{RSK}(A) = (P(9), Q(9))$. ┘

Théorème 2.16. *La correspondance de Robinson–Schensted–Knuth est une bijection entre les matrices $n \times n$ à coefficients entiers naturels et les paires de tableaux de Young semi-standards (P, Q) à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ de même forme λ , avec λ admettant au plus n lignes.*

k	(i_k, j_k)	$P(k)$	$Q(k)$																														
1	(1, 1)	1	1																														
2	(1, 3)	1 3	1 1																														
3	(1, 3)	1 3 3	1 1 1																														
4	(1, 3)	1 3 3 3	1 1 1 1																														
5	(2, 2)	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="3"></td></tr></table>	1	2	3	3	3				<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td colspan="3"></td></tr></table>	1	1	1	1	2																	
1	2	3	3																														
3																																	
1	1	1	1																														
2																																	
6	(2, 2)	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="2"></td></tr></table>	1	2	2	3	3	3			<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td colspan="2"></td></tr></table>	1	1	1	1	2	2																
1	2	2	3																														
3	3																																
1	1	1	1																														
2	2																																
7	(2, 3)	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td colspan="3"></td></tr></table>	1	2	2	3	3	3	3				<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td colspan="3"></td></tr></table>	1	1	1	1	2	2	2													
1	2	2	3	3																													
3	3																																
1	1	1	1	2																													
2	2																																
8	(3, 1)	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td colspan="3"></td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="4"></td></tr></table>	1	1	2	3	3	2	3				3					<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td colspan="3"></td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="4"></td></tr></table>	1	1	1	1	2	2	2				3				
1	1	2	3	3																													
2	3																																
3																																	
1	1	1	1	2																													
2	2																																
3																																	
9	(3, 2)	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="2"></td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td colspan="4"></td></tr></table>	1	1	2	2	3	2	3	3			3					<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px; background-color: #cccccc;">3</td><td colspan="2"></td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td colspan="4"></td></tr></table>	1	1	1	1	2	2	2	3			3				
1	1	2	2	3																													
2	3	3																															
3																																	
1	1	1	1	2																													
2	2	3																															
3																																	

FIGURE 2.1 Illustration des calculs de RSK(A). La case encadrée à la ligne k est celle ajoutée via l'insertion (par ligne) de Schensted appliquée pour aller de $P(k-1)$ à $P(k)$. Les cases en gris sont les cases modifiées en allant de $P(k-1)$ à $P(k)$ en suivant le processus d'insertion.

2.3.2 Définition « à la Greene–Kleitman »

Via les travaux de Gansner, nous pouvons également présenter la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth à la façon Greene–Kleitman.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients entiers naturels. Construisons le carquois Q_A où les sommets sont étiquetés (i, j) pour $1 \leq i, j \leq n$, et les flèches sont données par $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$ et $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$.

Nous suivons un algorithme similaire à celui donné en Section 2.2. Nous allons alors utiliser les mêmes

notations pour en faciliter l'analogie.

Pour $1 \leq i \leq n$, nous considérons le sous-carquois plein de Q_A dont les sommets sont les (k, j) pour $1 \leq k \leq i$ et $1 \leq j \leq n$. Notons Π_i^ℓ l'ensemble formé des ℓ -uplets de chemins maximaux dans ce sous-carquois. Nous définissons le *poids* de tout ℓ -uplet de chemins γ comme ci-dessous :

$$\text{wt}_A(\gamma) = \sum_{(k,j) \in \text{Supp}(\gamma)} a_{k,j}.$$

Nous pouvons alors définir une suite de partages $(\mu^i)_{1 \leq i \leq n}$ par :

- $\mu_1^i = \max_{\gamma \in \Pi_i^1} \text{wt}_A(\gamma)$;
- $\forall p \geq 2, \mu_p^i = \max_{\gamma \in \Pi_i^p} \text{wt}_A(\gamma) - \max_{\gamma \in \Pi_i^{p-1}} \text{wt}_A(\gamma)$.

Similairement, nous pouvons définir une deuxième suite de partages $(\nu^j)_{1 \leq j \leq n}$ en effectuant des calculs identiques, mais en travaillant avec les sous-carquois pleins de Q_A dont les sommets sont les (i, k) pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq j$.

Remarquons que $\mu^i \subseteq \mu^{i+1}$ pour tout $1 \leq i < n$, $\nu^j \subseteq \nu^{j+1}$ pour tout $1 \leq j < n$, et $\nu^n = \mu^n$.

Ces deux suites (ν^j) et (μ^i) nous permettent de retrouver $\text{RSK}(A)$. Le tableau de Young semi-standard $P(s)$ est le remplissage f de ν^n définie par $f(c) = j$ si $c \in \text{Fer}(\nu^j) \setminus \text{Fer}(\nu^{j-1})$. Le second tableau de Young semi-standard, $Q(s)$, s'obtient de la même manière mais avec la suite de partages (μ^i) .

Exemple 2.17. En Figure 2.2, Nous donnons le calcul explicite des suites (ν^j) et (μ^i) pour la matrice A de l'Exemple 2.15. ┘

Théorème 2.18. *Les deux méthodes de calcul de RSK présentées donnent le même résultat final.*

Nous pouvons afficher le résultat des suites (ν^j) et (μ^i) en une *partition plane renversée du partage* $\lambda = \underbrace{(n, \dots, n)}_{n \text{ fois}}$ Pour cela, nous devons d'abord déterminer le puits du sous-carquois considéré pour calculer ν^j ou μ^i . Ce puits correspond à la case du diagramme de Ferrers de λ que nous voulons. Nous remplissons les cases qui se trouvent dans la même diagonale avec les parts de ν^j ou de μ^i en partant d'en bas à droite pour aller en haut à gauche. Nous pouvons jeter un oeil à la Figure 2.3 pour voir comment cela s'effectue avec les résultats obtenus dans l'Exemple 2.17.

	(2)	
	(4, 1)	
	(5, 3, 1)	
	(4)	
	(5, 2)	
	(5, 3, 1)	

FIGURE 2.2 Illustration des calculs de RSK(A) à la “Greene–Kleitman”.

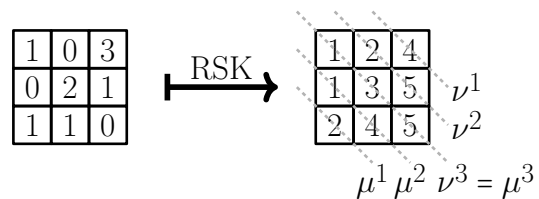


FIGURE 2.3 Affichage des suites de partages obtenues dans le calcul de RSK à la “Greene–Kleitman”

Une généralisation non-triviale, utilisant les mêmes méthodes de calculs, peut être définie afin de donner une bijection entre les remplissages d'un partage quelconque et les partitions planes renversées de ce même partage.

2.3.3 Quand RSK et GK coïncident

Soit un carquois Q de type Dynkin A_n , dont les sommets sont étiquetés comme en Définition 1.34. Considérons, pour tout $m \in Q_0$, la catégorie $\mathcal{C}_{Q,m}$ additivement engendrée par les représentations indécomposables à support sur m .

Dans le carquois d'Auslander–Reiten de Q , les classes d'isomorphisme des indécomposables de $\mathcal{C}_{Q,m}$ forment un rectangle de taille $m \times (n - m + 1)$. Le choix d'une représentation $E \in \mathcal{C}_{Q,m}$, se voyant comme remplissage du carquois d'Auslander–Reiten de Q par des entiers naturels, peut maintenant se voir comme un matrice M de taille $m \times (n - m + 1)$ d'entiers naturels. Les entrées de cette matrice sont placées de telle sorte que l'orientation du carquois d'Auslander–Reiten corresponde à l'orientation que nous donnions aux matrices de taille $n \times n$ rencontrées dans la section précédente (de gauche à droite, et de haut en bas) et que la première colonne soit formée des multiplicités des représentations indécomposables à support contenant 1.

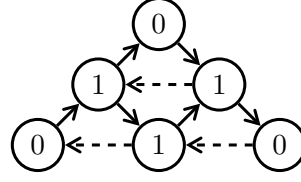
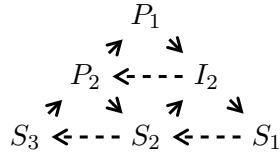
Nous pouvons alors définir $\text{RSK}(E)$ comme étant l'application de la correspondance RSK à la « Greene–Kleitman » : plus précisément, si $(\nu^j)_{1 \leq j \leq m}$ et $(\mu^i)_{1 \leq i \leq n-m+1}$ sont les suites de partages obtenues via le calcul du RSK à la « Greene–Kleitman », nous posons

$$\text{RSK}(E) = (\nu^1, \dots, \nu^m = \mu^{n-m+1}, \dots, \mu^1).$$

Exemple 2.19. Reprenons le carquois Q considéré en Exemple 2.1.

$$Q = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Donnons le carquois d'Auslander–Reiten de Q , et donnons le remplissage correspondant à la représentation E choisie en Exemple 2.1.



La représentation E appartient à la catégorie $\mathcal{C}_{Q,2}$. La matrice qu'il nous faut prendre pour appliquer $\text{RSK}(E)$ est alors la suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\text{RSK}(E) = ((1), (3), (2))$. En rappelant que $\text{GK}(E) = ((1), (3), (1))$, nous remarquerons que $\text{RSK}(E) \neq \text{GK}(E)$. ┘

Il existe une orientation particulière, adaptée au choix du sommet m dans Q , qui fait que GK et RSK donnent le même résultat sur les représentations d'une catégorie $\mathcal{C}_{Q,m}$.

Théorème 2.20 ((Garver *et al.*, 2023, Théorème 6.5)). *Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Soit Q le carquois de type A_n tel que son seul puits est le sommet m . Alors, pour tout $E \in \mathcal{C}_{Q,m}$, nous avons $\text{GK}(E) = \text{RSK}(E)$.*

2.4 La retrouvabilité de Jordan

Comme GenJF et la version généralisée de la correspondance RSK admettent des similarités dans leur méthode de calcul, nous pourrions nous demander si, comme pour la correspondance RSK , il est possible de retrouver une représentation de (Q, R) étant donnée sa donnée générique de Jordan. En Remarque 2.8, nous avons déjà pu noter que cet invariant n'est pas complet sur tout $\text{rep}(Q, R)$ pour (Q, R) un carquois à relations. La proposition suivante concrétise ce phénomène.

Proposition 2.21. *Soit (Q, R) un carquois à relations avec Q connexe. La donnée générique de Jordan est un invariant complet sur $\text{rep}(Q, R)$ si, et seulement si, Q est réduit à un sommet.*

Nous vient alors une question plus pertinente et intéressante : « Quelles sont les sous-catégories \mathcal{C} de $\text{rep}(Q, R)$ telles que GenJF est complet sur \mathcal{C} ? » Autrement dit, nous cherchons les sous-catégories dans lesquelles les représentations sont caractérisées par leur donnée générique de Jordan.

Définition 2.22. Une catégorie \mathcal{C} de $\text{rep}(Q, R)$ est dite **retrouvable de Jordan** si pour tout $\#Q_0$ -uplet de partages λ , il existe au plus une représentation $X \in \mathcal{C}$, à isomorphisme près, telle que $\text{GenJF}(X) = \lambda$.

La proposition suivante, bien qu'évidente, donne un critère simple permettant de savoir si une catégorie est retrouvable de Jordan. Attention au fait que ce critère est suffisant mais pas nécessaire.

Proposition 2.23. *Soit (Q, R) un carquois fini à relations. Considérons \mathcal{C} une sous-catégorie de $\text{rep}(Q, R)$ additivement engendrée par un ensemble \mathcal{X} de représentations indécomposables. Si $(\dim(E))_{E \in \mathcal{X}}$ forme une famille \mathbb{Z} -libre de vecteurs de $\mathbb{Z}^{\#Q_0}$, alors \mathcal{C} est retrouvable de Jordan.*

En toute généralité, décider si une catégorie donnée est retrouvable de Jordan est difficile.

Exemple 2.24. Considérons le carquois de type A_3 type donné en Figure 2.4.

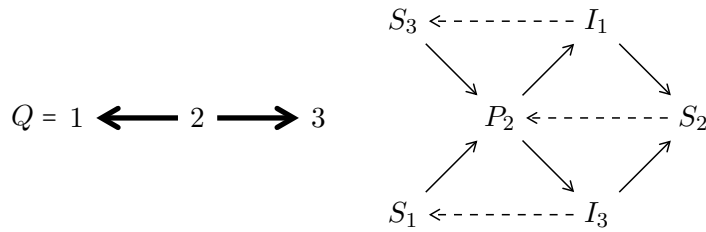


FIGURE 2.4 Le carquois Q de type A_3 considéré (à gauche) et son carquois d'Auslander–Reiten (à droite).

La sous-catégorie $\mathcal{C}_{Q,2} = \text{add}(P_2, I_1, I_3, S_2)$ est retrouvable de Jordan. Pour $X \in \mathcal{C}_{Q,2}$, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que $X \cong P_2^a \oplus I_1^b \oplus I_3^c \oplus S_2^d$. En suivant la méthode de calcul à la Greene–Kleitman (voir Figure 2.5), nous obtenons que $\text{GenJF}(X) = ((a + b), (a + d + \max(b, c)), \min(b, c), (a + c))$. Nous pouvons retrouver $X \in \mathcal{C}$ à partir de cette donnée. ┘

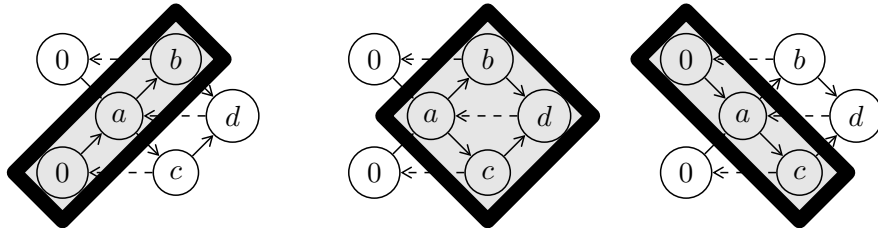


FIGURE 2.5 Calculs pour obtenir $\text{GenJF}(X)$ pour $X \in \mathcal{C}_{Q,2}$ dans l'Exemple 2.24.

2.5 Un raffinement : la retrouvabilité de Jordan canonique

La retrouvabilité de Jordan est une notion demandant s'il est possible de retrouver une représentation connaissant sa donnée générique de Jordan et sachant dans quelle catégorie elle se trouve. Naïvement, pour vérifier

qu'une catégorie est retrouvable de Jordan, nous pouvons procéder au calcul de la donnée générique de Jordan de toute représentation de la catégorie et vérifier une certaine injectivité. Avec un peu de recul, nous pouvons nous demander s'il existe une méthode générale, ne dépendant pas nécessairement de la catégorie dans laquelle nous travaillons, permettant de retrouver une représentation connaissant sa donnée générique de Jordan.

Exemple 2.25.

- Reprenons le carquois

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 ,$$

et la représentation

$$E = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{[1 \ 0 \ 0]} \mathbb{K} ,$$

comme dans l'Exemple 2.1. Considérons $Y \in \text{rep}((Q, R), \text{GenJF}(E))$ en rappelant que $\text{GenJF}(E) = ((1), (3), (1))$. Il existe alors $N = (N_1, N_2, N_3)$ un endomorphisme nilpotent de Y tel que $\text{JF}(N) = \text{GenJF}(E)$. Tout d'abord, via les tailles des partages en jeu, nous savons alors que Y est de la forme :

$$\mathbb{K} \xrightarrow{Y_\alpha} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{Y_\beta} \mathbb{K}$$

Il nous reste à décrire les morphismes Soit (x) , (y_1, y_2, y_3) et (z) des bases respectives de Y_1, Y_2 et Y_3 adaptée à chaque N_q , c'est-à-dire telles que, notamment $N_2(y_1) = y_2, N_2(y_2) = y_3$ et $N_2(y_3) = 0$. Remarquons, tout de suite, que $N_1 = 0 = N_3$.

Par les relations de carrés commutatifs ($Y_\alpha N_1 = N_2 Y_\alpha$ et $Y_\beta N_2 = N_3 Y_\beta$), nous avons :

- $Y_\alpha(x) = ay_3$ pour un $a \in \mathbb{K}$;
- $Y_\beta(y_2) = Y_\beta(y_3) = 0$ et $Y_\beta(y_1) = bz$ pour un $b \in \mathbb{K}$.

Ainsi parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y_α et de Y_β (et donc de Y), il existe un ensemble ouvert dense $\Omega \subset \text{rep}((Q, R), \text{GenJF}(E))$ dans lequel toutes les représentations Y sont isomorphes à E . Les éléments de Ω peuvent être décrits comme les représentations Y telles que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Nous avons bien retrouvé E à partir de $\text{GenJF}(E)$.

- Conservons le même carquois à relations (Q, R) , mais considérons la représentation suivante.

$$Z = \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{K}$$

Après quelques calculs, nous pouvons assurer que $\text{GenJF}(Z) = ((1), (3), (1)) = \text{GenJF}(E)$. Si nous utilisons le même procédé que pour le point précédent, qui ne dépend que du 3-uplet de partages avec lequel nous démarrons, nous obtenons la représentation $E \not\cong Z$.

Remarquons que $\mathcal{C} = \text{add}(S_1, S_2, S_3)$ est retrouvable de Jordan via notamment la Proposition 2.23. Or, à partir de ce $Z \in \mathcal{C}$, nous n'avons pas retrouvé Z à partir de $\text{GenJF}(Z)$ par le procédé utilisé au point précédent. Cela met en avant que nous avons besoin d'un raffinement à la notion de retrouvabilité de Jordan. ┘

Soit (Q, R) un carquois à relations et λ un $\#Q_0$ -uplet de partages. Notons $\text{rep}((Q, R), \lambda)$ l'ensemble des représentations E de $\text{rep}(Q, R)$ qui admettent un endomorphisme nilpotent N tel que $\text{JF}(N) = \lambda$.

Définition 2.26. Une catégorie \mathcal{C} de $\text{rep}(Q, R)$ est dite *canoniquement retrouvable de Jordan* si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble ouvert dense Ω dans $\text{rep}((Q, R), \text{GenJF}(X))$ tel que pour tout $Y \in \Omega$, $Y \cong X$.

Si, étant donné un carquois à relations (Q, R) et un $\#Q_0$ -uplet de partages λ , il existe un ensemble ouvert dense Ω dans $\text{rep}((Q, R), \lambda)$ tel que pour tout $Y, Z \in \Omega$, $Y \cong Z$, nous définissons $\text{GenRep}(\lambda)$ la *représentation générique compatible avec un endomorphisme nilpotent de forme λ* comme la classe d'isomorphisme des représentations dans Ω .

Exemple 2.27. Montrons que la catégorie $\mathcal{C}_{Q,2}$ vue en Exemple 2.24 est canoniquement retrouvable de Jordan. Soit $\lambda = ((a+b), (a+d+\max(b, c), \min(b, c)), (a+c))$ pour un quadruplet fixé $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$. Sans perte de généralité, supposons que $b \leq c$. Considérons $Y \in \text{rep}(Q, \lambda)$ et $N = (N_1, N_2, N_3) \in \text{NEnd}(Y)$ tel que $\text{JF}(N) = \lambda$. Nous pouvons choisir des bases (t_1, \dots, t_{a+b}) , $(u_1, \dots, u_{a+c+d}, v_1, \dots, v_b)$ et (w_1, \dots, w_{a+c}) de respectivement Y_1, Y_2 et Y_3 adaptées à N (voir Figure 2.6). Il nous reste à décrire les morphismes Y_α et Y_β . Grâce aux bases bien choisies, et aux relations de carrés commutatifs que respecte N , nous n'avons qu'à décrire l'image de u_1 et l'image de v_1 par Y_α pour décrire Y_α entièrement. Il en va de même pour décrire Y_β . Nous pouvons écrire :

$$\text{(exp1)} \quad Y_\alpha(u_1) = k_1 t_1 + \dots + k_{a+b} t_{a+b} \text{ pour un certain uplet } (k_1, \dots, k_{a+b}) \in \mathbb{K}^{a+b};$$

$$\text{(exp2)} \quad Y_\alpha(v_1) = h_1 t_1 + \dots + h_{a+b} t_{a+b} \text{ pour un certain uplet } (h_1, \dots, h_{a+b});$$

$$\text{(exp3)} \quad Y_\beta(u_1) = r_1 w_1 + \dots + r_{a+c} w_{a+c} \text{ pour un certain uplet } (r_1, \dots, r_{a+c}) \in \mathbb{K}^{a+c};$$

$$\text{(exp4)} \quad Y_\beta(v_1) = s_1 w_1 + \dots + s_{a+c} w_{a+c} \text{ pour un certain uplet } (s_1, \dots, s_{a+c}) \in \mathbb{K}^{a+c}.$$

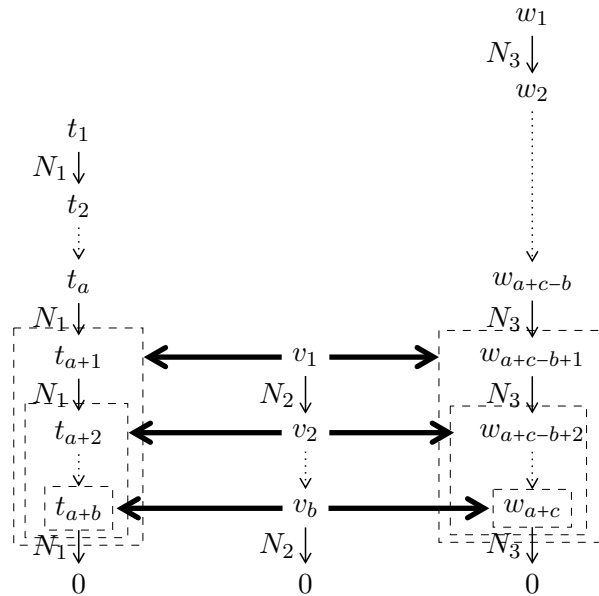
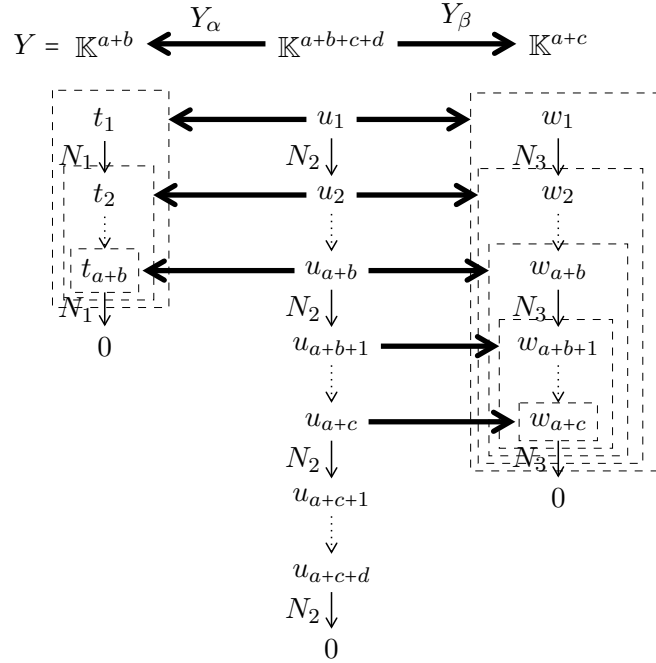


FIGURE 2.6 Illustration de la configuration décrite pour étudier la retrouvabilité de Jordan canonique de $\mathcal{C}_{Q,2}$ de l'Exemple 2.27. Notons que $Y_\alpha(u_i) = 0$ pour $i > a + b$, et $Y_\beta(u_i) = 0$ pour $i > a + c$, via les relations de carrés commutatifs.

Notons que pour (exp1) et (exp3), il n'y a pas de restrictions sur les coefficients qui apparaissent dans ces combinaisons linéaires. Mais nous devons avoir $h_1 = \dots = h_a = 0$ dans (exp2) et $s_1 = \dots = s_{a+c-b} = 0$ dans (exp4) par les carrés commutatifs et le fait que $N_2^{b+1}(v_1) = 0$.

Parmi tous les choix que nous pouvons faire de Y :

- il existe un ensemble ouvert dense $\Omega_1 \subset \text{rep}(Q, \lambda)$ tel que, pour tout $Y \in \Omega_1$, nous avons $Y_\alpha(u_1) \notin \text{Im}(N_1)$ (cet ensemble ouvert dense peut être décrit par la contrainte $k_1 \neq 0$ dans (exp1))
- il existe un ensemble ouvert dense Ω_2 tel que, pour tout $Y \in \Omega_2$, nous avons $Y_\alpha(v_1) \notin \text{Im}(N_1^{a+1})$ (cet ensemble ouvert dense peut être décrit par la condition $h_{a+1} \neq 0$ dans (exp2));
- il existe un ensemble ouvert dense Ω_3 tel que, pour tout $Y \in \Omega_3$, nous avons $Y_\beta(u_1) \notin \text{Im}(N_3) \subset \text{rep}(Q, \lambda)$ (cet ensemble ouvert dense peut être décrit par la condition $r_1 \neq 0$ dans (exp3));
- il existe un ensemble ouvert dense Ω_4 tel que, pour tout $Y \in \Omega_4$, nous avons $Y_\beta(v_1) \notin \text{Im}(N_3^{a+c-b+1})$ (cet ensemble ouvert dense peut être décrit par la condition $s_{a+b-c+1} \neq 0$ dans (exp4)).

Alors $\Omega = \bigcap_{i=1}^4 \Omega_i$ est un ensemble ouvert dense de $\text{rep}(Q, \lambda)$ tel que tout $Y \in \Omega$ vérifie les quatre conditions ci-dessus.

Considérons $Y \in \Omega$. Comme il existe $u \in \langle u_{a+c-b+1}, \dots, u_{a+c} \rangle$ tel que $Y_\beta(v_1) = Y_\beta(u)$, nous posons $v'_1 = v_1 - u$ et $v'_i = N_2^{i-1}(v'_1)$. Cela nous permet d'effectuer un changement de base de $(u_1, \dots, u_{a+c+d}, v_1, \dots, v_b)$ vers $(u_1, \dots, u_{a+c+d}, v'_1, \dots, v'_b)$ tel que $Y_\beta(v'_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, b\}$.

De plus, comme $Y_\alpha(v'_1) \in \langle t_{a+1}, \dots, t_{a+b} \rangle$, il existe $y \in \langle u_{a+1}, \dots, u_{a+b} \rangle$ tel que $Y_\alpha(v'_1) = Y_\alpha(y)$. Par conséquent, il existe $u'_1 \in \langle u_1, \dots, u_b \rangle$ tel que $Y_\alpha(v'_1) = Y_\alpha(N_2^a(u'_1))$. Nous définissons $u'_i = N_2^{i-1}(u'_1)$. Cela nous permet d'effectuer un deuxième changement de bases de $(u_1, \dots, u_{a+c+d}, v'_1, \dots, v'_b)$ vers $(u'_1, \dots, u'_{a+c+d}, v'_1, \dots, v'_b)$ tel que $Y_\beta(v'_i) = 0$, et $Y_\alpha(v'_i) = Y_\alpha(u'_{a+i})$ pour $i \in \{1, \dots, b\}$.

Après ces changements de bases, nous avons que $(Y_\alpha(u_1), \dots, Y_\alpha(u'_a), Y_\alpha(v'_1), \dots, Y_\alpha(v'_b))$ est une base de Y_1 et $(Y_\beta(u'_1), \dots, Y_\beta(u'_{a+c}))$ est une base de Y_3 .

En posant $u''_{a+i} = u'_{a+i} - v'_i$ pour $i \in \{1, \dots, b\}$, nous obtenons que $Y_\alpha(u''_{a+i}) = 0$ et $Y_\beta(u''_{a+i}) = Y_\beta(u'_{a+i})$. Ainsi, effectuons le changement de base passant de la base $(u'_1, \dots, u'_{a+c+d}, v'_1, \dots, v'_b)$ à la base $(u'_1, \dots, u'_a, u''_{a+1}, \dots, u''_{a+b}, u'_{a+b+1}, \dots, u'_{a+c+d}, v'_1, \dots, v'_b)$. Nous pouvons nous reporter à la Figure 2.7 qui récapitule les résultats de ces changements de base.

Ce dernier changement de base n'ayant aucune influence sur les bases posées pour Y_1 et Y_3 , nous pouvons conclure que $Y \cong P_2^a \oplus I_1^b \oplus I_3^c \oplus S_2^d$. Ce qui prouve que $\mathcal{C}_{Q,2}$ est canoniquement retrouvable de Jordan. \square

$$\begin{array}{ccccc}
Y = \mathbb{K}^{a+b} & \xleftarrow{Y_\alpha} & \mathbb{K}^{a+b+c+d} & \xrightarrow{Y_\beta} & \mathbb{K}^{a+c} \\
\\
Y_\alpha(u'_1) & \xleftarrow{\quad} & u'_1 & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_1) \\
N_1 \downarrow & & \downarrow N_2 & & N_3 \downarrow \\
Y_\alpha(u'_2) & \xleftarrow{\quad} & u'_2 & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_2) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
Y_\alpha(u'_a) & \xleftarrow{\quad} & u'_a & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_a) \\
N_1 \downarrow & & \downarrow N_2 & & N_3 \downarrow \\
Y_\alpha(v'_1) & \xleftarrow{\quad} & v'_1 & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_{a+1}) \\
N_1 \downarrow & & N_2 \downarrow & & N_3 \downarrow \\
Y_\alpha(v'_2) & \xleftarrow{\quad} & v'_2 & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_{a+2}) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
Y_\alpha(v'_b) & \xleftarrow{\quad} & v'_b & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_{a+b}) \\
N_1 \downarrow & & N_2 \downarrow & & N_3 \downarrow \\
0 & & 0 & & 0 \\
\\
& & u'_{a+b+1} & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_{a+b+1}) \\
& & \vdots & & \vdots \\
& & u'_{a+c} & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta(u'_{a+c}) \\
& & \downarrow N_2 & & N_3 \downarrow \\
& & u'_{a+c+1} & & 0 \\
& & \vdots & & \\
& & u'_{a+c+d} & & \\
& & \downarrow N_2 & & \\
& & 0 & &
\end{array}$$

FIGURE 2.7 Illustration de la configuration obtenue pour tout $Y \in \Omega$, une fois les changements de bases effectués dans l'Exemple 2.27

Le corollaire suivant découle directement de la définition.

Corollaire 2.28. *Soit (Q, R) un carquois à relations. Si une catégorie \mathcal{C} de $\text{rep}(Q, R)$ est canoniquement retrouvable de Jordan, alors elle est retrouvable de Jordan.*

Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué, une catégorie retrouvable de Jordan peut ne pas être canoniquement retrouvable de Jordan.

Un autre problème qui peut se poser est la question de l'existence d'une représentation générique de forme λ donnée, dépendant du carquois à relations (Q, R) et de λ . Pour des exemples illustrant ces difficultés, se reporter à l'Exemple 3.58.

Il y a tout de même des cas de figure précis où il est toujours possible de définir une représentation générique d'une forme λ donnée.

Proposition 2.29 ((Garver *et al.*, 2023, Corollaire 2.5)). *Soit Q un carquois de type Dynkin ADE. Pour tout $\#Q_0$ -uplet de partages λ , il existe une représentation générique compatible avec un endomorphisme nilpotent de forme λ .*

Remarque 2.30. Remarquons que pour Q un carquois de type Dynkin ADE, et pour λ un $\#Q_0$ -uplet de partages, $\text{GenJF}(\text{GenRep}(\lambda))$ n'est pas forcément égale à λ . Par exemple, si nous considérons $\lambda = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ tel que $\lambda^1 = (1, 1)$ et $\lambda^q = (0)$ pour $q \neq 1$, alors par des calculs simples, nous obtenons que $\text{GenRep}(\lambda) \cong S_1^2$ et que $\text{GenJF}(S_1^2) = \mu = (\mu^q)_{q \in Q_0}$ avec $\mu^1 = (2)$ et $\mu^q = (0)$ pour $q \neq 1$.

2.6 Lien avec la décomposition de Kac

Pour (Q, R) un carquois à relations, et pour \mathbf{d} un $\#Q_0$ -uplet d'entiers naturels, nous notons $\text{rep}((Q, R), \mathbf{d})$ l'ensemble des représentations E de (Q, R) telles que $\dim(E) = \mathbf{d}$. Nous allons rappeler le résultat de décomposition de Kac.

Théorème 2.31 ((Kac, 1980)). *Soit Q un carquois sans boucle. Soit $\mathbf{d} = (d_q)_{q \in Q_0}$ un $\#Q_0$ -uplet d'entiers naturels. Il existe une décomposition*

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \dots + \mathbf{d}_r$$

et un ensemble ouvert dense $\Omega \subset \text{rep}(Q, \mathbf{d})$ telle que pour toute représentation $X \in \Omega$, nous avons

$$X \cong \bigoplus_{i=1}^r X(i)$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, la représentation $X(i)$ est indécomposable et $\dim(X(i)) = \mathbf{d}_i$.

Remarque 2.32. Notons que différents choix de représentations X peuvent mener à des représentations indécomposables $X(i)$ non-isomorphes. La seule chose qui les détermine est le vecteur dimension. Toutefois, si Q est de type de représentation finie (Q est de type ADE), une représentation indécomposable est déterminée à isomorphisme près par son vecteur dimension, et donc toutes les représentations dans cet ensemble ouvert dense Ω sont isomorphes.

Définition 2.33. Soit Q un carquois de type Dynkin ADE. Pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\#Q_0}$, la **représentation générique de dimension \mathbf{d}** , notée $\text{Kac}(\mathbf{d})$, est la représentation de $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ telle qu'il existe un ensemble ouvert dense Ω de $\text{rep}(Q, \mathbf{d})$ tel que pour tout $X \in \Omega$, $X \cong \text{Kac}(\mathbf{d})$.

La proposition suivante permet de faire le lien entre la représentation générique de dimension \mathbf{d} et la représentation générique de forme λ .

Proposition 2.34. *Soit Q un carquois de type Dynkin ADE. Pour tout $\mathbf{d} = (d_q)_{q \in Q_0} \in \mathbb{N}^{\#Q_0}$, nous avons*

$$\text{GenRep}(\underbrace{((1, \dots, 1))_{q \in Q_0}}_{d_q \text{ fois}}) \cong \text{Kac}(\mathbf{d}).$$

2.7 Vers les articles

Comme dit plus tôt, une des premières motivations des travaux que j'expose à travers les articles à suivre est l'article de Garver, Patrias and Thomas (Garver *et al.*, 2023) dans lequel ils ont introduit la notion de retrouvabilité de Jordan et sur lequel ils ont pu énoncer un résultat intéressant que nous allons rappeler ici.

Pour $m \in Q_0$, nous définissons $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ la catégorie additivement engendrée par les représentations indécomposables $X \in \text{rep}(Q, R)$ telles que $X_m \neq 0$. Nous pourrions noter $\mathcal{C}_{Q,m}$ si $R = \emptyset$. Nous dirons qu'un sommet m est *minuscule* si pour toute représentation indécomposable $X \in \text{rep}(Q, R)$, $\dim(X_m) \leq 1$.

Théorème 2.35 ((Garver *et al.*, 2023)). *Soit Q un carquois de type Dynkin ADE. Si $m \in Q_0$ est minuscule alors $\mathcal{C}_{Q,m}$ est canoniquement retrouvable de Jordan.*

L'objet de cette thèse est d'étendre ce résultat dans deux directions. La première m'a amené à étudier les catégories $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ pour des familles de carquois à relations plus large (comme les carquois à relations aimables), et caractériser lesquelles sont canoniquement retrouvables de Jordan et lesquelles sont retrouvables de Jordan. La deuxième m'a amené à déterminer toutes les catégories qui sont canoniquement retrouvables de Jordan, et à conjecturer toutes celles qui sont retrouvables de Jordan dans $\text{rep}(Q)$, en restant dans le cadre des carquois Q de type Dynkin A.

CHAPITRE 3

ARTICLE 1 : JORDAN RECOVERABILITY OF SOME SUBCATEGORIES OF MODULES OVER GENTLE ALGEBRAS

3.1 Introduction (en français)

Dans ce premier article, nous allons nous focaliser sur l'étude des carquois à relations aimables $\mathcal{Q} = (Q, R)$, et nous allons caractériser combinatoirement la retrouvabilité de Jordan et la retrouvabilité de Jordan canonique des catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ pour tout $m \in \mathbb{Q}_0$.

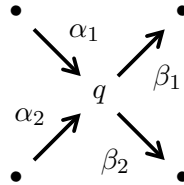
3.1.1 Carquois à relations cordes, localement aimables et aimables

Introduisons différentes familles de carquois à relations qui seront pertinentes pour la suite.

Définition 3.1. Soit Q un carquois fini (connexe) et R un ensemble fini de relations.

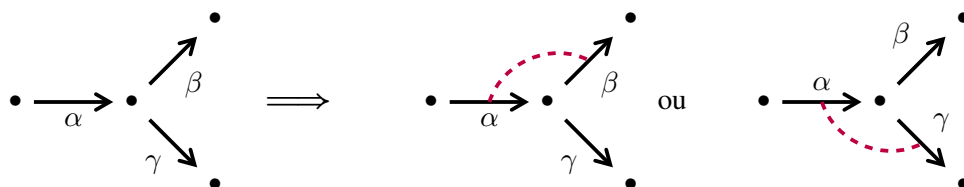
(a) Le carquois à relations (Q, R) est dit à **relations cordes** si :

(AC1) Le carquois Q est tel que tout sommet q admet au plus deux flèches entrantes et au plus deux flèches sortantes. Visuellement, cela se traduit par la configuration locale maximale ci-dessous.



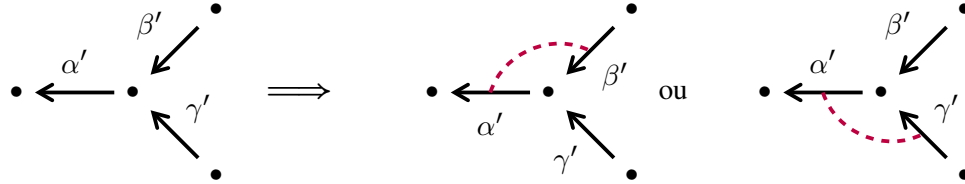
(AC2) Les relations de R sont *monomiales*, et elles sont données par des chemins de longueur supérieure ou égale à 2. Comme nous l'avons signalé dans le deuxième exemple de 1.58, nous représenterons toute relation monomiale $w = \beta\alpha$ sur le graphe par un arc en pointillés reliant α avec β .

(AC3) Pour tout triplet de flèches $(\alpha, \beta, \gamma) \in (Q_1)^3$ tel que $\beta\alpha, \gamma\alpha \in \text{Ch}(Q)$, alors $\beta\alpha \in R$ ou $\gamma\alpha \in R$. Visuellement, nous pouvons le traduire ainsi.



Notons que le « ou » n'est pas exclusif.

(AC4) Pour tout triplet de flèches $(\alpha', \beta', \gamma') \in (Q_1)^3$ tel que $\alpha'\beta', \alpha'\gamma' \in \text{Ch}(Q)$, alors $\alpha'\beta' \in R$ ou $\alpha'\gamma' \in R$. Visuellement nous pouvons le traduire ainsi



Notons que le « ou » n'est pas exclusif, et la dualité avec la condition (AC3).

(b) Le carquois à relations (Q, R) est dit à **relations localement aimables** si c'est un carquois à relations corde, et si, en plus :

(ALA1) Les relations de R sont toutes données par des chemins de longueur exactement 2.

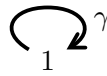
(ALA2) Les « ou » dans (AC3) et (AC4) sont exclusifs.

(c) Le carquois à relations (Q, R) est dit à **relations aimables** si c'est un carquois à relations localement aimables, et si, de plus :

(AA) $I = \langle R \rangle$ est un idéal admissible de $\mathbb{K}Q$.

Une algèbre A est une **algèbre de cordes** s'il existe un carquois à relations cordes (Q, R) tel que $A \cong \mathbb{K}Q/I$ avec $I = \langle R \rangle$. Nous pouvons écrire la même définition pour les algèbres localement aimables et aimables.

Exemple 3.2. Considérons le carquois Q suivant.



- $(Q, R = \{\gamma^3\})$ est un carquois à relations cordes, mais pas à relations localement aimables ;
- $(Q, R = \emptyset)$ est un carquois à relations localement aimables, mais pas à relations aimables ;
- $(Q, R = \{\gamma^2\})$ est un carquois à relations aimables. ┘

3.1.2 Représentations

Dans le cadre des algèbres de cordes, la description des représentations va se faire de manière combinatoire. Nous allons introduire dans ce qui suit deux familles importantes de représentations qui permettront

de décrire complètement les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables d'un carquois à relations cordes $\mathcal{Q} = (Q, R)$. Précisons que nous allons nous restreindre au cadre des représentations de dimension finie. Il existe des définitions pour des représentations de dimension infinie, mais nous n'allons pas les aborder ici. Nous allons également nous permettre d'énoncer les définitions et quelques résultats, quand cela est possible, dans le cadre des carquois à relations monomiales.

Définition 3.3. Un carquois à relations (Q, R) est dit à **relations monomiales** si toute relation de R est monomiale, ou, autrement dit, $R \subset \{\gamma \in \text{Ch}(Q) \mid \ell(\gamma) \geq 2\}$.

3.1.2.1 Représentations cordes

Commençons par définir ce qu'est une corde.

Définition 3.4. Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales. Une **corde** de (Q, R) est une marche qui vérifie une des conditions suivantes :

(Cord1) ρ est paresseuse ($\exists q \in Q_0 \mid \rho = e_q$);

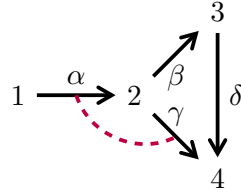
(Cord2) Nous pouvons écrire $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $\alpha_i \in Q_1$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ tels que :

- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+2} = \dots = \varepsilon_j = 1$, alors $\alpha_j \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \notin R$;
- si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \dots = \varepsilon_j = -1$, alors $\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_j \notin R$;
- si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, alors $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

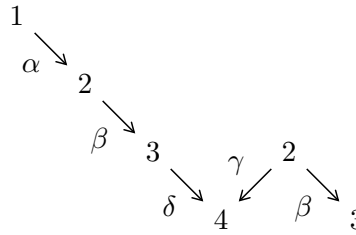
Pour $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde, comme déjà vue en Définition 1.10 pour les marches, nous pouvons noter $\ell(\rho) = k$, $s(\rho) = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $t(\rho) = t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$.

Remarque 3.5. Une corde peut être modélisée visuellement en dessinant un chemin dans le réseau \mathbb{Z}^2 , où les seuls pas autorisés sont les pas $(1, 1)$ et $(1, -1)$, et en orientant ce chemin de sorte que toutes les flèches pointent vers le bas. Nous pourrions étiqueter les flèches et les sommets parcourus en lisant comme nous lirions la corde dans le carquois, ce qui est très pratique.

Par exemple, prenons le carquois à relations (Q, R) suivant.



Alors nous pouvons représenter la corde $\rho = \beta\gamma^{-1}\delta\beta\alpha$ de la manière suivante.



Définition 3.6. Le *support en sommets* d'une corde $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est l'ensemble des sommets traversés par ρ . Nous écrivons

$$\text{Supp}_0(\rho) = \{s(\rho)\} \cup \{t(\alpha_i^{\varepsilon_i}) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Le *support en flèches* de ρ est l'ensemble des flèches traversées par ρ . Nous écrivons

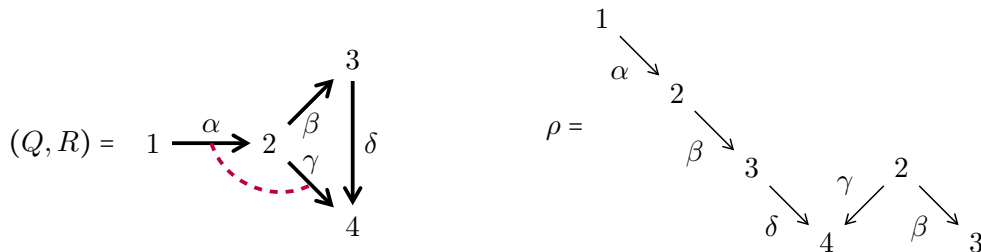
$$\text{Supp}_1(\rho) = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Une *sous-corde de* ρ est une corde σ telle que :

- soit $\sigma = e_q$ pour $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
- soit $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ pour un certain couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq j \leq k$.
- soit $\sigma = (\alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i})^{-1} = \alpha_i^{-\varepsilon_i} \dots \alpha_j^{-\varepsilon_j}$ pour un certain couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq j \leq k$.

Nous pouvons définir $\text{Supp}_\ell(\rho)$ l'ensemble des sous-cordes de ρ de longueur ℓ .

Exemple 3.7. Reprenons le carquois à relations (Q, R) et la corde ρ de Remarque 3.5.



