UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PRÉSENCE DU MOUVEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE AU QUÉBEC : UNE ÉTUDE AU REGARD DES MANUELS SCOLAIRES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
CHRISTIAN BOISSINOTTE

JUIN 2022

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord me remercier d'avoir accepté ce défi en fin de carrière et de l'avoir enfin mené à terme. Mais bien sûr, je ne l'aurais probablement pas terminé si je n'avais eu le support inconditionnel de mes directrices Doris et Mireille et de mon épouse Linda qui ont eu une patience incroyable! Merci également à Carolyn Kieran qui m'a mis sur la piste de l'early algebra. Après cette expérience, je regrette profondément de ne pas avoir commencé à dévorer des écrits de chercheurs dans un domaine donné beaucoup plus jeune, comme je l'ai fait dans les dernières années. Merci aussi à pratiquement tous les profs du secteur didactique, de merveilleuses personnes que j'ai eu l'occasion de côtoyer et de découvrir. Ce sont des célébrités à leur manière, mais toujours ouverts et sympatiques. Je voudrais aussi remercier mes petits-enfants Cédric et Gabrielle, qui ont redonné un élan à ma vie par leur venue au monde. Je leur dédie ce mémoire car ils en sont un peu responsables aussi.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

La présente recherche vient se situer dans un désir de continuité et d'arrimage naturel avec les connaissances actuelles au sujet de l'Early Algebra (EA). Ma contribution est une analyse d'une collection de manuels scolaires québécois du troisième cycle du primaire pour repérer des contenus qui sont susceptibles de favoriser l'émergence et le développement d'une pensée algébrique primitive (PAP) en tant que fondement d'une compétence algébrique qui pourra continuer de s'affirmer tout au long de la scolarité. Pour atteindre cet objectif, trois questionnements de recherche ont été précisés auxquels nous apportons des réponses dans ce mémoire.

1) On a pu reconnaitre les aspects de la PAP sollicités par un item d'un manuel en les comparant avec ceux qui sont ressortis de la recherche dans notre cadre conceptuel et qui ont servi à élaborer notre grille lors de la mise au point de notre méthodologie. Cette grille a subi plusieurs ajustements. Nous avons trouvé que ces manuels (du troisième cycle du primaire) contenaient suffisamment de matériel pour développer une PAP et permettre aux élèves d'avoir un accès ultérieur aux concepts algébriques du secondaire de façon cohérente. Plusieurs recherches dont nous avons tenu compte confirment l'efficacité d'une intervention ciblée au primaire, en voyant et en saisissant dans le travail arithmétique de tous les jours des occasions pour développer une compréhension plus générale des grandes idées et en évitant de construire des conceptions dans le cadre de la pensée arithmétique qui seraient non viables dans le cadre d'une activité algébrique.

2) Dans les manuels choisis, une bonne quantité d'items nous amènent directement ou indirectement vers une PAP, principalement dans le champ de l'arithmétique, mais aussi, de façon moins marquée, dans les autres champs de contenu mathématique au primaire (géométrie, mesure, probabilité et statistique).

3) Le programme par compétences vise le développement d'une pensée mathématique, entre autres par ce qui est identifé comme des préalables à l'algèbre. Nous avons examiné à la loupe un item intéressant tiré d'un manuel à la lumière des contenus listés dans le document de la progression des apprentissages du primaire (PDA) et même de celui du secondaire. Il a été possible de tisser les nombreux liens entre ces contenus et la façon dont les manuels étudiés les traitent ou pourraient les traiter.

Mots-clés : pensée algébrique, précoce, primitive, manuels scolaires, early algebra.

INTRODUCTION

Le premier chapitre vise à faire ressortir la pertinence de mon choix de sujet de recherche à la lumière de l'état de la situation décrit par les résultats actuels et antérieurs de chercheurs reconnus dans le domaine de l'enseignement de l'algèbre en général. Je me suis intéressé au fait que l'enseignement de l'algèbre a depuis longtemps été un défi dans de nombreux pays, territoires ou communautés et le Québec n'y échappe pas. Plusieurs aspects peuvent intéresser un chercheur en lien avec l'enseignement de l'algèbre, comme les difficultés particulières des élèves ou des enseignants, un portrait de la performance aux examens d'un point de vue statistique, la pédagogie et la didactique des mathématiques, les expériences d'enseignement, etc. Dans mon cas, c'est le contenu des manuels scolaires ayant un certain potentiel pour le développement d'une pensée algébrique primitive au troisième cycle du primaire qui a suscité mon intérêt comme point d'entrée dans ma réflexion. Je me suis demandé si les questions adressées à l'élève dans ces manuels étaient généralement favorables au développement graduel d'une pensée algébrique primitive[1] qui pouvait s'affirmer et s'enrichir tout au long de son cheminement au primaire et au secondaire.

Après avoir lu plusieurs textes faisant état de la situation de la recherche dans le domaine de l'algèbre primitive autant du point de vue épistémologique que didactique, j'ai trouvé particulièrement intéressante la question de la prise en main de l'éducation des élèves pour développer une compétence algébrique tout au long du continuum scolaire, et ce qu'il est possible de faire en particulier au primaire dans cette optique. Dans le premier chapitre, nous brossons un portrait des difficultés des élèves répertoriées en algèbre, lesquelles motivent le fait de s'intéresser au développement de la pensée algébrique dès le primaire. Avant d'aller plus loin, notons que la pensée (de nature) arithmétique est orientée vers le calcul rapide d'une solution numérique alors qu'une pensée (de nature) algébrique a plusieurs caractérisations, comme celle

[1] Cette expression, « *Early Algebra* », sera remplacée quelques fois dans le texte par le sigle *EA*. Nous privilégions dans ce mémoire l'expression « algèbre primitive » basée sur la mise en oeuvre d'une « pensée algébrique primitive » [notre traduction].

de mener à généraliser des faits et des structures arithmétiques, à voir des invariants et des structures dans les expressions, à considérer l'égalité comme une véritable relation d'équivalence et d'être en mesure de travailler avec une quantité non précisée comme si on la connaissait, en la représentant habituellement par un symbole littéral. Nous y reviendrons au chapitre 2.

Certains chercheurs soulignent une rupture entre l'arithmétique et l'algèbre alors que d'autres en parlent en termes de continuité, notamment dans les discussions sur l'Early Algebra. Nous nous situons en dehors de ces débats en ce qui concerne le développement d'une pensée algébrique que nous nommons « primitive ».

Dans ce chapitre, un détour est fait du côté de divers programmes d'études dans différents pays pour y relever la présence d'une préoccupation pour le développement d'une pensée algébrique primitive. Nous croyons que cette étude nous aidera à détecter des éléments favorables au développement de la pensée algébrique primitive dans les documents mis à la disposition des enseignants du Québec pour guider leurs interventions en classe, notamment le programme d'études et les manuels scolaires.

Dans le deuxième chapitre sont posées les bases conceptuelles sur lesquelles s'appuie, au chapitre III, une grille d'analyse inspirée des différentes recherches portant sur la pensée algébrique dans le sillage du mouvement Early Algebra. Ces bases conceptuelles ont été construites à la suite de mes diverses lectures d'articles de revues scientifiques, d'actes de congrès et de livres spécialisés dans ce domaine. La grille qui a été créée est originale et découle d'une analyse personnelle basée sur mon cadre conceptuel voulant répondre à la problématique qui sera exposée dans le premier chapitre. Suite à l'élaboration du cadre conceptuel, trois questions de recherche émergent et se précisent dans le troisième chapitre, qui traite de la méthodologie de cette recherche. Dans un premier temps, nous présentons une version de la grille qui a ensuite été revue après une analyse préliminaire des manuels scolaires. Ce travail a abouti à une grille plus opérationnelle pour analyser les manuels. En tout, quatre manuels scolaires ont été analysés dans la collection Clicmaths au troisième cycle du primaire. L'organisation de ces manuels est décrite dans ce même chapitre sur la méthodologie et une compilation des items retenus dans chacune des *situations*[2] a été réalisée.

Cette grille, qui se présente finalement en trois volets, est exploitée au chapitre IV pour réaliser un classement des différents items contenus dans les manuels sélectionnés et pour poser un regard particulier sur le potentiel de ces items. Plusieurs items sont analysés dans ce chapitre et une analyse globale des quatre manuels scolaires est présentée. Cette analyse a permis de revenir sur la grille initiale en la bonifiant par la prise en compte de ce qui ressort de l'étude des manuels.

Dans le cinquième chapitre, un retour réflexif sur ce qui a été fait et sur les résultats obtenus viendra apporter des réponses au questionnement initial. Nous proposons une discussion sur les particularités des manuels analysés qui nous amènent à revisiter les résultats obtenus par la recherche. Cette discussion ouvre la porte à une définition plus précise des actions des élèves et des caractéristiques des opportunités pour développer une pensée algébrique primitive. Dans ce chapitre, nous proposons l'analyse d'un item particulier tiré de l'un des quatre manuels sous l'angle des éléments du programme de formation de l'école québécoise et du document de la progression des apprentissages au primaire pour y faire émerger la façon dont peut être interpellé le développement de la pensée algébrique primitive.

Finalement, dans la conclusion, nous revenons sur les trois questions de recherche; les limites et les prolongements de la recherche y sont également discutés. Il ressort, outre ce qui est obtenu comme analyse par l'utilisation de la grille, que la grille elle-même constitue un résultat important de toute cette démarche.

[2] Par le mot *situation*, les auteurs réfèrent à des sections d'une dizaine de pages dans les manuels.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Questionnement de départ de la recherche (contexte qui motive l'étude)

Dans ma carrière d'enseignant et de conseiller pédagogique, je me suis questionné sur les façons de comprendre et d'enseigner la gestion de la priorité des opérations dans les expressions arithmétiques; ce qui m'a mené à la rédaction d'un article professionnel dans la revue Envol (Boissinotte, 1996). Dans cet article, je souligne l'importance de réfléchir sur la structure des chaînes d'opérations et de ne pas appliquer machinalement le « PEMDAS »[3]. Cette réflexion repose sur les propriétés et les priorités des opérations dans la forme écrite des expressions arithmétiques et sur la structure que cela induit. Un tel travail en arithmétique prépare le terrain pour une réflexion similaire en algèbre.

Quelques discussions avec Carolyn Kieran, professeure émérite reconnue internationalement pour ses travaux en didactique de l'algèbre et sa contribution au développement du champ de recherche qu'est Early Algebra (EA) ont confirmé mon intérêt à travailler dans cette voie. Elle m'a fait comprendre que ce domaine de recherche est en effervescence et encore fortement en demande de contributions.

Ainsi, mon questionnement de recherche est né de mon expérience professionnelle en milieu scolaire et s'est poursuivi avec les échanges menés avec Mme Kieran et mes lectures. J'en suis venu alors à considérer l'importance et la pertinence d'intervenir sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire. [4]

---

[3] Truc mnémonique que l'on fait apprendre aux élèves. « On fait dans l'ordre : **p**arenthèses, **e**xposants, **m**ultiplications et **d**ivisions, **a**dditions et **s**oustractions. »

[4] Dans la présente section, comme dans certaines phrases qui impliquent directement ma pensée ou mes actions, je vais conserver le « je ». Autrement, j'utilise le « nous » pour inclure mes directrices dans la réalisation globale du mémoire, de même que le lecteur.

L'une des questions qui se pose alors concerne les outils dont disposent les enseignants pour aider au développement de cette pensée algébrique chez les élèves. Retrouve-t-on un potentiel de construction d'une pensée algébrique au cœur des situations proposées dans les ressources qui leur sont disponibles, notamment dans les manuels scolaires?

1.2 Un constat de difficultés répertoriées chez les élèves

Bien que l'existence des difficultés des élèves en algèbre ne soit rien de nouveau, il aura fallu attendre vers la fin du 20e siècle pour que des chercheurs s'y attardent de façon plus méthodique et posent les bases d'une connaissance scientifique à ce sujet. Ces difficultés ont été identifiées principalement par Booth (1984) et le portrait a été mis à jour par Carraher et Schliemann (2007).

Voici les principales difficultés des élèves traditionnellement reconnues par les chercheurs et reliées à l'entrée dans l'algèbre (Carraher et Schliemann, 2007, p.670).

Les élèves...

a) croient que le symbole d'égalité ne représente qu'un opérateur unidirectionnel qui produit une valeur de sortie du côté droit à partir d'une entrée du côté gauche;
b) se centrent sur la recherche de solutions particulières;
c) ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité;
d) n'utilisent pas de symboles mathématiques pour exprimer les relations entre les nombres;
e) ne comprennent pas l'usage des lettres en tant que généralisation de nombres;
f) ont de grandes difficultés à opérer sur des valeurs inconnues; et
g) ils ne parviennent pas à comprendre que des transformations équivalentes des deux côtés d'une équation n'altèrent pas sa valeur de vérité.

[Notre traduction]

En e) on pourrait ajouter les problèmes plus généraux en lien avec l'interprétation de la lettre (Booth, 1984) et d'autres conventions d'écriture. Booth (1984) rappelle aussi la difficulté des élèves à accepter une réponse où une opération est laissée en suspens.

Selon Booth (1984), une bonne partie des obstacles rencontrés lors des premiers contacts des élèves avec l'algèbre serait en réalité l'expression directe de difficultés non résolues lors de l'apprentissage de l'arithmétique, par exemple la façon de gérer la priorité des opérations (basée sur le contexte plutôt que sur les conventions sous-entendues par la forme écrite) et le symbole d'égalité (qui commande une réponse plutôt que de présenter une relation d'équivalence); les calculs avec des nombres négatifs (si les règles des signes ne sont pas maîtrisées en contexte arithmétique, le changement de contexte ne va évidemment pas régler le problème) et la gestion des exposants[5] (la construction raisonnée des lois des exposants n'est abordée en général qu'ultérieurement dans le cheminement scolaire).

Voici comment Booth (1984, p.87) explique cette conclusion liée à l'expérience arithmétique des élèves :

Beaucoup d'enfants ...

a) ne considèrent pas explicitement de méthode en arithmétique;
b) peuvent en fait utiliser des procédures qui ne sont pas formalisées;
c) tendent à interpréter les expressions en termes de contexte, ce qui fait que la priorité des opérations n'est pas dictée par la façon d'écrire les expressions (Kieran, 1979)[6]; et
d) même dans le cas de ces procédures mathématiques dont ils sont explicitement conscients, ils ne sont pas toujours compétents pour les symboliser (par exemple dans l'interprétation de la concaténation de symboles - voir section 1.3).

[notre traduction]

Ces difficultés passent sous le radar en contexte arithmétique car on ne demande aux élèves que de trouver la bonne réponse à chaque question. Ce sont précisément les habiletés qu'ils ont réussi à ne pas acquérir qui leur font cruellement défaut quand ils abordent l'algèbre ou des expressions arithmétiques plus complexes ne se limitant pas aux entiers (Booth, 1984). Antérieurement, chaque solution était fortement rattachée au contexte et il ne leur était pas nécessaire d'en extraire une interprétation décontextualisée ou une modélisation.

Pour illustrer cette situation, regardons un exemple :

C'est la journée chanceuse de Paul! Sur la route, il trouve une pièce de 0,25$ et un peu plus loin, il en trouve deux autres. Pour calculer son total, il pose $1 + 2 \times 0{,}25\$$ et obtient 0,75$, ce qui est le bon montant. Il a fait 1+2, ce qui lui donne 3, et il multiplie ce résultat par 0,25$. Il n'a pas mis de parenthèses car le calcul est évident pour lui et est déterminé par le contexte. Évidemment, c'est à son enseignant que cela pose problème! Il pourrait aussi dessiner les pièces de monnaie et trouver ainsi le total. Il n'aura pas eu besoin de formaliser le calcul par une écriture rigoureuse. Et

[5] MacGregor et Stacey (1997) émettent aussi l'hypothèse que les nouveaux apprentissages, comme celui de la notation exponentielle, pourraient interférer avec l'apprentissage de l'algèbre.

[6] Référence ajoutée par moi.

même s'il sait comment le faire, trouvera-t-il cela pertinent puisqu'il peut se débrouiller sans y faire appel?

On réalise bien que ces façons de faire risquent de poser problème en contexte algébrique.

1.3 Ruptures (à l'origine de certaines des difficultés identifiées plus haut) ou continuité entre l'arithmétique et l'algèbre?

Dans la littérature, on peut relever diverses positions relatives à ce sujet : plusieurs chercheurs voient une coupure entre l'arithmétique et l'algèbre alors que d'autres en parlent en termes de continuité ou parfois de fausses continuités.

1.3.1 Ruptures dans l'apprentissage

On a un premier type de rupture, relatif à la forme des équations algébriques. La vision selon laquelle il y a une coupure ou rupture dans l'apprentissage lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre a été une base d'investigation pour de nombreux chercheurs (Bednarz et Janvier, 1996; Chevallard, 1985; Filloy et Rojano, 1989). Le contexte de ce questionnement sur l'existence d'une rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre est toujours présent de nos jours. Il a permis de mettre en évidence plusieurs erreurs et difficultés récurrentes au début de l'apprentissage de l'algèbre et a aussi suscité plusieurs propositions pour l'enseignement. Selon Filloy et Rojano (1989), les équations où une inconnue[7] apparaît des deux côtés de l'égalité marqueraient un changement dans la démarche cognitive au moment où il devient nécessaire d'agir sur cette inconnue comme si elle était connue pour résoudre l'équation : « Its resolution involves operations drawn from outside the domain of arithmetic - that is, operations on the unknown. » (Sa résolution implique des opérations issues de l'extérieur du domaine de l'arithmétique - c'est-à-dire des opérations sur l'inconnue [notre traduction][8]).

[7] Une égalité contenant une lettre est une équation. Si on considère la lettre comme une variable (selon l'interprétation de Carraher et Schliemann (2007), p. 685 et 691 et selon l'approche fonctionnelle, p.687), l'égalité formera une proposition fausse pour les valeurs de cette variable ne correspondant pas à la valeur inconnue qui rend les deux membres (expressions fonctionnelles) de l'égalité égaux (si elle existe). Elle pourrait ne pas exister dans un cas comme $x+1=x$; et dans le cas d'une identité, tout le domaine est l'ensemble solution comme avec $x+2-2 = x$.

[8] La version originale anglaise est aussi donnée en cas de pertes de nuances dans la traduction.

Il a été mentionné par ailleurs que ce type de gestion de l'inconnue relève d'un traitement analytique. À la p.11, Kieran et ses collègues, (2016) citent Radford, 2014, p.260 : « analyticity : the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers ») (l'analyticité : les quantités indéterminées sont traitées comme si elles étaient des nombres connus [Notre traduction]).

Un deuxième type de rupture se présente, en lien avec les relations entre les données dans des problèmes de comparaison (ou de partage). Bednarz et Janvier (1996) mettent en lumière une cassure d'un autre ordre en contexte de résolution de problèmes par le passage de problèmes connectés[9] à des problèmes déconnectés[10] de partage inégal (ou « de partage inéquitable », selon leur terme) avec ou sans recours à une équation pour les résoudre (voir aussi Schmidt, 1996). Une classification des problèmes écrits selon la structure des liens entre les quantités, connues et inconnues[11] (Bednarz et Janvier 1996), permet d'en apprécier la difficulté. Les chercheuses schématisent les énoncés pour analyser leur complexité (voir la figure 1). Cette caractérisation indique si un problème fait a priori appel à un raisonnement arithmétique (problème connecté) ou algébrique (problème déconnecté) selon la nécessité d'opérer sur une quantité inconnue comme si elle était connue (raisonnement analytique). Ce besoin ne se manifeste pas dans les problèmes connectés car un raisonnement arithmétique suffit pour les résoudre. La nature des relations entre les données, additives, multiplicatives ou un mélange des deux, détermine donc un niveau de difficulté dans les problèmes déconnectés.

Contrairement à la méthode d'analyse de Filloy et Rojano (1989), ce n'est pas ici la structure de l'équation qui détermine le type de raisonnement nécessaire mais celle des relations entre les données du problème.

[9] Résolubles par une séquence de calculs arithmétiques sur des valeurs toutes connues ou déduites à mesure. On part donc du connu vers l'inconnu sans agir sur une inconnue. Cette approche est qualifiée de synthétique par opposition à analytique.

[10] Les données connues ne peuvent pas être mises directement en relation pour obtenir la ou les valeurs inconnues ou une valeur qui ferait le lien. Il est nécessaire d'agir au moins sur une quantité inconnue comme si elle était connue.

[11] Les chercheuses distinguent trois types de problèmes : puits: deux données pointent vers une même troisième donnée; les problèmes composition: les données sont liées séquentiellement; source: deux données sont déterminées à l'aide d'une même troisième.

Il existe un troisième type de rupture, signalé par Booth (1984) et par Kieran, Pang, Schifter et Ng (2016), qui est lié au code d'écriture. En arithmétique, une concaténation suppose une addition, comme dans le cas des nombres fractionnaires[12] : $\mathbf{2\frac{3}{4}}$ signifie $\mathbf{2+\frac{3}{4}}$ alors qu'en algèbre, $\mathbf{2\frac{x}{4}}$ suppose une multiplication : $\mathbf{2\times\frac{x}{4}=\frac{2x}{4}}$. De plus, on n'écrira pas $\boldsymbol{x\frac{x}{4}}$ dans le sens d'un nombre fractionnaire; on y verra plutôt une multiplication. La symbolisation numérique en base 10 a aussi ses particularités : 32 signifie 3 dizaines + 2 unités et non 3 × 2. En algèbre, une concaténation comme *xy* signifie toujours *x* • *y*, une représentation du produit[13] de *x* et *y*. À ce propos, il pourrait être judicieux de surveiller la contamination de la syntaxe algébrique par celle qui est dictée par les logiciels informatiques (l'usage de l'astérisque en multiplication, les identificateurs de variables contenant plus d'une lettre et même des chiffres, le symbole « = » utilisé pour l'affectation d'une valeur connue ou non à une variable, etc.).

Kieran, Pang, Schifter et Ng (2016, p.3), en parallèle, soutiennent, en se basant sur une recherche menée avec des élèves de 12 à 15 ans (donc des élèves de niveau équivalent à notre premier cycle du secondaire) qu'une manière de penser[14] caractéristique de l'arithmétique (recherche d'une réponse unique par calcul) constitue une entrave pour aborder l'algèbre de façon efficace. Cette manière de penser est liée aux types de raisonnements en arithmétique qui sont basés sur une efficacité en calcul. En page 5, ils citent en particulier un texte préparatoire à ICMI Study 12 :

> « Kaput and Blanton (2001) suggested that the algebrafication of arithmetic involves moving beyond a proficiency-oriented view to that of developing in the elementary

---

[12] Cette notation est courante au Québec mais pas nécessairement dans toute la francophonie.

[13] Le produit est le résultat de la multiplication ou encore la dénotation de la multiplication instanciée par les symboles.

[14] Traduction littérale de « arithmetic way of thinking ». Il est intéressant de noter que certains auteurs caractérisent ainsi l'action de penser (la pensée algébrique en tant qu'activité ou processus) alors que d'autres parlent plutôt de la pensée elle-même (objet, produit). On est encore dans une dialectique processus / objet un peu comme dans le cas de la conception de ce qu'est une expression algébrique. De plus, si on parle d'une pensée arithmétique (ou algébrique), on pourrait nuancer son degré: une pensée plus arithmétique qu'algébrique, etc. La classification est plus aisée avec l'idée de « raisonnement » car celle-ci est mieux délimitée que l'idée de « pensée ». L'idée de « réflexion » semble se situer entre la pensée et le raisonnement.

Carraher et Schliemann (2007, p.673) utilisent « forms of thinking ». Deux lignes plus loin ils mentionnent: « moving from an arithmetic to an algebraic form of reasoning ». Pour une clarification de ces idées relatives aux pensées mathématiques, voir (Kouki, Jeannotte et Vlassis, 2015).

grades the ways of thinking that can support the later learning of algebra. » (Kaput et Blanton (2001) ont suggéré que l'algébrification de l'arithmétique implique d'aller au-delà d'une vision axée sur les compétences en calcul pour développer au primaire les modes de pensée qui peuvent soutenir l'apprentissage ultérieur de l'algèbre. [Notre traduction])

1.3.2 Vers une continuité avec le mouvement Early Algebra

Il existe des tentatives d'introduire l'algèbre avec son formalisme au primaire, comme en Russie, en Chine et au Japon avec des approches particulières (quantités, comparaison des méthodes arithmétiques et algébriques, quasi-variables, etc.) ou même avec un support particulier pour adapter certains concepts algébriques au primaire, quitte à les simplifier (Carraher et Schliemann, 2007). Or, comme le disent Carraher, Schliemann et Schwartz (2008): « Early Algebra is not Algebra Early ». Mais cela n'exclut pas pour eux les bénéfices d'une symbolisation graduelle. Il y a aussi la possibilité d'amener d'abord le sens du formalisme par une situation réelle (Hunter, Anthony and Burghes, 2018, p.383) avant de l'aborder de fait (le formalisme) en tant que moelle épinière d'un modèle de la situation.

Kieran et ses collègues (2016) rapportent que l'idée de la pertinence du développement d'une pensée algébrique dès le primaire et tout au long du curriculum avait déjà été évoquée dès les années '60, par Robert B. Davis.

Dès 1964, ce dernier avait été très impliqué dans l'initiative avant-gardiste « Madison Project » (Davis, 1960) dont se sont fortement inspirés Carpenter, Franke et Levi (2003) en reprenant les phrases arithmétiques vraies et fausses et celles où il manque des nombres ou des opérateurs (phrases lacunaires). Le but était de faire découvrir et formuler des règles générales. Davis est aussi connu pour ses défis « Guess my Rule! », vers 1967 (Devinez la règle de cette suite!) (Fennema, Franke et Grouws, 1992, p.409). Voici ce que Davis (2003, p.642) disait du Madison Project de l'université de Syracuse, débuté en 1957 :

> « A major component of the program was the development of the ideas of algebra (Davis 1967a, l967b, 1980), including the use of appropriate axioms (again, selected by the children), the graphs of conic sections, exploring matrix algebra, and considerably more. » (Une composante majeure du programme était le développement des idées de l'algèbre, y compris l'utilisation d'axiomes appropriés (choisis à nouveau

par les enfants), les graphiques des sections coniques, l'exploration de l'algèbre matricielle et beaucoup plus [Notre traduction]).

> « some were successful in the extreme. Children as young as second graders were successful in algebra and geometry; fifth and sixth graders were successful in programming computers (which in those days usually had to be brought to the school on a large truck, accompanied by a staff of technicians); and in at least one instance childrcn showed four years of growth (as judged by the Comprehensive Test of Basic Skills) for one year of schooling (Davis 1984; Davis 1990; Dilworth and Warren 1973). » ((...) certains [programmes] ont eu du succès à l'extrême. Les enfants aussi jeunes que ceux de deuxième année ont réussi en algèbre et en géométrie; les élèves de cinquième et sixième années ont réussi à programmer des ordinateurs (...) et, dans au moins un cas, les enfants ont connu quatre années de croissance (d'après le test complet des compétences de base) en un an de scolarité [notre traduction]. (Davis, 2003, p.626).

Lorsque certains chercheurs commencèrent ainsi à considérer la pensée algébrique de façon plus générale sur l'ensemble du continuum primaire-secondaire, le concept de Early Algebra s'est graduellement raffiné en celui du développement précoce de la pensée algébrique et a été décliné de différentes façons dont « algèbre avant la lettre » ou encore « algèbre pour tous » et j'ajoute « algèbre primitive » au prochain chapitre, cette terminologie étant celle retenue dans ce mémoire.

L'expression Early Algebra demeure cependant bien ancrée, même si elle n'éclaire pas de façon décisive ce à quoi elle réfère, ni les nuances dans la façon de la définir.

Kaput (2000) pensait plus particulièrement qu'une imbrication de l'arithmétique et de l'algèbre tout au long de la scolarité apporterait cohérence, profondeur et puissance aux mathématiques scolaires.

En contexte d'algèbre primitive, on vise en effet à rendre l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre (le numérique et l'algébrique) le plus harmonisé possible sur l'ensemble d'un cursus. On y remet donc en question le fait de n'enseigner les idées algébriques qu'après l'arithmétique en considérant la pensée algébrique de façon plus souple, indépendamment du formalisme et en lien « élastique » avec l'algèbre. Nous y reviendrons dans le cadre conceptuel.

Nous pouvons souligner que le mouvement EA est d'un grand intérêt pour beaucoup de chercheurs. En effet, la liste des concepts à explorer dans cette mouvance s'est enrichie par ce que le comité TSG 10 de la 13e rencontre de l'International Commission on Mathematics Education (ICME-13) en 2016 en Allemagne a identifié comme aspects d'intérêt en lien avec la recherche sur l'EA (Kieran, 2018, p.x) Le point iii est particulièrement intéressant dans le cadre de ce mémoire. Les ajouts entre parenthèses sont tirés de Kieran (1989, p.163, repaginée 169) qui rapporte des questionnements des participants à PME[15] 13. Voici six champs d'intérêts identifiés par ces chercheurs :

i) les perspectives théoriques telles que le structurel (connaissance et reconnaissance des structures, formalisation de patterns arithmétiques), le linguistique, l'analytique et l'expression de la généralité;
ii) l'émergence de la pensée algébrique symbolique (utilisation de variables ou autres moyens sémiotiques, facilité et flexibilité);
iii) la pensée algébrique des enfants dans le contenu actuel des programmes et le potentiel de ces programmes pour aborder la pensée algébrique;
iv) des approches fonctionnelles axées sur l'utilisation de narrations, de patterns (modèles ou motifs) et des tâches sur des « machines à fonctions » (les opérations inverses et les relations inverses);
v) les approches en arithmétique généralisée impliquant un travail avec des fractions, des opérations en tant qu'objets et des concepts d'égalité; et
vi) le développement des enseignants actifs et en formation pour qu'il soient aptes à promouvoir la pensée algébrique.

[Notre traduction]

Kaput (2008) avait mentionné ce dernier point comme l'un des chantiers majeurs qu'il anticipait pour la réalisation de sa vision. Il a mentionné le besoin de la création de ressources et la mise à jour des compétences des enseignants du primaire. Ces deux volets se sont en effet développés de façon importante depuis, comme nous l'illustrons dans la prochaine section.

1.4 Des ressources pour les enseignants

Depuis sa prédiction, on a vu des séances de formation dans les milieux scolaires et l'apparition de beaucoup de ressources en ligne dans Internet. En voici une qui est particulièrement aidante et d'accès gratuit, produite par la WGBH Educational Foundation (2002). (https://www.learner.org/series/learning-math-patterns-functions-and-algebra/)

[15] International Group for the Psychology of Mathematics Education

On y retrouve des vidéos de formation très éclairantes. La première activité, « Eric the Sheep » aide des enseignants du primaire à comprendre qu'un raisonnement algébrique est possible, même si on n'utilise pas de variables ou d'équations. On les voit réaliser ces apprentissages et en discuter[16]. Ces exemples et ceux d'autres projets comme ceux de Carpenter ou de Blanton (et leurs collègues, bien sûr) viennent donner vie à mon imagerie formée à ce jour par ma recherche et m'aideront à mieux cibler les angles d'observation adéquats pour mon outil d'analyse, pour que ses résultats soient bien tributaires d'une définition opérationnelle de ses critères. Mentionnons aussi la page web[17] d'un projet amorcé au Québec il y a déjà quelques années sur l'arrimage primaire-secondaire en algèbre avec des conseillères pédagogiques très actives dans le dossier. Elles oeuvraient en particulier dans la mise à jour des connaissances des enseignants du primaire pour les préparer à enseigner avec la préoccupation du développement de la pensée algébrique au plus jeune âge. Plusieurs didacticiens des mathématiques accompagnent les milieux dans ce projet particulier : Hassane Squalli et Adolphe Adihou (U.Sherbrooke); Izabella Oliveira (U.Laval); Mélanie Tremblay (UQAR, Campus de Lévis); Doris Jeannotte et Mireille Saboya (UQAM).

Une autre ressource qui mérite une mention est celle du projet LEAP[18] (Learning through an Early Algebra Progression) qui développe un curriculum Early Algebra Learning Progression (EALP) pour K-5 soit de la maternelle à la 5e année. C'est un projet de TERC[19] avec Blanton[20] et Gardiner profitant de plusieurs partenariats universitaires et gouvernementaux.

Pour terminer cette section sur les ressources, on ne peut pas passer sous silence les activités proposées[21] par Hitt et coll. (2019) pour le développement d'une pensée arithmético-algébrique

---

16 D'un intérêt historique dans cette veine, des vidéos de Davis donnant des cours aux enfants avec des idées algébriques sont encore accessibles sur Internet.

17 http://mathematiqueps.blogspot.com/

18 https://www.terc.edu/projects/project-leap/

19 TERC est un organisme à but non lucratif qui stimule la recherche et la collaboration entre divers groupes intéressés en éducation scientifique et mathématique (STEM).

20 Stephens, Stroud et Knuth se sont intégrés au projet intial visant les niveaux 3 à 5 du primaire pour l'étendre en K-2.

21 Les activités du primaire de Hitt et coll. sont dans un format permettant facilement une approche ACODESA, expliquée dans les documents. (http://pmme.mat.uson.mx/MEyT.html)

dans le cadre d'une recherche au primaire impliquant une collaboration entre des équipes du Québec et du Méxique. Les activités sont en libre accès dans une publication électronique qui contient aussi des activités pour des niveaux scolaires plus avancés et sont accompagnées de chapitres théoriques ou de guides d'enseignement en espagnol et en français.

On peut voir que l'intérêt est manifeste envers ce qui touche le développement des idées algébriques dès le primaire. Cependant, même si c'est un sujet de première importance, il y a une grande variation de traitement dans les programmes d'études consultés. Regardons un peu autour pour essayer de comprendre comment le Québec s'est positionné sous cet aspect.

1.5 L'EA dans les programmes d'études de certains pays

Certains programmes d'études affirment clairement la vision d'un développement de la pensée algébrique tout au long du cheminement scolaire.

Les standards du NCTM (2000) en algèbre, particulièrement en ce qui concerne les patterns (motifs), relations et fonctions[22] ont grandement influencé les réformes américaines, et au moins celle de l'Ontario au Canada.

1.5.1 Aux États-Unis

Le « Common Core State Standards »[23] est adopté en 2009 (suite à une démarche débutée en 2007). Les programmes d'études font mention explicitement des intentions liées au développement de la pensée algébrique. On y retrouve les mots « algèbre » et « pensée algébrique » dans l'ensemble du cheminement scolaire, même à partir de l'école maternelle (kindergarten). Le développement de la pensée algébrique est un objectif clair et soutenu.

Ce programme-cadre est utilisé dans 43 des états américains, dans plusieurs de leurs dépendances (insulaires) et dans le district de Columbia[24].

[22] Comme la question des fonctions discrètes s'apparente aux suites, et donc aux régularités, on regardera plutot l'aspect de continuité et de la covariation en ce qui concerne le contexte fonctionnel. Voir Robert (2018).

[23] http://www.corestandards.org/Math/

[24] http://www.corestandards.org/about-the-standards/frequently-asked-questions/

En Ontario, l'algèbre est présente dès le primaire depuis 2005.

L'Ontario a d'abord connu un changement de programme en 2005 et tout récemment en 2020. Voyons d'abord comment le premier programme s'est teinté du mouvement EA pour tenir compte de la recherche.

À l'instar de ceux des États-Unis, les programmes[25] de l'Ontario comprenaient un volet « Modélisation et algèbre » dès la maternelle. On y abordait en 1^{re} et 2^{e} années du primaire les relations en situation avec diverses représentations et les régularités : suites numériques et non numériques; s'ajoutaient les tables de valeurs en 3^{e} et 4^{e} années, en 5^{e} les équations et la généralisation d'une règle en mots. La généralisation se poursuivait en 6^{e} année. « Grâce à ces activités, les élèves développent une compréhension des concepts d'inconnue et de variable et des effets des changements d'une variable sur une autre » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p.17).

Le programme de 2020 est structuré en fonction de 5 domaines mathématiques : Nombres, Algèbre, Données, Sens de l'espace et Littératie financière. S'ajoute un volet intéressant qui est l'apprentissage socioémotionnel.

On trouve sur le site du gouvernement de l'Ontario une comparaison des contenus en algèbre de ce programme et du programme précédent (2005). On y voit un engagement encore plus marqué envers les suites dans le nouveau programme.

On amène les variables dès la première année et on fait résoudre des inégalités dès la quatrième année. En cinquième et sixième années, on commence à évaluer des expressions et à additionner des monômes du premier degré (au lieu d'attendre en septième année). S'ajoutent des sujets étonnants, comme le codage et le processus de modélisation à toutes les années de la première à la 8^{e}. On se souviendra que le codage avait déjà été popularisé par Papert (1972, 1980) avec la tortue LOGO et les micromondes (Hoyles et Noss, 1992).

[25] https://www.dcp.edu.gov.on.ca/fr/curriculum/elementaire-mathematiques

En maternelle, la structure du programme cadre (Gouvernement de l'Ontario, 2016, p.73) n'est pas basée sur les matières mais sur des compétences générales. Toutefois, on y trouve une référence à l'étude des suites et régularités:

> L'apprentissage des mathématiques, qui se manifeste par les diverses façons dont l'enfant utilise les concepts des nombres, des suites et des régularités pendant le jeu et l'enquête; la manière par laquelle l'enfant accède à l'information et sa manière de la gérer, de la créer et de l'évaluer; et sa compréhension émergente des relations, des concepts, des habiletés et des processus mathématiques (...).

1.5.2 Progression du mouvement de l'EA dans d'autres pays

Différentes mises en œuvre des idées de l'EA ont été testées dans les curriculums de différents pays ou régions (états, provinces, territoires...). Le très grand nombre de textes de chercheurs de plusieurs pays témoigne de différents degrés d'engagement dans ce mouvement. Un recensement et une analyse de ces écrits serait nécessaire pour avoir un meilleur portrait de l'évolution mondiale dans cette voie, mais tout indique que le phénomène est toujours en croissance. Le Brésil, le Mexique et d'autres états ont beaucoup d'écrits pour en témoigner. En certains endroits cependant, comme en Serbie et en Boznie-Erzégovine (Romano et Crvenkovic, 2014), les didacticiens qui tentent d'amener ces idées font face à une forte résistance.

1.5.3 Les choix du Québec - Comment on y aborde l'algèbre?

Avant de regarder le programme actuel (Gouvernement du Québec, 2001, 2006) parlons un peu du programme transitoire du ministère de l'Éducation du Québec de 1993 au secondaire[26]. Un travail sur des préalables à l'algèbre avait lieu au premier cycle du secondaire.

Le premier objectif général de ce programme transitoire en première secondaire s'énonçait ainsi : « Favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre. » (Gouvernement du Québec, 1993, p.23).

Remarquons ici que ces préalables devaient être acquis au secondaire et non au primaire.

Or, il y avait là des idées qui depuis ont fait leur chemin jusqu'au primaire actuel, dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) (Gouvernement du Québec, 2001)[27] et

---

[26] Au primaire, en 1993, on avait encore le programme de mai 1979 où il n'était pas question d'algèbre.

dans le document de la progression des apprentissages (PDA) (Gouvernement du Québec, 2009) au primaire. Par exemple la recherche de régularités dans les suites est un sujet qui est maintenant présent au primaire et qui pourrait mener éventuellement à un raisonnement fonctionnel discret.

Dans le PFEQ actuel du secondaire (Gouvernement du Québec, 2006, p. 253), on précise ceci à propos du programme actuel du primaire (Gouvernement du Québec, 2001) :

> Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu[28], à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes.

Or on peut aussi lire dans le document de la progression des apprentissages au secondaire (Gouvernement du Québec, 2010, p.13) : « Au 1er cycle du secondaire, on assiste au passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. ».

Doit-on comprendre que les préalables à l'algèbre qui ont été travaillés au primaire n'ont pas fait émerger de pensée algébrique chez les jeunes et que celle-ci va naitre au premier cycle du secondaire?

Si l'élève a été initié à des préalables à l'algèbre au primaire, le passage à la pensée algébrique y a déjà été amorcé. En effet, certaines activités du primaire considérées comme des préalables développeraient de fait la pensée algébrique. [29]

La phrase qui parle de passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique semble donc un peu contradictoire et nous incite à vouloir y regarder de plus près.

---

[27] Appropriation en 1999-2000.

[28] Dans le document de la progression des apprentissages, ce passage est repris mais les mots « à son insu » ont été retirés! On informe probablement les élèves maintenant!

[29] Il est à noter qu'étant donné le délai important entre la production du programme d'études de base (Programme de formation de l'école québécoise - PFEQ) et le document en question (PDA) il se peut qu'il y ait un écart de vue en ce qui concerne le développement attendu d'une pensée algébrique ou même de sa définition.

1.6 Objectif et question de recherche

ET MAINTENANT?

Il est clair que la tendance est forte et qu'un mouvement mondial s'est amorcé. Les chercheurs ont montré qu'il était nécessaire de repenser l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre en prenant en compte, d'une part, les difficultés potentielles et leurs causes identifiées et, d'autre part, le champ conceptuel de la pensée algébrique élaboré jusqu'ici par les chercheurs, et servant de guide aux discussions épistémologiques. Il est à prévoir que des développements curriculaires vont en découler ici au Québec, mais il est assurément pertinent de voir d'où on part. Notre projet de recherche s’attarde à analyser les potentialités des manuels scolaires québécois en termes d’algèbre primitive.

Mais pourquoi s’attarder aux manuels scolaires ?

Certains chercheurs précisent que les manuels scolaires jouent un rôle d'autorité en classe, pour différentes raisons (Barallobres, 2009, p.55; Demosthenous et Stylianides, 2018). Stylianides (2005) considère que les manuels scolaires exercent une influence importante sur les choix et la nature des activités réalisées en classe et constituent de ce fait le véhicule d'une étape non négligeable de la transposition didactique[30] du savoir institutionnel (Chevallard et Joshua, 1991).

Ainsi, comme l’annonce Linchevski (1995, p.114), « Within primary-school arithmetic there is ample opportunity for the development of algebraic thought » ([Notre traduction : Au sein de l'arithmétique de l'école primaire, il existe de nombreuses opportunités pour le développement de la pensée algébrique]). Par une analyse de manuels scolaires, nous nous intéressons aux possibilités qui peuvent être offertes dans l'arithmétique de l'école primaire pour le développement de la pensée algébrique.

Nous en arrivons donc à préciser l'objectif de cette recherche et la question plus particulière qui nous intéresse.

[30] Ce que l’élève apprend est différent de ce qu’on lui enseigne et on n’enseigne jamais selon un modèle unique qui convient à tous. Le savoir institutionnel passe par différentes étapes d’interprétation et d’adaptation par son traitement dans les programmes d’études, dans le matériel scolaire et par l’enseignement en classe. Chacune de ces transformations constitue une étape de la transposition didactique du savoir.

Objectif : Nous visons l’objectif de détecter le potentiel pour le développement de la pensée algébrique primitive dans les documents mis à la disposition des enseignants du Québec pour guider leurs interventions en classe, notamment le programme d'études et les manuels scolaires.

Question: Chez nous, au Québec, comment la question de l'algèbre primitive est-elle considérée dans les programmes d'études et dans les manuels scolaires sur lesquels on se base principalement pour mettre en oeuvre ces programmes?

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Comme je n'ai pas trouvé de grille toute faite me permettant l'analyse spécifique qui m'intéresse (détecter le potentiel du contenu de certains manuels du primaire pour le développement de la pensée algébrique), j'ai pour ambition de créer un tel outil en me basant sur ce que les chercheurs disent de l'EA et comment ils ont tenté de la caractériser théoriquement et de l'actualiser pratiquement. Je présenterai ma méthodologie d'analyse dans le prochain chapitre. Mais pour être en mesure de reconnaitre la présence d'éléments caractéristiques de l'algèbre primitive, il faut d'abord établir ce qui la distingue de l'algèbre classique (calcul littéral et ses applications) et de l'arithmétique scolaire classique (calculs directs pour obtenir une réponse numérique). Il me faudra surtout être en mesure d'associer certains critères aux items des manuels scolaires pour les classer en fonction de caractéristiques particulières de la pensée algébrique en contexte d'un apprentissage en principe arithmétique (ces caractéristiques appartiennent à ce que je nomme « algèbre primitive »). Quand ce classement sera achevé, il s'agira de faire parler les résultats. Mais avant de pouvoir faire cela, nous devons d'abord construire une base d'information scientifique validée par la recherche, et produire l'outil d'analyse à partir de ces informations.

Dans ce qui suit, nous menons une réflexion sur les diverses appellations que nous avons trouvées dans la littérature et relatives à l'apprentissage initial de l'algèbre. Il sera également question d'une réflexion à propos de la présence des lettres en algèbre primitive (au primaire). Rappelant l'intention que nous poursuivons dans ce chapitre, nous présentons des conceptualisations proposées par différents chercheurs. Celles-ci permettent de cerner des indices susceptibles de contribuer à l'analyse de la potentialité des items issus des manuels scolaires du primaire, pour favoriser le développement de la pensée algébrique. Le même exercice, le repérage d'indices pour développer la pensée algébrique primitive, sera mené dans les programmes de formation qui ont été présentés dans la problématique. Finalement, nous ferons un tour d'horizon sur les propositions pour l'enseignement de l'algèbre primitive appuyées d'exemples qui vont circonscrire ce domaine d'enseignement. La synthèse de tous ces indices qui va clore ce chapitre sera à la base de l'élaboration de la grille qui sera présentée au chapitre III.

2.1 Diverses appellations relatives à l'apprentissage initial de l'algèbre

Prenons d'abord la peine de commenter différentes expressions issues du mouvement de reconceptualisation de l'algèbre scolaire ou qui peuvent y trouver un écho : Early Algebra, l'algèbre avant la lettre, l'algèbre pour tous, algèbre précoce et arithmétique généralisée.

L'appellation « Early Algebra » a été adoptée rapidement par les chercheurs après le rapport de Davis sur ICME-5 « Algebraic Thinking in the Early Grades » (Davis, 1985) et son sens traduit une préoccupation générale d'intervenir dès le primaire pour tenter de régler le problème de l'enseignement de l'algèbre, tel que souligné par Kaput (2008, p.6). On comprend aujourd'hui cette désignation comme un mouvement (et un domaine de recherche) visant par divers moyens à développer, dès le début de la scolarisation, les germes d'une pensée algébrique (une pensée algébrique primitive).

Dans le cadre de leur recherche dont il sera question plus loin, Blanton et ses collègues précisent : « By Early algebra we mean algebraic thinking in the elementary grades (i.e., Grades K–5) » (Blanton et coll., 2018, p.28, en note de bas de page). On nous invite donc formellement à donner à l'expression « Early Algebra » le sens de « pensée algébrique à l'école élémentaire », et à la dissocier des autres interprétations qui ont fleuri depuis que l'expression existe.

Personnellement, je propose alors l'expression « algèbre primitive »[31] comme traduction de Early Algebra au sens que Blanton lui donne, car on y a l'esprit (de l'algèbre), et pas nécessairement « la lettre »[32]! Bref, ce n'est pas une version « intégrale » de l'algèbre. L'expression en évoque certains traits seulement. J'appuierais aussi cette proposition par l'utilisation que

[31] Je vais tout de même continuer d'utiliser occasionnellement l'expression anglaise Early Algebra ou EA, qui est communément connue, en parlant des écrits qui se réclament de ce mouvement, et pour ne pas mettre dans la bouche des chercheurs des mots qu'ils n'ont pas utilisés.

[32] L'esprit, opposé à la lettre, au sens figuré, suppose d'en garder l'essence mais sans nécessairement conserver intégralement tous les attributs. Il n'y a pas nécessairement de lettres dans l'algèbre primitive, et l'idée d'algèbre flotte dans les pensées. (On ne prend pas l'dée d'algèbre « au pied de la lettre » - c'est une expression qui veut dire qu'on admet une flexibilité.). De même, le mot intégral veut dire complet mais s'associe au mot primitive si on pense à l'intégration (jeu de mots).

Charbonneau (1996, p.17) fait de « primitive trigonometry » en parlant d'Euclide et Ptolémée et de l'utilisation par Lee de « primitive algebraic object » en parlant des fonctions (1996, p.89). (Un autre avantage est de rappeler que le nom « algèbre » est féminin!)

Parmi les autres sens donnés à l'expression, il y a aussi la pré-algèbre (Linchevsky, 1995, p.115), où on procède à un enseignement à la suite de celui de l'arithmétique dans le but d'adapter la présentation des concepts et processus de l'arithmétique pour créer du sens avec ce qui sera enseigné par la suite en algèbre. Cette façon de faire relève clairement d'une approche transitionnelle pour le début du secondaire ayant pour but de faire passer de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Pendant un certain temps, ce type de transition a été considéré comme l'une des formes de l'EA, qui tentait de gérer certaines difficultés avant qu'elles ne se présentent à l'élève. Cependant la communauté de recherche vise maintenant en grande partie à concevoir une continuité longitudinale dans la formation aux idées algébriques, plutôt qu'une transition entre l'arithmétique et le début de l'algèbre. L'enseignement traditionnel traitait plus ou moins hermétiquement les deux sujets, ce qui amenait des ruptures (Kieran, 2018). Linchevski (1995, p.119) a quand même laissé entrevoir la possibilité d'introduire des activités et des idées de pré-algèbre dans la « Early Arithmetic ». Ce qui veut dire que certaines parties de cette approche pourraient revivre en algèbre primitive.

L'algèbre avant la lettre (Arcavi, Friedlander et Hershkowitz, 1990) ou la pensée algébrique avant la lettre (Bronner, 2015) vise à développer une pensée algébrique sans avoir recours à la notation littérale. Ceci est compatible avec l'une des visions de l'EA qui conçoit que des idées importantes de l'algèbre peuvent être abordées sans avoir recours à une symbolisation littérale formelle.

« Algèbre pour tous » est une expression créée aux États-Unis (à la fois un slogan et une politique) et reprise dans la thèse de Squalli (2000) qui décrit un mouvement visant à ce que tous les élèves aient une chance de progresser en algèbre tout au long de leur cheminement scolaire. Notons que l'expression « progresser en algèbre » ne précise pas les moyens à utiliser. Aux États-Unis, il était plutôt question de favoriser l'accès au cours Algebra One au High School pour les élèves qui étaient considérés trop faibles pour le suivre au Middle School.

L'expression « Algèbre précoce » est une traduction malencontreuse de l'expression Early Algebra. L'adjectif précoce, comme dans « intervention précoce » en psychologie, signifie une préoccupation de développement de la pensée algébrique plus tôt que d'habitude. Selon Squalli (2020, p.13), « une troisième signification [de Early Algebra], sous-représentée, est celle d'une algèbre précoce ; elle est basée sur les travaux de Davydov (1991) (voir, par exemple, Schmittau et Morris, 2004)[33]. Dans cette approche, l'algèbre est introduite sur la base de l'arithmétique quantitative. Les quantités sont représentées par des symboles et ensuite par des lettres avant l'introduction de l'arithmétique numérique. » Je reparle de Davydov dans la section sur l'utilisation de la lettre.

Dans le contexte qui nous intéresse, la tournure adoptée par Venant et Migneault (2017): « développement précoce de la pensée algébrique » convient mieux selon moi.

L'arithmétique généralisée consiste traditionnellement à remplacer les nombres par des lettres (Mason, 1996, p.66). Mais le sens de l'expression s'est élargi en contexte EA pour inclure les propriétés et les relations de l'arithmétique sans nécessairement faire intervenir la lettre. On considère maintenant qu'il s'agit d'étudier les structures arithmétiques en tant que modèles pour celles qui sont formées avec la syntaxe algébrique. Cette approche est compatible avec l'algèbre primitive.

> « [It] not only includes number/quantity, operations, properties, equality, and related representations and diagrams, but also can include variables, expressions, and equations-depending on whether or not alphanumeric symbols have been integrated into the learning environment. » (Cela inclut non seulement le nombre/la quantité, les opérations, les propriétés, l'égalité et les représentations et diagrammes associés, mais peut également inclure des variables, des expressions et des équations - selon que des symboles alphanumériques ont été intégrés ou non dans l'environnement d'apprentissage. [Notre traduction]) (Kieran, Pang, Schifter et Ng, 2016, p.12).[34]

Cette acception plus récente permet d'expliciter des lois de composition (et les priorités des opérations) qui, en arithmétique, étaient plus ou moins remplacées chez les élèves du primaire par un raisonnement en contexte. En effet, Booth (1984) a relevé ce fait dans ses travaux (voir section 1.2 du chapitre I). Les nombres présents dans les expressions sont susceptibles de jouer

[33] Cité par Squalli et coll. (2020): Schmittau, J. et Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(*1*), 60-87.

[34] Si on ajoute des idées liées au concept de fonction, ça commence à ressembler à l'algèbre primitive.

un rôle comparable à celui que l'on pourrait attribuer à un symbole algébrique, standard ou non - nombres généralisés ou quasi-variables (Fujii et Stephens, 2001).

Ex.: le nombre 2 dans « $1 + 2 - 2 = 1$ ».

Terminons avec une formulation intéressante sur l'arithmétique généralisée (qu'ils appellent « tâches de relations arithmétiquement situées ») : « (they) focus on the structure of arithmetic by attending to the behavior of arithmetic operations and properties as mathematical objects and why they work. » (elles se concentrent sur la structure de l'arithmétique en s'occupant du comportement des opérations et des propriétés arithmétiques en tant qu'objets mathématiques et de la raison pour laquelle elles fonctionnent. [Notre traduction]) (Demosthenous et Stylianides, 2018).

2.2 À propos de la présence de lettres en EA : lettres ou pas (de) lettres, telle est la question!

Dans les recherches sur l'EA, il arrive que (même si ce n'est que de manière implicite) l'on considère le symbolisme alphanumérique[35] comme la marque de la pensée algébrique. Une telle position théorique semble néanmoins fragile[36] du point de vue du développement culturel et historique (ou philogénétique) de l'activité algébrique. Selon Radford (2006, vol.1, p.3), l'utilisation de symboles alphanumériques n'est pas nécessaire; d'autres représentations sémiotiques peuvent également être utilisées. Radford soutient en outre que l'utilisation de lettres n'est pas équivalent à faire de l'algèbre:

> « Equating the use of alphanumeric symbolism with algebraic thinking would amount to maintaining that algebra did not exist before the Western early modern period. » (Assimiler l'utilisation du symbolisme alphanumérique à la pensée algébrique reviendrait à soutenir que l'algèbre n'existait pas avant le début de la période moderne occidentale. [Notre traduction]) (Radford, 2006, p.3)

et « You will see algebraic problem solving procedures expressed in words » (Vous verrez des procédures de résolution de problèmes algébriques exprimées en mots. [Notre traduction]) (Radford, 2006, p.5). Il parlera spécifiquement de l'émergence et de la sophistication graduelle de

[35] Ou symboles de remplacement comme « ? » ou « Δ ».

[36] Radford qualifie même cette position d'« intenable » , terme que reprend Squalli (2020).

la pensée algébrique symbolique jusqu'à atteindre une notation littérale formelle. De plus, les analyses détaillées de Radford (2006, vol. I, p.3) sur le développement de la pensée algébrique symbolique des élèves de deuxième année du primaire face à des régularités dans les suites de figures tiennent compte non seulement de leur utilisation du langage naturel, mais aussi de leurs descriptions et gestes spatiaux. Il insiste sur le fait que, fondamentalement, la pensée algébrique est une forme particulière de réflexion mathématique[37].

Le modèle de Kaput (2008, p.10-11) souligne aussi, à sa manière, ce cheminement évolutif vers une notation de plus en plus conventionnelle: « ... generalization and the expression of generalizations in increasingly systematic, conventional symbol systems. » (généralisation et expression de généralisations dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus systématiques. [Notre traduction]).

D'un autre côté, Linchevski (1995, p.114) pense qu'il est utile [donc sans être obligatoire] d'intégrer des lettres dans l'expérience arithmétique des enfants pour les familiariser avec leur signification et leur rôle futurs en algèbre plus formelle : « letters could be used within children's arithmetic experience in order to facilitate their understanding of the meaning and significance of letters in later, formal algebra » (les lettres pourraient être utilisées dans l'expérience arithmétique des enfants afin de faciliter leur compréhension du sens et de la signification des lettres en vue de l'algèbre formelle à venir. [Notre traduction]).

Mais parler d'une pensée algébrique symbolique laisse entrevoir qu'il y a une pensée algébrique non symbolique qui pourrait aussi permettre des généralisations. Admettons pour l'instant que l'idée de pensée algébrique a plusieurs facettes et qu'elle peut se manifester en algèbre primitive de différentes façons, avec des représentations personnelles, vernaculaires ou plus institutionnelles. Rappelons-nous avec Rojano (1996, p.58) et Radford (2006, vol 1, p.3) que Viète (1540-1603) et d'autres avant lui faisaient de l'algèbre en utilisant une notation qui semble peu finalisée comparée à celle d'aujourd'hui. Al-Khwārizmī (approx. 780-850) écrivait tout en texte régulier et nul ne conteste la nature algébrique de ses écrits. Diophante (entre les 1er et 4e siècles av. J.-C.) avait introduit des abréviations pour les inconnues et en ce sens, Viète a un peu

[37] Ici, on s'approche de la question du *raisonnement* algébrique qui présente des éléments observables d'une réflexion algébrique *dans le cadre* d'une pensée algébrique.

suivi ses traces. Radford rapporte que des scribes babyloniens utilisaient des figures géométriques pour faire de l'algèbre au 17e siècle av.-J.-C., comme Euclide et Viète l'ont aussi fait.

Donc, certaines des visions en EA remettent en question la nécessité du symbolisme formel dans la manifestation de la pensée algébrique. Il y a aussi différentes façons de voir parmi les approches qui préconisent un symbolisme algébrique au primaire. Par exemple, en Chine, on travaille simultanément l'arithmétique et l'algèbre en misant sur les idées communes aux deux champs.

Davydov (1991), Freudenthal (1974) et ensuite Dougherty (2008), utilisaient des symboles et des lettres de façon particulière pour la comparaison des quantités[38] (inconnues) discrètes ou continues avant l'introduction de l'arithmétique numérique (Squalli, 2020). En fait, ils mettaient les élèves face au besoin de parler de quantités sans nom, ce qui leur permettait de suggérer l'utilisation d'un symbole ou d'une lettre.

Je résumerais en disant que les chercheurs qui ne pensent pas que la lettre soit nécessaire au développement de la pensée algébrique au début du primaire, sont tout de même d'accord avec une démarche de symbolisation graduelle (enseignée ou construite par l'élève) aboutissant éventuellement à la notation standard. De plus, comme dirait Mason[39] :

> « In order to learn the language of algebra, it is necessary to have something you want to say. You must perceive some pattern or regularity, and then try to express it succinctly so that you can communicate your perception to someone else, and use it to answer specific questions. » (Pour apprendre le langage de l'algèbre, il est nécessaire d'avoir quelque chose à dire. Vous devez percevoir un modèle ou une régularité, puis essayer de l'exprimer succinctement afin de pouvoir communiquer votre perception à quelqu'un d'autre et l'utiliser pour répondre à des questions spécifiques. [Notre traduction]) (Radford, 2018, p.5).

J'ajouterais que, d'un point de vue cognitif, l'utilisation de lettres peut permettre une économie qui facilite le traitement. Par exemple, si je veux parler du nombre de modèles miniatures

[38] On parle ici de quantités mesurables mais non mesurées : aire, longueur, masse, volume. Il ne s'agit pas de nombres explicites.

[39] Cité par Radford (2018) : Mason, J. et coll. (1985). *Routes to/ roots of algebra (p.8)*. Milton Keynes. Open University Press.

d'automobiles dans la collection de Mathieu avant qu'il ne se soit procuré deux nouveaux modèles, on conviendra que m-2 évite de mémoriser et répéter la phrase complète dans le contexte d'un problème, procédé que Radford appelle « contraction sémiotique » (voir plus loin, dans les approches de généralisation pour construire des formules).

Selon Marchand et Bednarz (1999, p.2), le symbolisme apparait comme un moyen d'exprimer la généralité de situations numériques, et peut s'appliquer aussi à un contexte géométrique.

Tandis que Kaput reconnaît des points de vue divergents quant à la pertinence et la manière d' agir sur les symbolisations au niveau élémentaire, lui et d'autres (...) maintiennent que l'interaction avec tous ces systèmes de symboles plus tôt dans leur éducation permet d'approfondir la pensée algébrique des élèves (Blanton et coll., 2018, p.30).

2.3 Des précisions sur l'intention poursuivie dans ce chapitre

Carraher, Schliemann et Schwartz (dans Kaput et coll., 2008), dans leur chapitre « Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early » (La Early Algebra n'est pas la même chose que l'algèbre ordinaire enseignée plus tôt. [Notre traduction]), précisent qu'il ne s'agit pas de l'enseignement traditionnel de l'algèbre que l'on commencerait au primaire, mais d'une nouvelle approche ou plutôt d'une famille d'approches qui a pour objectif d'amener une réflexion plus générale sur des sujets déjà présents en mathématiques élémentaires. Le but est d'exprimer des généralisations et d'utiliser des représentations symboliques qui deviennent des objets d'analyse et d'inférences[40]. On vise à passer de la focalisation sur des cas particuliers à des ensembles de cas et à leurs relations. La notation formelle n'est introduite que graduellement et de façon à faire sens.

Ces chercheurs assurent que c'est possible pour des enfants de 8 et 9 ans de faire un traitement analytique avec des quantités inconnues:

> « Early algebra research (...) shows that children as young as 8 and 9 years of age can learn to use letters to represent unknown values, to operate on those representations, and to draw new inferences. They can do so without assigning specific values to variables. » (Les recherches en EA (...) montrent que des enfants aussi jeunes que 8 et

[40] Ceci nous ramène à la question de la nécessité de se créer des objets de réflexion (symboles) qui « contiennent » des concepts qui ont déjà fait l'objet de réflexion et de structuration. Voir NCTM, 2000, Principes et standards pour les mathématiques scolaires, p.37.

> 9 ans peuvent apprendre à utiliser des lettres pour représenter des valeurs inconnues, opérer sur ces représentations et tirer de nouvelles inférences. Ils peuvent le faire sans affecter de valeurs spécifiques aux variables [Notre traduction]) (Carraher et Schliemann, 2014, p.194).

Ainsi, on se souviendra que notre définition de l'algèbre primitive est cette version de l'EA : « By Early algebra we mean algebraic thinking in the elementary grades (i.e., Grades K–5) » (Par l'expression Early algebra, nous entendons la pensée algébrique dans les classes élémentaires (de maternelle à 5e année). [Notre traduction]) (Blanton et coll., 2018, p. 28). C'est la définition retenue par cette équipe pour leur série d'études. On doit aussi reconnaitre que le développement de la pensée algébrique est un processus qui prend du temps, comme l'apprentissage d'une langue. Ceci signifie qu'il y a nécessairement des états intermédiaires et que ce n'est pas du jour au lendemain qu'on passe d'une absence de pensée algébrique à une présence de pensée algébrique qui se manifesterait facilement dans tous les contextes où l'on s'y attend et de la façon dont on s'y attend. Comme pour une langue, on apprend graduellement quelques mots, quelques combinaisons de mots qui feront du sens dans la communication; des modalités mieux adaptées à certaines situations; on saisit quelques concepts, on fait des erreurs et on finit par se débrouiller et atteindre une certaine maturité (Kaput et coll., 2008, p.2). Hitt et Kieran (2009) ont également souligné cet aspect, particulièrement dans la genèse instrumentale en contexte technologique (activités de factorisation à la calculatrice et papier-crayon). Les techniques utilisées par les élèves ont un rôle épistémique.

Autrement dit, chaque petit pas compte et ce que nous voulons voir dans les items analysés, c'est cette capacité à solliciter ces petits pas chez des enfants. Il est certain qu'un item donné ne peut solliciter à lui seul tous les aspects de la pensée algébrique, et à un degré qui soit significatif en plus.

Nous sommes rendus au point où il est nécessaire de savoir sous quelles conditions une activité proposée dans le matériel scolaire est propice au développement de la pensée algébrique au primaire. Pour nous instrumenter à cette fin, nous aurons à mettre au point une certaine méthode (voir chapitre III) qui devra se baser sur l'information scientifique dont nous disposons (issue du présent chapitre, le cadre conceptuel). En lien avec la problématique, nous allons retenir et opérationnaliser des descripteurs constituant des indices de la présence d'un contenu ayant un certain potentiel pour favoriser le développement de la pensée algébrique.

Toutefois, vouloir parler du phénomène dans son ensemble amène à anticiper l'existence de divergences de vues entre chercheurs et une portée très contextuelle de certaines affirmations à propos de l'EA. Hitt, Saboya et Cortés Zavala (2016, p.776) rapportent d'ailleurs un tel cas. Sur la question des obstacles cognitifs : « As part of an ICME working group (2004), these researchers began to oppose other researchers...» (Dans le cadre d'un groupe de travail ICME en 2004, ces chercheurs ont commencé à s'opposer à d'autres chercheurs... [Notre traduction]). Dans cette même page, on signale que Radford exprime ceci: « …the idea of introducing algebra in the early years remains clouded by the lack of clear distinction between what is arithmetic and what is algebraic » (… l'idée d'introduire l'algèbre dans les premières années reste obscurcie par le manque de distinction claire entre ce qui est arithmétique et ce qui est algébrique [Notre traduction]). Et il écrivait (Radford, 2014, p.3) :

> « And if we still do not have a sharp and concise definition of algebraic thinking, it may very well be because of the broad scope of algebraic objects (e.g. equations, functions, patterns, ...) and processes (inverting, simplifying, ...) as well the various possible ways of conceiving thinking in general. » (Et si nous n'avons toujours pas une définition précise et concise de la pensée algébrique, c'est peut-être à cause de la large portée des objets algébriques (c.-à-d. équations, fonctions, motifs, ...) et des processus (inverser, simplifier, ...) ainsi que les différentes manières possibles de concevoir la pensée en général. [Notre traduction])

2.4 Des conceptualisations proposées par des chercheurs autour de l'EA

Au premier chapitre, nous avons cité les points de vue de quelques chercheurs en lien avec la pensée algébrique, mais ce travail n'est pas suffisant pour dresser un portrait complet de ce que j'ai nommé « algèbre primitive ».–Dans ce qui suit, nous proposons de nous pencher sur les travaux de Kieran, Radford, Kaput, l'équipe TERC (Blanton et Gardiner), Squalli, Kriegler ainsi que Malara et Navarra. Il faut évidemment se limiter! À chaque fois, nous relèverons dans un encadré ce que nous retenons de chacun de ces chercheurs comme indices pour repérer dans les items des manuels scolaires du primaire ce qui pourrait provoquer un possible travail de l'élève sur le développement de sa pensée algébrique.

2.4.1 Les études menées par Kieran

Vers la fin des années 1980, certains chercheurs comme Kaput et le Early Algebra Research Group ont fait une hypothèse. Ils croyaient que si nous repensions ce qui est au cœur de l'algèbre et que si nous introduisions certains éléments plus tôt dans le programme de mathématiques à l'école élémentaire, l'algèbre pourrait peut-être devenir accessible à une plus grande majorité des élèves[41].

En 1996, Kieran proposait son modèle GTG de l'activité algébrique qui allait servir de base, quelques années plus tard, à une définition de la pensée algébrique dans les niveaux scolaires élémentaires (algebraic thinking in the early grades; 6 à 12 ans - ce que j'ai nommé « algèbre primitive »).

Dans le modèle GTG, on parle d'actions pour générer des représentations algébriques (création et interprétation – Generational activities), d'actions de transformation des représentations algébriques (action sur une expression ou équation, mais qui peut aussi générer du sens nouveau – Transformational activities) et d'activité globale méta (un travail au niveau général comme en « résolution de problèmes » prise au sens large – Global/meta-level activities – et qui est souvent la motivation des deux autres types d'actions). Comme exemples, Kieran propose : Former les expressions et les équations qui sont les objets de l'algèbre comme une équation à une inconnue qui représente la situation dans un problème, exprimer la généralité qui émerge de suites de nombres ou de motifs géométriques (**G**TG); transformer les représentations algébriques (par distributivité, factorisation, simplification, substitution d'expressions ou de nombres, calcul littéral, résoudre, voir les structures équivalentes, etc.) (G**T**G); et toute la gamme des situations propices[42] à l'utilisation de l'algèbre pour l'activité générale méta (GT**G**).

[41] Davis était un précurseur dans ce domaine, dans les années '60. Blanford, en **1906,** avait déjà exprimé l'essence du problème de l'enseignement de l'algèbre selon lui : « the radical mistake of algebraical teaching **for many generations** was in passing by a jump from Particular Arithmetic to purely Symbolic Algebra, and thereby omitting a sufficient training in Generalized Arithmetic ... the simplest type of significant symbolic algebra » (l'erreur radicale de l'enseignement de l'algèbre pendant de nombreuses générations a été de passer par un saut de l'arithmétique particulière à l'algèbre purement symbolique, et d'omettre ainsi une formation suffisante en arithmétique généralisée ... le type le plus simple d'algèbre symbolique significative. [Notre traduction].

[42] « Propices », mais qui pourraient aussi bien être traitées sans faire appel à l'algèbre.

Dans sa définition de la pensée algébrique dans les niveaux scolaires élémentaires, elle synthétise les avancées théoriques de la fin du 20e siècle comme suit :

> « Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which the letter-symbolic could be used as a tool, or alternatively within activities that could be engaged in without using the letter-symbolic at all, for example, analyzing relationships among quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. » (La pensée algébrique dans les premières années [de scolarisation] implique le développement de modes de pensée dans des activités pour lesquelles la lettre-symbole pourrait être utilisée comme outil, ou encore dans des activités dans lesquelles on pourrait s'engager sans utiliser la lettre-symbole du tout, par exemple en analysant les relations entre les quantités, en notant la structure, en étudiant le changement, en généralisant, en résolvant les problèmes, en modélisant, en justifiant, en prouvant et en prédisant. (Kieran, 2004, p.149) [Notre traduction].

(Kieran et coll., 2016).

Les champs de contenu de l'EA, selon Kieran, sont essentiellement l'arithmétique généralisée et les fonctions.

À propos des patterns et de l'aspect structurel en général (nombres, expressions, opérations, etc.), Kieran parle d'un projet où de jeunes mexicains recherchent la structure dans une activité traitant de facteurs, multiples et diviseurs (Voir section 2.7.2 pour la description de l'activité Five Steps to Zero). Elle explique pourquoi la recherche, l'usage et l'expression de la structure dans les nombres et les opérations numériques constituent une piste fondamentale pour développer la pensée algébrique primitive.

Les propos de cette chercheuse nous donnent plusieurs indices pour reconnaitre l'algèbre primitive que nous pouvons retenir sous forme de formulations simplifiées ou de mots-clés :

Dans le modèle GTG, on parle d'action générative (création), action transformative (action sur) et d'activité générale méta (un travail métacognitif au niveau géneral comme dans la résolution de problèmes).

Générer des représentations par des expressions ou équations (**G**TG);

transformer les représentations (G**T**G);

(Réaliser des) activités où la lettre pourrait être utile ou des activités où la lettre n'est pas nécessaire (GT**G**)

-en analysant les relations entre les quantités;

-en notant la structure;

-en étudiant le changement;

-en généralisant;

-en résolvant les problèmes;

-en modélisant;

-en justifiant;

-en prouvant et

-en prédisant.

concepts-clés: arithmétique généralisée, fonctions,

voir le général dans le particulier (et l'inverse).

relations mathématiques, les patterns et les structures arithmétiques, ainsi que sur les processus de raisonnement des élèves pour les aborder (remarquer, conjecturer, généraliser, représenter, justifier). Ces éléments sont en rapport avec les deux principaux champs de contenu mathématique, soit l'arithmétique généralisée (au sens de nombre et quantité, opérations, propriétés) et les fonctions.

À propos de ce dernier point, Kieran et Filloy (1988, p.16) et Kieran (1989, p.165 repaginé 171) rapportent que, s'intéressant également à la pensée algébrique, Love (1987, p.49) a proposé la caractérisation suivante de la pensée algébrique:

> « Algebra is now not merely "giving meaning to the symbols," but another level beyond that; concerning itself with those modes of thought that are essentialy algebraic-for example, handling the as yet unknown, inverting and reversing operations, seing the general in the particular. Becoming aware of these processes, and in control of them, is what it means to think algebraicaly. » (L'algèbre n'est plus simplement « donner un sens aux symboles », mais un autre niveau au-delà de cela ; s'occuper de ces modes de pensée qui sont essentiellement algébriques - par exemple, manier l'inconnue, inverser et renverser les opérations, voir le général dans le particulier. Prendre conscience de ces processus, et les contrôler, c'est ce que signifie penser algébriquement. [Notre traduction])

Kieran (PME-NA, 1989, p.165 repaginé 171, A perspective on algebraic thinking) [43] ajoute que pour caractériser la pensée algébrique de façon significative, il ne suffit pas de voir le général dans le particulier, mais aussi être capable de l'exprimer algébriquement. Cependant, quand elle a énoncé ces propos, le contexte n'incluait pas encore l'enseignement au primaire conscient d'un

[43] Kieran cite dans la cette version: Love, E. (**1986**). What is algebra? *Mathematics Teaching*, *117*, 48-50.

développement de la pensée algébrique. On reconnait aujourd'hui que des représentations quasi-algébriques peuvent aussi témoigner d'une pensée algébrique au primaire (Kaput, 2008, p.50).

2.4.2 Les études menées par Radford

Radford (2014) a développé un cadre pour caractériser la pensée algébrique qui comporte les trois notions-clés suivantes:

- l'indétermination: des nombres indéterminés sont évoqués;
- la dénotation[44]: les nombres indéterminés sont nommés ou symbolisés de diverses manières, par exemple par des gestes, des mots, des signes alphanumériques ou une combinaison de ceux-ci; et
- l'analyticité: les quantités indéterminées sont traitées comme si elles étaient connues.

Il précise que pour parler de pensée algébrique, ces trois aspects doivent être présents. Nous pouvons retenir un autre indice de la pensée algébrique :

Indices: Représenter de différentes façons des nombres ou des quantités qui ne sont pas tous connus, et agir sur eux sans distinction d'avec les nombres ou quantités connus. Mots-clés : indétermination. dénotation, analyticité, nombres, quantités.

Bednarz, Kieran et Lee (1996, p.6) parlent de l'approche analytique comme l'une des caractéristiques essentielles de l'évolution de la pensée algébrique. Descartes nous rappelle la démarche analytique (dans un contexte géométrique, en considérant des mesures de segments):

> « If, then, we wish to solve any problem, we first suppose the solution already effected, and give names to all the lines that seem needful for its construction--to those that are unknown as well as to those that are known. Then, making no distinction between known and unknown lines, we must unravel the difficulty in any way that shows most naturally the relations between these lines, until we find it possible to express a single quantity in two ways. This will constitute an equation, since the terms of one of these two expressions are together equal to the terms of the other. (Si donc nous voulons résoudre

[44] On parle ici de l'action de dénoter; habituellement le mot dénotation indique ce qui est dénoté et non le fait de générer une dénotation. Suggestion : faire une analogie dénotant-dénoté avec signifiant-signifié. On trouve à la page 579 du volume 2 du 28e PME-NA en 2006 «The denotation of an expression is the object to which the expression refers. » (La dénotation d'une expression est l'objet auquel l'expression se réfère. [Notre traduction] (Bazzini, Morselli). Or, on voit dans Radford, 2006, vol.1 p.3) des mêmes actes que Radford établit ses deux premiers critères (indétermination et analyticité) mais ne parle pas de cette façon du 3e critère « Third, that which makes thinking algebraic is also the peculiar symbolic mode that it has to *designate* its objects » (Troisièmement, ce qui rend la pensée algébrique, c'est aussi le mode symbolique particulier dont elle dispose pour désigner ses objets. [Notre traduction]

> un problème, nous supposons d'abord la solution déjà effectuée, et nous donnons des noms à toutes les lignes[45] qui semblent nécessaires à sa construction, à celles qui sont inconnues comme à celles qui sont connues. Puis, ne faisant aucune distinction entre les lignes connues et inconnues, il faut démêler la difficulté de la manière qui montre le plus naturellement les relations entre ces lignes, jusqu'à ce qu'on trouve possible d'exprimer une seule quantité de deux manières. Ceci constituera une équation, puisque les termes de l'une de ces deux expressions sont ensemble égaux aux termes de l'autre. [Notre traduction]) (Descartes, 1954)

Indices : Passage de l'inconnu vers le connu. Contexte géométrique de Descartes. Le plan cartésien.

2.4.3 Les études menées par Kaput et l'équipe TERC

Nous présentons le modèle de Kaput en même temps que son interprétation établie par Blanton et Gardiner (dans le Project LEAP, financé par TERC[46]) qui avaient comme objectif de mettre au point un cadre conceptuel et une approche curriculaire pour l'enseignement au primaire (nous reviendrons sur cet aspect dans le dernier chapitre). L'analyse conceptuelle de l'algèbre proposée par Kaput établit deux aspects fondamentaux de la pensée algébrique visant la généralisation (qu'il nomme Core aspects of algebraic reasoning[47]), présents dans trois champs de contenu (Kaput, 2008, p.11).[48]

Ces deux aspects fondamentaux de la pensée algébrique s'énoncent comme suit[49] :

> (a) Algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints (L'algèbre en tant que symbolisation systématique des généralisations de régularités et de contraintes. [Notre traduction]) (p.11)

Kaput (p.10) fait référence dans ce premier aspect à: formuler et exprimer des généralisations dans des systèmes de symboles de plus en plus formels et conventionnels en utilisant des

[45] On dirait aujourd'hui de nommer les segments et de se servir de ces noms pour parler de leurs mesures connues ou inconnues et de les manipuler sur un pied d'égalité.

[46] https://www.terc.edu/projects/project-leap/

[47] Les auteurs ne font pas en général de distinction entre pensée et raisonnement algébrique dans la version anglaise des textes.

[48] Nous avons remarqué quelques différences de formulation avec sa version de 1998, mais ce n'est pas majeur.

nombres et des quantités (raisonnement arithmétique généralisé et raisonnement quantitatif généralisé);

L'interprétation de cet aspect (a) par l'équipe de chercheurs du projet TERC avec Blanton et ses collaborateurs est la suivante :

> Notre traduction : Nous considérons l'arithmétique généralisée comme impliquant la généralisation, la représentation, la justification et le raisonnement avec des relations arithmétiques, y compris les propriétés fondamentales des opérations (commutativité, relations, opérations, pairs et impairs). Nous associons aussi à cet aspect les équivalences, expressions, équations et inégalités [sens relationnel du symbole d'égalité; les actions de généraliser, représenter, raisonner avec les expressions, équations et inégalités, incluant les formes symboliques] (cité par Kieran, 2018, p.30)
>
> (b) Algebra as syntactically guided reasoning and actions on generalisations expressed in conventional symbol systems (Notre traduction : l'algèbre en tant que raisonnement et actions sur les généralisations guidées syntaxiquement et exprimées dans les systèmes de symboles conventionnels). (p.11)

Kaput en donne l'interprétation suivante : agir sur des symboles (manipulation de formalismes) dans un système symbolique organisé à travers une syntaxe établie, où les systèmes de symboles conventionnels disponibles pour les niveaux scolaires élémentaires sont interprétés largement pour inclure la notation [variable], les graphiques et les droites numériques, les tableaux et les formes de langue naturelle (p. 30).

Les chercheurs de TERC considèrent les généralisations justificatives et le raisonnement avec des généralisations établies, dans des situations nouvelles, comme deux manières principales d'agir sur les systèmes de symboles conventionnels, interprétés au sens large.

Ces deux aspects fondamentaux de l'algèbre sont présents dans trois champs de contenu mathématique qui les actualisent.

Champ de contenu 1

> Algebra as the study of structures and systems abstracted from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and in quantitative reasoning. (Étude des structures et des systèmes, abstraits de calculs et de relations, y compris ceux qui surviennent dans l'arithmétique - l'algèbre en tant qu'arithmétique généralisée - et le raisonnement quantitatif. [Notre traduction])

Champ de contenu 2

> Algebra as the study of functions, relations, and joint variation. (Étude des fonctions, relations et covariations).

Champ de contenu 3.

> Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics (p. 11). (Application d'un ensemble de langages de modélisation[50], à l'intérieur et à l'extérieur des mathématiques [Notre traduction]).

Kaput ajoute que deux visions sont nécessaires, soit de voir l'héritage d'artefacts culturels (la matière institutionnelle) et une socioconstruction (par interaction d'une communauté d'apprenants).

Ce portrait a servi de référence à beaucoup de chercheurs et on continue de s'y référer. Il permet entre autres de situer ou d'interpréter les autres affirmations de chercheurs à propos de la pensée algébrique (primitive ou non). Il est compatible (Kaput, 2008, p.15) avec le NCTM AWG (Algebra Working Group), avec le NCTM 2000 (Principes et standards pour les mathématiques scolaires) et aussi avec Kieran en 1996 à ICME 8 en Espagne (Kieran, 1998).

Voici les indices que nous retenons de ce modèle et des interprétations qui s'y rattachent :

formuler des généralisations (de régularités et de contraintes);
les exprimer (les symboliser de façon systématique, les représenter) dans des systèmes de symboles de plus en plus formels et conventionnels en utilisant des nombres et des quantités (physiques);
(raisonnement arithmétique generalisé; arithmétique generalisée; raisonnement quantitatif généralisé);
(généralisation, représentation, justification, raisonnement avec des relations arithmétiques, incluant (commutativité, relations, opérations, pairs et impairs), équivalences, expressions, équations, inégalités;
sens relationnel du symbole d'égalité;
les actions de généraliser, représenter, raisonner avec les expressions, équations et inégalités, incluant les formes symboliques;
raisonnement et actions sur les généralisations;
actions (manipulations) sur les généralisations (sur des symboles, des formalismes)

[50] Dans les cas qui nous intéressent, c'est essentiellement l'algèbre scolaire ordinaire. De plus, la modélisation se retrouve souvent en relation étroite avec le volet sur les fonctions.

exprimées dans les systèmes de symboles conventionnels organisés par une syntaxe établie qui guide les actions possibles

où les systèmes de symboles conventionnels disponibles pour les niveaux scolaires élémentaires sont interprétés largement pour inclure

- -la notation [variable],
- -les graphiques
- -les droites numériques
- -les tableaux
- -les formes de langue naturelle

les généralisations justificatives et le raisonnement avec des généralisations établies, dans des situations nouvelles, sont deux manières principales d'agir sur les systèmes de symboles conventionnels, interprétés au sens large.

Étude des structures et des systèmes, abstraits de calculs et de relations, y compris ceux qui surviennent dans l'arithmétique - l'algèbre en tant qu'arithmétique généralisée - et le raisonnement quantitatif.

Étude des fonctions, relations et covariations

Application d'un ensemble de langages de modélisation intra-mathématique et extra-mathématique; matière institutionnelle; communauté d'apprenants.

Malgré tous ces détails, la formulation du modèle conceptuel de Kaput est assez opaque car il entend couvrir beaucoup plus que l'algèbre primitive, et même plus que l'algèbre scolaire. Pour mieux comprendre, nous avons cherché des extraits d'articles ou de chapitres de livres (principalement dans Kaput, 2008) où les chercheurs vont, « à leur insu », situer certains concepts et processus dans les « cases du tableau 2.1 qui suit ». Plus précisément, nous reprenons les deux aspects fondamentaux et les champs de contenus du modèle de Kaput et nous enrichissons le tout avec les écrits d'autres chercheurs (dont Kaput lui-même) qui précisent ces aspects fondamentaux des trois champs de contenus, selon le contexte où ils les travaillent.

Tableau 2.1 Adapté du modèle de Kaput (sur deux pages)

	Champ de contenu 1: arithmétique généralisée (étude des structures et relations qui émergent de l'arithmétique et raisonnement quantitatif (quantités physiques).	Champ de contenu 2: étude des fonctions et variations;	Champ de contenu 3; groupe de langages de modélisation intra et extra-math;
Premier aspect fondamental **Généraliser et Symboliser des généralisations** **(structures, relations fonctionnelles, modèles)** **Smith (Kaput, 2008, p.133) nomme cet aspect « representational thinking ». -La construction sociale de la certitude mathématique (justification, preuve, construite par consensus plutôt quel la vérité du prof.) (p.138) est un incitatif important pour cet aspect fondamental.**	**relation d'équivalence (=); exprimer les généralités;** **Davydov, 1975; Dougherty p.389, phase pré-numérique : tous les autres registres de représentation en même temps (pas de nombres, mais des lettres, des tableaux, des grahiques et la langue naturelle)[18] (p.391);** **généraliser les nombres et les opérations et leurs propriétés;** **propriétés de relations;** **construire la syntaxe de l'algèbre -structure- sur celle de l'arithmétique;** ***vers arithmétique modulaire (clock arithmetic) (Kaput, p.14-15) et algèbre abstraite, séquences de lettres***	**généralisation vers l'idée de fonction, description de variations systématiques d'instances sur un domaine;** **étude d'une covariation, situation fonctionnelle (Smith, p.145);** **patterns (non numérotés) nombres figurés ou polygonaux; linéarité, taux (Kaput, 2008, p.14); représentations variées: tableaux, graphiques, machines à fonction;** ***vers analyse, calcul différentiel et intégral***	**inconnue dans une équation à résoudre (sans généralisation, issue d'une contrainte);** **problème arithmétique mais avec syntaxe de l'algèbre;** **IMPLIQUE SOUVENT le champ de contenu 2 (fonctions) et ces 2 champs utilisent diverses représentations;** **Le rôle de la lettre selon les aspects fondamentaux.**

Comme dans plusieurs autres curriculums, on précise l'importance de faire appel à plus d'un registre sémiotique de représentation en coordination. C'est aussi le cas dans le PFEQ. Duval (1995) a expliqué cette importance.

Deuxième aspect fondamental Actions et raisonnements sur des généralisations en suivant les règles algébriques (propriétés des nombres, des opérations et des relations, modèles mathématiques) symbolic thinking - (Smith, p.133)	sommes (nombres impairs, consécutifs, trouver et exprimer des régularités dans les tables – 0 à 100, +, x, ajouter zéros avec multiplication de naturels par 10, 100,...) stratégies de calcul mental (distributivité, écart constant 35-18=(35+2)-(18+2) =37-20 aspect général cité (action sur la structure); calcul, transfos Kieran littéral, preuves ,calcul réfléchi qui utilse des faits numériques comme 23+17=20+10+10 Carpenter conjecture et justification	Suites : généralisation algébrique factuelle contextuelle et symbolique (Radford, 2018, p.3); construire des équations respectant des contraintes (et les résoudre.) Fonctions, tranformations; d'expressions qui expriment des régularités et voir si elles sont équivalentes; trouver les zéros; résoudre des équations; égalité de 2 fonctions (variables) comparée à l'équation à résoudre (inconnue)	exprimer patterns et régularités (situation ou phénomène); le domaine de modélisation est la situation elle-même, souvent avec une ou 2 variables dans une fonction; modèles de fonctions, paramètres; généralisation de solutions du premier type ou purement arithmétique; paramètres comparer avec autres modèles (ex.: piscine qui se remplit à débit constant vs piscine qui se vide - il faut tenir compte de la gravité, le débit n'est pas constant.) chien cylindrique de (Chevallard, 1992, p.79) (exemple élémentaire de modélisation en choisissant peu de caractéristiques)

Certains chercheurs considèrent que l'on peut couvrir tout ce qui concerne l'algèbre via l'approche fonctionnelle, soit le 2e champ de contenu (voir par ex.: Schwartz, 90; Blanton et Kaput, 2011; Warren et Cooper, 2011).

2.4.4 Le modèle M.I.A.P.A. de Squalli (2000)

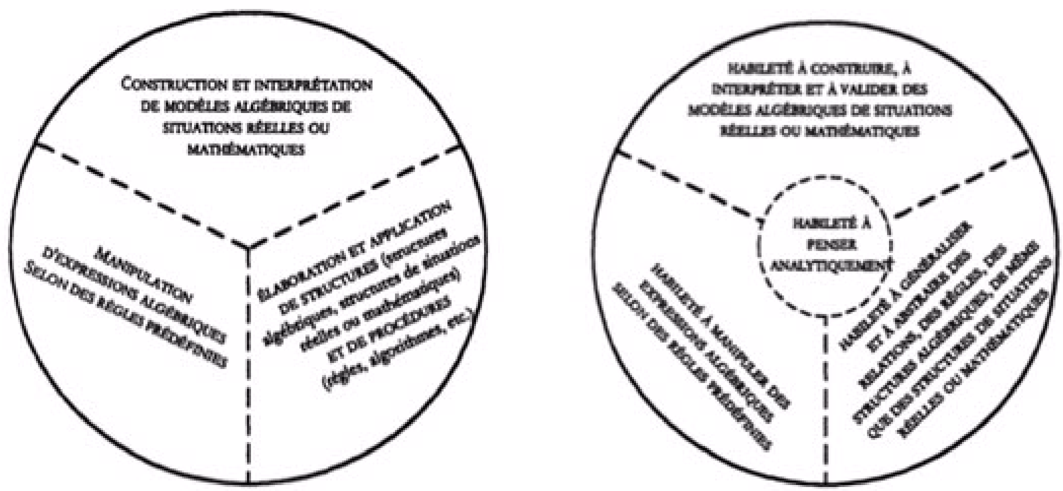
Squalli a, pour sa part, construit un modèle mettant en relation l'algèbre et la pensée algébrique, tout en les distinguant. Ce modèle peut rendre compte de la plupart des idées importantes, comme celles de Kaput. Il a délimité l'algèbre et l'analyse et énoncé certaines caractéristiques essentielles de l'algèbre, comme la présence obligatoire d'opérations, le raisonnement analytique et l'absence de processus infinis et il a identifié les fonctions qui ne sont pas algébriques (comme les fonctions trigonométriques). De plus, son modèle vise l'éducation de base; il est donc compatible avec l'algèbre primitive.

Squalli confirme la pertinence des approches «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» dans l'enseignement de l'algèbre à l'école de base et, d'autre part, il affirme qu'il n'est proposé aucun autre aspect essentiel de l'algèbre dont il n'a pas tenu compte.

Dans son modèle intégrateur de l'algèbre et de la pensée algébrique (M.I.A.P.A. figure 2.1), l'algèbre apparaît comme un type d'activités mathématiques et la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles nécessaires dans ces activités.

Figure 2.1 Modèle M.I.A.P.A. de Squalli

(Par souci de clarté, le texte contenu dans les disques des figures du modèle est retranscrit en dessous des figures)



Face algèbre	Face pensée algébrique
Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques.	Habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques.
Manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies.	Habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies.
Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, etc.).	Habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques.

Voici les indices que nous retenons du modèle de Squalli :

L'algèbre (sur les réels) se distingue de l'analyse par ses processus finis. Une expression (ou une fonction) est algébrique si elle comporte un nombre d'opérations fini avec les 4 opérations et des exposants rationnels). À un niveau plus avancé, les fonctions elles-mêmes peuvent être les « nombres » d'un système algébrique avec des operations définies sur les fonctions en tant qu'objets. Ou encore, une fonction peut definir une operation sur un ensemble. Ces fonctions sont aussi des objets algébriques. L'idée d'opération est centrale à l'algèbre (p.87); obligatoire dans son modèle Une approche mixte est recommandée dans l'enseignement de base (pas une approche qui privilégie seulement les fonctions ou seulement les structures par exemple). Autres points que l'on retient : -le raisonnement analytique (habileté à penser analytiquement); - le fait de generaliser et abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, et des structures de situations réelles ou mathématiques; -le fait d'élaborer et d'appliquer des structures algébriques ou de situation intra et extra-mathématiques; -le fait d'élaborer et d'appliquer des procedures (règles et algorithmes); -certaines fonctions ne sont pas algébriques (comme les fonctions trigonométriques); -les approches (options curriculaires) «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» sont pertinentes; -dans un système algébrique, on peut aussi considerer autre chose que des expressions ou des equations, comme les inéquations et la divisibilité. Ex.: $x < 3$ ou encore $2 \mid 2x+4$ (2 divise $2x+4$).

2.4.5 L'étude de Kriegler

Selon Kriegler[51], les idées algébriques sont présentées sous trois aspects différents:

- l'algèbre, en tant que l'abstraction de l'arithmétique;
- l'algèbre en tant que langage; et
- l'algèbre en tant qu'outil permettant d'analyser des fonctions et des modèles mathématiques.

Évidemment, cela ressemble forcément à ce qu'on a vu précédemment, mais chacun donne sa réflexion de façon personnalisée. Dans son projet pour former les enseignants, elle donne les bases d'un cadre conceptuel qui se présente ainsi :

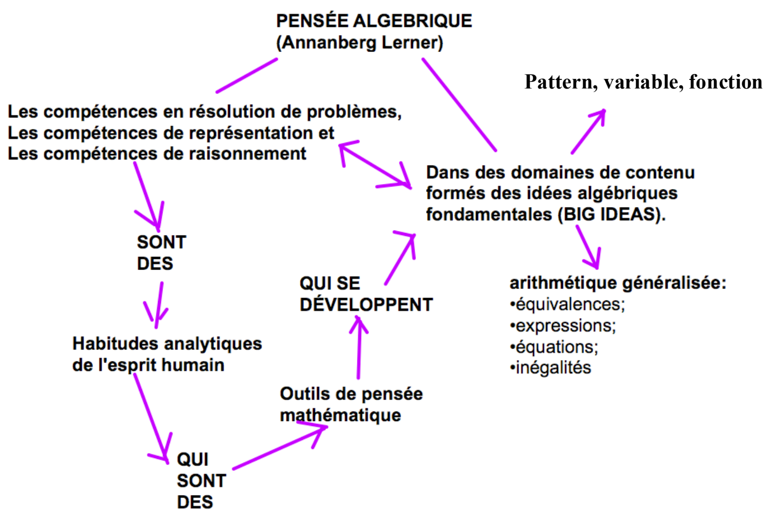
[51] Du projet « Mathematics Content Programs for Teachers » de Shelley Kriegler, UCLA Department of Mathematics, Janvier 2000. https://www.learner.org/series/learning-math-patterns-functions-and-algebra/algebraic-thinking/part-a/

What does algebraic thinking really mean? Two components of algebraic thinking, the development of mathematical thinking tools and the study of fundamental algebraic ideas, have been discussed by mathematics educators and within policy documents (e.g., NCTM, 1989, 1993, 2000; Driscoll, 1999). Mathematical thinking tools are analytical habits of mind. They include problem solving skills, representation skills, and reasoning skills. Fundamental algebraic ideas represent the content domain in which mathematical thinking tools develop (Kriegler, 2000, n.p., voir note 51).

La pensée algébrique est appréhendée comme suit (figure 2.2).

Au lieu de traduire, je présente un schéma.

Figure 2.2 Schéma de l'étude de Kriegler



Remarquons que les 3 compétences indiquées ressemblent à celles du PFEQ (C1 : Résoudre une situation problème; C3 : Communiquer avec le langage mathématique; C2 : Déployer un raisonnement mathématique). Ça augmente l'espoir de trouver des invitations à la pensée algébrique dans notre programme. Dans les deux cas, les compétences se développent autour des savoirs essentiels et d'une progression des apprentissages. Dans Kriegler, les idées algebriques incluent les patterns, les variables, et les fonctions.

Compétences en développement dans les domaines de contenu que sont (1) les patterns, les variables, les fonctions et (2) l'arithmétique généralisée (equivalences, expressions, équations, inégalités)

2.4.6 L'étude ArAl de Malara et Navarra

Malara et Navarra du programme de recherche ArAl de développement des enseignants et d'implantation d'une approche EA en Italie, visent à montrer que le développement du langage algébrique découle naturellement de la pensée algébrique primitive dans le cadre d'une approche socioconstructiviste et métacognitive. En instaurant un langage mathématique précis pour les discussions en classe, le savoir du groupe évolue plus rapidement.

> We focus on some theoretical key points (KP) and on the main language constructs (LC). Through excerpts of class-discussions, we show the incidence of KP and LC on the progressive construction and refinement of pupils' early algebraic thinking. (Nous nous concentrons sur quelques points-clés théoriques (KP) et sur les principales expressions linguistiques (LC). À travers des extraits de discussions en classe, nous montrons l'incidence de KP et LC sur la construction progressive et le raffinement de la pensée algébrique primitive des élèves. [Notre traduction]) (Malara et Navarra, 2018, p.51).

Certains aspects peuvent être intéressants dans le contexte de l'étude de manuels scolaires mais d'autres un peu moins car ils concernent principalement ce qui se passe en classe (la construction sociale des savoirs à laquelle nous n'avons pas accès). Comme exemples de KP (key points - concepts-clés), on relève les aspects de la généralisation et de l'interaction entre l'arithmétique et l'algèbre, des aspects métacognitifs comme voir différents sens, les interprétations et représentations d'objets mathématiques et la recherche de similarités dans les structures et dans les suites. Il est aussi question de comparer des masses sur des balances à fléaux symétriques pour résoudre des problèmes écrits et construire le sens des actions sur les équations à l'aide de celles sur les masses. Parmi les formulations langagières (LC - language constructs) identifiées dans le texte, on note la distinction entre ces dualités : représenter/résoudre, processus/produit, transparent/opaque (on laisse ou non des traces et le résultat sous une forme qui permet de voir les étapes). On développe aussi le sens relationnel de l'égalité en utilisant différentes représentations d'un même nombre naturel. La question de la dénotation est abordée sous le nom de forme canonique d'un nombre (sa forme la plus simple qui représente directement sa valeur - la forme canonique de (3×4) - 5 est 7).