Alors les sous-cordes de $\rho = \beta\gamma^{-1}\delta\beta\alpha$ sont :

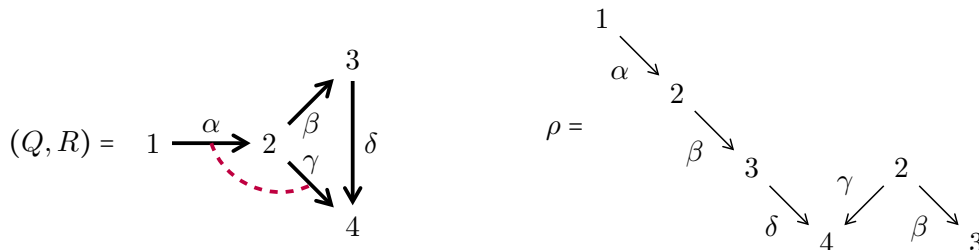
- e_1, e_2, e_3, e_4 ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (et leur inverse) ;
- $\beta\alpha, \delta\beta, \gamma^{-1}\delta, \beta\gamma^{-1}$ (et leur inverse) ;
- $\delta\beta\alpha, \gamma^{-1}\delta\beta, \beta\gamma^{-1}\delta$ (et leur inverse) ;
- $\gamma^{-1}\delta\beta\alpha, \beta\gamma^{-1}\delta\beta$ (et leur inverse) ;
- $\beta\gamma^{-1}\delta\beta\alpha = \rho$ (et ρ^{-1}). ┘

Définition 3.8. Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales. Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde de (Q, R) . La *représentation corde (de dimension finie) associée à ρ* , notée $M(\rho)$, est la représentation construite de la manière suivante :

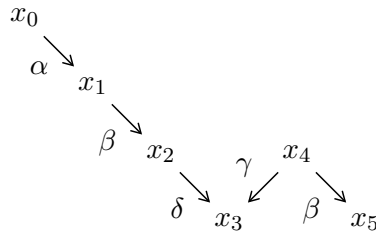
- Posons $v_0 = s(\rho)$ et $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ pour $1 \leq i \leq k$. Notons que si $\rho = e_q$, nous n'avons que $v_0 = q$.
- Considérons $\{x_0, \dots, x_k\}$ une famille de $k + 1$ variables formelles que nous allons supposer former une famille linéairement indépendante sur \mathbb{K} .
- Nous définissons $M(\rho)_q$ comme étant l'espace vectoriel $\langle x_i \mid v_i = q \rangle$.
- Nous définissons $M(\rho)_\alpha : M(\rho)_{s(\alpha)} \longrightarrow M(\rho)_{t(\alpha)}$ sur les éléments des bases que nous avons fixés sur les espaces vectoriels de nos sommets.
 - * Si $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho)$, nous pouvons poser pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\alpha_i = \alpha$ et $\varepsilon_i = 1$, $M(\rho)_\alpha(x_{i-1}) = x_i$.
 - * Si $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho)$, nous pouvons poser pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\alpha_{i+1} = \alpha$ et $\varepsilon_{i+1} = -1$, $M(\rho)_\alpha(x_{i+1}) = x_i$.
 - * Dans les autres cas, nous posons $M(\rho)_\alpha = 0$.

Remarque 3.9. Nous pouvons proposer une meilleure façon de construire les représentations via la modélisation visuelle que nous avons faite en Remarque 3.5.

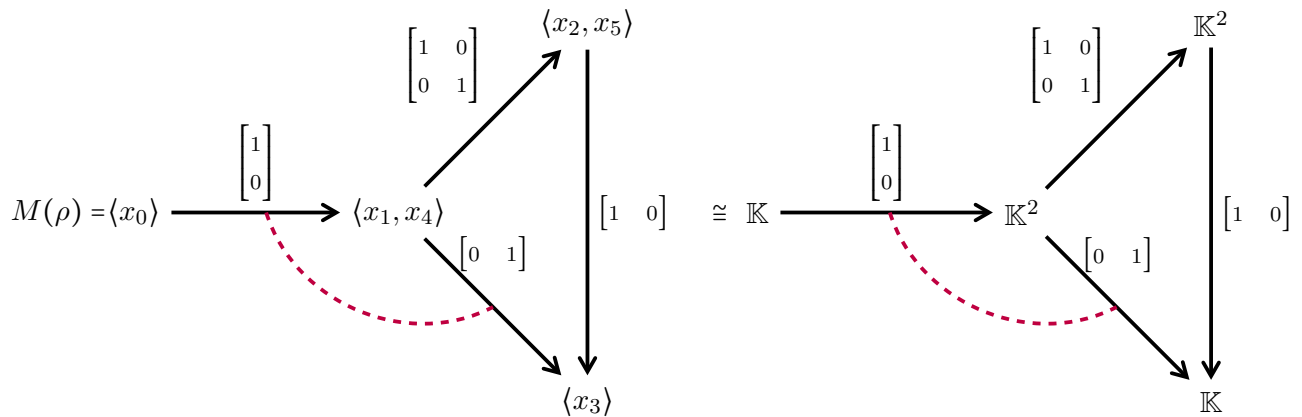
Reprenons le carquois à relation (Q, R) et la corde vus précédemment.



Le placement des variables formelles peut se comprendre visuellement comme remplacer les sommets de la corde par x_0, x_1, \dots, x_k au fur et à mesure que nous lisons la corde de gauche à droite.



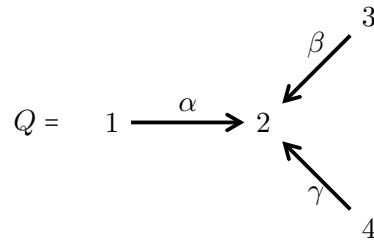
Ainsi, les flèches entre les variables indiquent le comportement des morphismes que nous voulons définir. Par exemple, le fait que x_4 est envoyé vers x_3 via la flèche γ se traduit par $M(\rho)_\gamma(x_4) = x_3$. En identifiant les sommets identiques dans les cordes, en construisant les espaces vectoriels en chaque sommet à l'aide des variables sur le même sommet, et en traduisant l'action des flèches en morphismes linéaires entre les espaces vectoriels, nous obtenons alors la représentation corde $M(\rho)$ suivante.



Nous pouvons noter que nous aurions pu directement choisir de placer \mathbb{K} au lieu de mettre les variables formelles en chaque sommet de la corde ρ .

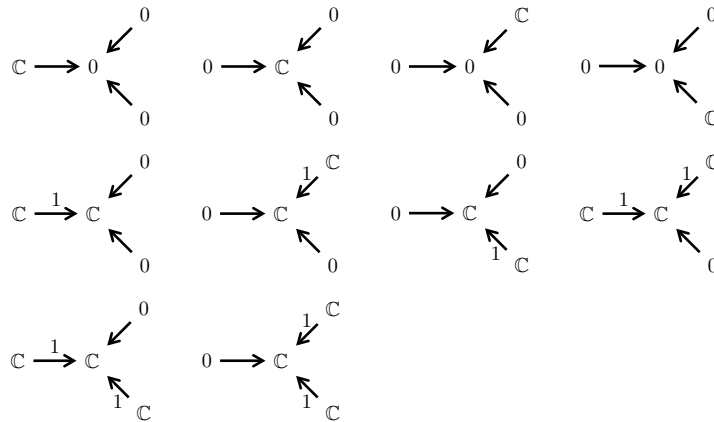
Proposition 3.10 ((Butler et Ringel, 1987)). *Pour (Q, R) un carquois à relations monomiales, et pour toute corde ρ de (Q, R) , $M(\rho)$ définit bien une représentation de (Q, R) . De plus, cette représentation est indécomposable.*

Exemple 3.11. Reprenons l'Exemple 1.30. Soit le carquois à relations (Q, R) suivant.

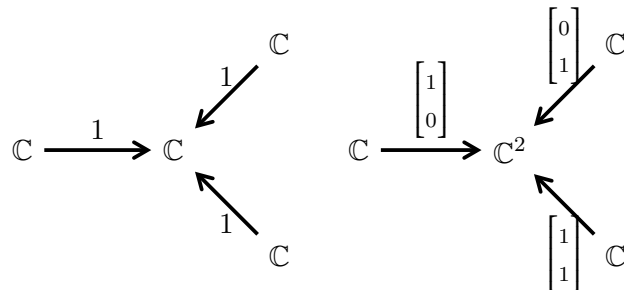


avec $R = \emptyset$. Notons que (Q, R) est bien un carquois à relations monomiales, mais n'est pas à relations cordes.

Parmi les représentations indécomposables sur \mathbb{C} trouvées, les suivantes sont des représentations cordes.



Seules les deux représentations indécomposables suivantes ne sont pas des représentations cordes.



┌

Remarque 3.12.

- Comme nous venons de le voir, en général, les représentations cordes ne suffisent pas pour décrire toutes les représentations indécomposables d'un carquois à relations monomiales. Nous verrons, via le Théorème 3.20, avec les représentations bandes introduites prochainement, qu'elles permettent une classification complète des représentations indécomposables dans le cadre des carquois à relations cordes.
- L'hypothèse que (Q, R) est à relations monomiales est cruciale pour assurer qu'une représentation corde soit bien une représentation de (Q, R) . Dans le cas contraire, il pourrait y avoir des relations qui ne peuvent pas être vues via la définition de cordes, comme des relations de commutativité, et qui empêcheraient une représentation corde d'être bien une représentation.

3.1.2.2 Représentations bandes

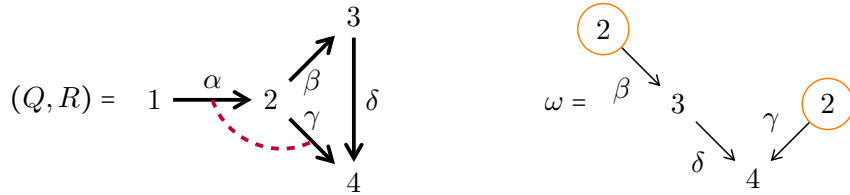
Définition 3.13. Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales. Une **bande** $\omega = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une corde non-paresseuse telle que :

(Band1) $s(\omega) = t(\omega)$;

(Band2) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\omega^m = \underbrace{\omega \dots \omega}_{m \text{ fois}}$ est une corde de (Q, R) ;

(Band3) ω est primitive : il n'existe pas de sous-corde z de ω et d'entier $m \geq 2$ tels que $\omega = z^m$.

Remarque 3.14. Comme pour les cordes, nous pouvons modéliser visuellement les bandes comme dans l'exemple suivant.



La seule différence avec les cordes est que nous entourerons la source et le but (qui sont le même sommet) afin de se souvenir d'une identification imposée par la construction des représentations bandes.

Définition 3.15. Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales. Soit $\omega = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une bande de (Q, R) , $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. La **représentation bande (de dimension finie)** $M(\omega, \lambda, m)$ est la représentation définie comme suit.

- Posons $v_0 = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ et $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$.
- Considérons $\{x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}, \dots, x_{k-1}^{(1)}, \dots, x_{k-1}^{(m)}\}$ un jeu de $k \times m$ variables formelles supposant former une famille linéairement indépendante sur \mathbb{K} .
- Nous définissons $M(\omega, \lambda, m)_q$ comme étant l'espace vectoriel $\langle x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)} \mid v_i = q \rangle$.
- Nous définissons $M(\omega, \lambda, m)_\alpha$ sur les éléments des bases que nous avons fixés sur les espaces vectoriels de nos sommets.

- * Si $\alpha = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$ et $\varepsilon_i = 1$, nous posons, pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_{i-1}^{(j)}) = x_i^{(j)};$$

- * Si $\alpha = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$ et $\varepsilon_i = -1$, nous posons, pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_i^{(j)}) = x_{i-1}^{(j)};$$

- * Si $\alpha = \alpha_k$ et $\varepsilon_k = 1$, nous posons, pour tout $2 \leq j \leq m$,

$$M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_{k-1}^{(j)}) = \lambda x_0^{(j)} + x_0^{(j-1)} \text{ et } M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_{k-1}^{(0)}) = \lambda x_0^{(0)}$$

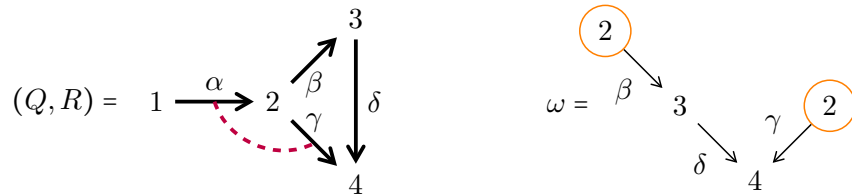
- * Si $\alpha = \alpha_k$ et $\varepsilon_k = -1$, nous posons, pour tout $2 \leq j \leq m$,

$$M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_0^{(j)}) = \lambda^{-1} x_{k-1}^{(j)} + x_{k-1}^{(j-1)} \text{ et } M(\omega, \lambda, m)_\alpha(x_0^{(0)}) = \lambda^{-1} x_{k-1}^{(0)};$$

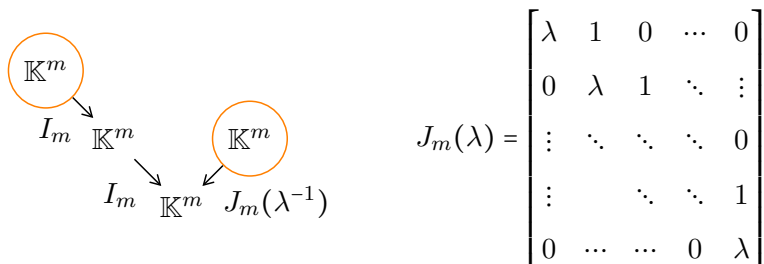
- * Dans les autres cas, $M(\omega, \lambda, m)_\alpha = 0$.

Remarque 3.16. La définition ci-dessus, telle qu'elle est donnée, s'avère indigeste. Nous pourrions préférer construire les représentations bandes en suivant un modèle « simplifié » similaire à ce que nous avons vu pour les cordes en Remarque 3.5.

Reprenons le carquois à relation et la bande déjà vus précédemment.

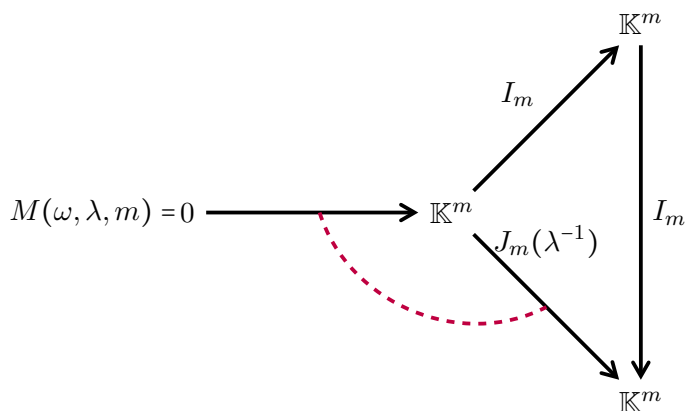


Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Pour construire la représentation bande $M(\omega, \lambda, m)$, nous allons placer une copie de l'espace vectoriel \mathbb{K}^m à chaque sommet traversé par la bande, et placer des morphismes comme indiqués ci-dessous.

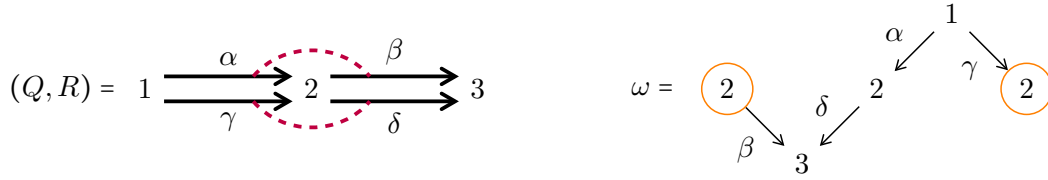


Notons que I_m désigne la matrice identité et $J_m(\lambda)$ est le **bloc de Jordan de taille m de valeur propre λ** représenté ci-dessus. Notons également que la valeur propre ici est λ^{-1} du fait que nous lisons la dernière flèche à l'envers.

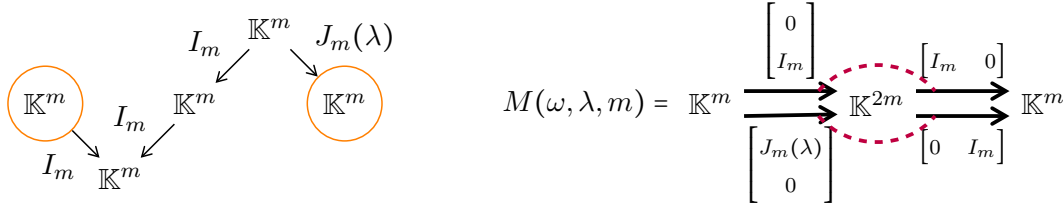
Maintenant comme pour les cordes, nous allons réunir les différentes copies de \mathbb{K}^m dans chacun des sommets, en identifiant le premier \mathbb{K}^m avec le dernier \mathbb{K}^m , et les morphismes se déduisent de ce que nous avons construit.



Exemple 3.17. Considérons le carquois à relations aimables ainsi que la bande ci-dessous.



Pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons la représentation bande ci-dessous.



Notons que nous identifions uniquement le premier « paquet de m copies de \mathbb{K} » et le dernier. Les autres apparaissent de la même manière que lors de la construction d'une représentation corde. \lrcorner

Proposition 3.18 ((Butler et Ringel, 1987)). *Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales, ω une bande de (Q, R) , $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $M(\omega, \lambda, m)$ définit bien une représentation de (Q, R) et, de plus, elle est indécomposable.*

3.1.2.3 Représentations indécomposables

Nous allons énoncer le résultat principal qui donne la classification complète des classes d'isomorphisme des représentations indécomposables d'un carquois à relations cordes. Avant cela, nous avons besoin d'une petite définition combinatoire.

Définition 3.19. Soit (Q, R) un carquois à relations monomiales. Nous dirons que deux bandes ω et ζ de (Q, R) sont *cycliquement équivalentes* si en écrivant $\omega = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$, alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$$\zeta = \alpha_i^{\varepsilon_i} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}.$$

Voici le résultat important.

Théorème 3.20 ((Butler et Ringel, 1987)). *Soit (Q, R) un carquois à relations cordes et \mathbb{K} un corps algébriquement clos. Toute représentation indécomposable de (Q, R) est isomorphe à une représentation corde ou à une représentation bande. De plus,*

- si ρ et ρ' sont deux cordes de (Q, R) , alors $M(\rho) \cong M(\rho') \iff \rho = (\rho')^{\pm 1}$;
- une représentation corde et une représentation bande ne sont pas isomorphes ;
- si ω et ω' sont deux bandes, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $m, p \in \mathbb{N}^*$, alors $M(\omega, \lambda, m) \cong M(\omega', \mu, p)$ si et seulement si $m = p$ et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- * $\omega \underset{\text{cyc}}{\sim} \omega'$ et $\lambda = \mu$;
- * $\omega \underset{\text{cyc}}{\sim} (\omega')^{-1}$ et $\lambda = \mu^{-1}$.

Remarque 3.21.

- Ce résultat justifie le fait que nous allons, par la suite, identifier une corde ρ avec son inverse ρ^{-1} , et identifier une bande ω avec toutes les bandes cycliquement équivalentes à ω , ainsi que leur inverse.
- L'énoncé original de ce théorème s'étend dans le cadre d'un corps \mathbb{K} quelconque. Dans le cadre de cette thèse, et pour des raisons de simplicité d'énoncés, nous n'avons besoin que de l'énoncé dans le cas d'un corps \mathbb{K} algébriquement clos.

3.1.3 Morphismes des représentations cordes

Dans l'article à suivre, pour $\mathcal{Q} = (Q, R)$ un carquois à relations (localement) aimables, l'existence d'une bande ω à support sur un sommet $m \in Q_0$ implique que la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ n'est pas retrouvable de Jordan. Cela vient essentiellement du fait que $M(\omega, \lambda, 1) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ et que $\text{GenJF}(M(\omega, \lambda, 1)) = \text{GenJF}(M(\omega, \mu, 1))$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus 0$.

Par conséquent, nous faisons le choix de ne pas nous attarder sur l'étude des morphismes de représentations indécomposables en général, et de nous focaliser uniquement sur les morphismes entre les représentations cordes. Pour cela, nous allons introduire un peu plus de vocabulaire combinatoire.

Définition 3.22. Soit $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une corde d'un carquois à relations cordes (Q, R) . Une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ de ρ , avec $1 \leq i \leq j \leq k$, est dite **au-dessus de** ρ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = -1$
- $j = k$ ou $\varepsilon_{k+1} = 1$

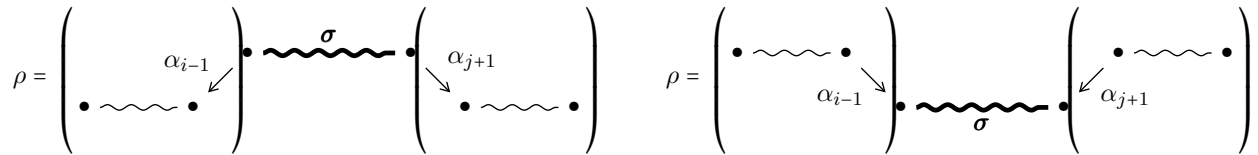
De manière analogue, une sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ de ρ , avec $1 \leq i \leq j \leq k$, est dite **en-dessous de** ρ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $i = 1$ ou $\varepsilon_{i-1} = 1$;

- $j = k$ ou $\varepsilon_{k+1} = -1$.

Notons $\text{Top}(\rho)$ le (multi-)ensemble des sous-cordes de ρ qui sont au-dessus de ρ et notons $\text{Bot}(\rho)$ le (multi-)ensemble des sous-cordes de ρ qui sont en-dessous de ρ .

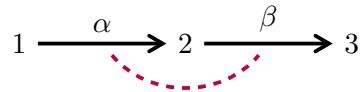
Remarque 3.23. Visuellement, la terminologie est plus facile à comprendre.



La figure à gauche représente une sous-corde σ au-dessus de ρ , et la figure à droite représente une sous-corde σ qui est en-dessous de ρ . Notons que ce qui est entre parenthèses est optionnel : par exemple, nous avons que $\sigma = \rho$ est à la fois au-dessus et en-dessous d'elle-même.

Exemple 3.24.

(TB1) Considérons le carquois à relations aimables suivant.

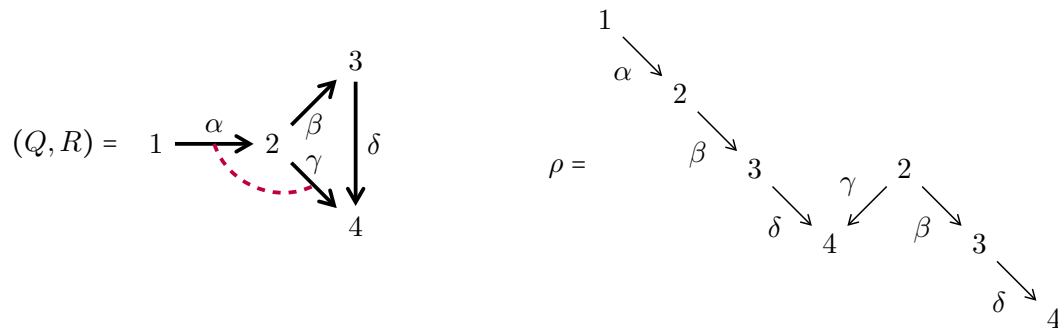


Prenons les cordes $\rho = \alpha$ et $\mu = \beta$. Nous énumérons les cordes au-dessus et en-dessous de μ et de ρ respectivement en Tableau 3.1. Notons qu'il n'y a qu'une corde qui se trouve à la fois dans $\text{Top}(\mu)$ et dans $\text{Bot}(\rho)$. Cela va avoir de l'importance dans le résultat qui va suivre.

(TB2) Considérons le carquois à relations aimables et la corde ρ ci-dessous.

$\rho = \begin{array}{c} 1 \\ \alpha \searrow \\ 2 \end{array}$	Top(ρ)		
	Bot(ρ)		
$\mu = \begin{array}{c} 2 \\ \beta \searrow \\ 3 \end{array}$	Top(μ)		
	Bot(μ)		

TABLEAU 3.1 Calcul des cordes au-dessus et en-dessous des cordes ρ et μ données en Exemple 3.24 (TB1).



Nous voyons dans les calculs de cet exemple (Tableau 3.2) qu'il y a deux sous-cordes de ρ qui sont à la fois au-dessus et en-dessous de ρ . ┘

Le théorème suivant permet une description complète des morphismes entre les représentations cordes d'un carquois à relations cordes.

Top(ρ)					
Bot(ρ)					

TABLEAU 3.2 Calcul des cordes au-dessus et en-dessous de la corde ρ données en Exemple 3.24 (TB2). Notons que les deux dernières cordes de $\text{Bot}(\rho)$ apparaissent deux fois en-dessous de ρ . Si un tel cas se produit, il est bon de distinguer les différentes copies d'une corde σ en-dessous d'une corde ρ .

Théorème 3.25 ((Crawley-Boevey, 1989)). *Soit (Q, R) un carquois à relations cordes. Considérons ρ et μ deux cordes de (Q, R) . Alors*

$$\dim(\text{Hom}(M(\rho), M(\mu))) = \#[\rho, \mu]$$

où $[\rho, \mu] = \{(\sigma, \sigma') \mid \sigma \in \text{Top}(\rho), \sigma' \in \text{Bot}(\mu), \sigma = (\sigma')^{\pm 1}\}$. Plus précisément, une base $\Phi = (\varphi_{(\sigma, \sigma')})$ de $\text{Hom}(M(\rho), M(\mu))$ peut être donnée par une paire $(\sigma, \sigma') \in [\rho, \mu]$ de la manière suivante :

- considérons la construction de $M(\rho)$ avec la famille de variables formelles (x_0, \dots, x_k) considérée linéairement indépendante ;
- de même, soit (y_0, \dots, y_l) la famille de variables considérée pour la construction de $M(\mu)$;
- la sous-corde $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ de ρ concerne les variables x_i, \dots, x_{j+1} (notons que si σ est paresseux, cela revient à prendre $j = i - 1$) et la sous-corde σ' concerne les variables y_p, \dots, y_{q+1} ;
- si $\sigma = \sigma'$, nous définissons $\varphi_{(\sigma, \sigma')}$ sur les variables (x_0, \dots, x_k) par :

$$\varphi_{(\sigma, \sigma')}(x_u) = \begin{cases} y_{p+u-i} & \text{si } i \leq u \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- si $\sigma = (\sigma')^{-1}$, nous définissons $\varphi_{(\sigma, \sigma')}$ sur les variables (x_0, \dots, x_k) par :

$$\varphi_{(\sigma, \sigma')}(x_u) = \begin{cases} y_{q+i-u} & \text{si } i \leq u \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

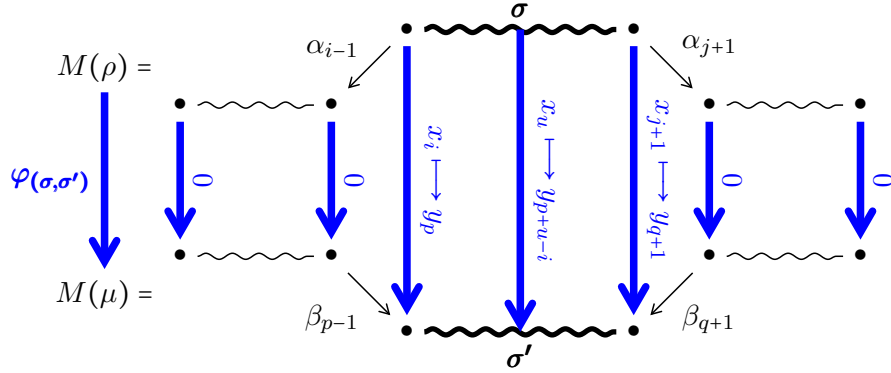


FIGURE 3.1 Illustration de la définition du morphisme $\varphi_{(\sigma, \sigma')}$ dans la cas où $\sigma = \sigma'$.

Les morphismes $\varphi_{(\sigma, \sigma')}$ sont ce que nous appelons des **morphismes graphes** (« graph maps » en anglais).

Remarque 3.26. En termes de modules, nous pouvons interpréter les choses de la manière suivante :

- les cordes $\sigma \in \text{Top}(\rho)$ correspondent aux modules $M(\sigma)$ quotients de $M(\rho)$;
- les cordes $\sigma \in \text{Bot}(\rho)$ correspondent aux modules $M(\sigma)$ sous-modules de $M(\rho)$.

Exemple 3.27. Reprenons l'Exemple 3.24 et posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(TB1) Dans cet exemple, nous avons vu que $[\rho, \mu] = \emptyset$. Ainsi $\text{Hom}(M(\rho), M(\mu)) = 0$. Par contre, $[\mu, \rho] = \{(e_2, e_2)\}$ et donc $\text{Hom}(M(\mu), M(\rho)) \cong \mathbb{C}$. En Figure 3.2 est donnée la description complète des morphismes possibles dans $\text{Hom}(M(\mu), M(\rho))$.

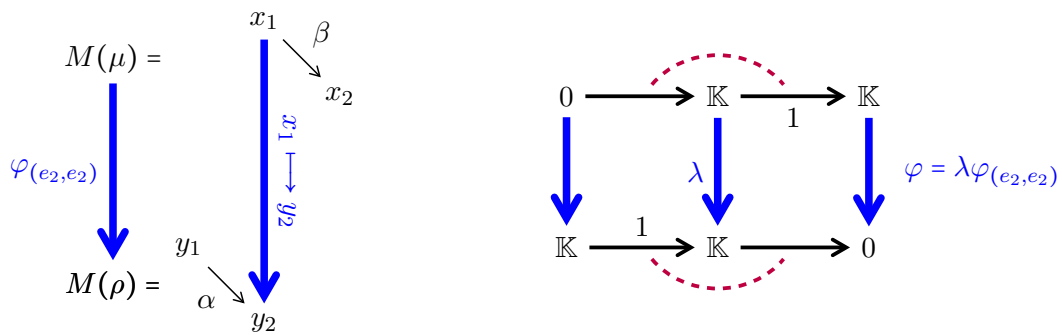


FIGURE 3.2 Description des morphismes de $\text{Hom}(M(\mu), M(\rho))$ de l'Exemple 3.24 (TB1).

(TB2) Dans cet exemple, nous avons $[\rho, \rho] = \{(\rho, \rho), (\delta\beta, \delta\beta)\}$. Donc $\text{End}(M(\rho)) = \text{Hom}(M(\rho), M(\rho)) \cong \mathbb{C}^2$. Une description complète des morphismes $\varphi \in \text{End}(M(\rho))$ est donnée en Figure 3.3. \lrcorner

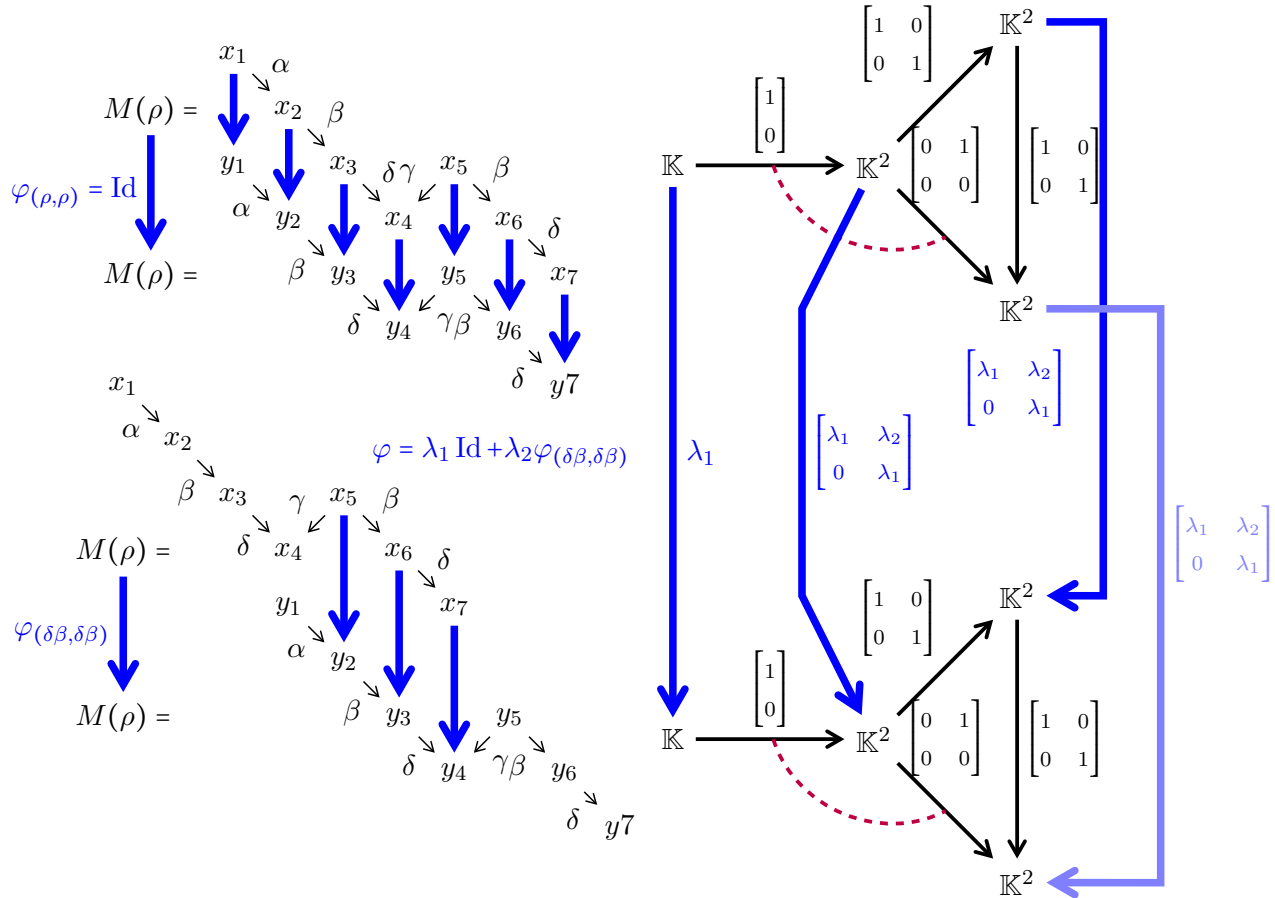


FIGURE 3.3 Description des morphismes de $\text{End}(M(\rho))$ de l'Exemple 3.24 (TB2).

Remarque 3.28. Signalons que nous pourrions développer davantage de sujets intéressants à propos des carquois à relations (localement) aimables, comme par exemple :

- Les algèbres aimables forment une classe d'algèbres stable par équivalence dérivée — voir (Schröer et Zimmermann, 2002) ;
- Le calcul combinatoire du carquois d'Auslander–Reiten pour ces carquois à relations — voir (Butler et Ringel, 1987), (Brüstle *et al.*, 2019), (Palu *et al.*, 2018) ou (Palu *et al.*, 2017) ;
- Le modèle géométrique associé à ces carquois à relations — voir (Baur et Coelho Simões, 2019) ou (Oppen *et al.*, 2018).

Pour la thèse, nous n'avons pas besoin d'autant de connaissances sur ces carquois à relations.

3.1.4 Résultats principaux et esquisse de preuve

Nous avons à présent tout ce qu'il nous faut pour énoncer les résultats principaux de l'article.

Commençons par donner le premier résultat qui caractérise les catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, pour $m \in Q_0$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan.

Théorème 3.29. *Soit $\mathcal{Q} = (Q, R)$ un carquois fini connexe à relations aimables et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ est canoniquement retrievable de Jordan si et seulement si m satisfait aux deux conditions suivantes :*

- (i) *Pour toute paire de cordes (ρ, ν) passant par m , il n'y a pas de flèche $\alpha \in Q_1$ qui n'est pas une flèche d'une des deux cordes telle que ρ passe par $s(\alpha)$ et ν passe par $t(\alpha)$;*
- (ii) *Au moins une des conditions suivantes est vérifiée :*
 - (a) *Il y a au plus une flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $s(\alpha) = m$, et il y a au plus une flèche $\beta \in Q_1$ telles que $t(\beta) = m$; si α et β existent alors $\alpha\beta \in R$;*
 - (b) *Il y a au plus une corde maximale de \mathcal{Q} qui passe par m .*

Le second résultat de cet article est, en quelque sorte, une conséquence du premier, mais il demande un peu plus de travail pour être prouvé. Il donne une caractérisation des catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ qui sont retrouvables de Jordan.

Théorème 3.30. *Soit $\mathcal{Q} = (Q, R)$ un carquois fini connexe à relations aimables et $m \in Q_0$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ est retrievable de Jordan si et seulement si m vérifie le point (ii) du Théorème 3.29 et la condition suivante :*

- (i*) *Supposons qu'il existe deux cordes ρ et ν passant par m , et une flèche $\alpha \in Q_1$ n'étant pas dans le support en flèches d'une des cordes et telle que ρ passe par $s(\alpha)$ et ν passe par $t(\alpha)$. Alors il n'existe pas de corde passant par m admettant α dans son support en flèches.*

Une interprétation de ces résultats en termes de forme de sous-carquois engendrés par les cordes à support sur m est donnée en fin de la Section 3.2.1.

Pour prouver le Théorème 3.29, nous allons d'abord montrer que si (Q, R) vérifie les conditions énumérées pour le sommet m , alors $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ est canoniquement retrievable de Jordan. Le cas (i) et (ii)(b) correspond à l'emploi du Théorème 2.35, et le cas (i) et (ii)(a) demande un travail supplémentaire.

Puis nous montrons que si (Q, R) ne vérifie pas au moins une des conditions, alors $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ n'est pas canoniquement retrouvable de Jordan. Nous allons étape par étape éliminer des cas de figure, essentiellement en exhibant un exemple de deux représentations qui ont la même donnée générique de Jordan.

Pour prouver Théorème 3.30, nous réutilisons une partie du travail déjà fourni, puis nous raffinons les cas de figure que nous pouvons rencontrer entre la restriction (i) et la restriction (i^*) , en mettant encore une fois en avant des exemples de deux représentations qui ont la même donnée générique de Jordan.

3.2 The article

Abstract : Gentle algebras form a class of finite-dimensional algebras introduced by I. Assem and A. Skowroński in the 1980s. Modules over such an algebra can be described by string and band combinatorics in the associated gentle quiver from the work of M.C.R. Butler and C.M. Ringel. Any module can be naturally associated to a quiver representation. A nilpotent endomorphism of a quiver representation induces linear transformations over vector spaces at each vertex. Generically among all nilpotent endomorphisms, a well-defined Jordan form exists for these representations. We focus on subcategories additively generated by all the indecomposable representations of a gentle quiver, including a fixed vertex in their support. We show a characterization of the vertices such that the objects of this subcategory are determined up to isomorphism by their generic Jordan form.

3.2.1 Introduction

Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a finite connected gentle quiver, i.e. a finite connected quiver Q provided with an admissible ideal I that satisfies some additional conditions that are defined later in the next section. They were introduced by I. Assem and A. Skowroński (Assem et Skowroński, 1987). A lot of recent studies are still being made nowadays of this interesting class of algebras : see for example (Amiot *et al.*, 2019), (Opper *et al.*, 2018), (Baur et Coelho Simões, 2019), (Palu *et al.*, 2018), (Fu *et al.*, 2021), (Brüstle *et al.*, 2019). As a good reference to learn some basics about what is a gentle algebra and some of the underlying combinatoric behaviors that we will also see throughout the article, we can suggest to the reader the following reference : (Palu *et al.*, 2017).

Let X be a finite-dimensional representation of \mathcal{Q} over an algebraically closed field \mathbb{K} . Let N be a nilpotent endomorphism of X . At each vertex $q \in Q_0$, N induces a nilpotent endomorphism N_q of X_q . Thus we can extract from N a sequence of integer partitions $\lambda^q \vdash \dim(X_q)$ which correspond to the Jordan blocks size of

the Jordan form of each N_q . Thanks to a result from (Garver *et al.*, 2023), $\underline{\lambda} = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ is well-defined for a generic choice of N . We denote $\text{GenJF}(X)$ this tuple that we will refer to the **generic Jordan form data** of X .

An interesting question that we could ask ourselves is :

“For which subcategories \mathcal{C} of the category $\text{rep}(Q)$ could we recover up to isomorphism $X \in \mathcal{C}$ from $\text{GenJF}(X)$?”

Such a subcategory is called **Jordan recoverable**. Throughout the article, we mean a full subcategory closed under direct sums and direct summands by a subcategory.

Let us see the following toy example.

Example 3.31. Let Q be the following A_2 -type quiver.

$$Q = 1 \xrightarrow{a} 2$$

The indecomposable representations of Q are

$$S_1 = \mathbb{K} \longrightarrow 0 \quad S_2 = 0 \longrightarrow \mathbb{K} \quad P_1 = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

We want to know which of the subcategories generated by those indecomposable representations are Jordan recoverable and which are not :

- Let $X = S_1^n$ and let $N = (N_1, N_2)$ be a nilpotent endomorphism of X . We can see we have no restriction to define N_1 . This implies that if we choose N_1 generically then N_1 is similar to a Jordan block of size n . So $\text{GenJF}(X) = ((n), (0))$ and clearly $\text{add}(S_1)$ is Jordan recoverable ;
- For the same reason $\text{add}(S_2)$ is Jordan recoverable too ;
- Let $X = P_1^m$ and $N = (N_1, N_2)$ be a nilpotent endomorphism of X . By the commutative square relation that N has to satisfy ($X_a N_1 = N_2 X_a$), and as X_a is a bijective map, N_1 and N_2 can be identified. Moreover we note there is no restriction to define N_1 . So $\text{GenJF}(X) = ((m), (m))$ and $\text{add}(P_1)$ is Jordan recoverable ;

- Let $X = S_1^n \oplus S_2^k$ and $N = (N_1, N_2)$ be a nilpotent endomorphism of X . We can see we have no restriction to define N_1 and N_2 , and they can be defined independently of one another. Thus $\text{GenJF}(X) = ((n), (k))$ and $\text{add}(S_1, S_2)$ is Jordan recoverable;
- Let $X = S_2^k \oplus P_1^m$ and $N = (N_1, N_2)$ be a nilpotent endomorphism of X . We can see thanks to commutative square relations that if we define N_2 , we have defined N_1 . Moreover if we adapt a choice of N_1 such that it corresponds to a choice of N_2 , we can see we have no restriction to define N_2 . Hence $\text{GenJF}(X) = ((m), (m+k))$ and $\text{add}(S_2, P_1)$ is Jordan recoverable;
- By an analogous argument we have $\text{add}(S_1, P_1)$ Jordan recoverable;
- However, $\text{add}(S_1, S_2, P_1) = \text{rep}(\mathcal{Q})$ is not Jordan recoverable. Indeed this comes from the fact that $\text{GenJF}(S_1 \oplus S_2) = ((1), (1)) = \text{GenJF}(P_1)$ by the previous results. \square

Obviously a subcategory where the dimension vectors of its indecomposable elements form a linearly independent family is Jordan recoverable. Indeed that comes from the fact that any representation of this kind of subcategory is entirely determined by its dimension vectors. However, in general, it is not an easy question to determine which subcategories of $\text{rep}(\mathcal{Q})$ are Jordan recoverable.

For this purpose, we can ask for something a bit more restrictive. There is a procedure that, at least in some cases, allows one to reconstruct X from $\text{GenJF}(X)$: we can see if there exists a generic choice of a representation Y in $\text{rep}(\mathcal{Q})$ among representations that admit a nilpotent endomorphism with Jordan forms encoded by $\text{GenJF}(X)$, and then we can ask if Y is isomorphic to X .

In more concrete words, for a fixed subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(\mathcal{Q})$, we can ask ourselves if for any $X \in \mathcal{C}$ there is a (Zariski) dense open set O in the variety of representations which admit a nilpotent endomorphism with a Jordan form equal to the generic Jordan form data of X , such that any $Y \in O$ is isomorphic to X . Such a subcategory \mathcal{C} is said to be *canonically Jordan recoverable*.

Note that a subcategory that is Jordan recoverable is not necessarily canonically Jordan recoverable.

Example 3.32. As in the Example 3.31, let $\mathcal{Q} = 1 \longrightarrow 2$. Let $\mathcal{C} = \text{add}(S_1, S_2)$. We saw that \mathcal{C} is Jordan recoverable, but it is not canonically Jordan recoverable. If we take $X = S_1 \oplus S_2$ then we get $\text{GenJF}(X) = ((1), (1))$, and we already saw that there is an other representation that has the same Jordan form data: it is P_1 ! For $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q})$ admitting a nilpotent endomorphism with a Jordan form given by $((1), (1))$, we have the following diagram to satisfy

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{K} \\
\downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
\mathbb{K} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{K}
\end{array}$$

and so a generic choice that we have for the linear morphism α is $k \text{ id}$ for $0 \neq k \in \mathbb{K}$. Hence $Y \cong P_1 \not\cong S_1 \oplus S_2$.
 \square

Let us see another interesting example.

Example 3.33. Let us consider the following gentle quiver.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

Let $X = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$. Let $N = (N_1, N_2, N_3)$ be a nilpotent endomorphism of X . It is effortless to check that $N_1 = N_3 = 0$. Let (x_1, x_2, x_3) be a basis of \mathbb{K}^3 , the vector space at the vertex 2, adapted to the decomposition of X into indecomposable representations above. That means for example that we identify the vector space on the vertex 1 to the subspace on the vertex 2 generated by x_1 .