Langage mathématique, algébrique précis;
généralisation et l'interaction entre l'arithmétique et l'algèbre;
avoir différents sens, interprétations et représentations d'objets mathématiques;
rechercher les similarités dans les structures et dans les suites;
comparer des masses sur des balances à fléaux symétriques pour résoudre des problèmes écrits et construire le sens des actions sur les équations à l'aide de celles sur les masses;

dualités : représenter/résoudre, processus/produit, transparent/opaque (on laisse ou non des traces et le résultat sous une forme qui permet de voir les étapes); sens relationnel de l'égalité en utilisant différentes représentations d'un même nombre naturel; la forme canonique de (3 x 4) - 5 est 7).

2.5 Des indices dans les programmes d'études pour générer un travail qui développe la pensée algébrique au primaire (et pour alimenter la grille d'analyse)

Au Québec, dans le programme du primaire, on voit une cohérence avec ce qui est considéré dans les recherches. Voici ce qui ressort et que nous avons retenu :

Rappelons qu'au primaire, dans le PFEQ, les élèves ont travaillé sur la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles; l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes.

Dans le programme états-unien, on retrouve d'autres indices ainsi que plusieurs de ceux qui ont déjà été relevés: raisonner de façon abstraite et quantitative, modéliser avec les mathématiques, rechercher et utiliser la structure, rechercher et exprimer la régularité dans un raisonnement répété (suites), comprendre les propriétés de la multiplication et la relation entre la multiplication et la division, travailler avec des égalités, identifier et expliquer les patterns en arithmétique, générer et analyser des patterns et des relations, appliquer et étendre les acquis de l'arithmétique aux expressions algébriques, utilisez les propriétés des opérations pour générer des expressions équivalentes, résoudre des problèmes mathématiques et réels en utilisant des expressions et des équations numériques et algébriques, représenter et analyser des relations quantitatives entre les variables dépendantes et indépendantes.

En Ontario, en 2005 et 2020[52]: on y retrouve les relations en situation avec diverses représentations : suites numériques, non numériques et régularités (dès la maternelle), les tables de valeurs, les équations et la généralisation d'une règle en mots. On doit aussi représenter, ordonner, comparer, générer, décomposer et recomposer des nombres, comprendre les propriétés des opérations, effectuer mentalement des calculs, effectuer des calculs de manière efficiente (...)

52 https://www.dcp.edu.gov.on.ca/fr/curriculum/elementaire-mathematiques

en démontrant une bonne compréhension (...) des propriétés des opérations et de leur application à la résolution de problèmes. On mentionne différents types de suites et régularités : croissantes, décroissantes et à motifs répétés. Il est question d'utiliser des variables, de résoudre des inégalités, de créer des programmes informatiques (l'algorithmique est un proche parent des mathématiques entre autres dans le cas de la modélisation)

2.6 Propositions pour l'enseignement

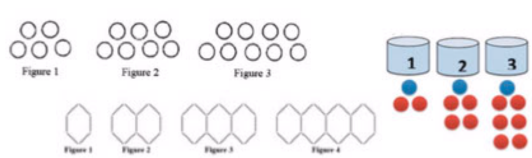
Les indices pour un travail possible sur le développement de la pensée algébrique rapportés dans les deux sections précédentes (2.4 et 2.5) peuvent s'insérer dans quatre approches de l'algèbre : la généralisation pour construire des formules, la généralisation pour prouver, l'étude sur la covariation et la fonction et la résolution de problèmes, les intentions poursuivies dans ces approches étant différentes.

2.6.1 La généralisation pour construire des formules

Dans cette section, j'ai trouvé important de suivre Radford (choix personnel) dans son analyse des démarches effectives de généralisation algébrique, car son analyse explique pourquoi les exercices sur les suites n'amènent pas nécessairement le développement attendu de la pensée algébrique. Denis (1997), cité dans Marchand et Bednarz (1999) met en garde face un certain glissement didactique, dans l'interprétation de l'orientation du programme dans les manuels, qui s'est opéré de l'idée d'exploitation de situations, qui se voulaient prétextes à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques.

Dans ce type de tâches, il s'agit principalement d'étudier des suites de figures géométriques ou de nombres et d'y dégager des éléments invariants et d'autres qui varient d'une manière qu'il est possible d'anticiper et d'exprimer. Voici quelques exemples tirés de Radford (2018). (voir figure 2.3)

Figure 2.3 Suites de figures utilisées par Radford



Évidemment, si on devine le lien entre le numéro séquentiel des figures et leur cardinalité d'objets, par essais et erreurs, on peut être content mais on n'a rien généralisé, on a commis une hypothèse, et un type d'induction naïve (Radford, 2006, p.4). Et on passe à l'exercice suivant!

Radford (2006) considère qu'il y a plusieurs couches de généralisation avant d'en arriver à une généralisation algébrique symbolique (voir figure 2.4), et que l'accès à l'une de ces couches est tributaire de la façon, des moyens sémiotiques utilisés pour percevoir que les figures présentent une caractéristique commune (processus qu'il nomme objectification)[53]. Il rappelle que Kieran (1989) considère qu'il ne suffit pas de reconnaitre cette généralité dans le particulier, mais qu'il faut aussi pouvoir l'exprimer algébriquement : « the generalization of patterns as a route to algebra rests [usually] on the idea of a natural correspondence between algebraic thinking and generalizing » (Kieran, 1989, p.165).

La généralisation itérative d'un invariant observé sur quelques figures, sans pouvoir donner une expression pour un terme quelconque de la suite, par exemple le 25^e, demeure arithmétique (Radford, 2006, p.8). Ex.: « pour avoir la figure 3, il faut ajouter 4 éléments à la figure 2. Pour la figure 4, il faut... ». On a une généralisation factuelle quand on réalise qu'un invariant s'applique à l'ensemble de la suite et qu'on peut exprimer un terme donné de la suite en fonction de son rang (p.12). Ex.: « on prend le rang de la figure et on le multiplie par 2 et ensuite on ajoute 1 ». L'indétermination n'est alors pas énoncée explicitement mais demeure au niveau du concret. Quand on réussit à exprimer la généralité par une description d'une action potentielle simple, en suspens, qui pourrait s'appliquer à une figure non précisée, au lieu de descriptions individuelles pour parler d'une figure donnée, on a une généralisation contextuelle (on parle d'une figure dans une suite particulière, connue).

Elle s'obtient par la nécessité d'une plus grande concentration de signification en un moins grand nombre de signes, par exemple en voulant exprimer la généralité dans un court message envoyé par courriel. Radford nomme cette performance « contraction sémiotique ». Pour atteindre un niveau de généralisation algébrique symbolique, la contraction sémiotique doit se rendre aux

[53] Dans la version française de ses textes, le terme est traduit par « objectivation » terme qui mène parfois à une confusion entre le fait de « objectiver » et « réifier » ou « chosifier ». Rendre objectif vs rendre préhensible.

symboles qui permettent de penser d'une façon particulière, ceux de l'algèbre. L'objet généralisé doit se cristalliser en un schéma (règle ou expression d'un terme général).

Figure 2.4 Résumé des raisonnements selon le niveau de généralité (Radford 2006, p.15)

Naïve Induction	**Generalization**			
Guessing (Trial and Error)	Arithmetic	Algebraic		
		Factual	Contextual	Symbolic

En résumé, pour avoir une généralisation algébrique factuelle, contextuelle et finalement symbolique, il faut gravir successivement ces couches de généralité par objectification graduelle.

Hitt, Saboya et Zavala (2016, 2017) utilisent des suites de nombres polygonaux dans une approche qui se caractérise par un cadre théorique définissant une pensée arithmético-algébrique avec une approche pédagogique particulière (ACODESA) où la construction sociale de la connaissance est un élément important. Ce cadre théorique et pratique se veut en rupture avec la conception de l'EA qui tente de caractériser la pensée arithmétique et la pensée algébrique en délimitant leurs différences. Cela nous fait observer que l'algèbre primitive est aussi en rupture avec cet aspect de l'EA., car elle se base essentiellement sur les ressemblances.

Bien que le domaine des suites soit ce qui est le plus en vue dans cette approche, elle ne s'y limite pas exclusivement.

Généraliser la formule de l'aire d'un polygone régulier par l'observation de considérations géométriques est un autre exemple qui s'insère dans cette approche. La plus directe qui nous vient à l'esprit est la possibilité de généraliser la solution d'un problème arithmétique paramétrable en remplaçant les nombres du problème par des lettres (on rejoint alors l'arithmétique généralisée). On peut aussi considérer une classe de problèmes représentables par une même équation et on touche à la modélisation.

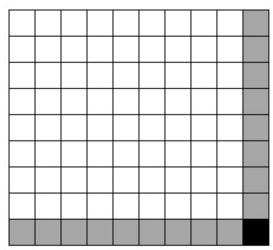
2.6.2 La généralisation pour prouver

L'intention de prouver se manifeste de différentes façons selon le niveau scolaire. Elle découle naturellement d'un besoin de justifier les affirmations. Un bon exemple est la démarche de conjecture mise de l'avant par Carpenter, Franke et Levi (2003) où les enfants sont amenés à formuler et justifier des lois régissant les nombres et les opérations (ce qu'ils nomment « grandes idées mathématiques ») comme celle-ci: « Lorsque vous ajoutez un nombre impair à un autre nombre impair, le résultat est un nombre pair » (p. vi).

Autre exemple, cette fois avec Chevallard (1985, p.75) et ce qu'il nomme la valeur monstrative d'une expression (par opposition à sa dénotation qui est indépendante de sa forme). On peut inférer (et prouver) que la différence de deux carrés consécutifs quelconques $(n+1)^2 - n^2$ est le nombre impair $2n+1$.

Le registre figural (ou le matériel concret) permet aussi le raisonnement. Pour passer du carré d'un naturel positif au carré de l'entier suivant, on « voit » qu'il faut ajouter 2 fois le nombre de carreaux contenu dans le côté du carré, et un de plus pour le coin (voir ma figure 2.5).

Figure 2.5 Différence entre deux carrés consécutifs



Les quasi-variables (Fujii et Stephens, 2001) ou les symboles génériques (place holders) sont des outils pour s'approcher de ce type de généralisation, et de la formulation des identités en général.

$(9+1)^2 - 9^2 = 2 \bullet 9+1$ Le nombre 9 peut être remplacé par n'importe quel nombre,
$(\Delta+1)^2 - \Delta^2 = 2 \bullet \Delta+1$ de même que le symbole Δ et les égalités demeurent vraies.

2.6.3 Étude sur la covariation et sur l'idée de fonction

Il s'agit d'étudier le lien entre deux quantités telles que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre ; bref, qui sont liées dans leurs variations. Au lieu d'observer une covariation, on peut aussi considérer que l'une des valeurs dépend de l'autre dans un lien fonctionnel. On fera appel ici à la véritable idée de variable même si les lettres ne sont pas encore présentes de façon explicite. Par exemple, dans l'expérimentation avec CARAPACE (Kieran, Boileau et Garançon, 1996, p.263), un environnement informatique mis au point par Boileau et Garançon, le langage naturel permet de faire reconnaitre un lien fonctionnel (par la narration). Cette approche processuelle des expressions algébriques fonctionnelles incitait l'élève (7[e] année, en moyenne 13 ans) à faire appel à des représentations dans différents registres sémiotiques. Bien que ces expériences ont été faites avec des élèves au début du secondaire, nous pensons qu'elles seraient abordables à la fin du primaire. L'observation du changement est au cœur de cette approche. Carraher et Schliemann identifient la pensée algébrique avec la formulation et les opérations sur les relations, particulièrement les relations fonctionnelles. Ils montrent que les fonctions permettent de voir le caractère algébrique de l'arithmétique. Ceci ressemble beaucoup aux deux champs de contenu de l'EA selon Kieran (arithmétique généralisée et fonctions).

Autre exemple: une « machine à fonctions » peut générer des suites de nombres qui correspondent à des suites de figures, nous laissant le choix de représenter ces figures de différentes façons : triangles de cure-dents, pyramides de billes, rangées de cercles, ligne polygonale, graphique, on a des possibilités sans fin (théoriquement du moins). Cette machine peut produire une suite de nombres en suivant une règle particulière, comme une relation linéaire.

Avec des programmes de calcul équivalents (expressions fonctionnelles contenant une variable), l'élève doit réfléchir au fait qu'il obtient la même réponse dans les deux fonctions quand il donne une même valeur en entrée. Ex.: '2 × (nombre + 3)' donne toujours le même résultat que '2 × nombre + 6'. Cela devrait l'amener à penser que les expressions des 2 fonctions peuvent se transformer l'une en l'autre. Dans le cas de programmes de calcul non équivalents, en posant égales les deux expressions, il verra que les valeurs donnant un même résultat feront une proposition vraie si on les substitue dans l'équation obtenue. Ex.: $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x + 8$ évidemment sans les présenter ainsi. On peut dire que les deux machines donnent la même réponse quand on leur donne 7. Et 7 est la seule solution de $f(x) = g(x)$.

Carraher et Schliemann (2018) parlent d'une expérience d'enseignement en EA avec l'approche fonctionnelle. Ils font remarquer que même les opérations arithmétiques peuvent se présenter comme des fonctions (Kaput et Blanton, 2001).

Ex.: additionne 2 à ton nombre quel qu'il soit, $f(n) = n + 2$; additionne tes deux nombres, $f(a, b) = a + b$; divise ton nombre par 6, $f(n) = n \div 6$.

Ils ont aussi constaté que les enfants peuvent facilement représenter algébriquement des généralisations qu'ils ont faites préalablement.

D'autres avenues ont aussi été envisagées. Rojano et Sutherland (Rojano, 1996) ont fait des essais avec le tableur pour concrétiser un lien symbolique entre des cellules jouant le rôle de variables indépendantes et dépendantes avec des enfants de 11 ans. L'utilisation d'un tableur impose les concepts de variable et de fonction dès le départ (p.11). L'étude d'Haspekian (2005) s'intéresse aussi aux tableurs mais encore avec des élèves du début du secondaire (7e année). Ces élèves n’avaient cependant pas commencé une étude de l’algèbre formelle.

2.6.4 La résolution de problèmes

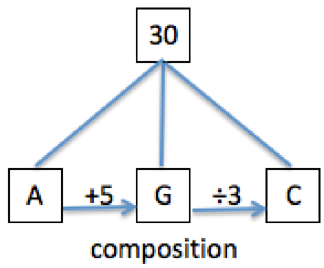
Ce sont surtout les problèmes à données textuelles qui ont été considérés, par exemple par Bednarz et Janvier (1996) et Schmidt (1996), comme il est présenté plus bas dans cette section (voir figures de 3.5 à 3.9, en complément de la sous-section 1.3.1 dans la problématique). On y gère des quantités connues et inconnues, en général non variables, et les liens entre elles. Remarquons qu'il n'est pas possible de présenter tous les problèmes sous cette forme. Les problèmes de taux et de transformations ne sont pas considérés dans le modèle de classification source, puits et composition (ils ont fait l'objet d'autres études antérieures). La difficulté spécifique liée à la conversion du texte écrit peut être amoindrie si le problème est posé dans un autre registre de représentation sémiotique (Duval, 1993) et que la tâche ne consiste pas nécessairement à résoudre une équation. Nous avons aussi vu que la tâche peut être amoindrie par une lecture stratégique du problème par l'élève. Il est facile sémantiquement d'inverser une relation pour avoir une équation plus simple. (A plus grand que B alors on peut dire B plus petit que A, etc.). De plus, le choix de petits nombres comme dans l'exemple qui suit pourrait rendre la découverte des solutions par essais et erreurs trop facile.

Selon plusieurs chercheurs dont Wheeler (1996, p.321), l'approche en résolution de problèmes semble la plus prometteuse. Elle est cautionnée par son historique et vise ce que plusieurs considèrent l'essence même des mathématiques, soit la résolution de problèmes bien posés. La résolution de problèmes englobe beaucoup plus que les contextes faisant appel à des méthodes algébriques implicites ou explicites, ce qui la situe au niveau « global-meta » dans le modèle de Kieran dans le cas de l'activité algébrique. Mais on n'a qu'à penser aux divers concours de résolution de problèmes au primaire et au secondaire pour saisir la richesse de cette approche.

Voici donc un exemple de problème déconnecté impliquant des relations de comparaison de type composition (figure 2.6):

> Gabrielle a 5 livres de plus qu'Anne et Cédric en a 3 fois moins que Gabrielle. Ensemble, ils en ont 30. Combien de livres chacun a-t-il?

Figure 2.6 Représentation des relations entre les données dans un problème déconnecté de type composition

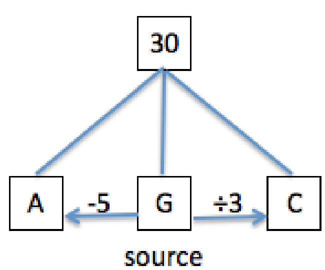


Le problème est déconnecté car on ne peut pas opérer uniquement sur des valeurs connues pour trouver séquentiellement celles qui manquent. En fait, aucune des données n'est connue, sauf le total. Le problème est de type composition car l'information pour déterminer l'avoir de Cédric vient de ce que l'on sait (ou non) de celui de Gabrielle, ou plus précisément de la relation entre les deux nombres. Pour savoir le nombre de livres que Gabrielle a, il faudrait savoir (ou faire semblant de savoir!) combien Anne en a. Cette dernière information est obtenue de ce qu'on nous dit à propos de la relation entre ces deux quantités (à la condition de ne pas se limiter à la multiplication et d'accepter la division dans le schéma).

Il est à remarquer que si on reformule ainsi le début (figure 2.7):

> Anne a 5 livres de moins que Gabrielle et Cédric en a 3 fois moins que Gabrielle. Ensemble, ils en ont 30. Combien de livres chacun a-t-il?

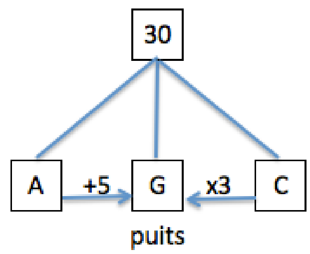
Figure 2.7 Représentation des relations entre les données dans un problème déconnecté de type source



On se base maintenant sur l'avoir de Gabrielle pour obtenir ceux d'Anne et de Cédric, et le problème devient de type source (à la condition aussi de ne pas se limiter à l'addition et à la multiplication et d'accepter la soustraction et la division dans le schéma). Si au contraire on modifie ainsi l'autre partie de la phrase:

> Gabrielle à 5 livres de plus qu'Anne et Gabrielle en a 3 fois plus que Cédric . Ensemble, ils en ont 30. Combien de livres chacun a-t-il? (figure 2.8)

Figure 2.8 Représentation des relations entre les données dans un problème déconnecté de type puits

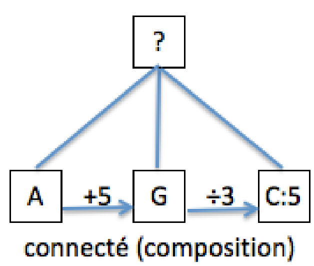


Alors l'information pour Gabrielle est obtenue à partir de celle d'Anne, mais aussi de celle de Cédric, et le problème devient de type puits.

Un exemple de problème connecté (figure 2.9) pourrait être:

> Gabrielle a 5 livres de plus qu'Anne et Cédric en a 3 fois moins que Gabrielle. Si Cédric a 5 livres, combien de livres ont-ils en tout?

Figure 2.9 Représentation des relations entre les données dans un problème connecté (de type composition)



En résumé, on réservera les qualificatifs « source », « puits » et « composition » pour les problèmes déconnectés qui n’impliquent que des relations de comparaison; ils peuvent solliciter un raisonnement analytique contrairement aux problèmes connectés qui eux ne font intervenir qu'un raisonnement arithmétique. Le type de raisonnement nécessaire à leur solution est ce qui distingue ces deux catégories de problèmes et est constitutif de la rupture.

Nous rapportons dans la section qui suit, des exemples d'items proposés par les chercheurs et qui visent à développer la pensée algébrique au primaire. Ces items constituent des pistes intéressantes pour notre analyse des manuels scolaires.

2.7 Des exemples de l'algèbre primitive mis en oeuvre par les chercheurs

Rappelons que des chercheurs soulignent que dans le développement de la pensée algébrique primitive, le rôle du langage naturel est d'une importance capitale (Kieran et coll., 2016, p.1). Nemirovsky (1996, p.216) emploie la narration pour amener une situation avec un questionnement mathématique pour générer ou interpréter un graphique qualitatif du genre qui représente la taille d'une plante en fonction du temps et Radford (2011) observe que le verbal et le non-verbal font partie de la formation et de la communication des idées mathématiques. Prenant en considération le rôle du langage naturel, plusieurs chercheurs proposent des items qui visent à développer la pensée algébrique au primaire.

On pourrait ajouter, suite à ces exemples, que l'arithmétique généralisée et l'étude des relations fonctionnelles entre deux quantités sont des domaines de choix dans lesquels on peut mobiliser des idées algébriques au primaire, particulièrement en résolution de problèmes. Les enfants du primaire sont capables de remarquer, de conjecturer (Carpenter et coll., 2003), d'apprécier la structure (Mason, Stephens et Watson, 2009, p.10) de représenter avec des variables (Molina, Ambrose et del Rio, 2018, p.276) et de justifier (Carpenter et coll., 2003, p.60).

2.7.1 Carpenter et Davis

Carpenter, Franke et Levi (2003) apportent leur vision du développement de la pensée algébrique primitive à travers leur livre qui rend compte d'une approche d'enseignement qui relève clairement du mouvement EA, Ce livre est accompagné d'un CD vidéo illustrant des séquences d'enseignement. Dans le livre, Carpenter et ses collègues considèrent « The Big Ideas », les grandes idées des mathématiques (propriétés des nombres et des opérations), et les intègrent au primaire. Ils arrivent à guider les élèves, par des démarches de conjecture et de symbolisation graduelle, vers une forme généralisée ou modélisée de ces idées au moyen des compétences inhérentes des élèves, à partir de ce qu'ils savent déjà dans leur vie de tous les jours : (« The Powers »).

Pour cela, ils utilisent des phrases mathématiques lacunaires (comme $8 + 4 = \square + 5$, p.10 ou $5 \square 8 = 40$), la réflexion sur la valeur de vérité des énoncés ($8 - 5 = 3$ vrai; $3 \times 4 = 15$ faux, p.15) et la justification (p.86 : $56 + 47 = 54 + d$; d doit être 49 car « Ali: Fifty-six is two more than 54, so we take the 2 and put it with the 47. That makes 49, so *d* has to be 49. ») ([Cinquante-six c'est 2 de plus que 54, alors on prend le 2 et on le met avec le 47. Ça fait 49. Alors *d* doit être 49.])

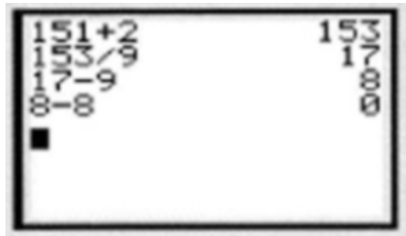
Il a démontré que des élèves de troisième année du primaire peuvent produire des réflexions profondes (p.135). Ses approches sur le développement de la pensée algébrique primitive ont influencé d'autres éducateurs et chercheurs. On y voit un réinvestissement et une continuité des travaux de Robert B. Davis (1960) à qui d'ailleurs le livre est dédicacé.

2.7.2 Kieran

À propos des patterns et de l'aspect structurel en général (nombres, expressions, opérations, etc.), Kieran parle d'un projet où de jeunes Mexicains recherchent la structure dans une activité basée sur « Five Steps to Zero »[54] traitant de facteurs, multiples et diviseurs. Dans l'activité, les élèves doivent partir d'un nombre donné et arriver à zéro en 5 opérations ou moins (voir figure 2.10 pour un exemple). On précise que tous les nombres entiers de 1 à 1000, à l'exception de 851 et 853, qui nécessitent six étapes, peuvent être ramenés à zéro en cinq étapes ou moins. Kieran affirme que réussir cette tâche, avec la contrainte de n'utiliser que des nombres entiers de 1 à 9 et une seule opération par ligne, implique de développer des techniques de décomposition de nombres (premiers ou composés) en d'autres nombres du même voisinage (pas plus de 9 d'écart à partir du nombre donné) dont les diviseurs ne dépassent pas 9 de manière à atteindre zéro en cinq étapes ou moins.

[54] Kieran cite: Williams and Stephens (1992)

Figure 2.10 Le problème de base « Five Steps to Zero »



(Adapté de Williams et Stephens, 1992), illustré par un exemple (le nombre de départ est 151), affiché sur un écran de calculatrice à affichage multi-lignes.

Selon elle, une attention excessive de la recherche sur la généralisation ne doit pas nuire à l'intérêt porté au processus aussi important qu'est « rechercher la structure ». En fait, Kieran (2018, chap. IV) considère que l'aspect structurel constitue un niveau supérieur de généralisation dans la généralisation algébrique symbolique.

Elle explique pourquoi la recherche, l'usage et l'expression de la structure dans les nombres et les opérations numériques constituent une piste fondamentale pour développer la pensée algébrique primitive. Il s'agit entre autres de décomposer et de recomposer des nombres de différentes façons.

Voici un exemple, pour voir que la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3 (Mason, 2008, p.81) : $5 + 6 + 7 = 5 + 6 + 6 + 1 = 5 + 1 + 6 + 6 = 6 + 6 + 6 = 3 \times 6$.

Un exemple classique est de multiplier un nombre par 99.

$$32 \times 99 = 32 \times (100 - 1) = 3200 - 32 = 3208 - 40 = 3168$$

Plusieurs de ces decompositions correspondent à des strategies cognitives de calcul mental.

2.7.3 Activités d'un groupe inter-universitaire

Dans le cadre d'une recherche plus large, un groupe de 9 chercheurs a voulu savoir s'il y avait rétention des apprentissages après 3 ans d'enseignement en EA (3^e à 5^e années du primaire) suivis d'une année d'enseignement traditionnel. On a comparé les résultats d'un groupe composé d'élèves dans cette situation et d'un groupe d'élèves n'ayant jamais eu d'enseignement autre que l'enseignement traditionnel à la fin de leur sixième année du primaire, pour un total de 1455 élèves (Stephens, Blanton et coll., 2019).

Ces chercheurs ont construit un cadre curriculaire, l'intervention pédagogique et les tests associés aux pratiques de pensée algébrique consistant à généraliser, à représenter des généralisations, à justifier des généralisations et à raisonner avec les généralisations. Ils tiennent compte des grandes idées algébriques dans lesquelles ces pratiques peuvent se produire, selon eux, à savoir l'arithmétique généralisée, les équivalences, les expressions, les équations et les inégalités ainsi que la pensée fonctionnelle.

Dans le test utilisé, certaines questions pouvaient appartenir à plus d'une catégorie de ces grandes idées. Neuf questions parmi les onze constituant le test de fin de 6^{e} année faisaient aussi partie du test de fin de 5^{e} année. Ces neuf questions ont été publiées dans les actes de la 41^{e} rencontre de PME-NA (Stephens, Blanton et coll., 2019) et sont reproduites ici avec la permission de Maria Blanton (figures 2.11 à 2.16).

Il est pertinent de les présenter ici car nous cherchons des exemples significatifs de questions dans le domaine de l'algèbre primitive.

Dans la catégorie arithmétique généralisée, il y a 2 questions (figure 2.11).

Au n^{o} 3, on vérifie si l'élève pense que la commutativité de l'addition fonctionne tout le temps. On lui demande de représenter cette généralité par une équation.

En 4, on demande d'expliquer pourquoi la somme de 3 nombres impairs est impaire.

Figure 2.11 Questions 3 et 4 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

3	Generalized arithmetic	Marcy's teacher asks her to solve "23 + 15." She adds the two numbers and gets 38. The teacher then asks her to solve "15 + 23." Marcy already knows the answer is 38 because the numbers are just "turned around." a) Do you think Marcy's idea will work for any two numbers? Why or why not? b) Write an equation using variables (letters) to represent the idea that you can add two numbers in any order and get the same result.
4	Generalized Arithmetic	Brian knows that if you add any three odd numbers, you will get an odd number. Explain why this is true.

Dans la catégorie équivalence, expressions, équations et inégalités, on présente au n° 1 une phrase lacunaire à la manière de Carpenter. On demande d'expliquer comment la réponse a été obtenue (figure 2.12).

En 5, on a un problème déconnecté (au sens vu plus haut). Les parts non connues mais dont on sait qu'elles sont égales, jouent le rôle d'inconnue. Il y a aussi une quantité qui est connue. Il faut trouver une représentation, malgré la quantité non connue, de ce que chacun a et de ce que tous possèdent ensemble. Les élèves sont ensuite informés du total et on leur demande d'écrire une équation avec une variable (lettre) qui relie ce total et l'expression trouvée auparavant.

Au n° 23, on demande si deux équations données ont la même solution et d'expliquer. (On applique l'une des propriétés de l'égalité à une première équation pour obtenir la 2^e^ équation, sans faire les calculs.)

Figure 2.12 Questions 1, 5 et 23 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

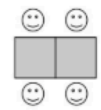
1	Equivalence, expressions, equations	Fill in the blank with the value that makes the number sentence true. $7 + 3 = \_\_\_\_ + 4$ Explain how you got your answer.
5	Equivalence, expressions, equations	Tim and Angela each have a piggy bank. They know that their piggy banks each contain the same number of pennies, but they don't know how many. Angela also has 8 pennies in her hand. a) How would you represent the number of pennies Tim has? b) How would you represent the total number of pennies Angela has? c) Angela and Tim combine all of their pennies. How would you represent the number of pennies they have all together? Suppose Angela and Tim now count their pennies and find they have 16 all together. Write an equation with a variable (letter) that represents the relationship between this total and the expression you wrote above.
23	Equivalence, expressions, equations	Do the following two equations have the same solution? Explain. $2 \times n + 15 = 31$ $2 \times n + 15 - 9 = 31 - 9$

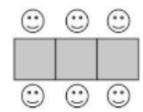
Pour la pensée fonctionnelle, en 9, (figure 2.13)

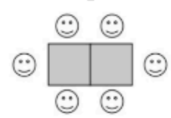
-Des tables carrées sont alignées en mettant d'abord 2 personnes par table et ensuite, dans un deuxième temps, on ajoute des personnes aux extrémités. Il faut compléter un tableau et trouver la règle dans les 2 cas en examinant pour trouver la présence d'une règle. On demande de trouver le nombre de places disponibles avec 100 tables. Il faut écrire la règle en mots, et avec des variables. Une série de questions vérifie si l'élève gère la différence introduite et s’il peut dire ce que ça change à la règle trouvée initialement.

Figure 2.13 Question 9 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

<table>
<tr>
<td>9</td>
<td>Functional thinking</td>
<td>Brady is celebrating his birthday at school. He wants to make sure he has a seat for everyone. He has square desks.

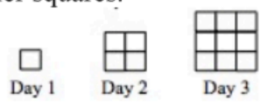
He can seat 2 people at one desk in the following way:  If he joins another desk to the first one, he can seat 4 people: 

If he joins another desk to the second one, he can seat 6 people: 

a) Fill in the table below to show how many people Brady can seat at different numbers of desks.
<table>
<tr><th>Number of desks</th><th>Number of people</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
</table>
b) Do you see any patterns in the table from part a? If so, describe them.
c) Think about the relationship between the number of desks and the number of people.
Use words to write the rule that describes this relationship.
Use variables (letters) to write the rule that describes this relationship.
d) If Brady has 100 desks, how many people can he seat? Show how you got your answer.
e) Brady figured out he could seat more people if two people sat on the ends of the row of desks. For example, if Brady had 2 desks, he could seat 6 people.

How does this new information affect the rule you wrote in part c?
Use words to write your new rule.
Use variables (letters) to write your new rule.</td>
</tr>
</table>

Au n° 14, (figure 2.14), on présente une suite de diagrammes formés de carrés, correspondant à une évolution de jour en jour et on donne un tableau à 2 colonnes montrant le nombre de jours et le nombre de carrés présents au jour indiqué. On demande de mettre les données en relation, de décrire en mots cette relation et d'utiliser une variable (lettre) pour écrire la règle. On doit prédire le nombre de carrés présents à la 100^{e} journée. Évidemment, il faut montrer sa façon de trouver la réponse. (Il s'agit ici de la suite des carrés des nombres naturels.)

Figure 2.14 Question 14 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

<table>
<tr>
<td>14</td>
<td>Functional thinking</td>
<td>The following magic square is growing so that each day it is made up of more and more smaller squares.


The following table shows a given day and the number of small squares on that day:
<table>
<tr><th>Day</th><th>Number of small squares</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>36</td></tr>
</table>
a) Think about the relationship between the number of days and the number of small squares.
Use words to write the rule that describes this relationship.
Use variables (letters) to write the rule that describes this relationship.
b) Use your rule to predict how many small squares will be inside the big square on day 100. Show how you got your answer.</td>
</tr>
</table>

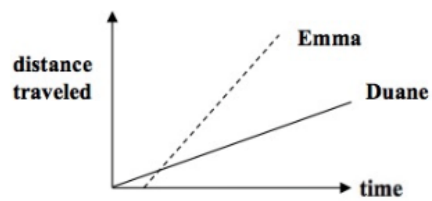
Au n° 10, on a la pensée fonctionnelle (par table de valeur), en combinaison avec équivalence, expressions, équations et inégalités. On donne la règle et on doit l'utiliser pour les données qui manquent dans les deux colonnes du tableau. Un seul des couples de la relation est explicite. On donne des valeurs hors du tableau de l'une des variables et on doit trouver la valeur de l'autre. Il faut montrer comment les réponses ont été obtenues.

Figure 2.15 Question 10 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

<table>
<tr>
<td>10</td>
<td>Functional thinking; Equivalence, expressions, equations</td>
<td>The table below shows the relationship between two variables, k and p. The rule $p = 2\times k + 1$ describes their relationship.
a) Some numbers in the table are missing. Use this rule to fill in the missing numbers.
<table>
<tr><th>k</th><th>p</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9</td></tr>
</table>
b) What is the value of p when $k = 21$? Show how you got your answer.
c) What is the value of k when $p = 61$? Show how you got your answer.</td>
</tr>
</table>

Et finalement, dans la question 21 (figure 2.16) il faut interpréter un diagramme (un graphique avec 2 axes non gradués) de la distance parcourue par 2 personnes en fonction du temps. On demande qui est parti en premier et comment on le sait. « Qui allait plus vite? Comment le savez-vous? Quelqu'un a-t-il accéléré et ensuite décéléré? Comment le savez-vous? »

Figure 2.16 Question 21 d'un prétest pour la rétention des apprentissages en EA

21	Functional thinking	Duane and Emma each went for a bike ride. The graphs below represent the relationship between time spent riding and distance traveled for each rider. a) Who started riding first? How can you tell? b) Who rode faster? How can you tell? c) Is Emma riding the same speed on her whole trip, or is she speeding up or slowing down? How can you tell? 

2.8 Synthèse de ce qui ressort globalement pour la grille

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une liste de descripteurs pour la confection de la grille.

En lien avec la problématique et les recherches rapportées dans ce deuxième chapitre, nous allons retenir et opérationnaliser des descripteurs constituant des indices de présence d'un contenu ayant un certain potentiel pour favoriser le développement de la pensée algébrique. À ce stade-ci, nous pouvons anticiper une grille d'analyse qui présentera deux volets.

De premier abord, les différents indices répertoriés dans les recherches et dans les programmes d'études (voir sections 2.4 et 2.5) et qui s'insèrent dans différentes approches de l'algèbre (voir section 2.6) ainsi que les exemples provenant des recherches (voir section 2.7) permettent de cibler différents aspects porteurs pour l'algèbre primitive. Nous allons utiliser 6 grandes idées qui se démarquent dans l'ensemble des indices récoltés et qui vont constituer le volet A de la grille

Volet A de la grille :

1) Pour amener les élèves à développer une pensée algébrique, il faut les inciter à concevoir une façon de représenter[55] et d'utiliser une quantité ou un nombre dont la valeur n'est pas connue (indéterminée, inconnue). Ils pourront alors se donner ainsi la possibilité d'agir

[55] algébriquement ou de façon quasi-algébrique

sans distinction avec ces derniers et avec les nombres ou quantités connus (comme au point 5 ci-bas, transformations). Cette façon de faire est qualifiée d'analytique et peut être sollicitée entre autres par des problèmes déconnectés.

2) On veut qu'ils voient certaines écritures mathématiques comme des objets ayant un sens en relation avec les autres objets auxquels ils sont reliés (voir qu'il existe une structure et qu'on peut agir sur cette structure (la transformer) à la condition de respecter certaines règles qui sont définies par une nécessaire compatibilité avec le fonctionnement des symboles communs avec l'arithmétique et leurs relations). Ceci touche la généralisation de l'arithmétique. Des exemples de travail sur une structure sont : ordonner, décomposer et recomposer des nombres, utiliser les propriétés des opérations, effectuer mentalement des calculs, appliquer et étendre les acquis de l'arithmétique aux expressions algébriques dans la recherche de termes manquants et du sens relationnel du symbole d'égalité. Exemple : phrases mathématiques lacunaires comme $8 + 4 = \square + 5$. La transformation peut poursuivre un but de justification : par exemple, trouver d pour que l'égalité $56 + 47 = 54 + d$ soit vraie. « d doit être 49 car 56 est 2 de plus que 54, donc on prend 2 et on le met à 47; on obtient 49, d est 49 ».

3) On veut qu'ils soient capables de créer ou interpréter différentes idées en utilisant divers modes de représentation (graphique, figure, équation, tableau et langue naturelle) et qu'ils soient capables de les convertir d'un registre à l'autre. L'utilisation simultanée de plus d'un mode de représentation aide à une formation d'un concept plus fine. Ajoutons les objets manipulables comme moyen de représenter des idées (ex. : blocs multi-bases).

4) La comparaison est aussi un aspect essentiel des habiletés à acquérir pour être en mesure de créer et interpréter des égalités et des équations, des inégalités et des inéquations et de leur attribuer des valeurs de vérité (conditionnelles aux valeurs possibles des nombres et des quantités inconnues).

5) Les transformations impliquent de manipuler des quantités ou des nombres sans faire de distinction sur la nature connue ou inconnue (symbole) de ceux-ci. Il peut donc s'agir de représentations fonctionnelles (trouver un programme de calcul équivalent – expressions équivalentes), de variation ou de covariation, d'obtenir le résultat d'opérations arithmétiques ou algébriques, d'appliquer une règle, un calcul particulier ou une référence à l'opération inverse.

6) La généralisation est un aspect primordial de la pensée algébrique. L'élève doit être amené à voir un objet donné comme une instance d'un objet plus général qui fait de lui un cas particulier. Modéliser (à partir d'une situation mathématique ou réelle), formuler une expression générale pour une règle, conjecturer et prouver sont des façons d'aborder la généralisation. Classifier peut être une étape menant à une généralisation (ex. : parité). Il peut aussi s'agir de trouver le terme général d'une suite de nombres ou de la valeur attribuée à un terme arbitraire dans une suite de figures.
   Un autre genre de généralisation est de voir qu'une propriété est toujours vraie : ex.: pourquoi la somme de 3 nombres impairs est-elle impaire?

Les couleurs des termes-clés dans les paragraphes 1 à 6 ci-haut ont été utilisées pour teinter des mots ou des expressions de notre récolte pour les associer à eux. Le nuage de mots a été reporté en annexe A par souci de ne pas encombrer le texte principal.

Volet B de la grille

D'autre part, il est également intéressant de vérifier si les questions proposées dans les manuels scolaires permettent de faire surgir des conceptions et/ou des difficultés particulières (rappel de la section 1.2 de la problématique). Les conceptions qui posent difficulté sont que les élèves…

a) croient que le symbole d'égalité ne représente qu'un opérateur unidirectionnel qui produit une valeur de sortie du côté droit à partir d'une entrée du côté gauche (au lieu de concevoir les trois propriétés d'une relation d'équivalence : réflexivité $a = a$, symétrie $a = b <=> b = a$ et transitivité: si $a = b$ et $b = c$ alors $a = c$);

b) se centrent sur la recherche de solutions particulières (et ne peuvent accepter une réponse où une opération n'a pas été effectuée (ex. : $n + 4$);

c) ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité;

d) n'utilisent pas de symboles mathématiques pour exprimer les relations entre les nombres;

e) ne comprennent pas l'usage des lettres en tant que généralisation de nombres (ou leur prêtent d'autres rôles – ex. : 4m peut vouloir dire 4 mètres);

f) ont de grandes difficultés à opérer sur des valeurs inconnues; et

g) ils ne parviennent pas à comprendre que des transformations équivalentes des deux côtés d'une équation n'altèrent pas sa valeur de vérité.

En ce qui concerne les autres types de difficultés, il y a entre autres l'utilisation des fractions, l'élément neutre, la multiplication et la division par un nombre entre 0 et 1, les opérations inverses, les différentes décompositions des nombres, les ordres de grandeur, le principe de conservation des quantités, la proportionnalité, les nombres négatifs, ce qui constitue une nouveauté (concept à apprendre par une situation problème), une représentation non standard ou un contexte non familier.

La question du contrôle dans la réalisation d'une tâche (Saboya, 2010) est un aspect important mais qui ne se manifeste que lorsque l'élève est en mode résolution ou dans les traces qu'il laisse, donc non visible pour nous et on ne sait pas si la formulation des items a une incidence quelconque sur le réflexe de contrôle chez l'élève. Cet aspect pourrait être exploré dans un contexte de recherche sur la rédaction des questions.

Un troisième volet (C) visera à qualifier le potentiel d'un item donné pour la sollicitation d'une pensée algébrique. Dans le cas d'une sollicitation présente mais jugée faible, nous apporterons une suggestion pour augmenter la nécessité de recourir à une pensée algébrique. Nous reviendrons sur ce troisième volet dans le troisième chapitre, la méthodologie.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Rappelons d'abord que le but de ce chapitre est de mettre au point une méthode qui nous permettra de regarder les items (questions, problèmes, exercices, activités) proposés dans les manuels avec une lunette particulière, formée à partir de ce que la recherche nous a dit de l'algèbre primitive. Ces connaissances des aspects théoriques reliés à l'algèbre primitive et des résultats obtenus par les chercheurs dans leurs mises à l'essai me sont accessibles par ma recension des écrits présentée au chapitre II. À partir de cette recension, nous allons ici construire une grille qui va nous permettre d'identifier des items qui sont aidants pour développer une pensée algébrique chez des élèves du primaire et dont nous en avons brossé les grandes lignes dans la synthèse du chapitre précédent (voir section 2.8). Je me suis intéressé plus particulièrement au 3^{e} cycle du primaire pour différentes raisons : (1) après un survol des manuels des trois cycles du primaire, c'est le troisième cycle qui semble contenir un potentiel intéressant pour préparer à l'algèbre en contexte arithmétique. Après une première analyse, on constate que le nombre d'items qu'il était pertinent d'analyser dans ce cycle se situe autour de 38% (344/902). Aux premier et deuxième cycles, c'est encore moins et cela n'ajouterait pas nécessairement de substance au portrait; (2) selon la progression des apprentissages, c'est dans ce cycle que nous retrouvons principalement les sujets identifiés comme préalables dans le programme du secondaire; (3) Nous souhaitons mener une analyse à un niveau scolaire qui permet de faire un lien éventuel avec le matériel du premier cycle du secondaire des mêmes auteurs pour voir si la transition primaire-secondaire se fait dans une continuité logique du développement de la pensée algébrique. Nous savons par le compte rendu de recherches et de leur mise en œuvre dans des planifications de séquences d’enseignement et des études longitudinales, qu'on peut obtenir des résultats positifs dans cette (ces) approche(s), moyennant cependant une mise en place réfléchie qui tient compte de la pédagogie et de la didactique. Notre étude ne peut cependant aller aussi loin car elle se limite au contenu de manuels scolaires en lien avec le programme d'études et les caractérisations de l'algèbre primitive, en tenant compte de la manière dont elle se distingue de l'arithmétique et de l'algèbre traditionnelles (principalement par l'étude des structures et des relations).

L'éclairage théorique apporté dans le chapitre II a permis de préciser les intentions de recherche de ce mémoire.

3.1 Retour sur l'objectif et la question de recherche

Nous visons l'objectif de détecter le potentiel pour le développement de la pensée algébrique dans les documents à la disposition des enseignants du Québec pour guider leurs interventions en classe, notamment le programme d'études et les manuels scolaires.

La question de recherche est la suivante : Chez nous, au Québec, comment la question de l'algèbre primitive est-elle considérée dans les programmes d'études et dans les manuels scolaires sur lesquels on se base principalement pour mettre en oeuvre ces programmes?

Dans la section synthèse du cadre conceptuel (voir 2.8), nous avons identifié des mots-clés, des concepts et des processus issus de la recherche et des programmes d'études qui sont des leviers aptes à solliciter une pensée algébrique. Avec une meilleure compréhension de ce que représente l'algèbre primitive, on peut préciser les questionnements et la planification des outils méthodologiques.

Pour savoir comment détecter le potentiel pour le développement de la pensée algébrique dans les manuels destinés aux élèves du 3e cycle du primaire au Québec, mes trois questions sont maintenant les suivantes (elles se précisent suite à l'élaboration du cadre conceptuel):

1) Comment peut-on reconnaitre les aspects de la pensée algébrique primitive qui sont sollicités par un item? / Quels sont les possibles aspects de la pensée algébrique primitive qui ressortent positivement des recherches?

Il faut d'abord identifier et nommer les aspects en question et se familiariser avec les façons dont ils peuvent se manifester. C'est dans cette optique que nous allons mettre au point une grille d'analyse à partir des stratégies ou approches qui se sont montrées efficaces dans les recherches sur la pensée algébrique chez les enfants.

2) Dans les manuels choisis, quel est le portrait qu'affichent globalement les items au regard de leur capacité à solliciter une pensée algébrique primitive?

Nous aurons cette information après avoir utilisé la grille et compilé les résultats.

3) Quels aspects porteurs du développement de la pensée algébrique primitive sont sollicités dans le PFEQ et comment les a-t-on traités dans les manuels scolaires?

Nous pourrons revenir sur ces questions après avoir avancé dans l'analyse.

3.2 Les assises théoriques à la base de l'élaboration de la grille d'analyse

L'approche de cette recherche est mixte, soit qualitative et quantitative, Toutefois, le traitement quantitatif se limite à un traitement descriptif sans analyse statistique. En effet, même si on va compiler des fréquences pour obtenir un portrait des items retenus ayant du potentiel pour mener un travail en algèbre primitive, il n'y aura aucun autre traitement statistique de ces données. Il s'agit d'une analyse de contenu de manuels scolaires sous la loupe de critères qui révèlent la présence d'un potentiel pour le développement de la pensée algébrique au primaire chez l'élève.

Avant de présenter une première version de la grille, rappelons quelques faits relatifs à la pensée algébrique, au raisonnement algébrique, à l'activité algébrique et à l'algèbre elle-même. La pensée algébrique présente 3 caractéristiques essentielles (selon Radford, 2014): l'indétermination, l'analyticité et la dénotation. Le raisonnement algébrique est ce qui donne vie à l'algèbre en tant que langage en permettant le traitement des objets algébriques pour les modifier ou en obtenir d'autres par argumentation logique. L'activité algébrique est le fait d'utiliser l'algèbre (ou de déployer une pensée algébrique) avec une intention.

On accepte que l'algèbre est...

...une généralisation de l'arithmétique (mais pas seulement cela).

Elle est utilisée ...

- comme outil de résolution de problèmes (écrits ou représentés);
- comme outil de modélisation en situation fonctionnelle (pour étudier les régularités, la variation, la covariation, intra-mathématique et extra-mathématique);
- pour justifier ou prouver;

- comme langage (qui, comme le français, admet certaines manipulations syntaxiques, et une sémantique liée à la syntaxe);
- pour représenter et explorer (liste non exhaustive) :
    a. des nombres ou des quantités dont la valeur n'est pas précisée (représentés habituellement par des lettres);
    b. des classes de nombres (pairs, impairs, carrés,...);
    c. des propriétés sous forme générale (les relations entre les nombres ou les classes de nombres, des conjectures avec les grandes idées[56]);
    d. la structure des expressions (nombres, lettres et symboles relationnels ou opératoires);
    e. les calculs de l'arithmétique de façon générale (calcul littéral sur les expressions);
    f. des relations (fonctionnelles ou non, équations et inéquations);
    g. le terme général d'une suite de nombres (naturels ou figurés).