From the commutative square relations, we need that $\langle x_1 \rangle \subseteq \text{Ker}(N_2)$, $\text{Im}(N_2) \subseteq \langle x_1, x_2 \rangle$ and of course $N_2^3 = 0$. So :

- $N_2(x_1) = 0$;
- $N_2(x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ for some $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- $N_2(x_3) = \gamma x_1 + \delta x_2$ for some $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

In addition, we can remark that $N_2^2(x_2) = \beta N_2(x_2)$. This implies that $\beta = 0$.

Hence all the allowed choices of N_2 can be characterized as matrices of the form

$$N(\alpha, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thus, among all the choices we can make to define N_2 (and so N), there is a generic choice (a dense open set) which comes naturally from generic restrictions $\alpha, \delta \neq 0$ that we can impose. So the Jordan form of that

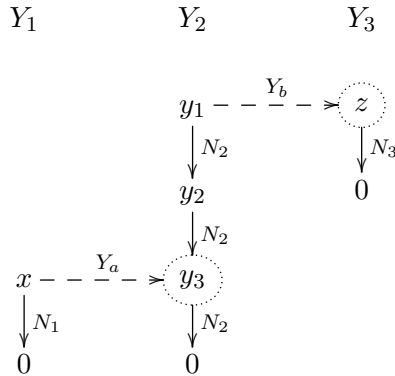
generic choice of N is $((1), (3), (1))$. Then $\text{GenJF}(X) = ((1), (3), (1))$.

Suppose now we have Y such that $\text{GenJF}(Y) = ((1), (3), (1))$. We know Y is of the form :

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \nearrow \\ \xrightarrow{Y_a} \\ \searrow \end{array} \mathbb{K}^3 \begin{array}{c} \nearrow \\ \xrightarrow{Y_b} \\ \searrow \end{array} \mathbb{K}$$

Let (x) , (y_1, y_2, y_3) and (z) be respective bases of Y_1, Y_2 and Y_3 adapted to each nilpotent endomorphism.

The following diagram summarizes the situation.



By commutative square relations ($Y_a N_1 = N_2 Y_a$ and $Y_b N_2 = N_3 Y_b$), we have :

- $Y_a(x) = \alpha' y_3$ for some $\alpha' \in \mathbb{K}$;
- $Y_b(y_2) = Y_b(y_3) = 0$ and $Y_b(y_1) = \beta' z$ for some $\beta' \in \mathbb{K}$.

Thus among all the choices we can make to define Y_a and Y_b (and so Y), there exists a generic choice that comes from generic restrictions $\alpha', \beta' \neq 0$. Hence we get $Y \cong X$. We recovered X . ┘

Some remarks :

- We get for free $Y_b Y_a = 0$, which is something that seems not guaranteed in the first instance ;
- From what we have done above, if we started with $Z = S_1 \oplus S_2^3 \oplus S_3$, which has the same generic Jordan form data as X , we would not recover Z . Hence the category $\text{add}(S_1, S_2, S_3)$ is not canonically Jordan recoverable, even though it is Jordan recoverable ;
- If we try to get a representation Y such that its generic Jordan form data is $((1), (1), (1))$, we will have no restriction from the nilpotent endomorphism (as $N = 0$) other than $Y_q \cong \mathbb{K}$ for each vertex q . But we need to respect the relation $Y_b Y_a = 0$. So we get two isomorphism classes of representations that could be good candidates for a generic choice :

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \nearrow \\ \xrightarrow{1} \\ \searrow \end{array} \mathbb{K} \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \xrightarrow{0} \\ \dashrightarrow \end{array} \mathbb{K} \qquad \mathbb{K} \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \xrightarrow{0} \\ \dashrightarrow \end{array} \mathbb{K} \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \xrightarrow{1} \\ \dashrightarrow \end{array} \mathbb{K}$$

However, there is no reason to privilege one to the other : the open sets in play are not dense in the set of representations that have $((1), (1), (1))$ as generic Jordan form. Hence there is no generic choice of a representation Y with that generic Jordan form ;

- We give in Example 3.60 a proof that $\text{add}(I_2, S_2, P_2)$ is canonically Jordan recoverable. The crucial point in this subcategory is we can note the dimension vector (d_1, d_2, d_3) of any representation X satisfies the relation $d_2 \geq d_1 + d_3$. This is something that the representations in the previous bullet point do not satisfy which explains why the previous bullet point is not a counter-example to this claim.

We will study Jordan recoverability and canonical Jordan recoverability of a special kind of subcategories. For m a vertex of \mathcal{Q} , let $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ be the subcategory generated by the indecomposable representations that have a nonzero vector space at the vertex m .

One of the engrossing notions around the vertices of a quiver that seems important to achieve our goal is the minusculeness of a vertex. A vertex m is said to be **minuscule** if for any indecomposable representation X of \mathcal{Q} , we have $\dim X_m \leq 1$. This notion is a crucial point to get $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ canonically Jordan recoverable by the following main result of (Garver *et al.*, 2023).

Theorem 3.34 ((Garver *et al.*, 2023)). *If Q is a Dynkin quiver, and m is a minuscule vertex, then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable.*

Remark 3.35. The result presents the minuscule property as a sufficient condition, but not a necessary one. For type A quivers, note that all the vertices are minuscule.

In this article, we give an analogous result (which extends the A_n -type quiver case) in the case of a finite connected gentle quiver \mathcal{Q} . We note that the condition of minusculeness is not enough to get Jordan recoverability or canonical Jordan recoverability. We need to add some combinatorial conditions, linked to strings of \mathcal{Q} .

A **string** of \mathcal{Q} can be understood as a walk in the quiver. These walks (satisfying some additional conditions as we shall recall below) allow us to describe all the indecomposable representations of \mathcal{Q} . By knowing what is going on with strings, we can give a complete description of all the subcategories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ that are Jordan recoverable or canonically Jordan recoverable.

In this article, we first recall some main definitions and tools that will then help us to prove the following statements. The first main result is a characterization of the subcategories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ that are canonically Jordan

recoverable.

Theorem 3.36. *Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a finite connected gentle quiver and $m \in Q_0$. The subcategory $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ is canonically Jordan recoverable if and only if m satisfies the following conditions :*

- (i) *For any pair of strings ρ and ν passing through m , there is no arrow $\alpha \in Q_1$ which is not an arrow of either string such that ρ passes through $s(\alpha)$ and ν passes through $t(\alpha)$;*
- (ii) *At least one of the two following conditions :*
 - (a) *There is at most one arrow $\alpha \in Q_1$ such that $s(\alpha) = m$, and there is at most one arrow $\beta \in Q_1$ such that $t(\beta) = m$; if α and β both exist then $\alpha\beta \in I$;*
 - (b) *There is at most one maximal string of \mathcal{Q} passing through m .*

Following the proof given later (See Section 3.2.3.1), we can rephrase the previous theorem in the following way : $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ is canonically Jordan recoverable if and only if the underlying graph of the full subquiver of Q given by the vertices q attained by strings passing through m is a tree (i), and furthermore, if this tree is not a line (ii)(a), either m is a leaf of that tree, or all the incident arrows to m are in relation (ii)(b).

The second one is some kind of consequence of the first, but it needs a few additional works. It allows us to get a characterization of the subcategories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ that are Jordan recoverable.

Theorem 3.37. *Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a finite connected gentle quiver and $m \in Q_0$. The subcategory $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ is Jordan recoverable if and only if m satisfies the point (ii) of Theorem 3.36 and the following condition :*

- (i*) *Suppose that there exist two strings ρ and ν passing through m , and an arrow $\alpha \in Q_1$ which belongs to neither ρ nor ν , but such that ρ passes through $s(\alpha)$ and ν passes through $t(\alpha)$. Then there is no string passing through m supported on α .*

Following the proof given later (See Section 3.2.3.2), we can rephrase the previous theorem in the following way : $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, m}$ is Jordan recoverable if and only if the underlying graph of the subquiver of Q given by arrows and vertices that we go through by strings passing through m is a tree (i*), that satisfies the same property than in the previous result. Note that it is a weaker condition than in Theorem 3.36, as cyclic walks are allowed in the full subquiver of Q mentioned previously. If so, then there must be an arrow α_w in each walk w such that $s(\alpha_w) \neq t(\alpha_w)$ and there are no strings passing through m supported at α_w .

3.2.2 Background

3.2.2.1 Gentle algebras and representations

A **quiver** Q is a 4-tuple of the form (Q_0, Q_1, s, t) where Q_0 is *the set of vertices*, Q_1 is *the set of arrows* and $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ are respectively *source* and *target functions*. A quiver is called **finite** if $\#Q_0, \#Q_1 < \infty$. Throughout this article we will suppose that all the quivers we will work with are finite and connected. A **path** of Q is a finite sequence of arrows $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Q_1$ such that $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$. We will write $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ for a path, and for $q \in Q_0$, e_q for the **lazy path** at the vertex q , that is the path staying at q without following any arrow. The **length** of the path p is the number of arrows in it.

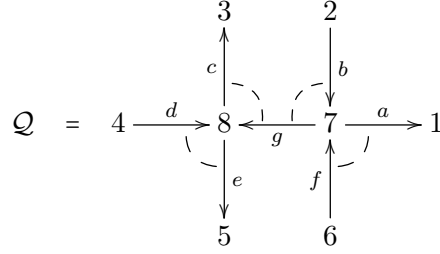
Let \mathbb{K} be a field. Throughout this article, we will suppose that \mathbb{K} is algebraically closed. This is a restriction we need to use the main result of (Garver *et al.*, 2023). They need it because some of their arguments rely on algebraic geometry. The **path algebra** denoted $\mathbb{K}Q$ is the \mathbb{K} -vector space having as a basis all the paths in the quiver Q , together with multiplication given by concatenation of paths. For $l \geq 0$, let denote $\mathbb{K}Q_{\geq l}$ the ideal of $\mathbb{K}Q$ generated by paths of Q of length at least l . An **admissible ideal** I of $\mathbb{K}Q$ is an ideal such that : $\exists N > 0 / \mathbb{K}Q_{\geq N} \subseteq I \subseteq \mathbb{K}Q_{\geq 2}$.

Definition 3.38. A **gentle algebra** is a quotient algebra $\mathbb{K}Q/I$ where :

- Q is a quiver such that there are at most two incoming arrows and at most two outgoing arrows at each vertex.
- I is an admissible ideal generated by some paths of length 2 such that for every arrow $\alpha \in Q_1$ there exists :
 - * at most one arrow β such that $s(\alpha) = t(\beta)$ and $\alpha\beta \in I$;
 - * at most one arrow γ such that $s(\gamma) = t(\alpha)$ and $\gamma\alpha \in I$;
 - * at most one arrow β' such that $s(\alpha) = t(\beta')$ and $\alpha\beta' \notin I$;
 - * at most one arrow γ' such that $s(\gamma') = t(\alpha)$ and $\gamma'\alpha \notin I$.

We will denote a **gentle quiver** by $\mathcal{Q} = (Q, I)$ a quiver together with an ideal such that the algebra $\mathbb{K}\mathcal{Q} := \mathbb{K}Q/I$ is gentle.

Example 3.39. Here is a gentle quiver. We will use the convention to represent elements generating the admissible ideal by dashed lines in a gentle quiver. They are all the paths of length two that are in I .



In this example $I = \langle af, gb, cg, ed \rangle$ and so $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ is the gentle algebra associated to \mathcal{Q} generated as basis by :

- lazy paths : e_1, e_2, \dots, e_8 ;
- arrows : a, b, \dots, g ;
- paths of length 2 : cd, eg, gf, ab ;
- paths of length 3 : egf .

┘

Remark 3.40. We can note that $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ (and $\mathbb{K}\mathcal{Q}$) is graded by the length of the paths.

Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a gentle quiver. A **representation of \mathcal{Q} (over \mathbb{K})** is a pair $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ where X_q is a finite-dimensional \mathbb{K} -vector space for each $q \in Q_0$ and $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \rightarrow X_{t(\alpha)}$ is a \mathbb{K} -linear function for each $\alpha \in Q_1$ such that if $\alpha\beta \in I$ then $X_\alpha \cdot X_\beta = 0$. We can understand this construction as placing a \mathbb{K} -vector space on each vertex q and a \mathbb{K} -linear transformation on each arrow α in \mathcal{Q} . We write $\underline{\dim}(X) = (\dim(X_q))_{q \in Q_0}$ the **dimension vector of X** .

A **morphism ϕ between two representations X and Y** is a tuple of \mathbb{K} -linear transformations $(\phi_q)_{q \in Q_0}$ where $\phi_q : X_q \rightarrow Y_q$ for each $q \in Q_0$ such that, for all $\alpha \in Q_1$, $Y_\alpha \phi_{s(\alpha)} = \phi_{t(\alpha)} X_\alpha$. We can have in mind the following commutative square to understand the previous condition.

$$\begin{array}{ccc}
X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{t(\alpha)} \\
\downarrow \phi_{s(\alpha)} & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\
Y_{s(\alpha)} & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_{t(\alpha)}
\end{array}$$

Let X and Y be two representations of \mathcal{Q} . Write $X \cong Y$ whenever X and Y are **isomorphic**. Denote $X \oplus Y$ the **direct sum of representations X and Y** . A representation $M \neq 0$ is called **indecomposable** if $X \cong 0$ or $Y \cong 0$, whenever $M \cong X \oplus Y$.

Let $\text{rep}(\mathcal{Q})$ denote the category of (finite-dimensional) representations of \mathcal{Q} .

Theorem 3.41. *There is an equivalence of categories between $\text{rep}(\mathcal{Q})$ and the category of modules over $\mathbb{K}\mathcal{Q}$.*

For more details, see for example (Assem *et al.*, 2006, Theorem 1.6 p72).

From now to the end of this subsection, we will recall the combinatorial description of the indecomposable representations of a gentle algebra. With this in mind, we need to introduce some more tools.

Definition 3.42. A *string* of \mathcal{Q} is a finite sequence $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ with $\alpha_i \in Q_1$ for all $i \in \{1, \dots, k\}$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ such that :

- by defining $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ and $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ for any $\alpha \in Q_1$, we have, for all $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- if $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1$, then $\alpha_{i+1}\alpha_i \notin I$; if $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1$, then $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$;
- ρ is reduced : for $i \in \{1, \dots, k-1\}$, if $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1$, then $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

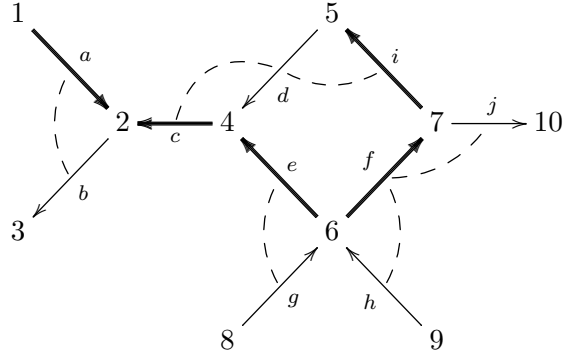
In particular, we can notice that a path is a string.

We write $\ell(\rho) := k$ for the *length* of the string, $s(\rho) := s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ and $t(\rho) := t(\alpha_k^{\varepsilon_k})$. We denote $\text{Supp}_0(\rho)$ the *vertex support* of ρ which is the set of vertices $\{s(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_1^{\varepsilon_1}), t(\alpha_2^{\varepsilon_2}), \dots, t(\alpha_k^{\varepsilon_k})\}$, and $\text{Supp}_1(\rho)$ the *arrow support* of ρ which is the set of arrows $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$.

A *substring* of ρ is a string of the form $\alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ with $1 \leq i \leq j \leq k$, or a lazy path e_q for $q \in \text{Supp}_0(\rho)$. For all strings ρ , we identify ρ and ρ^{-1} . Note that this identification is on purpose of Theorem 3.51. A string ρ of \mathcal{Q} is said to be *maximal* if there is no arrow $\alpha \in Q_1$ such that any of the following $\alpha\rho$, $\alpha^{-1}\rho$, $\rho\alpha$ or $\rho\alpha^{-1}$ is a string.

We can understand a string as a (reduced) walk in \mathcal{Q} such that we can follow a sequence of arrows (of the form $\alpha \in Q_1$) and inverse arrows (of the form α^{-1} with $\alpha \in Q_1$) avoiding consecutive steps that belong to the ideal I and successive steps $\alpha\alpha^{-1}$ or $\alpha^{-1}\alpha$.

Example 3.43. Let us take the following (gentle) quiver $\mathcal{Q} = (Q, I)$.

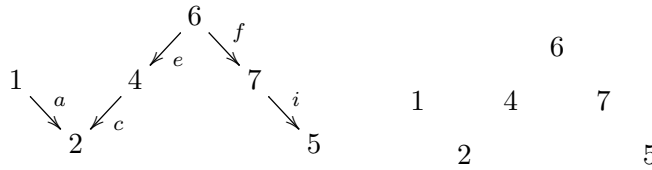


By following the bold arrows, we read the string $\rho = ife^{-1}c^{-1}a$ or $a^{-1}cef^{-1}i^{-1} = \rho^{-1}$ and we can check that it satisfies the previous conditions of the definition. We have $l(\rho) = 5$, $\text{Supp}_0(\rho) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ and $\text{Supp}_1(\rho) = \{a, c, e, f, i\}$. The substrings of ρ are :

- lazy paths : e_q for $q \in \text{Supp}_0(\rho)$;
- arrows : $\text{Supp}_1(\rho)$;
- strings of length 2 : $if, fe^{-1}, ce, a^{-1}c$;
- strings of length 3 : $ife^{-1}, cef^{-1}, a^{-1}ce$;
- strings of length 4 : $ife^{-1}c^{-1}, fe^{-1}c^{-1}a$;
- strings of length 5 : ρ .

In addition, we can see that ρ is a maximal string of \mathcal{Q} : we can neither concatenate any arrow of \mathcal{Q} to ρ at the vertex 1 (as a is the only one arrow incident to 1) nor at the vertex 5 (as $di \in I$).

More visually, we can draw the same string as follows.



Note that by convention arrows always point downwards.

We can choose not to represent the arrows and only keep the sequence of vertices that the string is passing through if there is no ambiguity about the arrows that we have to keep track of, like in this example. \lrcorner

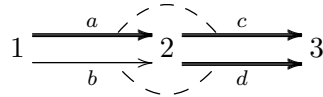
Definition 3.44. A *string representation* $M(\rho)$ of \mathcal{Q} is a representation in $\text{rep}(\mathcal{Q})$ defined as follows :

- Let $v_0 = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ and for all $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- For $q \in Q_0$, $M(\rho)_q$ is the vector space having as basis $\{x_i \mid v_i = q\}$, where the x_i are formal elements;

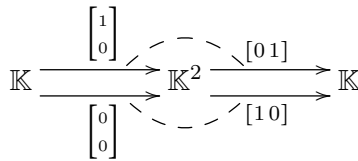
- For $\beta \in Q_1$, $M(\rho)_\beta : M(\rho)_{s(\beta)} \longrightarrow M(\rho)_{t(\beta)}$ is the linear transformation such that :

$$M(\rho)_\beta(x_i) = \begin{cases} x_{i-1} & \text{if } \alpha_i = \beta \text{ and } \varepsilon_i = -1 \\ x_{i+1} & \text{if } \alpha_{i+1} = \beta \text{ and } \varepsilon_{i+1} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Example 3.45. Consider the following gentle quiver.

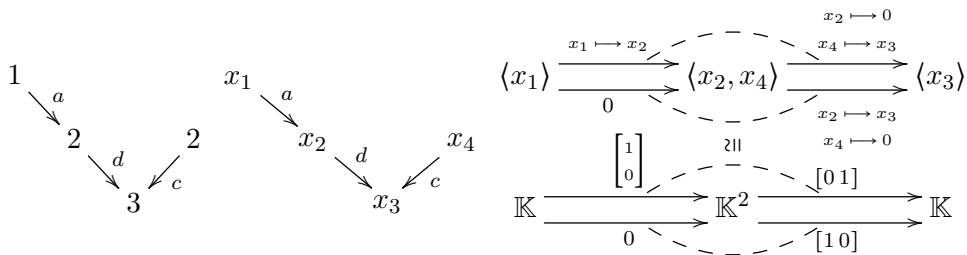


The word $\rho = c^{-1}da$ is a string of \mathcal{Q} and the representation associated to it is :



┌

Remark 3.46. We can understand the construction in a more combinatorial way. To get the string representation $M(\rho)$ associated to a string ρ , we draw the string as Example 3.43, then we can replace each vertex of the string by x_i and finally each arrow defines the direction of the linear map that we will get.



More efficiently, we can prefer to replace each vertex by a copy of the field \mathbb{K} and each arrow by an identity map.

Definition 3.47. A *band* of \mathcal{Q} is a non-lazy string ω such that :

- $s(\omega) = t(\omega)$;

- for all $i \geq 1$, $\omega^i = \underbrace{\omega \dots \omega}_{i \text{ times}}$ is a string of \mathcal{Q} ;
- ω is primitive : ω is not a power of any shorter substring.

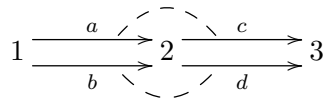
Two bands of \mathcal{Q} , ω and ω' , are said to be **cyclically equivalent**, denoted $\omega \sim_{\text{cyc}} \omega'$ if we can obtain ω' from ω by applying a cyclic permutation to the arrows which define ω .

Definition 3.48. Let $\omega = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ be a band of \mathcal{Q} . Let $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ and an integer $d > 0$. A **band representation** $M(\omega, \lambda, d)$ of \mathcal{Q} is a representation defined as follows :

- let $v_0 = s(\alpha_1^{\varepsilon_1})$ and for $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$;
- for all vertices $q \in Q_0$, $M(\omega, \lambda, d)_q$ is the vector space having as basis $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)} \mid v_i = q\}$ where the $x_i^{(j)}$ are formal elements ;
- for all arrows $\gamma \in Q_1$, $M(\omega, \lambda, d)_\gamma$ is the linear transformation defined as follows :

$$M(\omega, \lambda, d)_\gamma(x_i^{(j)}) = \begin{cases} x_{i-1}^{(j)} & \text{if } \gamma = \alpha_i \text{ for } 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq d \text{ and } \varepsilon_i = -1 \\ \lambda^{-1}x_{k-1}^{(j)} + x_{k-1}^{(j+1)} & \text{if } \gamma = \alpha_k \text{ for } i = 0, 1 \leq j < d \text{ and } \varepsilon_k = -1 \\ \lambda^{-1}x_{k-1}^{(d)} & \text{if } \gamma = \alpha_k \text{ for } i = 0, j = d \text{ and } \varepsilon_k = -1 \\ x_{i+1}^{(j)} & \text{if } \gamma = \alpha_{i+1} \text{ for } 1 \leq i < k-1, 1 \leq j \leq d \text{ and } \varepsilon_i = 1 \\ \lambda x_0^{(j)} + x_0^{(j+1)} & \text{if } \gamma = \alpha_k \text{ for } i = k-1, 1 \leq j < d \text{ and } \varepsilon_k = 1 \\ \lambda x_0^{(d)} & \text{if } \gamma = \alpha_k \text{ for } i = k-1, j = d \text{ and } \varepsilon_k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Example 3.49. Consider the following gentle quiver.



The string $\rho = b^{-1}c^{-1}da$ is a band of \mathcal{Q} . For $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ and $d > 0$, the representation $M(\rho, \lambda, d)$ is isomorphic to the following representation :

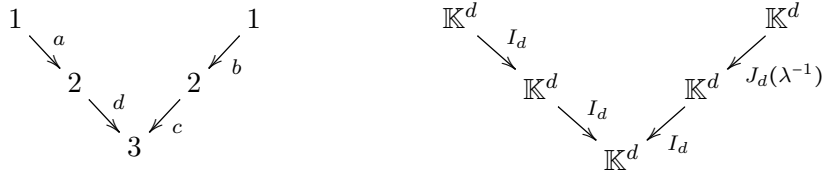
$$\mathbb{K}^d \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_d \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ J_d(\lambda^{-1}) \end{bmatrix}} \end{array} \mathbb{K}^{2d} \begin{array}{c} \xrightarrow{[0 \ I_d]} \\ \xrightarrow{[I_d \ 0]} \end{array} \mathbb{K}^d$$

where $J_d(\lambda^{-1})$ is the following Jordan block :

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & & \\ & 1 & \cdots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

┘

Remark 3.50. Like string representations, we can understand the construction of a band representation by replacing each vertex of the band with a copy of \mathbb{K}^d and each arrow with an identity map or a linear transformation associated to a Jordan block $J_d(\lambda)$ or $J_d(\lambda^{-1})$. However, we identify the first and the last vector spaces.



Now we can state the following theorem that gives us the classification of all indecomposable representations of a gentle quiver.

Theorem 3.51 ((Butler et Ringel, 1987)). *Let \mathbb{K} be an algebraically closed field and $\mathcal{Q} = (Q, I)$ a gentle quiver. Any indecomposable representation of \mathcal{Q} is a string or a band representation of \mathcal{Q} . Moreover :*

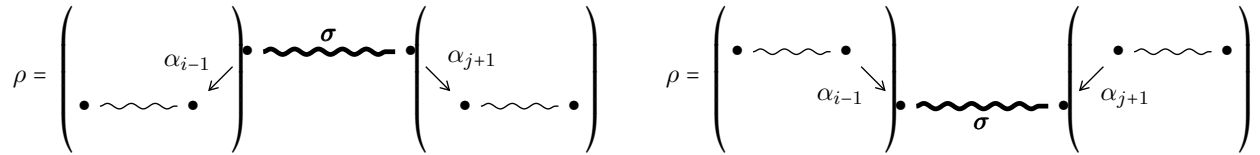
- *A string representation is not isomorphic to a band representation ;*
- *$M(\rho)$ is isomorphic to $M(\rho')$ if and only if $\rho' = \rho^{\pm 1}$;*
- *$M(\omega, \lambda, d)$ is isomorphic to $M(\omega', \lambda', d')$ if and only if $d = d'$ and either $\omega \sim_{cyc} \omega'$ and $\lambda = \lambda'$ or $\omega^{-1} \sim_{cyc} \omega'$ and $\lambda^{-1} = \lambda'$.*

Remark that M.C.R. Butler and C.M. Ringel provide a classification of indecomposable modules over an arbitrary field. However, for simplicity, we restrict to the case that the field is algebraically closed which is the relevant case for us.

Moreover, we also have a good understanding of the morphisms between two string representations of \mathcal{Q} . We just need the following notions.

Definition 3.52. Let $\rho = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ a string of \mathcal{Q} . A substring $\sigma = \alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_i^{\varepsilon_i}$ of ρ is said to be *on the top of ρ* if $i = 1$ or $\varepsilon_{i-1} = -1$, and $j = k$ or $\varepsilon_{j+1} = 1$. Analogically σ is said to be *at the bottom of ρ* if $i = 1$ or $\varepsilon_{i-1} = 1$, and $j = k$ or $\varepsilon_{j+1} = -1$.

We can more easily understand these definitions thanks to the visual representation (mentioned in Example 3.43) of the string ρ .



On the left, we have a representation of a substring σ on the top of ρ , and on the right a representation of a substring σ at the bottom of ρ . Parts in parentheses are optional.

Proposition 3.53 ((Crawley-Boevey, 1989)). *Let ρ and ρ' be two strings of \mathcal{Q} . Then $\text{Hom}(M(\rho), M(\rho')) \cong \mathbb{K}^{\#[\rho, \rho']}$ where $[\rho, \rho']$ is the set of couples (σ, σ') such that the substring σ is on the top of ρ , the substring σ' is at the bottom of ρ' and $\sigma' = \sigma^{\pm 1}$.*

Example 3.54. Consider the following gentle quiver.

$$\mathcal{Q} = 1 \xrightarrow{a} \widehat{2} \xrightarrow{b} 3 \xleftarrow{c} 4$$

Let X and Y be the following representations.

$$X = \mathbb{K}^2 \xrightarrow{[10]} \widehat{\mathbb{K}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}^2$$

$$Y = \mathbb{K} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \widehat{\mathbb{K}^2} \xrightarrow{[01]} \mathbb{K} \longleftarrow 0$$

We can decompose them as a sum of indecomposable representations using string representations of \mathcal{Q} .

$$X \cong M(e_1) \oplus M(a) \oplus M(c)^2 \quad Y \cong M(a) \oplus M(b)$$

We describe $\text{Hom}(X, Y)$ by :

- $\text{Hom}(M(e_1), M(a)) = 0$ because e_1 is the only substring of e_1 (as e_1 is lazy) and e_1 is not at the bottom of a ;
- $\text{Hom}(M(e_1), M(b)) = 0$ because e_1 is not a substring of b ;
- $\text{Hom}(M(a), M(a)) \cong \mathbb{K}a$ as a is the only substring of a which is both on the top and at the bottom of a ;
- $\text{Hom}(M(a), M(b)) = 0$ because the only substring of both a and b , e_2 , is neither on the top of a nor at the bottom of b ;
- $\text{Hom}(M(c), M(a)) = 0$ because there is no substring of both c and a ;
- $\text{Hom}(M(c), M(b)) = 0$ because the only substring of both b and c , e_3 , is not on the top of c .

Thus $\text{Hom}(X, Y) \cong \mathbb{K}$ and the only type of morphisms in this set is of the form

$$\phi = \begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{[1\ 0]} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^2 & = X \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}} & \mathbb{K} & \xleftarrow{0} & 0 & = Y \end{array}$$

with $k \in \mathbb{K}$. ┘

These kinds of morphisms between representations are called **graph maps**. They provide a basis for the morphisms between string representations. However, morphisms exist between band representations that are not linear combinations of graph maps. We do not need to go into more precise statements to describe all the morphisms between band representations in this article, but if the reader is interested, we can refer to (Krause, 1988).

3.2.2.2 Jordan recoverability and canonical Jordan recoverability

Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a gentle quiver and $X \in \text{rep}(\mathcal{Q})$. A **nilpotent endomorphism** $N : X \rightarrow X$ is an endomorphism such that $N^k = 0$ for some integer $k > 0$. We can remark that N is nilpotent if and only if N_q

is a nilpotent linear morphism for all $q \in Q_0$. Let $\text{NEnd}(X)$ denote the set of nilpotent endomorphisms of X . An **integer partition of n** is a finite weakly decreasing sequence $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ of strictly positive integers such that $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. The **size** of an integer partition λ is $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$. We write $\lambda \vdash n$ when λ is a partition of n .

Let $\underline{\dim}(X) = (d_q)_{q \in Q_0}$. For any $N \in \text{NEnd}(X)$, we can consider the Jordan form of N_q at each vertex q . It induces a sequence of partitions $\lambda^q \vdash d_q$. Hence $(\lambda^q)_{q \in Q_0}$ can be considered as the **Jordan form data of N** . We will denote it $\text{JF}(N)$.

The **dominance order** over partitions of an integer n is defined by : for any λ and μ partitions of n , $\lambda \leq \mu$ if $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$ for each $k \geq 1$ where we add zero parts to λ and μ if necessary. We extend this order to any p -tuple of partitions as follows. For $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^p)$ and $\underline{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^p)$ such that λ^i and μ^i are partitions of m_i , we say that $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$ for all $i \in \{1, \dots, p\}$ $\lambda^i \leq \mu^i$.

A. Garver, R. Patrias, and H. Thomas proved the following statement.

Theorem 3.55 ((Garver *et al.*, 2023)). *Let A be a finite-dimensional algebra over an algebraically closed field \mathbb{K} and X be a finite-dimensional (left) module over A . Then the set of nilpotent endomorphisms of X , $\text{NEnd}(X)$, is an irreducible algebraic variety. Furthermore, there is a maximum value of JF on $\text{NEnd}(X)$ and it is attained on a dense open set of $\text{NEnd}(X)$*

As we work with tools that are satisfying exactly the hypotheses of the previous theorem, we can define $\text{GenJF}(X)$ the **generic Jordan form data of X** as this maximal value of JF on $\text{NEnd}(X)$.

For more details about this result, see (Garver *et al.*, 2023, Section 2.2).

Definition 3.56. A subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(\mathcal{Q})$ is called **Jordan recoverable** if, for any tuple of partitions $\underline{\lambda}$, there is at most a unique (up to isomorphism) $X \in \mathcal{C}$ such that $\text{GenJF}(X) = \underline{\lambda}$.

We can have another look at the Example 3.31 to see in a simple case how it works. As we understand from this example, $\text{rep}(\mathcal{Q})$ is not Jordan recoverable in general. A question that naturally arises is to determine which subcategories \mathcal{C} of $\text{rep}(\mathcal{Q})$ satisfy this property.

In the first instance, any subcategory with the property that the dimension vectors of its indecomposable representations are linearly independent is Jordan recoverable. For such subcategories, we can recover X from its dimension vector $\underline{\dim}(X)$.

As we are interested in this kind of subcategory, let $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ be the subcategory additively generated by all the indecomposable representations X of \mathcal{Q} which are supported at the vertex m (that is to say such that $\dim X_m \geq 1$).

Example 3.57. Let us take the following gentle quiver \mathcal{Q} :

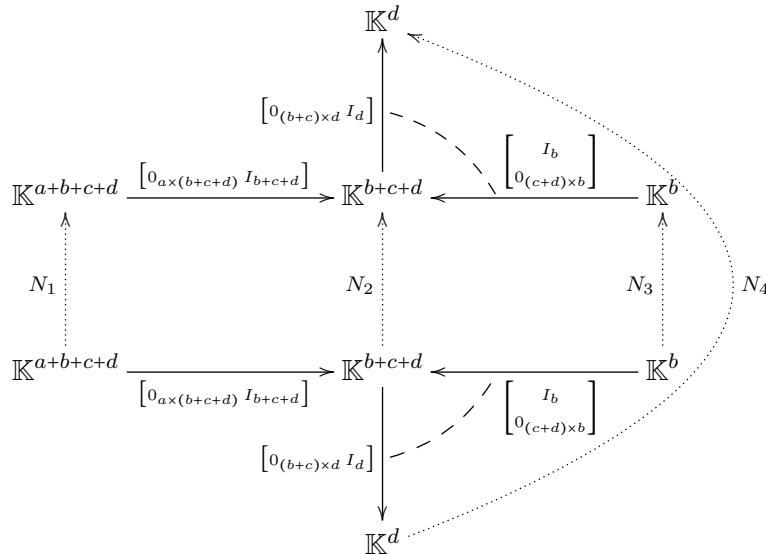
$$\mathcal{Q} = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longleftarrow & 3 \end{array}$$

The subcategory $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},1}$ is generated by the following indecomposable representations.

$$S_1 = \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ \mathbb{K} & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array} \quad R = \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longleftarrow & 0 \end{array} \quad I_2 = \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \xleftarrow{1} & \mathbb{K} \end{array}$$

$$P_1 = \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{K} & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Let $X = S_1^a \oplus I_2^b \oplus R^c \oplus P_1^d$. Let $N = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \mathbf{NEnd}(X)$.



Let $(x_1, \dots, x_{a+b+c+d})$ be a basis of $X_1 = \mathbb{K}^{a+b+c+d}$. By the linear transformations defining X , we can consider $(x_{a+1}, \dots, x_{a+b+c+d})$ as a basis of $X_2 = \mathbb{K}^{b+c+d}$, $(x_{a+1}, \dots, x_{a+b})$ as a basis of $X_3 = \mathbb{K}^b$ and $(x_{a+b+c+1}, \dots, x_{a+b+c+d})$ as a basis of $X_4 = \mathbb{K}^d$. Using the commutative square relations that N_1, N_2, N_3 and N_4 have to satisfy, we get :

- $N_2(x_i) = \begin{bmatrix} 0_{a \times (b+c+d)} & I_{b+c+d} \end{bmatrix} N_1(x_i)$ for all $i \in \{a+1, \dots, a+b+c+d\}$;
- $N_3(x_i) = N_2(x_i)$ for all $i \in \{a+1, \dots, a+b\}$;
- $N_4(x_i) = \begin{bmatrix} 0_{(b+c) \times d} & I_d \end{bmatrix} N_2(x_i)$ for all $i \in \{a+b+c+1, \dots, a+b+c+d\}$.

We deduce that once we define N_1 we define the nilpotent endomorphism N . Let us take N_1 defined by :

$$N_1(x_i) = \begin{cases} x_{i-1} & \text{for } 2 \leq i \leq a+b+c+d \\ 0 & \text{for } i = 1 \end{cases}$$

We can see that N_1 allows us to define $N \in \text{NEnd}(X)$ and :

$$\text{JF}(N) = ((a+b+c+d), (b+c+d), (c), (d))$$

Moreover N is a nilpotent endomorphism that attained the maximal element (with respect to \trianglelefteq) of $\text{NEnd}(X)$ that we can have. Hence, by (Garver *et al.*, 2023, Theorem 2.3), we can conclude that

$$\text{GenJF}(X) = ((a+b+c+d), (b+c+d), (c), (d))$$

It is easy to see that we can recover X from $\text{GenJF}(X)$ just by the fact that from $\underline{\dim}(X)$ we can already recover the representation in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},1}$. Thus $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},1}$ is Jordan recoverable. \lrcorner

However we can ask ourselves in general how we can recover X from its generic Jordan form data.

Suppose that $\underline{\lambda} = \text{GenJF}(X) = (\lambda^q)_{q \in \mathcal{Q}_0}$. From that we get a tuple $d_q = |\lambda^q|$, the dimension of the vector space X_q at each vertex q . Let Y_q be a vector space of dimension d_q and N_q a nilpotent endomorphism of Y_q with Jordan blocks size given by λ^q .

Let $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ be the representations $Y = ((Y_q)_{q \in \mathcal{Q}_0}, (Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Q}_1})$ such that the Y_q are defined as above and $N = (N_q)_{q \in \mathcal{Q}_0}$ define a nilpotent endomorphism of Y . (Garver *et al.*, 2023) show that, under some conditions,

$\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ is an irreducible variety and then they deduce that there exists a dense open set $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ such that for any representation in O , the dimension vectors of the indecomposable summands are well-defined. However, in our general case, this statement does not hold.

Example 3.58. Let \mathcal{Q} be the Kronecker quiver.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 2$$

Let $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda} = ((1), (1)))$. So Y is of the following form

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{Y_a} \\ \xrightarrow{Y_b} \end{array} \mathbb{K}$$

with $Y_a : x \mapsto k_1x$ and $Y_b : x \mapsto k_2x$ and $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$.

Hence Y is isomorphic to one of the following isomorphism classes :

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathbb{K} \quad \mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{1} \end{array} \mathbb{K} \quad \mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \mathbb{K} \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

with each distinct value of α giving rise to a distinct isomorphism class of representations from Theorem 3.51.

More concretely :

- one isomorphism class is given by taking $k_1 = 0$ and $k_2 = 0$;
- another one by taking $k_1 = 0$ and $k_2 \neq 0$: it corresponds to take $k_1 = 0$ and $k_2 = 1$ up to isomorphism ;
- for each specific value of α , we have an isomorphism class by taking $k_2 = \alpha k_1$ (if $\alpha = 0$, we put $k_2 = 0$) and $k_1 \neq 0$: it corresponds to take $k_1 = 1$ and $k_2 = \alpha$ up to isomorphism.

None of those classes gives a dense set in $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$. Thus there is no generic choice of a representation which have a generic Jordan form $((1), (1))$. ┘

All is not lost. Depending on the tuple of partitions $\underline{\lambda}$ and the gentle quiver we study, we can still have a generic choice of a representation $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q})$. One of the purposes of this article is to prove, by studying a specific kind of subcategories, and under some conditions on the quiver, we still have this property.

Definition 3.59. A subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ is said to be *canonically Jordan recoverable* if, for any $X \in \mathcal{C}$, there exists a dense open set $O \subset \text{rep}(Q, \text{GenJF}(X))$ such that all the representations in O are isomorphic to X .

Note that to have canonical Jordan recoverability we need Jordan recoverability. However, canonical Jordan recoverability is a more restrictive condition (see Example 3.32)

Example 3.60. Let $Q = (Q, I)$ be the following gentle quiver.

$$1 \xrightarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 3$$

We have $\mathcal{C}_{Q,2} = \text{add}(I_2, S_2, P_2)$ where :

$$I_2 = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \rightarrow 0, S_2 = 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0, P_2 = 0 \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

Let $X = I_2^a \oplus S_2^b \oplus P_2^c \in \mathcal{C}_{Q,2}$.

Let $N = (N_1, N_2, N_3)$ a generic nilpotent endomorphism.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^a & \xrightarrow{X_\alpha} & \mathbb{K}^{a+b+c} & \xrightarrow{X_\beta} & \mathbb{K}^c \\ \downarrow N_1 & & \downarrow N_2 & & \downarrow N_3 \\ \mathbb{K}^a & \xrightarrow{X_\alpha} & \mathbb{K}^{a+b+c} & \xrightarrow{X_\beta} & \mathbb{K}^c \end{array}$$

By direct calculation, inspired by Example 3.33, we get

$$\text{GenJF}(X) = ((a), (a + b + c), (c)).$$

Let $Y \in \mathcal{C}_{Q,2}$ such that $\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(X)$. Clearly we can recover the vector spaces that we have at each vertex. By linear independence of dimension vectors of indecomposable representations that generate $\mathcal{C}_{Q,2}$, and by the following

$$\underline{\dim}(Y) = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c \end{pmatrix} = a \times \underline{\dim}(I_2) + b \times \underline{\dim}(S_2) + c \times \underline{\dim}(P_2)$$

we can conclude that $Y = I_2^a \oplus S_2^b \oplus P_2^c$. That is why $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},2}$ is Jordan recoverable.

We will prove now that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},2}$ is canonically Jordan recoverable. Let us take a generic nilpotent endomorphism of the form $\lambda = ((a), (a+b+c), (c))$, $N = (N_1, N_2, N_3)$. By the dimension vector we can extract from λ , we can assure that Y is of the form

$$Y \cong \mathbb{K}^a \xrightarrow{Y_\alpha} \mathbb{K}^{a+b+c} \xrightarrow{Y_\beta} \mathbb{K}^c$$

with Y_α, Y_β still to find.

Let (x_1, \dots, x_a) , (y_1, \dots, y_{a+b+c}) and (z_1, \dots, z_c) be adapted bases for the respective nilpotent endomorphisms N_1, N_2 and N_3 associated to each vector space Y_1, Y_2 and Y_3 .

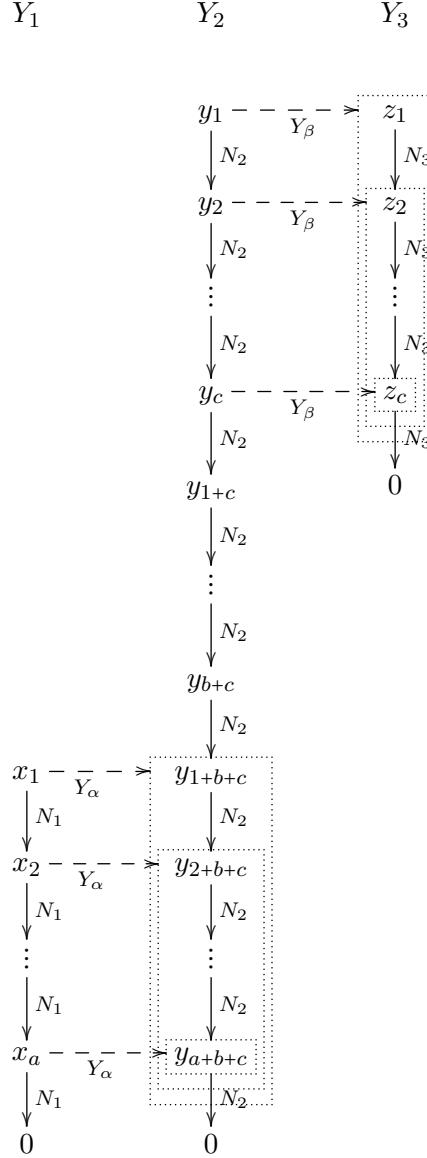
By commutativity relations, we have :

- Y_α is completely defined by the image of x_1 ;
- $Y_\alpha(x_1) \in \text{Ker}(N^a)$, which means

$$Y_\alpha(x_1) = \alpha_1 y_{1+b+c} + \dots + \alpha_a y_{a+b+c} \text{ for } \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ for } 1 \leq i \leq a ;$$

- As Y_α has to be chosen generically, we have $\alpha_1 \neq 0$ and Y_α is injective ;
- Y_β is completely defined by the image of y_1 ;
- $Y_\beta(y_1) = \beta_1 z_1 + \dots + \beta_c z_c$ with $\beta_j \in \mathbb{K}$ for $1 \leq j \leq c$;
- As Y_β has to be chosen generically, we have $\beta_1 \neq 0$ and Y_β is surjective ;
- The relation $Y_\beta \circ Y_\alpha = 0$ is satisfied for free.

The following diagram sums up the previous points.

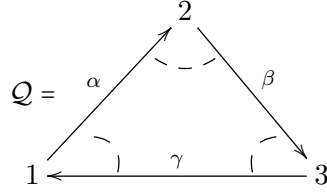


Hence we conclude that $Y \cong I_2^a \oplus S_2^b \oplus P_2^c = X$.