Comme nous l'avons vu dans la problématique, le programme d'études actuel (Gouvernement du Québec, 2001) est formulé en termes de compétences, autant au primaire qu'au secondaire. On mentionne aussi qu'au primaire les élèves sont sollicités pour la recherche de termes manquants, par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles (priorités), l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes (surtout dans les suites de figures et de nombres).

Étant donné les diverses façons d'aborder la question de l'algèbre primitive à l'aide de représentations tributaires des constructions théoriques rapportées au chapitre II, il faut être avisé que d'autres constructions sont possibles et que le désir d'une élaboration de celles-ci, aussi éclairante qu'elle pourrait être sous différents aspects, ne présente pas d'intérêt particulier pour la présente recherche. C'est aussi pourquoi il est difficile de ne s'en tenir qu'à une seule approche dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, en général, et que des méthodes mixtes ont été mises de l'avant (Squalli, 2000; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

[56] Commutativité de l'addition, etc.

Mais ce qui constitue le cœur de toutes ces visions, ce sont les briques conceptuelles sur lesquelles s'appuient toutes ces constructions et qui en préservent l'essence sémantique; elles nous éclaireront suffisamment pour mettre en place les fondements de notre grille de lecture de l'activité algébrique sollicitée par les items dans les manuels scolaires.

Nous nous sommes basés sur le rationnel suivant :

Le Early Algebra Group du NCTM a proposé les termes suivants: « opération, égalité, pattern, formule, propriété, variable, variation ... » sans vouloir les rattacher à des auteurs ou chercheurs particuliers, mais en les considérant comme des indices pour identifier la présence d'idées algébrique au primaire. C'est un peu mon inspiration pour créer ma propre liste à partir des affirmations des chercheurs dont j'ai pu lire quelques textes. Cette liste de mots, comme le nuage de mots du chapitre précédent, sera mise en annexe car elle est peu utile dans le corps du texte mais a été d'un grand support pour bâtir la grille (voir annexe B).

Pour choisir les indices de sollicitation d'une pensée algébrique dans les items, j'ai donc considéré l'ensemble des idées autour de l'EA et de la pensée algébrique que j'ai pu identifier dans les écrits des chercheurs cités dans le chapitre II (voir section 2.8, volet A de la grille). Le détail des critères observés ne sert que pour la discussion et ne fait pas l'objet d'une analyse quantitative statistique.

Comme explicité dans le chapitre précédent (section 2.8), j'avais aussi le questionnement à savoir : Comment peut-on évaluer le degré potentiel de développement de la pensée algébrique? On peut s'en sortir en indiquant une présence ou une absence d'un critère et ajouter une nuance quant à l'intensité de sa présence (ex.: le problème peut se faire sans agir sur une quantité inconnue mais ce n'est pas l'approche la plus efficace).

Puisque nous devons nous baser sur le matériel écrit plutôt que sur l'observation et l'analyse des réponses des élèves, il nous faut donc déterminer des critères pour classer les items. Or, comme on a vu, la pensée algébrique est une bibitte à plusieurs pattes et chacune de ses pattes nous parle d'un aspect de sa personnalité. On ne pourra donc identifier la dimension algébrique de la pensée mathématique qu'en faisant appel à des manifestations de composantes particulières de la pensée algébrique. Ces aspects seront ceux sur lesquels les chercheurs et les praticiens auront porté un jugement favorable lors de leurs expériences de mise en pratique et dont nous utiliserons des caractéristiques pour le classement.

3.3 Construction et présentation de la première version de la grille d'analyse

Mes lectures m'ont amené à élaborer une grille pour être en mesure de faire une analyse de contenu (Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L., 2018) des manuels scolaires ciblés en termes de potentiel pour le développement de la pensée algébrique. Cette première grille d'analyse a été revue à la lumière des mises à l'épreuve initiales; elle a été précisée et a donné place à une deuxième version (en fait, 2.1, 2.2 et 2.3) qui est celle qui a été retenue. Cette deuxième grille provient ainsi d'un processus cyclique d'analyse de cohérence des cotations de différentes personnes (triangulation) et de retours sur la grille.

La grille d'analyse construite se base sur certains aspects gravitant autour du développement de la pensée algébrique. Elle a été élaborée en prenant en considération les difficultés et les obstacles au développement de la pensée algébrique constatés dans différentes recherches depuis plusieurs décennies (volet B de la grille). Ces éléments (voir chapitre I et synthèse du chapitre II) ont été répertoriés principalement par Booth (1984), par Carraher et Schliemann (2007) et récemment par Kieran, Pang, Schifter et Ng (2016). Nous avons également considéré les différentes entrées dans l'algèbre (Squalli, 2000).

Un traitement de cet ensemble d'idées a été appliqué dans le but de le structurer, et non pas pour prétendre créer une nouvelle conceptualisation de l'algèbre ou de la pensée algébrique primitive, mais plutôt pour réduire les redondances et adapter la portée de la signification des termes retenus en divers contextes. Ce sera ainsi plus facile de s'y retrouver.

Voici donc, à partir des différentes sources consultées et du regroupement des mots-clés en tenant compte des diverses approches ou entrées dans l'algèbre, les catégories qui sont des indices de la présence de potentiel de développement de la pensée algébrique en général.

Nous avons ainsi établi six catégories à la fin du chapitre précédent : 1) valeur non précisée, 2) structure, 3) mode de représentation, 4) comparaison, 5) transformation et 6) généralisation.

Voici donc une première version de cette grille qui se présente en trois volets.

PRÉSENTATION DE LA GRILLE D'ANALYSE V.1 (en première version)

Volet A (tableau 3.1)

La question fait appel à l'idée de, ou évoque au moins l'un de ces éléments de façon claire:

Tableau 3.1 Précision des mots-clés pour sélectionner les items

MOTS-CLÉS	EXPLICATIONS ET EXEMPLES
Valeur non précisée	La catégorie « Valeur non précisée » est reliée au concept d'analyticité, qui est une caractéristique fondamentale d'une pensée algébrique (Squalli, 2000; Radford, 2014). Il s'agit de travailler avec une valeur non connue comme si elle était connue. Elle peut avoir une représentation algébrique ou quasi-algébrique. On garde dans cette catégorie l'idée d'indétermination mais pas celle de dénotation, qui a été placée dans la catégorie « mode de représentation ». Les expressions de notre liste qui évoquent cette idée de valeur non précisée sont : analyticité, grandeur, inconnue, paramètre, quantité, symbole, variable, ...;
Structure	Dans la catégorie « Structure », je me base sur les études de Kieran pour en cerner le sens : axiomes de corps, décomposition et recomposition de nombres, patterns où les différentes manières de dénombrer les éléments qui les composent correspondent à des décompositions de nombres, propriétés des nombres et des opérations, et les relations entre les opérations;
Mode de représentation	Dans « Mode de représentation », j'inclus les registres sémiotiques, la communication et les idées connexes: la dénotation, le langage naturel, les manipulables, la modélisation;
Comparaison	Sous la rubrique « Comparaison », je considère la mesure des quantités, les relations entre les données, les symboles relationnels (<, >, =) ou l'équivalent en langage courant, les grandeurs;
Transformation	Une rubrique concerne les « Transformations »; j'y inclus les fonctions (interprétation fonctionnelle des expressions ou

	programmes de calcul équivalents), la variation, la covariation, les opérations (arithmétiques, algébriques), l'application d'une règle, un calcul particulier, effectuer l'opération inverse;
Généralisation	Et finalement, il y a le terme « Généralisation », qui recouvre assez large : tout élargissement du contexte ou d'un contexte similaire, prise en compte d'invariants, besoin de justification, conjectures, décontextualisation, prédictions, situations problèmes, formules, patterns (par arrangement spatial, souvent selon une forme géométrique connue), patterns numériques et régularité (dans une suite de nombres), propriétés des nombres et des opérations, et les relations entre les opérations.

La cotation sera simplement « oui » ou « non » pour chaque catégorie de ce volet. Cependant, dans le but de soulever d'autres interrogations, ou pour se garder la possibilité d'aller plus loin dans l'investigation, on notera la façon dont l'item amène un travail sur la ou les catégorie(s) identifiée(s). Les mots-clés ne sont pas présentés selon une hiérarchie quelconque.

Le deuxième aspect (volet B) que nous voulons considérer au regard des énoncés s'adressant à l'élève, est un indice de mise à l'épreuve d'une conception, volet B.1, ou la présence de pièges classiques visant à faire émerger les erreurs bien connues, signalées dans la littérature, volet B.2 (Booth, 1984).

Volet B :

B.1 : Contexte qui permet de provoquer les erreurs classiques dues à des conceptions.

B.2 : Autres situations qui peuvent être source de difficultés chez les élèves.

Volet B.1

Mise à l'épreuve de la viabilité d'une conception.

La question vise-t-elle à ébranler une ou des conceptions de l'élève?

On répondra par oui ou non et on précisera laquelle si c'est le cas.

EXEMPLES DE CONCEPTIONS D'ÉLÈVES

*Tous les nombres impairs sont des nombres premiers. (2 est seul parmi une multitude!)

*Il y a toujours des exceptions à la règle, comme en français!

*Si c'est vrai pour un ou quelques cas particuliers, c'est vrai pour tous les nombres.

(La vérité : Un contre-exemple suffit pour établir que la règle est fausse!)

*Il ne peut y avoir qu'un nombre dans le membre de droite d'une égalité;

*Le « égale » signifie « ça donne » (le symbole d'égalité commande une réponse);

*On ne peut pas avoir un nombre suivi d'un « égale » comme 8 =, il n'y a pas de calcul à faire.

* Si j'obtiens $2 = x$, ça ne veut pas nécessairement dire que $x = 2$.

(Ils croient que le symbole d'égalité ne représente qu'un opérateur unidirectionnel qui produit une valeur de sortie du côté droit à partir d'une entrée du côté gauche au lieu de concevoir les trois propriétés d'une relation d'équivalence : réflexivité $a = a$, symétrie $a = b \;<=>\; b = a$ et transitivité $a = b \; et \; b = c$ alors $a = c$);

*Il ne peut pas y avoir une opération dans une réponse, comme une addition qui n'a pas été complétée, sinon ce n'est pas une réponse!

*Une lettre seule, ça ne peut pas être une réponse! Ce n'est même pas un chiffre!

(Ils se centrent sur la recherche de solutions particulières (et ne peuvent accepter une réponse où une opération n'a pas été effectuée. Ex.: *n*+4);

*Si je dois faire 28×43 je ne peux pas faire 43×28, ça ne donnera pas la même chose.

*Je pense que $2{\times}3 \;+\; 5{\times}3$ donne $2 + 5 \times 3 \times 3$.   ou * $3{\times}(2 + 5)$ donne $6 + 5 = 11$.

(Ici, ils ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité);

*Pour moi, 4m ça veut dire 4 mètres. / *Ça veut dire zéro car m ne vaut rien; ce n'est pas un chiffre. / *On a 4 dizaines et m unités.

(Ils ne comprennent pas l'usage des lettres en tant que généralisations de nombres - ou leur prêtent d'autres rôles.)

*$2x + 3x$ c'est quoi? 5xx ?

(ont de grandes difficultés à opérer sur des valeurs inconnues);

*J'ai 2 ans de moins que toi.   Mon âge moins 2 ?

(Ils n'utilisent pas de symboles mathématiques pour exprimer les relations entre les nombres; ils ont une connaissance algorithmique séquentielle des opérations à faire);

10 + ton portefeuille = 3 fois ton portefeuille
*10 + ton portefeuille = 3 fois ton portefeuille – ton portefeuille
10 + ton portefeuille = 2 fois ton portefeuille
*10 + ton portefeuille – ton portefeuille = 2 fois ton portefeuille
10 = 2 fois ton portefeuille
(Ils ne parviennent pas à comprendre que des transformations équivalentes des deux côtés d'une équation n'altèrent pas sa valeur de vérité. Et réciproquement, une transformation d'un seul côté à la fois crée 2 égalités fausses en cours de route!)

*$2x - 1 = x + 4$ Pas moyen d'isoler le x, il y en a deux!

(Brisure épistémologique (Filloy et Rojano, 1989) : plus d'une instance d'une même variable);

$2\frac{x}{3} = \left(\frac{2}{1} + \frac{x}{3}\right)$ vu comme un nombre fractionnaire $2\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\times3+1}{3} = \frac{7}{3}$

(Erreur liée à une rupture dans la notation entre l'arithmétique et l'algèbre.)

Volet B.2 –La situation pose-t-elle des difficultés particulières chez les élèves?

Si on répond oui, on précise laquelle ou lesquelles.

Lacunes en arithmétique

Ici encore, on attendra la réponse « oui » ou « non » pour le traitement principal des données. On ajoutera « Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles? » encore ici pour se donner des éléments supplémentaires sur lesquels réfléchir.

Rappelons que parmi les autres types de difficultés, il y a les rationnels, l'élément neutre, la multiplication et la division par un nombre entre 0 et 1, les différentes décompositions des nombres, les ordres de grandeur, le principe de conservation, la proportionnalité, le lien avec l'opération inverse, ce qui constitue une nouveauté (concept à apprendre par une situation problème), une représentation non standard ou un contexte non familier.

Lacunes en français (compréhension du problème).

Problème écrit (comprendre l'histoire écrite des valeurs et des relations entre elles et traduire en langage mathématique avant de pouvoir penser à résoudre);

En ce qui concerne l'usage de la lettre, Hitt affirme (dans Saboya, Bednarz et Hitt, 2015) que l'élève doit procéder à une genèse instrumentale de l'écriture algébrique en tant qu'artefact qu'il pourra éventuellement transformer en instrument, car il lui sera permis de faire des erreurs dans la construction de ses schèmes et de s'en rendre compte en développement son contrôle par sa sensibilité à la contradiction face aux résultats auxquels il ne s'attendait pas. Alors qu'il l'aura assez bien maîtrisé, on pourra maintenant le voir instrumentaliser ce langage pour l'utiliser judicieusement (et graduellement). Bref, il va apprendre de ses erreurs.

Volet C (voir tableau 3.2)

Tableau 3.2 Potentiel d'une question et intervention de l'enseignant (volet C)

POTENTIEL DE LA QUESTION **Peut-elle favoriser la mise en œuvre d'une pensée de nature algébrique? (analytique)**	**NATURE DE L'INTERVENTION DE L'ENSEIGNANT** **Quelle est la nature d'une l'intervention favorable de l'enseignant (interaction directe en classe)?**
•potentiel de niveau 2 -Une présence de pensée algébrique est nécessaire à la résolution attendue; on s'attend à ce que la question aide à développer cette pensée algébrique par l'activité mathématique qu'elle sollicite (potentiel autonome de la question).	Intervention de l'enseignant non nécessaire.
•potentiel de niveau 1 -l'énoncé favorise l'actualisation d'une pensée algébrique sans qu'elle soit absolument nécessaire à la résolution; il est possible de procéder autrement, par essais et erreurs.	S'assure par son intervention que les tâches sollicitées soient abordées selon le type d'activité anticipé. Questionne pour susciter la réflexion.
•potentiel de niveau 0 - l'énoncé est insuffisant pour solliciter une pensée algébrique.	Une intervention particulière de l'enseignant est indispensable pour qu'une pensée algébrique ait la chance d'émerger. On doit ajouter une question ou un contexte pour donner un potentiel à la situation.

Le troisième volet de notre grille d'analyse des items concerne le niveau de sollicitation d'une pensée de nature algébrique chez l'élève dans un item donné pour être en mesure d'y répondre adéquatement.

Voici la façon dont nous avons codé le niveau de sollicitation de la pensée algébrique par le texte ou par le défi posé.

2 Nécessaire à la résolution (ex.: 112^{e} pattern; problème « déconnecté »)

1 Il y a possibilité (ex.: 8^{e} pattern; problème « connecté »)

0 Avec intervention (ex.: besoin d'aide – questionnement de l'enseignant)

Nous conclurons qu'un item a un certain potentiel pour aider à développer la pensée algébrique de l'élève (sans intervention externe) s'il donne des valeurs non nulles à nos indicateurs. Lors du traitement des données, nous pourrons particulariser ce potentiel en vertu des informations spécifiques recueillies. Il est à noter que la cote 2 ne signifie pas que le problème est plus difficile; c'est seulement qu'il mobilise plus efficacement la pensée algébrique. De même, un problème de niveau 0 peut être difficile mais ne pas mobiliser la pensée algébrique.

La grille pourra évoluer suite à des boucles de rétroaction sur la cohérence des résultats obtenus par différents observateurs et on fera appel à une triangulation pour en valider les critères. Certains mots-clés pourront s'ajouter ou se voir modifiés en cas de disparité.

Nonobstant son état expérimental, l'utilisation de la grille permet déjà de porter un regard nouveau, plus éclairé et plus révélateur du potentiel de développement de la pensée algébrique chez les enfants du primaire par leur contact avec les items analysés.

La grille vise à porter un regard sur le potentiel des items proposés dans les manuels scolaires pour le développement de la pensée algébrique. Un début d'analyse viendra illustrer la grille présentée. Stylianides (2005) considère que les manuels scolaires exercent une influence importante sur les choix et la nature des activités réalisées en classe et constituent de ce fait le véhicule d'une étape non négligeable de la transposition didactique du savoir institutionnel.

Cette première version de la grille a été testée pour analyser les manuels Clicmaths du troisième cycle du primaire. Avant de s'attarder à cette grille, je présente dans la prochaine section les collections de manuels scolaires approuvées au Québec et le choix d'une de ces collections pour notre projet.

3.4 Présentation des manuels scolaires analysés

Il existe plusieurs manuels disponibles au primaire, mais si on veut une collection qui couvre l'ensemble des trois cycles[57] et qui a été approuvée par le ministère de l'Éducation, le choix se restreint à trois possibilités (voir tableau 3.3).

Tableau 3.3 Manuels scolaires qui couvrent l'ensemble du primaire

Allegro, mathématique 1er cycle © 2000 Lacasse, C. Les Éditions CEC inc. approuvé 28 mars 2002	Défi mathématique, 1er cycle © 2004 Lyons, M., Lyons, R. Les Éditions de la Chenelière inc. approuvé 18 mai 2004	Clicmaths, 1er cycle du primaire © 2001 Charest, D. et autres Éditions Grand Duc approuvé 23 avril 2002
Adagio, mathématique 2e cycle © 2002 Lacasse, C. Les Éditions CEC inc. approuvé 13 mars 2003	Défi mathématique, 2e cycle © 2003 Lyons, M., Lyons, R. Les Éditions de la Chenelière inc. approuvé 3 déc 2003	Clicmaths, 2e cycle du primaire © 2002 Guay, S. et autres Éditions Grand Duc approuvé 15 avril 2003
Presto, mathématique 3e cycle © 2004 Lacasse, C. Les Éditions CEC inc. approuvé le 15 février 2005	Défi mathématique, 3e cycle © 2005 Lyons, M., Lyons, R. Les Éditions de la Chenelière inc. approuvé 3 mars 2005	Clicmaths, 3e cycle du primaire © 2003 Guay, S. et autres Éditions Grand Duc approuvé 12 mai 2004

[57] Si un éditeur produit le matériel pour les 3 cycles, on peut penser qu'il a une vision globale du primaire et que le contenu de chaque niveau est bien ciblé dans l'ensemble du programme et de son matériel.

En raison du fait que la matériel Perspective au premier cycle du secondaire provient du même éditeur que la série Clicmaths, et ce sont les mêmes auteurs, j'ai choisi d'analyser cette collection de manuels scolaires au troisième cycle du primaire. On présume que les auteurs ont fait leur planification pour un passage cohérent sur l'ensemble du continuum primaire-secondaire. Il s'agit aussi de matériel approuvé par le MELS (le 27 février 2007).

On a le volume 1 et le volume 2 du manuel A de l'élève pour la première année du 3^{e} cycle (5^{e} année du primaire), et les volumes 1 et 2 du manuel B de l'élève pour la deuxième année du 3^{e} cycle (6^{e} année du primaire), donc 4 manuels pour le cycle complet. Certains items, en particulier ceux qui ne touchent que l'arithmétique de base, les statistiques, les probabilités ou la géométrie (avec peut-être quelques rares exceptions) devront être mis de côté car on cherche les items qui ont un certain potentiel pour développer la pensée algébrique chez l'élève. Les items qui seront conservés constitueront ce que j'appellerai l'« échantillon restreint ».

Les manuels Clicmaths sont organisés en étapes ainsi nommées par les auteurs des manuels. Chaque manuel est constitué de 2 étapes donc les 4 manuels du troisième cycle du primaire comportent 8 étapes en tout. Chaque étape est scindée entre 9 à 11 situations d'apprentissage (mini-chapitres ainsi nommés par les auteurs) numérotées selon l'ordre dans lequel elles apparaissent dans le manuel. Les auteurs identifient des situations d'apprentissage types et des situations particulières. En tout, 39 situations sont présentes dans chacun des 4 manuels. Les situations d'apprentissage types sont décrites par un titre qui précise le contenu mathématique qui va être traité dans la situation. Par exemple, Notion de pourcentage (situation 10, étape 2) ou Dallages (situation 24, étape 7). Les situations particulières sont de trois types, Carrefour, Labo et Le savais-tu? Chaque manuel contient 3 ou 4 situations Carrefour qui « amènent l'élève à développer ses compétences tant disciplinaires et transversales en réalisant des tâches intégratrices et signifiantes » (Clicmaths, manuel A1, 2^{e} page liminaire). Les pages laboratoires sont identifiés par un nom qui précise le contenu du laboratoire comme « Labo de la mesure » ou « Labo du hasard », les élèves sont amenés à expérimenter pour vrai avec des instruments appropriés soit des instruments de mesure ou des appareils générateurs de hasard. Chaque manuel présente un ou deux labos. Dans les situations « Le savais-tu? », l'élève prend connaissance d'un peu d'histoire ou d'aspects étonnants des mathématiques (Clicmaths, manuel A1, 2^{e} page liminaire).

Il y a une vingtaine de situations d'apprentissage types d'environ 10 pages dans chacun des 4 manuels, chacune composée de 3 temps d'apprentissage. Une situation-problème (nommée ainsi par les auteurs) de départ (préparation) est généralement suivie de 3 activités (réalisation) qui favorisent le développement de concepts et de processus liés à la situation-problème de départ. On termine la partie « réalisation » avec une rubrique « Je m'exerce » et une série d'exercices formant la section « Je m'entraîne ». En 3e partie (intégration et réinvestissement), on a un défi à relever dans la rubrique « Je suis capable » et on a ensuite la section « Je résous » qui propose une ou deux autres situations-problèmes. Une rubrique « Clic » résume le contenu et le vocabulaire vus dans la situation.

3.5 Mise à l'épreuve de la première grille d'analyse avec les manuels Clicmaths du troisième cycle du primaire

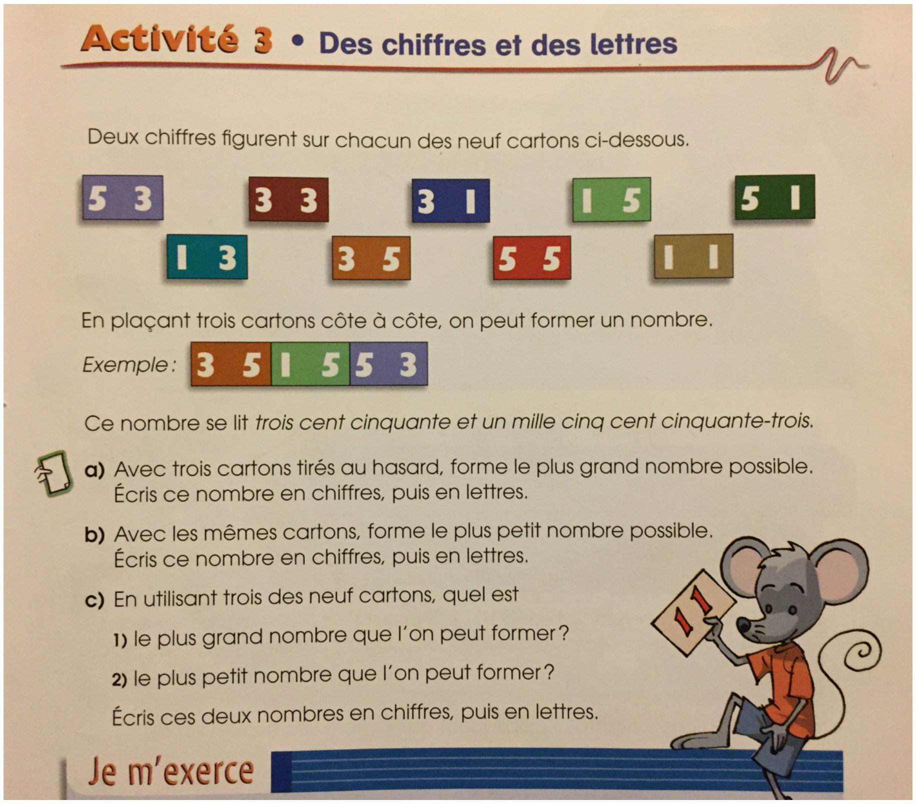
Dans cette section, nous proposons l'analyse de trois items (nous éviterons le terme situation pour ne pas causer de confusion) issus de cette collection de manuels scolaires.

Ces trois items ont été choisis parce que, à première vue, ils semblent présenter des éléments intéressants du point de vue du développement de la pensée algébrique et permettent d'entrevoir un travail sur les trois catégories du volet A de la grille.

3.5.1 Analyse d'un premier item : « Des chiffres et des lettres »

Cet item parle d'écriture numérique, fait intervenir la valeur de position, la comparaison, et fait appel à une certaine stratégie de généralisation. Elle est tirée du premier manuel Clicmaths de la cinquième année du primaire (A1) (figure 3.1).

Figure 3.1 « Des chiffres et des lettres »



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.15

En utilisant la grille d'analyse, nous faisons les constats suivants (tableaux 3.4, 3.5 et 3.6) :

VOLET A

Tableau 3.4 Analyse de l'item de la figure 3.1 (volet A) « Des chiffres et des lettres » avec la première grille

MOTS-CLÉS	ANALYSE DE L'ITEM
Valeur non précisée	il y a bien des chiffres sur les cartons, mais ils sont disjoints et n'ont pas le statut de nombres. Ce sont des paires de chiffres. On peut voir ces cartons comme une forme primitive de variables instanciées (contenants avec différentes paires de valeurs possibles où le domaine des valeurs est l'ensemble des paires de chiffres présents sur tous les cartons.)
Structure	la formation des nombres donne des valeurs spécifiques aux chiffres selon leur position. Le fonctionnement de la valeur de position

	constitue une régularité. Il y un passage non évident entre une série de 3 cartons accolés et l'interprétation et le traitement des symboles numériques alignés et contenant des espaces pour reconstituer un nombre à 6 chiffres.
Mode de représentation	non standard, cartons symboliques, chiffres, nom des nombres à 6 chiffres.
Comparaison	plus grande et plus petite valeurs des arrangements possibles de 3 cartons spécifiques. Idem pour 3 cartons parmi tous.
Transformation	la permutation des cartons cause un changement de valeur de la configuration.
Généralisation	il y a $9 \times 8 \times 7$ possibilités de nombres, donc une généralisation est nécessaire pour trouver un critère, une stratégie pour trouver le plus petit résultat et le plus grand. C'est en fait un problème d'optimisation avec système sémiotique à apprivoiser.

VOLET B

B.1 Mise à l'épreuve de la viabilité d'une conception, pièges classiques.
La question vise-t-elle à ébranler une ou des conceptions de l'élève?
Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?
B.2 La situation pose-t-elle des difficultés particulières chez les élèves?
Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?

Tableau 3.5 Analyse de l'item de la figure 3.1 (volet B) « Des chiffres et des lettres »

B.1 conception ?	
B.2 difficulté ?	•Il y a des espaces vides entre les chiffres du nombre. Les espaces ici ne séparent pas des nombres ni des classes de 3 chiffres, mais des groupes de 2 chiffres, sauf aux extrémités du nombre. Ceci pourrait questionner la compréhension de la valeur de position car il y a des positions vides et on n'a pas l'espace habituel pour séparer la classe des milliers. •Lacune possible en arithmétique: valeur relative de nombres à 6 chiffres (algorithme de comparaison de gauche à droite).

VOLET C

Tableau 3.6 Analyse de l'item de la figure 3.1 (volet C) « Des chiffres et des lettres »

Niveau de sollicitation de la pensée algébrique : 2 (nécessaire)
La question oblige à inventer une règle générale et une relation d'ordre pour comparer les 504 nombres possibles de façon abstraite. La stratégie que l'élève aura à mettre au point consistera à trouver le carton qui a le plus grand chiffre à gauche. S'il y en a plus d'un, il devra choisir parmi ceux-ci celui qui présente le plus grand chiffre à droite. Il devra ensuite répéter cette procédure deux fois pour choisir les 2 autres cartons. Démarche semblable pour trouver le plus petit nombre.

Remarque: on a souligné le fait que si un élève maîtrise la relation d'ordre entre les nombres à 6 chiffres, il n'aura pas à déployer une stratégie de généralisation pour trouver la plus grande combinaison. On pourrait cependant penser qu'il n'a vu que des nombres complets dans le format habituel. Nonobstant la possibilité que l'élève soit plus avancé, le potentiel de la question pour la création d'une stratégie opérationnelle est tout de même présent.

Ainsi, on a détecté un potentiel de développement de la pensée algébrique par l'utilisation de la grille. Dans le volet A, nous avons trouvé la possibilité d'associer chacune des catégories au problème.

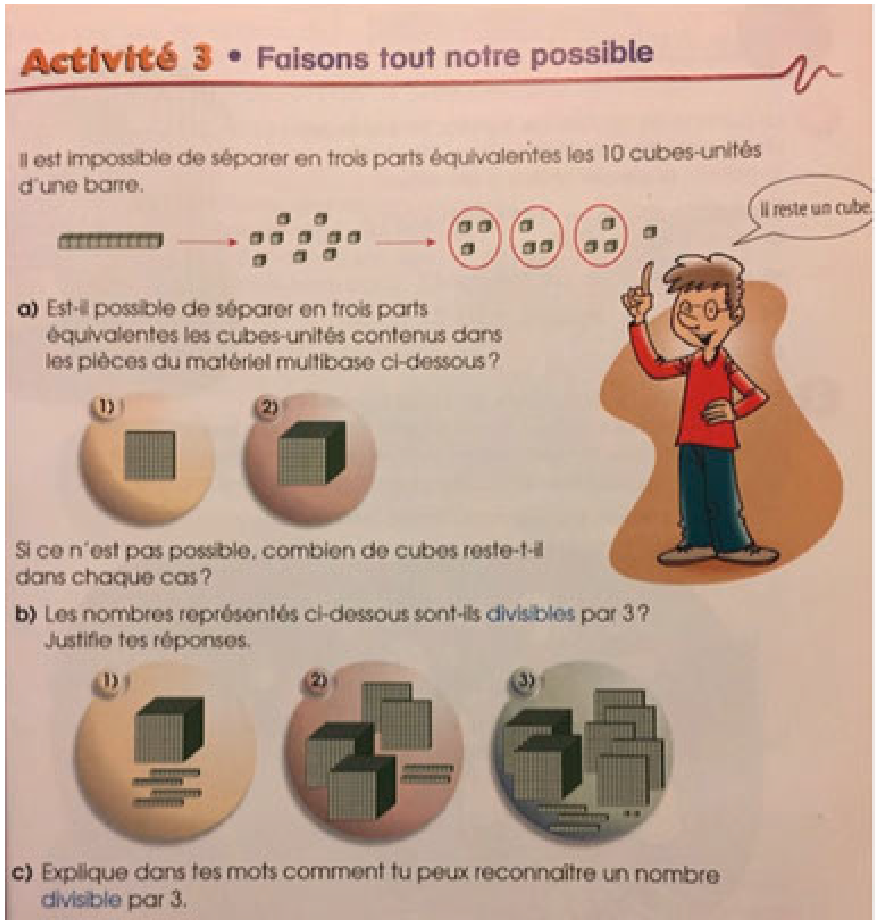
Pour le volet B, la représentation non standard peut facilement entraîner des erreurs liées à un conflit avec les façons dont l'élève est habitué de voir les nombres.

Le volet C confirme la présence d'un besoin de généralisation.

3.5.2 Analyse d'un deuxième item : « Faisons tout notre possible »

La deuxième situation (figure 3.2) réfère à la représentation des nombres à l'aide de matériel multibase. L'activité vise à faire comprendre certains faits à propos de la divisibilité par le nombre 3. On fait appel à la structure des nombres.

Figure 3.2 « Faisons tout notre possible »



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.37.

L'utilisation de la grille d'analyse (tableaux 3.7, 3.8 et 3.9) nous amène aux constats suivants :

VOLET A

Tableau 3.7 Analyse de l'item de la figure 3.2 (volet A) « Faisons tout notre possible » avec la première grille

MOTS-CLÉS	ANALYSE DE L'ITEM
Valeur non précisée	en b) on incite à caractériser la classe des nombres divisibles par 3 à partir des observations faites en a)
Structure	configuration des blocs multibase, reflet du système de numération à base 10. Concept de reste après division de type partage égal.

Mode de représentation	ostensifs (évoqués sur papier), numérique, modèle mental (les blocs ne sont pas concrètement découpés en parts plus petites).
Comparaison	Sauf les unités, chaque objet en représente 10 de niveau inférieur.
Transformation	changement dans la configuration du matériel pour compter les restes
Généralisation	recherche d'une formulation du critère de divisibilité par 3

VOLET B (voir tableau 3.8)

La question vise-t-elle à ébranler une ou des conceptions de l'élève?

Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?

B.2 La situation pose-t-elle des difficultés particulières chez les élèves?

Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?

Tableau 3.8 Analyse de l'item de la figure 3.2 (volet B) « Faisons tout notre possible » avec la première grille

B.1 conception ?	
B.2 difficulté ?	Aperçu d'un concept d'arithmétique modulaire. On va devoir additionner les restes des instances de puissances différentes, ce qui est nouveau et un peu mystérieux. Le fait que la reconfiguration des blocs ne se fait pas concrètement par échanges (un bloc remplacé par 10 plaques, une plaque remplacée par 10 bâtons, et un bâton remplacé par 10 petits cubes unités) peut causer une confusion.

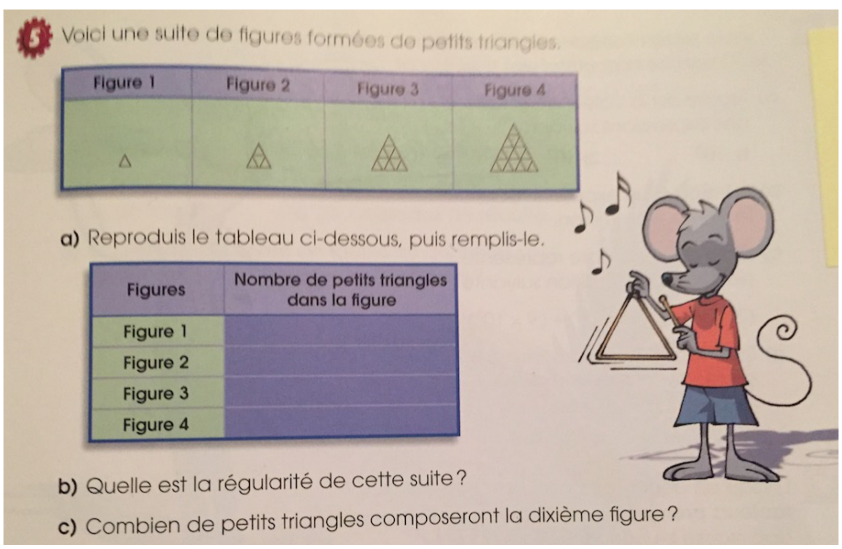
Tableau 3.9 Analyse de l'item de la figure 3.2 (volet C) « Faisons tout notre possible » avec la première grille

Niveau de sollicitation de la pensée algébrique : 2 (nécessaire)
La formulation de la question oblige de faire appel à un invariant essentiel et à faire abstraction du « reste ». On doit ensuite généraliser pour formuler la règle en notant que l'ensemble de tous les restes doit être divisible par 3. Or il reste exactement un bloc unité pour chaque morceau. Le nombre de morceaux de chaque sorte correspond au chiffre à une position donnée dans le nombre à base 10. On en conclut que la somme des chiffres doit se diviser par 3 pour que le nombre se divise par 3.

3.5.3 Analyse d'un troisième item : suite de figures formées de petits triangles dans des grands triangles

Ce troisième item présente une suite de figures présentées sous forme de petits triangles (figure 3.3). Dans la première question a), l'élève doit remplir un tableau dans lequel il comptabilise sur les figures dessinées le nombre de petits triangles composant chacune des figures. La question b) amène l'élève à repérer la régularité d'après les nombres écrits dans le tableau. Dans la troisième question, l'élève s'appuie sur la régularité identifiée pour trouver le nombre de triangles dans la dixième figure.

Figure 3.3 La suite de petits triangles



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.117.

Voici l'analyse de cet item selon les différentes catégories répertoriées (tableau 3.10) :

VOLET A

Tableau 3.10 Analyse de l'item de la figure 3.3 (volet A) « La suite de petits triangles » avec la première grille

MOTS-CLÉS	ANALYSE DE L'ITEM
Valeur non précisée	nombre dans la 10e figure.
Structure	Observation de l'évolution de la suite de figures
Mode de représentation	figural (statique)
Comparaison	
Transformation	
Généralisation	On pourrait trouver la réponse par généralisation factuelle ou contextuelle[58] (ou itérative). On peut aussi reconnaitre la suite numérique des carrés des naturels positifs, ça serait alors purement arithmétique (induction naïve selon Radford, 2006). Il est aussi possible de dessiner la 10e figure et compter.

Bien que les problèmes avec des suites de figures présentent un intérêt certain pour le développement de la pensée algébrique, ils doivent néanmoins solliciter une pensée analytique d'une certaine façon. Ici, il est trop facile de répondre à la question par d'autres moyens.

VOLET B

B.1 La question vise-t-elle à ébranler une ou des conceptions de l'élève?

Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?

B.2 La situation pose-t-elle des difficultés particulières chez les élèves?

Si c'est le cas, laquelle ou lesquelles?

B.1 conception ? Aucun défi de ce côté.

---

[58] Voir « Généraliser pour trouver une formule » dans le cadre conceptuel.

B.2 difficulté ? Aucun défi de ce côté.

VOLET C

Niveau de sollicitation de la pensée algébrique : 1

On ne demande pas de trouver la configuration suivante et de comparer ou de trouver un invariant et un nombre qui varie. On ne cherche pas à mettre en relation la position ordinale de la figure avec son contenu.

Cette situation n'est pas exploitée optimalement car l'élève peut très bien en ressortir sans avoir effleuré la moindre pensée algébrique. Le tableau en (a) crée la première série de données en numérotant les figures, ce qui rend presque évident le lien entre la position ordinale et le nombre de petits triangles. Une façon de rendre la tâche plus exigeante serait de faire compter les segments formant les petits triangles (au lieu des triangles) sans compter deux fois le même. On pourrait aussi faire compter les triangles, quelle que soit leur grosseur (gros défi). On pourrait aussi faire travailler sur la suite des différences pour avoir un potentiel de généralisation.

Suite à ces analyses, nous avons procédé à une nouvelle triangulation avec un échantillon de questions prises au hasard, pour voir si la stabilité pouvait être améliorée. Cela a permis des comparaisons au besoin pour s'entendre à propos de détails particuliers d'interprétation. Nous croyons que notre nouvelle grille a maintenant un bon ajustement et pourrait servir pour analyser d'autres objets curriculaires, du Québec ou d'ailleurs.

Dans le prochain chapitre, nous allons appliquer la nouvelle grille à l'ensemble des items que nous aurons retenus dans les manuels, ayant un potentiel pour aider au développement de la pensée algébrique au primaire.

Mentionnons que nous avons aussi introduit l'appellation « algèbre primitive » pour la distinguer des conceptualisations antérieures de l'EA sur lesquelles se sont basées les tentatives d'introduction de l'algèbre au primaire, de façon générale, avec des prescriptions particulières concernant la lettre, ou avec l'accent mis sur un seul aspect. Nous considérons le champ d'enseignement et d'apprentissage en algèbre primitive libre de toute contrainte, moyennant la prise en compte des recommandations énoncées suite aux études qui ont obtenu des résultats remarquables et prometteurs. Nous nous distinguons du courant qui est centré sur les différences conceptuelles entre l’arithmétique et l’algèbre et qui définissent la EA avec cette caractéristique. Nous gardons une vision qui est ouverte a priori à toutes les formes d’intervention au primaire, du moment qu’elles ont eu des résultats positifs par le passé. Et pour mieux en parler, il nous faut aborder notre deuxième version de la grille d’analyse. Bien que cette première grille semble assez bien remplir son mandat, la triangulation nous a amenés à faire quelques modifications car il y avait des recoupements entre certaines catégories de la grille.

3.6 Évolution de la grille d'analyse

Après avoir retravaillé les catégories pour venir à bout d'une divergence d'interprétation concernant les mots-clés « Mode de représentation » et « Valeur non précisée », nous les avons regroupés car l'un concerne des objets à représenter (inconnues, etc.) et l'autre concerne la façon de les représenter. Nous avons retenu « Mathématisation/Modélisation » pour cette nouvelle catégorie. Nous avons aussi fusionné les trois catégories suivantes : « structure », « comparaison » et « transformation ». La simple comparaison ne nous semblait pas un critère suffisant pour parler de pensée algébrique et la constatation de la présence d'une structure ne suffisait pas non plus. Nous avons opté pour la terminologie « Action sur une structure » qui nous apparaît plus précise et permet d'inclure ces 3 catégories dans une catégorisation plus englobante. Nous en sommes arrivés à une deuxième version de la grille, soit celle qui a été présentée sur une affiche au GDM (Boissinotte, 2019). Les descripteurs ont été choisis et reformulés en termes d'actions attendues de l'élève. Dans les critères de sélection des unités d'analyse, on retrouve maintenant des manifestations d'activité mathématique susceptibles de mobiliser une pensée algébrique. Les catégories ne sont pas parfaitement disjointes mais il ne s'agit pas vraiment ici de partitionner l'ensemble des items retenus; ce n'est pas vraiment utile. Le fait qu'ils soient retenus est déjà un résultat.

Je me réserve donc la possibilité d'indiquer la présence de plus d'une catégorie quand ce sera le cas. Normalement, on parlera de pensée algébrique si la pensée analytique fait appel à une notation algébrique pour s’exprimer (Kieran, 1989, p.165 renumérotée 171). Or, en contexte d’algèbre primitive, on accepte que l’expression soit un peu plus rudimentaire en comprenant que la pensée algébrique est en voie de formation.

Nous avions besoin de critères d'inclusion des questions dans l'échantillon restreint qui font qu'on perçoit un certain potentiel pour le développement de la pensée algébrique chez l'élève.

Voici les catégories retenues pour la sélection des items selon la nature de l'activité mathématique sollicitée (résumé) pour le volet A de la grille :

Mathématisation/Modélisation de situations

L'élève est appelé à exprimer une situation de façon qui permet/favorise/est compatible avec une activité mathématique à caractère algébrique.

Dans un sens général, on modélise pour avoir une représentation simplifiée (plus décontextualisée) pour comprendre et prédire, pour analyser des phénomènes réels ou mathématiques. Dans le contexte qui nous intéresse, l'enseignement au primaire, on est un peu moins ambitieux.

Dans le PFEQ du primaire : « Modéliser la situation-problème » est cité comme une composante de la compétence « Résoudre une situation-problème mathématique » (p.16). Sinon, on ne voit le mot modéliser qu'à la page 6 où on dit que l'élève apprend à modéliser. Dans la PDA, p.11, on dit que l'étude des régularités permet de construire des modèles. On en apprend un peu plus dans le programme du secondaire sur la vision ministérielle de la modélisation.

Dans le PFEQ du secondaire: «... modéliser des situations par la construction de formules, d'algorithmes ou de graphiques ou par le passage de l'un à l'autre. » (p.16): « ...produit des expressions symboliques (équations, inéquations, systèmes ou fonctions) servant à modéliser des relations entre des quantités. Il représente les relations qui existent entre les éléments d'une situation à l'aide du langage courant, du symbolisme, d'un graphique ou d'une table de valeurs. » (p.40)

Différents exemples de tâches peuvent être envisagés dans cette première catégorie[59]:

[59] Extrait de la grille présentée au GDM en 2019, légèrement modifié.

- Symboliser avec des signifiants déterminés (conventionnels ou non);
- Représenter dans un autre registre permettant un traitement symbolique;
- Schématiser les relations entre les données d'un problème déconnecté;
- Écrire ou Interpréter une expression qui représente une structure d'un problème ou d'une situation;
- Comparer (inégaIité, égaIité, établir l'équivalence).

Travail de généralisation:

On voudrait que l'élève puisse étendre un résultat à un domaine plus large. Par exemple, montrer que les propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité; existence d'un élément neutre, opposé, inverse, absorbant) ou des nombres (comme la parité) ne se limitent pas à des cas particuliers. Il peut s'agir aussi d'exprimer une solution générale à un problème qui ne demandait qu'une solution particulière. Trouver un terme général en étudiant les régularités dans les suites de nombres ou de figures est aussi un exemple.

Voici quelques exemples de l'activité qui peut être sollicitée dans cette catégorie:

- Découvrir et valider une loi, une formule, un algorithme, une propriété d'opérations ou de relations ou de nombres;
- Établir une conjecture; justifier, prouver;
- Exprimer l'aboutissement d'un processus de généralisation par une généralité (règle d'une suite après sa découverte; codage d'une loi qui a été exprimée en idée; exemple générique, nombre généralisé).

Action sur une structure:

L'élève devrait manipuler une représentation par traitement ou conversion.

Structure (Larousse): organisation des parties d'un système, qui lui donne sa cohérence et en est la caractéristique permanente.

Ma définition: schéma (explicité ou non) des relations entre les composantes d'un ensemble, plus particulièrement dans le cas d'une phrase mathématique.

Voici quelques exemples de tâches qui peuvent être dans cette catégorie:

- modifier la forme pour obtenir un signifié syntaxique différent mais une même dénotation (par exemple pour le calcul mental ou pour changer l'ordre de calcul - parenthèses, distributivité) ou pour réaliser une étape de traitement (en agissant sur les inconnues comme si elles étaient connues);
- calculer pour obtenir une forme simplifiée (ou réponse);
- faire varier un élément dans une expression ou relation;
- traiter ou convertir une expression ou une relation (au sens de Duval);
- discuter des opérations sans attention particulière aux valeurs des opérandes;
- interpréter une expression ou une relation (égalité, inégalité - vision globale ou locale).

Ces catégories peuvent prendre place dans les 5 champs mathématiques identifiés par le programme de formation de l'école québécoise du primaire : arithmétique, mesure, géométrie, probabilités et statistiques.

Les volets B et C sont les mêmes que ceux de la première version de la grille.[60]

Rappel : Au volet B, pour caractériser un peu plus les tâches, on vérifie si elles font appel à un travail sur les conceptions, les erreurs et/ou les difficultés répertoriées par la recherche.

Le volet C est celui où l'on observe si les questions ont un potentiel suffisant pour faire développer la pensée algébrique chez l'élève, sans intervention de l'enseignant ou si, au contraire, l'intervention de l'enseignant est souhaitable ou même indispensable. On élabore au besoin pour suggérer la nature de l'intervention souhaitable.

Les items peuvent être des exercices, des problèmes ou autre. Chaque numéro des sections « Je m'entraîne » et « Je résous », chaque « situation-problème », « Je m'exerce », « Je suis capable » et « Activité » est normalement considéré comme un seul item car même s'il y a des sous-questions, celles-ci font partie d'une démarche dont les éléments perdent leur sens s'ils sont séparés ou consistent parfois en plusieurs instances d'un même travail (ex.: 4 multiplications à

[60] On avait aussi l'intention d'indiquer si la question touche aussi l'arithmétique ou est spécifique à la pensée algébrique. Or, selon la conceptualisation de l'algèbre adoptée, on peut considérer que tout élément de l'arithmétique est une instance d'un élément de l'algèbre qui le généralise. De même, tout élément de l'algèbre peut trouver une instanciation arithmétique. Dans ce cas, cette précision était à revoir car elle véhicule l'idée des discontinuités ou de fausses continuités. Nous avons laissé tomber cet aspect qui n'apportait pas d'éclairage réel.

effectuer). Cette nouvelle façon de considérer les items a amené à recommencer l'analyse des quatre manuels.