Thus $\mathcal{C}_{Q,2}$ is canonically Jordan recoverable. ┘

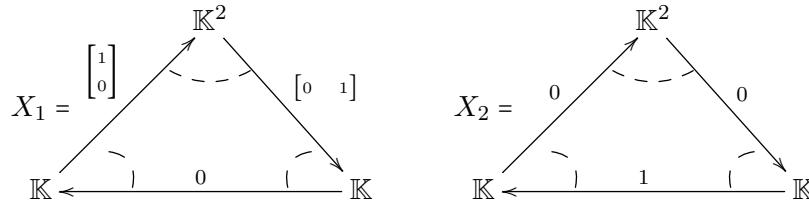
Remark 3.61. It is surprising to see that from any generic Jordan form we can get in the last example, we can recover the representation. Moreover, the fact that the relation $(Y_\beta Y_\alpha = 0)$ is obtained automatically from generic choices of morphisms is noteworthy. The reader is invited to have another look at the remarks done below Example 3.33.

Remark 3.62. We can also take notice that if we add an arrow γ between 1 and 3 whatever its orientation and relations that we could add, then we lose the fact that $\mathcal{C}_{Q,2}$ is canonically Jordan recoverable. More explicitly, let us take the following quiver.



The subcategory $\mathcal{C}_{Q,2}$ is Jordan recoverable as the dimension vectors of the indecomposable objects (I_2, P_2 and S_2) are linearly independent. Note that if we take $X = I_2^a \oplus S_2^b \oplus P_2^c$ then we have $\text{GenJF}(X) = ((a), (a+b+c), (c))$.

However, by taking $X = I_2 \oplus P_2$, there is no generic choice in $\text{rep}(Q, ((1), (2), (1)))$. After some calculus, we note that we have two isomorphism classes which come naturally from generic restrictions :



We have $X_1 \cong X \not\cong X_2$. So we conclude that there is no dense open set O in $\text{rep}(Q, ((1), (2), (1)))$ such that any representation Y is isomorphic to X . Hence $\mathcal{C}_{Q,2}$ is not canonically Jordan recoverable.

Now we introduce the following remarkable notion.

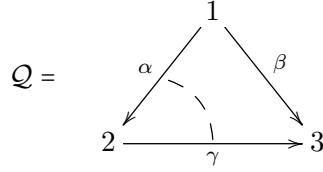
Definition 3.63. A *minuscule* vertex $m \in Q_0$ of Q is a vertex such that, for any indecomposable representation $X \in \text{rep}(Q)$, we have $\dim(X_m) \leq 1$.

For gentle algebras, we can characterize minuscule vertices using combinatorial tools introduced at the end of the previous subsection.

Proposition 3.64. Let $Q = (Q, I)$ be a gentle algebra. A vertex $m \in Q_0$ is minuscule if and only if each string of Q passes through m at most once.

Proof. This is a trivial consequence of the definition above and Theorem 3.51. ■

Example 3.65. Consider the following gentle quiver.



The string $\rho = \alpha\beta^{-1}\gamma$ is the only maximal string of Q and all the strings of Q are substrings of ρ . Hence 1 and 3 are minuscule vertices of Q , but 2 is not. \lrcorner

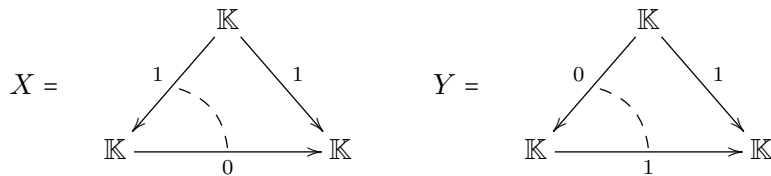
The fact that a vertex m is minuscule seems to be a crucial criterion to get the subcategory $\mathcal{C}_{Q,m}$ to be canonically Jordan recoverable. The following recent result highlights this fact.

Theorem 3.66 ((Garver *et al.*, 2023, Theorem 1.3)). *If Q is a Dynkin quiver and m is a minuscule vertex, then $\mathcal{C}_{Q,m}$ is canonically Jordan recoverable.*

It seems that m has to be minuscule if we want to have canonical Jordan recoverability or Jordan recoverability of $\mathcal{C}_{Q,m}$; we will notice this point at the beginning of the proof (see Remark 3.74). However, in our gentle case, this condition is not sufficient.

Example 3.67. Let us take again the gentle quiver from the previous example.

For any vertex $m \in \{1, 2, 3\}$, we have the following indecomposable representations that are in $\mathcal{C}_{Q,m}$.



We can easily check that $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = ((1), (1), (1))$ and consequently $\mathcal{C}_{Q,m}$ is not Jordan recoverable, even though 1 and 3 are minuscule. \lrcorner

Let us see a less trivial example.

Example 3.68. Consider the following gentle quiver.

$$1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{l} \xrightarrow{b} 3 \\ \xrightarrow{c} 3 \end{array}$$

We can easily check that the only vertex which is minuscule is 1. If we take the following representations

$$X = \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 0}_{=M(1)} \oplus \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^2}_{=M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & & \\ & & 2 & \\ & & & c & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & c & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}}$$

and

$$Y = \underbrace{(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K})^2}_{M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & & \\ & & 2 & \\ & & & c & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}}$$

then we get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = ((2), (2), (2))$. ┘

From these last examples, it could seem that we have to work with a special kind of quivers to get what we want, those which have only minuscule vertices. However it is more complicated than that. We can have gentle quivers with only minuscule vertices but with some $\mathcal{C}_{Q,m}$ which are still neither canonically Jordan recoverable (as we already saw in Remark 3.62) nor Jordan recoverable.

Example 3.69. Let us take again the quiver of Example 3.57.

$$Q = \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \\ b \mid \swarrow \\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3 \end{array}$$

We can check that all the vertices of \mathcal{Q} are minuscule.

We can easily see that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},3}$ and $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},4}$ are (canonically) Jordan recoverable for the same reasons that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},1}$ is. However, surprisingly, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},2}$ is not Jordan recoverable, even if 2 is a minuscule vertex and \mathcal{Q} is derived equivalent to an A_4 -Dynkin type quiver. Indeed with these two following representations in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},2}$:

$$\begin{aligned} \bullet X &= M \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \searrow^b & & \\ & & 4 & \\ & & & \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \searrow^a & & \\ & & 2 & \\ & & & \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 1 & & & 3 \\ & \searrow^a & & \swarrow_c \\ & & 2 & \\ & & & \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & \searrow^c & & \\ & & 2 & \\ & & & \end{pmatrix}; \\ \bullet X' &= M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \searrow^a & & \\ & & 2 & \\ & & & \searrow^b \\ & & & & 4 \end{pmatrix} \oplus M(2) \oplus M \begin{pmatrix} 1 & & & 3 \\ & \searrow^a & & \swarrow_c \\ & & 2 & \\ & & & \end{pmatrix} \oplus M \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & \searrow^c & & \\ & & 2 & \\ & & & \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

we get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(X') = ((2), (3, 1), (2), (1))$. ┘

3.2.3 Proof of the main results

We recall and reformulate the main results that we will prove.

Theorem 3.70. *Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a finite connected gentle quiver and $m \in Q_0$. The subcategory $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable if and only if m satisfies the following conditions :*

- (i) *For any pair of strings ρ and ν passing through m , there is no arrow $\alpha \in Q_1$ such that $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$ and $t(\alpha) \in \text{Supp}_0(\nu)$;*
- (ii) *At least one of the two following conditions :*
 - (a) *There is at most one arrow $\alpha \in Q_1$ such that $s(\alpha) = m$, and there is at most one arrow $\beta \in Q_1$ such that $t(\beta) = m$; if α and β both exist then $\alpha\beta \in I$;*
 - (b) *There is at most one string of \mathcal{Q} maximal by inclusion and passing through m .*

Theorem 3.71. *Let $\mathcal{Q} = (Q, I)$ be a finite connected gentle quiver and $m \in Q_0$. The subcategory $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is Jordan recoverable if and only if m satisfies the point (ii) of Theorem 3.70 and :*

- (i*) *The strings that start at m are uniquely determined by their endpoint.*

3.2.3.1 Proof of Theorem 3.36

To begin with, we will prove the following little lemma.

Lemma 3.72. *Let m be a vertex of the quiver \mathcal{Q} . We have the following assertions :*

- *If m satisfies (i) then m satisfies (i*);*

- If m satisfies (i^*) then m satisfies the following :

- (o) Any string passing through m passes through any vertex of \mathcal{Q} at most once.

- If m satisfies (o) then m is minuscule.

Remark 3.73. The condition (o) prevents, in particular, the existence of bands passing through m .

Proof. Let us prove first that (i) implies (i^*) by proving the contrapositive. Let us assume that m does not satisfy (i^*) .

By hypothesis, there exist ρ and ν two distinct strings such that $s(\nu) = s(\rho) = m$ and $t(\nu) = t(\rho)$. In the set S of such pairs of strings (ρ, ν) , let us consider a pair $(\rho_0, \nu_0) \in S$ minimal with respect to the sum of the lengths of the strings. Up to exchanging the role of ρ_0 and ν_0 , we can assume that $\ell(\rho_0) \leq \ell(\nu_0)$.

First we can note that ν_0 cannot be a lazy path. Next, by construction of our strings, there exist an arrow α , $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ and a substring ν' such that $\nu_0 = \alpha^\varepsilon \nu'$ and $\alpha \notin \text{Supp}_1(\nu') \cup \text{Supp}_1(\rho_0)$; else we could construct a substring σ of ρ_0 such that $(\sigma, \nu') \in S$ – which leads us to a contradiction.

Thus ρ_0 and ν' are two strings such that there is an arrow α which satisfies :

- $s(\alpha^\varepsilon) = t(\nu')$, and so $s(\alpha^\varepsilon) \in \text{Supp}_0(\nu')$;
- $t(\alpha^\varepsilon) = t(\rho_0)$ and consequently $t(\alpha^\varepsilon) \in \text{Supp}_0(\rho_0)$;
- $\alpha \notin \text{Supp}_1(\nu') \cup \text{Supp}_1(\rho_0)$.

We can conclude that m does not satisfy (i) .

Secondly we show that (i^*) implies (o) by proving the contrapositive. Let us assume that m does not satisfy (o).

Then there exists a string μ passing through m and passing through a vertex at least twice. Let T be the set of such strings. We can consider a string μ_0 minimal by inclusion in T . By hypothesis, μ_0 is not lazy and there is only one vertex in Q_0 which μ_0 is passing through at least twice. Up to replacing μ_0 by its inverse, we can affirm this vertex is $t(\mu_0)$ and μ_0 is passing through it exactly twice.

Let us construct two distinct strings ρ and ν such that $s(\rho) = s(\nu) = m$ and $t(\rho) = t(\nu)$ from μ_0 . We have to distinguish the following cases :

- if $s(\mu_0) = m = t(\mu_0)$: we can take $\rho = e_m$ and $\nu = \mu_0$;
- if $s(\mu_0) = m \neq t(\mu_0)$: we can consider ρ to be the substring of μ_0 minimal by inclusion such that $s(\rho) = m$ and $t(\rho) = t(\mu_0)$, and $\nu = \mu_0$;

- if $s(\mu_0) \neq m \neq t(\mu_0)$: hence $s(\mu_0) = t(\mu_0)$! That is why we can write $\mu_0 = \rho\nu^{-1}$ where ρ and ν are two strings satisfying what we want.

Thus m does not satisfy (i^*) .

Finally (o) implies minusculeness by using Proposition 3.64. ■

Corollary 3.74. *Theorem 3.71 implies that m must be minuscule in order to get $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ Jordan recoverable.*

Remark 3.75. We already saw that is not sufficient (see Remark 3.62 or Example 3.69).

Now let us prove the main theorem. First we show that these conditions are sufficient.

Proposition 3.76. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i) and $(ii)(b)$. Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable.*

Proof. Let m be as supposed. By (i) , which implies (o) by the previous lemma, and the finiteness of \mathcal{Q} , there exists at least one string maximal by inclusion in the set of strings that pass through m . By $(ii)(b)$, it is unique.

Let ρ be the obtained string. If ρ is e_m , it means that $\mathcal{Q} \cong A_1$ and we conclude easily. If $\ell(\rho) > 0$, we can consider the (gentle) quiver $\mathcal{R} = (R, J)$ with :

- $R_0 = \text{Supp}_0(\rho)$ and $R_1 = \text{Supp}_1(\rho)$;
- $\sigma, \tau : R_1 \longrightarrow R_0$ the source and target functions which coincide with s and t on $R_1 \subset Q_1$;
- $J = \{0\}$.

By construction \mathcal{R} is a A_n -Dynkin type quiver (where $n = \ell(\rho) + 1$) and by (i) , for any arrow $\alpha \in Q_1 \setminus \text{Supp}_1(\rho)$, we get $s(\alpha) \notin \text{Supp}_0(\rho)$ or $t(\alpha) \notin \text{Supp}_0(\rho)$, and therefore, for any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, $X_{s(\alpha)} = 0$ or $X_{t(\alpha)} = 0$. So X_α is a zero-morphism. Thus any $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q})$ such that $\dim(Y) = \dim(X)$ has to satisfy $Y_\alpha = 0$. Such an observation allows us to say that we only have to focus on what is going on in \mathcal{R} .

Then to know if $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable amounts to knowing if $\mathcal{C}_{\mathcal{R},m}$ is. By Theorem 3.66, we can conclude that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable. ■

Lemma 3.77. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying $(ii)(a)$. Let $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ be the set of all the strings of \mathcal{Q} that pass through m . Then for any string $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$, $s(\rho) = m$ or $s(\rho^{-1}) = m$.*

Proof. This follows immediately from the hypotheses. ■

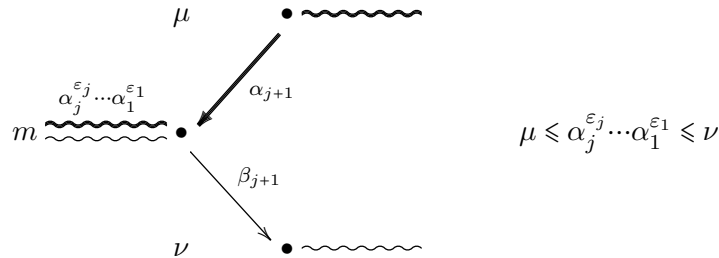
Proposition 3.78. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i^*) and $(ii)(a)$. Then for any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, $\text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in \mathcal{Q}_0}$. That is to say, the Jordan form of a generic nilpotent endomorphism of X at each vertex consists of a single block.*

Proof. Let m be as supposed. By the previous lemma, we get that any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$, up to inverse, starts at m and can be identified by its ending vertex.

Now we will define a total order on $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$. This order was first introduced by Sheila Brenner (Brenner, 1986) and then reformulated and used in particular by Jan Schroër in his thesis (Schroër, 1998). Let $\mu = \alpha_k^{\varepsilon_k} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ and $\nu = \beta_p^{\xi_p} \dots \beta_1^{\xi_1}$ be two strings of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$. If $\alpha_1 = \beta_1$, let j be the maximal integer such that $\alpha_i = \beta_i$ for all $1 \leq i \leq j$; otherwise put $j = 0$. We will say that $\mu \leq \nu$ if and only if :

- if $j < \min(k, p)$ then $\varepsilon_{j+1} = -1$ and $\xi_{j+1} = 1$;
- if $j = k < p$ then $\xi_{j+1} = 1$;
- if $j = p < k$, then $\varepsilon_{j+1} = -1$;
- or if $j = p = k$.

We can have in mind the following drawing.



We can easily check that we have a total order relation.

By Theorem 3.51, any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ corresponds to an indecomposable representation of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, and vice-versa. Moreover, by (i^*) , for any pair of strings $\mu, \nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $\mu \leq \nu$, there is a unique common substring $\alpha_j^{\varepsilon_j} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ which is at the bottom of μ and on the top of ν .

Such observations allow us to define a relation \leq on indecomposable representations of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ as follows : for any pair of indecomposable representations $X, Y \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, we have $X \leq Y$ if and only if there exists

a non-zero morphism from Y to X . Then $\mu \leq \nu$ if and only if $M(\mu) \leq M(\nu)$ as the only non-zero morphism (up to a scalar) from $M(\nu)$ to $M(\mu)$ corresponds to the substring $\alpha_j^{\varepsilon_j} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$, by Proposition 3.53. Indeed we note that $\alpha_j^{\varepsilon_j} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ is the unique common substring, maximal by inclusion, of μ and ν as a direct consequence of Lemma 3.77. As a result, we translate the total order on strings of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ to a total order on indecomposable representations of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$.

By (i^*) , $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ is a finite set and so is the isomorphism classes of indecomposable representations in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$. Let $X(d) \leq \dots \leq X(1)$ be the indecomposable representations contained in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$. Consider a decomposition of $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ as a sum of string modules

$$X = \bigoplus_{i=1}^d X(i)^{\delta_i}$$

with $\delta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for $1 \leq i \leq d$. We choose a basis for each X_q adapted to this decomposition, so that the maps X_α are given by matrices with at most one non-zero entry in each row or column, and all the non-zero entries are equal to 1. Note that this implies that the chosen basis of each X_q can be identified with a subset of the basis of X_m .

We now define an order on the basis of X_m (and thus by restriction on the basis of each X_q). Each basis element belongs to a particular string in the string decomposition. Then we fix a total order extending the total order \leq we already defined on strings. In other words, the basis elements of X_m corresponding to $X(i)$ are $x_{\delta_1+\dots+\delta_{i-1}+1}, \dots, x_{\delta_1+\dots+\delta_{i-1}+\delta_i}$. By our definition of the order \leq , we observe that the basis of X_q consists of $x_{\delta_1+\dots+\delta_{i-1}+1}, \dots, x_{\delta_1+\dots+\delta_j}$ for some $1 \leq i \leq j \leq d$.

Let us consider the following linear transformations at each vertex q , inspired by Example 3.57 :

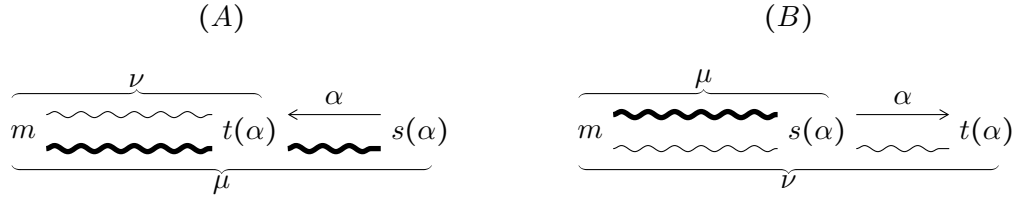
$$N_q(x_k) = \begin{cases} x_{k-1} & \text{if } \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} + 2 \leq k \leq \delta_1 + \dots + \delta_j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and we define $N_q = 0$ if $X_q = 0$.

By construction, if $N = (N_q)$ is a well-defined endomorphism, then it is nilpotent. Let us check that N is an endomorphism of X . So we want to prove that for any $\alpha \in Q_1$,

$$(\diamond) : X_\alpha N_{s(\alpha)} = N_{t(\alpha)} X_\alpha$$

Let $\alpha \in Q_1$. We can note that if $X_{s(\alpha)} = 0$ or $X_{t(\alpha)} = 0$ then (\diamond) is automatically satisfied. Suppose that $X_{s(\alpha)} \neq 0$ and $X_{t(\alpha)} \neq 0$. So there is a pair of strings $\mu, \nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $t(\mu) = s(\alpha)$ and $t(\nu) = t(\alpha)$. As any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ is characterized by its ending vertex, then we have either (A) : $\mu = \alpha^{-1}\nu$ or (B) : $\nu = \alpha\mu$.



In either configuration we get $\mu \leq \nu$. Hence, as strings correspond to indecomposable representations, if $X_{s(\alpha)}$ is generated by $(x_{\delta_1+\dots+\delta_{i_1}+1}, \dots, x_{\delta_1+\dots+\delta_{j_1}})$ and if $X_{t(\alpha)}$ is generated by $(x_{\delta_1+\dots+\delta_{i_2}+1}, \dots, x_{\delta_1+\dots+\delta_{j_2}})$, then :

- if we are in the configuration (A) : $i_1 = i_2 < j_1 < j_2$;
- otherwise in the configuration (B) : $i_1 < i_2 < j_1 = j_2$.

We easily check in each configuration, the square corresponding to the arrow α is commutative. Consequently we get (\diamond) for any α , and we conclude N is a nilpotent endomorphism.

By construction, we easily get that $\text{JF}(N) = ((\dim(X_q)))_{q \in Q_0}$. This $\#Q_0$ -tuple of partitions is the maximal one (in the sense of \leq order) that we can attain among all the Jordan forms we can have from any $N' \in \text{NEnd}(X)$. Hence $\text{GenJF}(X) = ((\dim(X_q)))_{q \in Q_0}$ as claimed (see Theorem 3.55 or (Garver et al., 2023, Section 2.2)). ■

The corollary below will be useful to prove Theorem 3.37.

Corollary 3.79. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i^*) and $(ii)(a)$. Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is Jordan recoverable.*

Proof. By previous proposition, the dimension vectors of the indecomposable representations of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ are linearly independent. So we get for free that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is Jordan recoverable. ■

Here we want to establish a stronger result.

Lemma 3.80. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i^*) and $(ii)(a)$. Define $\Delta : Q_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ such that for any $q \in Q_0$:*

$$\Delta(q) = \begin{cases} k & \text{if there exists a string } \rho \text{ such that } \ell(\rho) = k, s(\rho) = m \text{ and } t(\rho) = q \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then Δ is well-defined. Moreover for any pair of arrows α, β such that $\beta\alpha \in I$ and

$$\Delta(s(\beta)) \leq \min(\Delta(t(\beta)), \Delta(s(\alpha))), \quad (\otimes)$$

and for any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, we have :

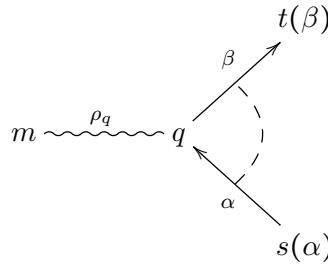
$$\dim X_{s(\beta)} \geq \dim X_{t(\beta)} + \dim X_{s(\alpha)}. \quad (\otimes)$$

Proof. Let m be as supposed. As m satisfies (i^*) by Lemma 3.72, then any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$, up to inverse, starts at m and is characterized by its ending vertex by Lemma 3.77. So Δ is well-defined.

Let $\alpha, \beta \in Q_1$ such that $\beta\alpha \in I$ and (\otimes) . Put $q = s(\beta) = t(\alpha)$. Obviously if $\Delta(q) = \infty$ then for any representation X in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ we have $X_q = X_{s(\alpha)} = X_{t(\beta)} = 0$ and we conclude \otimes .

Assume that $\Delta(q) < \infty$. There exists a string $\rho_q \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ unique by (i^*) such that $t(\rho_q) = q$. Note that $s(\alpha)$ and $t(\beta)$ are not in $\text{Supp}_0(\rho_q)$ by (\otimes) . Then ρ_q does not end by α or β^{-1} .

By gentleness of \mathcal{Q} , $\beta\rho_q$ and $\alpha^{-1}\rho_q$ are strings of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$. Thus $\Delta(s(\alpha)) = \Delta(t(\beta)) = \Delta(q) + 1$.



Moreover, by (i^*) we can assert that :

- there is no string $\nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $s(\alpha)$ and $t(\beta)$ are both in $\text{Supp}_0(\nu)$: if such a string exists, the minimal substring in $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ passing through $s(\alpha)$ and $t(\beta)$ must end at $s(\alpha)$, or

$t(\beta)$, and this raises a contradiction with (i^*) ;

- For any string μ such that $t(\beta) \in \text{Supp}_0(\mu)$ or $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\mu)$, then $q \in \text{Supp}_0(\mu)$.

Let us consider $\pi_m(r) = \{\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m) \mid r \in \text{Supp}_0(\rho)\}$ for $r \in Q_0$. Following our previous assertions, we have $\pi_m(s(\alpha)) \cap \pi_m(t(\beta)) = \emptyset$ and $\pi_m(s(\alpha)) \cup \pi_m(t(\beta)) \subseteq \pi_m(q)$.

Let $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$. Then we can decompose X and write

$$X = \bigoplus_{\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)} M(\rho)^{d_\rho}$$

for some $d_\rho \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for any $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$. Again thanks to (i^*) , for any $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ and for any $r \in \text{Supp}_0(\rho)$, $\dim M(\rho)_r = 1$. Thus :

$$\dim X_q = \sum_{\rho \in \pi_m(q)} d_\rho \geq \sum_{\rho \in \pi_m(s(\alpha))} d_\rho + \sum_{\rho \in \pi_m(t(\beta))} d_\rho = \dim X_{s(\alpha)} + \dim X_{t(\beta)}$$

■

Corollary 3.81. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i^*) and $(ii)(a)$. For any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, and for all $\beta \in Q_1$ such that $\Delta(s(\beta)) \leq \Delta(t(\beta))$ then $\dim X_{s(\beta)} \geq \dim X_{t(\beta)}$. Moreover, for all $\alpha \in Q_1$ such that $\Delta(t(\alpha)) \leq \Delta(s(\alpha))$ then $\dim X_{t(\alpha)} \geq \dim X_{s(\alpha)}$.*

Proof. This is an obvious consequence of Lemma 3.80. ■

Lemma 3.82. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i) and $(ii)(a)$. For any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ and for any $\alpha \in Q_1$, we have X_α is injective or surjective.*

Proof. Let m be as assumed. Let $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ and $\alpha \in Q_1$. We have to treat two cases.

First assume that there is no string $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho)$. Hence, by (i^*) , $s(\alpha)$ is not in the vertex support of any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$, or $t(\alpha)$ is not in the vertex support of any string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$. Thus $X_{s(\alpha)} = 0$ or $X_{t(\alpha)} = 0$ which implies either way that X_α is injective or surjective respectively.

Now assume that there exists a string $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho)$. Using bases adapted to the

decomposition of X by string modules of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ as described in the proof of Proposition 3.78, we can note that X_{α} is a linear transformation of maximal rank. Hence X_{α} is injective or surjective. ■

Lemma 3.83. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i) and (ii)(a). Let $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ and $\underline{\lambda} = \text{GenJF}(X)$. Then there exists a dense open set $\Omega \subseteq \text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ such that any representation $Y \in \Omega$ has all its maps Y_{α} to be injective or surjective for any $\alpha \in Q_1$.*

Proof. Let X and $\underline{\lambda}$ be as assumed. By Proposition 3.78, we have $\underline{\lambda} = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$. For $q \in Q_0$, consider $Z_q = \mathbb{K}^{\dim X_q}$ endowed with a fixed nilpotent endomorphism N_q of type $\lambda^q = (\dim X_q)$ for all $q \in Q_0$. We also fix for each Z_q an adapted basis to N_q .

To study the set $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$, we consider representations $Y = ((Z_q)_{q \in Q_0}, (Y_{\alpha})_{\alpha \in Q_1})$ such that $N = (N_q)_{q \in Q_0}$ is a well-defined endomorphism. We can show that there exists a dense open set Ω in $\text{rep}(\mathcal{Q}, \underline{\lambda})$ in which any representation Y_{α} is injective or surjective.

For any $\alpha \in Q_1$:

- if $\Delta(s(\alpha)) = \infty$ or $\Delta(t(\alpha)) = \infty$, then $Y_{\alpha} = 0$ and either way Y_{α} is injective in the first case or surjective in the second one. In this case, we define $O_{\alpha} = \text{rep}(\mathcal{Q}, \lambda)$;
- if $\Delta(s(\alpha)) = \Delta(t(\alpha)) + 1$: by (\otimes) which allows us to assume that $Z_{s(\alpha)} \cong \mathbb{K}^a$ and $Z_{t(\beta)} \cong \mathbb{K}^{a+b}$ with $a > 0$ and $b \geq 0$, and by taking (x_1, \dots, x_a) and (y_1, \dots, y_{a+b}) as adapted bases of respectively $Z_{s(\alpha)}$ and $Z_{t(\alpha)}$ for $N_{s(\alpha)}$ and $N_{t(\alpha)}$, we have $Y_{\alpha}(x_1) = k_1 y_{1+b} + \dots + k_a y_{a+b}$ with $k_1, \dots, k_a \in \mathbb{K}$. By commutative square relations $(\diamond) : Y_{\alpha} N_{s(\alpha)} = N_{t(\alpha)} Y_{\alpha}$ that N have to satisfy, we can deduce a total description of Y_{α} from $Y_{\alpha}(x_1)$. Then, by a generic restriction $k_1 \neq 0$, there exists a dense open set O_{α} in $\text{rep}(\mathcal{Q}, \lambda)$ such that Y_{α} is injective.
- if $\Delta(t(\alpha)) = \Delta(s(\alpha)) + 1$: by (\otimes) which allows us to assume that $Z_{s(\alpha)} \cong \mathbb{K}^{b+c}$ and $Z_{t(\beta)} \cong \mathbb{K}^c$ with $b \geq 0$ and $c > 0$, and by taking (y_1, \dots, y_{b+c}) and (z_1, \dots, z_c) as adapted bases of respectively $Z_{s(\alpha)}$ and $Z_{t(\alpha)}$ for $N_{s(\alpha)}$ and $N_{t(\alpha)}$, we have $Y_{\alpha}(y_1) = k'_1 z_1 + \dots + k'_c z_c$ with $k'_1, \dots, k'_c \in \mathbb{K}$. Again by commutative square relations (\diamond) that N and Y_{α} have to satisfy, we can deduce a total description of Y_{α} from $Y_{\alpha}(y_1)$. Then, by a generic restriction $k'_1 \neq 0$, there exists a dense open set O_{α} in $\text{rep}(\mathcal{Q}, \lambda)$ such that Y_{α} is surjective.

Moreover, for any $\alpha, \beta \in Q_1$ such that $\alpha\beta \in I$, we have for free that $Y_{\alpha}Y_{\beta} = 0$ thanks to (\otimes) . Thus by taking $\Omega = \bigcap_{\alpha \in Q_1} O_{\alpha}$, and by noting from Lemma 3.82 that $X \in \Omega \neq \emptyset$, we get our wanted dense open set. ■

Lemma 3.84. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i) and (ii)(a), and an integer $l > 0$. Let $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q})$ such*

that for any $q \in Q_0$ with $\Delta(q) > l$, we have $\dim(Y_q) = 0$, and let $\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $\ell(\rho) = l$. If there exists an injective map $\iota : M(\rho) \hookrightarrow Y$, then $M(\rho)$ is a summand of Y .

Proof. Let m, Y, ρ and l be as assumed. Let us denote $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)_{\leq l} = \{\rho \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m) \mid \ell(\rho) \leq l\}$. By Theorem 3.51 and by hypothesis (i) (which allows us to say that Y has no band representation as a summand), we can write

$$Y \cong \bigoplus_{\nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)_{\leq l}} M(\nu)^{d_\nu}$$

where $d_\nu \geq 0$ for any $\nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)_{\leq l}$.

First, if $l = 0$, then $Y \cong M(e_m)^d$ and the lemma becomes trivial. From now until the end of the proof, we will assume that $l > 0$.

Let us suppose that there exists an injective map $\iota : M(\rho) \hookrightarrow Y$. Then there exists a string $\nu \in \Sigma_{\mathcal{Q}}(m)_{\leq l}$ such that ρ is at the bottom of ν . By definition $M(\nu)$ is a direct summand of Y . Let us assume that ρ is a strict substring of ν , i.e. there exists an arrow α such that $\alpha\rho, \alpha^{-1}\rho, \rho\alpha$ or $\rho\alpha^{-1}$ is a substring of ν .

On one hand, as $s(\rho) = m$, and by (ii)(a), there is no arrow α such that $\rho\alpha$ or $\rho\alpha^{-1}$ is a string. On the other hand, if $\alpha^\varepsilon\rho$ is a string, then $\ell(\nu) \geq \ell(\rho) + 1 > l$ and so $\Delta(t(\nu)) > l$. Hence we get a contradiction between the fact that $\dim Y_{t(\nu)} = 0$ and the fact that $M(\nu)$ is a summand of Y .

We conclude that $M(\rho)$ is a summand of Y . ■

Remark 3.85. Under the same conditions over Y , and by dual arguments, we can prove that if there exists a surjective map $\pi : Y \twoheadrightarrow M(\rho)$, then $M(\rho)$ is a summand of Y .

Proposition 3.86. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (i) and (ii)(a). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable.*

Proof. Let $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ for any integer $l \geq 0$ be the subcategory of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ additively generated by representations $M(\rho)$ such that $\ell(\rho) \leq l$. We will prove by induction on l that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ is canonically Jordan recoverable. As $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m} = \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l_0)$ for some $l_0 \geq 0$ by finiteness of the set of strings passing through m , we will be able to conclude.

It is easy to check that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(0) = \text{add}(S_m)$ is canonically Jordan recoverable : it suffices to note that for all $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q})$ such that $Y_q \neq 0$ for $q \neq m$, we have $Y_\alpha = 0$ for all $\alpha \in Q_1$, as a consequence of (i), and thus $Y \cong S_m^a$ for some $a \in \mathbb{N}$.

Now let us assume that for a fixed $l \geq 0$ then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ is canonically Jordan recoverable. Let $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l+1)$. First, if $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$, by induction, there exists a dense open set O in $\text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ such that any representation in O is isomorphic to X . Let us assume that $X \notin \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$. This implies in particular that there exists a vertex $w \in Q_0$ such that $\Delta(w) = l+1$ and $\dim X_w > 0$.

By the fact that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l+1) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, we saw that $\text{GenJF}(X) = ((\dim X_q))_{q \in Q_0}$ by Lemma 3.78 and there exists a dense open set Ω of $\text{rep}(\mathcal{Q}, ((\dim X_q))_{q \in Q_0})$ in which any representation $Y \in \Omega$ we have Y_α injective or surjective for any $\alpha \in Q_1$ by Lemma 3.83.

Let $\rho = \alpha_{l+1}^{\varepsilon_{l+1}} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ be the unique string of $\Sigma_{\mathcal{Q}}(m)$ such that $s(\rho) = m$ and $t(\rho) = w$. Let $v_0 = m$ and $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ for $i \in \{1, \dots, l+1\}$. Write $\delta = \dim X_w$. For any $i \in \{0, \dots, l+1\}$, we consider a sequence $z_1^{(i)}, \dots, z_\delta^{(i)}$ of vectors such that :

- we choose $z_1^{(l+1)}, \dots, z_\delta^{(l+1)}$ such that it forms a basis of Y_w adapted to N_w .
- recursively, once we have defined $z_1^{(i+1)}, \dots, z_\delta^{(i+1)}$:
 - if $\varepsilon_{i+1} = -1$, we define $z_j^{(i)} = Y_{\alpha_{i+1}}(z_j^{(i+1)})$ for all $j \in \{1, \dots, \delta\}$; note that for $Y \in \Omega$, $Y_{\alpha_{i+1}}$ is injective and so $z_1^{(i)}, \dots, z_\delta^{(i)}$ are linearly independent;
 - else if $\varepsilon_{i+1} = 1$, we know that for $Y \in \Omega$, $Y_{\alpha_{i+1}}$ is surjective; so there exists a $z_1^{(i)}$ such that $Y_{\alpha_{i+1}}(z_1^{(i)}) = z_1^{(i+1)}$. Hence once we choose such a $z_1^{(i)}$, we define $z_j^{(i)} = N_{v_i}^{j-1}(z_1^{(i)})$ for $j \in \{2, \dots, \delta\}$. Again, we can note that $z_1^{(i)}, \dots, z_\delta^{(i)}$ are linearly independent.

We can define, for $i \in \{0, \dots, l+1\}$, $W_{v_i} = \langle z_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq \delta \rangle$ and for $q \notin \text{Supp}_0(\rho)$, $W_q = 0$. By construction, we can easily check that for any $\alpha \in Q_1$, $Y_\alpha(W_{s(\alpha)}) \subseteq W_{t(\alpha)}$ and more precisely, for $\alpha \in \text{Supp}_1(\rho)$, $Y_\alpha(W_{s(\alpha)}) = W_{t(\alpha)}$.

Let us consider the following representation $W = ((W_q)_{q \in Q_0}, (W_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ where W_q are vector spaces as we defined previously and $W_\alpha = Y_\alpha|_{W_\alpha}$. Then, we can easily verify that $W \cong M(\rho)^\delta$ following our construction.

Thanks to the $z_j^{(i)}$, we can construct an injective map $\iota : M(\rho)^\delta \hookrightarrow Y$. By applying the previous lemma, then we can write that for any $Y \in \Omega$, then $Y \cong M(\rho)^\delta \oplus Y'$ where $\dim Y'_w = 0$.

By reproducing the same construction for any vertex w such that $\Delta(w) = l + 1$ and $\dim X_w > 0$, we have for any $Y \in \Omega$,

$$Y \cong Z \oplus \left(\bigoplus_{\rho \in \Sigma_Q(m) | \ell(\rho) = l+1} M(\rho)^{\dim X_{t(\rho)}} \right)$$

where $Z_q = 0$ for any $q \in Q_0$ such that $\Delta(q) > l$. In addition, we can note that $\text{GenJF}(Z) = ((\dim Z_q))_{q \in Q_0}$.

On the other side, we have :

$$X \cong X' \oplus \left(\bigoplus_{\rho \in \Sigma_Q(m) | \ell(\rho) = l+1} M(\rho)^{\dim X_{t(\rho)}} \right)$$

with $X' \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ and thus $\text{GenJF}(X') = ((\dim X'_q))_{q \in Q_0}$. We can check easily that $\text{GenJF}(X') = \text{GenJF}(Z)$, by the fact that $\underline{\dim}(X') = \underline{\dim}(Z)$.

By induction, as $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ is canonically Jordan recoverable, there exists a dense open set $\Omega' \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X'))$ such that any $Z \in \Omega'$ is isomorphic to X' .

So there exists a dense open set $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ such that $Y \cong X$.

Hence we conclude that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l+1)$ is canonically Jordan recoverable, and finally $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}(l)$ is canonically Jordan recoverable for any integer $l \geq 0$. In particular, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable.

■

Now we will prove that these conditions are necessary.

We start by showing that if m does not satisfy (i), then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable.

Proposition 3.87. *Let m be a vertex which does not satisfy (i). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable.*

Proof. Let m be as supposed. It means we have ρ and ν two distinct strings passing through m such that there exists an arrow γ satisfying $\gamma \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$, $s(\gamma) \in \text{Supp}_0(\rho)$ and $t(\gamma) \in \text{Supp}_0(\nu)$.

In such a configuration, if we take the representation $X = M(\rho) \oplus M(\nu) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, then $X_{s(\gamma)}$ and $X_{t(\gamma)}$ are non-zero vector spaces, and X_γ is a zero map.

Now let us assume that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable. It implies that there exists an open

dense set $O \subset \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ such that any representation Z in O is isomorphic to X . Thus any representation Y of $\text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ satisfies $Y_\gamma = 0$.

By seeking a contradiction, we will construct a representation $W \in \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ such that $W_\gamma \neq 0$. Let $(W_q)_{q \in Q_0}$ be a collection of vector spaces such that $W_q \cong Y_q$. For all $q \in Q_0$, consider N_q be a nilpotent endomorphism of W_q admitting a Jordan form given by the partition $\text{GenJF}(X)^q$.

Choose $u \notin \text{Im}(N_{s(\gamma)})$ and $v \notin \text{Im}(N_{t(\gamma)})$. Consider η the index such that $N_{s(\gamma)}^{\eta-1}(u) \neq 0$ and $N_{t(\gamma)}^\eta(u) = 0$, and define $u_i = N^i(u)$ for all $i \in \{0, \dots, \eta-1\}$. By noting $(u_0, \dots, u_{\eta-1})$ is linearly independent, we can complete the family into a basis (u_0, \dots, u_p) of $W_{s(\gamma)}$. Similarly, let k be the index such that $N_{t(\gamma)}^{k-1}(v) \neq 0 = N_{t(\gamma)}^k(v)$, and define $v_i = N^i(v)$ for all $i \in \{0, \dots, k-1\}$. We complete the family (v_0, \dots, v_{k-1}) into a basis (v_0, \dots, v_r) of $W_{t(\gamma)}$. We can define a linear transformation $W_\gamma = W_{s(\gamma)} \longrightarrow W_{t(\gamma)}$ defined by

- in the case where $k \geq i$, we put $W_\gamma(u_i) = v_{k-\eta+i}$ if $i \in \{0, \dots, \eta-1\}$, and $W_\gamma(u_i) = 0$ otherwise;
- in the case where $k \leq \eta$, we put $W_\gamma(u_i) = v_i$ if $i \in \{0, \dots, k-1\}$, and $W_\gamma(u_i) = 0$ otherwise.

We can define a representation W as it follows :

- $W_q = Y_q$ for $q \in Q_0$;
- $W_\alpha = 0$ for $\gamma \neq \alpha \in Q_1$, and W_γ be as we defined it above.

By construction, we get that $W \in \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$.

We showed above, from our assumption that X was canonically Jordan recoverable, that every $Y \in \text{rep}(\mathcal{Q}, \text{GenJF}(X))$ has $Y_\gamma = 0$. So we have reached a contradiction. ■

Remark 3.88. We recall that if m does not satisfy (i) then we could still have $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ Jordan recoverable (see Remark 3.62).

Finally, we have to prove that if m does not satisfy (ii), then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable. Here we first need to know the existence of a certain kind of string.

Lemma 3.89. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (o) that does not satisfy (ii). Then there exists a string ν with $s(\nu) = m$ and three distinct arrows α, γ and δ such that $\delta\nu, \gamma^{-1}\nu$ and $\nu\alpha^\varepsilon$ are strings of \mathcal{Q} and $\delta\gamma \in I$.*

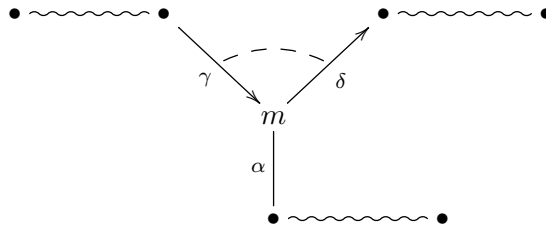
Proof. Let m be as supposed. Note that none of the arrows incident to m are loops by (o). Since (ii)(a) is not satisfied, there is no maximal string μ such that $s(\mu) = m$. By (o), there must be at least one maximal string passing through m , and since (ii)(b) is not satisfied, there must be more than one.

Let μ and ρ be two such strings. As they both pass through m at least once, we can divide each of them into two strings – let say μ_1, μ_2 and ρ_1, ρ_2 – such that :

- $\mu = \mu_2\mu_1^{-1}$ and $\rho = \rho_2\rho_1^{-1}$;
- $s(\rho_i) = s(\mu_i) = m$ for $i = 1, 2$.

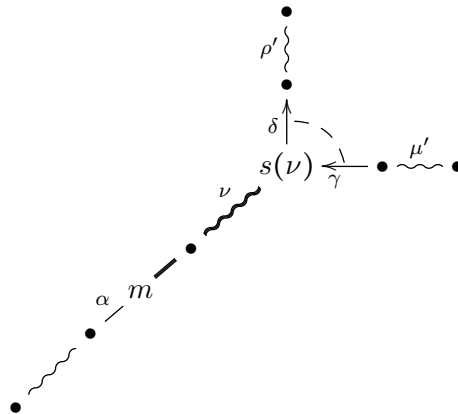
Note that none of these strings are lazy.

If three of these strings start with different arrows, then by gentleness of \mathcal{Q} , there exists $\alpha, \delta, \gamma \in Q_1$ such that $t(\gamma) = s(\delta) = s(\alpha^\varepsilon) = m$ and $\delta\gamma \in I$. Hence, by taking $\nu = e_m$, we conclude.



Otherwise, among those strings, there exist at least two strings, say μ_1 and ρ_1 , that leave m by the same arrow. We can assume that $\mu_1 \neq \rho_1$; otherwise, we could replace μ_1 and ρ_1 by μ_2 and ρ_2 which must be distinct as $\rho \neq \mu$. Let ν be the common substrings of ρ_1 and μ_1 maximal by inclusion such that $s(\nu) = m$. We can write $\rho_1 = \rho'\nu$ and $\mu_1 = \mu'\nu$. Remark that ρ' and μ' are not lazy : both of them cannot be lazy as $\mu_1 \neq \rho_1$ and if for instance ρ' is lazy then ρ is not maximal by inclusion, as $\mu_1\rho_2^{-1}$ is a string passing through m strictly containing ρ as a substring.

By gentleness of \mathcal{Q} , up to exchanging the roles of μ_1 and ρ_1 , we have ρ' starting with $\delta \in Q_1$ and μ' starting with $\gamma \in Q_1$ such that $s(\delta) = t(\gamma) = t(\nu)$ and $\delta\gamma \in I$. So $\delta\nu$ and $\gamma^{-1}\nu$ are strings.



Moreover by using the fact that there is no maximal string starting at m , then there exists $\alpha \in Q_1$ such that $\mu_1\alpha^\varepsilon$ is a string. So $\nu\alpha^\varepsilon$ is a string. We conclude. ■

Proposition 3.90. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} that does not satisfy (ii). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable.*

Proof. Thanks to the Proposition 3.87, we know that if m does not satisfy (i), then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable.