3.6.1 Version 2.3 de la grille

Après quelques séries de rétroactions, la grille a finalement évolué vers celle-ci (tableaux 3.11, 3.12 et 3.13). Comme avant, elle se décline en trois volets.
Cette grille a été utilisée pour analyser les 4 manuels scolaires Clicmaths.

VOLET A

Pour chacune des trois catégories, nous avons identifié des exemples d'actions d'élèves et des caractéristiques des opportunités favorisant le développement de la pensée algébrique primitive issus des chercheurs (voir chapitre II).

A.1 MATHÉMATISATION/MODÉLISATION

Tableau 3.11 Exemples d'actions et opportunités dans « Mathématisation/Modélisation »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
Production (ou l'interprétation) d'une expression arithmétique, algébrique ou quasi-algébrique; d'une égalité, d'une inégalité (ou une relation d'ordre), d'une équation ou d'une inéquation ou d'un schéma qui représente les relations (comparaisons) entre les données décrites dans l'item.[61]	On a un problème écrit ou présenté autrement mais avec au moins une opération ou une comparaison en jeu et le mode de présentation n'est pas assez explicite pour permettre un traitement immédiat (par calcul ou transformation).
Création d'une représentation autre que celles nommées ci-haut, et qui est susceptible de faciliter le traitement mathématique (avec des symboles conventionnels ou non, des schémas, des diagrammes de Venn, des tableaux, une droite numérique, des graphiques, un plan cartésien, une fonction, un modèle intra-mathématique ou extra-mathématique, une structure).	Étude d'une variation, d'une covariation ou d'une simulation d'une situation réelle. On donne des relations entre des valeurs ou quantités connues ou inconnues.

[61] Commentaire: La création d'un tel objet mathématique structuré par l'élève est une mathématisation ou une modélisation et se distingue de la troisième catégorie (Action sur une structure) qui implique la modification d'une structure et non la simple variation d'un paramètre, comme il est possible de le faire dans un modèle.

Description d'une régularité dans une suite. (ex.: alternance +4 -10).	Recherche d'un terme particulier d'une suite de nombres (obtenue ou non à partir de figures), en le comparant avec quelques termes voisins.
Recherche d'un nombre manquant ou d'un symbole d'opération qui rend une égalité vraie.	Problème avec donnée manquante ou imprécise.

A.2 GÉNÉRALISATION

Tableau 3.12 Exemples d'actions et opportunités dans « Généralisation »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
Généralisation d'une solution dans un domaine d'interprétation ou d'application plus étendu ou plus général que celui présent dans l'item ou dans la solution de base (ex.: périmètre d'un polygone régulier à n côtés). forme de la partie décimale d'un nombre	On veut créer une formule pour calculer dans une classe de problèmes de même structure. On demande de généraliser une solution. Des quantités génériques se retrouvent dans une réponse finale.
Expression d'une généralité par un exemple générique ou par l'utilisation de nombres généralisés au moyen de lettres ou de symboles (ex.: $2+0=2$; $n+0=n$). Travailler avec des propositions vraies ou fausses ou incomplètes (comme Carpenter).	La commutativité ou d'autres propriétés des opérations (associativité, distributivité, élément neutre, opposé, inverse, absorbant) sont abordées dans des cas particuliers et on veut les établir dans le cas général;
- Expression d'une loi, d'une règle, d'un algorithme, d'une formule, d'une relation entre les nombres; - Établissement d'une conjecture, justification, preuve;. (ex.: la somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire).	On demande de montrer si quelqu'un qui a affirmé un fait mathématique a raison ou tort. Il est question de critères de divisibilité; de parité; de substituer des nombres aux lettres pour chercher un contre-exemple ou pour augmenter la confiance dans une conjecture. -Avoir à tester en substituant des nombres aux lettres (fixer),
- Production d'une généralisation algébrique (factuelle, contextuelle, symbolique) du terme général d'une suite (ex.: nombres polygonaux).	On demande de verbaliser une régularité de différentes façons pour trouver un invariant (principalement dans des suites de nombres ou de figures). On veut décontextualiser; prédire. On recherche des ressemblances et des différences, des liens entre les attributs des objets.

A.3 ACTION SUR UNE STRUCTURE

Tableau 3.13 Exemples d'actions et opportunités dans « Action sur une structure »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
Description d'un ensemble fermé de compositions ou de relations (avec une vision globale d'une expression ou d'une égalité où c'est la structure qui détermine les actions de l'élève). Évocation de termes, de facteurs, de parenthèses et d'opérations.	Avoir à faire un calcul d'expressions arithmétiques élaborées ou la simplification d'expressions algébriques.
Utilisation de la structure pour identifier ou produire des nombres qui admettent une certaine expression,	Exprimer ou obtenir des produits d'une structure (ex.: les nombres impairs 2n+1, les multiples...). Relation fonctionnelle. Programmes de calculs à comparer.
Différenciation du calcul avec des nombres (abstraits) et des quantités (valeurs concrètes connues ou non). Utilisation des données d'un tableau pour trouver d'autres valeurs (interpolation, extrapolation par graphique).	Travail avec des grandeurs ou quantités (taux unitaire, vitesse). Résoudre l'équivalent d'une équation algébrique « modèle » (calculer la quatrième proportionnelle). Variation donnée dans un tableau, par un graphique gradué ou non.
Action de faire varier un élément dans une expression ou relation fonctionnelle; ou une répartition;	L'établissement de liens entre les variations; calcul vitesse-temps-distance .
Modification d'une forme (en agissant de la même manière sur les quantités inconnues et celles qui sont connues), à l'aide des priorités et des propriétés des opérations (par calcul réfléchi, factorisation, regroupements); •pour obtenir un signifié syntaxique différent (ou pour faire une comparaison pour établir une identité) sans changement de la dénotation ou •pour la réalisation d'une étape de traitement (notamment pour obtenir des équations équivalentes successives pour résoudre une équation ou obtenir une identité, pour faire un calcul mental plus efficace).	Avoir à faire évoluer une expression ou un calcul (mental ou écrit) ou une équation vers une version finale (simplifier, résoudre) ou plus adéquate au contexte. Faire passer de la notation fractionnaire à un pourcentage ou un nombre à virgule et vice versa; Passer à l'opération réciproque; Dénombrer de différentes façons; Produire des calculs préalables à une généralisation.

Les volets B et C de la grille permettent des caractérisations additionnelles des items.

(voir section 3.3 - pas de changement)

3.6.2 Opérationnalisation de la deuxième version (2.3) de la grille d'analyse

Reprenons les 3 exemples analysés avec la première grille pour les analyser avec la nouvelle grille. Comme le volet A est le seul qui a été modifié, vous pouvez vous référer à l'analyse initiale, section 3.5.1 et suivantes pour les autres volets. Ils ne seront pas repris ici.

Premier exemple analysé : Des chiffres et des lettres, manuel A1, p.15, situation 2, activité 3 (voir figure 3.1)

Rappelons qu'il s'agit d'utiliser une représentation non institutionnelle, pour comparer des nombres, basée sur des cartons comprenant 2 chiffres disjoints.

Volet A : cet item se situe dans deux catégories

Action sur une structure

Généralisation

JUSTIFICATION

Il s'agit de former et de comparer des nombres à 6 chiffres en utilisant des cartons où apparaissent 2 chiffres séparés. Ceci induit une structure inhabituelle pour agir sur les nombres (paires de chiffres au lieu de nombres avec dizaines et unités) et pour les représenter par classes de 2 au lieu de 3, bien que l'exemple nous dise de le lire normalement. Une généralisation sera nécessaire pour avoir une relation d'ordre sur l'ensemble des possibilités.

Deuxième exemple analysé : Faisons tout notre possible, manuel B1, p.37, situation 5, activité 3, « Faisons tout notre possible » (voir figure 3.2).

Il s'agit d'observer les restes après division par 3 des puissances de 10 à partir de dessins de blocs multibases et en déduire un critère général de divisibilité.

Volet A : cet item se situe dans deux catégories :

Action sur une structure

Généralisation

JUSTIFICATION

Il faut observer qu'il reste toujours un bloc-unité après division entière des puissances de 10 considérées. Les divisions constituent une action (mentale) sur la structure des blocs. Une généralisation sera nécessaire pour conclure au critère de divisibilité par 3.

Troisième exemple analysé : Suite de figures formées de petits triangles, manuel A1, p.117, situation 15, n° 5, section « Je m'entraine » (voir figure 3.3).

On cherche la régularité d'une suite pour prévoir un terme pas très éloigné (le 10e).

Volet A

Mathématisation/Modélisation

JUSTIFICATION

Compléter le tableau avec les 4 premiers nombres carrés à partir des figures est une tâche triviale. L'élève a aussi été familiarisé avec ces nombres dans plusieurs activités de la situation 15 (p.112, p.113, p.115). Il n'a même pas à imaginer ce à quoi la 10e figure ressemble. Il n'y a aucune action à faire sur la structure ni de généralisation autre qu'une itération naïve. On peut rappeler la classification de Radford à la figure 3.4.

Figure 3.4 Niveaux de la pensée algébrique selon Radford

Naïve Induction	**Generalization**			
Guessing	Arithmetic	Algebraic		
(Trial and Error)		Factual	Contextual	Symbolic

3.7 Processus d'analyse

Quand nous avons été satisfaits de cette version de la grille, nous avons pu recommencer à travailler sur le corpus. Les quatre manuels de la collection Clicmaths du troisième cycle du primaire ont été parcourus, chacun des items a été lu et ceux qui correspondaient à au moins une catégorie du volet A de la grille ont été retenus.

Avec la première version de la grille, lorsqu'un problème, une activité ou autre avait des sous-questions, chacune des sous-questions a été comptabilisée comme un item.

Or nous avons constaté que dans le cas des sous-questions, chacune prise individuellement perd son sens ou encore que les sous-questions consistent en une série de questions pratiquement identiques, même si elles sont indépendantes (comme 4 multiplications à faire).

Avec la nouvelle version de la grille, les items ont été redéfinis sans considérer séparément les sous-questions, ce qui a permis d'attribuer globalement chaque item à une ou plusieurs catégories.

Les données ont ensuite été compilées dans un document tableur (feuille de calcul) selon un modèle qui se compare à une base de données. Chaque ligne représente un item, avec le code du manuel concerné (A1, B1, etc.), le titre de l'item, son numéro et le numéro de page, son classement en termes de potentiel (0, 1 ou 2), le critère qui lui avait permis de se qualifier dans une catégorie de l'échantillon restreint, les informations qualitatives comme les conceptions ou difficultés particulières, les suggestions pour améliorer le niveau de sollicitation de la pensée algébrique, l'importance à moyen terme de l'item dans la progression des apprentissages et les développements à long terme des idées dans la progression du secondaire. (Voir annexe C pour un exemple.)

3.7.1 Portrait des items retenus pour les quatre manuels

Le tableau 3.14 présente la distribution de l'échantillon restreint dans chaque situation et dans chacune des étapes.

Tableau 3.14 Nombre d'items analysés dans chaque situation[62]

Clicmaths 5e année, manuel A, volume 1 73 items retenus/229		Clicmaths 5e année, manuel A, volume 2 108 items retenus/229		Clicmaths 6e année, manuel B, volume 1 84 items retenus/234		Clicmaths 6e année, manuel B, volume 2 79 items retenus/210	
Étape 1	27	Étape 3	46	Étape 5	48	Étape 7	28
Situation 1	1	Situation 20	12	Situation 1	12	Situation 20	5
Situation 2	10	Situation 21	5	Situation 2	7	Situation 21	7
Situation 3	6	Situation 22	12	Situation 3	0	Situation 22	13
Situation 4	0	Situation 23	0	Situation 4	1	Situation 23	0

[62] Les auteurs ont choisi le mot « situation » simplement pour désigner des sections du livre.

Situation 5	0	Situation 24	4	Situation 5	18	Situation 24	1
Situation 6	6	Situation 25	10	Situation 6	6	Situation 25	0
Situation 7	4	Situation 26	1	Situation 7	3	Situation 26	2
Situation 8	0	Situation 27	1	Situation 8	0	Situation 27	0
Situation 9	0	Situation 28	1	Situation 9	1	Situation 28	0
Étape 2	46	Étape 4	62	Étape 6	36	Étape 8	51
Situation 10	3	Situation 29	15	Situation 10	15	Situation 29	19
Situation 11	2	Situation 30	13	Situation 11	5	Situation 30	9
Situation 12	3	Situation 31	6	Situation 12	1	Situation 31	3
Situation 13	0	Situation 32	0	Situation 13	0	Situation 32	0
Situation 14	9	Situation 33	1	Situation 14	5	Situation 33	0
Situation 15	14	Situation 34	5	Situation 15	5	Situation 34	2
Situation 16	9	Situation 35	2	Situation 16	2	Situation 35	11
Situation 17	1	Situation 36	6	Situation 17	0	Situation 36	1
Situation 18	2	Situation 37	2	Situation 18	0	Situation 37	4
Situation 19	3	Situation 38	11	Situation 19	3	Situation 38	0
		Situation 39	1			Situation 39	2
TOTAL A1	73	TOTAL A2	108	TOTAL B1	84	TOTAL B2	79

3.7.2 Items non retenus

Certains items, en particulier ceux qui ne touchent que des calculs directs, la statistique, la probabilité ou la géométrie ont été presque toutes mises de côté car on cherche les questions qui ont un certain potentiel pour développer la pensée algébrique chez l'élève, et l'application de la grille ne nous a pas permis de retenir beaucoup d'items dans ces champs mathématiques. Rappelons que les questions qui sont conservées constituent l'« échantillon restreint ». Il n'est pas exclu qu'une question dans le champ de la statistique ou de la géométrie soit retenue quand même, si son énoncé est favorable au développement de la pensée algébrique.

Exemple d'item non retenu

En ce qui concerne les questions non retenues, je donne cet exemple: (3 questions) Manuel A1, p.45, section « Je m'exerce ».

Voici 3 mots associés au cercle. Selon toi, que signifient-t-ils?

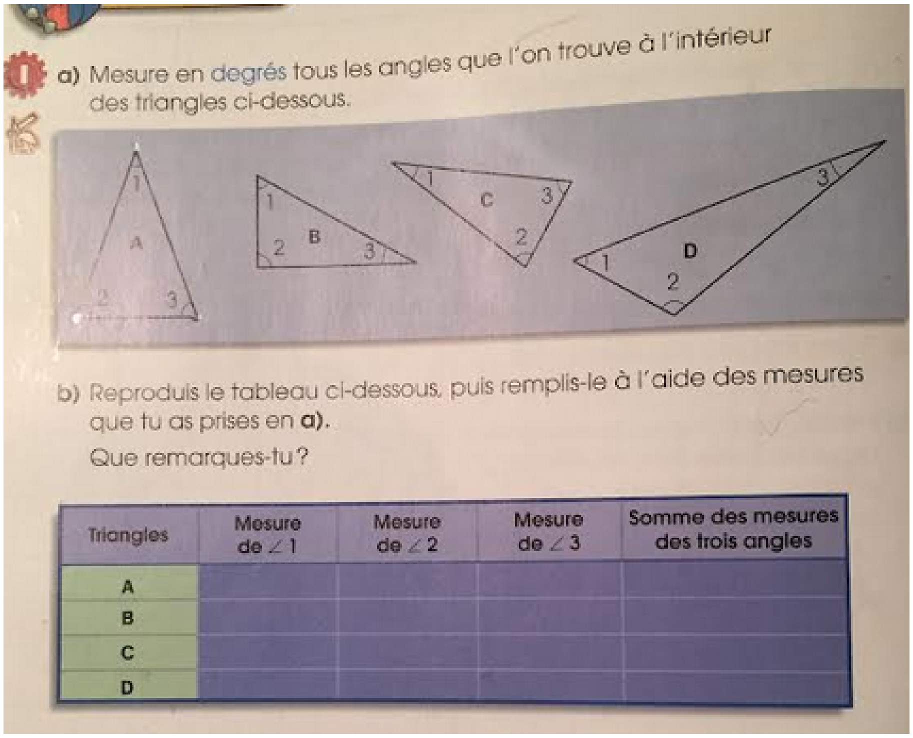
a) Circonférence b) Diamètre c) Rayon.

Ça semble évident que ça n'apporte rien au développement de la pensée algébrique.

Le sort de certains items a été plus difficile à décider, par exemple dans le cas de généralisations arithmétiques. Ex.: la somme constante des angles d'un triangle ou encore un contexte où la solution arithmétique d'une équation est aussi valable qu'une solution algébrique.

Par exemple, on peut faire la conjecture sur la somme des angles (figure 3.5), mais à cette étape, on ne peut pas l'affirmer pour tout triangle. Une preuve est nécessaire pour généraliser. Après avoir résolu ce numéro, on ne peut qu'affirmer que la somme des mesures des angles dans un triangle est *peut-être* toujours 180 degrés. On ne demande que de remarquer. Notons cependant qu'il s'agit d'une question isolée et que, en association avec d'autres questions qui iront plus loin dans l'exploitation de cette relation, elle aura pu servir de déclencheur à une réflexion qui sera reprise plus tard.

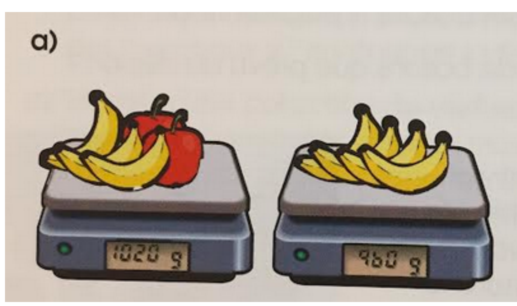
Figure 3.5 Manuel A1, situation 12, n° 1



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.94.

Dans l'item ci-dessous (voir figure 3.6), on peut faire un calcul direct, et nous l'avions rejeté pour cette raison (division, multiplication et soustraction).

Figure 3.6 Item qui peut se résoudre arithmétiquement ou algébriquement



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.10.

Mais on peut aussi faire un travail sur des équations ($4x = 960$ et $3x + 2y = 1020$). Cet item a finalement été retenu car le potentiel de niveau 1 existe pour un traitement algébrique même si l'élève peut procéder autrement.

CHAPITRE IV

ANALYSE

Rappelons que notre analyse s'est attardée au troisième cycle du primaire (où les élèves ont de 10 à 12 ans) et a porté sur quatre manuels, deux manuels pour la première année du cycle (5^{e} année) et deux autres pour la deuxième année du cycle (6^{e} année). Afin d'illustrer l'opérationnalisation de la grille d'analyse pour le bénéfice du lecteur, nous allons présenter l'analyse d'items retenus dans les quatre manuels du troisième cycle du primaire. Nous aurons ainsi un portrait de l'activité suscitée par les items retenus en ce qui concerne le développement de la pensée algébrique.

Rappelons que les trois catégories retenues concernent la nature de l'activité mathématique sollicitée, soit la mathématisation/modélisation, la généralisation et l'action sur une structure. Nous avons admis qu'un item pouvait appartenir à plus d'une catégorie. Ces catégories forment le volet A de la grille d'analyse développée au chapitre précédent (section 3.6.1). Par construction, nous considérons que les items qui ne s'insèrent dans aucune des trois catégories ne contribuent pas au développement de la pensée algébrique et ne sont donc pas retenus.

Nous nous prononçons aussi sur le niveau de potentialité de chacun des items retenus pour amener l'élève vers une pensée algébrique (volet C). On se souviendra que les niveaux de potentialité vont de 0 à 2, où 2 représente un potentiel intrinsèque de l'item pour le développement de la pensée algébrique (c'est-à-dire que pour répondre adéquatement à la tâche telle qu'énoncée, l'élève doit nécessairement s'engager sur la piste de la pensée algébrique primitive), contrairement au niveau 0 où une intervention extérieure est absolument nécessaire pour faire progresser la pensée algébrique, en développant les idées évoquées dans l'item de façon plus générale. La cote 1 (niveau 1) suppose un certain potentiel, mais elle réfère à un item où il est possible de répondre à la question en évitant de s'engager dans une réflexion de nature algébrique, par exemple par une démarche arithmétique de base ou par essais et erreurs[63].Dans le

[63] Linchevski (1995) considère que cette façon de faire est aussi de la pré-algèbre. Et si on l'utilise au primaire elle se qualifierait donc comme algèbre primitive.

cas des questions de niveau 0 (intervention nécessaire de l'enseignant pour susciter un développement de la pensée algébrique), j'ajouterai des suggestions pour une intervention complémentaire. Notons qu'un travail en équipe avec d'autres élèves peut aussi apporter la réflexion supplémentaire nécessaire, à défaut d'une intervention de l'enseignant.

En ce qui concerne le volet B de la grille, nous avions l'intention de préciser, pour chacun des items retenus au volet A, si un travail est à envisager sur les conceptions et difficultés répertoriées dans la littérature (volet B.1 de la grille) ou si l'item présente d'autres défis particuliers (volet B.2). Toutefois, nous avons constaté qu'il y avait une trop grande variété de difficultés pour garder cet aspect dans la grille de façon opérationnelle ; nous allons plutôt traiter cette question de façon globale et transversale en complément d'analyse (voir chapitre V).

4.1 Analyse de quelques items de Clicmaths

Dans ce qui suit, nous présentons l'analyse de 13 items. Pour chacune des catégories, Mathématiser/Modéliser, Généraliser et Action sur une structure, nous avons choisi trois items qui présentent des niveaux de potentialité différents (0, 1 et 2). Cette analyse fera l'objet des sous-sections 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3. De plus, certains items ont été classés dans deux catégories, la sous-section 4.1.4 expose l'analyse de trois de ces items. Finalement, est rapportée l'analyse d'un item qui fait appel aux trois catégories (section 4.1.5).

Afin de commencer à dresser le portrait du potentiel, nous rapportons le nombre d'items recensé pour chacune des catégories. Précisons que nous avons retenu 344 items en tout. Comme certains items appartiennent à plus d'une catégorie, les totaux compilés dépassent le nombre réel d'items puisque certains sont comptés plus d'une fois.

4.1.1 Exemples d'items dans la catégorie « Mathématisation/Modélisation »

Nous avons recensé 93 items dans cette catégorie, 50 items dans les manuels destinés à la 5^{e} année et 43 items pour la 6^{e} année. Le tableau 4.1 présente les trois items choisis pour illustrer l'analyse menée dans cette première catégorie.

Tableau 4.1 Trois items de la catégorie « Mathématisation/modélisation »

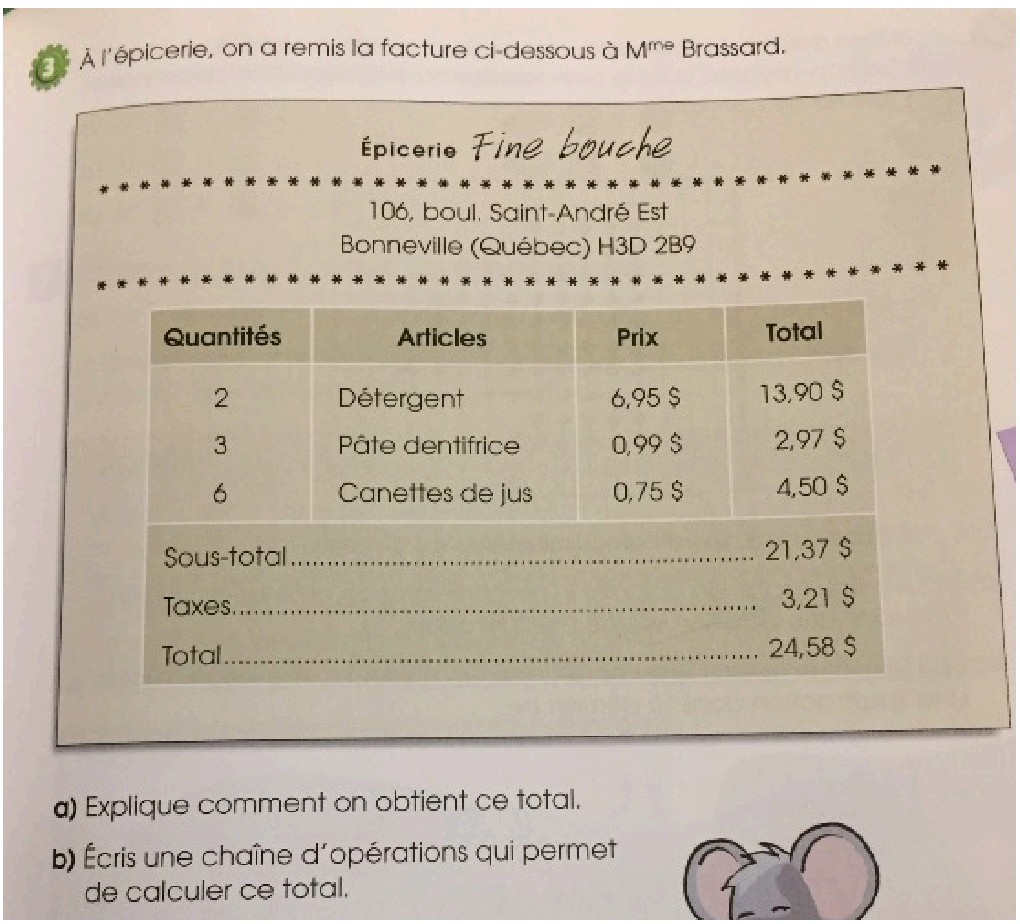
Exemple	Titre	Niveau de potentiel

1	Épicerie	2
2	Des carrés et des cercles	1
3	Bracelet-montre	0

Exemple 1 : Épicerie

Cet item vise la 6e année primaire, il est issu du deuxième manuel et provient de la section « Je m'entraine », dans la situation 22. Il a un niveau de potentialité 2 (figure 4.1).

Figure 4.1 Épicerie - manuel B2, « Je m'entraîne », situation 22, p.27, nº 3



3 À l'épicerie, on a remis la facture ci-dessous à Mme Brassard.

Épicerie Fine bouche

106, boul. Saint-André Est
Bonneville (Québec) H3D 2B9

Quantités	Articles	Prix	Total
2	Détergent	6,95 $	13,90 $
3	Pâte dentifrice	0,99 $	2,97 $
6	Canettes de jus	0,75 $	4,50 $

Sous-total .... 21,37 $
Taxes .... 3,21 $
Total .... 24,58 $

a) Explique comment on obtient ce total.
b) Écris une chaîne d'opérations qui permet de calculer ce total.

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.27

Cet item requiert de passer d'une tâche du monde physique (faire payer un montant juste au client pour ses achats) à une représentation qui peut permettre un traitement mathématique.

Dans cet item, on demande de créer une expression qui reflète la structure des calculs, structure qui serait la même si l'une des quantités n'était pas connue. On ne demande pas d'agir sur la structure mais de la créer. On pourrait penser que si l'élève se questionne sur le montant de taxes, il pourrait faire une généralisation. Mais le seul autre endroit du cycle où on parle des taxes est au n° 7b de la page 18 de ce manuel, et on dit de multiplier le prix par 1,15 pour obtenir directement le montant avec taxe incluse. Partout ailleurs, on fait abstraction des taxes, même dans la section CLIC de la page 30. C'est donc un peu hors de portée pour l'élève car les pourcentages ne sont abordés que pour la conversion en nombres décimaux et en fraction, dans le contexte des probabilités ou de l'interprétation des diagrammes circulaires.

Volet C : NIVEAU 2

La réalisation de la tâche nécessite l'activation d'une pensée algébrique structurelle de façon intrinsèque et donc l'intervention de l'enseignant n'est pas (en principe) nécessaire sur ce point. En ce qui concerne la généralisation en rapport avec la taxe, une intervention efficace serait possible pour orienter la pensée vers un montant proportionnel, ou l'élaboration de la formule de la taxe. Mais ceci est normalement vu au premier cycle du secondaire.

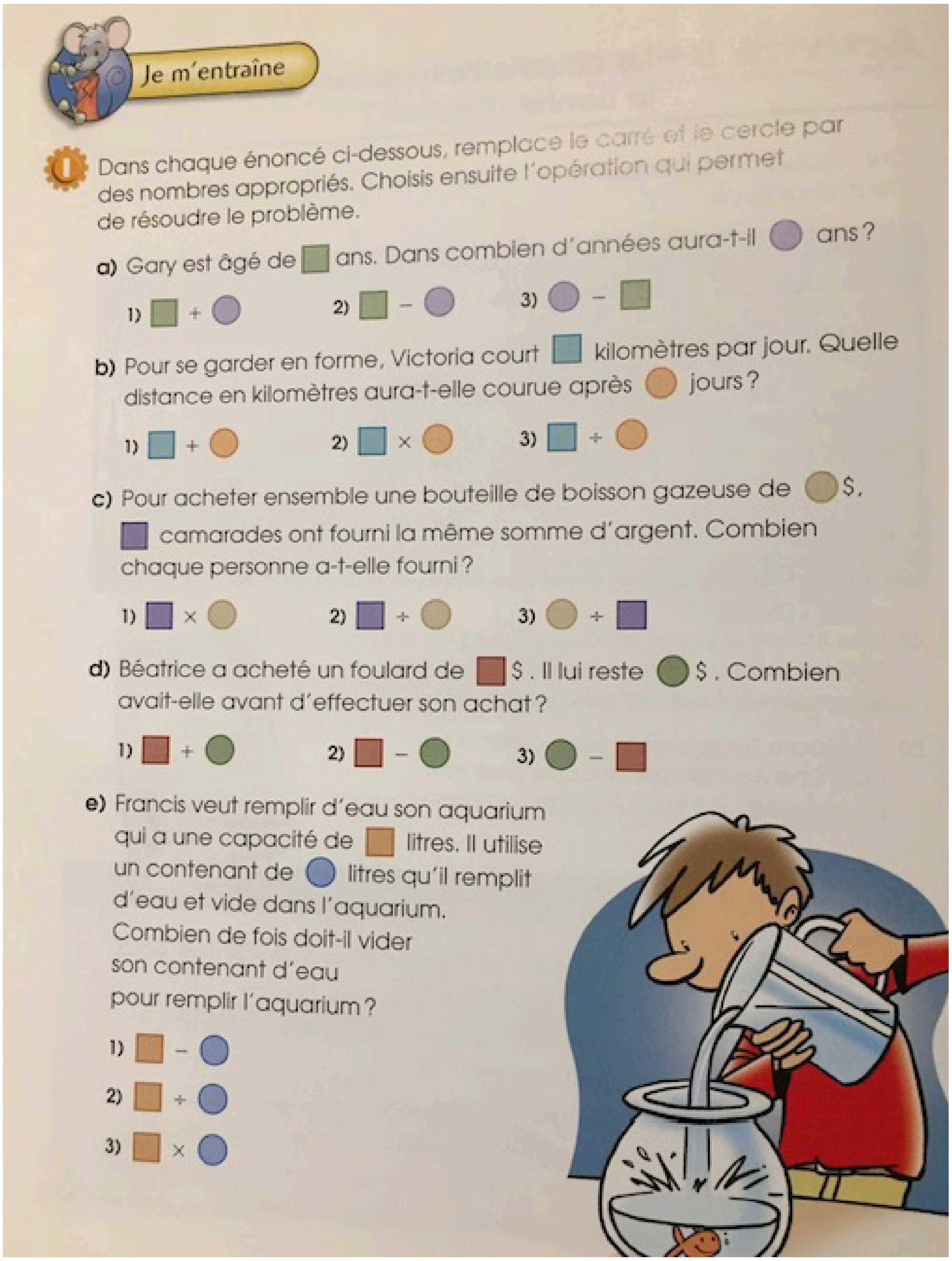
Prolongement possible pour améliorer le potentiel de développement de la pensée algébrique primitive.

L'enseignant pourrait amener les élèves vers un calcul plus général comme $M + M \times 0{,}15$, par exemple en utilisant un tableur pour générer des factures de n'importe quels montants avec les taxes.

Exemple 2 : Des carrés et des cercles

Cet item (figure 4.2) est également tiré d'un des manuels de la 6e année, comme l'item précédent. Son niveau de potentialité est 1.

Figure 4.2 Des carrés et des cercles, section « Je m'entraîne », situation 1, p.6


Je m'entraîne

Dans chaque énoncé ci-dessous, remplace le carré et le cercle par des nombres appropriés. Choisis ensuite l'opération qui permet de résoudre le problème.

a) Gary est âgé de □ ans. Dans combien d'années aura-t-il ○ ans?

1) □ + ○ 2) □ − ○ 3) ○ − □

b) Pour se garder en forme, Victoria court □ kilomètres par jour. Quelle distance en kilomètres aura-t-elle courue après ○ jours?

1) □ + ○ 2) □ × ○ 3) □ ÷ ○

c) Pour acheter ensemble une bouteille de boisson gazeuse de ○ $, □ camarades ont fourni la même somme d'argent. Combien chaque personne a-t-elle fourni?

1) □ × ○ 2) □ ÷ ○ 3) ○ ÷ □

d) Béatrice a acheté un foulard de □ $. Il lui reste ○ $. Combien avait-elle avant d'effectuer son achat?

1) □ + ○ 2) □ − ○ 3) ○ − □

e) Francis veut remplir d'eau son aquarium qui a une capacité de □ litres. Il utilise un contenant de ○ litres qu'il remplit d'eau et vide dans l'aquarium. Combien de fois doit-il vider son contenant d'eau pour remplir l'aquarium?

1) □ − ○

2) □ ÷ ○

3) □ × ○

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.6

Dans cet item, on demande de choisir des nombres pour compléter les questions de façon cohérente et de déterminer l'opération qui les relie pour obtenir la réponse à la question, mais sans nécessairement terminer le calcul.

Volet C : NIVEAU 1

Il y a un certain potentiel si l'élève donne un sens au calcul à faire et à la façon de le représenter et ne procède pas simplement par essais et erreurs.

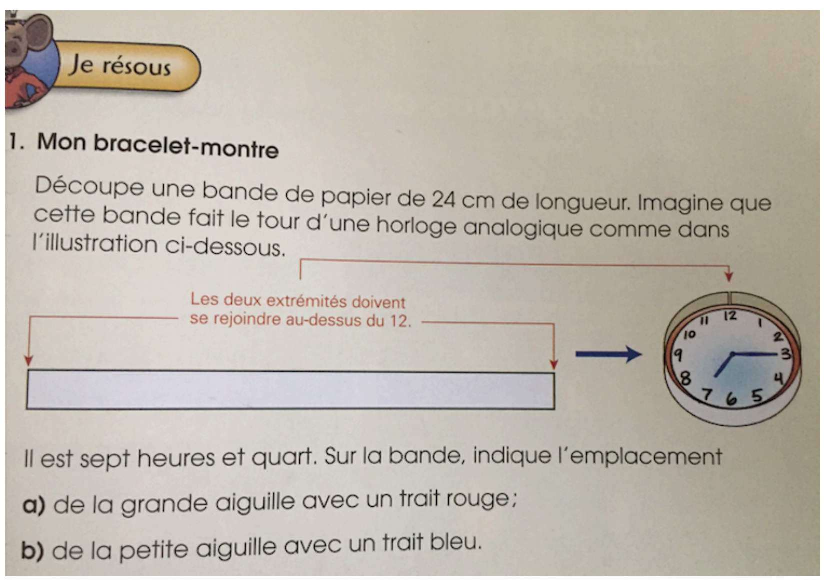
Prolongement possible pour améliorer le potentiel de développement de la pensée algébrique primitive.

L'enseignant pourrait proposer de mettre des lettres au lieu de tester des nombres pour voir si l'élève a compris ce qui détermine l'ordre des opérandes et pour le familiariser avec des usages de la lettre. Cela donnerait un potentiel de généralisation.

Exemple 3 : Mon bracelet-montre

Cet item est issu d'un des manuels de la 5^{e} année, il est classé par les auteurs du manuel comme un « Je résous » (figure 4.3). Nous l'avons classé avec un niveau de potentialité 0.

Figure 4.3 Mon bracelet-montre, manuel A1, « Je résous », situation 7



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.63

Dans cet item, on vise le passage d'une observation du monde physique à une représentation qui permet un traitement mathématique.

Avec cet item, tel que formulé, on aurait un simple changement de représentation (passer d'un trajet circulaire de la pointe de chacune des aiguilles dans l'horloge à un trajet linéaire sur la bande de papier), ce qui est associé à une action de mathématisation/modélisation. La bande de papier est facilement mesurable et on peut la graduer. Elle joue un peu le rôle d'une droite numérique graduée dans le sens normal de l'écoulement du temps; le sens de développement est important. En ce qui concerne la petite aiguille, sa position est représentée approximativement sur le dessin; elle devrait être à $\frac{1}{4}$ du trajet entre le 7 et le 8. Les élèves ont fait plusieurs exemples semblables dans les pages précédentes. À la page 56 du même manuel (1h15, 1h30, 1h45) et à la page 58 (7h20, 23h40) les positions de la petite aiguille sont représentées correctement, alors la position incorrecte de la petite aiguille dans la figure 4.3 introduit une certaine incohérence. Sa position réelle serait à $\frac{7}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}$ sur la bande de papier de 24 cm soit 14,5 cm du début.

Volet C : niveau 0

Le niveau est 0 car il suffit de constater que l'aiguille est à $\frac{3}{12}$ du trajet et de reporter une marque à $\frac{1}{4}$ de la longueur de la bande de papier $\left(\frac{1}{4} \times 24 \text{ cm} = 6 \text{ cm}\right)$. La question ne demande pas un certain niveau de précision et ne suggère pas comment procéder. La question pourrait mieux orienter l'action. Si on se fie à l'image, la petite aiguille serait à $\frac{7}{12}$ de la longueur de la bande de papier à partir du début, soit à 14 cm.

Dans un item de niveau 0, on se souvient qu'un prolongement par l'ajout d'une question est nécessaire pour faire un lien avec la pensée algébrique. Les problèmes de niveau 1 ont un potentiel, même si l'élève peut résoudre d'une autre façon et les items de niveau 2 ont un potentiel autonome.

Prolongement possible pour améliorer le potentiel de développement de la pensée algébrique primitive

On peut y voir une situation de proportionnalité entre des angles sur le cadran de l'horloge et des distances sur la bande de papier. C'est ainsi une belle occasion d'aborder la covariation. La pensée fonctionnelle est l'une des entrées reconnues en algèbre primitive et est souvent associée à la modélisation. Des questions surgissent spontanément comme : si on déplace la ligne rouge légèrement vers la droite, ça correspond à quel mouvement de la grande aiguille (aspect qualitatif, ou quantitatif si on précise le nombre de centimètres)? Si on recule la petite aiguille un peu, où la barre bleue se déplacera-t-elle? On peut aussi avoir un premier aperçu de l'idée de périodicité et d'arithmétique modulaire (si on ajoute un multiple de 12h à l'heure affichée, elle ne change pas). Rendu au bout de la bande de papier, qu'est-ce qui se passe?

La situation est propice à une situation fonctionnelle et à l'idée de périodicité, si on anticipe ce qui viendra au secondaire. Il y a aussi l'idée de taux et de proportionnalité, qui sont reconnus comme des notions favorables au développement de la pensée algébrique. Avec un tel ajout de l'idée de mouvement, on pourrait parler d'une action sur une structure car le raisonnement fonctionnel et le raisonnement proportionnel avec des taux (2 cm/h, 2 cm/5 min, 15°/cm ...) peuvent entrer en jeu.

Question de recherche possible (pour la communauté de recherche de la classe, s'il y en a une): les aiguilles peuvent-elles être dans n'importe quelle position et indiquer quand même une heure valide (étude de la covariation du mouvement d'une aiguille par rapport à l'autre)?

4.1.2 Exemples d'items dans la catégorie « Généralisation »

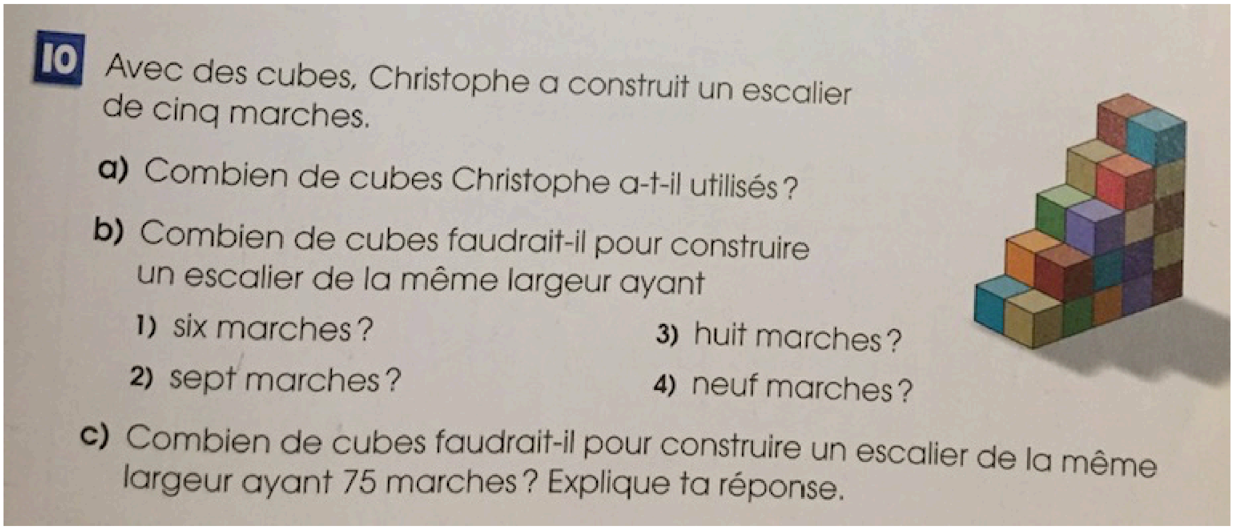
Parmi les 344 items retenus, nous avons recensé 44 items dans cette catégorie, 18 items dans les manuels destinés à la 5^e année et 26 items pour la 6^e année. Le tableau 4.2 nomme les trois items choisis pour illustrer l'analyse pour chacun des niveaux de potentiel.

Tableau 4.2 Trois des items de la catégorie « Généralisation »

Exemple	Titre	Niveau de potentiel
4	Les cubes en escalier	2
5	Qui dit triangle dit trois angles	1
6	Labo du hasard prob fréquentielle	0

Exemple 4, figure 4.4 : Les cubes en escalier - manuels de 5^e, classé avec un niveau de potentialité 2.

Figure 4.4 Les cubes en escalier, manuel A1, « Je m'entraîne», situation 14



10 Avec des cubes, Christophe a construit un escalier de cinq marches.

a) Combien de cubes Christophe a-t-il utilisés ?

b) Combien de cubes faudrait-il pour construire un escalier de la même largeur ayant

1) six marches ?
2) sept marches ?
3) huit marches ?
4) neuf marches ?

c) Combien de cubes faudrait-il pour construire un escalier de la même largeur ayant 75 marches ? Explique ta réponse.

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.109

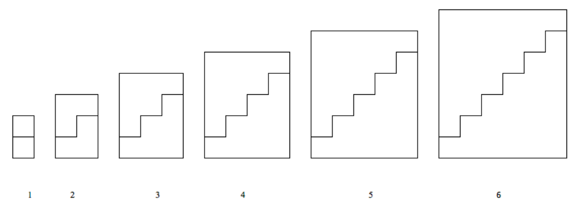
Le but est de généraliser à partir du contexte familier de construction avec des blocs. Dans cet item, on demande à l'élève de calculer le nombre de cubes qui seraient nécessaires pour construire l'escalier de 6, 7, 8, 9 et 75 marches. On amène l'élève à construire 4 étapes supplémentaires consécutives (6, 7, 8, 9 marches), ce qui lui permet de remarquer ce qui se passe numériquement et géométriquement quand on va d'une figure à l'autre et de susciter une généralisation itérative (comment passer d'une figure quelconque à la suivante). En observant les nombres 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90 en relation avec les figures (soit $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, 6\times7, 7\times8, 8\times9, 9\times10$), il pourrait trouver que la somme est (le nombre de marches) × (le nombre de marches+1) et en venir à une généralisation contextuelle. S'il s'en tient à un ou des cas, il aura une généralisation factuelle seulement.

Volet C: Le niveau est 2. Pour répondre correctement à la question, l'élève doit faire appel à une pensée algébrique.

Pour les 75 marches, il faudra établir un lien fonctionnel entre le nombre de marches (ou numéro ordinal de la figure) et le nombre de cubes. Il est aussi possible de retourner l'un des deux escaliers de haut en bas et de le déposer sur l'autre pour bien voir la structure du terme de la suite. Dans le premier cas, on constate numériquement que pour une figure particulière, le nombre de blocs est le nombre de marches × (le nombre de marches + 1) par une généralisation factuelle.

On découvre que ce résultat est bon pour toutes les étapes qu'on a vérifiées dans le contexte de cette suite (de 1 à 10). Pour abréger, l'enseignant pourrait suggérer d'écrire $n(n+1)$ car écrire « le nombre de marches × (le nombre de marches + 1) » est trop long pour rien. Nous avons maintenant une véritable généralisation algébrique symbolique. On constate aussi que c'est bien le double du n^{e} nombre triangulaire, autant algébriquement que par l'observation des figures ci-bas. Dans le deuxième cas, on égalise toutes les piles de blocs en mettant le deuxième escalier à l'envers par-dessus le premier et on a un rectangle dont la base est le nombre de marches du début, mais dont la hauteur est d'un bloc de plus (ou un rectangle dont la base est un de plus que le nombre de marches si on l'a déposé une marche plus bas.) (voir ma figure 4.5)

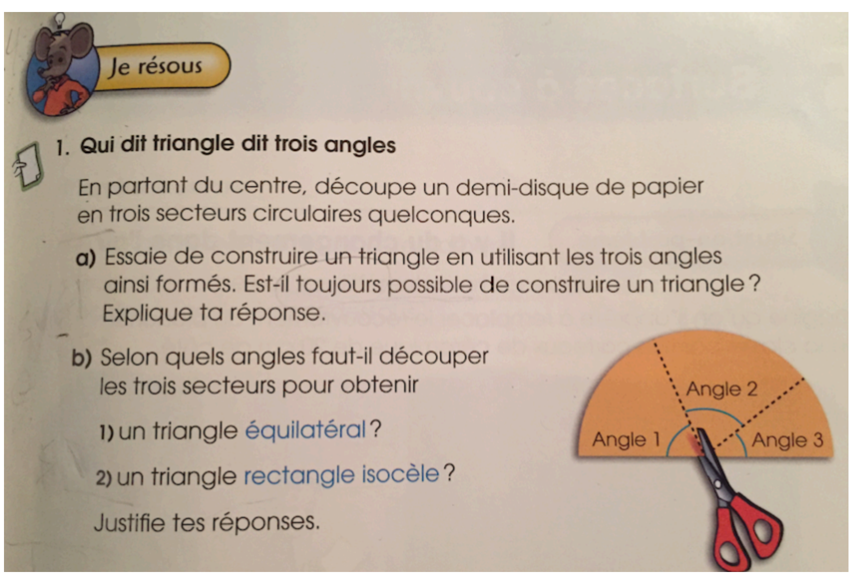
Figure 4.5 Généralisation de la suite des escaliers doubles



Exemple 5 : Qui dit triangle dit trois angles (figure 4.6)

Cet item est issu de la 5^{e} année primaire, le niveau de potentialité est 1.

Figure 4.6 Qui dit triangle dit trois angles



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.43

Dans cet item, il s’agit de conjecturer à partir de l'utilisation d'un modèle.

En partant avec un modèle permettant, par découpage, d'obtenir 3 angles dont la somme est un angle plat, tenter de vérifier si on peut toujours obtenir un triangle. Les élèves ne pourront pas généraliser à partir de quelques cas, comme ceux proposés en b), surtout que la manipulation est difficile et que l'arrangement des morceaux découpés ne formera pas en général un triangle, ce qui explique pourquoi nous l'avons classé dans le niveau de potentialité 1 dans Généraliser, mais ils pourront peut-être en arriver à poser la conjecture. À la suite d'une telle activité, on pourrait utiliser avec profit un logiciel comme GeoGebra (voir ma figure 4.7) en illustrant la situation avec une figure dynamique qui permet une preuve visuelle. Il est à remarquer que la grandeur des triangles importe peu.