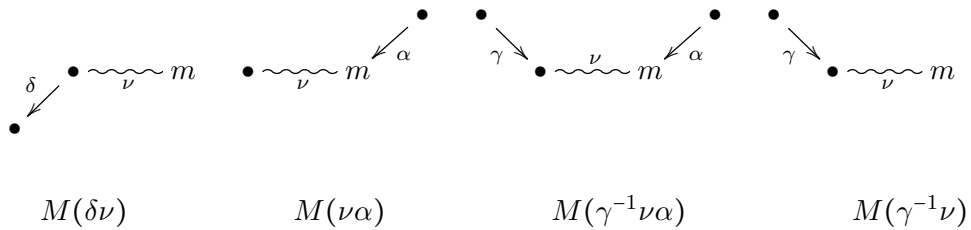
So suppose that m satisfies (i). Hence we have, from properties of m and the previous lemma, there exist a string ν with $s(\nu) = m$ and three distinct arrows $\alpha, \gamma, \delta \in Q_1$ such that $\delta\nu, \gamma^{-1}\nu$ and $\nu\alpha^\varepsilon$ are strings and $\delta\gamma \in I$.

From that fact, inspired by Example 3.69, we can consider in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$:

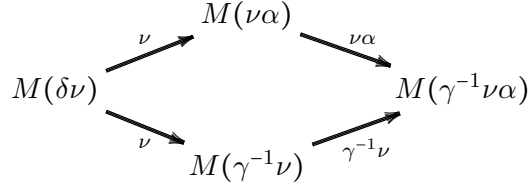
- $X = M(\delta\nu) \oplus M(\nu\alpha^\varepsilon) \oplus M(\gamma^{-1}\nu\alpha^\varepsilon) \oplus M(\gamma^{-1}\nu)$;
- $Y = M(\delta\nu\alpha^\varepsilon) \oplus M(\nu) \oplus M(\gamma^{-1}\nu\alpha^\varepsilon) \oplus M(\gamma^{-1}\nu)$.

Let us suppose that α is an incoming arrow of m ($\varepsilon = -1$). By hypothesis, we can note that the only substring of ν that is both on the top and at the bottom of ν is itself. In the following figures, we highlight the significant substrings that give us the endomorphisms of X and of Y that can be defined from the morphisms between their summands. We specify the morphisms by their substrings (via Proposition 3.53). In addition, we recall we read a string like a sequence of compositions of functions.

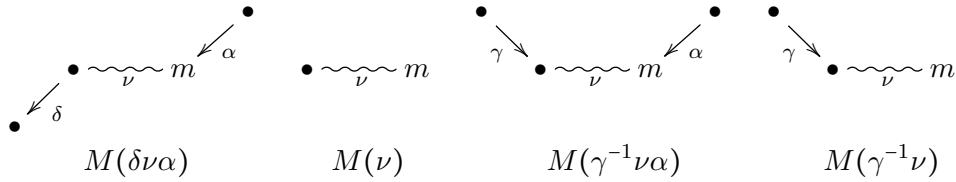
Here is the form of the indecomposable summands of X



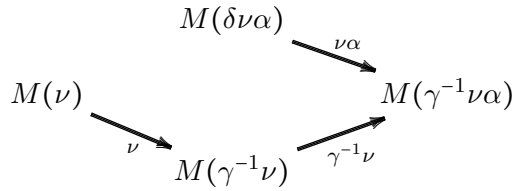
and here is a description of the morphisms between summands of X .



Now let us see the form of the indecomposable summands of Y



and a description of the morphisms between summands of Y .



Thanks to these descriptions, after calculations, we get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)$ with :

- $\lambda^q = (3, 1)$ for $q \in \text{Supp}(\nu)$;
- $\lambda^q = (2)$ for $q = s(\beta)$ or $q = s(\gamma)$;
- $\lambda^q = (1)$ for $q = t(\delta)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

If α was an outgoing arrow ($\varepsilon = 1$), a similar observation can be made and we can construct X and Y with the same behavior.

That is why $\mathcal{C}_{\mathbb{Q},m}$ is not canonically Jordan recoverable. ■

Remark 3.91. If we read carefully the previous proof, we can highlight we proved that if m satisfies (o) but not (ii), then $\mathcal{C}_{\mathbb{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

Let us recap the proof of the main result.

Proof of Theorem 3.70. Thanks to Proposition 3.86 and Proposition 3.76, we highlighted that the conditions (i) and (ii) are sufficient. Moreover we proved with Proposition 3.87 and Proposition 3.90 these conditions are necessary. We conclude we have the desired equivalence. ■

3.2.3.2 Proof of Theorem 3.37

From the previous work, we can deduce the following proposition.

Proposition 3.92. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} such that m satisfies (i*) and (ii). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is Jordan recoverable.*

Proof. If m satisfies (i*) and (ii)(b), we can note that the proof of Proposition 3.76 still works because we do not care about all the other arrows that could interact with the quiver \mathcal{R} as these arrows cannot be reached by any string passing through m . As Theorem 3.66 gives us the Jordan recoverability of $\mathcal{C}_{\mathcal{R},m}$, we conclude.

If m satisfies (i*) and (ii)(a), we can apply Proposition 3.78 and recall that we get Jordan recoverability of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ by Corollary 3.79. Hence we conclude that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is Jordan recoverable in either way.

■

Like we did to prove the first theorem, now we have to show that if m does not satisfy (i*) or (ii) then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

To begin with, we will show that if m does not satisfy (i*) then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable. To do it properly, we need to know the existence of certain sorts of strings when (i*) is not satisfied by first making stronger assumptions about m . Then, by relaxing hypotheses over m , we will conclude what we want.

With these ideas in mind, let first assume that m is not minuscule.

Lemma 3.93. *Let m be a non minuscule vertex of \mathcal{Q} . Then there exists a string $\rho = \phi^{-1}\Gamma\phi$ with :*

(α) ϕ is a string such that :

($\alpha 1$) $s(\phi) = m$;

($\alpha 2$) ϕ is passing through any vertex of \mathcal{Q} at most once;

(β) Γ is a non-lazy string such that :

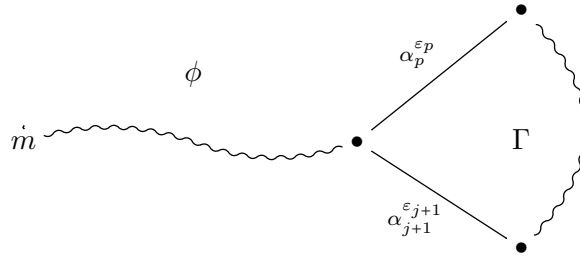
- ($\beta 1$) $s(\Gamma) = t(\Gamma) = t(\phi)$;
- ($\beta 2$) if ϕ is not lazy, then the first and the last arrow of Γ are in relation;
- ($\beta 3$) Γ is passing through $t(\phi)$ exactly twice;
- ($\beta 4$) Γ is passing through any vertex $q \neq t(\phi)$ at most once;
- ($\beta 5$) $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\Gamma) = \{t(\phi)\}$.

Proof. Let m be as assumed. By Proposition 3.64, there exists a string Ξ passing through m at least twice. Among all the substrings of Ξ , there exists a string μ such that $s(\mu) = t(\mu) = m$ and μ is passing exactly twice through m . Thus the set $S(m)$ of strings starting and ending at m , and passing through m exactly twice is not empty. Let us consider $\chi \in S(m)$ to be a string minimal with respect to the ordering by length. Note that χ is not lazy. We will prove that from χ we can extract a string ρ as claimed.

Let us write $\chi = \alpha_k^{\varepsilon_k} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$. Consider $v_0 = m$ and $v_i = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ for any $i \in \{1, \dots, k\}$. Let :

- $p = \min(i \in \{1, \dots, k\} \mid v_i \in \{v_0, \dots, v_{i-1}\})$;
- j be the only integer in $\{0, \dots, p-1\}$ such that $v_j = v_p$.

Note that p is well-defined as χ passes at least twice through m . Consider $\phi = \alpha_j^{\varepsilon_j} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ and $\Gamma = \alpha_p^{\varepsilon_p} \cdots \alpha_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}$.

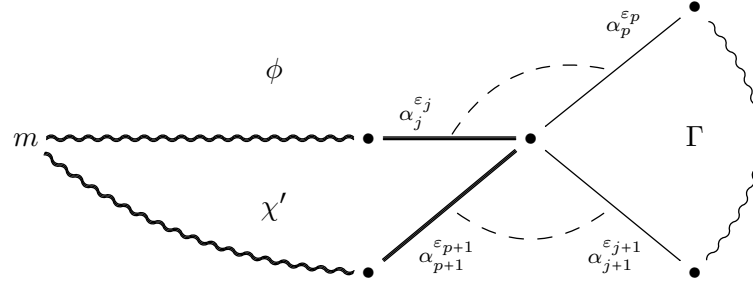


Now we will check that ϕ and Γ satisfy the claimed conditions.

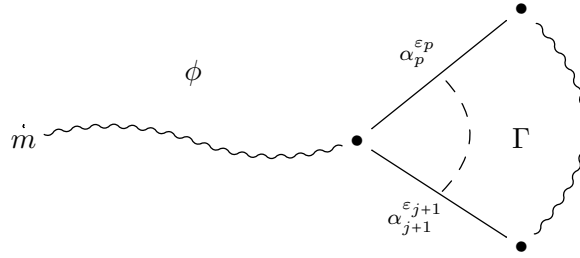
First let us show that $\rho = \phi^{-1}\Gamma\phi$ is a string. If ϕ is lazy, then we can conclude clearly. Assume that ϕ is not lazy. Note that $p < k$. At the vertex $v_j = v_p$, if $p > j + 1$, we have at least three distinct incident arrows α_j , α_{j+1} and α_p . By gentleness of \mathcal{Q} , this means that exactly one among those following words $\alpha_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}\alpha_j^{\varepsilon_j}$, $\alpha_p^{\varepsilon_p}\alpha_j^{\varepsilon_j}$ or $\alpha_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}\alpha_p^{\varepsilon_p}$ is not a string.

Obviously $\alpha_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}\alpha_j^{\varepsilon_j}$ is a string by construction, as χ is a string. If α_p and α_j are in relation at v_j , then, by gentleness of \mathcal{Q} , α_{p+1} and α_j are not in relation at v_j and so $\chi' = \alpha_k^{\varepsilon_k} \cdots \alpha_{p+1}^{\varepsilon_{p+1}} \alpha_j^{\varepsilon_j} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ is a string of

$S(m)$ and $\ell(\chi') < \ell(\chi)$. This is a contradiction with the minimality of χ .



Hence α_{j+1} and α_p are in relation at v_j and $\rho = \phi^{-1}\Gamma\phi$ is a string. Note that we come to the same conclusion if $p = j+1$. Finally we can easily check by our construction that ϕ and Γ satisfy the conditions we claimed.



■

Proposition 3.94. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} which is not minuscule. Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.*

Proof. Let m be as supposed. Thanks to the previous lemma, there exists a string $\rho = \phi^{-1}\Gamma\phi$ satisfying the conditions stated in the previous lemma.

If $\ell(\Gamma) = 1$, let $X = M(\phi)^2$ and $Y = M(\rho)$ two representations of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$. By the fact that Y admits an endomorphism defined by the substring ϕ (Proposition 3.53), we can clearly get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)_{q \in \mathcal{Q}_0}$ such that :

- $\lambda^q = (2)$ for $q \in \text{Supp}(\rho)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

Thus $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

Otherwise, inspired by Example 3.67, recalling that we wrote $\Gamma = \beta_p^{\xi_p} \dots \beta_1^{\xi_1}$, let $X = M(\phi^{-1} \beta_p^{\xi_p} \dots \beta_2^{\xi_2})$ and $Y = M(\beta_{p-1}^{\xi_{p-1}} \dots \beta_1^{\xi_1} \phi)$ be two representations of $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$. In this case, we get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ such that :

- $\lambda^q = (1)$ for $q \in \text{Supp}(\rho)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

Again, we conclude that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

Hence in each case, we get what we want. ■

Now we can prove that for any vertex m which does not satisfy (o), $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

We need to prove beforehand the following lemma.

Lemma 3.95. *Let m be a minuscule vertex of \mathcal{Q} which is not satisfying (o). Then at least one of the following assertions is true :*

(α) *There exist two non-lazy strings ν and μ such that :*

- ($\alpha 1$) $s(\nu) = s(\mu) = m$ and $t(\nu) = t(\mu) \neq m$;
- ($\alpha 2$) $\mu\nu^{-1}$ is a string;
- ($\alpha 3$) *The last arrows of ν and μ are in relation;*
- ($\alpha 4$) ν and μ are strings that are passing through any vertex of \mathcal{Q} at most once;
- ($\alpha 5$) $\text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu) = \{m, t(\nu)\}$.

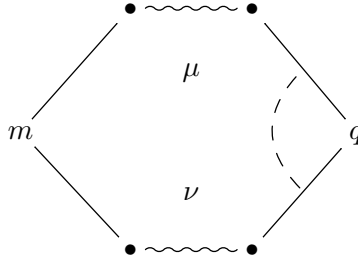
(β) *There exist a non-lazy string ϕ and a band Γ such that :*

- ($\beta 1$) $s(\phi) = m$ and $t(\phi) = s(\Gamma) = t(\Gamma) \neq m$;
- ($\beta 2$) $\Gamma\phi$ is a string;
- ($\beta 3$) *the last arrows of Γ and ϕ are in relation;*
- ($\beta 4$) ϕ is a string that is passing through any vertex of \mathcal{Q} at most once;
- ($\beta 5$) Γ is a string which is passing through any vertex $q \neq t(\phi)$ of \mathcal{Q} at most once and is passing through $t(\phi)$ exactly twice;
- ($\beta 6$) $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\Gamma) = \{t(\phi)\}$.

Proof. Let m be as supposed. Then there exists a string Ξ passing through m and passing through another vertex at least twice. Let us consider χ a minimal substring of Ξ by inclusion such that χ is passing through m and there exists another vertex – let us say $q \neq m$ – such that χ is passing through it at least twice.

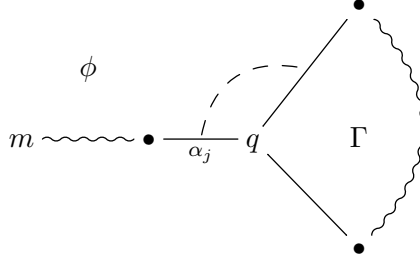
First, it is easy to check that χ passes through q exactly twice, and $s(\chi) = q$ or $t(\chi) = q$. Then we have two cases.

(α) If $s(\chi) = t(\chi) = q$, then we can write $\chi = \mu\nu^{-1}$ where ν and μ are the two distinct non-lazy strings such that $s(\nu) = s(\mu) = m$ and $t(\nu) = t(\mu) = q$. We claim that ν and μ are satisfying what we want.



- ($\alpha 1$) $s(\nu) = s(\mu) = m$ and $t(\nu) = t(\mu) = q \neq m$ for free;
 - ($\alpha 2$) $\chi = \mu\nu^{-1}$ is a string for free;
 - ($\alpha 3$) if the last arrows of ν and μ are not in relation, then $\nu^{-1}\mu$ is a non-lazy string starting and ending at m ; this is a contradiction with the fact that m is minuscule. So the last arrows of ν and μ are in relation;
 - ($\alpha 4$) if ν is passing through a vertex v at least twice, as ν is a substring of χ , we get a contradiction with the minimality of χ . As the same argument works for μ , then ν and μ are passing through any vertex at most once;
 - ($\alpha 5$) if there exists $v \in \text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu)$ and $v \neq q, m$, we could consider ν_0 a substring of ν and μ_0 a substring of μ such that $s(\nu_0) = s(\mu_0) = m$ and $t(\nu_0) = t(\mu_0) = v$. Thus $\mu_0\nu_0^{-1}$ is a strict substring of χ and that is a contradiction with the minimality of χ .
- (β) Otherwise, up to inverting χ , we can consider that $s(\chi) = m$ and $t(\chi) = q$. Let ϕ be the minimal substring of χ such that $s(\phi) = m$ and which is passing through q . Let Γ be the string such that

$\chi = \Gamma\phi$. We claim that ϕ and Γ are satisfying what we want.



($\beta 1$) For free, we have $s(\phi) = m$ and $t(\phi) = s(\Gamma) = t(\Gamma) = q \neq m$;

($\beta 2$) $\mu' = \Gamma\phi$ for free;

($\beta 3$) if the last arrows of Γ and ϕ are not in relation at q , then $\phi^{-1}\Gamma\phi$ is a string which starts and ends at m . This is a contradiction with the fact that m is minuscule. Thus the last arrows of Γ and ϕ are in relation. Furthermore we can prove that Γ is a band :

- $s(\Gamma) = t(\Gamma)$;
- As the last arrows of Γ and ϕ are in relation at $t(\Gamma)$ and the first arrow of Γ is not in relation with the last arrow of ϕ at $t(\Gamma)$, by the gentleness of \mathcal{Q} , the last and the first arrow of Γ are not in relation. Then Γ^j is a string;
- If Γ is not primitive, we can write $\Gamma = \Upsilon^j$ for some $j > 1$. So $\Upsilon\phi$ is a substring of χ which passes through a vertex $t(\Gamma) = s(\Upsilon) = t(\Upsilon)$ at least twice. This is a contradiction with the minimality of χ . So Γ is primitive.

($\beta 4$) ϕ cannot pass through a vertex at least twice as ϕ is a strict substring of χ ;

($\beta 5$) if Γ passes through another vertex $v \neq q$ at least twice, let Γ_0 be the substring of Γ obtained by deleting its last arrow. Then $\Gamma_0\phi$ is a substring of χ which is passing through v at least twice. This is a contradiction.

If Γ passes through q at least thrice, then Γ_0 passes through q at least twice and we conclude again with a contradiction. Consequently Γ is a string passing through any vertex $v \neq t(\phi)$ at most once and passing through $t(\phi)$ exactly twice;

($\beta 6$) Trivially, $\{t(\phi)\} \subseteq \text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\Gamma)$. Let us assume that there exists a vertex $v \neq t(\phi)$ such that $v \in \text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\Gamma)$. Let Γ_1 be a substring of Γ starting with the first arrow

of Γ and such that $t(\Gamma_1) = v$. Then $\Gamma_1\phi$ is a substring of χ which is passing through a vertex at least twice. This is a contradiction again with the minimality of χ .

Either way, we conclude. ■

Proposition 3.96. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} which does not satisfy (o). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.*

Proof. If m is not minuscule, we can conclude from the Proposition 3.94.

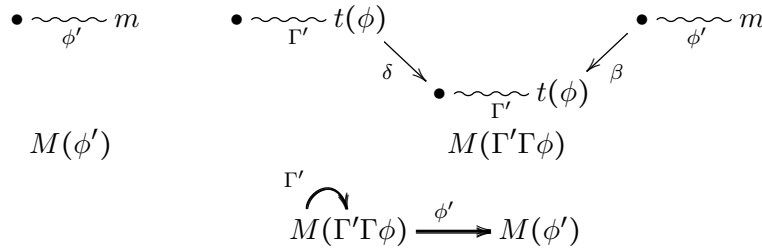
Let us suppose that m is minuscule. By the previous lemma, we can construct a certain kind of string, and we have to distinguish the two cases.

If (α) is true, then let us write $\mu = \alpha_k^{\varepsilon_k} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ and $\nu = \beta_p^{\xi_p} \cdots \beta_1^{\xi_1}$. Consider $X = M(\alpha_k^{\varepsilon_{k-1}} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1} \nu^{-1})$ and $Y = M(\mu(\beta_{p-1}^{\xi_{p-1}} \cdots \beta_1^{\xi_1})^{-1})$. We can easily check that $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ with :

- $\lambda^q = (1)$ for any $q \in \text{Supp}_0(\mu) \cup \text{Supp}_0(\nu)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

Thus $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

If (β) is true, then let Γ' be the string obtained from Γ by deleting the last arrow of Γ – called δ in the drawing below – and ϕ' be the string obtained for ϕ by deleting the last arrow – called β . Note that by $(\beta 3)$ β and δ are in relation at $t(\phi)$. If β is ingoing to $t(\phi)$ then δ is outgoing from $t(\phi)$ and vice-versa. Inspired by Example 3.68, we can consider $X = M(\Gamma'\phi)^2$ and $Y = M(\phi') \oplus M(\Gamma'\Gamma\phi)$. It is clear enough how the endomorphisms of X go. Let us see the morphisms between the summands of Y . We label the morphisms by substrings as an application of Theorem 3.53.



From that, by simple calculation, we get $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ where :

- $\lambda^q = (2)$ for all $q \in \text{Supp}(\Gamma'\phi)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

In other cases (for example if β is an outgoing arrow of m' , or if δ is an incoming arrow of m'), we can make similar observations, construct representations X and Y analogously, and we will obtain the same result.

That is why $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable. ■

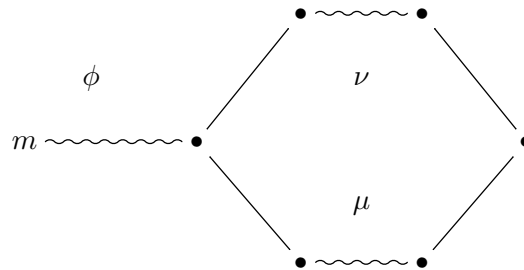
Now let us show another translation of the condition (i^*) . By the previous proposition, we can suppose that m satisfies (o) .

Lemma 3.97. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} satisfying (o) but not (i^*) . Then there exist three strings ϕ , ν and μ such that :*

- ($\gamma 1$) ν and μ are non-lazy;
- ($\gamma 2$) $s(\phi) = m$, $t(\phi) = s(\nu) = s(\mu)$ and $t(\nu) = t(\mu)$;
- ($\gamma 3$) $\nu\phi$ and $\mu\phi$ are strings of \mathcal{Q} ;
- ($\gamma 4$) ϕ , ν and μ are passing through any vertex of \mathcal{Q} at most once;
- ($\gamma 5$) the first arrows and the last arrows of ν and μ are in relation at $s(\nu)$ and $t(\mu)$ respectively;
- ($\gamma 6$) $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\nu) = \text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\mu) = \{s(\nu)\}$ and $\text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu) = \{s(\nu), t(\nu)\}$;

Proof. Let m be as supposed. By the fact that m does not satisfy (i^*) , there exist two distinct strings Ξ and Ψ such that $s(\Xi) = s(\Psi) = m$ and $t(\Psi) = t(\Xi)$. Let us consider such a pair (χ, ψ) to be minimal in the following way : for any pair of distinct strings (σ, τ) such that $s(\sigma) = s(\tau) = m$ and $t(\sigma) = t(\tau)$, we have $\ell(\sigma) \geq \ell(\chi)$ and if $\ell(\sigma) = \ell(\chi)$ then $\ell(\tau) \geq \ell(\psi)$. Consequently $\ell(\chi) \leq \ell(\psi)$.

Let ϕ be the common string maximal by inclusion of χ and ψ such that $s(\phi) = m$. Let ν and μ be the strings such that $\chi = \nu\phi$ and $\psi = \mu\phi$. We will show that ϕ , ν and μ are three strings as claimed.



($\gamma 1$) As $\ell(\psi) \geq \ell(\chi)$, if μ is lazy then $\psi = \chi$ which is a contradiction with the fact that ψ and χ are distinct. If ν is lazy, then $\psi = \mu\phi$ is a string passing through $s(\mu)$ at least twice. This is a contradiction with the fact that m satisfies (o). So ν and μ are non-lazy.

($\gamma 2$) By construction we have $s(\phi) = m$, $t(\phi) = s(\nu) = s(\mu)$ and $t(\nu) = t(\mu)$ for free;

($\gamma 3$) By construction $\chi = \nu\phi$ and $\psi = \mu\phi$ are strings of \mathcal{Q} ;

($\gamma 4$) If there exists a vertex q of \mathcal{Q} such that one of the three strings ϕ , ν or μ is passing through q at least twice, then χ or ψ is passing through q at least twice. This is a contradiction with the fact that m satisfies (o). So ϕ , ν , and μ are passing through any vertex of \mathcal{Q} at most once;

($\gamma 5$) If the last arrows of ν and μ are not in relation at $t(\nu)$, then $\mu^{-1}\nu\phi$ is a string passing through m and through $s(\nu)$ at least twice. This is a contradiction with the fact that m satisfies (o). By noting that $\nu\phi$ and $\mu\phi$ are strings of \mathcal{Q} , and the first arrows of ν and μ have to be distinct by maximality of ϕ , if ϕ is non-lazy then the last arrow of ϕ is in relation with neither the first arrow of ν nor the first arrow of μ at $t(\phi)$; by gentleness of \mathcal{Q} the first arrows of ν and μ have to be in relation at $s(\nu)$.

If ϕ is lazy and if the first arrows are not in relation at $s(\nu) = m$, then $\mu\nu^{-1}$ is a well-defined string of \mathcal{Q} passing through m and through $t(\nu)$ at least twice. This is a contradiction with the fact that m satisfies (o). Hence we conclude that the first arrows and the last arrows of ν and μ are in relation at $s(\nu)$ and $t(\nu)$ respectively;

($\gamma 6$) It is clear that $\{s(\nu)\} \subseteq \text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\nu)$. If there exists a vertex $q \neq s(\nu)$ in $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\nu)$, then $\chi = \nu\phi$ is a string passing through q at least twice. This is a contradiction with the fact that m satisfies (o). So $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\nu) = \{s(\nu)\}$. Analogously we have $\text{Supp}_0(\phi) \cap \text{Supp}_0(\mu) = \{s(\nu)\}$.

It is also clear that $\{s(\nu), t(\nu)\} \subseteq \text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu)$. Assume that there exists a vertex $t(\nu) \neq q \neq s(\nu)$ in $\text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu)$. Thanks to ($\gamma 4$), we can consider ν_q (respectively μ_q) the substring of ν (respectively μ) starting at $s(\nu)$ and ending at q . Then $(\chi_q = \nu_q\phi, \psi_q = \mu_q\phi)$ is a pair of distinct strings such that $s(\chi_q) = s(\psi_q)$ and $t(\chi_q) = t(\psi_q) = q$. But $\ell(\chi_q) < \ell(\chi)$ by construction, which is a contradiction with the minimality of (χ, ψ) .

Hence we conclude that $\text{Supp}_0(\nu) \cap \text{Supp}_0(\mu) = \{s(\nu), t(\nu)\}$. ■

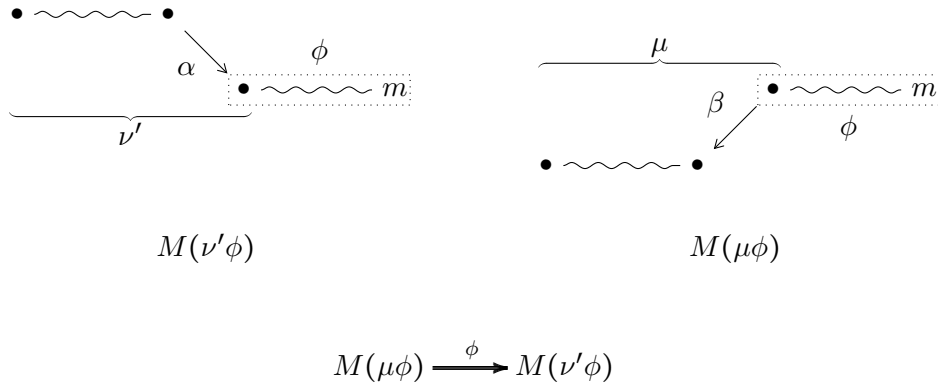
Proposition 3.98. *Let m be a vertex of \mathcal{Q} which does not satisfy (i*). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.*

Proof. Let m be as supposed. We already know that if m does not satisfy (o) then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable thanks to Proposition 3.96.

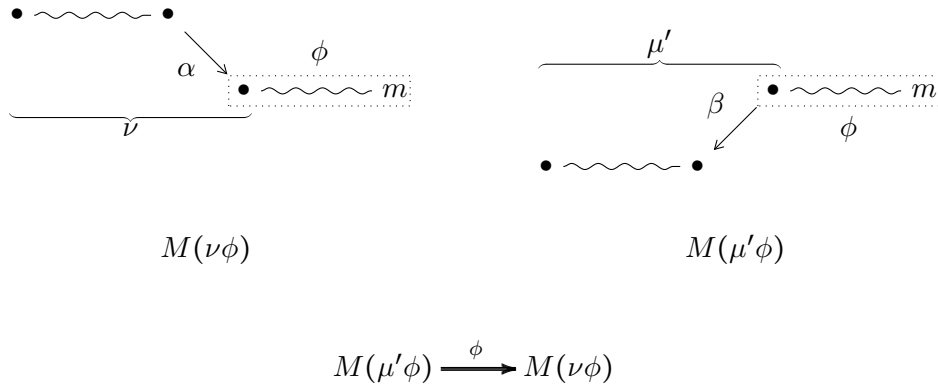
Let us assume that m does satisfy (o). By Lemma 3.97, there exist three strings ϕ , ν , and μ satisfying the conditions stated in the previous lemma.

Without loss of generality, we can assert that the first arrow α of ν is ingoing to $s(\nu)$ and the first arrow β of μ is therefore outgoing from $s(\nu)$. Define ν' (respectively μ') the string obtained from ν (respectively μ) by deleting its last arrow.

Consider $X = M(\nu'\phi) \oplus M(\mu\phi)$ and $Y = M(\nu\phi) \oplus M(\mu'\phi)$. We can see that the only significant substrings that is on the top of $\mu\phi$ (respectively $\mu'\phi$) and at the bottom of $\nu'\phi$ (respectively $\nu\phi$) is ϕ . In the following figures, we highlighted the morphisms between summands of X and Y like previously. Here is what we have for X .



And here is what we have for Y .



Hence, after calculations, we have $\text{GenJF}(X) = \text{GenJF}(Y) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ such that :

- $\lambda^q = (2)$ if $q \in \text{Supp}_0(\phi)$;
- $\lambda^q = (1)$ if $q \in \text{Supp}_0(\mu) \cup \text{Supp}_0(\nu) \setminus \text{Supp}_0(\phi)$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

Thus we conclude that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable. ■

Finally we still have to prove that if m does not satisfy (ii), then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.

Proposition 3.99. *Let m be a vertex which does not satisfy (ii). Then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable.*

Proof. Let m be as supposed. We already know that if m does not satisfy (i^*) then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable. Let us assume that m satisfies (i^*).

From Lemma 3.72, we know that (i^*) implies (o). Futhermore if we pay attention to the proof of Proposition 3.90, thanks to Lemma 3.89, we proved in fact that if m satisfies (o) but not (ii), then $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is not Jordan recoverable (as we said in Remark 3.91). Thus we conclude. ■

Let us recap the proof of the second main result.

Proof of Theorem 3.71. Thanks to Proposition 3.92, we showed that (i^*) and (ii) are sufficient. Then we showed with Proposition 3.98 and Proposition 3.99 that these conditions are necessary. As a result, we have the equivalence we wished for. ■

3.2.4 To go further

Here are some ideas or questions that we could ask ourselves based on our work.

- *As the proof of the main result uses string combinatorics, can we extend that result to string algebras or skew-gentle algebras?*

We can also think about string algebras and skew-gentle algebras that are algebras which have a similar description of their indecomposable representations. However working with them does not seem as easy as the gentle case. We can at least expect that the description of vertices m such that $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ is canonically Jordan recoverable could be something of the same flavor, with a few more restrictions.

Nonetheless, we can notice that the results can be easily extended to the case of locally gentle algebras.

- What are exactly all the canonically Jordan recoverable subcategories of modules over a gentle algebra given by a gentle quiver \mathcal{Q} ?

From a bit more work over A_n -type quivers, we have a conjecture that could characterize all the subcategories that are canonically Jordan recoverable.

Conjecture 3.100. *Let \mathcal{Q} be an A_n -type quiver. A subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(\mathcal{Q})$ is canonically Jordan recoverable if and only if for any pair of strings (ρ, ν) which are associated to indecomposable representations of \mathcal{C} , we do not have an arrow $\alpha \in Q_1$ such that $s(\alpha) \in \text{Supp}_0(\rho)$, $t(\alpha) \in \text{Supp}_1(\nu)$ and $\alpha \notin \text{Supp}_1(\rho) \cup \text{Supp}_1(\nu)$.*

Thanks to ideas coming from the Example 3.32 and the familiarity with the hypothesis (i) of the Theorem 3.70, we can highlight the fact that it is a necessary condition. Actually, we can use the proof of Proposition 3.87 in this particular case to conclude.

However it is still difficult to explain why it is sufficient. Hopefully, if this statement is true, we could expect to extend that result to characterize all the canonically Jordan recoverable subcategories of representations over a gentle quiver.

- Can we translate our combinatorial condition on the vertex m into conditions in terms of quiver representation theory on the category $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$?

This is not an easy question. At this point, we could expect to get a translation of the conditions from Conjecture 3.100 in terms of not having an extension between two indecomposable representations which do not have a non-zero morphism in either way.

- Is there a combinatorial map extending the Robinson–Schensted–Knuth correspondance ?

Let Q be a Dynkin quiver with $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. In the article (Garver *et al.*, 2023), they study the structure of Jordan form data in the minuscule case. For any minuscule vertex m , there is a minuscule poset $\mathcal{P}_{\mathcal{Q},m}$ for whose definition we refer to (Garver *et al.*, 2023, Section 4.1). This minuscule poset is equipped with a map π to the vertices of Q . In particular, π satisfies that each fiber $\pi^{-1}(j)$ is totally ordered.

Theorem 3.101 ((Garver *et al.*, 2023)).

- (i) For any $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$ and $j \in Q_0$, the number of parts in the partition $\text{GenJF}(X)^j$ is less or equal to the size of the fibre $\pi^{-1}(j)$.
- (ii) For $X \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q},m}$, define a map $\rho_{\mathcal{Q},m} : \mathcal{P}_{\mathcal{Q},m} \rightarrow \mathbb{N}$ as follows : the values of $\rho_{\mathcal{Q},m}(X)$ restricted to $\pi^{-1}(j)$ are the entries of $\text{GenJF}(X)^j$, padded with extra zeros if needed, and ordered so that, restricted to $\pi^{-1}(j)$, the function is order-reversing. Then $\rho_{\mathcal{Q},m}$ is order-reversing as a map from $\mathcal{P}_{\mathcal{Q},m}$ to \mathbb{N} .

(iii) The map from isomorphism classes of $\mathcal{C}_{Q,m}$ to order-reversing maps from $\mathcal{P}_{Q,m}$ to \mathbb{N} , sending X to $\rho_{Q,m}(X)$ is a bijection.

As an enumerative corollary of the previous result, thanks to an interesting link to reverse plane partitions, the isomorphism classes of representations in $\mathcal{C}_{Q,m}$ have the following generating function.

Theorem 3.102 ((Proctor, 1984), (Garver *et al.*, 2023)). *For Q a Dynkin quiver and m a minuscule vertex, we have*

$$\sum_{X \in \mathcal{C}_{Q,m}} \prod_{i=1}^n q_i^{\dim(X_i)} = \prod_{u \in \mathcal{P}_{Q,m}} \frac{1}{1 - \prod_{i=1}^n q_i^{\dim((M_u)_i)}}$$

where :

- the sum is over isomorphism classes of representations in $\mathcal{C}_{Q,m}$;
- in the product, $M_u \in \mathcal{C}_{Q,m}$ is the indecomposable representation of Q corresponding to $u \in \mathcal{P}_{Q,m}$

One of its combinatorial applications is that we can consider the map $\rho_{Q,m}$ from $\mathcal{C}_{Q,m}$ to reverse plane partitions over $\mathcal{P}_{Q,m}$ to be a generalization of the classical Robinson–Schensted–Knuth (RSK) correspondence. Indeed this map has the same Green–Kleitman invariants (Garver et Patrias, 2017).

From this perspective, we could expect to generalize the RSK correspondence in the case of gentle algebras, string algebras, or skew-gentle algebras, and even in the case, we work with other Jordan recoverable categories that have more interesting behavior. One can note that our Jordan recoverable categories $\mathcal{C}_{Q,m}$ are similar to the A_n quiver case. So it does not seem unreasonable to say that we can have the same results, without any more interesting things to add. However it could come to be more impactful to get that result after having characterized what are all the Jordan recoverable categories in these new cases.

The reader is invited to have a look into these different problems or things related to them.

3.2.5 Acknowledgments

I want first to thank Yann Palu for all I learned about gentle algebras and their combinatorial behavior, and for all his support.

Then I want to acknowledge the Université du Québec à Montréal and the Institut des Sciences Mathématiques for allowing me to complete my work.

Last but not least, I owe a great deal of thanks to my Ph.D. supervisor Hugh Thomas who shares with me his time, his advice, his support, his help, to get to this main result and to write this article even if we had to work with some thousands of kilometers between us on the grounds of the sad pandemic situation.

CHAPITRE 4

ARTICLE 2 : CANONICALLY JORDAN RECOVERABLE CATEGORIES FOR MODULES OVER THE PATH ALGEBRA OF A_n TYPE QUIVERS

4.1 Introduction (en français)

Dans ce deuxième article, nous allons caractériser les catégories canoniquement retrouvables de Jordan de $\text{rep}(Q)$, pour Q un carquois de type A .

4.1.1 Les représentations d'un carquois de type A_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Q un carquois fini tel que $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. Rappelons que le carquois Q est **de type A_n** à chaque fois que son graphe sous-jacent est de la forme suivante.

$$1 \text{ — } 2 \text{ — } \dots \text{ — } n$$

Nous notons particulièrement \overrightarrow{A}_n le carquois de type A_n dont les flèches sont exactement données par $i \rightarrow i+1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Un carquois Q de type A_n est dit **linéairement orienté** si $Q = \overrightarrow{A}_n$ ou $Q = \overrightarrow{A}_n^{\text{op}}$.

Soit \mathbb{K} un corps quelconque. Donnons la description complète des représentations indécomposables d'un carquois de type A_n ainsi que la description des morphismes entre eux.

Les **intervalles de** $\{1, \dots, n\}$ sont les ensembles $[[i, j]] := \{i, i+1, \dots, j\}$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$. Si $i = j$, nous écrirons $[[i, i]] = [[i]]$. Notons \mathcal{I}_n l'ensemble des intervalles de $\{1, \dots, n\}$. Pour $K = [[i, j]] \in \mathcal{I}_n$, posons $b(K) = i$ et $e(K) = j$. Nous appellerons **ensemble d'intervalles** tout sous-ensemble de \mathcal{I}_n .

Pour tout intervalle $K \in \mathcal{I}_n$, nous notons X_K l'unique représentation (à isomorphisme près) indécomposable de Q dont le support est exactement K . Plus précisément :

- $(X_K)_q = \mathbb{K}$ si $q \in K$, $(X_K)_q = 0$ sinon ;
- $(X_K)_\alpha = \text{id}_{\mathbb{K}}$ si α est telle que $\{s(\alpha), t(\alpha)\} \subseteq K$, $(X_K)_\alpha = 0$ sinon ;

Le résultat suivant peut se voir comme une traduction du résultat pour les carquois de type A de (Butler et Ringel, 1987) déjà vu en Section 3.1.2.3. Bien entendu, c'est un résultat plus ancien.

Théorème 4.1 ((Gabriel, 1972)). *Soit Q un carquois de type A_n . Les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables de Q sont en bijection avec les intervalles de \mathcal{I}_n ; plus précisément, elles se décrivent via les représentations X_K pour $K \in \mathcal{I}_n$.*

Nous avons également un résultat permettant de décrire les morphismes entre les indécomposables, traduit du Théorème 3.25. Pour un énoncé plus détaillé, se reporter à la Section 4.2.2.2

Via le résultat précédent, nous pouvons considérer :

- pour tout ensemble d'intervalles $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$ et pour tout carquois Q de type A_n , $\text{Cat}_Q(\mathcal{J})$ la sous-catégorie de $\text{rep}(Q)$ additivement engendrée par les X_K pour $K \in \mathcal{J}$;
- pour tout carquois Q de type A_n et pour toute sous-catégorie \mathcal{C} de $\text{rep}(Q)$, $\text{Int}(\mathcal{C})$ l'ensemble d'intervalles de \mathcal{I}_n constitué de tous les intervalles K tels que $X_K \in \mathcal{C}$.

Comme dans l'article précédent, nous considérerons des sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ qui sont stables par somme directe et par facteur direct. De telles sous-catégories sont engendrées par des indécomposables X_K avec $K \in \mathcal{J}$ pour un certain $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_n$.

Ainsi, pour tout carquois Q de type A_n , pour tout $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$ et pour toute sous-catégorie $\mathcal{C} \subseteq \text{rep}(Q)$, nous avons $\mathcal{J} = \text{Int}(\text{Cat}_Q(\mathcal{J}))$ et $\mathcal{C} = \text{Cat}_Q(\text{Int}(\mathcal{C}))$.

Maintenant, nous pouvons étudier les sous-catégories de $\text{rep}(Q)$ via le comportement des intervalles correspondant aux indécomposables qui les engendrent.

4.1.2 Les ensembles d'intervalles adjacent-évitant

Définition 4.2. Deux intervalles K et L de \mathcal{I}_n sont dits *adjacents* si $b(K) = e(L) + 1$ ou $b(L) = e(K) + 1$.

Nous pouvons également reformuler cette propriété : deux intervalles sont adjacents s'ils forment à eux deux une partition d'un intervalle.

Via les travaux du premier article (Dequêne, 2023), et inspiré par l'Exemple 4.6, nous avons ce résultat assez simple qui permet de mettre en lumière la nécessité d'éviter l'adjacence des intervalles correspondant aux indécomposables qui engendrent une catégorie canoniquement retrouvable de Jordan.

Proposition 4.3. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de $\text{rep}(Q)$. Posons $\mathcal{J} = \text{Int}(\mathcal{C})$. S'il existe deux intervalles $K, L \in \mathcal{J}$ tels que K et L sont adjacents, alors \mathcal{C} n'est pas canoniquement retrouvable de Jordan.

Définition 4.4. Un ensemble d'intervalles \mathcal{J} est dit **adjacent-évitant** s'il ne contient pas deux intervalles adjacents; c'est-à-dire, pour toute paire d'intervalles (K, L) de \mathcal{J} , soit $K \cap L \neq \emptyset$, soit $K \cup L \notin \mathcal{I}_n$.

Le résultat principal de cet article est de montrer qu'en fait cette propriété combinatoire caractérise complètement la retrouvabilité de Jordan canonique des sous-catégories de $\text{rep}(Q)$.

Théorème 4.5. Considérons Q un carquois de type A_n et une sous-catégorie \mathcal{C} de $\text{rep}(Q)$. Nous avons que \mathcal{C} est canoniquement retrouvable de Jordan si et seulement si $\text{Int}(\mathcal{C})$ est adjacent-évitant.

Ce résultat étend le résultat de (Garver *et al.*, 2023) pour les carquois de type A .

4.1.3 Esquisse de preuve du résultat principal

Pour prouver le Théorème 4.5, nous décrivons tout d'abord les ensembles d'intervalles adjacent-évitant maximaux (pour l'inclusion). Nous verrons qu'il s'agit des ensembles d'intervalles $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \{[b, e] \mid b \in \mathbf{B}, e \in \mathbf{E}\}$ avec (\mathbf{B}, \mathbf{E}) une paire d'ensembles de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\{\mathbf{B}, \mathbf{E}[1]\}$ forme une partition de $\{1, \dots, n+1\}$, avec $\mathbf{E}[1] = \{e+1 \mid e \in \mathbf{E}\}$.

Puis, nous verrons des opérations que nous pouvons effectuer sur les sous-catégories. Via une reformulation des travaux de (Garver *et al.*, 2023) en termes d'*entre-position* de partages, nous verrons que, sous certaines conditions impliquant notamment la façon dont sont entre-posés les partages décrivant la forme générique de Jordan des représentations de ces catégories, ces opérations préservent la retrouvabilité de Jordan canonique.

Ensuite, nous donnons un algorithme qui permet de construire les catégories données par les ensembles d'intervalles adjacent-évitant maximaux via ces opérations.

Après cela, nous prouvons le résultat principal dans le cas d'un carquois linéairement orienté en montrant que nous sommes, à chaque opération utilisée dans l'algorithme, dans un cas où la retrouvabilité de Jordan canonique est préservée, et nous concluons le résultat pour tout carquois de type A_n en se réduisant au cas précédent.

4.2 The article

Abstract : Let Q be a quiver of A_n type and \mathbb{K} be an algebraically closed field. A nilpotent endomorphism of a quiver representation induces a linear transformation of the vector space at each vertex. Generically among all nilpotent endomorphisms of a fixed representation X , there exists a well-defined Jordan form of each of these linear transformations $\text{GenJF}(X)$, called the generic Jordan form data of X . A subcategory of $\text{rep}(Q)$ is Jordan recoverable if we can recover X up to isomorphism from its generic Jordan form data. There is a procedure which may allow one to invert the map from representations to generic Jordan form data. The subcategories for which this procedure works are called canonically Jordan recoverable. We focus on the subcategories of $\text{rep}(Q)$ that are canonically Jordan recoverable, and we give a combinatorial characterization of them.

4.2.1 Introduction

4.2.1.1 Jordan recoverability and canonical Jordan recoverability

Let Q be an A_n type quiver. Consider X a finite-dimensional representation of Q over an algebraically closed field \mathbb{K} . Denote by $\text{NEnd}(X)$ the set of nilpotent endomorphisms of X . Fix $N \in \text{NEnd}(X)$. For each vertex $q \in Q_0$, the morphism N induces a nilpotent endomorphism N_q of X_q . We can extract from N a sequence of integer partitions $\lambda^q \vdash \dim(X_q)$, which correspond to the Jordan block sizes of the Jordan form of each N_q . Write $\text{JF}(N) = \lambda = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$. Thanks to a result from (Garver *et al.*, 2023), for any $X \in \text{rep}(Q)$, there is a dense open set in $\text{NEnd}(X)$ on which JF is constant. We denote $\text{GenJF}(X)$ this constant that we will refer to as the *generic Jordan form data* of X .

Throughout the article, by subcategory, we mean a full subcategory closed under direct sums and direct summands. Our interest is to characterize the subcategories \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ such that we can recover up to isomorphism $X \in \mathcal{C}$ from $\text{GenJF}(X)$. Such a subcategory \mathcal{C} is called *Jordan recoverable*.

In general, determining which subcategories of $\text{rep}(Q)$ are Jordan recoverable is still not an easy task. For some cases, one can reconstruct X from $\text{GenJF}(X)$ thanks to the existence of a generic choice of a representation Y in $\text{rep}(Q)$ such that Y admits a nilpotent endomorphism of Jordan form $\text{GenJF}(X)$, and then we can ask if Y is isomorphic to X .

Concretely, for all $\#Q_0$ -tuples of integer partitions λ , denote $\text{rep}(Q, \lambda)$ the variety of representations of Q

which admit a nilpotent endomorphism of Jordan form λ . For a fixed subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$, we could try to find if for any $X \in \mathcal{C}$ there is a (Zariski) dense open set Ω in $\text{rep}(Q, \text{GenJF}(X))$, such that any $Y \in \Omega$ is isomorphic to X . Such a subcategory \mathcal{C} is said to be *canonically Jordan recoverable*.

Note that a subcategory that is Jordan recoverable is not necessarily canonically Jordan recoverable.

Example 4.6. Let Q be the following A_2 type quiver.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

The only subcategory of $\text{rep}(Q)$ which is not Jordan recoverable is $\text{rep}(Q)$ itself. Indeed any strict subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ is generated by at most two indecomposable representations, and the dimension vectors of these indecomposable representations are linearly independent. It means that we can recover a representation \mathcal{C} from its dimension vector, and a fortiori, from its generic Jordan form.

However, $\text{rep}(Q)$ is not Jordan recoverable : take for instance $X = S_1 \oplus S_2$ and $Y = P_1$; they do not admit a nonzero nilpotent endomorphism (X_i, Y_i are 1-dimensional \mathbb{K} -vector-spaces for $i \in \{1, 2\}$) and hence $\text{GenJF}(S_1 \oplus S_2) = ((1), (1)) = \text{GenJF}(P_1)$.

Now we give an example of a category that is Jordan recoverable but that is not canonically Jordan recoverable. Let $\mathcal{C} = \text{add}(S_1, S_2)$. Consider $X = S_1^a \oplus S_2^b$ with $a, b \in \mathbb{N}$. Any pair of nilpotent endomorphisms (N_1, N_2) , with $N_i : X_i \rightarrow X_i$ for $i \in \{1, 2\}$, endows X with a nilpotent endomorphism $N = (N_1, N_2)$. A generic nilpotent endomorphism admits a Jordan form given by the tuple $((a), (b))$ of integer partitions. So $\text{GenJF}(X) = ((a), (b))$ and we can check again that \mathcal{C} is Jordan recoverable.

However, \mathcal{C} is not canonically Jordan recoverable. Fix $X = S_1 \oplus S_2$. Then $\text{GenJF}(X) = ((1), (1))$. Let $Y \in \text{rep}(Q)$ such that Y admits a nilpotent endomorphism N of the Jordan form $((1), (1))$. Thus $N = 0$. In such case, $Y_1 \cong \mathbb{K} \cong Y_2$ and $Y_\alpha = k \text{Id}$. The endomorphism N does not give any restriction on the value $k \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{ccc}
Y \cong \mathbb{K} & \xrightarrow{k} & \mathbb{K} \\
\downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
Y \cong \mathbb{K} & \xrightarrow{k} & \mathbb{K}
\end{array}$$

Only two choices give different representations Y up to isomorphism : $k = 0$ and $k \neq 0$. The first case returns X while the second gives us P_1 . We get a dense open set Ω in the collection of representations admitting a nilpotent endomorphism of Jordan form $((1), (1))$ in which all the representations are isomorphic to P_1 . Hence we did not recover X , and \mathcal{C} is not canonically Jordan recoverable as we claimed. \square

This paper aims to give a combinatorial description of all canonically Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$ for Q being any A_n type quiver and for $n \in \mathbb{N}^*$.

4.2.1.2 Adjacency-avoiding interval subsets

Call *intervals* of $\{1, \dots, n\}$ the sets $\{i, i + 1, \dots, j\}$ with $1 \leq i \leq j \leq n$. Fix an A_n quiver Q . The intervals in $\{1, \dots, n\}$ provide a natural description of $\text{rep}(Q)$: the indecomposable representations are in one-to-one correspondence with the intervals of $\{1, \dots, n\}$, and morphisms between two indecomposable representations are completely described in terms of specific subintervals of both corresponding intervals. Section 4.2.2 gives the precise statement. Denote by X_K the indecomposable representation of $\text{rep}(Q)$ corresponding to the interval K .

For any interval K , write $b(K)$ as the upper bound and $e(K)$ as the lower bound of K . Two intervals K and L are *adjacent* if either $b(K) = e(L) + 1$ or $b(L) = e(K) + 1$. We have the following result inspired by a previous work (Dequêne, 2023) and by Example 4.6.

Proposition 4.7. *Let \mathcal{C} be a subcategory of $\text{rep}(Q)$. Write \mathcal{J} for the interval set corresponding to the indecomposable representations that additively generate \mathcal{C} . If two intervals exist $K, L \in \mathcal{J}$ such that K and L are adjacent, then \mathcal{C} is not canonically Jordan recoverable.*

Let us first prove this lemma which will be helpful.

Lemma 4.8. *Fix an A_n type quiver Q . Let K_1, \dots, K_p be $p \in \mathbb{N}^*$ disjoint intervals. Write $J = K_1 \cup \dots \cup K_p$. Then $\text{GenJF}(X_{K_1} \oplus \dots \oplus X_{K_p}) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ with :*

- $\lambda^q = (1)$ for $q \in J$;
- $\lambda^q = (0)$ otherwise.

Proof. Since, for $q \in Q_0$, $\dim(X_q) \leq 1$, we must have $N = 0$. The result follows. ■

Proof of Proposition 4.7. Let $K, L \in \mathcal{J}$ two adjacent intervals. Write $X = X_K \oplus X_L$ and $J = K \cup L$. Note that J is an interval. We get $\text{GenJF}(X) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ as defined in the previous lemma.

First, note that the only nilpotent endomorphism N such that $\text{JF}(N) = \lambda$ is the zero morphism. Therefore, choosing $Y \in \text{rep}(Q, \lambda)$ is equivalent to taking a representation Y such that $Y_q \cong \mathbb{K}$ if $q \in J$, and $Y_q = 0$ otherwise, without any other restrictions. We get that

$$\Omega = \{Z \in \text{rep}(Q, \lambda) \mid Z_\alpha \neq 0, \forall \alpha \in Q_1, \{s(\alpha), t(\alpha)\} \subset J\}$$

is a dense open set of $\text{rep}(Q, \lambda)$. Following this last statement, and by observing that $Z \cong X_J \not\cong X$ for all $Z \in \Omega$, we conclude that \mathcal{C} is not canonically Jordan recoverable. ■

This result highlights the necessary condition to avoid the existence of two adjacent intervals among the set of intervals corresponding to indecomposable representations that generate \mathcal{C} . We define an **adjacency-avoiding** interval set as an interval set with no pair of adjacent intervals.

We aim to prove that the adjacency-avoiding property also gives a sufficient combinatorial criterion to detect canonical Jordan recoverability.

Theorem 4.9. *Let Q be an A_n type quiver, and \mathcal{C} be a subcategory of $\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$. Write \mathcal{J} for the interval set corresponding to the indecomposable representations that additively generate \mathcal{C} . Then \mathcal{C} is canonically Jordan recoverable if and only if \mathcal{J} is adjacency-avoiding.*

This theorem completely characterizes the canonically Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$ and specializes to give a previous result of Garver, Patrias, and Thomas for A_n type quivers.

Corollary 4.10 ((Garver et al., 2023)). *For Q an A_n type quiver. Let m be a vertex of Q . The category $\mathcal{C}_{Q,m}$ generated by the indecomposable representations X_K for K intervals containing m is canonically Jordan recoverable.*

Proof. Let K and L be two intervals corresponding to two indecomposable representations of $\mathcal{C}_{Q,m}$. By definition, $K \cap L \supseteq \{m\}$. Therefore K and L are not adjacent, as two adjacent intervals must have an empty intersection. We conclude the desired result by applying Theorem 4.9. ■

To prove Theorem 4.9, we first describe the maximal adjacency-avoiding interval sets (for inclusion). After that, following a revisited version of the work of (Garver *et al.*, 2023), we give a recursive construction of the subcategories generated by indecomposable representations provided by these interval sets.

Then, we prove the main result for the linearly oriented case by showing that operations applied during the construction of those subcategories preserve the canonical Jordan recoverability. We conclude the result in the general case by reducing to the linearly oriented case.

4.2.2 Some generalities about A_n type quiver representations

4.2.2.1 A_n type quivers

A **quiver** Q is a 4-tuple (Q_0, Q_1, s, t) where Q_0 is *the set of vertices*, Q_1 is *the set of arrows* and $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ are respectively *source* and *target functions*. The *opposite quiver* of Q , denoted Q^{op} , is the quiver obtained from Q by reversing the direction of all the arrows of Q . We say that Q is a **finite** quiver whenever Q_0 and Q_1 are finite sets. The **underlying graph** of a finite quiver Q is a pair $\mathcal{G}(Q) = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ where $\mathcal{G}_0 = Q_0$ is the set of vertices of the graph and $\mathcal{G}_1 = \{\{s(\alpha), t(\alpha)\} \mid \alpha \in Q_1\}$ is the (multi)set of edges of the graph. Note that a finite quiver Q can be seen as the graph $\mathcal{G}(Q)$ endowed with an orientation for each edge.

Let Q be a finite quiver, and $n > 0$ be an integer. Assume that $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. The quiver Q is said to be **of A_n type** whenever $\mathcal{G}(Q)$ is of the following shape.

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n$$

We denote \overrightarrow{A}_n the A_n type quiver where all the arrows of Q are exactly $i \rightarrow i+1$ for $i \in \{1, \dots, n-1\}$. An A_n type quiver Q is called **linearly oriented** if either $Q = \overrightarrow{A}_n$ or $Q = \overrightarrow{A}_n^{\text{op}}$.

4.2.2.2 Representations

Let \mathbb{K} be an algebraically closed field. This assumption is a restriction that we need to use the results of (Garver *et al.*, 2023). They need it because some of their arguments rely on algebraic geometry.

A **representation of Q (over \mathbb{K})** is a pair $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ where :

- for each $q \in Q_0$, X_q is a \mathbb{K} -vector space ;
- for each $\alpha \in Q_1$, $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_{t(\alpha)}$ is a \mathbb{K} -linear map.

We say that such a representation X is **finite dimensional** if $\dim X_q < \infty$ for all $q \in Q_0$. We denote $\mathbf{dim}(X) = (\dim X_q)_{q \in Q_0}$ the **dimension vector** of X . From now on, when we talk about representations of a quiver, we mean finite-dimensional representations.

Let X and Y be two representations of Q . A **morphism** ϕ from X to Y is a collection of linear maps $(\phi_q)_{q \in Q_0}$ such that for any $\alpha \in Q_1$, we have $\phi_{t(\alpha)} X_\alpha = Y_\alpha \phi_{s(\alpha)}$. Write $X \cong Y$ whenever X and Y are isomorphic. Denote $\text{Hom}(X, Y)$ the **homomorphism space** from X to Y and $\text{End}(X) = \text{Hom}(X, X)$ the **endomorphism space** of X .

Recall that the representations of Q endowed with the morphisms between them form a category functorially equivalent to the category of (finite-dimensional) left modules over the path algebra associated to Q . Denote $\text{rep}(Q)$ **the category of finite-dimensional representations of Q** . Remember that $\text{rep}(Q)$ depends on the field \mathbb{K} , but for simplicity we suppress it from the notation.

A representation $M \neq 0$ is called **indecomposable** if either $X = 0$ or $Y = 0$, whenever $M \cong X \oplus Y$. We write $\text{Ind}(Q)$ for the indecomposable representations in $\text{rep}(Q)$ up to isomorphism.

Any $M \in \text{rep}(Q)$ admits a unique decomposition into a finite sum of indecomposable representations up to isomorphism. Given $X \in \text{Ind}(Q)$, denote $\text{mult}(X, M)$ the **multiplicity of X in M** defined as the number of the indecomposable representations isomorphic to X appearing in the decomposition of M .

We now recall a complete description of the indecomposable representations of an A_n type quiver and the morphisms between them. We will state these results in terms of intervals of $\{1, \dots, n\}$.

Let n be a positive integer. The **intervals** of $\{1, \dots, n\}$ are the sets $\llbracket i, j \rrbracket := \{i, i+1, \dots, j\}$ given by all $1 \leq i \leq j \leq n$. If $i = j$, we write $\llbracket i, i \rrbracket = \llbracket i \rrbracket$. Denote \mathcal{I}_n the set of intervals in $\{1, \dots, n\}$. For $K = \llbracket i, j \rrbracket \in \mathcal{I}_n$, write $b(K) = i$ and $e(K) = j$. Call **interval set** any subset of \mathcal{I}_n .

Definition 4.11. Let Q be an A_n type quiver. Consider $K, L \in \mathcal{I}_n$ such that $K \subseteq L$. We say that :

- K is **above** L (**relative to** Q) if the two following assertions are satisfied :
 - $b(K) = b(L)$ or we have the arrow $b(K) - 1 \leftarrow b(K)$ in Q ;
 - $e(K) = e(L)$ or we have the arrow $e(K) \rightarrow e(K) + 1$ in Q .
- K is **below** L (**relative to** Q) if the two following assertions are satisfied :
 - $b(K) = b(L)$ or we have the arrow $b(K) - 1 \rightarrow b(K)$ in Q ;
 - $e(K) = e(L)$ or we have the arrow $e(K) \leftarrow e(K) + 1$ in Q .

Example 4.12. Consider the following quiver.

$$\vec{A}_3 = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Then $\llbracket 2 \rrbracket$ is above $\llbracket 2, 3 \rrbracket$ and below $\llbracket 1, 2 \rrbracket$. ┘

Note that any interval is above and below itself, relative to all A_n type quivers. Let Q be a quiver of A_n type. To any interval $K \in \mathcal{I}_n$, we consider X_K the representation of Q defined as it follows :

- $(X_K)_q = \mathbb{K}$ if $q \in K$, $(X_K)_q = 0$ otherwise ;
- $(X_K)_\alpha = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ if α is such that $\{s(\alpha), t(\alpha)\} \subseteq K$, $(X_K)_\alpha = 0$ otherwise ;

Note that X_K is an indecomposable representation of Q for all $K \in \mathcal{I}_n$.

Theorem 4.13. *Let Q be an A_n type quiver.*

- (a) *The isomorphism classes of indecomposable representations of Q are in bijection with \mathcal{I}_n ; more precisely, they are described by indecomposable representations X_K for $K \in \mathcal{I}_n$;*
- (b) *The homomorphism space between two indecomposable representations of Q is of dimension at most one ; more precisely, $\text{Hom}(X_K, X_L)$ is nonzero if and only if there exists an interval J such that J is above K and below L relative to Q ; if such an interval exists, it is unique and $\text{Hom}(X_K, X_L)$ consists of scalar multiples of the morphism $\phi = (\phi_q)_{q \in Q_0}$ such that $\phi_q = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ if $q \in J$ and $\phi_q = 0$ otherwise.*

In the light of the previous result :

- for all interval sets $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$ and all quivers Q of A_n type, write $\text{Cat}_Q(\mathcal{J})$ the subcategory of $\text{rep}(Q)$ additively generated by X_K for $K \in \mathcal{J}$;

- for all quivers Q of A_n type and for all nonzero subcategories \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$, let $\text{Int}(\mathcal{C})$ be the interval set of \mathcal{I}_n consisting of intervals K such that $X_K \in \mathcal{C}$.

Recall that we only consider full subcategories closed under direct sums and direct summands. Such subcategories are additively generated by X_K for $K \in \mathcal{J}$ for some $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_n$.

Hence, for any A_n type quiver Q , for all $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$ and for all subcategories $\mathcal{C} \subseteq \text{rep}(Q)$, we have $\mathcal{J} = \text{Int}(\text{Cat}_Q(\mathcal{J}))$ and $\mathcal{C} = \text{Cat}_Q(\text{Int}(\mathcal{C}))$.

4.2.2.3 Reflection functors

In this subsection, we will recall the definition of *reflection functors* for any quiver Q . For our purposes in this paper, defining those functors only on objects is sufficient.

Let Q be an arbitrary quiver and v be a vertex Q . Denote $\sigma_v(Q)$ the quiver obtained from Q by reversing the directions of the arrows incident to v . If $\alpha \in Q_1$ such that $v \in \{s(\alpha), t(\alpha)\}$, denote $\tilde{\alpha}$ the reversed arrow of α in $\sigma_v(Q)$.

Now assume that v is a sink of Q . Consider $\Xi = \sigma_v(Q)$. The *reflection functor*

$$\mathcal{R}_v^+ : \text{rep}(Q) \longrightarrow \text{rep}(\Xi)$$

is defined as follows. Let $X = ((X_q)_{q \in Q_0}, (X_\beta)_{\beta \in Q_1}) \in \text{rep}(Q)$. We set $\mathcal{R}_v^+(X) = ((Y_q)_{q \in \Xi_0}, (Y_\beta)_{\beta \in \Xi_1}) \in \text{rep}(\Xi)$ where

- $Y_q = X_q$ for $q \neq v$ and

$$Y_v = \text{Ker} \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=v} X_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=v} X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_v \right);$$

- $Y_\beta = X_\beta$ if $\beta \in Q_1$ such that $t(\beta) \neq v$, otherwise $Y_{\tilde{\beta}} : Y_v \longrightarrow X_{s(\beta)}$ is the composition of the kernel inclusion of Y_v to $\bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=v} X_{s(\alpha)}$ with the projection onto the direct summand $X_{s(\beta)}$.

If v is a source of Q , the *reflection functor*

$$\mathcal{R}_v^- : \text{rep}(Q) \longrightarrow \text{rep}(\sigma_v(Q))$$

is defined dually.

Example 4.14. Let Q be a quiver and $X \in \text{rep}(Q)$ as below.

$$\begin{array}{c}
Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4 \\
\\
X = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbb{K}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^4 \xleftarrow{\quad} \mathbb{K}^3 \xleftarrow{\quad} \mathbb{K}^2
\end{array}
\end{array}$$

Apply the reflection functor \mathcal{R}_2^+ . The arrows α and β are the only ones with 2 as a target. First we get $\Xi = \sigma_2(Q)$ as follows.

$$\Xi = 1 \xleftarrow{\tilde{\alpha}} 2 \xrightarrow{\tilde{\beta}} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$$

We calculate afterward

$$\text{Ker}(X_\alpha \oplus X_\beta) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{K}^3.$$

Thus we get $\mathcal{R}_2^+(X)$ by replacing the vector space at 2 by \mathbb{K}^3 and defining the morphisms for $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$ by the composition of the kernel inclusion $\mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^6$ and the respective projection to X_1 and X_3 . It gives the following result.

$$\mathcal{R}_2^+(X) = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbb{K}^3 \xleftarrow{\quad} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^3 \xleftarrow{\quad} \mathbb{K}^2
\end{array}$$

┘

The reflection functors are additive, meaning we can understand their actions on objects by knowing their actions on indecomposable objects.

By the following proposition, we recall the action of the reflection functors on $\text{Ind}(Q)$, for Q an A_n type quiver.

Proposition 4.15. *Let Q be an A_n type quiver, $v \in Q_0$ and $\llbracket v \rrbracket \neq K \in \mathcal{I}_n$. Write $\Xi = \sigma_v(Q)$. If v is a sink of Q , then $\mathcal{R}_v^+(X_K) \cong X_{K'} \in \text{rep}(\Xi)$ where*

$$K' = \begin{cases} K \cup \{v\} & \text{if either } e(K) = v - 1 \text{ or } b(k) = v + 1; \\ K \setminus \{v\} & \text{if either } e(K) = v \text{ or } b(K) = v; \\ K & \text{otherwise.} \end{cases} .$$

If v is a source of Q , then $\mathcal{R}_v^-(X_K) = X_{K'}$ where K' is defined as above.

Note that, if v is a sink of Q , $\mathcal{R}_v^+(X_{\llbracket v \rrbracket}) = 0$, and if v is a source of Q , $\mathcal{R}_v^-(X_{\llbracket v \rrbracket}) = 0$. We also recall the following result, which will be helpful later.

Theorem 4.16. *Let Q be a quiver, and v be one of its sinks. Write $\Xi = \sigma_v(Q)$. The reflection functor $\mathcal{R}_v^+ : \text{rep}(Q) \rightarrow \text{rep}(\Xi)$ induces a category equivalence between the full subcategory of $\text{rep}(Q)$ additively generated by the indecomposable representations of Q except the simple projective representation at v and the full subcategory of $\text{rep}(\Xi)$ additively generated by indecomposable representations of Ξ except the simple injective representation at v . The quasi-inverse is induced by the reflection functor $\mathcal{R}_v^- : \text{rep}(\Xi) \rightarrow \text{rep}(Q)$.*

See (Assem *et al.*, 2006, Theorem VII.5.3) for more details.

4.2.3 Jordan recoverability and canonical Jordan recoverability

4.2.3.1 The Greene–Kleitman invariant

In this subsection, for a given A_n type quiver Q , we introduce a combinatorial invariant for any representation of Q , whose representation-theoretic meaning will be shown in the next subsection. Before introducing this invariant, we need to recall some definitions and give some notations.

Recall that, given a quiver Q , the **Auslander–Reiten quiver of $\text{rep}(Q)$** is a quiver whose vertex set is the set of isomorphism classes of indecomposable representations of Q and whose arrow set is the set of irreducible

morphisms between the indecomposable representations.

Given a positive integer m , an **integer partition of m** is a finite weakly decreasing sequence of positive integers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ such that $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = m$. The *length* $\ell(\lambda)$ of such an integer partition λ is k . Its *size* is $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = m$. We write $\lambda \vdash m$ when λ is a partition of m .

Let Q be an A_n type quiver. For all $q \in Q_0$, define the subcategory $\mathcal{C}_{Q,q}$ of $\text{rep}(Q)$ by $\mathcal{C}_{Q,q} = \text{Cat}_Q(\{K \in \mathcal{I}_n \mid q \in K\})$. Fix $X \in \text{rep}(Q)$. We decompose X as below, with $m_K = \text{mult}(X_K, X) \in \mathbb{N}$.

$$X \cong \bigoplus_{K \in \mathcal{I}_n} X_K^{m_K}$$

Consider the full subquiver of the Auslander–Reiten quiver whose vertices are isomorphism classes of indecomposable representation of Q in $\mathcal{C}_{Q,q}$. For $\ell \geq 1$, we consider Π_q^ℓ the set of all ℓ -tuples of maximal paths in this subquiver. Note that these paths start at the vertex corresponding to the projective representation P_q and end at the injective representation I_q . For all ℓ -tuples of paths in the Auslander–Reiten quiver $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell)$, we write $\text{Supp}(\gamma)$ for the set of vertices passed through by some γ_i . For all $\gamma \in \Pi_q^\ell$, we consider a **weight** depending on X defined as follows :

$$\text{wt}_X(\gamma) = \sum_{X_K \in \text{Supp}(\gamma)} m_K.$$

Definition 4.17. The **Greene–Kleitman invariant of X** , denoted $\text{GK}(X)$, is the n -tuple of partitions $\lambda = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$ with λ^q such that :

- $\lambda_1^q = \max_{\gamma \in \Pi_q^1} \text{wt}_X(\gamma)$;
- $\forall i \geq 2, \lambda_i^q = \max_{\gamma \in \Pi_q^i} \text{wt}_X(\gamma) - \max_{\gamma \in \Pi_q^{i-1}} \text{wt}_X(\gamma)$.

Remark 4.18. This definition is a restatement, already made in (Garver *et al.*, 2023), of (Greene et Kleitman, 1976).

Example 4.19. Consider $Q = \overrightarrow{A_5}$. Let $X \in \text{rep}(Q)$. We can picture X , up to isomorphism, as a **filling** of the Auslander–Reiten quiver : meaning a function ϕ_X which associates each X_K to $m_K = \text{mult}(X_K, X)$. We pictured the Auslander–Reiten quiver of $\overrightarrow{A_5}$, and an example of a representation X in Figure 4.1. In Figure 4.2, we represent how we calculate the integer partition λ^3 . One can calculate λ^q following the same process for $q \in Q_0$. By doing all the calculations, we get $\text{GK}(X) = ((10), (11, 6), (11, 17 - 11 = 6, 18 - 17 = 1), (11, 5), (6))$. ┘

Remark 4.20. We can note that if $X \cong Y$ then $\text{GK}(X) = \text{GK}(Y)$ by definition : the filling of the Auslander–Reiten quivers for X and for Y are the same. This property explains why GK is an *invariant of $\text{rep}(Q)$* .

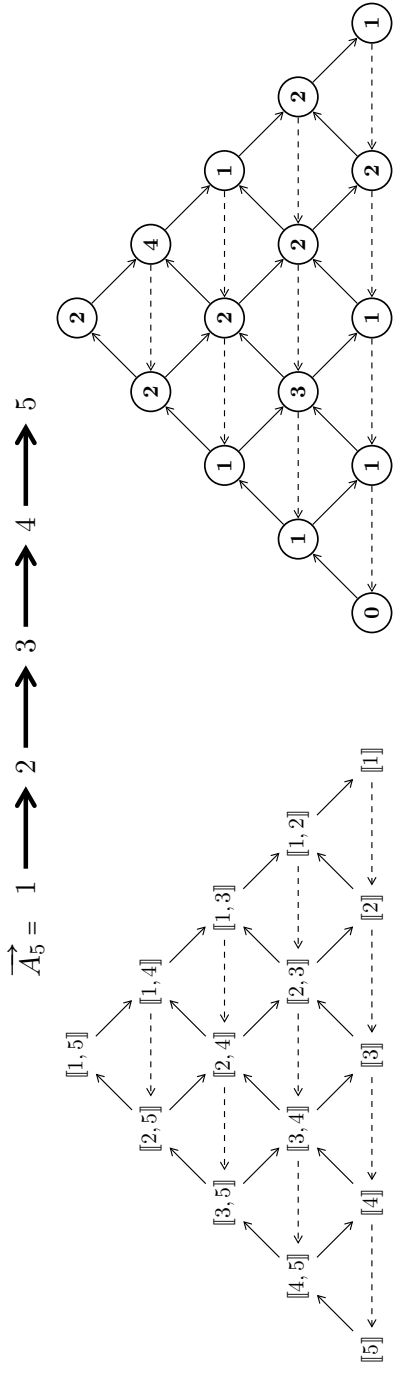


FIGURE 4.1 The quiver \vec{A}_5 , its Auslander–Reiten quiver and a choice of a representation X seen as a *filling* of the AR-quiver. We label $[[i, j]]$ the vertex corresponding to the isomorphism classes of the indecomposable representation $X_{[[i, j]]}$ in $\text{rep}(\vec{A}_5)$. The dashed arrows correspond to the action of the Auslander–Reiten translation τ .

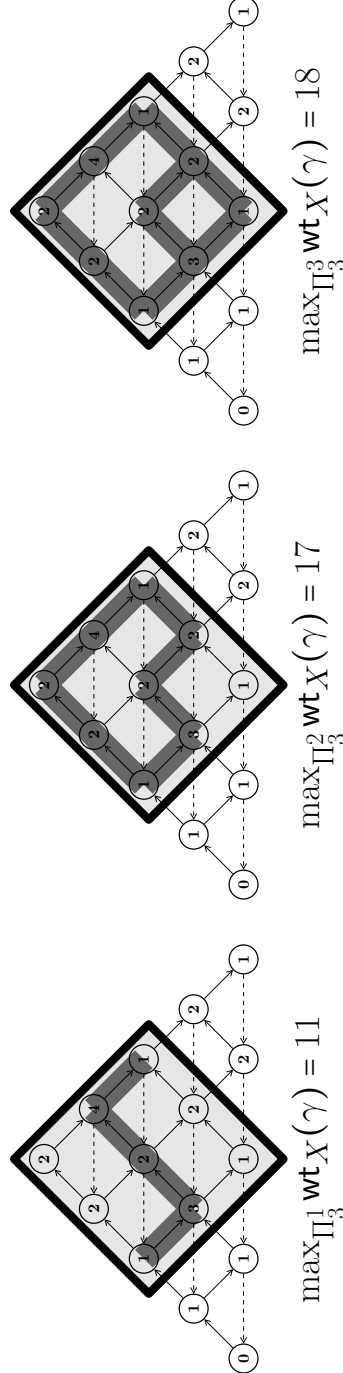


FIGURE 4.2 Explicit way to calculate $\max_{\Pi_3^5} \text{wt}_X(\gamma)$ for the representation X defined in Figure 4.1.

Following this remark, one can be interested in determining for which subcategories \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ the Greene–Kleitman invariant is complete.

In the next subsection, we will see that answering this question is equivalent to characterizing all the Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$. In this paper, we aim to partially answer this question by characterizing all the canonically Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$.

4.2.3.2 Jordan recoverability

Let Q be an A_n type quiver. Consider $X \in \text{rep}(Q)$. A **nilpotent endomorphism** $N : X \rightarrow X$ is an endomorphism such that $N^k = 0$ for some integer $k > 0$. One can think of a nilpotent endomorphism N as a collection of nilpotent transformations $(N_q)_{q \in Q_0}$ satisfying an additional compatibility relation. Denote $\text{NEnd}(X)$ the set of nilpotent endomorphisms of X .

Let $\mathbf{dim}(X) = \mathbf{d} = (d_q)_{q \in Q_0}$. For any $N \in \text{NEnd}(X)$, we can consider the Jordan form of N_q at each vertex q . It induces a sequence of partitions $\lambda^q \vdash d_q$. We refer to $(\lambda^q)_{q \in Q_0}$ as the **Jordan form data of N** . Denote it by $\text{JF}(N)$.

The **dominance order** on partitions of an integer n is defined as it follows : for any λ and μ partitions of n , $\lambda \trianglelefteq \mu$ if $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$ for each $k \geq 1$ where we add zero parts to λ and μ if necessary.

We extend this order to any n -tuple of partitions. Introduce first a notation : for $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ and $\boldsymbol{\pi} = (\pi^1, \dots, \pi^n)$ a n -tuple of integer partitions, we write $\boldsymbol{\pi} \vdash \mathbf{d}$ if $\pi^i \vdash d_i$ for $i \in \{1, \dots, n\}$. Now fix $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$. For $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ and $\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^n)$ such that $\boldsymbol{\lambda} \vdash \mathbf{d}$ and $\boldsymbol{\mu} \vdash \mathbf{d}$, we say that $\boldsymbol{\lambda} \trianglelefteq \boldsymbol{\mu}$ if for all $i \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda^i \trianglelefteq \mu^i$.

Before stating a precise result about the generic Jordan form data of any representation of Q , we recall a key outcome from Gansner.

Let Γ be a finite acyclic quiver. Label the vertices of Γ from 1 to $\#\Gamma_0$ such that, for all $i, j \in \{1, \dots, \#\Gamma_0\}$, if there is an arrow $i \rightarrow j$ in Γ , then $i < j$.

For $\ell \geq 1$, we write Π_Γ^ℓ the set of all ℓ -tuples of maximal paths in Γ . For $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell) \in \Pi_\Gamma^\ell$, write $\text{Supp}(\gamma)$ the set of vertices passed through by some γ_i . We define $\Delta(\Gamma) = (\Delta_\ell(\Gamma))_{\ell \geq 1}$ for all $\ell \geq 1$ by :

- $\Delta_1(\Gamma) = \max_{\gamma \in \Pi_\Gamma^1} \#\text{Supp}(\gamma)$

- for $\ell \geq 2$, $\Delta_\ell(\Gamma) = \max_{\gamma \in \Pi_\Gamma^\ell} \# \text{Supp}(\gamma) - \max_{\gamma \in \Pi_\Gamma^{\ell-1}} \# \text{Supp}(\gamma)$.

Note that $\Delta_\ell(\Gamma) \geq 0$ for all $\ell \geq 1$, and there exists $\ell_0 \geq 1$ such that $\Delta_{\ell_0}(\Gamma) = 0$.

We define a *generic matrix* of Γ as a $\#\Gamma_0 \times \#\Gamma_0$ matrix $M = (m_{i,j})$ where $m_{i,j} = 0$ whenever there is no arrow $i \rightarrow j$ in Γ , and the rest of its entries are complex numbers algebraically independent over \mathbb{Q} .

We now state the following result proven by Gansner (Gansner, 1981a, Theorem 2.1) and independently by Saks in his thesis (Saks, 1980, Theorem 6.3).

Theorem 4.21. *For any finite acyclic quiver Γ , and for any generic matrix M of Γ , then M is nilpotent and $\text{JF}(M) = \Delta(\Gamma)$.*

One can notice that the construction of $\Delta(\Gamma)$ is closely similar to the one for calculating the Greene–Kleitman invariant at each vertex of Q . These similarities and some previous results from (Garver *et al.*, 2023) allow us to state the following result.

Theorem 4.22. *Let Q be an A_n type quiver. Let Y be a finite-dimensional representation over an algebraically closed field \mathbb{K} . Then $\text{NEnd}(Y)$ is an irreducible algebraic variety. Furthermore, there is a maximum value of JF , with respect to \preceq , on $\text{NEnd}(Y)$ which is attained on a dense open set of $\text{NEnd}(Y)$, and this value is exactly $\text{GK}(Y)$.*

Proof. As a direct consequence of (Garver *et al.*, 2023, Theorem 2.3) stated in a more considerable generality (instead of finite-dimensional representation Y over an A_n type quiver Q , they proved the same result for any finite-dimensional left module Y over a finite-dimensional \mathbb{K} -algebra), we can already affirm that $\text{NEnd}(Y)$ is an irreducible algebraic variety, and the fact that JF admits a maximal value on $\text{NEnd}(Y)$ attained on a dense open set.

We must prove that this maximal value is $\text{GK}(Y)$. This result is a consequence of Theorem 4.21. We can in fact notice that $\text{GK}(Y) = (\Delta(\Gamma(q)))_{q \in Q_0}$ where $\Gamma(q)$ is the full subquiver of the Auslander–Reiten quiver of $\text{rep}(Q)$ in which we replace each vertex corresponding to the isomorphism class of X_K by a chain of length $m_K = \text{mult}(Y, X_K)$. This completes the proof. ■

By Theorem 4.22, we can define $\text{GenJF}(X)$ the **generic Jordan form data** of X as this maximal value of JF on $\text{NEnd}(X)$. Keep in mind that $\text{GenJF}(X) = \text{GK}(X)$. We only change its name for representation-theoretic purposes.

Definition 4.23. A subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ is called *Jordan recoverable* if from a tuple of partitions λ there is at most a unique (up to isomorphism) $X \in \mathcal{C}$ such that $\text{GenJF}(X) = \lambda$.

The Jordan recoverable categories of $\text{rep}(Q)$ are precisely those for which GK is a complete invariant.

Example 4.24. Consider the A_3 type quiver Q in Figure 4.3.

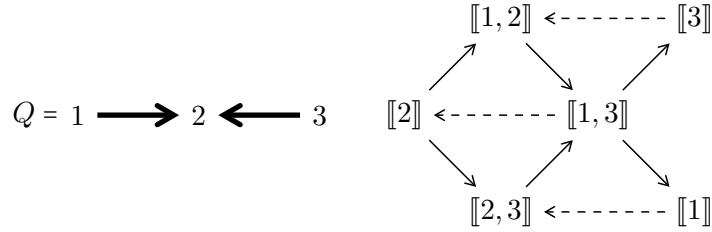


FIGURE 4.3 The A_3 type quiver considered (on the left) and its Auslander–Reiten quiver (on the right).

Here are some examples of Jordan recoverable $\text{rep}(Q)$ subcategories.

- The subcategory $\mathcal{C}_1 = \text{Cat}_Q(\{[[1]], [[2]], [[3]]\})$ is Jordan recoverable : the dimension vectors of the indecomposable representations which generate \mathcal{C}_1 are linearly independent. More explicitly, for $X \in \mathcal{C}_1$, there exists a unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ such that $X \cong X_{[[1]]}^a \oplus X_{[[2]]}^b \oplus X_{[[3]]}^c$. Following calculation of $\text{GK}(X)$ (see Figure 4.4), we get $\text{GenJF}(X) = ((a), (b), (c))$. This data determines $X \in \mathcal{C}$.

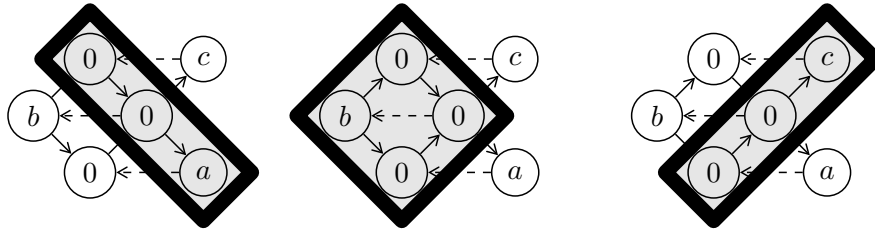


FIGURE 4.4 The rectangle corresponds to indecomposable representations that are in $\mathcal{C}_{Q,m}$ for $m = 1, 2, 3$ from left to right. We use it as in Figure 4.2 to get $\text{GenJF}(X)$ for $X \in \mathcal{C}_1$ in Example 4.24.

- The subcategory $\mathcal{C}_2 = \text{Cat}_Q(\{[[1]], [[1, 3]], [[3]]\})$ is Jordan recoverable. For $X \in \mathcal{C}$, there exists $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ such that $X \cong X_{[[1]]}^a \oplus X_{[[1, 3]]}^b \oplus X_{[[3]]}^c$. Following Figure 4.5, we get that $\text{GenJF}(X) = ((a + b), (b), (b + c))$. Note that we can recover $X \in \mathcal{C}$ from this data. \lrcorner

Contrary to the previous example, in general, we must deal with many equations to prove that a subcategory $\mathcal{C} \subset \text{rep}(Q)$ is Jordan recoverable. We can ask ourselves if a more general way exists to recover X from its

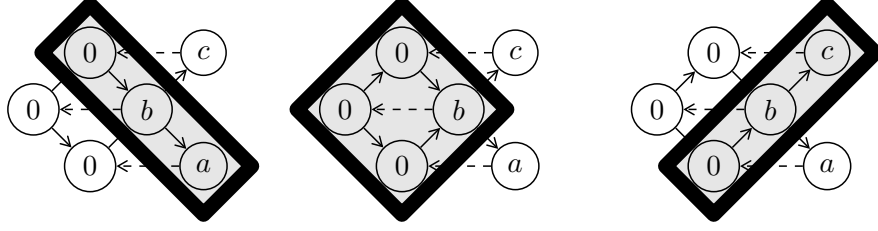


FIGURE 4.5 The way to get $\text{GenJF}(X)$ for $X \in \mathcal{C}_2$ in Example 4.24.

generic Jordan form data.

4.2.3.3 Canonical Jordan recoverability

Let Q be an A_n quiver. Consider $X \in \text{rep}(Q)$. Suppose that $\lambda = \text{GenJF}(X) = (\lambda^q)_{q \in Q_0}$. From that we get a tuple $d_q = |\lambda^q|$ consisting of the dimension of the vector space X_q at each vertex q . Let Y_q be a vector space of dimension d_q and N_q a nilpotent endomorphism of Y_q with Jordan blocks size given by λ^q .

Let $\text{rep}(Q, \lambda)$ denote the set of representations $Y = ((Y_q)_{q \in Q_0}, (Y_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ such that the Y_q are defined as above and $N = (N_q)_{q \in Q_0}$ defines a nilpotent endomorphism of Y . Under our assumption of Q being of type A_n , (Garver *et al.*, 2023, Corollary 2.5) showed that $\text{rep}(Q, \lambda)$ is an irreducible variety, and then they deduce that there exists a dense open set $\Omega \subset \text{rep}(Q, \lambda)$ such that all the representations in Ω are all isomorphic.

We denote $\text{GenRep}(\lambda)$, called the *generic representation of Q with Jordan form λ* , the isomorphism class of representations that corresponds to the dense open set Ω in $\text{rep}(Q, \lambda)$.

Definition 4.25. A subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$ is said to be *canonically Jordan recoverable* if, for any $X \in \mathcal{C}$, $\text{GenRep}(\text{GenJF}(X)) \cong X$.

We have an inverse of GK in such a category. Then obviously, any canonically Jordan recoverable category is Jordan recoverable. However, there are Jordan recoverable categories that are not canonically Jordan recoverable.

Example 4.26. Let Q be the A_3 type quiver of Example 4.24.

- The category \mathcal{C}_1 is not canonically Jordan recoverable by following the explanations already given in Example 4.6.
- The category \mathcal{C}_2 is canonically Jordan recoverable. Let $\lambda = ((a+b), (b), (b+c))$ for a fixed triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Consider $Y \in \text{rep}(Q, \lambda)$ and $N = (N_1, N_2, N_3) \in \text{NEnd}(Y)$ such that $\text{JF}(N) = \lambda$.

There exists $u_1 \in Y_1$ such that $N_1^{a+b-1}(u_1) \neq 0$. Thus, by writing $u_i = N_1^{i-1}(u_1)$ for $i \in \{1, \dots, a+b\}$, we get that (u_1, \dots, u_{a+b}) is a basis of Y_1 , adapted to N . Similarly, we construct the bases (v_1, \dots, v_b) and (w_1, \dots, w_{b+c}) of respectively Y_2 and Y_3 such that they are adapted to N (see Figure 4.6). We now have to describe Y_α and Y_β . Thanks to the chosen bases, and square commutativity relations satisfied

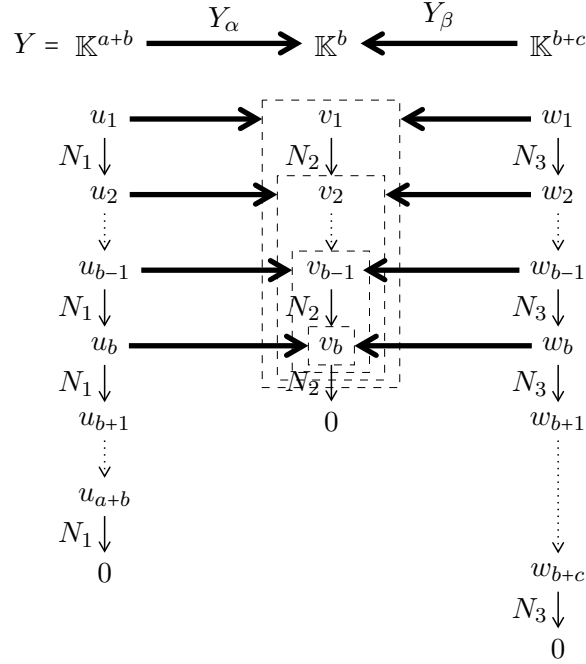


FIGURE 4.6 Illustration of the configuration described to study the canonical Jordan recoverability of \mathcal{C}_2 . Note that $Y_\alpha(u_i) = 0$ and $Y_\beta(w_i) = 0$ for $i > b$ by square commutativity relations.

by N , we only have to describe the image of u_1 by Y_α to describe all Y_α and the same goes for Y_β . Then $Y_\alpha(u_1)$ has to be a \mathbb{K} -linear combination of (v_1, \dots, v_b) , say $(\alpha) : Y_\alpha(u_1) = k_1 v_1 + \dots + k_b v_b$ with $k_1, \dots, k_b \in \mathbb{K}$. Among all the choices we could make, there exists a dense open set $\Omega_1 \subset \text{rep}(Q, \lambda)$ such that for $Y \in \Omega_1$, $Y_\alpha(u_1) \notin \text{Im}(N_2)$ (this dense open set can be seen as taking $k_1 \neq 0$ in (α)). Analogously, there exists a dense open set Ω_2 such that $Y_\beta(w_1) \notin \text{Im}(N_2)$. Therefore, for all Y in the dense open set $\Omega_1 \cap \Omega_2$, we get that $Y \cong X_{[1]}^a \oplus X_{[1,3]}^b \oplus X_{[3]}^c$. This proves our claim. \square

This paper describes all the canonically Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$ for any A_n type quiver.

4.2.4 Storbility

In this section, we introduce a relation among integer partitions which we call storability. We use it to describe the interactions between integer partitions of a generic Jordan form of a representation in a canonically Jordan

recoverable category.