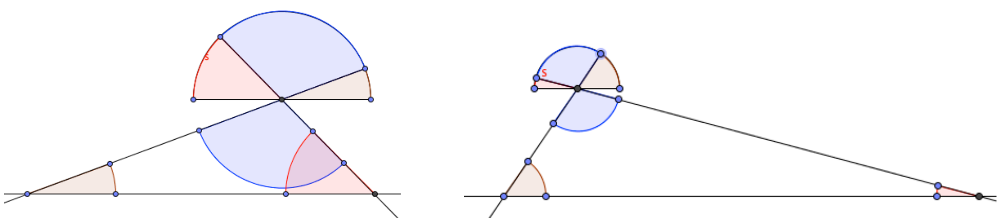


Figure 4.7 Preuve visuelle pour le problème de la somme des angles d'un triangle (figure faite par moi)

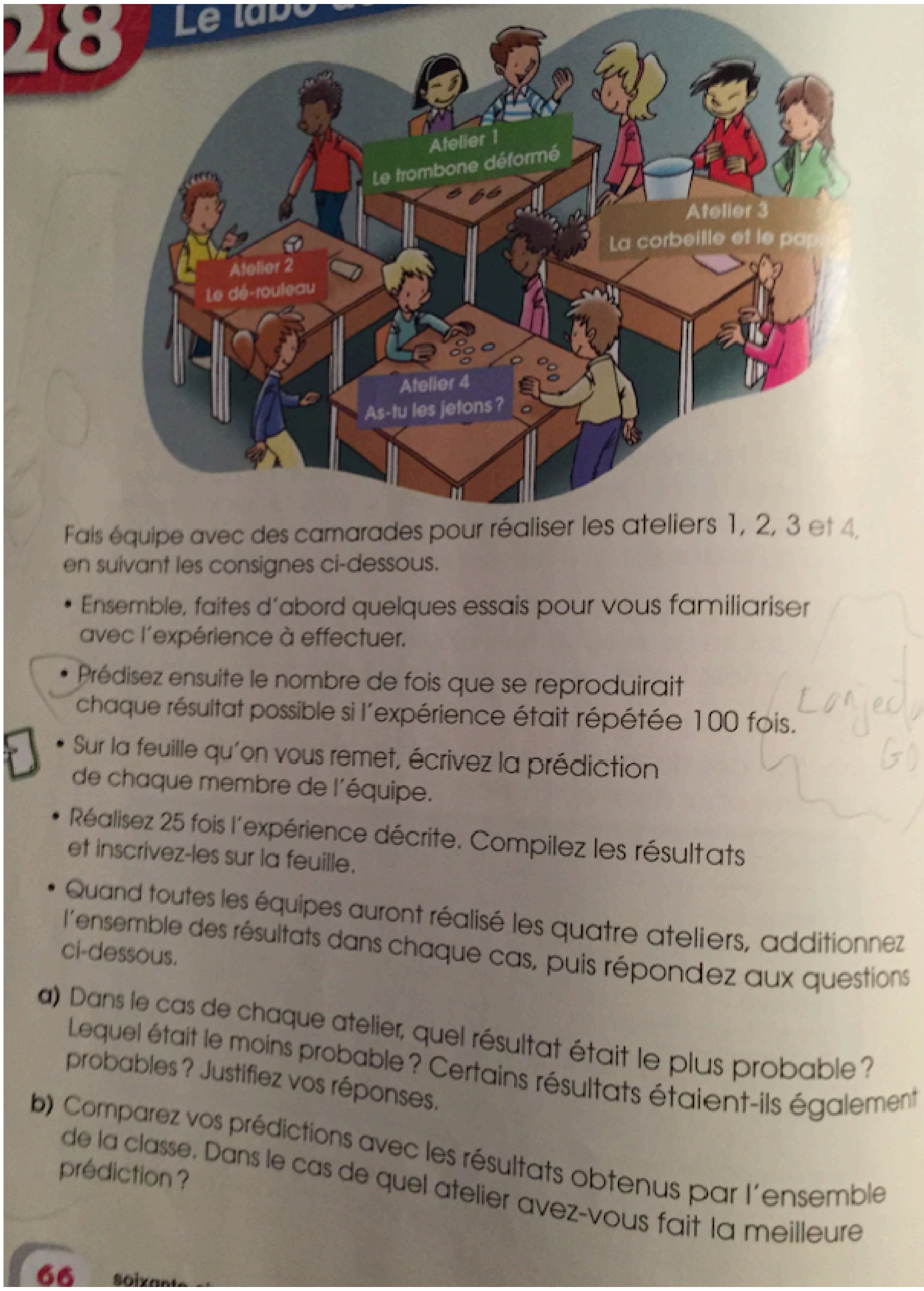
Volet C : niveau 1

Exemple 6 : Labo du hasard - probabilité fréquentielle (figure 4.8)

Cet item est issu de la 5e année primaire; nous l’avons classé comme niveau de potentialité 0.

Dans cet item, on conjecture sur la probabilité fréquentielle dans 4 expériences aléatoires. Notons qu’un trombone déformé peut tomber de 4 façons différentes, un rouleau de carton légèrement écrasé peut afficher 4 faces, une boule de papier peut tomber sur chacun des 4 secteurs d'un disque et on observe le résultat d'un tirage de 2 jetons dans un sac qui en contient 3 rouges et 2 blancs. Après quelques essais, les élèves tentent d'anticiper la probabilité de chaque événement avant de répéter une expérience 100 fois. En fait, on leur demande de prévoir le nombre de fois que chaque événement va se produire (sur un total maximum de 100).

Figure 4.8 Manuel A2, « Le labo du hasard », situation 28, p.66, n° 1



Fais équipe avec des camarades pour réaliser les ateliers 1, 2, 3 et 4, en suivant les consignes ci-dessous.

- Ensemble, faites d'abord quelques essais pour vous familiariser avec l'expérience à effectuer.
- Prédisez ensuite le nombre de fois que se reproduirait chaque résultat possible si l'expérience était répétée 100 fois.
- Sur la feuille qu'on vous remet, écrivez la prédiction de chaque membre de l'équipe.
- Réalisez 25 fois l'expérience décrite. Compilez les résultats et inscrivez-les sur la feuille.
- Quand toutes les équipes auront réalisé les quatre ateliers, additionnez l'ensemble des résultats dans chaque cas, puis répondez aux questions ci-dessous.

a) Dans le cas de chaque atelier, quel résultat était le plus probable ? Lequel était le moins probable ? Certains résultats étaient-ils également probables ? Justifiez vos réponses.

b) Comparez vos prédictions avec les résultats obtenus par l'ensemble de la classe. Dans le cas de quel atelier avez-vous fait la meilleure prédiction ?

66

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.66

Volet C : niveau 0

Les conjectures sont souvent utilisées pour considérer qu'un énoncé est possiblement vrai, autant ici qu'en algèbre. En algèbre, il est souvent possible de réaliser une preuve formelle. L'étude des conjectures est une partie commune aux deux champs. Mais en probabilité, quand on veut affirmer que la probabilité fréquentielle obtenue correspond à la probabilité théorique, on ne peut que le constater de façon empirique dans la plupart des cas car la probabilité théorique exacte ne peut pas se calculer aussi facilement qu'avec une pièce de monnaie ou un dé équilibré. Il n'y a donc rien dans la question qui permette de généraliser, ni même de penser qu'il y a un lien entre les résultats obtenus et la probabilité théorique. On nous demande de prédire.

4.1.3 Exemples d'items dans la catégorie « Action sur une structure »

Nous avons recensé 115 items dans cette catégorie sur un total de 344, 59 items dans les manuels destinés à la 5e année et 56 items pour la 6e année. Le tableau 4.3 présente les items choisis pour illustration:

Tableau 4.3 Trois des items de la catégorie « Action sur une structure »

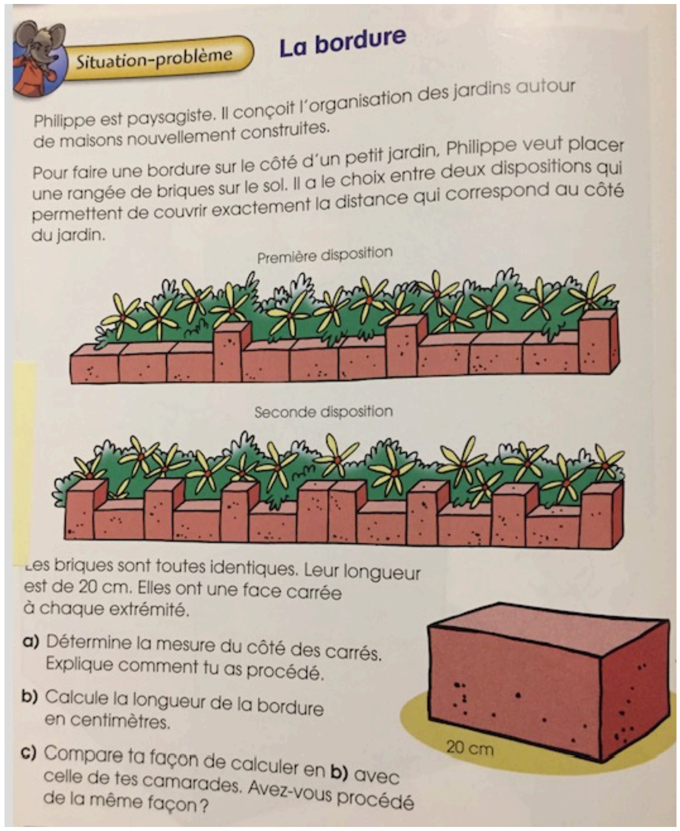
Exemple	Titre	Niveau de potentiel
7	La bordure	2
8	La fraction cachée	1
9	Aire d'un rectangle	0

Exemple 7 : La bordure

Cet item est tiré d'un des manuels de la 6e année primaire, les auteurs le présentent comme une situation-problème, faisant partie de la situation 29. Nous le voyons plutôt comme un problème. Nous l'avons classé avec un niveau de potentialité 2.

Dans la figure 4.9, nous avons une égalité de longueurs, chacune formée à partir d'une combinaison linéaire de 2 mesures, soit celle d'une brique couchée et celle d'une brique debout. C'est une représentation ostensive qui nous dispense d'une mathématisation supplémentaire car on peut travailler directement avec cette représentation.

Figure 4.9 La bordure, manuel B2, situation 29, « situation-problème », p.70



Situation-problème

La bordure

Philippe est paysagiste. Il conçoit l'organisation des jardins autour de maisons nouvellement construites.

Pour faire une bordure sur le côté d'un petit jardin, Philippe veut placer une rangée de briques sur le sol. Il a le choix entre deux dispositions qui permettent de couvrir exactement la distance qui correspond au côté du jardin.

Première disposition

Seconde disposition

Les briques sont toutes identiques. Leur longueur est de 20 cm. Elles ont une face carrée à chaque extrémité.

a) Détermine la mesure du côté des carrés. Explique comment tu as procédé.

b) Calcule la longueur de la bordure en centimètres.

c) Compare ta façon de calculer en **b)** avec celle de tes camarades. Avez-vous procédé de la même façon ?

20 cm

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.70.

Neuf briques couchées et 3 briques debout ont la même longueur que 6 briques couchées et 8 briques debout. Si on enlève 6 briques couchées et 3 briques debout dans chacune des bordures, il va rester 3 briques couchées dans la première et 5 briques debout dans la 2^{e} bordure. Comme la longueur totale est la même et qu'on a enlevé la même chose dans les deux bordures, ce qui reste aura la même longueur dans les deux cas. On remarque le raisonnement typiquement algébrique de supprimer une même quantité des deux côtés d'une égalité.

Au numéro b), on demande de calculer la longueur de la bordure (216 cm) et en c), de comparer les méthodes utilisées (expressions arithmétiques équivalentes). Certains vont avoir fait 9 x 20 + 3 x 12 et d'autres $6 \times 20 + 8 \times 12$ selon qu'ils se sont basés sur la première ou la 2^{e} bordure. Comme le résultat est le même, ils vont finir par poser l'égalité $9 \times 20 + 3 \times 12 = 6 \times 20 + 8 \times 12$ et réfléchir sur les décompositions multiples d'un même nombre. Remarquons qu'on aurait pu poser au départ $9 \times 20 + 3 \times \_\_ = 6 \times 20 + 8 \times \_\_$ avec une seule inconnue qui paraît des deux côtés de l'égalité, « à la Filloy et Rojano » mais il était plus simple de travailler directement avec les briques. On vient de réaliser une véritable solution algébrique en simulant la manipulation réelle des briques. C'est parfaitement équivalent à $9(20) + 3x = L$ et $6(20) + 8x = L$ et on a fait la comparaison $L = L$ donc $9(20) + 3x = 6(20) + 8x$. En enlevant 6 briques couchées, donc 6(20), et 3 debout de chaque côté de l'égalité, donc 3x, il nous reste $3(20) = 5x$.

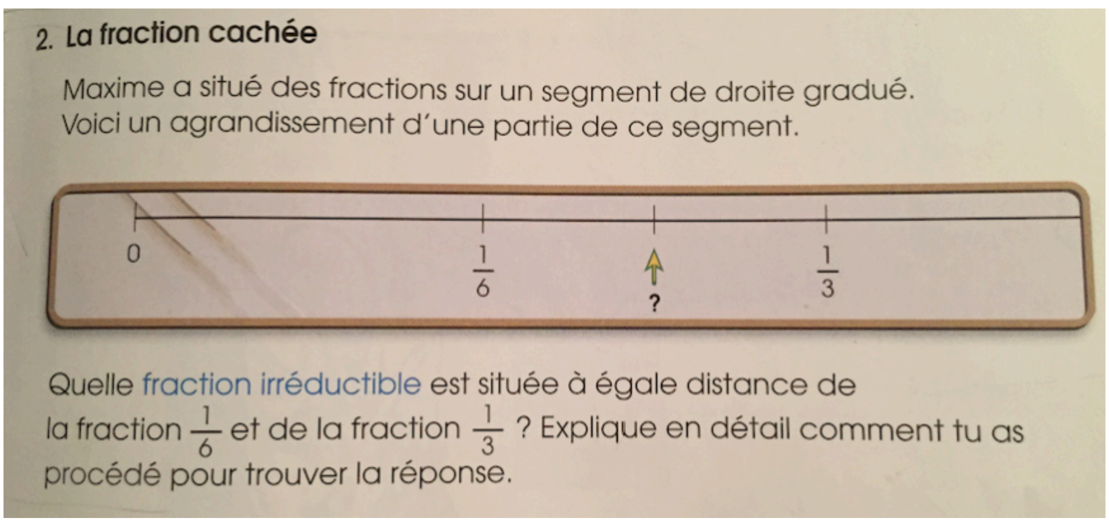
Volet C : Niveau 2

L'item est de niveau 2 car une pensée de nature algébrique est nécessaire à la résolution.

Exemple 8 : La fraction cachée (figure 4.10)

Cet item est tiré d'un des manuels de 5e année primaire identifié par les auteurs sous l'étiquette « Je résous », le niveau de potentialité est 1.

Figure 4.10 La fraction cachée, situation 22, section « Je résous », p.31



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.31

L'élève sait que $\frac{1}{3}$ est équivalent à $\frac{2}{6}$. Mais trouver le milieu entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{2}{6}$ l'oblige à considérer des parts plus petites qui conviennent pour représenter des « moitiés de sixièmes ». Il devra donc trouver l'équivalent des fractions en douzièmes pour insérer $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$. Il pourrait aussi se souvenir qu'il a peinturé le $\frac{1}{6}$ d'une douzaine d'oeufs (2 oeufs) et aussi le $\frac{1}{3}$ (4 oeufs). Alors il se dit que s'il en colorie 3, il aura colorié $\frac{1}{4}$ de la douzaine d'oeufs et que $\frac{1}{4}$ est en plein milieu de $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$.

Le $\frac{1}{12}$ est peut-être plus facile à trouver sur la droite et s'il fait l'hypothèse que la droite est graduée régulièrement, il arrivera à $\frac{3}{12}$ et $\frac{1}{4}$.

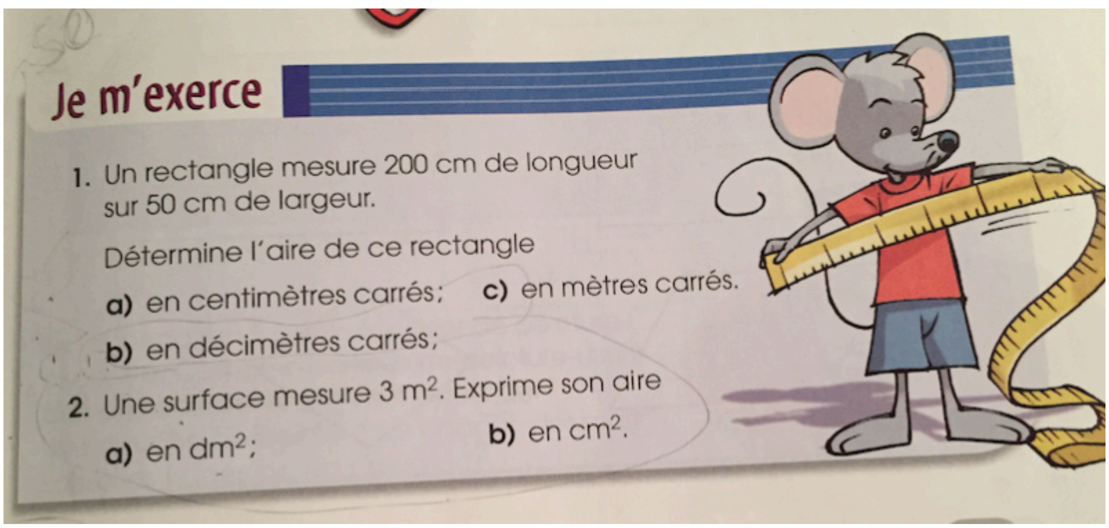
Volet C : niveau 1

L'élève doit trouver la fraction sans avoir d'algorithme et sans avoir vu le concept de moyenne arithmétique. Mais il peut utiliser des moyens détournés sans travailler avec la structure des rationnels. Cela correspond à ce que nous avons défini comme le niveau 1.

Exemple 9 : Aire d'un rectangle (figure 4.11)

Cet item est tiré d'un des manuels de 5e année, classé par les auteurs dans la section « Je m'exerce ». Le niveau de potentialité est de 0.

Figure 4.11 Aire d'un rectangle, situation 25, section « Je m'exerce », p.47



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.47

L'élève doit convertir des valeurs d'aire dans d'autres ordres de grandeur du système international (SI). La conversion de quantités dans le système international change la manière de présenter l'information sans changer la dénotation. On peut trouver que l'aire du rectangle est 10 000 cm^2, soit 100 cm × 100 cm = 1m × 1m = 1 m^2.

Mais aussi 100 cm × 100 cm = 10 dm × 10 dm = 100 dm^2.

Selon le choix de l'unité, l'ordre de grandeur du nombre associé change mais l'aire demeure toujours la même.

Volet C : niveau 0

Le fait de pouvoir changer l'expression est utile en vue de la pensée algébrique mais ce n'est pas en lien direct. L'enseignant devra travailler l'approche avec des quantités différentes et les relations entre elles pour aborder les idées algébriques.

4.1.4 Exemples d’items qui sont dans deux catégories

Nous avons recensé 87 items dans ce cas; 50 items dans les manuels destinés à la 5e année et 37 items pour la 6e année. Précisons que nous avons retenu 344 items au total. Dans le chapitre de méthodologie (sections 3.5.1, 3.5.2 et 3.5.3), deux items ont déjà été présentés. Le premier, Des chiffres et des lettres, et le second, Faisons notre possible, ont été classifiés dans Action sur une structure (niveau 2) et généraliser (niveau 2). Dans le tableau 4.4 nous avons trois autres exemples avec chacune des paires possibles.

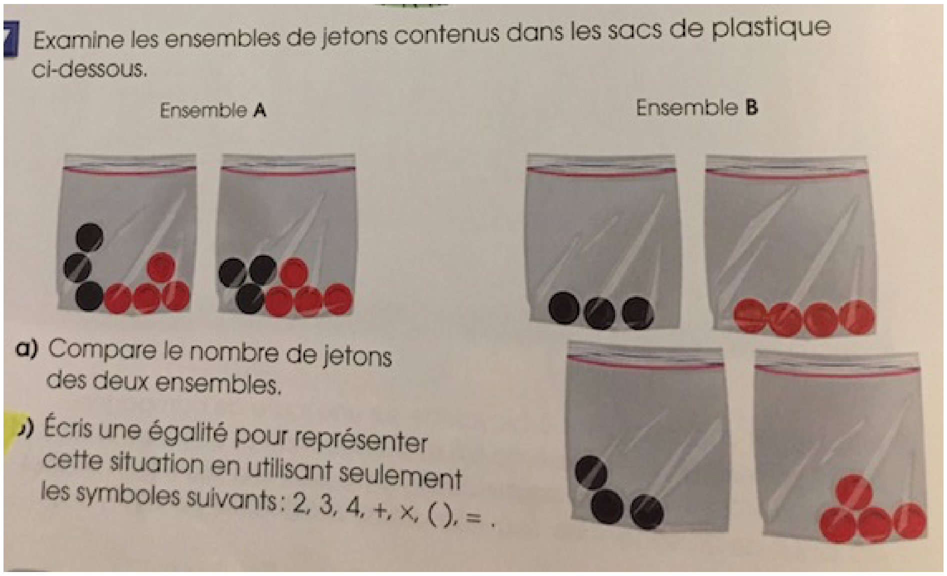
Tableau 4.4 Trois des items ayant été classés dans 2 catégories

Exemple 10	Jetons	Action sur une structure (niveau 1) Généraliser (niveau 0)
Exemple 11	Processus sur Papyrus	Mathématiser (niveau 0) Action sur une structure (niveau 1)
Exemple 12	Tourner la page	Mathématiser (niveau 2) Généraliser (niveau 2)

Exemple 10 : Jetons (figure 4.12)

Cet item est tiré d’un des manuels de la 6e année, les auteurs le classent dans la section « je réinvestis ». Il mobilise les deux catégories « Action sur une structure » (niveau 1) et « Généraliser » (niveau 0).

Figure 4.12 Des jetons, manuel B2, « Je réinvestis », situation 35, n°7



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.116

Écrire une égalité représentant la distributivité à partir d'une modélisation partielle sous une forme ostensive.

On s'attend ici à ce que l'élève écrive un exemple générique de la distributivité à partir de cette représentation schématique car le nombre de jetons utilisé pourrait être quelconque, du moment qu'on respecte une certaine disposition. L'item a) amène l'élève à constater une égalité et l'item b) à écrire la relation d'égalité entre les deux expressions équivalentes. Il y a une occasion de généraliser l'égalité en utilisant des nombres génériques.

Volet C : Niveau 1 pour l'action sur une structure

Volet C : Niveau 0 pour la généralisation

Encore une fois, on peut facilement passer à côté de l'intention si on n'a pas une intervention de la personne enseignante. La question b) devrait préciser qu'il faut utiliser tous les symboles présentés, au moins une fois chacun. Le potentiel est là (niveau 1) mais il y a plusieurs réponses possibles qui n'atteindront pas le but (ex. : 3+4+3+4=3+4+3+4), donc l'élève doit être plus encadré vers ce qu'il doit observer. Pour qu'il s'attarde à la structure selon laquelle les jetons étaient disposés, il pourrait y avoir une discussion en classe, des questions de la personne enseignante pour aider l'élève à comprendre la situation, d'autres exemples avec des nombres différents de jetons ou une verbalisation par l'élève sur la situation.

Le niveau est 0 pour la généralisation car une question supplémentaire est nécessaire si on veut amener l'élève sur ce chemin. Il va probablement se limiter au cas particulier soumis.

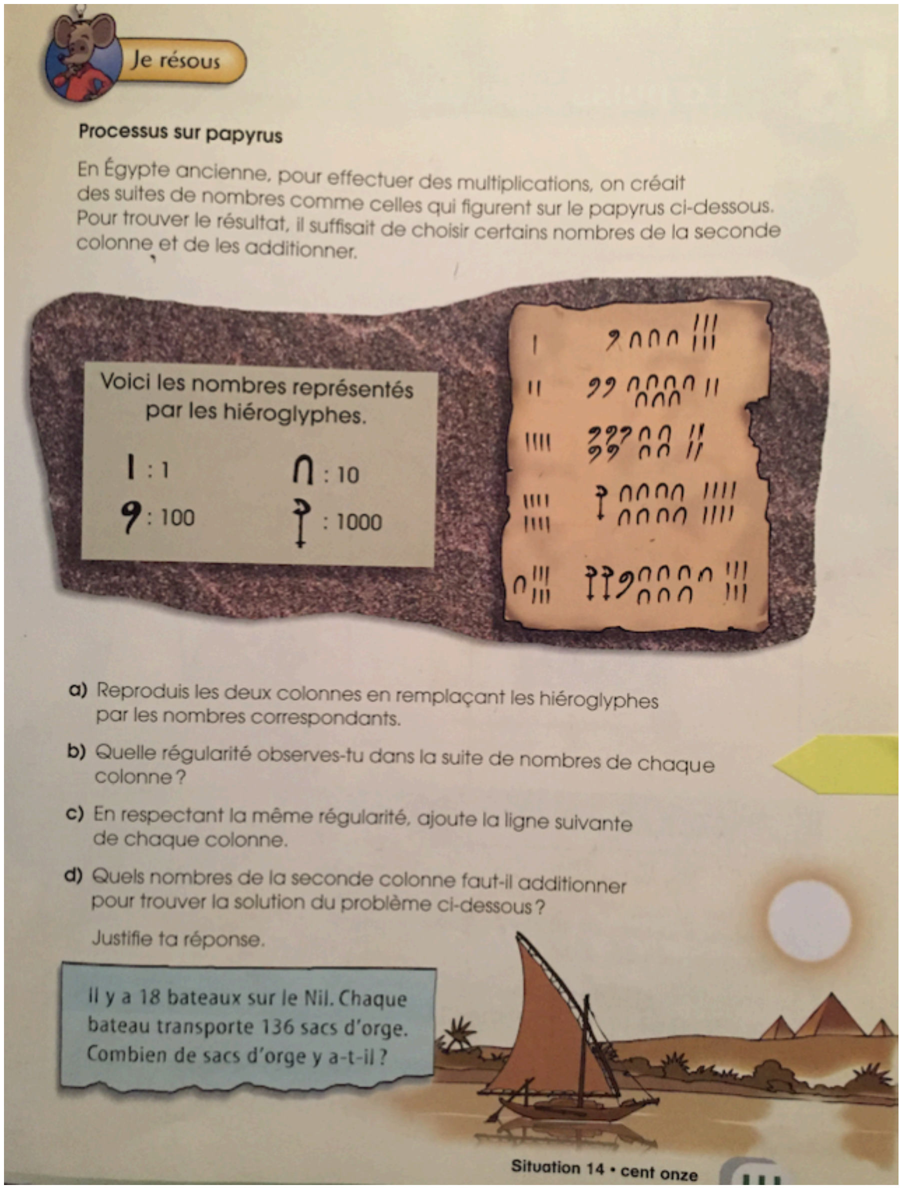
Exemple 11 : Processus sur Papyrus (figure 4.13)

Cet item est issu d'un des manuels de 5e année, identifié par les auteurs comme un item « Je résous ». Il fait appel aux deux catégories « Mathématiser » (niveau 2) et « Action sur une structure » (niveau 1).

Dans cet item, l'élève est amené à utiliser une représentation non institutionnelle pour faire une multiplication (symboles égyptiens).

La méthode à utiliser suppose de décomposer l'un des facteurs avec des symboles non institutionnels qui représentent des puissances de 10 et de décomposer l'autre facteur à base 2 (comme une combinaison linéaire de puissances de 2). Pour finir le calcul, il faut faire une application de la distributivité si le 2e facteur n'est pas lui-même une puissance de 2. Pour la question de la mathématisation, voir dans la discussion du volet C.

Figure 4.13 Processus sur Papyrus, manuel A1, « je résous », situation 14



Je résous

Processus sur papyrus

En Égypte ancienne, pour effectuer des multiplications, on créait des suites de nombres comme celles qui figurent sur le papyrus ci-dessous. Pour trouver le résultat, il suffisait de choisir certains nombres de la seconde colonne et de les additionner.

Voici les nombres représentés par les hiéroglyphes.

: 1 : 10

: 100 : 1000

a) Reproduis les deux colonnes en remplaçant les hiéroglyphes par les nombres correspondants.

b) Quelle régularité observes-tu dans la suite de nombres de chaque colonne ?

c) En respectant la même régularité, ajoute la ligne suivante de chaque colonne.

d) Quels nombres de la seconde colonne faut-il additionner pour trouver la solution du problème ci-dessous ?

Justifie ta réponse.

Il y a 18 bateaux sur le Nil. Chaque bateau transporte 136 sacs d'orge. Combien de sacs d'orge y a-t-il ?

Situation 14 • cent onze

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.111

Volet C :

Mathématisation/Modélisation - niveau 2

Action sur une structure - niveau 1

Au point d) on veut que l'élève compose le nombre 18 avec des puissances de 2, soit 16 et 2 et comprenne qu'il doit additionner les nombres de l'autre colonne qui sont à la même position. Ces nombres correspondent à 2176 et 272. Il doit conclure que la somme des deux multiplications à l'origine de ces nombres ($16 \times 136\ et\ 2 \times 136$) est identique à 18×136. Nous pensons que l'élève peut avoir traversé toutes ces étapes sans faire tous les liens espérés. Le potentiel est là mais une intervention de l'enseignant pourrait assurer que le but est atteint.

PROLONGEMENT POSSIBLE

Essayer de décomposer différents nombres avec les puissances de 2 et comparer avec ce que l'on fait en base 10. Ex. : 51 = 5 × 10 + 1. La plus grande puissance de 2 comprise dans 51 est 32. Si on l'enlève, on fait $51 - 32 = 19$. La plus grande puissance de 2 comprise dans 19 est 16. Il va rester 3 à représenter, qui est $2 + 1$. On a $51 = 32 + 16 + 2 + 1 = (2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0)$. Cela nous dirait quelles lignes additionner (6e, 5e, 2e et 1re) pour avoir une multiplication par 51 dans le modèle du papyrus.

Exemple 12 : Tourner la page (figure 4.14)

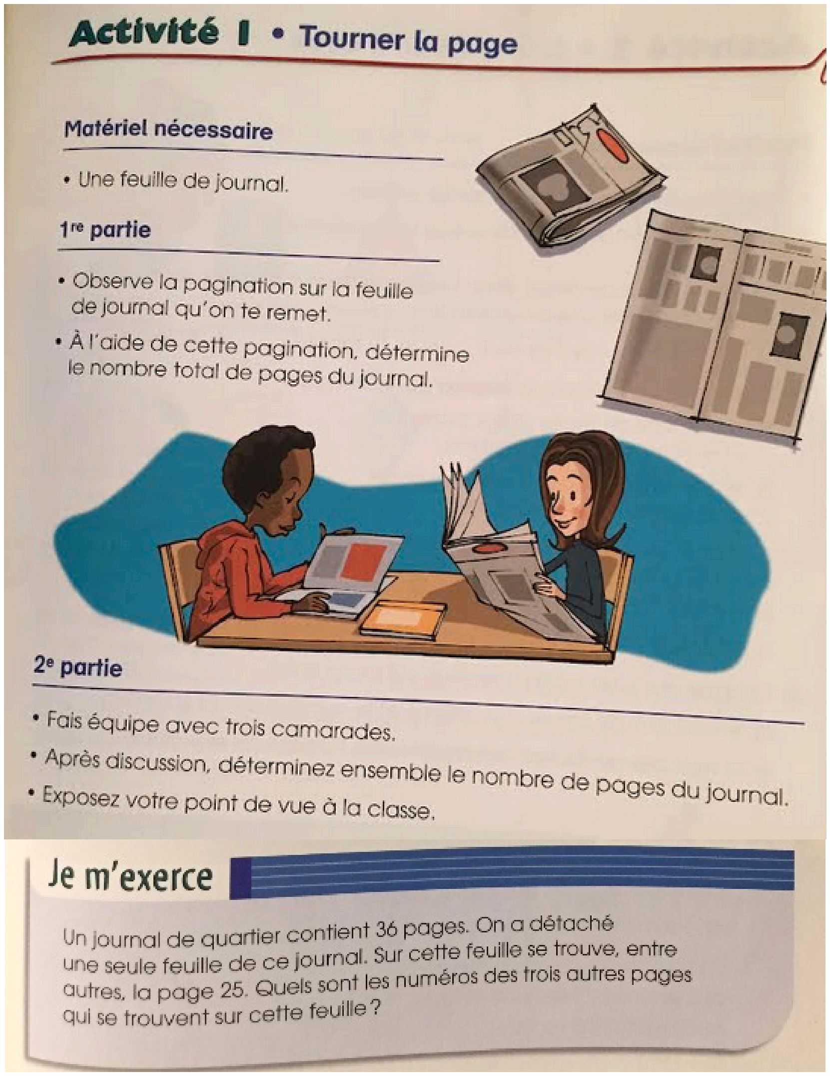
Nous proposons l'analyse de l'activité 1 « Tourner la page » et de l'item dans « Je m'exerce », ceux-ci étant liés.[64]

Ces items ont été classés dans la catégorie « Mathématiser » avec un potentiel 2 et dans la catégorie « Généraliser » avec le même niveau de potentiel, 2.

Cet item vise le passage d'une observation du monde physique à une représentation qui permet un traitement mathématique. Construire une généralité qui permet d'inférer des informations supplémentaires.

[64] Nous avons ici 2 items qui sont étudiés en même temps car ils sont reliés de près, similaires mais faisant appel à des raisonnements différents.

Figure 4.14 Tourner la page - B2, situation 30, sections « Activité », et « Je m'exerce », p.81


Activité 1 • Tourner la page

Matériel nécessaire

• Une feuille de journal.

1re partie

• Observe la pagination sur la feuille de journal qu'on te remet.
• À l'aide de cette pagination, détermine le nombre total de pages du journal.

2e partie

• Fais équipe avec trois camarades.
• Après discussion, déterminez ensemble le nombre de pages du journal.
• Exposez votre point de vue à la classe.

Je m'exerce

Un journal de quartier contient 36 pages. On a détaché une seule feuille de ce journal. Sur cette feuille se trouve, entre autres, la page 25. Quels sont les numéros des trois autres pages qui se trouvent sur cette feuille ?

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths B2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.81

À partir d'un objet concret (feuille d'un journal) et des informations qu'il fournit (des numéros de pages), déterminer en collaboration (équipe de 4 personnes) une autre information qui en découle logiquement (le nombre de pages du journal d'où est tirée la feuille). Dans un deuxième temps, à partir d'un seul numéro de page connu d'une autre feuille et du nombre de pages du journal dont il est tiré, déterminer les 3 autres numéros de pages figurant sur cette feuille. L'élève doit donc concevoir une formule ou une autre méthode qui fonctionnerait avec une autre feuille d'un autre journal.

Pour répondre à cet item, il faut que les élèves aient des connaissances usuelles sur la façon dont est assemblé un journal. En effet, celui-ci est composé de grandes feuilles superposées les unes aux autres et qui sont par la suite pliées en deux dans le sens de la longueur. Ainsi, chaque feuille est composée de 4 pages qui ne seront pas toutes numérotées dans l'ordre. Pour bien analyser cet item, il faut prendre en considération le travail qui est demandé dans un premier temps. Ils ont eu en main une feuille de journal et ils ont eu à déterminer en équipe le nombre de pages du journal à partir de la pagination inscrite sur cette seule feuille (4 numéros), ce qui a permis de comprendre un certain lien entre les numéros de pages sur une même feuille et le nombre total de pages du journal. Supposons que je regarde la page 13. À gauche, sur le même côté de la grande feuille, il y aura un autre nombre n qui n'est pas 12 à moins que ma feuille soit celle du centre, auquel cas le journal comptera 2 x 12 = 24 pages. Avant ma page de droite, j'aurai les 12 pages qui la précèdent, (sur 6 grandes feuilles). Il me suffit d'ajouter 12 au nombre de gauche n de ma feuille pour connaitre le nombre de pages du journal, par symétrie. Si au lieu de 13, la page de droite est p, et la page de gauche est n, on va conclure que le journal contient $n + p - 1$ pages.

Volet C: Les deux items sont classés au niveau 2 car ils demandent implicitement de déterminer un calcul (M2) et de trouver une règle pour généraliser le raisonnement (G2). En procédant à ce raisonnement, on en vient à une généralisation factuelle (la procédure peut se répéter avec une autre feuille).

À la question « Je m'exerce », la page 25 est une page de droite puisque la première page est 1 (déduction) et elle est à droite, en effet, toutes les pages impaires sont des pages de droite. (On imagine la feuille dépliée, avec le texte à l'endroit.) Son verso est 26. Comme il y a 36 pages, les autres versos des pages de droite sont 28, 30, 32, 34 et 36. Il y a donc 5 feuilles en-dessous de la page que l'on a en main. La page 1 est sur le même côté de la même feuille où il y a le 36. Sur les 5 feuilles, au début du journal, il y a les pages de 1 à 10. Sur notre feuille, on a alors les pages 11 et 12 et on sait qu'on avait aussi 25 et 26.

On peut remarquer que la somme des numéros de 2 pages d'un côté d'une même feuille est 37, soit 1 de plus que le nombre de pages. On peut alors déduire encore plus rapidement cette information : 25 +___ = 36 + 1 permet de trouver que sur le même côté de la feuille, il y a le numéro 12.

4.1.5 Exemple d'un item qui est dans les trois catégories

Nous avons recensé 4 items qui sont dans les trois catégories, 3 items dans les manuels destinés à la 5^{e} année et 1 item pour la 6^{e} année.

Exemple 13: les trois vases (figure 4.15)

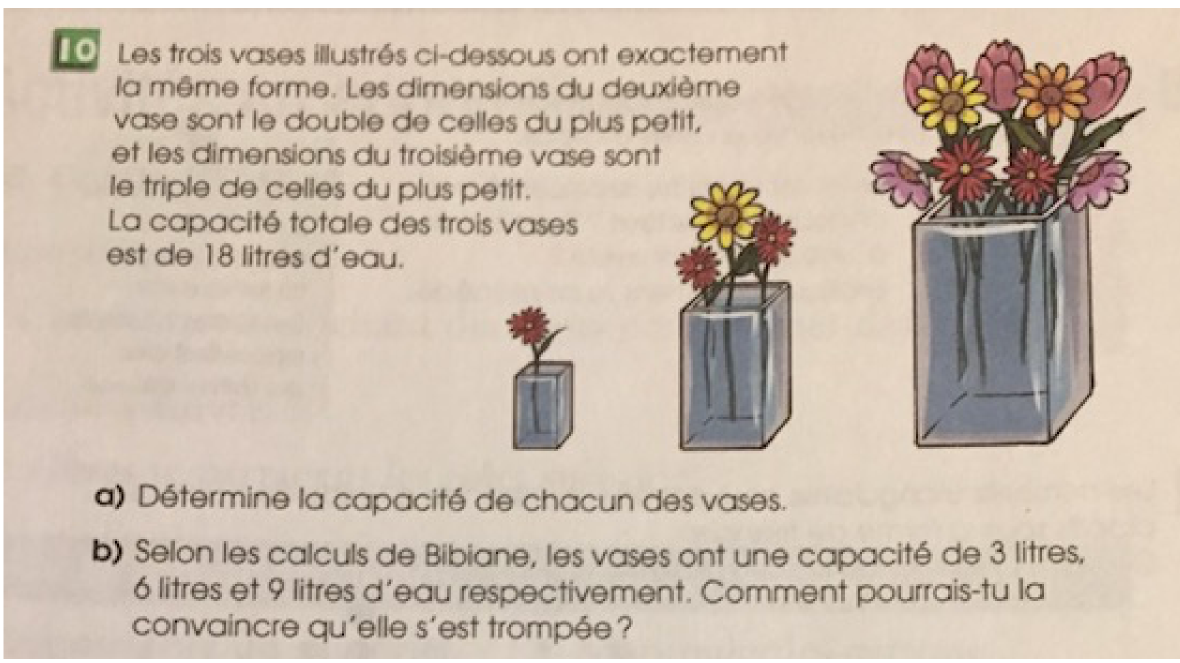
Cet item est tiré d'un des manuels de 5^{e} année A2, p.135, de la section « Je réinvestis ».

Il mise sur le passage d'une observation d'un dessin qui représente une situation du monde physique à une représentation qui permet un traitement mathématique. Il faut ensuite résoudre le problème à l'aide de cette représentation.

Il faut déterminer 3 inconnues reliées dans un schéma de problème déconnecté de type source.

On compare les dimensions des 2^{e} et 3^{e} vases à celle du 1er vase, mais on parle ensuite de la capacité totale des 3 vases en litres sans donner les dimensions du 1er vase.

Figure 4.15 Les vases, A2, « Je réinvestis », situation 38, p.135, n^{o} 10



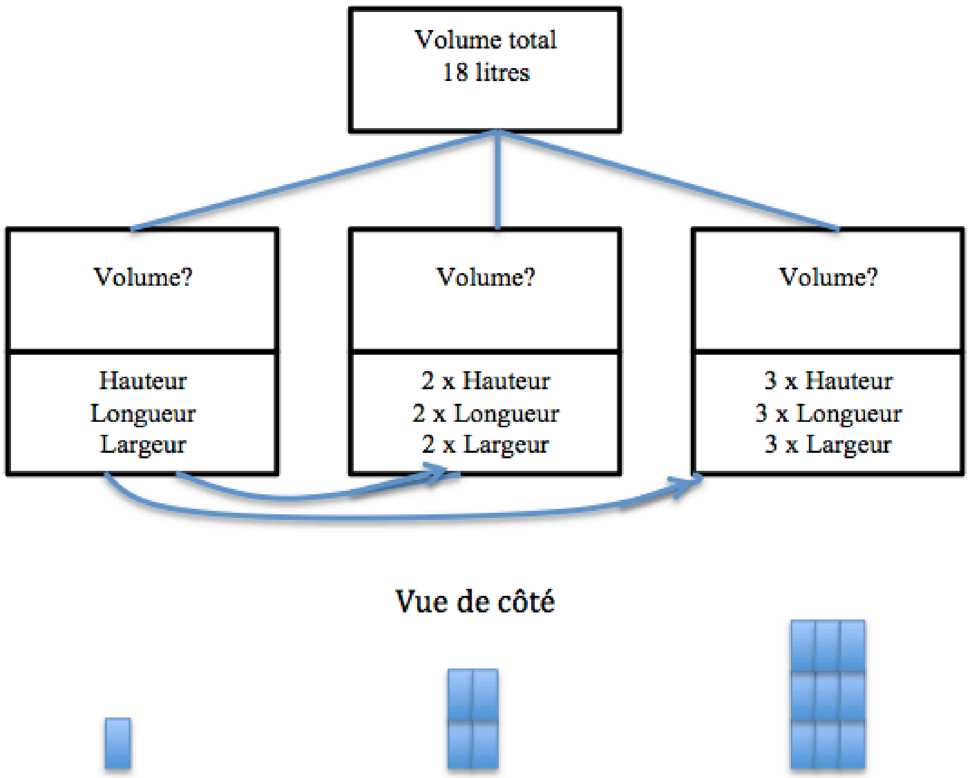
GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A2, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.135

CATÉGORIES (volet A)

Mathématisation/Modélisation	niveau 2
Généralisation	niveau 0
Action sur une structure	niveau 2

On ne demande pas explicitement de schématiser la situation, mais c'est implicite car nécessaire pour comprendre les relations entre les données (voir ma figure 4.16).

Figure 4.16 Les 3 vases, modélisation des relations pour résoudre



Le 2e vase va contenir l'équivalent de 8 petits vases car il y a 4 autres « petits vases » derrière les 4 que l'on voit. Le 3e vase est formé de 3 couches comme celle que l'on voit et contient donc l'équivalent de 27 petits vases. Reste à calculer comment obtenir un total de 18 litres avec cette contrainte. Il faut concevoir 36 petits vases (1+8+27) dans lesquels on répartit également ces 18 litres. Il faut donc faire 18 ÷ 36 = ½. Chaque petit vase contient donc 0,5 litre. Un autre critère est sollicité dans cet item, il s'agit d'agir sur la structure, même si on n'a pas explicitement écrit ceci (à la manière de Davydov et Dougherty) : $V + 8V + 27V$.

En effet, on ne connait aucune des 3 capacités des vases, mais seulement le rapport de leurs capacités et la capacité totale. Il s'agit donc d'un problème déconnecté de type source, avec le volume total connu. L'hypothèse de 3, 6 et 9 litres ne respecte pas le rapport des volumes.

Au volet C, on peut estimer que la manifestation d'une pensée algébrique est nécessaire (niveau 2) car on demande à l'élève de montrer qu'une solution est inadéquate si elle relie les capacités avec les rapports double et triple. Il devra se poser la question à savoir pourquoi la capacité du 2^e vase n'est pas le double de celle du premier si ses dimensions sont doubles. Il est aussi possible de créer un modèle concret avec des blocs manipulables. Il devra visualiser le nombre de petits vases qui peuvent se vider dans un plus gros. Il aura alors la possibilité de travailler avec la quantité inconnue (capacité du petit vase) comme si elle était connue car il reconnaitra des multiples de cette quantité dans les autres vases. Si la question du liquide vient mélanger les cartes, on pourrait considérer les vases comme formés de blocs emboîtables. Il y a aussi une piste de généralisation en observant la suite des cubes ($1, 2^3, 3^3, ...$) et en se demandant si le vase suivant contiendrait 4^3 petits vases, donc on peut lui accorder un potentiel 0 dans la catégorie généralisation car cela a peu de chance de se produire sans une intervention spécifique de l'enseignant avec une question supplémentaire.

Dans la prochaine section, je donne les constats obtenus par l'application de la grille d'analyse présentée au chapitre précédent et discutée dans les sections précédentes de ce chapitre pour les manuels de 5e année et pour ceux de 6e année. On se souviendra que trois catégories principales d'activité mathématique sollicitées sont considérées comme des indices associés à la pensée algébrique pouvant se manifester avant l'usage formel de la lettre (avant l'apprentissage systématique du calcul littéral) et que chacun des items peut appartenir à une, à deux ou même aux trois catégories à la fois.

4.2 Analyse des manuels Clicmaths, 3e cycle du primaire, manuel A (5e année), volumes 1 et 2 et manuel B (6e année), volumes 1 et 2

4.2.1 Portrait global des quatre manuels

Dans le tableau 4.5, nous avons dénombré les items selon leur appartenance à chacune des 3 catégories. Il est à noter que nous ne souhaitons pas faire d'étude statistique mais donner un portrait des items retenus dans le manuel.

Remarque: dans ce tableau particulier, certains items ont été comptés plus d'une fois car ils appartiennent à plus d'une catégorie.

Tableau 4.5 Occurrences de chacune des cotes de potentiel dans l'ensemble des 4 manuels

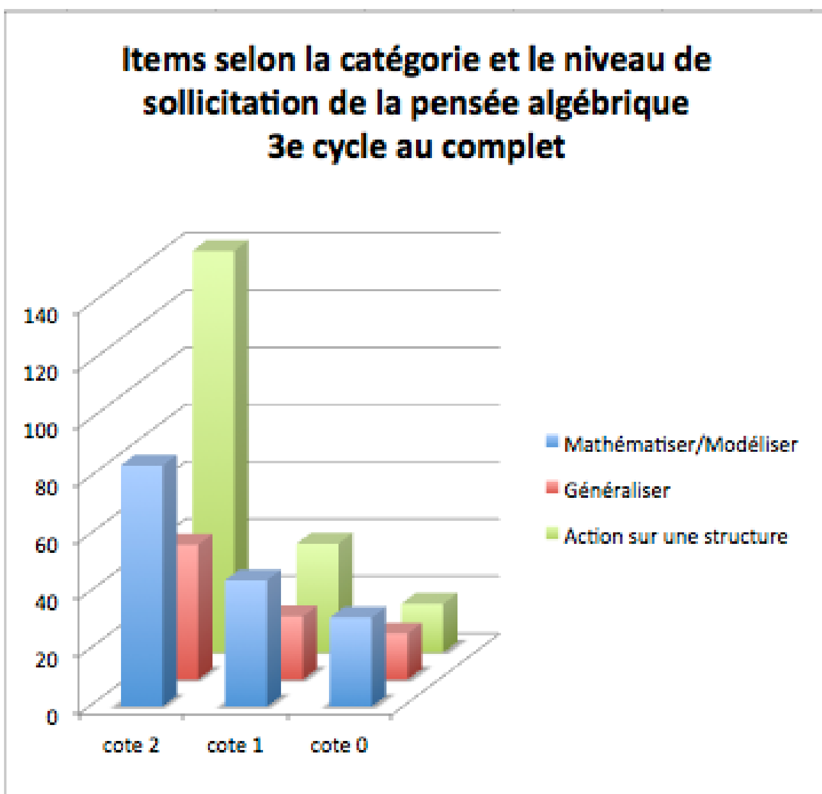
GLOBAL	cote 2	cote 1	cote 0	
M	84	44	31	159
G	47	22	16	85
S	140	38	17	195
	271	104	64	439

Légende : M pour Mathématiser/Modéliser, G pour Généraliser et S pour Action sur une structure.

Les totaux d'items pour chacune de ces trois catégories ainsi que le nombre d'items recensés selon leur niveau de potentiel sont indiqués. Une représentation visuelle de ces totaux est donnée à la figure 4.17.

On a attribué 439 cotes en tout aux 344 items retenus (voir tableaux 4.7 et 4.8).

Figure 4.17 Appartenance des items aux 3 catégories et niveaux 0, 1 et 2 de potentiel



Sur 902 items recensés dans les 4 manuels scolaires, 344 items ont été retenus pour l'analyse dont 73 dans le manuel A1, 108 dans le manuel A2, 84 dans le manuel B1 et 79 dans le manuel B2. Ceux-ci sont répartis dans les 4 manuels de la façon suivante (tableau 4.6):

Tableau 4.6 Répartition des items dans les quatre manuels selon les différentes catégories

	Mathématiser/Modéliser	Généraliser	Action sur une structure	Deux catégories	Trois catégories
Manuel A1	19	6	35	12[1]	73
Manuel A2	31	12	25	38[2]	2
Manuel B1	21	12	23	27[3]	1
Manuel B2	22	14	33	10[4]	0
Totaux	93	44	116	87	4

m pour Mathématiser/Modéliser, g pour Généraliser et s pour Action sur une structure

[1] A1: (4 m-s, 3 m-g, 5 g-s)
[2] A2: (27 m-s, 6 m-g, 5 g-s)
[3] B1: (15 m-s, 1 m-g, 11 g-s)
[4] B2: (4 m-s, 2 m-g, 4 g-s)

Remarques générales :

- Il y a des items retenus comme ayant du potentiel pour développer la pensée algébrique dans les 4 manuels donc dans les deux années du troisième cycle.
- Nous avons recensé majoritairement des items qui sont dans la catégorie « Action sur une structure » et relativement peu d'items dans la généralisation.
- L'analyse a fait émerger des items qui ont été classés dans 2 catégories et même dans les 3 catégories.
- Le tableau 4.6 ne fait pas état des cote de potentiel.

Rappelons que les manuels Clicmaths sont organisés par étapes constituées de situations qui font appel à différents champs d'études de la mathématique (savoirs essentiels dans le PFEQ du primaire) : mesure, géométrie, arithmétique, probabilité et statistique.

Les deux tableaux qui suivent (4.7 et 4.8) présentent la répartition des items retenus dans les 78 situations proposées par Clicmaths au troisième cycle du primaire. Les première et quatrième colonnes correspondent aux numéros de situation; les seconde et cinquième, à la désignation des situations tels que donnée par les auteurs des manuels, et les troisième et sixième au nombre d'items retenus par rapport au nombre total d'items dans chacune des situations.

Tableau 4.7 Répartition des items retenus dans les différentes situations des manuels de la 5e année du primaire.

	Clicmaths 5e année, manuel A, volume 1			Clicmaths 5e année, manuel A, volume 2	
	Étape 1	**27/106 items retenus**		**Étape 3**	**46/114 items retenus**
1	enquête statistique	1/14	20	division et nombres décimaux	12/20
2	estimation et grands nombres	10/17	21	kilomètre et équivalences	5/20
3	sens de la fraction	6/17	22	fractions équivalentes	12/18
4	carrefour	0/2	23	carrefour	0/3
5	concept d'angle	0/16	24	classification des triangles	4/18
6	cercle	6/15	25	aire et unités conventionnelles	10/17
7	horloge et temps	4/21	26	frises	1/15
8	carrefour	0/2	27	carrefour	1/2
9	labo mesure du temps	0/2	28	labo du hasard	1/1
	Étape 2	**46/123 items retenus**		**Étape 4**	**62/115 items retenus**
10	notion de pourcentage	3/17	29	multiplication d'un nombre décimal	15/19
11	comparaison intuitive des fractions	2/17	30	division par un nombre de deux chiffres	13/21
12	angles en degrés	3/19	31	choix de la forme d'écriture	6/18
13	carrefour	0/2	32	carrefour	0/1
14	multiplication	9/19	33	labo du hasard	1/1
15	puissance et exposants	14/20	34	retour sur la représentation	5/10
16	masse et capacité	9/19	35	retour sur la mesure	2/10
17	carrefour	1/4	36	retour sur les opérations	6/8
18	labo mesure	2/3	37	retour sur la comparaison et les équivalences	2/10
19	Le savais-tu?	3/3	38	retour sur la résolution de problèmes	11/14
			39	Le savais-tu?	1/3
	TOTAL A1	**73/229**		TOTAL A2	**108/229**

Tableau 4.8 Répartition des items retenus dans les différentes situations des manuels de la 6e année du primaire

	Clicmaths 6e année, manuel B, volume 1			Clicmaths 6e année, manuel B, volume 2	
	Étape 5	**48/117 items retenus**		**Étape 7**	**28/107 items retenus**
1	résolution de problèmes et opérations	12/19	20	arrondissement	5/18
2	moyenne arithmétique	7/19	21	multiplication des nombres décimaux	7/18
3	figures planes et polygones réguliers	0/17	22	suite d'opérations	13/17
4	carrefour	1/2	23	carrefour	0/3
5	caractères de divisibilité	18/22	24	dallages	1/14
6	opérations sur les fractions	6/16	25	développement de polyèdres	0/15
7	diagramme circulaire	3/15	26	unités de mesure volume	2/19
8	carrefour	0/4	27	carrefour	0/1
9	labo de la mesure: température	1/3	28	labo du hasard	0/2
	Étape 6	**36/117 items retenus**		**Étape 8**	**51/103 items retenus**
10	notion de pourcentage	15/19	29	multiplication d'un nombre décimal	19/19
11	comparaison intuitive des fractions	5/18	30	division par un nombre de deux chiffres	9/16
12	angles en degrés	1/17	31	choix de la forme d'écriture	3/15
13	carrefour	0/1	32	carrefour	0/2
14	multiplication	5/17	33	labo du hasard	0/1
15	puissance et exposants	5/17	34	retour sur la représentation	2/10
16	masse et capacité	2/19	35	retour sur la mesure	11/11
17	carrefour	0/4	36	retour sur les opérations	1/12
18	labo mesure	0/1	37	retour sur la comparaison et les équivalences	4/10
19	Le savais-tu?	3/4	38	retour sur la résolution de problèmes	0/4
			39	Le savais-tu?	2/3
	TOTAL B1	**84/234**		TOTAL B2	**79 /210**

On a retenu 344 items sur une possibilité de 902. À partir des tableaux 4.7 et 4.8 on tire les résultats remarquables suivants:

L'arithmétique est le champ de la mathématique qui est omniprésent dans notre sélection d'items ayant un potentiel de développement de la pensée algébrique. Ces items sont étalés en 5e et 6e années mais leur présence parait plus affirmée en 6e année, comme on peut le voir dans les tableaux 4.9 et 4.10. Ces tableaux présentent la liste des situations, ordonnée selon leur proportion d'items retenus. Dans 4.9, la première colonne précise le manuel dans lesquels se trouvent les items retenus (A pour la 5e année et B pour la 6e année), la deuxième colonne identifie le numéro de la situation de laquelle sont issus les items retenus. La troisième colonne donne la fréquence des items retenus en proportion de ceux qui sont présents dans la situation, la quatrième colonne présente cette fréquence sous forme de fraction et la cinquième colonne rapporte le titre de la situation d'où sont tirés les différents items.

Tableau 4.9 Présentation de la liste ordonnée des situations classées selon leur proportion d'items retenus

B	29	1	"19/19	multiplication d'un nombre décimal
B	35	1	"11/11	retour sur la mesure
B	5	0,81818182	"18/22	caractères de divisibilité
A	29	0,78947368	"15/19	multiplication d'un nombre décimal
B	10	0,78947368	"15/19	notion de pourcentage
A	38	0,78571429	"11/14	retour sur la résolution de problèmes
B	22	0,76470588	"13/17	suite d'opérations
A	36	0,75	"6/8	retour sur les opérations
A	15	0,7	"14/20	puissance et exposants
B	1	0,63157895	"12/19	résolution de problèmes et opérations
A	30	0,61904762	"13/21	division par un nombre de deux chiffres
A	2	0,58823529	"10/17	estimation et grands nombres
B	30	0,5625	"9/16	division par un nombre de deux chiffres

On voit que les situations traitant d'arithmétique (multiplication d'un nombre décimal, caractères de divisibilité, multiplication d'un nombre décimal, notion de pourcentage, suite d'opérations, retour sur les opérations, puissance et exposants, etc.) sont en tête de liste. Par exemple, la première ligne du tableau 4.9 nous montre que dans la situation 29 du manuel B (6e année) tous les 19 items présents ont été reconnus comme favorisant le développement de la pensée algébrique (aucun item n'a été rejeté). Sauf à la deuxième ligne, où le sujet principal est la mesure, et à la sixième qui traite de la résolution de problèmes, toutes les autres lignes réfèrent principalement à des sujets arithmétiques.

Dans le tableau 4.10, nous avons recensé les situations selon le plus grand nombre d'items retenus sans considérer le nombre total d'items dans chaque situation; l'arithmétique ressort aussi clairement considérant de plus que la résolution de problèmes comporte aussi des situations arithmétiques. Ainsi, une trentaine de situations ont pour sujet principal l'arithmétique (dans A1, les situations 2, 3, 4, 10, 11, 14, 15, 19; dans A2, 20, 22, 29, 30, 31, 34, 36, 37, 39; dans B1, 2, 5, 6, 11, 14, 16, 19; et dans B2, 20, 21, 22, 23, 29, 34, 35, 39).

Il y a aussi cinq situations qui combinent l'arithmétique avec la géométrie ou la mesure (4 situations « carrefour » et une « Le savais-tu? »). Il y en a 13 sur la géométrie (les situations 5, 6, 8, 12 dans A1; 23 à 26 dans A2; la 3 dans B1 et 24, 25, 30, 36 dans B2), 10 sur la mesure (dont 8 en 5e année), 7 sur la probabilité et 5 sur la statistique. Il y a aussi des items qui touchent à plus d'un champ.

Tableau 4.10 Présentation des situations selon le nombre le plus grand d'items retenus sans considérer le nombre total d'items dans chaque situation.

nb d'items	situation	
19	B2-29	relation d'égalité et distributivité
18	B1-5	caractères de divisibilité
15	A2-29	multiplication d'un nombre décimal
15	B1-10	résolution de problèmes
14	A1-15	puissance et exposants
13	A2-30	division par un nombre de deux chiffres
13	B2-22	suite d'opérations
12	A2-20	division et nombres décimaux
12	A2-22	fractions équivalentes
12	B1-1	résolution de problèmes et opérations
11	A2-38	retour sur la résolution de problèmes
11	B2-35	retour sur les opérations
10	A1-2	estimation et grands nombres

Ces autres champs des mathématiques qui sont normalement moins susceptibles de proposer des items menant vers une pensée algébrique, présentent quand même un certain potentiel, et ça serait une erreur de les négliger.

4.2.2 Analyse selon les catégories dégagées de la grille d'analyse (volet A)

Rappelons d'abord que pour chacune des catégories de notre grille d'analyse, nous avons classé les items selon un niveau 0, 1 ou 2 correspondant à leur potentiel pour développer la pensée algébrique chez l'élève. On peut en voir une répartition détaillée dans les tableaux 4.11, 4.12 et 4.13.

Tableau 4.11 Répartition des items retenus selon les cotes qui leur sont attribuées

A1	A2	B1	B2	
6	7	5	4	M0
4	9	8	6	M1
9	15	8	12	M2
0	2	4	0	G0
0	3	0	7	G1
6	7	8	7	G2
4	4	1	5	S0
10	5	2	4	S1
21	16	20	24	S2
4	27	15	4	M et S
3	6	1	2	M et G
5	5	11	4	G et S
1	2	1	0	M, G et S
73	108	84	79	Totaux

En en-tête du tableau, les étiquettes A1, A2, B1 et B2 désignent les différents manuels scolaires. Dans la colonne à droite sont représentées les catégories avec leur niveau de potentiel (par exemple M0 regroupe les items qui sont dans la catégorie Mathématiser/Modéliser et qui ont comme niveau de potentiel 0). Ceux qui ont plus d’une catégorie sont comptés à part, dans le bas du tableau.

Remarque: le nombre total d'items, 344, est obtenu en sommant la dernière ligne.

Pour avoir le nombre total de cotes attribuées, il faut reprendre les nombres dans les lignes des cotes doubles et deux autres fois ceux de la ligne des cotes triples.

$$439 = 344 + (4 + 27 + 15 + 4) + (3 + 6 + 1 + 2) + (5 + 5 + 11 + 4) + 2(1 + 2 + 1 + 0)$$

Tableau 4.12 Répartition générale des items selon les tableaux 4.11 (items) et 4.5 (cotes)

	Potentiel 0	Potentiel 1	Potentiel 2
Mathématiser/Modéliser (27% des items retenus - cote simple; 36,2% de toutes les cotes)	22/344 items 31/439 cotes	27/344 items 44/439 cotes	44/344 items 84/439 cotes
Généraliser (13% des items retenus; 19,4% de toutes les cotes)	6/344 16/439	10/344 22/439	28/344 47/439
Action sur une structure (34% des items retenus; 44,4% de toutes les cotes)	14/344 17/439	21/344 38/439	81/344 140/439
pour items avec une seule cote-->	(22+6+14)/344 12,2%	(27+10+21)/344 16,9%	(44+28+81)/344 44,5%
toutes les cotes (simples, doubles et triples)-->	(31+16+14)/439 14,6%	(44+22+38)/439 23,7%	(84+47+140)/439 61,7%

Donc 26,4% des items ont plus d'une cote.

Tableau 4.13 Répartition générale des items (suite) selon tableau 4.6

	cote unique	dans une double cote	dans une triple cote
M 159/439 soit 36,2% de toutes les cotes	22+27+44=93	9+16+37=62	4
G 85/439 soit 19,4% de toutes les cotes	6+10+28=44	8+10+19=37	4
S 195/439 soit 44,4% de toutes les cotes	14+21+81=116	3+17+55=75	4

Quelques remarques :

- Il y a un bon nombre d'items avec un potentiel 2 quand ils ont une seule cote mais c'est encore plus présent quand on tient compte des cotes multiples. Rappelons que le potentiel d'un item n'est pas une garantie que l'élève pourra le résoudre seul. Le rôle de l'enseignant est toujours primordial pour la transposition didactique du contenu du manuel.

- On constate que la majorité de ces items de potentiel 2 sont dans la catégorie « Action sur une structure ».

Nous proposons maintenant une analyse des items par catégorie, sans trop s'attarder à ces niveaux pour l'instant, notre intention étant de mettre en relief les actions attendues de l'élève et les caractéristiques des opportunités pour le développement de la pensée algébrique primitive présents dans les items en relation avec ceux qui sont proposés dans la grille d'analyse, résultant du recensement de la recherche réalisée au chapitre II. Le niveau de nécessité d'une intervention de l'enseignant face à un item pour alimenter la discussion algébrique est rattaché au niveau de potentiel de l'item et ne sera donc pas discuté ici. Rappelons en passant que ces niveaux ne concernent pas le degré de difficulté des items, mais le fait qu'ils soient favorables au développement de la pensée algébrique primitive, et à quel point ils le sont.

Dans l'analyse qui suit, en croisant les champs d'activité mathématique avec les catégories de la grille, je mets certains éléments en relief.

Dans les encadrés, ce qui est dans la grille d'analyse et dans les manuels (points en commun).

En bleu, on aura des éléments qui sont dans les manuels mais dont je n'ai pas pu identifier une trace explicite dans mon cadre conceptuel. Le lien de ces éléments avec le cadre se présente de façon implicite.

En vert, on verra des propositions d'ajouts à la grille grâce à des opportunités pour le développement de la pensée algébrique primitive découverts dans les manuels. Il peut s'agir d'éléments qui auraient pu être dans ma grille car ils font partie du cadre conceptuel.

On portera attention à la présence d'éléments de la grille qui n'ont pas trouvé écho dans les manuels, en orangé.

4.2.2.1 Analyse de la catégorie Mathématiser/Modéliser

Rappelons que nous avons relevé 159 items dans cette catégorie sur les 344 retenus, 93 ayant exclusivement cette cote, 62 ayant une seconde cote et 4 ayant les trois cotes.

Les items appartenant à cette catégorie se retrouvent dans tous les champs de contenu mathématique du primaire, soit la statistique, la probabilité, l'arithmétique, la géométrie et la mesure. Les conversions de mesures et calculs avec des quantités et des taux unitaires sont très présents un peu partout dans les manuels.

À noter : à partir d'ici, les paragraphes encadrés sont tirés directement de la grille d'analyse à la section 3.6.1.

De façon générale, on familiarise l'élève à divers types de représentations pour mathématiser et modéliser (tableaux, droite numérique, arrangements visuels, graphiques).

En arithmétique:

Production (ou l'interprétation) d'une expression arithmétique, ou quasi-algébrique; d'une égalité, d'une inégalité (ou une relation d'ordre), d'une équation ou d'une inéquation ou d'un schéma qui représente les relations (comparaisons) entre les données décrites dans l'item.

Voici quelques exemples: on demande de laisser la structure en évidence. Ex.: B2, p.26, n^{o} 1 et B2, p.27, n^{o} 3, (achats à l'épicerie); A1, p.118, n^{o} 7 c) (décomposition en base 10); A1, p.119, n^{o} 9a) (somme de puissances).

On demande, implicitement ou non, d'écrire une expression, une équation ou une inéquation de façon quasi-algébrique. Ex.: p.77, n^{o} 9 (côté d'un triangle avec 2 types de bâtonnets); p.83, c); p.117, n^{o} 9 (problème de transformation avec de l'argent). A2, p.135, n^{o} 10 (Les vases) produire un schéma est nécessaire). B1, p.74 (relation d'ordre dans les opérations). B2, p.75, n^{o} 3 (interpréter une équation algébrique).

Création (ou interprétation) d'une représentation autre que celles nommées ci-haut, et qui est susceptible de faciliter le traitement mathématique (avec des symboles conventionnels ou non, des schémas, des diagrammes de Venn, des tableaux, une droite numérique, des graphiques, un plan cartésien, une fonction, un modèle intra-mathématique ou extra-mathématique, une structure).

Ex.: A1, p.14 (représentations dessinées de blocs multibases); p.18 (droites numériques); p.31, n^{o} 2 (un schéma); p.44 (modèle extra-mathématique); B2, p.117 (diagramme de Venn, divisibilité par 3, 6 et 9, modèle intra-mathématique); dessins pour fractions A1, p.138 (unitaires égyptiennes) ; A2, p.91 (déplacements d'une revue prêtée dans la classe); B2, p.8 (mettre distance parcourue calculée vs guépard sur un segment); A1, p.63 (report de la position des aiguilles d'une horloge sur une bande de papier de 24 cm de long - concept de correspondance dans une relation fonctionnelle); A1, p.99, n° 2 (angle entre les aiguilles à trois heures moins dix, heure correspondant à un angle de 35° moins d'une demi-heure plus tard). Cet item touche aussi à la géométrie et à la mesure dans le volet d'action sur la structure. Nous allons y revenir au prochain chapitre.

Description d'une régularité dans une suite. (ex.: alternance +4 -10).

Ex.: A1, p.117, n° 5 (suite des petits triangles, carrés des naturels); A1, p.111, b) (papyrus, suite des puissances de 2); A1, p.21, n° 2 (constater la suite des chiffres de la suite des naturels).

Recherche d'un nombre manquant ou du symbole d'opération qui rend une égalité vraie.

Ex.: B1, p.73, je m'exerce (placer des chiffres pour avoir une multiplication vraie); B1, p.83, (inégalités vraies ou fausses); B2, p.73, (égalités vraies ou fausses et justification); ; B2, p.75, (équations); B2, p.76, n° 6 (symboles d'opérations).

En statistique, bien qu'il y ait peu d'occasions de travailler au développement de la pensée algébrique, nous avons tout de même trouvé quatre items ayant un potentiel dans la catégorie mathématisation/modélisation.

Ces quatre items (dont deux relèvent aussi du champ de la probabilité (B1, p.61, n° 5; p.63 n° 1) peuvent mener l'élève à modéliser une situation afin de créer une représentation plus visuelle des informations via le déploiement d'un raisonnement proportionnel (bandes dans un diagramme, secteurs circulaires). À noter que ces raisonnements proportionnels font aussi intervenir l'arithmétique, ce qui nous rappelle qu'il n'y a pas plus étanchéité parfaite pour les champs que pour les catégories.

En géométrie,

On s'intéresse aux angles produits par les aiguilles d'une montre dans plusieurs items. On va en reparler au chapitre 5. Il s'agit d'une représentation autre, un modèle pour parler du temps. Donc cela appartient aussi au domaine de la mesure.

En mesure, Il y a des calculs avec différentes unités (aires, volumes, masses, températures,...), mais nous avons aussi une situation particulière. Il est à noter que ce champ mathématique est en relation étroite avec l'arithmétique. Ainsi, obtenir une somme de masses d'objets de 100 kg ou décomposer additivement le nombre 100 selon les nombres correspondant aux masses des objets disponibles revient au même travail. Il s'ensuit qu'une relation fonctionnelle peut modéliser une situation réelle (entre quantités) ou purement mathématique (arithmétique). Ainsi, les relations fonctionnelles identifiées dans Mathématiser/Modéliser peuvent être contextualisées ou décontextualisées. Mentionnons une exception dans le cas où on peut parler qualitativement de variation.

Ex.: A1, p.50, n° 4 (variation des anneaux de croissance d'un arbre en fonction des années).

À la lumière de cette analyse, la catégorie Mathématiser/Modéliser de la grille d'analyse peut être précisée.

NOUVEAUTÉS[65]

L'aspect estimation peut s'ajouter à la grille. On peut voir une estimation comme un nombre indéterminée à l'intérieur d'un domaine de validité (ou peut-être comme une forme de mesure).

- Des items dans lesquels l'élève doit trouver une façon d'estimer le nombre d'objets dans un dessin, le nombre d'animaux ou le nombre de personnes dans une foule d'après la prise d'une photo qui montre une partie de l'ensemble. Il peut avoir à compléter d'autres calculs à partir de ces estimations.

Ex.: A1, p.12 (photo d'une foule d'oiseaux); p.44 (estimer l'âge d'un arbre à partir de son diamètre).

[65] Rappel: En bleu, on aura des éléments qui sont dans les manuels mais dont je n'ai pas pu identifier une trace explicite dans mon cadre conceptuel. Le lien de ces éléments avec le cadre se présente de façon implicite.

En vert, on verra des propositions d'ajouts à la grille grâce à des contextes découverts dans les manuels. Il peut s'agir d'éléments qui auraient pu être dans ma grille car ils font partie du cadre conceptuel.

On portera attention à la possibilité d'éléments de la grille qui n'ont pas trouvé écho dans les manuels, en orangé.

Nous avons aussi noté: l'exploitation de bandes dans un diagramme, et de secteurs circulaires dans un raisonnement proportionnel. Et aussi, on a remarqué l'utilisation d'autres symboles relationnels dans l'évaluation de la valeur de vérité de propositions.

Proposition d'ajout: fonction dont on peut parler qualitativement de la variation.

4.2.2.2 Analyse de la catégorie Généraliser

Rappelons que nous avons relevé 85 items dans cette catégorie (dont 44 ayant exclusivement cette cote et les autres ayant une deuxième et parfois une troisième cote) sur les 344 retenus.

En arithmétique

Généralisation d'une solution dans un domaine d'interprétation ou d'application plus étendu ou plus général que celui présent dans l'item ou dans la solution de base (ex.: périmètre d'un polygone régulier à n côtés, forme de la partie décimale d'un nombre).

Ex.: A2, p.11, n° 1 (dire comment on détermine que 25,625 provient d'une division par 8 - transférable aux autres nombres qui ont la même partie décimale);

Les items amènent des questions qui mettent souvent sur la piste d'une généralisation mais ne demandent pas explicitement de s'y engager, comme dans l'item précité.

Expression d'une généralité par un exemple générique ou par l'utilisation de nombres généralisés au moyen de lettres ou de symboles (ex.: 2+0=2; $n+0=n$).

Ex.: B1, p.139, encadré (exemple générique du petit théorème de Fermat).

Travail avec des propositions vraies ou fausses ou incomplètes (comme Carpenter).

Peu exploité, et le but de généralisation n'est pas très manifeste.

Ex.: B2, p.70, act.3 (vrai ou faux) et je m'exerce (= ou ≠); B2, p.75, n° 3 (cases vides pour les nombres qui rendent l'égalité vraie); B2, p.73 au complet.

Expression d'une loi, d'une règle, d'un algorithme, d'une formule, d'une relation entre les nombres;

Ex. A1, p.121, n° 1 (somme des 100 premiers entiers impairs - Expliquer comment); B1, situation 2 au complet (construction du concept de moyenne - aussi dans statistique); B1, p.37 (divisibilité par 3, il reste toujours un cube avec les blocs multibases); B2, p.75, n° 4 (pour calculer le périmètre d'un rectangle).

Établissement d'une conjecture, justification, preuve;. ex.: la somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire).

Ex.: p.109, n° 7 (sommes partielles des puissances de 1/2 en comparant le dénominateur et le numérateur) [ouvre la porte à une discussion sur l'évolution de cette somme et un aperçu de l'idée de limite d'une suite]

On ne retrouve pas l'idée de nombre généralisé dans les manuels mais seulement de nombre générique.

Production d'une généralisation algébrique (factuelle, contextuelle, symbolique) du terme général d'une suite (ex.: nombres polygonaux).

Ex.:. B2, p.84, n° 1 et n° 2 (trouver la cardinalité du 100e terme d'une suite de figures). A2, p.136, n° 13, justifier la somme des premiers naturels - nombres triangulaires à l'aide d'une suite avec des arrangements de points. B2, p.21, n° 2 (placer des chiffres pour avoir le plus grand produit).

En géométrie et arithmétique::

Expression d'une loi, d'une règle, d'un algorithme, d'une formule, d'une relation entre les nombres;

Ex.: A1, p.44, p.49, n° 3 et p.51, Je suis capable (l'élève doit comparer le diamètre et la circonférence de différents cercles et de différentes façons pour comprendre le lien qui les unit).

établissement d'une conjecture, justification, preuve;

Ex.: A1, p.53, n° 2 (figure imposée - preuve du losange par l'intersection de deux cercles isométriques). Ce problème est en fait exceptionnel car non seulement il est en contexte géométrique avec une vision sur l'algèbre (indétermination du rayon, travail analytique avec ce rayon, et une dénotation contextuelle qui peut se généraliser comme le rapport de la circonférence et du rayon). Et de plus, ce travail résolument analytique sert à obtenir une preuve formelle, qu'elle soit présentée d'une manière ou d'une autre.[66] Mais comme la lettre n'est pas très présente dans les manuels pour représenter une quantité, on ne se rend pas à une preuve algébrique symbolique. Un autre exemple de ce genre est A2, p.53, n° 2 (sans le dire et sans donner de mesures, il s'agit de constater la conservation de l'aire d'un triangle par le principe de Cavalieri, cependant, cet item a les 3 cotes et sera mentionné dans la section suivante).

On retrouve surtout des preuves en arithmétique et en géométrie; de plus, ces champs s'harmonisent très bien pour créer des items intéressants, comme des calculs d'aire et de périmètre à partir des propriétés des figures.

Ex.: A2, p.48, n° 2 (aire par recouvrement de carrés); A2, p.35 (inégalité du triangle).

En mesure, rien à signaler pour la généralisation, sauf peut-être la recherche du critère de l'inégalité du triangle (existence). A2, p.35, act. 1 c). C'est aussi une relation métrique en géométrie.

NOUVEAUTÉS

Combiner les champs arithmétique et géométrie pour créer des problèmes avec raisonnement analytique.

En géométrie:
Aire par recouvrement de carrés; inégalité du triangle (existence).

En statistique et probabilité,

- Estimer une probabilité théorique à partir des résultats d'une répétition de la même expérience aléatoire)

A2, p.102 (probabilité fréquentielle pour inférer une probabilité théorique et prédire des résultats, conjecture)

---

[66] Ce genre d'exploit a été monnaie courante chez d'anciens mathématiciens comme Euclide, Al-Khwārizmī ou Descartes, qui basaient leurs travail algébrique sur des représentations géométriques.

Propositions d'ajout: périmètre d'un polygone régulier à n côtés; forme de la partie décimale d'un nombre, nombres généralisés au moyen de lettres ou de symboles, exemples génériques (utilisation générique de nombres) comme celui du petit théorème de Fermat, nombres polygonaux, généralisation algébrique symbolique, preuve algébrique (symbolique), conjectures comme Carpenter sur les propriétés des nombres

4.2.2.3 Analyse de la catégorie Action sur une structure

Rappelons que nous avons relevé 195 items dans cette catégorie (dont 116 ayant exclusivement cette cote et les autres ayant une deuxième et parfois une troisième cote) sur les 344 retenus.

Les items dans cette catégorie sont très majoritairement en arithmétique, quelques items ont été dénombrés en géométrie et en mesure.

En mesure, de nombreux items utilisent les fractions comme mesure du rapport du nombre d'objets d'un ensemble au nombre total d'objets. Ce genre d'activité est aussi rattaché à l'arithmétique.

En arithmétique

Description d'un ensemble fermé de compositions ou de relations (avec une vision globale d'une expression ou d'une égalité où c'est la structure qui détermine les actions de l'élève). Évocation de termes, de facteurs, de parenthèses et d'opérations.

Ex.: B2, p.25 act.3 (3 résultats différents)

Utilisation de la structure pour identifier ou produire des nombres qui admettent une certaine expression.

Ex.: A2, p.11, n° 1 (25,625 provient d'une division par 8)); B2, p.21, n° 2 (placer des chiffres pour avoir le plus grand produit); B2, p.139 (nombres premiers de Sophie Germain); B1, p.138 (nombres de Fibonacci), etc.

- Considération d'un programme de calcul en tant qu'objet doté de règles de priorités déterminées par sa structure.

B1, p.77, n° 8 (calcul qui donne toujours le même résultat).

Arthmétique, géométrie et mesure

Différenciation du calcul avec des nombres (abstraits) et des quantités (valeurs concrètes précisées ou non). (Les objets géométriques ont des mesures.)

Ex.: A1, p.112 (remplir un solide avec des petits solides - la suite numérique des puissances de 2 comparée avec la situation modélisée en 3D); A1, p.128, n° 4 (cubes de 1 dm pour remplir un volume).

Ex.: A1, p.140 (discussion sur π). On rattache aussi cette discussion dans l'action sur une structure en géométrie. Et à l'arithmétique avec une approximation décimale.

Ex.: B2, p.73 au complet, p.75 n° 3

Utilisation des données d'un tableau pour trouver d'autres valeurs (interpolation, extrapolation par graphique).

Ex.: B1, p.89 (fonction en tableau, conversion °F et °C, extrapolation)

Action de faire varier un élément dans une expression ou relation fonctionnelle ou une répartition;

Ex.: A1, pp.55-56, activités 1 et 2 (covariation de la position angulaire de l'aiguille des minutes en fonction du temps écoulé en minutes, variation de la position de l'aiguille des heures par rapport à sa position à une heure entière selon diverses fractions d'heures);

Modification d'une forme (en agissant de la même manière sur les quantités inconnues et celles qui sont connues), à l'aide des priorités et des propriétés des opérations (par calcul réfléchi, factorisation, regroupements).

-pour obtenir un signifié syntaxique différent (ou pour faire une comparaison pour établir une identité) sans changement de la dénotation.

Ex.: A1, p.118, n° 8 (décomposer en un produit de facteurs premiers); p.121, n° 1 (somme des 100 premiers impairs $200 \times 100/2$); B1, p.34 (commutativité des facteurs d'un nombre - jeu à la calculatrice); A2, p.124, n° 1 (exprimer une somme avec différentes combinaisons de billets de banque). Simplification avec des blocs multi-bases.

-ou pour la réalisation d'une étape de traitement (notamment pour obtenir des équations équivalentes successives pour résoudre une équation ou obtenir une identité, pour faire un calcul mental plus efficace).

Ex.: B2, p.70 (la bordure); A1, p.109, n° 9 (37 x 99).

NOUVEAUTÉS:

placer des chiffres pour avoir le plus grand produit; B2, p.139 (nombres premiers de Sophie Germain); B1, p.138 (nombres de Fibonacci); discussion sur π (géométrique et arithmétique), approximation décimale.

interpolation, extrapolation par graphique ;

variation d'une moyenne par la variation de l'une des données.

Comparaison de capacités ou de volumes inconnus via la forme des entités considérées.

Ex.: A1, p.123, je m'exerce (cube et prisme à base carrée);

A2, p.135, n° 10 (les vases). Ces items touchent aussi à la mesure (Davydov utilisait cette approche dans une phase pré-numérique).

PROPOSITIONS:

Installer le vocabulaire.

- Évocation de termes, de facteurs, de parenthèses et d'opérations.
- Différenciation du calcul avec des nombres (abstraits) et des quantités.

4.2.2.4 Items qui sont dans plus d’une catégorie

Nous avons retenu 87 items qui mobilisent deux catégories, Mathématisation/Généralisation, Mathématisation/Action sur une structure ou Généralisation/Action sur une structure, il y a ce type d’items dans les 4 manuels Clicmaths. Rappelons que chacune des catégories mobilisées peut avoir un niveau de potentiel différent. La majorité des items jumellent les catégories

Mathématisation et Action sur une structure. Pour ce qui est des items qui mobilisent les trois catégories, nous en avons recensés 4 en tout.

Voici ce qui ressort comme actions d'élèves et comme occasions pour cette nouvelle catégorie qui regroupe les items qui impliquent de 2 à 3 catégories.

Les items qui sont dans 2 catégories vont un peu plus loin car ils mobilisent des idées qui sont à la fois dans les deux caractérisations. Parfois aussi, une même action de l'élève se situe à l'intersection des deux catégories (on sait qu'on ne peut pas avoir un découpage en silos hermétiques dans de telles catégories en raison même de la versatilité des concepts et processus mathématiques. C'est la même chose pour les champs d'activité mathématique.

Ex.: M et G veut dire qu'il y a une mathématisation à faire et qu'elle ouvre la porte à une généralisation. Ex.: A1, p.115, act.3 (le pliage en deux à répétition d'une feuille de papier). Il faut d'abord changer les sections de papier de chaque étape en unité à compter (leur quantité) en se souvenant du numéro d'étape et de les associer. On a ensuite la possibilité de produire une généralisation quasi-algébrique en trouvant qu'un terme donné est la puissance de 2 qui correspond au nombre d'opérations.

Avec G et S, nous avons l'exemple de la page 43 du manuel A2, n° 1. L'action sur la structure s'actualise dans la possibilité de partitionner un demi-disque en 3 secteurs circulaires, ce qui peut se faire de façon arbitraire. La généralisation survient quand on constate qu'il est toujours possible de former un triangle qui aura ces trois angles (En pratique, il peut y avoir des espaces vides où les lignes sont incomplètes ou les papiers peuvent se recouvrir mais ce n'est pas conséquent. Voir une preuve dans GeoGebra dans l'analyse des items.

En M et S, notre exemple est un problème de transformation avec de l'argent (A2, p.2) et on commence à se partager également de l'argent mais l'un se trompe et trouve de l'argent supplémentaire. Comment va être changée la répartition (qui donne et qui reçoit combien?)?

On a 4 items qui se sont qualifiés dans les 3 catégories. A1 p.113: Des nombres carrés où on fabrique des arrangements de points carrés (n points par n points). On doit trouver la régularité, trouver de combien de jetons seront formées les 2 figures suivantes et combien il reste à ajouter à une figure qui a 9 de côté et où seulement 24 billes sont actuellement placées. On demande aussi avec 150 jetons, quelle est la plus grande figure de cette suite que l'on peut former.

Le deuxième est celui des triangles de même base et de même hauteur pour un aménagement (A2, p.53). Il faut modéliser avec des valeurs indéterminées, travailler sur la structure géométrique et sur la structure du calcul de l'aire en même temps. On en vient à généraliser en énonçant quelque chose qui ressemble au principe de Cavalieri.

Il y a Les trois vases dont nous avons discuté lors des exemples d'utilisation de la grille. Et le 4^{e} est celui de la preuve du losange discutée plus haut (figure imposée).

On pourrait conclure que les items qui ont plus d'une cote permettent d'avantage d'actions, plus de possibilités d'exploitation que les autres, particulièrement en généralisation. Ils rejoignent plus d'éléments de la grille et donc de la recherche.

L’analyse des manuels Clicmaths a ainsi permis de bonifier le volet A de la grille en termes d’exemples d’actions de l’élève et d'occasions à saisir.

4.3 Présentation de la grille bonifiée suite à l’analyse des manuels Clicmaths

Tel que précisé, c’est essentiellement le volet A de la grille qui a été bonifié suite à l’analyse des quatre manuels scolaires. Nous relevons des exemples d’actions d’élèves et de contextes qui proviennent de l’analyse (tableaux 4.14, 4.15 et 4.16).

A.1) Mathématisation/modélisation (au sens du PFEQ)

- Mathématisation/modélisation de situations: l'élève est appelé à exprimer une situation de façon qui permet/favorise/est compatible avec une activité mathématique à caractère algébrique

Tableau 4.14 Tableau bonifié pour « Mathématisation/Modélisation»

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
- Production (ou l'interprétation) d'une expression arithmétique, algébrique ou quasi-algébrique; d'une égalité, d'une inégalité (ou une relation d'ordre), d'une équation ou d'une inéquation ou d'un schéma qui représente les relations (comparaisons) entre les données décrites dans l'item. La création d'un tel objet mathématique structuré par l'élève est une mathématisation ou une modélisation et se distingue de la troisième catégorie (Action sur une structure) qui implique la modification d'une structure et non la simple variation d'un paramètre.	On a un problème écrit ou présenté autrement mais avec au moins une opération ou une comparaison en jeu et le mode de présentation n'est pas assez explicite pour permettre un traitement immédiat (par calcul ou transformation). Il peut y avoir un besoin de convocation d'une formule: taux de change de la monnaie, calcul de taxe, conversion de mesures (ex.: de volume à capacité et l'inverse), un changement d'échelle de température (°C, °F, Kelvin), etc..
- La création d'une représentation autre que celles nommées ci-haut, et qui est susceptible de faciliter le traitement mathématique (avec des symboles conventionnels ou non, des schémas, des diagrammes de Venn, des tableaux, une droite numérique, des graphiques, un plan cartésien, une fonction, un modèle intra-mathématique ou extra-mathématique, une structure).	Étude d'une variation, d'une covariation ou d'une simulation d'une situation réelle. On donne des relations entre des valeurs ou quantités connues ou inconnues (ou estimées).
-La description d'une régularité dans une suite. (ex.: alternance +4 -10).	Recherche d'un terme particulier d'une suite de nombres (obtenue ou non à partir de figures), en le comparant avec quelques termes voisins. Ce niveau ne fait pas intervenir une pensée algébrique mais prépare le terrain.
-Recherche d'un nombre manquant ou d'un symbole d'opération qui rend une égalité vraie.	Problème avec donnée manquante ou imprécise.
-Émission d'hypothèses sur les sous-entendus; à voir une estimation comme une valeur variable avec un domaine de validité.	Valeur approximative à partir d'une photo.

A.2) Travail de généralisation

Tableau 4.15 Tableau bonifié pour travail de « Généralisation »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
Généralisation d'une solution dans un domaine d'interprétation ou d'application plus étendu ou plus général que celui présent dans l'item ou dans la solution de base (ex.: périmètre d'un polygone régulier à *n* côtés). Forme de la partie décimale d'un nombre. Expression d'une généralité par un exemple générique ou par l'utilisation de nombres généralisés au moyen de lettres ou de symboles (ex.: 2+0=2; *n*+0=*n*). Travailler avec des propositions vraies ou fausses ou incomplètes (comme Carpenter). Acceptation d'un résultat expérimental comme une conjecture, établissement d'une conjecture, justification, preuve; expression d'une loi, une règle, un algorithme, une formule, une relation entre les nombres ou entre les mesures d'objets géométriques. (ex.: probabilité 1/2, la somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire). Produire une généralisation algébrique (factuelle, contextuelle, symbolique) du terme général d'une suite (ex.: nombres polygonaux).	On veut créer une formule pour calculer dans une classe de problèmes de même structure (ex.: facture incluant le calcul correct de la taxe avec un montant arbitraire). On demande de généraliser une solution. Des quantités génériques se retrouvent dans une réponse finale. La commutativité ou d'autres propriétés des opérations (associativité, distributivité, élément neutre, opposé, inverse, absorbant) sont abordées dans des cas particuliers et on veut les établir dans le cas général; On a obtenu un résultat théorique expérimentalement (comme une probabilité). On demande de montrer si quelqu'un qui a affirmé un fait mathématique a raison ou tort. Il est question de critères de divisibilité; de parité; de substituer des nombres aux lettres pour chercher un contre-exemple ou pour augmenter la confiance dans une conjecture. On doit verbaliser une régularité de différentes façons pour trouver un invariant (principalement dans des suites de nombres ou de figures). On veut décontextualiser; prédire. On recherche des ressemblances et des différences, des liens entre les attributs des objets.

A.3) Travail d'Action sur la structure

Tableau 4.16 Tableau bonifié pour « Action sur la structure »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
-Description d'un ensemble fermé de compositions ou de relations (avec une vision globale d'une expression ou d'une égalité). Évocation de termes, de facteurs et de parenthèses. (Utilisation d'une alternative à PEMDAS: description de la structure: « on a 3 termes formés de 2 facteurs chacun dont l'un des facteurs est une parenthèse contenant une somme de 2 termes, etc.). On peut calculer simultanément les 3 termes car ils sont indépendants (moyennant une bonne gestion du signe moins devant les termes). Utilise de la structure pour identifier des nombres qui admettent une certaine expression, pour trouver un tout (le 100%) avec un ensemble discret ou continu. Comparaison. Dans toutes ces situations, une action est posée sur la structure mais sans la modifier.	Avoir à faire un calcul d'expressions arithmétiques ou la simplification d'expressions algébriques où il est nécessaire de bien comprendre les priorités des opérations (et en principe décrire leur fonctionnement); obtenir des produits d'une structure (ex.: les nombres premiers de Sophie Germain sont des nombres premiers tels que, en les doublant et en ajoutant 1, on obtient un autre nombre premier; les nombres impairs 2n+1, les multiples...). Avoir à considérer un programme de calcul en tant qu'objet doté de règles de priorités déterminées par sa structure.
Il peut aussi s'agir de : - la modification d'une forme pour obtenir un signifié syntaxique différent (ou pour faire une comparaison) mais une même dénotation ou la réalisation d'une étape de traitement (le calcul en agissant sur les inconnues comme si elles étaient connues notamment pour obtenir des équations équivalentes successives pour résoudre une équation), l'obtention d'une identité en comparant l'ancienne et la nouvelle structure par une égalité, la factorisation des nombres naturels à l'aide des critères de divisibilité pour l'addition et la soustraction des fractions et les opérations sur elles, (la détermination du PPCM et du PGCD dans un but) ou pour la simplification en contexte de multiplication; la recherche de fractions équivalentes.	Devoir passer de la notation fractionnaire à un pourcentage ou un nombre à virgule et vice versa[2]; Avoir à utiliser des propriétés pour orienter la suite des calculs (la distributivité, des paires qui ont une somme de 10, la permutativité des termes dans une addition de plusieurs nombres); obtenir une réponse finale contenant une opération; faire un changement de base, opérer dans une base différente; simplifier ou résoudre, incluant des opérations sur les fractions; Devoir dénombrer; aborder les conversions d'unités dans des quantités de même nature (SI système international);
-l'utilisation des opérations compensatoires (ex.: la moitié de l'un par le double de l'autre: 200 x 15 = 100 x 30) pour la facilitation des calculs; l'utilisation des stratégies de calcul mental et le calcul réfléchi; la décomposition d'un nombre (ou le dénombrement d'un ensemble) de différentes façons pour faciliter des calculs ou montrer une propriété. La comparaison des segments ou angles congrus en géométrie (sans les mesurer).	Avoir à comparer des programmes de calcul ou les ensembles-solutions d'équations, travailler avec des propositions vraies ou fausses ou incomplètes (comme Carpenter).
(le simple établissement d'une comparaison va dans la catégorie Mathématiser/Modéliser)	Preuve géométrique avec des congruences.

- l'action de fixer ou faire varier un élément dans une expression ou relation fonctionnelle); le travail avec deux contextes (les ensembles qui sont en relation) et l'établissement de liens entre les variations; calcul vitesse-temps-distance L'arrondissement, c'est l'utilisation d'une fonction en escalier (partie entière de x+0,5) avant qu'elle ne soit construite -La réalisation d'un raisonnement sur des variations non proportionnelles.	Avoir à tester en substituant des nombres aux lettres pour chercher un contre-exemple ou pour augmenter la confiance en une conjecture; comparer des variations ou des éléments correspondants en relation; Faire appel à un raisonnement proportionnel; passer de pourcentages à un diagramme circulaire (360° degrés d'angles pour représenter 100% de ce qu'il y a à représenter); observer une covariation; produire un raisonnement fonctionnel; considérer un taux en action (je roule à 90 km/h pendant x heures); Sachant que 20$ est 0,1% de mon salaire…; revient à résoudre une équations algébrique «modèle»; passer à l'opération réciproque, calculer la quatrième proportionnelle. Voir l'effet d'une variation d'une donnée sur la moyenne, le mode, etc., d'une variation affine en général; une variation inverse; une variation donnée dans un tableau ou par une structure de prix, par un graphique gradué ou non.

CHAPITRE V

DISCUSSION

Rappelons que cette recherche s'intéresse à l'algèbre primitive. Nous poursuivions l'objectif de décrire le potentiel pour le développement de la pensée algébrique des éléments contenus dans les documents mis à la disposition des enseignants du Québec. Notre choix s'est porté à la fois sur les documents ministériels comme le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ), le document de la progression des apprentissages (PDA) et sur une collection de manuels scolaires approuvée par le ministère, Clicmaths. Pour cela, une grille d'analyse en trois volets a été élaborée qui relève les aspects de l'algèbre primitive qui ont été dégagés des recherches. Dans une première section de ce chapitre, nous revenons sur la grille qui a été mise à contribution pour analyser les items proposés dans les quatre manuels Clicmaths du troisième cycle du primaire. Cette analyse a permis de bonifier la grille initialement élaborée et de voir la potentialité de ces manuels pour favoriser un travail en algèbre primitive. Dans une deuxième section, nous amenons des pistes pour revisiter certains éléments du PFEQ et de la PDA sous l'angle de l'algèbre primitive. Pour cela, à partir d'une situation tirée de Clicmaths, nous proposons une analyse qui jumelle les éléments du PFEQ et de la PDA sollicités dans la situation et la façon dont ceux-ci peuvent être interpellés pour favoriser un travail en algèbre primitive. En outre, nous verrons que cet item peut être relié à des éléments de la PDA du secondaire. Des liens étroits existent ainsi entre ces deux niveaux scolaires, certains items pouvant être repris au primaire et au secondaire mais avec un traitement différent.

5.1 Discussion autour de la grille d'analyse comme retombée de cette recherche

L'analyse des quatre manuels du troisième cycle du primaire a permis de relever des items qui sont porteurs et qui peuvent être instrumentalisés pour développer la pensée algébrique primitive. Ces items sont plus majoritairement en arithmétique même si plusieurs d'entre eux ont été recensés dans d’autres champs comme la statistique, la probabilité, la géométrie et la mesure. Il en ressort qu’il est possible d'envisager un travail visant le développement de la pensée algébrique tout au long de la scolarité du troisième cycle du primaire. Rappelons qu'il ne s'agit pas d'ajouter du contenu, mais de voir les occasions qui se présentent à nous dans le travail arithmétique de tous les jours.

La grille d’analyse que nous avons développée grâce aux recherches a permis de détecter les items dans les manuels scolaires porteurs pour un travail en algèbre primitive. Cette grille se décline en trois volets. Un premier volet, le volet A, comprend trois catégories : Mathématisation/Modélisation, Généralisation et Action sur une structure. Nous avons identifié, pour ces catégories, des exemples d’actions d’élèves et d'occasions qui permettent de s'engager dans un travail en algèbre primitive. Nous avons repéré plusieurs de ces exemples et caractéristiques dans les quatre manuels scolaires du troisième cycle du primaire à l'aide de la grille, en portant une attention à leurs manifestations particulières dans les différents champs de contenu de la mathématique, et pas seulement de l'arithmétique. Les exemples proposés par les chercheurs eux-mêmes semblent, du moins dans mes lectures, porter sur la compréhension des propriétés des nombres et les priorités des opérations, le calcul réfléchi et les équivalences, des représentations simples de quantités inconnues mises en relation, la construction d'égalités et parfois d'équations et l'action des deux côtés d'une égalité. La découverte des régularités de suites numériques ou figurées est utilisée pour générer des relations fonctionnelles en trouvant la règle. L'utilisation de tables de valeurs et de graphiques non gradués est aussi présente et on fait appel au langage naturel pour construire le sens et établir des correspondances.