4.2.4.1 Storable pairs

Definition 4.27. Let λ and μ be two integer partitions. The pair (λ, μ) is *storable* if for all $i \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$ (adding zero parts as needed). Such a pair is *strongly storable* if in addition $\lambda_1 = \mu_1$.

We represent and characterize storable pairs visually. Fill two rows of 45° rotated boxes with the entries of λ and μ as in Figure 4.7, adding infinitely many zeros to the right. Then (λ, μ) is storable if the entries weakly decrease from left to right. We give two results that arise from the definition.

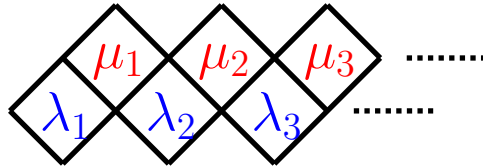


FIGURE 4.7 Illustration of storability of (λ, μ) .

Lemma 4.28. Let λ and μ be two integer partitions.

- 1) If (λ, μ) and (μ, λ) are both storable, then $\lambda = \mu$;
- 2) If (λ, μ) is storable, then $\ell(\lambda) \in \{\ell(\mu), \ell(\mu) + 1\}$.

4.2.4.2 Storable triplets

Definition 4.29. Let λ, μ and ν be three integer partitions. The triplet (λ, μ, ν) is *storable* if the two following conditions are satisfied :

- either (λ, μ) or (μ, λ) is a storable pair;
- either (μ, ν) or (ν, μ) is a storable pair.

More precisely, we say that (λ, μ, ν) is :

- ($\boxplus\boxplus$) (\boxplus, \boxplus)-storable if (λ, μ) and (ν, μ) are storable pairs;
- ($\boxplus\boxminus$) (\boxplus, \boxminus)-storable if (λ, μ) and (μ, ν) are storable pairs;
- ($\boxminus\boxplus$) (\boxminus, \boxplus)-storable if (μ, λ) and (ν, μ) are storable pairs;
- ($\boxminus\boxminus$) (\boxminus, \boxminus)-storable if (μ, λ) and (μ, ν) are storable pairs.

Such a triplet is **strongly storable** whenever $\lambda_1 = \mu_1$ or $\mu_1 = \nu_1$.

In Figure 4.8, we illustrate the four storability configurations.

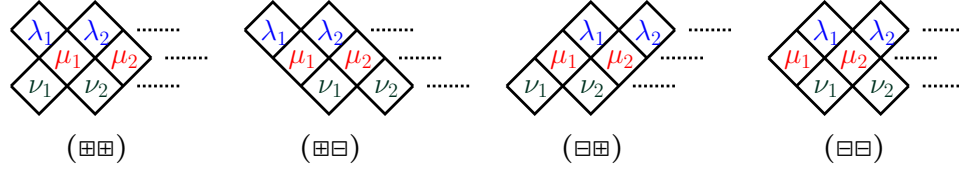


FIGURE 4.8 Illustration of the four storability configurations of (λ, μ, ν) .

Definition 4.30. Let λ, μ , and ν be three integer partitions. Assume that (λ, μ, ν) is a storable triplet. We define the **diagonal transformation of μ in (λ, μ, ν)** , denoted $\text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$, to be the integer partition $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ such that :

- if (λ, μ, ν) is (\boxplus, \boxplus) -storable, then we define, for all $i \geq 1$,

$$\theta_i = \begin{cases} \max(\lambda_1, \nu_1) & \text{if } i = 1 \\ \min(\lambda_{i-1}, \nu_{i-1}) + \max(\lambda_i, \nu_i) - \mu_{i-1} & \text{otherwise;} \end{cases}$$

- if (λ, μ, ν) is (\boxplus, \boxminus) -storable, then we define, for all $i \geq 1$,

$$\theta_i = \begin{cases} \lambda_1 + \max(\lambda_2, \nu_1) - \mu_1 & \text{if } i = 1 \\ \min(\lambda_i, \nu_{i-1}) + \max(\lambda_{i+1}, \nu_i) - \mu_i & \text{otherwise;} \end{cases}$$

- if (λ, μ, ν) is (\boxminus, \boxplus) -storable, then we define, for all $i \geq 1$,

$$\theta_i = \begin{cases} \nu_1 + \max(\lambda_1, \nu_2) - \mu_1 & \text{if } i = 1 \\ \min(\lambda_{i-1}, \nu_i) + \max(\lambda_i, \nu_{i+1}) - \mu_i & \text{otherwise;} \end{cases}$$

- if (λ, μ, ν) is (\boxminus, \boxminus) -storable, then we define, for all $i \geq 1$,

$$\theta_i = \min(\lambda_i, \nu_i) + \max(\lambda_{i+1}, \nu_{i+1}) - \mu_{i+1}.$$

We can picture the diagonal operation as doing local operations for each square of μ in the diagram representing the storable triple (λ, μ, ν) (Figure 4.9). Remark that λ and ν play symmetric roles : $\text{diag}(\lambda, \mu, \nu) = \text{diag}(\nu, \mu, \lambda)$. Here are some elementary statements we get for the diagonal transformation.

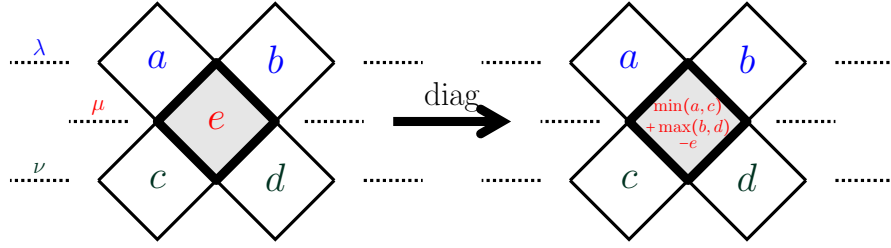


FIGURE 4.9 Illustration of the local operations to calculate $\text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$.

Lemma 4.31. *Let λ, μ and ν be three integer partitions. When it is well-defined, consider $\theta = \text{diag}(\lambda, \nu, \mu)$.*

- 1) *If (λ, μ) is a storable pair, then $\text{diag}(\lambda, \mu, \mu) = \lambda$.*
- 2) *If (λ, μ, ν) is (\boxplus, \boxplus) -storable, then (λ, θ, ν) is strongly (\boxminus, \boxminus) -storable.*
- 3) *If (λ, μ, ν) is (\boxplus, \boxminus) -storable, then (λ, θ, ν) is (\boxplus, \boxminus) -storable.*
- 4) *If (λ, μ, ν) is (\boxminus, \boxplus) -storable, then (λ, θ, ν) is (\boxminus, \boxplus) -storable.*
- 5) *If (λ, μ, ν) is (\boxminus, \boxminus) -storable, then (λ, θ, ν) is (\boxplus, \boxplus) -storable.*
- 6) *If (λ, μ, ν) is either (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxplus, \boxminus) -storable, (\boxminus, \boxplus) -storable or strongly (\boxminus, \boxminus) -storable, then $\text{diag}(\lambda, \theta, \nu) = \mu$.*

4.2.4.3 Rephrasing results of Garver–Patrias–Thomas

In (Garver *et al.*, 2023), they use the following notion.

Definition 4.32. Let ρ, μ be two integer partitions, and $t \in \mathbb{Z}$. We say that ρ and μ are t -interlaced if :

- in the case $t \geq 0$,

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_t \geq \rho_{t+1} \geq \mu_1 \geq \rho_{t+2} \geq \rho_{t+3} \geq \mu_2 \geq \rho_{t+4} \geq \dots$$

- in the case $t \leq 0$, $\rho_i = \mu_i$ for $1 \leq i \leq -t$ and

$$\rho_{-t+1} \geq \mu_{-t+1} \geq \rho_{-t+2} \geq \rho_{-t+3} \geq \mu_{-t+2} \geq \rho_{-t+4} \geq \dots$$

We can state a link between t -interlaced pairs and storable triplets. For two integer partitions λ, ν , we denote $\lambda + \nu$ the integer partition whose multiset of parts is composed of the parts of λ and ν .

Lemma 4.33. *Let λ, μ and ν be three integer partitions. The following assertions hold :*

- i) *if (λ, μ, ν) is (\boxplus, \boxplus) -storable, then $\lambda + \nu$ and μ are 1-interlaced;*

- ii) if (λ, μ, ν) is either (\boxplus, \boxminus) -storable or (\boxminus, \boxplus) -storable, then $\lambda + \nu$ and μ are 0-interlaced;
- iii) if (λ, μ, ν) is strongly (\boxminus, \boxminus) -storable, then $\lambda + \nu$ and μ are -1 -interlaced.

Remark 4.34. Note that :

- if (λ, μ, ν) is (\boxminus, \boxminus) -storable but not strongly (\boxminus, \boxminus) -storable, then $\lambda + \nu$ and μ are not interlaced.
- if (λ, μ, ν) is such that $\lambda + \nu$ and μ are t -interlaced, then this does not imply that (λ, μ, ν) is a storable triplet.

Let q be a vertex of an A_n type quiver Q , $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$ and $\boldsymbol{\pi} \vdash \mathbf{d}$. We extend the tuple of partitions $\boldsymbol{\pi}$ with $\pi^0 = \pi^{n+1} = (0)$. We will write that $\boldsymbol{\pi}$ is **(strongly) (\boxminus, \boxminus) -storable at q** if $(\pi^{q-1}, \pi^q, \pi^{q+1})$ is a (strongly) (\boxminus, \boxminus) -storable triplet. We use the same formulation for the three other storability configurations.

Let v be a source or a sink of Q . We define $\sigma_v(\boldsymbol{\pi})$ to be the n -tuple of partitions obtained from $\boldsymbol{\pi}$ by replacing π^v with $\text{diag}(\pi^{v-1}, \pi^v, \pi^{v+1})$.

Lemma 4.35. *Let v be a vertex of a quiver of A_n type. Let $\boldsymbol{\pi}$ be a n -tuple of integer partitions such that $\boldsymbol{\pi}$ is either (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxplus, \boxminus) -storable, (\boxminus, \boxplus) -storable or strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at v . Consider $X = \text{GenRep}(\boldsymbol{\pi})$ and assume that $\text{GenJF}(X) = \boldsymbol{\pi}$. Then, if v is a source, $\text{GenJF}(\mathcal{R}_v^-(X)) = \sigma_v(\boldsymbol{\pi})$. Similarly, if v is a sink, $\text{GenJF}(\mathcal{R}_v^+(X)) = \sigma_v(\boldsymbol{\pi})$.*

Proof. Let $\boldsymbol{\pi}$ be as assumed. Then $\rho = \pi^{v+1} + \pi^{v-1}$ and $\mu = \pi^v$ are t -interlaced for $t \in \{1, 0, -1\}$ by Lemma 4.33. The desired result follows from (Garver *et al.*, 2023, Theorem 3.12) after checking that the proof given there for t -interlaced pairs with $t \geq 0$ also holds with $t < 0$. ■

Theorem 4.36. *Let v be a vertex of an A_n type quiver Q . Let $\boldsymbol{\pi}$ be a n -tuple of integer partitions such that $\boldsymbol{\pi}$ is (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxplus, \boxminus) -storable, (\boxminus, \boxplus) -storable, or strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at v . Assume that $X \cong \text{GenRep}(\boldsymbol{\pi})$. Then if v is a source, then $\mathcal{R}_v^-(X) \cong \text{GenRep}(\sigma_v(\boldsymbol{\pi}))$. Similarly, if v is a sink, $\mathcal{R}_v^+(X) \cong \text{GenRep}(\sigma_v(\boldsymbol{\pi}))$.*

Proof. Let $\boldsymbol{\pi}$ be as assumed. Then $\rho = \pi^{v+1} + \pi^{v-1}$ and $\mu = \pi^v$ are t -interlaced for $t \in \{1, 0, -1\}$ by Lemma 4.33. The result we wished for follows from (Garver *et al.*, 2023, Theorem 3.10) after checking that the proof given there for t -interlaced pairs with $t \geq 0$ also holds with $t < 0$. ■

4.2.5 Operations preserving canonical Jordan recoverability

4.2.5.1 Adding a simple representation

We define the operation AddS_v on subcategories of $\text{rep}(Q)$ by $\text{AddS}_v(\mathcal{C}) = \text{add}(\mathcal{C}, S_v)$ for any subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$. In general, this operation does not preserve the canonical Jordan recoverability property. This subsection shows it does so under a storability condition on generic Jordan forms of all $X \in \mathcal{C}$.

First, we are interested in preserving Jordan recoverability. Before stating the result, we need the following lemma.

Lemma 4.37. *Let v be a source or a sink of an A_n type quiver Q . Consider $a \in \mathbb{N}$ and $X \in \text{rep}(Q)$. Write $\pi = \text{GenJF}(X)$. Then $\text{GenJF}(S_v^a \oplus X) = \xi$ where $\xi^q = \pi^q$ if $q \neq v$ and $\xi^v = (\pi_1^v + a, \pi_2^v, \pi_3^v, \dots)$.*

Proof. The lemma is a direct consequence of the combinatorial way to calculate $\xi = \text{GenJF}(S_v^a \oplus X)$. Theorem 4.22 tells us that GenJF is given by the Greene–Kleitman invariant GK introduced in Section 4.2.3.1.

We first note that the calculation of ξ differs from the one for $\pi = \text{GenJF}(X)$ only at the vertex v . Moreover, as v is a source (respectively a sink), any maximal path in the Auslander–Reiten quiver of Q over indecomposable objects of \mathcal{C} admitting v in their support will go through S_v , a consequence of the fact that S_v is at the end (respectively at the beginning) of any of those paths. Then $\xi_1^v = \pi_1^v + a$. For the other parts of ξ^v , as S_v will not reappear in the calculation, $\xi_i^v = \pi_i^v$ for $i \geq 2$. ■

Now we can give a sufficient assumption on Jordan recoverable subcategories \mathcal{C} such that $\text{AddS}_v(\mathcal{C})$ is also Jordan recoverable.

Proposition 4.38. *Let Q be a quiver of A_n type, and v be a source or a sink of Q . Let $\mathcal{C} \subset \text{rep}(Q)$ be a Jordan recoverable category such that*

(\star) *For any $X \in \mathcal{C}$, $\text{GenJF}(X)$ is strongly (\boxminus, \boxplus) -storable at v .*

Then $\mathcal{D} = \text{AddS}_v(\mathcal{C})$ is Jordan recoverable.

Proof. Let v , Q and \mathcal{C} be as assumed. Remark that S_v is not an indecomposable object of \mathcal{C} by (\star). Consider $\mathcal{D} = \text{AddS}_v(\mathcal{C})$ and let us prove that \mathcal{D} is Jordan recoverable.

Let $Y, Z \in \mathcal{D}$. We know that $Y \cong S_v^a \oplus Y'$ and $Z \cong S_v^b \oplus Z'$ with $Y', Z' \in \mathcal{C}$ and $a, b \in \mathbb{N}$. Suppose that

$\text{GenJF}(Y) = \text{GenJF}(Z)$. If we take $\lambda = \text{GenJF}(Y')$ and $\mu = \text{GenJF}(Z')$, then, by Lemma 4.37, we get :

- 1) $\lambda^q = \mu^q$ for all $q \neq k$;
- 2) $\lambda_1^v + a = \mu_1^v + b$;
- 3) $\lambda_s^v = \mu_s^v$ for all $s > 1$.

By (\star) and 1), we know that $\lambda_1^v = \max(\lambda_1^{v-1}, \lambda_1^{v+1}) = \max(\mu_1^{v-1}, \mu_1^{v+1}) = \mu_1^v$. Hence $a = b$ and $\lambda = \mu$. Therefore we get that $Y' \cong Z'$ using the fact that \mathcal{C} is Jordan recoverable. We finally conclude that $Y \cong Z$ and thus \mathcal{D} is Jordan recoverable. ■

We now show that we preserve canonical Jordan recoverability under the same assumption (\star) .

Proposition 4.39. *Let Q be a quiver of A_n type, and v be a source or a sink of Q . Let $\mathcal{C} \subset \text{rep}(Q)$ be a canonically Jordan recoverable category satisfying (\star) . Then $\mathcal{D} = \text{AddS}_v(\mathcal{C})$ is canonically Jordan recoverable.*

Proof. Consider $Y \in \mathcal{D} = \text{AddS}_k(\mathcal{C})$. By definition of \mathcal{D} , there exist $a \in \mathbb{N}$ and $Y' \in \mathcal{C}$ such that $Y \cong S_v^a \oplus Y'$. Write $\pi = \text{GenJF}(Y')$. We get $\xi = \text{GenJF}(Y)$ from π as described in Lemma 4.37. Note that from (\star) , we know that π is strongly (\exists, \exists) -storable at v . So $\pi_1^v = \max(\pi_1^{v-1}, \pi_1^{v+1})$.

Let $Z \in \text{rep}(Q, \xi)$. Consider $N \in \text{NEnd}(Z)$ such that $\text{JF}(N) = \xi$. Assume, without loss of generality, that v is a source. Denote $\alpha : v - 1 \leftarrow v$ and $\beta : v \rightarrow v + 1$ the arrows incident to v . From the relation $\pi_1^v = \max(\pi_1^{v-1}, \pi_1^{v+1})$ and the definition of ξ , we get that $N^{\pi_1^v}(Z_v) \subseteq \text{Ker}(Z_\alpha) \cap \text{Ker}(Z_\beta)$. Thus, $\text{mult}(S_v, Z) \geq a$. Saying that $\text{mult}(S_v, Z) > a$ is equivalent to asking the induced morphism from the quotient $Z_v/N^{\pi_1^v}(Z_v)$ to $Z_\alpha \oplus Z_\beta$, to have a nontrivial kernel, which is a closed condition. As $Y \in \text{rep}(Q, \xi)$ and $\text{mult}(S_v, Y) = a$, there exists therefore a dense open set $\Theta \subset \text{rep}(Q, \xi)$ such that, for any $Z \in \Theta$, $\text{mult}(S_v, Z) = a$, which means there exists $Z' \in \text{rep}(Q)$ such that $Z \cong S_v^a \oplus Z'$ and Z' has no indecomposable summand isomorphic to S_v .

Thanks to Lemma 4.37, we know that $\text{GenJF}(Z') = \pi$. By canonical Jordan recoverability of \mathcal{C} , we know that there exists a dense open set $\Phi \subset \text{rep}(Q, \pi)$ such that for any $Z' \in \Phi$, $Z' \cong Y'$. Hence there exists a dense open set $\Omega \subset \text{rep}(Q, \xi)$ such that, for all $Z \in \Omega$, $Z \cong S_v^a \oplus Y' \cong Y$. We conclude that \mathcal{D} is canonically Jordan recoverable. ■

4.2.5.2 Applying reflection functors

This subsection aims to show that under some general storability conditions, reflection functors preserve canonical Jordan recoverability.

First, we prove the following result.

Proposition 4.40. *Let v be a vertex of an A_n type quiver Q . Let $\mathcal{C} \subseteq \text{rep}(Q)$ be a Jordan recoverable category such that :*

(∇) *For any $X \in \mathcal{C}$, $\text{GenJF}(X)$ is either (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxminus, \boxplus) -storable, (\boxplus, \boxminus) -storable or strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at v .*

If v is a source, then $\mathcal{R}_v^-(\mathcal{C})$ is a Jordan recoverable category of $\text{rep}(\sigma_v(Q))$. Similarly, if v is a sink, then $\mathcal{R}_v^+(\mathcal{C})$ is a Jordan recoverable category of $\text{rep}(\sigma_v(Q))$.

Proof. Assume that v is a source. Let $Y, Z \in \mathcal{R}_v^-(\mathcal{C})$. By (∇), we know that $S_v \notin \mathcal{C}$. Therefore there exists a unique representation $Y' \in \mathcal{C}$ (up to isomorphism) such that $\mathcal{R}_v^-(Y') \cong Y$. Similarly, there exists a unique $Z' \in \mathcal{C}$ such that $\mathcal{R}_v^-(Z') = Z$.

Consider $\lambda = \text{GenJF}(Y')$ et $\mu = \text{GenJF}(Z')$. So $\sigma_v(\lambda) = \text{GenJF}(Y)$ and $\sigma_v(\mu) = \text{GenJF}(Z)$. Now assume that $\theta = \sigma_v(\lambda) = \sigma_v(\mu)$. We claim that $Y \cong Z$. We know, by (∇) and Lemma 4.31, that θ is either (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxminus, \boxplus) -storable, (\boxplus, \boxminus) -storable or strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at v . As a consequence of Lemma 4.31 6), we have $\lambda = \mu$. Using the fact that \mathcal{C} is Jordan recoverable : we conclude that $Y' \cong Z'$. Thus $Y \cong Z$, we end up with the result we wished for.

The same goes analogously for $\mathcal{R}_v^+(\mathcal{C})$, whenever v is a sink. ■

Under the same assumption (∇), we can show that reflection functors also preserve canonical Jordan recoverability.

Proposition 4.41. *Let v be a source of an A_n -type quiver Q . Let $\mathcal{C} \subset \text{rep}(Q)$ be a canonically Jordan recoverable category satisfying (∇). Then $\mathcal{R}_v^-(\mathcal{C})$ is a canonically Jordan recoverable subcategory of $\text{rep}(\sigma_v(Q))$. Similarly, if v is a sink, $\mathcal{R}_v^+(\mathcal{C})$ is a canonically Jordan recoverable subcategory of $\text{rep}(\sigma_v(Q))$.*

Proof. Assume that v is a source. Let $Y \in \mathcal{R}_v^-(\mathcal{C})$. By (∇) , $S_v \notin \mathcal{C}$. So there exists a unique representation $Y' \in \mathcal{C}$ (up to isomorphism) such that $\mathcal{R}_v^-(Y') \cong Y$.

Let $\pi = \text{GenJF}(Y')$. As \mathcal{C} is canonically Jordan recoverable, we have that $\text{GenRep}(\pi) \cong Y'$. We can use Lemma 4.35 to get that $\text{GenJF}(Y) = \sigma_v(\pi)$. Moreover, Theorem 4.36 gives us that $\text{GenRep}(\sigma_v(\pi)) \cong \mathcal{R}_v^-(Y') \cong Y$. This completes the proof.

The same goes similarly for $\mathcal{R}_v^+(\mathcal{C})$, whenever v is a sink. ■

4.2.6 Adjacency-avoiding interval sets

Recall the following definition.

Definition 4.42. Two intervals $K, L \in \mathcal{I}_n$ are *adjacent* if either $b(K) = e(L) + 1$ or $b(L) = e(K) + 1$. An interval set \mathcal{J} is said to be *adjacency-avoiding* if there are no pair of adjacent intervals in \mathcal{J} ; meaning, in a more affirmative way, that for all $K, L \in \mathcal{J}$, we have either $K \cap L \neq \emptyset$, $b(K) \geq e(L) + 2$ or $b(L) \geq e(K) + 2$.

We saw in Section 4.2.1.2 that this notion is a crucial point to describe the canonically Jordan recoverable subcategories of $\text{rep}(Q)$ for any A_n type quiver Q . We aim to look into the combinatorial behavior of this family of interval sets, keeping in mind their representation-theoretic interest.

4.2.6.1 Interval sets from shifted bipartitions

This section will describe and characterize all maximal adjacency-avoiding subsets of \mathcal{I}_n .

Definition 4.43. Let \mathbf{B} and \mathbf{E} be two subsets of $\{1, \dots, n\}$. We define $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ to be the following subset of \mathcal{I}_n :

$$\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \{K \in \mathcal{I}_n \mid b(K) \in \mathbf{B} \text{ and } e(K) \in \mathbf{E}\}.$$

Example 4.44. Let $n \geq 1$. For $m \in \{1, \dots, n\}$ ($\mathbf{B} = \llbracket 1, m \rrbracket$, $\mathbf{E} = \llbracket m, n \rrbracket$), we get

$$\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \{K \in \mathcal{I}_n \mid m \in K\}.$$

┘

Note that for a given pair of subsets (\mathbf{B}, \mathbf{E}) , there could exist $b \in \mathbf{B}$ such that for all $e \in \mathbf{E}$, $e < b$: this implies that there are no intervals K in $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ such that $b(K) = b$. Hence $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{J}(\mathbf{B} \setminus \{b\}, \mathbf{E})$. We consider the following notion as we want to completely characterize these interval subsets by pairs of subsets (\mathbf{B}, \mathbf{E}) . We say that (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a **effective pair of subsets** if it satisfies the two assertions below :

- for all $b \in \mathbf{B}$ there exists $e \in \mathbf{E}$ such that $b \leq e$
- for all $e \in \mathbf{E}$, there exists $b \in \mathbf{B}$ such that $b \leq e$.

Lemma 4.45. *For all (\mathbf{C}, \mathbf{F}) pairs of subsets of $\{1, \dots, n\}$, there exists a unique effective pair of subsets (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathcal{J}(\mathbf{C}, \mathbf{F}) = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$.*

For all $\mathbf{A} \subset \{1, \dots, n\}$, we denote by $\mathbf{A}[1]$ **the shift of \mathbf{A}** defined by $\mathbf{A}[1] = \{a + 1 \mid a \in \mathbf{A}\}$.

Definition 4.46. Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be a pair of subsets of $\{1, \dots, n\}$. We say that (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a **shifted disjoint pair** if $\mathbf{B} \cap \mathbf{E}[1] = \emptyset$.

Proposition 4.47. *Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be an effective shifted disjoint pair of subsets in $\{1, \dots, n\}$. Then $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is adjacency-avoiding.*

Proof. Let $K, L \in \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. We want to prove that they are not adjacent. If they intersect, we are done. Otherwise, without loss of generality, assume that $b(L) > e(K)$. By definition, $b(L) \in \mathbf{B}$ and $e(K) \in \mathbf{E}$. We know that $\mathbf{B} \cap \mathbf{E}[1] = \emptyset$. This means that $e(K) + 1 \notin \mathbf{B}$ and so $b(L) \geq e(K) + 2$. Therefore K and L are not adjacent. ■

Definition 4.48. A pair of subsets (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$ is a **shifted interval bipartition** if $\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1] \in \mathcal{I}_{n+1} \cup \{\emptyset\}$, and $\mathbf{B} \cap \mathbf{E}[1] = \emptyset$. Moreover, such a pair is said to be **complete** if $\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1] = \{1, \dots, n + 1\}$.

Remark 4.49. Some remarks :

- Note that if (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a pair of subsets of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1] = \{1, \dots, n + 1\}$, then (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is effective since necessarily $1 \in \mathbf{B}$ and $n \in \mathbf{E}$.
- Define rev the **reverse map** on $\{1, \dots, n\}$, by $\text{rev}(i) = n + 1 - i$. Write $\mathbf{A}^{\text{rev}} = \text{rev}(\mathbf{A})$ for all $\mathbf{A} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Now if (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is an effective shifted interval bipartition, then $(\mathbf{E}^{\text{rev}}, \mathbf{B}^{\text{rev}})$ is too.

We will show that the complete shifted bipartitions describe all the maximal (for inclusion) adjacency-avoiding interval sets.

Lemma 4.50. *Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Then for all $K \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$, either $b(K) - 1 \in \mathbf{E}$ or $e(K) + 1 \in \mathbf{B}$.*

Proof. Let $K \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. We have either $b(K) \notin \mathbf{B}$ or $e(K) \notin \mathbf{E}$. We know that $\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1] = \{1, \dots, n+1\}$ and $\mathbf{B} \cap \mathbf{E}[1] = \emptyset$. If $b(K) \notin \mathbf{B}$ then $b(K) \in \mathbf{E}[1]$ and therefore $b(K) - 1 \in \mathbf{E}$. Otherwise $e(K) \notin \mathbf{E}$ and then $e(K) + 1 \in \mathbf{B}$. ■

Proposition 4.51. *Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Then $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is a maximal (for inclusion) adjacency-avoiding subset of \mathcal{I}_n .*

Proof. By Proposition 4.47, we already know that $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is adjacency-avoiding.

Let $K \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{J}$. Then either $b(K) - 1 \in \mathbf{E}$ or $e(K) + 1 \in \mathbf{B}$ by Lemma 4.50. In the first case, by taking $\llbracket 1, b(K) - 1 \rrbracket$ or, in the second case, by taking $\llbracket e(K) + 1, n \rrbracket$, we conclude that $\mathcal{J} \cup \{K\}$ is not adjacency-avoiding. ■

Lemma 4.52. *Consider \mathcal{J} a maximal (for inclusion) adjacency-avoiding subset of intervals of \mathcal{I}_n . Then :*

- (i) $\llbracket 1; n \rrbracket \in \mathcal{J}$;
- (ii) if $K, L \in \mathcal{J}$ with $b(K) \leq e(L)$, then $\llbracket b(K), e(L) \rrbracket \in \mathcal{J}$
- (iii) if $K, L \in \mathcal{J}$ and if $K \cap L \neq \emptyset$, then $K \cap L \in \mathcal{J}$
- (iv) if $K \in \mathcal{J}$, then there exists $m \in K$ such that $\llbracket m \rrbracket \in \mathcal{J}$.

Proof. Let \mathcal{J} be as assumed.

- (i) No interval $K \in \mathcal{I}_n$ is adjacent to $\llbracket 1; n \rrbracket$. Hence $\mathcal{J} \cup \{\llbracket 1; n \rrbracket\}$ is adjacency-avoiding. By maximality of \mathcal{J} , $\llbracket 1; n \rrbracket \in \mathcal{J}$.
- (ii) Let $K, L \in \mathcal{J}$ such that $b(K) \leq e(L)$. There is no interval $T \in \mathcal{J}$ adjacent to $\llbracket b(K), e(L) \rrbracket$; otherwise, such a T would have to be adjacent to either K or L . Hence $\mathcal{J} \cup \{\llbracket b(K), e(L) \rrbracket\}$ is adjacency-avoiding. By maximality of \mathcal{J} , we have $\llbracket b(K), e(L) \rrbracket \in \mathcal{J}$.
- (iii) Let $K, L \in \mathcal{J}$ such that $K \cap L \neq \emptyset$. Without loss of generality, we may assume that $b(L) \leq e(K)$. Therefore $b(L) \leq b(K) \leq e(L) \leq e(K)$ and $K \cap L = \llbracket b(K), e(L) \rrbracket$. By (ii), we conclude that $K \cap L \in \mathcal{J}$.
- (iv) Let $K \in \mathcal{J}$. Let us consider a minimal interval $T \subseteq K$ such that $T \in \mathcal{J}$

Let $U \in \mathcal{I}_n$ such that $\emptyset \neq U \subseteq T$. If there exists $L \in \mathcal{J}$ such that L is adjacent to U , then either L is adjacent to T , which is impossible by hypothesis on \mathcal{J} , or $L \cap T \neq \emptyset$. Using (iii), we get that $T \supseteq L \cap T \in \mathcal{J}$. By minimality of T in \mathcal{J} , we assert that $L \cap T = T$ and thus $L \cap U = U \neq \emptyset$, contradicting the fact that L and U are adjacent. Thus, for all $L \in \mathcal{J}$, L and U are not adjacent.

We obtain that $\mathcal{J} \cup \{U\}$ is adjacency-avoiding. By maximality of \mathcal{J} , we get that $T = U$. The only case where any nonempty subset of T is equal to U is when $b(T) = e(T)$. We deduce the desired result. ■

Proposition 4.53. *All the maximal adjacency-avoiding subsets of \mathcal{I}_n can be written as $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ where (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$.*

Proof. Let \mathcal{J} be a maximal adjacency-avoiding subset of \mathcal{I}_n . By Lemma 4.52 (i), we know that $\llbracket 1; n \rrbracket \in \mathcal{J}$. Applying Lemma 4.52 (iv) to $\llbracket 1; n \rrbracket$, we know that there exists $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ such that $\llbracket m \rrbracket \in \mathcal{J}$. Knowing that there is at least one $m \in \{1, \dots, n\}$ such that $\llbracket m \rrbracket \in \mathcal{J}$, assume that there are $p \in \mathbb{N}^*$ of those. We order and denote them by $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p \leq n$. Note obviously that we cannot have $m_{s+1} = m_s + 1$ for any $s \in \{1, \dots, p-1\}$.

For $s \in \{1, \dots, p-1\}$, let a_s be the maximal index a such that $m_s \leq a < m_{s+1}$ and such that $\llbracket m_s; a \rrbracket \in \mathcal{J}$, and b_s be the minimal index b such that $m_s < b \leq m_{s+1}$ and such that $\llbracket b; m_{s+1} \rrbracket \in \mathcal{J}$.

We show that, for all $s \in \{1, \dots, p-1\}$, $b_s \geq a_s + 2$. By contradiction :

- if $b_s = a_s + 1$ then \mathcal{J} is not adjacency-avoiding;
- if $b_s \leq a_s$, then $\llbracket b_s, a_s \rrbracket \in \mathcal{J}$ by Lemma 4.52 (iii), and this implies by Lemma 4.52 (iv) that we should have a $m' \in \llbracket b_s, a_s \rrbracket$ such that $\llbracket m' \rrbracket \in \mathcal{J}$. However, by construction, $m_s < m' < m_{s+1}$.

By taking

- $\mathbf{B} = \llbracket 1, m_1 \rrbracket \cup \llbracket a_1 + 2, m_2 \rrbracket \cup \dots \cup \llbracket a_{p-1} + 2, m_p \rrbracket$ and
- $\mathbf{E} = \llbracket m_1, a_1 \rrbracket \cup \llbracket m_2, a_2 \rrbracket \cup \dots \cup \llbracket m_p, n \rrbracket$,

we can easily check that (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Moreover, by construction of $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ and Lemma 4.52 (ii), we can assert that $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \supseteq \mathcal{J}$. Thus $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{J}$ by Proposition 4.51. ■

4.2.6.2 Interval reflections

Definition 4.54. Let $v \in \{1, \dots, n\}$. The *interval reflection at v* , denote refl_v is a function on $\mathcal{I}_n \setminus \{\llbracket v \rrbracket\}$ defined as follows :

$$\forall K \in \mathcal{I}_n \setminus \{\llbracket v \rrbracket\}, \text{refl}_v(K) = \begin{cases} K \cup \{v\} & \text{if } v \notin K \text{ and } K \cup \{v\} \in \mathcal{I}_n \\ K \setminus \{v\} & \text{if } v \in K \text{ and } K \setminus \{v\} \in \mathcal{I}_n \\ K & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.55. The interval reflection at v is an involution on $\mathcal{I}_n \setminus \{\llbracket v \rrbracket\}$.

For all $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$, we denote $\text{refl}_v(\mathcal{J})$ the interval subset made of all the intervals $\text{refl}_v(K)$ for $K \in \mathcal{J} \setminus \{\llbracket v \rrbracket\}$. Here is a direct consequence of the definition of refl_v and Proposition 4.15.

Corollary 4.56. Let Q be an A_n type quiver and $v \in Q_0$ be either a source or a sink of Q . Consider $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_n$. Then the reflection functor at v applied to $\text{Cat}_Q(\mathcal{J})$ yields $\text{Cat}_{\sigma_v(Q)}(\text{refl}_v(\mathcal{J}))$.

The result below shows that the adjacency-avoiding property is stable under refl_v for all $v \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 4.57. Let \mathcal{J} be an adjacency-avoiding subset of \mathcal{I}_n . Then $\text{refl}_v(\mathcal{J})$ is adjacency-avoiding. Moreover, if $\llbracket v \rrbracket \notin \mathcal{J}$, then \mathcal{J} is adjacency-avoiding if and only if $\text{refl}_v(\mathcal{J})$ is too.

Proof. Let \mathcal{J} be an adjacency-avoiding interval subset. Suppose that $\text{refl}_v(\mathcal{J})$ is not adjacency-avoiding. We thus have two adjacent intervals T and U in $\text{refl}_v(\mathcal{J})$. Let us say that $b(U) = e(T) + 1$ without loss of generality.

By definition, let $K, L \in \mathcal{J} \setminus \{\llbracket v \rrbracket\}$ such that $\text{refl}_v(K) = T$ and $\text{refl}_v(L) = U$. By involution, we get $K = \text{refl}_v(T)$ and $L = \text{refl}_v(U)$. Now,

- if $v \notin \{e(T), b(U)\}$, then $b(L) = b(U) = e(T) + 1 = e(K) + 1$;
- if $v = e(T)$, then $b(L) = b(U) - 1 = e(T) = e(K) + 1$;
- if $v = b(U)$, then $b(L) = b(U) + 1 = e(T) + 2 = e(K) + 1$.

In all cases, we get that K and L are adjacent, which gives us a contradiction. So $\text{refl}_v(\mathcal{J})$ is adjacency-avoiding.

If $\llbracket v \rrbracket \notin \mathcal{J}$, then $\text{refl}_v(\text{refl}_v(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$ and we are done. ■

It seems natural to ask how the maximal adjacency-avoiding interval subsets behave under this action. The example below must motivate us to define an action on effective shifted interval bipartitions by seeing that the image by refl_v can be described thanks to another effective shifted interval bipartition.

Example 4.58. Let $n = 6$, $\mathbf{B} = \{2, 4\}$ and $\mathbf{E} = \{2, 4, 5\}$. We have $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \{\llbracket 2 \rrbracket, \llbracket 2, 4 \rrbracket, \llbracket 2, 5 \rrbracket, \llbracket 4 \rrbracket, \llbracket 4, 5 \rrbracket\}$.

Then we get

$$\text{refl}_3(\mathcal{J}) = \{\llbracket 2, 3 \rrbracket, \llbracket 2, 4 \rrbracket, \llbracket 2, 5 \rrbracket, \llbracket 3, 4 \rrbracket, \llbracket 3, 5 \rrbracket\} = \mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}') \setminus \{\llbracket 3 \rrbracket\}$$

with $\mathbf{B}' = \{2, 3\} = (\mathbf{B} \cup \{3\}) \setminus \{4\}$ and $\mathbf{E}' = \{3, 4, 5\} = (\mathbf{E} \cup \{3\}) \setminus \{2\}$. ┘

Before defining the *toggle action*, let us introduce the *completion of an effective shifted interval bipartition via extended shifted bipartitions*.

Definition 4.59. An *extended shifted bipartition* of $\{1, \dots, n\}$ is a pair (\mathbf{C}, \mathbf{F}) such that $\mathbf{C} \subseteq \{1, \dots, n+1\}$, $\mathbf{F} \subseteq \{0, \dots, n\}$ and $\{\mathbf{C}, \mathbf{F}[1]\}$ is a bipartition of $\{1, \dots, n+1\}$.

Proposition 4.60. For any pair (\mathbf{B}, \mathbf{E}) , with $\mathbf{B} \neq \emptyset \neq \mathbf{E}$, forming an interval shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$, there exists a unique extended shifted bipartition $(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$ of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{J}(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$.

We call $(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$ the *completion of (\mathbf{B}, \mathbf{E})* .

Remark 4.61. Note that if either $\mathbf{B} = \emptyset$ and $n \notin \mathbf{E}$, or $\mathbf{E} = \emptyset$ and $1 \notin \mathbf{B}$, then the completion is not unique. For instance, (\emptyset, \emptyset) admits $n+2$ different completions. As this pair will remain important until the end of this section, we give a notation to its completions. Let, for $0 \leq m \leq n+1$, $\overline{\emptyset}_m = (\{m+1, \dots, n+1\}, \{0, \dots, m-1\})$ be the *mth completion of (\emptyset, \emptyset)* .

Proof of Proposition 4.60. Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) as assumed. Then let :

- $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cup \{i \mid i > \max(\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1])\}$;
- $\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cup \{i-1 \mid i < \min(\mathbf{B} \cup \mathbf{E}[1])\}$.

It is easy to check that $(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$ is an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{J}(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$. It is also clear that this extended shifted bipartition is the unique one satisfying the desired properties. ■

Corollary 4.62. The map $(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \mapsto (\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{E}})$ gives a bijection from pairs (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of nonempty subsets of $\{1, \dots, n\}$ forming effective shifted interval bipartitions, and pairs (\mathbf{C}, \mathbf{F}) forming extended shifted bipartitions of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathcal{J}(\mathbf{C}, \mathbf{F}) \neq \emptyset$.

Proof. This result is a direct consequence of Lemma 4.45 and Proposition 4.60. ■

For any pair (\mathbf{C}, \mathbf{F}) such that $\mathbf{C} \subseteq \{1, \dots, n+1\}$ and $\mathbf{F} \subseteq \{0, \dots, n\}$, denote $\text{eff}(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ the unique effective shifted interval bipartition of $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathcal{J}(\mathbf{C}, \mathbf{F}) = \mathcal{J}(\text{eff}(\mathbf{C}, \mathbf{F}))$.

In the next example, we seem to extend our observations in Example 4.58 to all the other reflections we can do. We will see in Proposition 4.70 that is exactly the case.

Example 4.63. Let $n = 6$, $\mathbf{B} = \{2, 4\}$ and $\mathbf{E} = \{2, 4, 5\}$. So $\overline{\mathbf{B}} = \{2, 4, 7\}$ and $\overline{\mathbf{E}} = \{0, 2, 4, 5\}$. Let $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \{\llbracket 2 \rrbracket, \llbracket 2, 4 \rrbracket, \llbracket 2, 5 \rrbracket, \llbracket 4 \rrbracket, \llbracket 4, 5 \rrbracket\}$. Then,

- $\text{refl}_1(\mathcal{J}) = \{\llbracket 1, 2 \rrbracket, \llbracket 1, 4 \rrbracket, \llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 4 \rrbracket, \llbracket 4, 5 \rrbracket\} = \mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}') \setminus \{\llbracket 1 \rrbracket\}$ with :
 - $\overline{\mathbf{B}'} = \{1, 4, 7\} = (\overline{\mathbf{B}} \cup \{1\}) \setminus \{2\}$
 - $\overline{\mathbf{E}'} = \{1, 2, 4, 5\} = (\overline{\mathbf{E}} \cup \{1\}) \setminus \{0\}$;
- $\text{refl}_2(\mathcal{J}) = \{\llbracket 3, 4 \rrbracket, \llbracket 3, 5 \rrbracket, \llbracket 4 \rrbracket, \llbracket 4, 5 \rrbracket\} = \mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ with :
 - $\overline{\mathbf{B}'} = \{3, 4, 7\} = (\overline{\mathbf{B}} \cup \{3\}) \setminus \{2\}$
 - $\overline{\mathbf{E}'} = \{0, 1, 4, 5\} = (\overline{\mathbf{E}} \cup \{1\}) \setminus \{2\}$;
- $\text{refl}_3(\mathcal{J}) = \{\llbracket 2, 3 \rrbracket, \llbracket 2, 4 \rrbracket, \llbracket 2, 5 \rrbracket, \llbracket 3, 4 \rrbracket, \llbracket 3, 5 \rrbracket\} = \mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}') \setminus \{\llbracket 3 \rrbracket\}$ with :
 - $\overline{\mathbf{B}'} = \{2, 3, 7\} = (\overline{\mathbf{B}} \cup \{3\}) \setminus \{4\}$
 - $\overline{\mathbf{E}'} = \{0, 3, 4, 5\} = (\overline{\mathbf{E}} \cup \{3\}) \setminus \{2\}$. ┘

Definition 4.64. Let (\mathbf{C}, \mathbf{F}) be an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Let $v \in \{1, \dots, n\}$. We define $\text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ *the toggle at v of (\mathbf{C}, \mathbf{F})* as the pair $(\mathbf{C}', \mathbf{F}')$ where :

$$\bullet \mathbf{C}' = \begin{cases} (\mathbf{C} \cup \{v\}) \setminus \{v+1\} & \text{if } v \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{F} \\ (\mathbf{C} \cup \{v+1\}) \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{C} \cap \mathbf{F} \\ \mathbf{C} & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$\bullet \mathbf{F}' = \begin{cases} (\mathbf{F} \cup \{v\}) \setminus \{v-1\} & \text{if } v \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{F} \\ (\mathbf{F} \cup \{v-1\}) \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{C} \cap \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.65. Note that, by construction, $\text{rev}(\text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F})) = \text{tog}_{n+1-v}(\mathbf{F}^{\text{rev}}, \mathbf{C}^{\text{rev}})$.

The following interpretation of the application of tog_v follows directly from Definition 4.64.

Lemma 4.66. *Let (\mathbf{C}, \mathbf{F}) be an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Consider $(\mathbf{C}', \mathbf{F}') = \text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F})$. Then \mathbf{C}' is defined from \mathbf{C} by replacing v by $v-1$ and by replacing $v-1$ by v , and \mathbf{F}' is defined from \mathbf{F} by replacing v by $v+1$ and by replacing $v+1$ by v .*

The following proposition follows immediately from Lemma 4.66.

Proposition 4.67. *Let (\mathbf{C}, \mathbf{F}) be an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. For all $v \in \{1, \dots, n\}$, $\text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ is also an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$.*

Thus the toggles on the extended shifted bipartitions of $\{1, \dots, n\}$ induce toggle operations on the effective shifted interval bipartitions.

Definition 4.68. Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be an effective shifted interval bipartition of the set $\{1, \dots, n\}$, and $v \in \{1, \dots, v\}$.

We define $\text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ *the toggle at v of (\mathbf{B}, \mathbf{E})* by :

$$\text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \begin{cases} \text{eff}(\text{tog}_v(\overline{\mathcal{O}}_v^n)) & \text{if } (\mathbf{B}, \mathbf{E}) = (\emptyset, \emptyset); \\ \text{eff}(\text{tog}_v(\text{compl}_n(\mathbf{B}, \mathbf{E}))) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.69. We can describe tog_v explicitly on effective shifted interval bipartitions of $\{1, \dots, n\}$: we have $\text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = (\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ where :

$$\bullet \mathbf{B}' = \begin{cases} (\mathbf{B} \cup \{v\}) \setminus \{v+1\} & \text{if } v \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E} \text{ and } v+1 \in \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \cup \{v\} & \text{if } v \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}, v+1 \notin \mathbf{B} \text{ and either } v-1 \in \mathbf{E} \\ & \text{or } \mathbf{B} = \emptyset \\ (\mathbf{B} \cup \{v+1\}) \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E} \text{ and either } v+1 \in \mathbf{E} \\ & \text{or } v+2 \in \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}, v+1 \notin \mathbf{E} \text{ and } v+2 \notin \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$\bullet \mathbf{E}' = \begin{cases} (\mathbf{E} \cup \{v\}) \setminus \{v-1\} & \text{if } v \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E} \text{ and } v-1 \in \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \cup \{v\} & \text{if } v \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}, v-1 \notin \mathbf{E} \text{ and either } v+1 \in \mathbf{B} \\ & \text{or } \mathbf{E} = \emptyset \\ (\mathbf{E} \cup \{v-1\}) \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E} \text{ and either } v-1 \in \mathbf{B} \\ & \text{or } v-2 \in \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \setminus \{v\} & \text{if } v \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}, v-1 \notin \mathbf{B} \text{ and } v-2 \notin \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

However, Definition 4.68 is easier to handle than this explicit description.

Proposition 4.70. *Let (\mathbf{C}, \mathbf{F}) be an extended shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$, and $v \in \{1, \dots, n\}$. Write*

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ and $\mathcal{T} = \mathcal{J}(\text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F}))$. We get the following results :

- 1) *if $v \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{F}$, then $\mathcal{T} = \text{refl}_v(\mathcal{J}) \cup \{\llbracket v \rrbracket\}$.*
- 2) *otherwise, $\mathcal{T} = \text{refl}_v(\mathcal{J})$.*

Proof. Let (\mathbf{C}, \mathbf{F}) and v be as assumed. Write $(\mathbf{C}', \mathbf{F}') = \text{tog}_v(\mathbf{C}, \mathbf{F})$. It is obvious that $\llbracket v \rrbracket \in \mathcal{J}(\mathbf{C}', \mathbf{F}')$ if and only if $\mathbf{C} \cap \{v, v+1\} = \{v+1\}$ and $\mathbf{F} \cap \{v, v-1\} = \{v-1\}$, which is equivalent to $v \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{F}$ as claimed.

Let $K' \in \mathcal{I}_n$. By definition, $K' \in \mathcal{J}(\mathbf{C}', \mathbf{F}')$ whenever $b(K') \in \mathbf{C}'$ and $e(K') \in \mathbf{F}'$. As we already treated this case, assume that $K' \neq \llbracket v \rrbracket$. By Lemma 4.66, the conditions $b(K') \in \mathbf{C}'$ and $e(K') \in \mathbf{F}'$ is equivalent to saying that $K \in \mathcal{J}(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ and $K' = \text{refl}_v(K)$. This completes the proof. ■

Corollary 4.71. *Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be an effective shifted interval partition of $\{1, \dots, n\}$ and $v \in \{1, \dots, n\}$. Write*

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ and $\mathcal{T} = \mathcal{J}(\text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E}))$. We get the following results :

- 1) *if $v \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}$, and, $v-1 \in \mathbf{E}$ or $v+1 \in \mathbf{B}$, then $\mathcal{T} = \text{refl}_v(\mathcal{J}) \cup \{\llbracket v \rrbracket\}$.*
- 2) *otherwise, $\mathcal{T} = \text{refl}_v(\mathcal{J})$.*

Proof. This results from Corollary 4.62, Definition 4.68, and Proposition 4.70. ■

Remark 4.72. Note that the condition $v-1 \in \mathbf{E}$ or $v+1 \in \mathbf{B}$ makes sure that there exists an interval in $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ adjacent to $\llbracket v \rrbracket$, and so $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ will not be fixed under refl_v .

Corollary 4.73. *For any effective shifted interval bipartitions (\mathbf{B}, \mathbf{E}) , there exists a unique effective shifted interval bipartition $(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ such that either $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{refl}_v(\mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}'))$ if $v \notin \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$ or $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{refl}_v(\mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}')) \cup \{\llbracket v \rrbracket\}$ otherwise.*

Proof. We use the fact that refl_v is an involution on interval subsets which do not contain $\llbracket v \rrbracket$ and Corollary 4.71. Therefore $(\mathbf{B}', \mathbf{E}') = \text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. ■

Remark 4.74. A similar statement can be made for extended shifted bipartitions of $\{1, \dots, n\}$. In the following, we will only focus on the effective shifted interval bipartitions.

4.2.7 Proof of the main result

In this section, we prove Theorem 4.9. To do so, we will prove that for any complete shifted bipartition (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$, and any quiver Q of A_n type, $\text{Cat}_Q(\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ is canonically Jordan recoverable. We first prove this claim for Q linearly oriented and then generalize it to any A_n type quiver.

4.2.7.1 The linearly oriented case

We introduce an algorithm as a sequence of operations seen in Section 4.2.5 which builds the category $\mathcal{C}_{\overrightarrow{A_n}}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{Cat}_{\overrightarrow{A_n}}(\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ for any given complete shifted bipartition (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$. Thanks to it, we will prove that this category is canonically Jordan recoverable.

Algorithm 4.75. Let $n \geq 1$ and $Q = \overrightarrow{A_n}$. Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. Consider $Q_{1,0} = \overrightarrow{A_n}^{\text{op}}$ and, for $1 \leq i \leq n$ and $0 \leq j \leq n - i$, $Q_{i,j+1} = \sigma_{n-j}(Q_{i,j})$ and $Q_{i+1,0} = Q_{i,n-i+1}$. We define $\mathcal{C}^{i,j} = \mathcal{C}_{Q_{i,j}}^{i,j}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ and $\mathcal{D}^{i,j} = \mathcal{D}_{Q_{i,j}}^{i,j}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ for $1 \leq i \leq n + 1$ and $0 \leq j \leq n - i + 1$ as follows :

- $\mathcal{C}^{1,0} = \{0\}$ and $\mathcal{D}^{1,0} = \{0\}$;
- if $j < n - i + 1$, we put $\mathcal{D}^{i,j+1} = \mathcal{R}_{n-j}^-(\mathcal{C}^{i,j})$ and

$$\mathcal{C}^{i,j+1} = \begin{cases} \text{AddS}_{n-j}(\mathcal{D}^{i,j+1}) & \text{if } i \in \mathbf{B} \text{ and } i + j \in \mathbf{E} \\ \mathcal{D}^{i,j+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\mathcal{C}^{i+1,0} = \mathcal{C}^{i,n-i+1}$.

Recall that the quiver over which we consider $\mathcal{C}^{i,j}$ and $\mathcal{D}^{i,j}$ is $Q_{i,j}$.

We can rephrase Algorithm 4.75 by giving a similar algorithm for interval sets corresponding to $\mathcal{C}^{i,j}$ and $\mathcal{D}^{i,j}$.

Algorithm 4.76. We define $\mathcal{J}^{i,j} = \mathcal{J}^{i,j}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ and $\mathcal{T}^{i,j} = \mathcal{T}^{i,j}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ for $1 \leq i \leq n+1$ and $0 \leq j \leq n-i+1$ as follows :

- $\mathcal{J}^{1,0} = \emptyset$ and $\mathcal{T}^{1,0} = \emptyset$;
- if $j < n - i + 1$, we put $\mathcal{T}^{i,j+1} = \text{refl}_{n-j}(\mathcal{J}^{i,j})$ and

$$\mathcal{J}^{i,j+1} = \begin{cases} \mathcal{T}^{i,j+1} \cup \{\llbracket n-j \rrbracket\} & \text{if } i \in \mathbf{B} \text{ and } i+j \in \mathbf{E} \\ \mathcal{T}^{i,j+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\mathcal{J}^{i+1,0} = \mathcal{J}^{i,n-i+1}$.

It follows that $\text{Cat}_{Q_{i,j}}(\mathcal{J}^{i,j}) = \mathcal{C}^{i,j}$ and $\text{Cat}_{Q_{i,j}}(\mathcal{T}^{i,j}) = \mathcal{D}^{i,j}$.

Proposition 4.77. The Algorithm 4.75 returns $\mathcal{C}^{n+1,0} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{A_n}}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$.

Proof. First, we can check, by a simple induction, that the quiver $Q_{p,0}$, for $p \geq 2$ is as follows.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow p-1 \longleftarrow p \longleftarrow \cdots \longleftarrow n$$

Thus $Q_{n+1,0} = \overrightarrow{A_n}$ as claimed. As there is a bijection from subcategories of any given A_n type quiver Q to interval subsets, we can work with the sequence $\mathcal{J}^{i,j}$ and prove that $\mathcal{J}^{n+1,0} = \mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. It will imply the result we wished for.

To do so, we will first study the evolution of $\llbracket n-j \rrbracket$ appearing in $\mathcal{J}^{i,j+1}$ following the algorithm until arriving at $\mathcal{J}^{n+1,0}$. Following the sequence of reflections from $\mathcal{J}^{i,j+1}$ to $\mathcal{J}^{i+1,0} = \mathcal{J}^{i,n-i+1}$ we get

$$\text{refl}_i \circ \text{refl}_{i+1} \circ \dots \circ \text{refl}_{n-j-1}(\llbracket n-j \rrbracket) = \llbracket i, n-j \rrbracket.$$

In the sequence of reflections applied to get $\mathcal{J}^{i+2,0}$ from $\mathcal{J}^{i+1,0}$, the only reflection that affects $\llbracket i, n-j \rrbracket$ is refl_{n-j+1} . So $\llbracket n-j \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i,j+1}$ corresponds to $\llbracket i, n-j+1 \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i+2,0}$.

By the same argument, we get that $\llbracket n-j \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i,j+1}$ corresponds to $\llbracket i, n \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i+j+1,0}$. Here, following the sequence of reflections applied to get $\mathcal{J}^{i+j+2,0} = \mathcal{J}^{i+j+1,n-i-j+2}$ from $\mathcal{J}^{i+j+1,0}$, the interval $\llbracket i, n \rrbracket$ becomes $\llbracket i, i+j \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i+j+2,0}$. As the remainder of the sequence of reflections we still have to apply

to get $\mathcal{J}^{n+1,0}$ from $\mathcal{J}^{i+j+2,0}$ does not affect anymore $\llbracket i, i+j \rrbracket$, because they only touch the vertices $q \geq i+j+2$, we conclude that $\llbracket n-j \rrbracket$ in $\mathcal{J}^{i,j+1}$ corresponds to $\llbracket i, i+j \rrbracket \in \mathcal{J}^{n+1,0}$.

To end the proof, we only have to notice that during the construction, we add in our interval subset $\llbracket n-j \rrbracket \in \mathcal{J}^{i,j+1}$ if and only if we have $i \in \mathbf{B}$ and $i+j \in \mathbf{E}$. ■

Theorem 4.78. *Let $n \geq 1$. For all effective shifted interval bipartitions (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{C}_{A_n}^{\rightarrow}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable. Moreover, for all $X \in \mathcal{C}_{A_n}^{\rightarrow}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$:*

- (a) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}$;
- (b) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{B}$;
- (c) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{E}$;
- (d) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$;
- (e) $\text{GenJF}(X)^q = (0)$ whenever $q < \min(\mathbf{B})$ or $q > \max(\mathbf{E})$

Proof. Assume first that (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, n\}$. In this case, we show the claimed result by an induction proof of the following claim, for all $i \in \{1, \dots, n+1\}$ and $j \in \{0, \dots, n-i+1\}$:

$(\mathbf{H}_{i,j})$ The category $\mathcal{C}^{i,j}$ is canonically Jordan recoverable and for all $X \in \mathcal{C}^{i,j}$:

- (a) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \{1, \dots, n\}$ such that either :
 - (a)(1) $q < i-1$ and $q \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}$, or;
 - (a)(2) $q = n-j$ if $i \in \mathbf{B}$ and $n-j \neq i-1$.
- (b) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \{1, \dots, n\}$ such that either :
 - (b)(1) $q < i-1$ and $q \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{B}$, or;
 - (b)(2) $q = i-1$, if $i-1 \notin \mathbf{B}$, or;
 - (b)(3) $q > i-1$ and $q \notin \{n-j, n-j+1\}$, or;
 - (b)(4) $q \in \{n-j, n-j+1\}$ if $i \notin \mathbf{B}$.
- (c) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \{1, \dots, n\}$ such that $q < i-1$ and $q \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{E}$;
- (d) $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \in \{1, \dots, i-1\}$ such that either :
 - (d)(1) $q < i-1$ and $q \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$, or;
 - (d)(2) $q = i-1$, if $i-1 \in \mathbf{B}$, or;
 - (d)(3) $q = n-j+1$ if $i \in \mathbf{B}$.

(e) $\text{GenJF}(X)^q = \text{GenJF}(X)^{q+1}$ for $q \in \{0, \dots, n\}$ such that either :

(e)(1) $n - q + i \leq n - j$ and $n - q + i \in \mathbf{B}$, or;

(e)(2) $n - q + i + 1 > n - j$ and $n - q + i + 1 \in \mathbf{B}$.

Recall that we extended the generic Jordan form data of any $X \in \text{rep}(Q_{i,j})$ by writing $\text{GenJF}(X)^0 = \text{GenJF}(X)^{n+1} = (0)$.

Note, by Proposition 4.77, that the claim $(\mathbf{H}_{n+1,0})$ corresponds to the wished-for result.

For $i = 1$ and $j = 0$, $\mathcal{C}^{1,0} = \{0\}$ is canonically Jordan recoverable, and, $\text{GenJF}(0) = ((0))_{1 \leq q \leq n}$ satisfies all the storability conditions and equalities we ask for.

Now assume that for a fixed $i \in \{1, \dots, n+1\}$, and $j \in \{0, \dots, n-i+1\}$, $\mathcal{C}^{i,j}$ satisfies $(\mathbf{H}_{i,j})$.

We will show that either $\mathcal{C}^{i,j+1}$ satisfies $(\mathbf{H}_{i,j+1})$ if $j < n-i+1$, or $\mathcal{C}^{i+1,0}$ satisfies $(\mathbf{H}_{i+1,0})$ otherwise.

We can already say that the only vertices q where the storability conditions change are $q = n-j-1$, $q = n-j$ and $q = n-j+1$.

We have several cases to treat :

- The case $j = n-i+1$ is trivial by the fact that $\mathcal{C}^{i,n-i+1} = \mathcal{C}^{i+1,0}$ by Algorithm 4.75. We only have to check that $(i, n-i+1)$ and $(i+1, 0)$ give us the same storability conditions.
- Assume that $i \notin \mathbf{B}$ and $j < n-i+1$. Following Algorithm 4.75, to get $\mathcal{C}^{i,j+1}$ from $\mathcal{C}^{i,j}$, we have to apply the reflection functor \mathcal{R}_{n-j}^- . By $(\mathbf{H}_{i,j})$, we know that $\mathcal{C}^{i,j}$ is canonically Jordan recoverable, and, for all $X \in \mathcal{C}^{i,j}$, $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxminus) -storable at $n-j$. As a consequence of Proposition 4.41, $\mathcal{C}^{i,j+1} = \mathcal{R}_{n-j}^-(\mathcal{C}^{i,j})$ is canonically Jordan recoverable. Moreover, by Lemma 4.35, and Lemma 4.31 3), for all $X \in \mathcal{C}^{i,j}$, $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))$ is (\boxplus, \boxminus) -storable at $n-j$. Thus the storability conditions satisfied by representations in $\mathcal{C}^{i,j}$ and those satisfied by representations in $\mathcal{C}^{i,j+1}$ are the same. If $\text{GenJF}(X)^{n-j} = \text{GenJF}(X)^{n-j-1}$, then $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))^{n-j} = \text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))^{n-j+1}$ by Lemma 4.31 1).
- Assume that $i \in \mathbf{B}$, $j < n-i+1$ and $i+j \notin \mathbf{E}$. To go from $\mathcal{C}^{i,j}$ to $\mathcal{C}^{i,j+1}$, we only have to apply \mathcal{R}_{n-j}^- . By induction, we have that $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at $n-j$ for all $X \in \mathcal{C}^{i,j}$. Then, by Proposition 4.41, we get that $\mathcal{C}^{i,j+1}$ is canonically Jordan recoverable and, by Lemma 4.35, $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))$ is strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at $n-j$. We can also check easily that $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at $n-j-1$ and (\boxplus, \boxminus) -storable at $n-j+1$ if $n-j-1 > i-1$ by the diagonal transformation at $n-j$. We can also remark that if $\text{GenJF}(X)^{n-j} =$

$\text{GenJF}(X)^{n-j-1}$, then $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))^{n-j} = \text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))^{n-j+1}$ by Lemma 4.31 1).

- Assume that $i \in \mathbf{B}$, $j < n - i + 1$ and $i + j \in \mathbf{E}$. To go from $\mathcal{C}^{i,j}$ to $\mathcal{C}^{i,j+1}$, we need to use \mathcal{R}_{n-j}^- followed by AddS_{n-j} . By induction, we have that $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at $n - j$ for all $X \in \mathcal{C}^{i,j}$. By Proposition 4.41, we get that $\mathcal{D}^{i,j+1} = \mathcal{R}_{n-j}^-(\mathcal{C}^{i,j})$ is canonically Jordan recoverable and, by Lemma 4.35, $\text{GenJF}(\mathcal{R}_{n-j}^-(X))$ strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at $n - j$. By Proposition 4.39, $\mathcal{C}^{i,j+1} = \text{AddS}_{n-j}(\mathcal{D}^{i,j+1})$ is also canonically Jordan recoverable, and by Lemma 4.37, $\text{GenJF}(Z)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at $n - j$ for all $Z \in \mathcal{C}^{i,j+1}$. We also have that $\text{GenJF}(Z)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at $n - j - 1$, if $n - j - 1 > i - 1$ and (\boxplus, \boxminus) -storable at $n - j + 1$.

This completes the induction proof in this case.

Therefore $(\mathbf{H}_{i,j})$ is true for all $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ and $j \in \{0, \dots, n - i + 1\}$, and we get the wished-for result for all complete shifted bipartition (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$.

Now assume that (\mathbf{B}, \mathbf{E}) is an arbitrary effective shifted interval bipartition of $\{1, \dots, n\}$. We can see the category $\mathcal{C}_{A_n}^{\rightarrow}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ has a subcategory in $\mathcal{C}_{A_m}^{\rightarrow}(\mathbf{B}^\circ, \mathbf{E}^\circ)$ where $m = \max(\mathbf{E}) - \min(\mathbf{B}) + 1$, $\mathbf{B}^\circ = \{i - \min(\mathbf{B}) + 1 \mid i \in \mathbf{B}\}$ and $\mathbf{E}^\circ = \{j - \min(\mathbf{B}) + 1 \mid j \in \mathbf{E}\}$. As $(\mathbf{B}^\circ, \mathbf{E}^\circ)$ is a complete shifted bipartition of $\{1, \dots, m\}$, we get that $\mathcal{C}_{A_n}^{\rightarrow}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable and the storable condition of $\text{GenJF}(X)$ holds for all $X \in \mathcal{C}_{A_n}^{\rightarrow}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. Note that, for such a representation X , it is obvious that $\text{GenJF}(X)^q = (0)$ for $q \notin \{\min(\mathbf{B}), \dots, \max(\mathbf{E})\}$.

This completes the proof. ■

4.2.7.2 For other orientations

In this subsection, we show that Theorem 4.9 holds for all quivers of A_n type. To do so, we will first prove a result similar to Theorem 4.78 available for any A_n type quiver and then use it to give the final proof.

Theorem 4.79. *Let $n > 0$ and Q be an A_n type quiver. For all effective shifted interval bipartitions (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable. Moreover, for all $X \in \mathcal{C}_Q(\mathbf{B}, \mathbf{E})$:*

- $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at q for $q \notin \mathbf{B} \cup \mathbf{E}$;
- $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxminus) -storable at q for $q \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{B}$;
- $\text{GenJF}(X)$ is (\boxminus, \boxplus) -storable at q for $q \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{E}$;
- $\text{GenJF}(X)$ is (\boxminus, \boxminus) -storable at q for $q \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$;
- $\text{GenJF}(X)^q = (0)$ whenever $q < \min(\mathbf{B})$ or $q > \max(\mathbf{E})$.

Proof. Note that we can go from \overrightarrow{A}_n to any A_n type quiver by a sequence of mutations only done at sources. Using that fact, we will prove our wished result by induction.

First, we know that for $Q = \overrightarrow{A}_n$, the claim is valid by Theorem 4.78.

Assume now that for a fixed A_n type quiver Q , the same is true. Let v be a source of Q and put $\Xi = \sigma_v(Q)$. We will prove that the same goes for Ξ .

Let (\mathbf{B}, \mathbf{E}) be an effective shifted interval bipartition of $\{1, \dots, n\}$. We want to prove that $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable and for all $X \in \mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E})$, $\text{GenJF}(X)$ satisfies the announced storability conditions. By Corollary 4.73, we know that there exists $(\mathbf{B}', \mathbf{E}') = \text{tog}_v(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ an effective shifted interval bipartition of $\{1, \dots, n\}$ such that either $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{refl}_v(\mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}'))$ if $v \notin \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$, or $\mathcal{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{refl}_v(\mathcal{J}(\mathbf{B}', \mathbf{E}')) \cup \{\llbracket v \rrbracket\}$ otherwise.

- If $v \notin \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$, then $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{R}_v^-(\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}'))$. By induction, we know that $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ is canonically Jordan recoverable, and for all $X \in \mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, $\text{GenJF}(X)$ is either (\boxplus, \boxplus) -storable, (\boxminus, \boxminus) -storable, or (\boxplus, \boxminus) -storable at v .

In the two first cases, we conclude by Proposition 4.39 and Lemma 4.33.

In the last case, this means $v \in \mathbf{B}' \cap \mathbf{E}'$. By the induction hypothesis, for all $Y \in \mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, $\text{GenJF}(Y)$ is (\boxplus, \boxminus) -storable at v . By considering $\mathcal{D}_Q^v(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ the subcategory of $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ generated by modules without S_v in its summands, using Lemma 4.37, we obtain that, for all $Z \in \mathcal{D}_Q^v(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, $\text{GenJF}(Z)$ is strongly (\boxplus, \boxminus) -storable at v . By Proposition 4.41, $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \mathcal{R}_v^-(\mathcal{D}_Q^v(\mathbf{B}', \mathbf{E}'))$ is canonically Jordan recoverable and, by Lemma 4.31 5), for all $X \in \mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E})$, $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at v .

The only other storability conditions that change from $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$ to $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ are at $v - 1$ and at $v + 1$. If $v - 1 \in \mathbf{E}' \setminus \mathbf{B}'$, then the (\boxplus, \boxminus) -storability condition satisfied by $\text{GenJF}(Z)$, for $Z \in \mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, becomes a (\boxplus, \boxplus) -storability condition satisfied by $\text{GenJF}(X)$ for $X \in \mathcal{C}_\Xi(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. This corresponds with $v - 1 \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$. We can treat similarly the case where we go from (\boxplus, \boxplus) -storability condition to (\boxplus, \boxminus) -storability condition at $v - 1$, if $v - 1 \in \mathbf{B}' \cap \mathbf{E}'$. A similar and symmetric argument allows us to get the same result at $v + 1$, considering the two possible changes of storability conditions.

This completes the proof of the induction step in this case.

- If $v \in \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$, $\mathcal{C}_{\Xi}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{AddS}_v(\mathcal{R}_v^-(\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')))$. Using the definition of $(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, we have that $v \notin \mathbf{B}' \cup \mathbf{E}'$ and $v-1 \in \mathbf{E}'$ or $v+1 \in \mathbf{B}'$. Therefore, the induction hypothesis allows us to state that for all $X \in \mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}')$, $\text{GenJF}(X)$ is (\boxplus, \boxplus) -storable at k .

Following Theorem 4.36 and Lemma 4.31, we get that $\mathcal{R}_v^-(\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}', \mathbf{E}'))$ is canonically Jordan recoverable and for any representation Y in this category, $\text{GenJF}(Y)$ is strongly (\boxminus, \boxminus) -storable at v . Hence by Proposition 4.39, we get that $\mathcal{C}_{\Xi}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable and for any representation Z in it we have that $\text{GenJF}(Z)$ is (\boxminus, \boxminus) -storable at v .

By analogous arguments to those given in the previous point, we can deduce that the storability conditions satisfied by $\text{GenJF}(X)$ for all $X \in \mathcal{C}_{\Xi}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ are the ones we claimed.

This completes the proof of the induction step in this case

Thus we have proved the induction step, and so we have proved the wished-for result. ■

We can now prove the main result of this paper.

Proof of Theorem 4.9. Fix Q a quiver of A_n type. Let \mathcal{C} be a subcategory of $\text{rep}(Q)$. By Proposition 4.7, we already know that if \mathcal{C} is canonically Jordan recoverable, then $\text{Int}(\mathcal{C})$ is adjacency-avoiding.

Now assume that $\text{Int}(\mathcal{C})$ is adjacency-avoiding. Using Proposition 4.53, there exists a complete shifted bipartition (\mathbf{B}, \mathbf{E}) of $\{1, \dots, n\}$ such that $\text{Int}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$, and \mathcal{C} is therefore a subcategory of $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}, \mathbf{E})$. By Theorem 4.79, we know that $\mathcal{C}_Q(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ is canonically Jordan recoverable. Thus so is \mathcal{C} .

■

4.2.8 To go further

We could ask ourselves some questions based on this work.

- *Can we translate the adjacency-avoiding property for intervals into another algebraic property for subcategories of $\text{rep}(Q)$ for any A_n type quiver Q ?*

First, the following simple lemma allows us a translation of the adjacency property into the algebraic world.

Lemma 4.80. *Let Q be an A_n type quiver. Let $K, L \in \mathcal{I}_n$. Then K and L are adjacent if and only if*

there is a short exact sequence whose end terms are X_K and X_L in some order and whose middle term is indecomposable.

The following theorem follows as a direct consequence of Theorem 4.9 and Lemma 4.80.

Theorem 4.81. *Let Q be a quiver of A_n type. Fix a collection of indecomposable representations $\mathcal{X} \subseteq \text{Ind}(Q)$. Then $\text{add}(\mathcal{X})$ is canonically Jordan recoverable if and only if for all $X, Y \in \mathcal{X}$ and for all short exact sequences*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

the representation E is not indecomposable.

Thus, for any $T \in \text{rep}(Q)$ a tilting representation, $\text{add}(T)$ is canonically Jordan recoverable. But the interaction between canonically Jordan recoverable subcategories and tilting representations seems not to end at this. We formulate an exact statement as the next conjecture.

Let Q be an A_n type quiver, and T a tilting representation of Q . Write $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_n$ for the decomposition of T . For all $i \in \{1, \dots, n\}$, we define the **mutation of T by T_i** , denoted $\mu_{T_i}(T)$, to be, if it is possible, the unique tilting representation (up to isomorphism) isomorphic to $T_1 \oplus \dots \oplus T'_i \oplus \dots \oplus T_n$ such that $T'_i \not\cong T_i$, otherwise $\mu_{T_i}(T) = T$. Riedtmann and Schofield proved that T'_i can be obtained from $U_i = T_1 \oplus \dots \oplus T_{i-1} \oplus T_{i+1} \oplus \dots \oplus T_n$ and T_i as either the kernel or the cokernel of a minimal $\text{add}(U_i)$ -approximation (see (Riedtmann, 1991)).

Following this result, in our case, we can divide the non-trivial mutations into two kinds :

- the **1-term mutations** in the two following cases :
 - there exists $i \neq k \in \{1, \dots, n\}$ such that $T_i \longrightarrow T_k$ is a minimal left $\text{add}(U_i)$ -approximation, and $T'_i = \text{Coker}(T_i \longrightarrow T_k)$.
 - there exists $i \neq k \in \{1, \dots, n\}$ such that $T_k \longrightarrow T_i$ is a minimal right $\text{add}(U_i)$ -approximation, and $T'_i = \text{Ker}(T_k \longrightarrow T_i)$.
- the **2-terms mutations** in the two following cases :
 - there exist $\ell, k \in \{1, \dots, n\}$ such that $\ell \neq k, \ell \neq i \neq k$ and $T_i \longrightarrow T_k \oplus T_\ell$ is a minimal left $\text{add}(U_i)$ -approximation, and $T'_i = \text{Coker}(T_i \longrightarrow T_k \oplus T_\ell)$.
 - there exist $\ell, k \in \{1, \dots, n\}$ such that $\ell \neq k, \ell \neq i \neq k$ and $T_k \oplus T_\ell \longrightarrow T_i$ is a minimal right $\text{add}(U_i)$ -approximation, and $T'_i = \text{Ker}(T_k \oplus T_\ell \longrightarrow T_i)$.

Note that T_i can admit both a left and a right $\text{add}(U_i)$ -approximation, but only one of them defines the summand T'_i used to construct $\mu_{T'_i}(T)$.

Now we can state our conjecture.

Conjecture 4.82. *Let Q be an A_n type quiver.*

- (a) *For any tilting representation $T \in \text{rep}(Q)$, there exists a unique maximal canonically Jordan recoverable subcategory \mathcal{C} such that $T \in \mathcal{C}$;*
- (b) *For any maximal canonically Jordan recoverable subcategory \mathcal{C} of $\text{rep}(Q)$, and for any tilting representation $T \in \mathcal{C}$, \mathcal{C} is additively generated by indecomposable summands of tilting representations that can be obtained by a (finite) sequence of 2-term mutations from T .*

This result could open a way to characterize algebraically the canonically Jordan recoverable subcategories for, at least, Dynkin quivers.

Remark 4.83. In Theorem 4.81, we can see a kind of complementarity with the notion of *maximal almost rigid* modules (Barnard *et al.*, 2023) : they are defined as modules $M = \bigoplus_{i=1}^s M(i)$ where $M(i) \in \text{Ind}(Q)$ give a maximal collection of indecomposable representations such that for all $1 \leq i, j \leq s$ and all nonsplit short exact sequence

$$0 \longrightarrow M(i) \longrightarrow E \longrightarrow M(j) \longrightarrow 0,$$

the representation E is indecomposable.

- *Can we hope to characterize the Jordan recoverable categories of $\text{rep}(Q)$ for Q of A_n type ?*

Let $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_n$ and $L \in \mathcal{I}_n$. A \mathcal{J} -**partition** of L is a partition $\{T_1, \dots, T_p\}$ of L such that for all $i \in \{1, \dots, p\}$, we have $T_i \in \mathcal{J}$.

Proposition 4.84. *Let $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_n$ such that there exists an interval $L \in \mathcal{I}_n$ admitting two distinct \mathcal{J} -partitions. Then $\text{Cat}_Q(\mathcal{J})$ is not a Jordan recoverable category of $\text{rep}(Q)$.*

Proof. This result is a consequence of Lemma 4.8. ■

Like between the adjacency-avoiding interval subsets and canonical Jordan recoverable categories, the following notion seems to play a significant role in determining all the Jordan recoverable categories.

Definition 4.85. Let $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_n$. We say that \mathcal{J} is *double interval partition-avoiding* if any $L \in \mathcal{I}_n$ admits at most one \mathcal{J} -partition.

Example 4.86. For all $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{J} = \{\llbracket i \rrbracket \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ is double interval partition-avoiding. Note also that this is a maximal one (for the inclusion). ┘

Conjecture 4.87. Let Q be an A_n type quiver. A subcategory $\mathcal{C} \subset \text{rep}(Q)$ is Jordan recoverable if and only if $\text{Int}(\mathcal{C})$ is double interval partition-avoiding.

We hope to prove this result in the near future.

- Can we hope to extend the definition of the Greene–Kleitman invariant on representations of string quivers?

Let us give the definition of a string quiver.

Definition 4.88. A *string quiver* is a pair (Q, R) where Q is a finite connected quiver and R a set of monomial relations of degree 2 such that :

- all the vertices in Q admit at most two ingoing arrows and at most two outgoing arrows;
- for any $\alpha, \beta, \gamma \in Q_1$ such that $\beta\alpha$ and $\gamma\alpha$ are paths of Q , then

$$\{\beta\alpha, \gamma\alpha\} \cap R \neq \emptyset;$$

- for any $\alpha, \beta, \gamma \in Q_1$ such that $\alpha\beta$ and $\alpha\gamma$ are paths of Q , then

$$\{\alpha\beta, \alpha\gamma\} \cap R \neq \emptyset.$$

A representation $X \in \text{rep}(Q)$ is a representation of a string quiver (Q, R) if for any $\alpha, \beta \in Q_1$ such that $\beta\alpha \in R$, then $X_\beta X_\alpha = 0$. We denote $\text{rep}(Q, R)$ the finite-dimensional representations of (Q, R) . A *string algebra* is a quotient algebra $\mathbb{K}Q/I$ where (Q, R) is a string quiver and I is the ideal of $\mathbb{K}Q$ generated by R . Note that, at least, if the Auslander–Reiten quiver of a string quiver (Q, R) is acyclic, then we can define a similar Greene–Kleitman invariant. We can first ask how much we can extend this invariant in a larger case than the one we explore in this article.

Garver, Patrias, and Thomas proved that we can define a generic Jordan form data for any finite-dimensional module of any algebra (Garver *et al.*, 2023). We can therefore ask in which circumstances the two invariants coincide.

- *May we expect to extend Theorem 4.9 for gentle, locally gentle, or string algebras?*

Recall that the idea of considering adjacency-avoiding interval subsets comes from previous work (Dequêne, 2023) for gentle algebras. It seems reasonable to think this result could find an extension for gentle and even string algebras.

The reader is invited to have a look into these different problems or things related to them.

4.2.9 Acknowledgments

I acknowledge the Institut des Sciences Mathématiques of Canada for its partial funding support. I thank Ralf Schiffler for the week I spent in Storrs talking about this work, which leads to some nice algebraic directions. Last, I thank my Ph.D. supervisor, Hugh Thomas, for all our discussions on this subject, his helpful advices, and his support throughout my thesis work.

CONCLUSION

À travers cette thèse, après quelques rappels, nous avons découvert ce qu'est la notion de retrouvabilité de Jordan, les motivations qui nous ont menées à étudier cette notion. Puis, à travers les articles, nous avons pu mettre en avant des résultats de caractérisation de ces catégories. À la suite de ce travail, de nombreuses questions se posent et peuvent définir de nouvelles directions de recherches qui pourraient être des axes de réflexions dans l'avenir.

Étendre les résultats du premier article pour les carquois à relations cordes. C'est une alternative envisageable en attendant d'avoir une description précise de toutes les catégories canoniquement retrouvables de Jordan et de toutes celles retrouvables de Jordan. Cela semble atteignable à partir des travaux du premier article. Après quelques essais, je conjecture que la caractérisation des catégories $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ qui sont canoniquement retrouvables de Jordan pour les carquois à relations aimables serait la même que celle pour les carquois à relations cordes. La question de la retrouvabilité de Jordan semble faire intervenir un nouveau cas qui élargirait la condition $(ii)(a)$:

$(ii)(a^*)$ S'il existe deux flèches α et β telles que $s(\alpha) = t(\beta) = m$, alors $\alpha\beta \in R$; de plus, s'il existe deux flèches α et α' distinctes telles que $s(\alpha) = s(\alpha') = m$, alors il y a au plus une corde maximale passant par α ; dualement, s'il existe deux flèches β, β' distinctes telles que $t(\beta) = t(\beta') = m$, alors il y a au plus une corde maximale passant par β .

Cela peut permettre d'avancer vers une réponse aux deux dernières interrogations que nous énoncerons dans cette conclusion.

Traduire les conditions combinatoires sur le sommet m pour que la catégorie $\mathcal{C}_{(Q,R),m}$ soit canoniquement retrouvable de Jordan, ou retrouvable de Jordan, en des conditions algébriques. Une partie du travail a été effectuée dans le deuxième article. La condition (i) du Théorème 3.29, qui s'est traduite en condition d'avoir un ensemble d'intervalles adjacent-évitant pour les carquois en type A , nous a mené au Théorème 4.5. Puis, en Section 4.2.8, via le Théorème 4.81, nous avons vu que cette caractérisation combinatoire des catégories canoniquement retrouvables de Jordan, pour les carquois de type A , s'est traduite par le fait d'avoir uniquement des suites exactes courtes entre les représentations de la catégorie dont le terme

du milieu est décomposable.

Nous pourrions nous poser la question de la détermination d'une traduction algébrique des autres conditions (ii) et (i*), quitte à se restreindre à certaines familles de carquois à relations aimables, comme ceux qui sont dérivés équivalents à un carquois de type A , ou les carquois grilles.

Approfondir l'étude de la caractérisation algébrique des catégories canoniquement retrouvables de Jordan dans un carquois de type A . Cela rejoint la question précédente, mais en se focalisant sur une interprétation plus poussée du Théorème 4.81. Ce résultat permet de noter que pour toute représentation T inclinante d'un carquois de type A , la catégorie $\text{add}(T)$ est canoniquement retrievable de Jordan.

En allant plus loin, il semblerait que le lien entre les représentations inclinantes et les catégories canoniquement retrouvables de Jordan soit plus fort que cela. En effet, nous pourrions tenter de prouver la Conjecture 4.82. Si celle-ci est vraie, elle ouvre la perspective de décrire algébriquement les catégories canoniquement retrouvables de Jordan à l'aide des représentations inclinantes pour les carquois de type Dynkin D et E , voire pour les carquois à relations aimables, ou plus.

Déterminer toutes les catégories retrouvables de Jordan d'un carquois de type A . Comme vu en deuxième point de la Section 4.2.8, nous pouvons étudier et tenter de prouver la Conjecture 4.87. La question d'une traduction algébrique se pose également.

Étudier combinatoirement la correspondance entre les données de Krull–Schmidt et les données de Jordan. En ayant le fait que la donnée générique de Jordan et l'invariant de Greene–Kleitman coïncident pour les représentations de type A , nous pourrions développer davantage le Théorème 4.5 dans la direction de la combinatoire et le lien avec la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth.

Étendre la notion d'invariant de Greene–Kleitman dans des cadres où elle correspond à la donnée générique de Jordan. Dans cette direction, nous pouvons constater qu'en type D les deux invariants ne coïncident plus. Nous pourrions nous poser la question s'il est possible d'élargir la notion de GK dans le

cadre de certains carquois à relations aimables, ou même à relations cordes, et espérer que cette extension coïncide avec la donnée générique de Jordan. Une possibilité d'extension serait de travailler dans le cadre où tous les sommets du carquois sont minuscules (car les contre-exemples que nous pouvons fournir en D font intervenir des représentations indécomposables qui à certains sommets donnent des espaces vectoriels de dimension 2). J'imagine même qu'il est possible d'obtenir un élargissement dans le cadre des carquois à relations cordes de type de représentation finie, en comptant sur la structure assez rigide du carquois d'Auslander–Reiten.

Décrire les catégories de représentations canoniquement retrouvables de Jordan pour les carquois à relations aimables, localement aimables, ou cordes. Cette objectif semble accessible. Nous avons vu un bon nombre de configurations minimales dans lesquelles nous perdons la canonique retrouvabilité de Jordan d'une catégorie dans le premier article. Dans le cas des carquois de type A , nous avons vu que la condition (i) suffit pour caractériser les catégories canoniquement retrouvables de Jordan. Nous pouvons imaginer que l'ajout de conditions permettant d'éviter les configurations en question pourrait permettre de décrire les catégories canoniquement retrouvables de Jordan d'un carquois à relations aimables.

Un autre angle d'attaque pourrait s'imaginer en utilisant les modules inclinants. Nous pourrions conjecturer que les catégories canoniquement retrouvables de Jordan maximales d'un carquois à relations cordes peuvent se décrire à l'aide des facteurs indécomposables de représentations inclinantes qui sont dans la même classe d'équivalence donnée par les mutations à deux termes. Cela peut être prometteur.

Déterminer les catégories retrouvables de Jordan pour les carquois à relations cordes. Ce serait un objectif sur le long terme. Les pistes viendront des différentes réponses apportées aux questions précédentes. Dans ce cadre, nous pourrions imaginer avoir des applications combinatoires telles qu'une définition de la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth pour les carquois à relations cordes.

Le lecteur est invité à réfléchir à ces différents axes de travail et de recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- Amiot, C., Plamondon, P.-G. et Schroll, S. (2019). A complete derived invariant for gentle algebras via winding numbers and Arf invariants. *arXiv :1904.02555*.
- Assem, I. et Skowroński, A. (1987). Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n . *Mathematische Zeitschrift*, p. 269–290.
- Assem, I., Skowroński, A. et Simson, D. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras : Techniques of Representation Theory*, volume 1 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press.
<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511614309>
- Barnard, E., Gunawan, E., Meehan, E. et Schiffler, R. (2023). Cambrian combinatorics on quiver representations (type A). *Advances in Applied Mathematics*, 143, 102428.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aam.2022.102428>
- Baur, K. et Coelho Simões, R. (2019). A Geometric Model for the Module Category of a Gentle Algebra. *International Mathematics Research Notices*, 2021(15), 11357–11392.
<http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnz150>
- Brenner, S. (1986). A combinatorial characterisation of finite Auslander-Reiten quivers. Dans V. Dlab, P. Gabriel, et G. Michler (dir.). *Representation Theory I Finite Dimensional Algebras*, 13–49., Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Brüstle, T., Douville, G., Mousavand, K., Thomas, H. et Yıldırım, E. (2019). On the combinatorics of gentle algebras. *Canadian Journal of Mathematics*, 72(6), 1551–1580.
<http://dx.doi.org/10.4153/s0008414x19000397>
- Butler, M. C. R. et Ringel, C. M. (1987). Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras. *Communications in Algebra*, 15(1-2), 145–179.
- Crawley-Boevey, W. (1989). Maps between representations of zero-relation algebras. *Journal of Algebra*, 126(2), 259–263.
[http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-8693\(89\)90304-9](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-8693(89)90304-9)
- Dequêne, B. (2023). Jordan recoverability of some subcategories of modules over gentle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 228(3), 107446.
<http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2023.107446>
- Fu, C., Geng, S., Liu, P. et Zhou, Y. (2021). On support τ -tilting graphs of gentle algebras. *arXiv : Representation Theory*.
- Fulton, W. (1996). *Young Tableaux : With Applications to Representation Theory and Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press.
<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511626241>
- Gabriel, P. (1972). Unzerlegbare Darstellungen I (indecomposable representations I). *Manuscripta*

mathematica, 6, 71–104.

- Gabriel, P. (1974). *Lecture notes in Maths in Séminaire Bourbaki (Représentations indécomposables)*. Springer Berlin, Heidelberg.
- Gansner, E. R. (1981a). Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 2(4), 429–440. <http://dx.doi.org/10.1137/0602046>
- Gansner, E. R. (1981b). The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 30(1), 71–89. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165\(81\)90041-8](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165(81)90041-8)
- Garver, A. et Patrias, R. (2017). Greene–Kleitman invariants for Sulzgruber insertion. *Electron. J. Comb.*, 26, 3.
- Garver, A., Patrias, R. et Thomas, H. (2023). Minuscule reverse plane partitions via quiver representations. *Selecta Mathematica*, 29(3), 37. <http://dx.doi.org/10.1007/s00029-023-00831-4>
- Greene, C. et Kleitman, D. J. (1976). The structure of Sperner k -families. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 20(1), 41–68. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165\(76\)90077-7](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90077-7)
- Hale, H. (2021). An exposition of a proof of Gabriel’s theorem (lecture notes). Récupéré de <https://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Hale.pdf>
- Kac, V. (1980). Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Inventiones mathematicae*, 56, 57–92.
- Krause, H. (1988). Maps between tree and band modules. *Journal of Algebra*, 137(1), 186–194. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-8693\(91\)90088-P](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-8693(91)90088-P)
- Opper, S., Plamondon, P.-G. et Schroll, S. (2018). A geometric model for the derived category of gentle algebras. *arXiv :1801.09659*.
- Palu, Y., Pilaud, V. et Plamondon, P.-G. (2017). Non-kissing complexes and tau-tilting for gentle algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 274. <http://dx.doi.org/10.1090/memo/1343>
- Palu, Y., Pilaud, V. et Plamondon, P.-G. (2018). Non-kissing and non-crossing complexes for locally gentle algebras. *arXiv :1807.04730*.
- Proctor, R. A. (1984). Bruhat lattices, plane partition generating functions, and minuscule representations. *European Journal of Combinatorics*, 5(4), 331–350. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(84\)80037-2](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0195-6698(84)80037-2)
- Riedtmann, Ch. and Schofield, A. (1991). On a simplicial complex associated with tilting modules. *Commentarii mathematici Helvetici*, 66(1), 70–78.
- Saks, M. (1980). *Duality Properties of Finite Set Systems*. Massachusetts Institute of Technology,

Department of Mathematics. (Thèse de doctorat).

Schroër, J. (1998). *Hammocks for string algebras*. (Thèse de doctorat), Université de Bielefeld (Allemagne).

Schröer, J. et Zimmermann, A. (2002). Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras.

Stanley, R. P. (1999). *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press.