Dans les manuels, on retrouve en effet des éléments qui avaient aussi été soulignés par des chercheurs comme les phrases mathématiques lacunaires ou les valeurs de vérité des propositions et les décompositions des nombres de différentes façons. Il y a aussi quelques items qui abordent l'idée de correspondance fonctionnelle sous la forme de tables de valeurs ou de graphique, mais c'est surtout dans les items qui traitent de suites de figures ou de nombres que l'on trouve de nombreux exemples de relations fonctionnelles discrètes. Les suites forment le principal sujet d'intérêt quand il est question d'étudier des régularités. En ce qui concerne les variations et covariations continues, on y trouve la comparaison des températures en degrés Celsius et Fahrenheit à partir d'un graphique, et diverses discussions sur la variation de position des aiguilles d'une horloge (en degrés) en fonction du temps. En mesure, on a des items dans l'esprit de Davydov avec des comparaisons pré-numériques de quantités inconnues et des calculs de taux et des calculs avec des taux unitaires. Il y a quelques éléments isolés qui touchent l'arithmétique généralisée. Il y a cependant plusieurs items qui, tels que formulés, pourraient très bien se situer dans un livre d'algèbre du secondaire. Rappelons aussi les items qui traitent des préalables, tels qu'indiqués dans le PFEQ et qui sont travaillés au primaire:

> La recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes.

Dans les manuels, on retrouve aussi des éléments qui ne semblent pas être présents dans la recherche au primaire en EA.

On pense aux opérations sur les fractions sans algorithme, basées sur des rapports obtenus d'ensembles d'objets et de leur ensemble de référence (le tout). Il y a aussi les calculs avec des nombres à virgule (en notation décimale) modélisés avec des mini-blocs multi-bases et certaines conversions entre les formes d'écritures. Dans les manuels, on trouve des exemples intéressants en géométrie faisant intervenir des congruences ou des invariants, qui demandent un raisonnement analytique. Les conversions de mesures de volume et de capacité, de même que les ordres de grandeur du système métrique pour les quantités (kilo, déci, milli) sont présentes dans les manuels. Les maigres exemples que l'on a pu retrouver qui appartiennent aux champs de la probabilité et de la statistique y sont pour des considérations arithmétiques ou pour parler de conjectures. Une exception intéressante est l'étude de l'effet de la variation d'une donnée sur une moyenne ou sur le mode. On s'éloigne des exemples de la recherche quand on s'éloigne de l'arithmétique généralisée et du raisonnement fonctionnel. Signalons qu'il y a certains problèmes de logique, mais la logique n'est pas (n'est plus!) un champ de contenu des mathématiques scolaires. Pour terminer, on peut ajouter la présence des inégalités (comparaisons), de la production d'une équation ou d'une inéquation qui représente les relations entre les données, de la covariation, d'estimation et du calcul avec ces estimations et l'émission d'hypothèses sur la valeur de données manquantes. La narration est un peu exploitée dans les problèmes où on connait le résultat final et on veut résoudre en partant de la fin, et dans certaines situations problèmes.

Dans les manuels, on ne retrouve pas certains éléments qui avaient été soulignés par des chercheurs.

Peu d'aspects de l'arithmétique généralisée se retrouvent dans les manuels. Il y a quelques items qui traitent de la distributivité, de la priorité des opérations et de phrases mathématiques qui représentent les calculs à faire en une seule expression, mais comme on ne fait pas appel à la lettre pour représenter des nombres ou des inconnues, il y a peu de place pour représenter des généralisations ou opérer sur elles (modélisation des propriétés des nombres et des opérations). Donc pas de situations du genre Wallet, Candy Box ou Piggy Bank que l'on retrouve dans le livre de Kaput ou de généralisation algébrique symbolique au sens de Radford. Il y a aussi très peu d'usage générique de nombres. On a pu voir occasionnellement un carré vide pour indiquer une valeur manquante et dans les reproductibles[67] qui font partie de l'ensemble didactique le mot équation qui a été utilisé dans ce contexte, mais pas dans les manuels. On pourrait donc nommer presque tout le contenu du livre de Carpenter comme enrichissement potentiel de ce matériel pour une exploitation en algèbre primitive. Rappelons que Clicmaths a été fait en 2003, pendant les balbutiements du mouvement EA (Carpenter a aussi publié son livre en 2003).

Que pourrait-on ajouter de plus?

Peut-être les nombres polygonaux, tel que suggéré par Hitt et coll. (2019). À ces nombreuses possibilités peuvent s'ajouter celles qui ressemblent aux questions proposées dans les textes des chercheurs en tant qu'exemples ou dans leurs questionnaires de pré-test et de post-test utilisés en classe, et toutes les variantes que l'on peut créer à partir de ces exemples à la condition de prendre en compte le cheminement que les élèves auront à parcourir dans leur formation à la compétence algébrique. N'oublions pas que ces items des chercheurs se cantonnent principalement dans le mouvement Early Algebra, alors que nous étendons ce domaine à l'algèbre primitive, qui ne se restreint pas à certaines approches, comme l'approche fonctionnelle ou celle basée sur les quantités ou l'arithmétique généralisée, ou qui ont comme paradigme la continuité ou la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre.

Après l'analyse des manuels scolaires, la grille s'est vue bonifiée (voir section 4.3). Nous retenons une grille épurée qui est une retombée de cette recherche (tableaux 5.1, 5.2 et 5.3).

[67] Notre étude s'est limitée aux manuels de l'élève.

Chaque exemple d'action d'élève est suivi d'un code entre parenthèses qui permet l'opérationnalisation de cette grille.

1) Mathématisation/Modélisation

Pour les items classés dans cette catégorie, il s'agit de représenter une situation pour qu'il soit plus facile d'en faire un traitement mathématique et où l'utilisation de l'algèbre serait une possibilité.

Tableau 5.1 Grille épurée pour le volet « Mathématisation/Modélisation »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
Créer un objet structuré - expression, égalité, inégalité, avec ou sans valeur inconnue, un ordre (1.1.1) ou - une représentation autre, une fonction, un modèle intra-mathématique ou extra-mathématique, une structure (1.1.2);	-une autre représentation que celle donnée est nécessaire; on donne au moins une relation avec situation de proportionnalité ou un taux; plus d'une relation sinon; -il faut faire appel à une formule: taux de change, taxe, conversions cm^3 et ml, °C, °F, Kelvin (K), etc.
Décrire une régularité dans une suite. (Ex.: alternance +4 -10). continuité (1.1.3)	Trouver un terme particulier d'une suite de nombres
La recherche de la valeur ou le symbole d'opération qui rend une egalité vraie. (1.1.4)	Problème avec donnée manquante ou imprécise.
Élaborer des hypothèses sur les sous-entendus; arrondis, estimation et domaine de validité. (1.1.5)	Par exemple la taille d'une personne se situe normalement entre 1,5 et 2 mètres.

2) Généralisation

Tableau 5.2 Grille épurée pour le volet « Généralisation »

EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
domaine d'interprétation ou d'application plus étendu ou plus général (1.2.1) exemple générique, nombre généralisé (1.2.2)	propriétés abordées dans des cas particuliers;
conjecturer, justifier, «prouver»; exprimer une loi, une règle, un algorithme, une formule, une relation entre les nombres. (1.2.3)	probabilité fréquentielle, formule pour classe de problèmes de même structure; montrer vrai ou faux, critères de divisibilité, parité;
généralisation algébrique (factuelle, contextuelle, symbolique) du terme général d'une suite. (1.2.4)	Étude des suites de nombres ou de figures, décontextualiser, prédire.

3) Travail d'Action sur la structure

Tableau 5.3 Grille épurée pour le volet « Action sur une structure »

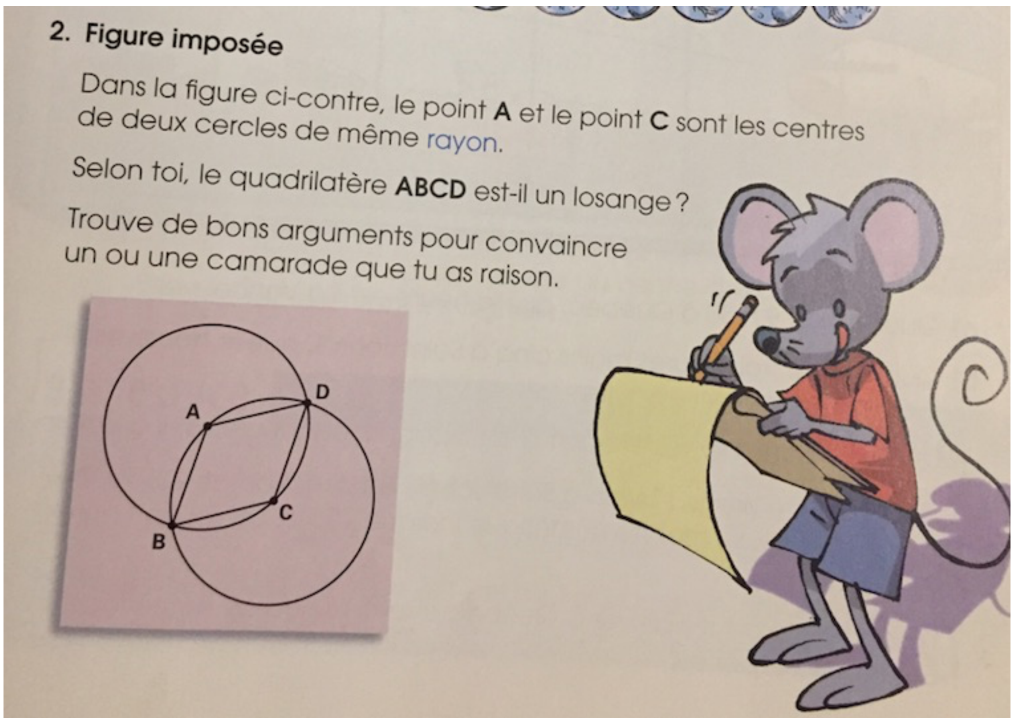
EXEMPLES D'ACTIONS DE L'ÉLÈVE	OPPORTUNITÉS POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE PRIMITIVE
traiter globalement les expressions ou les égalités (voir un programme de calcul en tant qu'objet doté de règles de priorités déterminées par sa structure). (1.3.1)	simplification d'expressions arithmétiques ou algébriques selon les priorités des opérations (avoir des calculs à simplifier); obtenir des produits d'une structure (ex.: les nombres impairs 2n+1, les multiples 5n...).
modifier la forme sans changer la dénotation; -obtenir une identité; -opérations compensatoires (stratégies de calcul mental et le calcul réfléchi); -transformer une expression ou une égalité en une expression ou une égalité équivalente (pour résoudre); opérer sur des fractions; -décomposer un nombre de différentes façons pour faciliter des calculs, dénombrer de différentes façons; -convertir les unités SI; -comparer des segments ou angles congrus en géométrie (sans les mesurer); -comparer, optimiser; comparer des égalités ou des expressions équivalentes; (1.3.2)	passage de la notation fractionnaire à pourcentage ou nombre à virgule et vice versa[68]; -changement de base; -changer l'ordre (si ça ne change pas la dénotation); -étude d'une expression ou comparaison avec une autre dans un but; -travailler avec des propositions vraies ou fausses ou incomplètes (comme Carpenter). - pourcentages à un diagramme circulaire ou à bandes; fractions équivalentes;
- fixer ou faire varier - raisonnement proportionnel, - raisonnement fonctionnel; - établir des liens qualitatifs entre les variations; - trouver le « tout »; (1.3.3)	-taux en action (je roule à 90 km/h pendant x heures); -passer à l'opération réciproque; ex.: temps/distance ou distance/vitesse comment varie une quantité quand c'est l'autre que varie (croissance, domaine, correspondance, covariation) -rapport de quantités indéterminées comme Davidov;
-Faire un raisonnement qualitatif ou quantitatif sur des variations non proportionnelles. (1.3.4)	-donnée vs moyenne, mode, etc.; variation affine, inverse, donnée dans un tableau ou par une structure de prix, par un graphique gradué ou non.

Nous avons pu remarquer qu'il peut arriver qu'un item retenu dans les manuels scolaires ne présente aucun nombre, l'élève étant alors amené à raisonner à partir de nombres inconnus, soit de façon analytique. Ces items sont des exemples intéressants à retenir si l'on pense à une

[68] Bien que ce soit strictement arithmétique, on n'arrivera jamais à rien de bon en algèbre en cas d'ignorance totale des conversions et des opérations sur les nombres rationnels. Le calcul inversé de pourcentage est parfois présenté sous forme de proportion. Ces calculs sont tous tributaires de leur structure, la même que celle de l'algèbre.

séquence d'enseignement. C'est le cas de l'item suivant (voir figure 5.1) qui vise à établir une conjecture et à favoriser une justification à partir de mesures non connues. C'est une des rares situations où on exploite une idée algébrique en contexte géométrique. C'est pourtant un excellent contexte car la géométrie permet d'obtenir des relations de congruence entre des objets, sans que l'on doive préciser leur mesure.

Figure 5.1   Figure imposée, manuel A1, situation 6, section « Je résous »



GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.53

Ainsi, pour décider si la conjecture est vraie, il faut conclure que les 4 côtés du quadrilatère ABCD ont la même mesure, sans connaître explicitement cette mesure. Il faut se servir du fait que les rayons d'un même cercle sont de même mesure et que ces deux cercles ont un rayon en commun (AC). Notez que pendant tout ce temps, nous avons travaillé avec un rayon inconnu comme s'il était connu, de façon analytique.

Toutefois, l'identification des items porteurs d'un potentiel pour l'algèbre primitive n'a pas été toujours aussi évidente que dans l'item de la figure 5.1. C'est la raison pour laquelle la grille d'analyse comporte un autre volet, le volet C, qui décrit le potentiel de l'item pour l'algèbre primitive. Ce potentiel est identifié par 0, 1 ou 2 selon le potentiel autonome de l'item pour susciter une pensée algébrique, 2 étant le plus favorable. La nécessité d'une intervention extérieure, celle de l'enseignant ou celle des autres élèves dans une discussion d'équipe, pourrait permettre d'atteindre ce but si le niveau est 1. Dans le cas des items de niveau 0, bien que la situation soit favorable à cet effet, il manquerait une question pour aller plus loin et nous amener vers des idées algébriques ou pré-algébriques. Ce volet de la grille amène une réflexion qui va au-delà de ce qui est proposé dans l'item, il ouvre la porte à des pistes possibles d'exploitation de l'item sous l'angle de l'algèbre primitive. Lors de l'analyse d'un item, il est donc intéressant de combiner les volets A et C de la grille d'analyse.

La grille d'analyse comprend un autre volet, le volet B, qui a rapport aux difficultés et conceptions recensées dans la littérature et qui peuvent émerger lors de la résolution des items. Ce volet de la grille a été plus ou moins porteur lors de l'analyse des items des quatre manuels du troisième cycle Clicmaths. En effet, nous avons recensé peu d'items qui visent à ébranler les conceptions ou à tester la présence des erreurs classiques (sens du signe d'égalité qui commande une réponse à droite, la multiplication qui donne un résultat plus grand que chacun des nombres; l'élément neutre de l'addition ou de la multiplication, etc.).

Voici en gros ce qui a été mis de l'avant dans cette optique.

On ne trouve pas beaucoup d'items qui testent les conceptions et les erreurs classiques principalement parce que ces sources d'erreurs se produisent dans un contexte pleinement algébrique. Dans les manuels, on ne manipule pas formellement des lettres ni des équations, ce qui élimine plusieurs de ces éléments.

B.1

Les conceptions qui posent difficulté sont que les élèves… (celles qui ne s'appliquent pas ici sont en italique)

a) croient que le symbole d'égalité ne représente qu'un opérateur unidirectionnel qui produit une valeur de sortie du côté droit à partir d'une entrée du côté gauche (au lieu de concevoir les trois propriétés d'une relation d'équivalence : réflexivité $a = a$, symétrie $a = b <=> b = a$ et transitivité si $a = b$ et $b = c$ alors $a = c$);

   La conception pourrait ne pas se manifester dans le cas de A1, p.23, je m'exerce, à cause de la présence des fractions. Ex.: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{}{\mathbf{10}}$. On imagine mal que l'élève écrive : $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0{,}5}}{\mathbf{10}}$. Dans B2, p.75, n° 3 on présente trois cas avec plus d'un terme du côté droit, dont $12 + 108 = \_\_ + 58$ et $10 \times 13 = \_\_ \times 26$.

b) se centrent sur la recherche de solutions particulières (et ne peuvent accepter une réponse où une opération n'a pas été effectuée (ex. : $n + 4$);

c) ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité;

Dans le manuel B2, p.73, on a une série d'égalités et il faut dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On demande d'expliquer pourquoi. Il y a la commutativité de l'addition, (et de la soustraction!), l'associativité de l'addition, 2 vrais cas de distributivité et des fausses applications (comme la distributivité de la multiplication sur la multiplication). Les élèves doivent comparer leurs réponses en groupe de 4 et arriver à un consensus.

Huit énoncés dans « Je m'exerce », où il faut dire s'il y a égalité ou pas, viennent s'ajouter pour identifier les décompositions qui sont valides et celles qui ne le sont pas.

d) non vérifiable: n'utilisent pas de symboles mathématiques pour exprimer les relations entre les nombres;

e) ne comprennent pas l'usage des lettres en tant que généralisation de nombres (ou leur prêtent d'autres rôles – ex. : 4m peut vouloir dire 4 mètres);

f) ont de grandes difficultés à opérer sur des valeurs inconnues;

On a l'exemple de la Figure imposée, (manuel A1, p.53, voir figure 5.1) et le terrain triangulaire (manuel A2, p.53, « Je résous », n° 2).

g) ils ne parviennent pas à comprendre que des transformations équivalentes des deux côtés d'une équation n'altèrent pas sa valeur de vérité.

Il y a plusieurs items qui font appel à ces transformations, mais sous des représentations concrètes (les balances à plateaux, les bordures de briques, voir figure 4.9).

En ce qui concerne les autres types de difficultés possibles qui peuvent causer une erreur, on rappelle qu'il y a entre autres l'interprétation des fractions, l'élément absorbant, la multiplication et la division par un nombre entre 0 et 1, le lien avec l'opération inverse, les ordres de grandeur, le principe de conservation des quantités, les nombres négatifs; ce qui constitue une nouveauté (concept à apprendre par une situation problème), une représentation non standard ou un contexte non familier. Mais nous n'avons pas accès aux productions des élèves.

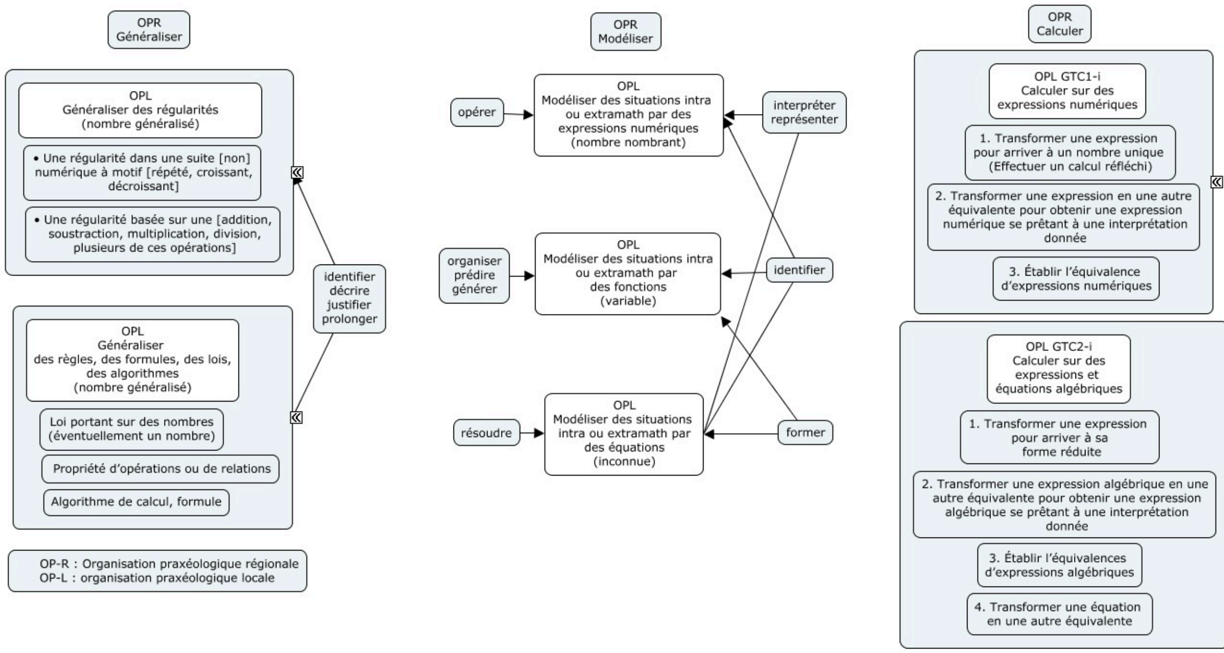
Remarques sur le potentiel de la grille

L’analyse des manuels scolaires a permis de constater que certains items peuvent être classés dans deux catégories ou même dans les trois catégories. La grille d’analyse issue de ce projet apparait intéressante comme outil pour planifier une séquence d’enseignement visant l’algèbre primitive et qui pourrait s’étaler tout au long d’une année scolaire. En effet, celle-ci permet de discriminer les items selon leur appartenance à une catégorie ou à plus d’une catégorie et de détecter la potentialité de l’item et donc de prévoir des interventions visant à développer la pensée algébrique primitive chez les élèves. De plus, l’analyse des manuels Clicmaths a permis d'ajouter plusieurs idées et pistes d'utilisation qui peuvent être exploitées à différents moments de l’année scolaire et dans différents champs mathématiques pour développer la pensée algébrique primitive.

Soulignons toutefois que c’est nous qui avons utilisé la lunette particulière de l'algèbre primitive pour analyser les items. Au moment de la publication de ces manuels, en 2003, le programme du primaire ne parlait pas d'algèbre, primitive ou autre. C'est seulement dans le programme du secondaire qu'on vient ultérieurement mentionner la présence de préalables à l'algèbre au primaire. Le mouvement EA n'avait pas encore l'ampleur qu'il a eu par la suite.

Notre grille a servi pour analyser les manuels scolaires. Squalli, Jeannotte et ses collaborateurs (OIPA, 2018) ont, quant à eux, élaboré une grille avec laquelle ils ont analysé les programmes de formation. Bien que nous n'ayons pas inclus ces travaux dans notre cadre conceptuel (modèle praxéologique de référence en pensée algébrique, dans la lignée de l'anthropologie didactique du savoir de Chevallard), on observe tout de même plusieurs recoupements entre nos grilles. Voici un aperçu de la classification réalisée dans cette approche (voir figure 5.2, faite par moi).

Figure 5.2 Aperçu du modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique de Jeannotte, Squalli et leurs collaborateurs (2019a, 2019b)



Leur analyse a constaté la présence de tous les éléments identifiés sous l'appellation OPL pour « organisation praxéologique locale » dans le PFEQ du primaire, avec une certaine lacune dans la modélisation à l'aide de fonctions (implicite dans le PFEQ, absent de la PDA) et la modélisation à l'aide d'équations (implicite dans le PFEQ, de faible présence dans la PDA) et dans le calcul d'expressions algébriques qui n'est représenté que par le cas du terme manquant dans les relations entre les opérations, autant dans le PFEQ que dans la PDA (voir figure 5.3).

Figure 5.3 Identification des éléments de l'OPR dans le PFEQ, la PDA et le cadre d'évaluation (tableau tiré de leur présentation à l'OIPA en 2018)

OPR	OPL	PFEQ	PDA	Cadre d'Évaluation
Généraliser	Des régularités	OUI	OUI	
	Des règles, lois…	OUI	OUI	
Modéliser	Fonction	Implicite		Implicite
	Expression numérique	Implicite	Oui,	
	Equation	Implicite	Oui, mais peu	
Calculer	Expression numérique	OUI	OUI	Implicite
	Expression algébrique	OUI (terme manquant)	OUI (terme manquant)	

Fait intéressant, notre analyse a peut-être permis de trouver dans les manuels, bien que leur propre analyse n'ait pas trouvé l'équivalent dans le PFEQ, des items qui couvrent certains de ces aspects, selon une vision teintée par l'algèbre primitive.

La modélisation fonctionnelle de certaines situations a été traitée sous forme de tableau et de graphique (Ex.: conversion entre °F et °C), et avec certaines suites qui obligent à exprimer un terme général en fonction de son rang si on veut trouver le centième terme (par exemple item dans le manuel B1, p.109, n° 6) somme partielle des puissances de 1/2) sans passer par les termes intermédiaires, mais aussi dans certains programmes de calcul (par exemple item dans le manuel B1, p.77, n° 8, formule magique). Les calculs de distance à partir de la vitesse et du temps (par exemple item dans le manuel B1, p.11, n° 1) et autres calculs avec taux sont d'autres exemples: $d = v(t)$.

Aussi, bien que dans le PFEQ, on ne souligne que les termes manquants dans des égalités en lien avec les opérations inverses comme instances d'équations, nous avons trouvé dans les manuels plusieurs exemples faisant intervenir d'autres types d'égalités entre des quantités connues et d'autres à déterminer.

Une modélisation avec une équation autre que celle avec les opérations inverses est présente dans le n° 3 b) et c) de la page 7 du manuel B1. Il faut comparer le nombre de disques compacts de deux personnes en utilisant deux expressions (phrases) différentes. La formule magique citée dans la modélisation fonctionnelle est aussi une équation quand on constate que $f(x) = x$; c'est en fait une identité car on change le signifié syntaxique sans changer la dénotation.

Cela nous fait dire que l'analyse du programme d'études doit se faire à la lumière de sa transposition didactique dans les manuels scolaires, qui sont les seules sources de contenu approuvées par le ministère de l'Éducation. Avec ces quelques exemples, on peut voir qu'il y a une certaine opacité dans cette transposition didactique, qui représente la marge de manoeuvre des auteurs de manuels pour interpréter le programme. Cela explique qu'il peut y avoir certaines surprises de la sorte.

Le volet Calculer du modèle praxéologique ressemble à notre Action sur une structure, mais admet des transformations « à l'intérieur d'une structure », ce que nous avons plutôt conservé dans Mathématiser/Modéliser puisque la modélisation permet l'action dans la structure qui modélise un phénomène. La structure n'est pas modifiée.

5.2 Réflexion autour d'un arrimage possible entre ce qui est prescrit dans les documents ministériels et ce qui ressort dans les manuels Clicmaths autour de l'algèbre primitive

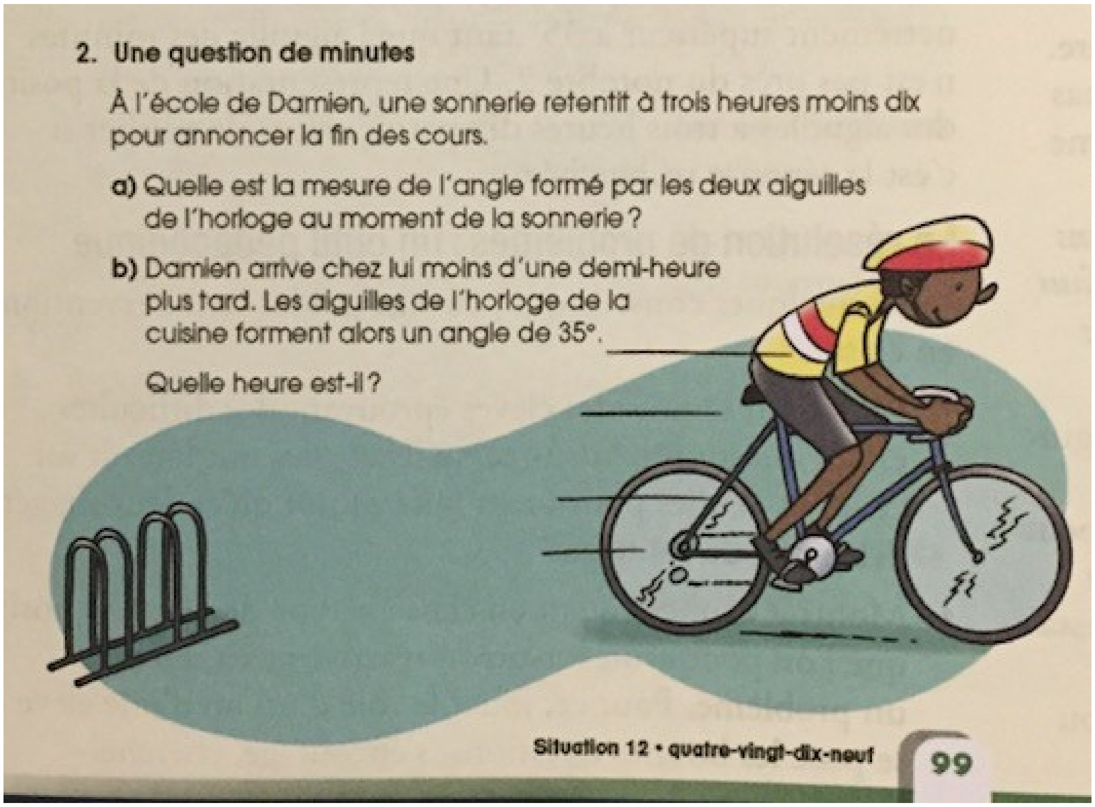
Rappelons que le programme de formation de l'école québécoise et la progression des apprentissages ne proposent pas explicitement au primaire de travailler sur ce que j'ai nommé algèbre primitive. Toutefois, dans les documents ministériels du secondaire, il est fait mention, à propos du contenu du primaire, d'éléments qui sont des préalables au développement de la pensée algébrique. On rappelle qu'il s'agit de la recherche de termes manquants, des propriétés des opérations et des relations entre elles, de l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, de l'utilisation des priorités des opérations et de la recherche de régularités dans différents contextes.

Nous pouvons remarquer que ces occasions se situent essentiellement en arithmétique. Notre analyse des manuels Clicmaths a permis de recenser quelques occasions pour travailler la pensée algébrique primitive et qui prennent place dans d'autres champs mathématiques. Ces occasions sont recensées dans le volet A de la grille d'analyse. Nous proposons dans ce qui suit, à partir d'un item de Clicmaths, une réflexion quant à l'arrimage possible entre certains éléments du PFEQ et de la PDA du primaire et un travail possible en algèbre primitive.

L'item que nous avons choisi, Une question de minutes (voir figure 5.4), arrive dans le manuel après six autres items qui misent sur une réflexion autour de la position des aiguilles d'une horloge. C'est une thématique qui est très présente dans le manuel A1, et qui apparait très prégnante pour la pensée fonctionnelle. Voici les autres items qui traitent de cette thématique :

1) Item sur la position des aiguilles d'une horloge à la page 54, il s'agit d'une situation-problème nommée « Décalage horaire »;
2) à la page 56, l'activité 2;
3) à la page 56, « Je m'exerce », no.1;
4) à la page 58, « Je m'entraine », no.1;
5) à la page 63 no.1, item nommé « Mon bracelet-montre » (voir figure 4.3);
6) à la page 94, « Je m'entraine », n° 2.

Figure 5.4 Une question de minutes



2. **Une question de minutes**

À l'école de Damien, une sonnerie retentit à trois heures moins dix pour annoncer la fin des cours.

a) Quelle est la mesure de l'angle formé par les deux aiguilles de l'horloge au moment de la sonnerie ?

b) Damien arrive chez lui moins d'une demi-heure plus tard. Les aiguilles de l'horloge de la cuisine forment alors un angle de 35°.

Quelle heure est-il ?

Situation 12 • quatre-vingt-dix-neuf 99

GUAY, Sylvio, HAMEL, Jean-Claude et LEMAY, Steeve, Clicmaths A1, 3e cycle du primaire, Éditions Grand Duc, Laval, 2003, p.99

La première compétence dans le programme québécois (C1) concerne la résolution de situations problèmes (dans les pages liminaires de chaque volume des manuels scolaires Clicmaths, on identifie la première page des situations régulières et les items de la section « Je résous », comme des situations-problèmes) et on en voit ici une manifestation assez évidente. Vu que les élèves ont travaillé sur le positionnement des aiguilles d'une horloge préalablement, ils ont les outils nécessaires pour résoudre cet item, mais ils doivent quand même trouver la façon de les utiliser.

En quoi ce problème est-il pertinent selon le programme et la progression des apprentissages? Dans la PDA du primaire, cet item mobilise les éléments suivants :

Dans la section « Sens et écriture des nombres »,

10. Situer des nombres naturels à l'aide de différents supports (ex. : grille de nombres, bande de nombres, axe de nombres [droite numérique]) (p.6) .

On peut situer les degrés à partir d'un point donné d'une circonférence. Il en va de même des minutes (unité de temps et non les 60^{e} de degré! De combien de ces minutes avancerait-on en une minute?).

3. Associer une fraction à une partie d'un tout (parties isométriques ou parties équivalentes) ou d'un groupe d'objets et vice versa (p.6).

La fraction 10/60 d'heure en tant que 1/6 de 30° sur le cadran.

8. Vérifier l'équivalence de deux fractions (p.7) ou

1. Construire un ensemble de fractions équivalentes. (p.12, Sens des opérations sur des nombres)

10/60 et 1/6 et 5/30 (5° par rapport à 30°).

13. Situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique) (p.7).

Comme plus haut, voir un cercle comme un axe circulaire.

Dans la section « Sens des opérations sur des nombres »

1. Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) (p.10).

La position des aiguilles en tant que traduction concrète d'une valeur de temps.

4. Multiplier un nombre naturel par une fraction. (6^{e}) (p.12)

10/60 × 30.

10. Décrire le cercle (p.15).

Circonférence, rayon.

2. Estimer et mesurer des angles en degrés (p.18).

On connaît 90°.

2. Établir des relations entre les unités de mesure (de temps) (p.19).

Heures et minutes.

Plusieurs élèves peuvent penser intuitivement que l'aiguille des heures sera sur le chiffre 3 à trois heures moins 10. Cet item n'est pas aussi banal qu'il pourrait paraître. Il ne s'agit pas d'un calcul direct. La position de chacune des aiguilles doit être évaluée séparément.

Pour l'aiguille des minutes, on sait qu'elle est sur la position du nombre 10 (voir mes figures 5.5 et 5.6).

Figure 5.5 Position des aiguilles cinquante minutes après 14 heures (ou 2 h)

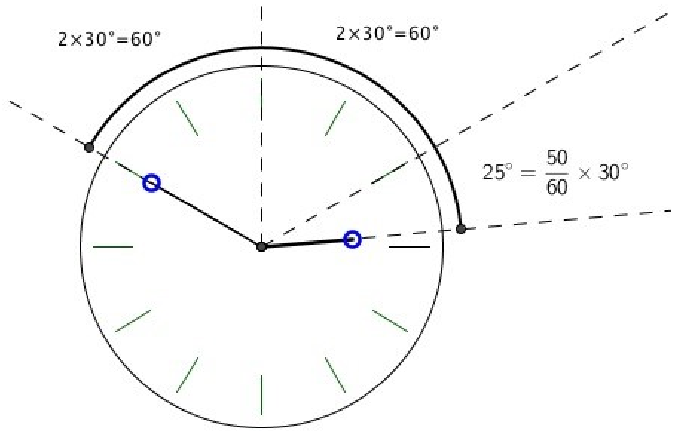
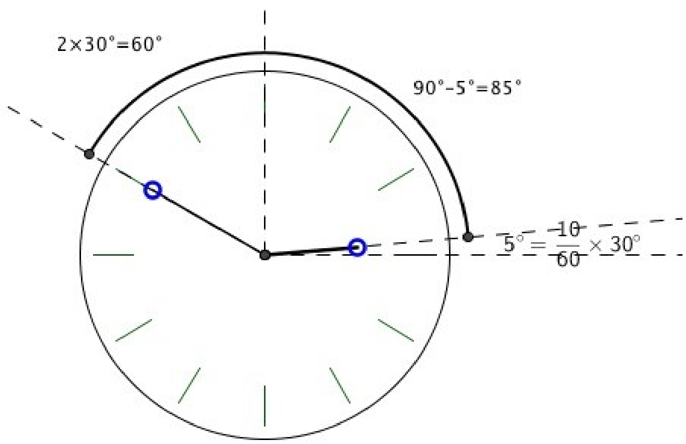


Figure 5.6 Position des aiguilles dix minutes avant 15 heures (ou 3 heures)



En ce qui concerne l'aiguille des heures, on la trouve à partir d'un raisonnement appuyé sur une pensée fonctionnelle intuitive sur la variation des angles en fonction du temps écoulé (faisant intervenir un raisonnement proportionnel). Soit on considère qu'il s'est écoulé 50 minutes depuis 2h p.m. (14h) ou qu'il sera 3h p.m. (15h) dans 10 minutes. Dans le premier cas (figure 5.5), l'angle sera, de la position du nombre 12 à la position actuelle, $60° + \frac{50}{60} \times 30°$ ou 85° car la petite aiguille se déplace de 30° à l'heure. Il faut aussi ajouter 60° pour l'angle que fait la grande aiguille avec la verticale (entre les nombres 10 et 12) à ce résultat de 85°, ce qui donne 60° + 85° ou 145°. L'autre méthode (voir figure 5.6) demande de calculer $90° - \frac{10}{60} \times 30°$, soit 85° pour soustraire la valeur du déplacement de la position initiale de l'aiguille des heures (trois heures moins dix) jusqu'au nombre 3 (15h) et ajouter 60° pour l'angle entre les nombres 10 et 12, ce qui donne le même résultat. C'est un raisonnement fonctionnel (fonction affine) car la variation d'angle est proportionnelle à la variation du temps mais la mesure de l'angle lui-même n'est pas proportionnelle à celle du temps.

De plus, il est nécessaire de se référer à l'horloge elle-même pour visualiser d'abord approximativement la position des aiguilles. On doit donc s'appuyer sur un schéma représentant l'horloge. Ceci constitue un changement de registre de représentation. Il s'agit de trouver ensuite la variation d'angle en fonction du temps écoulé à partir d'une position connue (ou en fonction du temps à écouler pour atteindre une position où les angles sont connus). Cet item se situe dans la catégorie Mathématiser/Modéliser, il exige de faire varier un élément dans une expression ou une structure. L'expression fonctionnelle n'est pas explicitée à ce niveau scolaire mais elle est quand même mise en œuvre par étapes.

Quand a) est résolu, b) peut être abordé par essais et erreurs en testant quelques valeurs d'heures comme 15h, 15h5, 15h10. Penser que l'élève pourrait partir du 35° et retrouver l'heure est un peu illusoire car la position d'aucune des deux aiguilles n'est connue pour l'heure d'arrivée, puisque cette dernière doit aussi être trouvée. L'élève doit bien sûr appliquer un même raisonnement qu'en a) pour chacune des heures testées. Heureusement, l'angle donné correspond à un multiple de 5 minutes.

Une difficulté importante ici est de percevoir la variation de 30° autrement que comme une variation de 5 minutes. En effet, le même angle représente une variation d'une heure en ce qui concerne la petite aiguille.

Ainsi, à travers les éléments des documents ministériels, il est possible de favoriser chez les élèves un travail dans l'algèbre primitive même si celle-ci n'y est pas explicitement abordée. Le travail sollicité dans cet item se rapproche de la pensée fonctionnelle telle que définie par Robert (2018, p.48) :

«La pensée fonctionnelle est une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. C'est une prédisposition de l'esprit, qui, sur le plan opératoire, se concrétise par :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers dans ce type d'activité ;
2. Un rapport particulier aux concepts en jeu dans ces activités ;
3. Une manière de communiquer et de représenter. »

Ce travail amorcé au primaire a des échos dans la PDA du secondaire à travers les éléments suivants :

Sens et manipulation des expressions algébriques

4.a (p.14) Inconnue. Note : Ce concept, a été abordé sans qu'il soit nommé comme tel, au primaire, dans le contexte de la recherche d'un terme manquant.

En deuxième secondaire, ce concept est supposé être acquis. Cela sous-entend de traiter un symbole comme si c'était un nombre effectif dans la manipulation des expressions et égalités (équations).

b. variable, constante

Même chose pour l'idée de variable. Mais plutôt que de considérer la valeur comme déterminée mais non connue, on va la considérer comme digne représentante de toutes les valeurs possibles qu'elle peut prendre.

On peut penser alors aux variations de temps qui vont causer une variation de position pour chacune des aiguilles. D'où l'idée de variable indépendante et dépendante(s).

5. Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation. (p.14)

Comme: $30 + \frac{x}{60} \times 30$ pour exprimer l'angle de la petite aiguille avec la verticale x minutes après 13h.

8. Reconnaître ou construire a. des égalités et des équations (p.14).

Par exemple, on pourrait écrire $a(t) = 6t$ et changer cela en $y = 6x$ où le domaine de x pourrait être de 0 à 60 (secondes) et y le nombre de degrés parcourus par l'aiguille des secondes (de 0 à 360 degrés).

6. Interpréter une expression algébrique selon le contexte

Si t (resp. x) est en secondes, alors a (resp. y) serait 360° si l'aiguille des secondes a avancé pendant 60 secondes, mais serait de 6° si t est en minutes et que l'on considère la variation d'angle de l'aiguille des minutes ($1 \text{ min} \times 6°/\text{min} = 6°$) (Je nomme un tel calcul: taux en action!)

1. Calculer la valeur numérique d’expressions algébriques

Calculer la valeur de $30 + \frac{x}{60} \times 30$ pour $x = 30$ on obtient $30 + 30/60 \times 30$ ou 45.

On comprend que les éléments de la progression des apprentissages du secondaire sont nombreux à prendre appui sur les caractéristiques d'un item particulier, mais évidemment pas seulement sur celui-ci. D’autres items nous donneraient les mêmes bases ou viendraient aider à consolider les concepts en question. Ainsi, l’item Une question de minutes, est intéressant comme transition entre le primaire et le secondaire. Travaillé au troisième cycle du primaire, il pourrait être repris au secondaire en mobilisant l’écriture fonctionnelle.

Toutefois, il est possible que l'enseignant du primaire décide de ne pas utiliser ces items sur le positionnement des aiguilles d’une horloge pour diverses raisons. Par exemple, parce que ce type d'horloge est de plus en plus rare ou parce qu'il trouve le problème trop difficile pour ses élèves (ou parfois même pour lui) ou qu'il n'en voit pas les ramifications conceptuelles. Booth (1984) a constaté que certaines manières de faire sont viables à court terme, mais qu'elles ont des conséquences non négligeables à long terme. C'est comme faire gober le mensonge temporairement à des élèves qui n'ont pas encore vu les nombres négatifs, qu'il est impossible de soustraire un nombre d'un plus petit nombre (Brousseau, 1991, p.3). Tout cela est bien triste pour l'élève qui va se buter inutilement à des difficultés au secondaire qui ne devraient même pas être sur son passage. On pourrait très bien leur dire qu'on ne sait pas comment faire pour l'instant. Ça pourrait même amorcer une réflexion de l'élève qui gardera cela en tête et qui accueillera les nombres négatifs avec un certain éclair de compréhension et un sentiment de satisfaction.

L'enseignant du primaire doit donc être conscient que pour avancer de façon efficace dans un continuum comme celui du développement des compétences mathématiques, particulièrement dans le développement de la pensée algébrique, tout comme sur une route principale, les détours par des routes secondaires peuvent hypothéquer l'atteinte de la destination finale. Éviter les situations problèmes et ne s'en tenir qu'aux procédures qu'il faut appliquer dans des contextes connus, c'est éviter d'enseigner la partie essentielle du programme d'études et ne pas donner aux élèves les outils dont ils auront cruellement besoin plus tard (bientôt). De l'un, ces enseignants doivent être conscients de l'ensemble de la progression des apprentissages et non seulement de celle du primaire, et de l'autre, une communication efficace doit être établie entre les enseignants des deux ordres. Chacun de ces deux aspects est au service de l'autre.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était de prendre le pouls de l'enseignement primaire au Québec pour savoir si son coeur bat aussi pour le développement de la pensée algébrique primitive. Mais comme dans beaucoup d'histoires d'amour, ce n'est pas claironné de façon officielle (ici dans les programmes d'études), mais il y a plein d'indices qui ne trompent pas si l'on observe attentivement. Dans le programme d'études il y a des allusions, et dans les manuels on a pu constater concrètement des items explicites qui ne laissent aucun doute. Après avoir répondu aux trois questions de recherche exposées dans la méthodologie, nous discuterons des limites du travail mené et des prolongements possibles de cette recherche.

Objectif et questions de recherche

Dans cette étude, nous visions l'objectif de détecter le potentiel pour le développement de la pensée algébrique dans les documents à la disposition des enseignants du Québec pour guider leurs interventions en classe, notamment le programme d'études et les manuels scolaires du primaire. Nous avons privilégié dans notre mémoire la nomenclature de l'algèbre primitive.

Pour atteindre notre objectif, trois questions de recherche ont été précisées et auxquelles nous pouvons répondre au terme de ce mémoire.

1) Comment peut-on reconnaitre les aspects de la pensée algébrique primitive qui sont sollicités par un item? / Quels sont les possibles aspects de la pensée algébrique primitive qui ressortent positivement des recherches?

Une grille d'analyse a été élaborée à partir des stratégies ou approches qui se sont montrées efficaces dans les recherches sur la pensée algébrique chez les enfants. Cette grille a subi plusieurs évolutions pour en arriver à une version qui définit de façon opérationnelle les trois catégories qui la constituent, soit Mathématiser/Modéliser, Généraliser et Agir sur une structure. Nous avons utilisé cette grille pour reconnaitre dans les manuels des items qui sont compatibles avec ces trois catégories en nous fiant aux descriptifs qui leur ont été associés. Nous avons trouvé que ces manuels contenaient des items en nombre suffisant pour développer la pensée algébrique primitive et permettre aux jeunes d'avoir accès aux concepts algébriques du secondaire avec une meilleure compréhension. Puisque l'algèbre primitive inclut les idées de l'EA, sans avoir ses contraintes, les résultats positifs qui ont été observés sur les élèves du primaire sont à notre portée. Évidemment, le rôle de l'enseignant est primordial.

2. Dans les manuels choisis, quel est le portrait qu'affichent globalement les items au regard de leur capacité à solliciter une pensée algébrique primitive ?

Une bonne quantité d'items nous amènent directement ou indirectement vers une pensée algébrique primitive, principalement autour de l'arithmétique, mais aussi, de façon moins marquée, dans les autres champs de contenu. Nous croyons donc que ces manuels offrent de belles possibilités aux enseignants pour soutenir les élèves dans la construction de leurs bases conceptuelles. Notre but n'est évidemment pas de recommander ce matériel plus qu'un autre, car il est fort probable que les autres collections disponibles soient tout à fait équivalentes.

3. Quels aspects porteurs du développement de la pensée algébrique primitive sont sollicités dans le PFEQ et comment les a-t-on traités dans les manuels scolaires?

L'exemple présenté à la section 5.2, « Une question de minutes », nous a permis d'aller consulter plusieurs éléments de la progression des apprentissages et de constater qu'il y a de nombreux liens à faire entre ce contenu et la façon dont les manuels étudiés en ont tenu compte. On parle ici des éléments jadis identifiés comme préalables à l'algèbre abordés à l'insu des élèves, de même qu'un traitement de l'arithmétique qui est compatible avec l'apprentissage ultérieur de l'algèbre.

Au Québec, le système scolaire est sensibilisé à la possibilité et même à la pertinence d'amorcer le développement de la pensée algébrique sans délai pour ouvrir au plus grand nombre des portes qui traditionnellement ne s'ouvrent que pour une élite. Nous avons de plus en plus d'exemples, de guides et de recherches pour mieux ajuster notre prochain curriculum, et notre propre avance dans notre genèse documentaire.

Alors donnons une avance à nos élèves du primaire par rapport à ceux qui auront leur première piqûre de l'algèbre primitive par la suite en les partant du bon pied. Il auront alors leur passeport en règle pour le voyage au pays de l'algèbre qui mène à des emplois mieux rémunérés.

Une approche qui ne semble pas exploitée est celle proposée dans The ideas of algebra, K-12 du NCTM, qui consiste à explorer numériquement les objets de l'algèbre via la résolution de problèmes. Ceci n'est pas sans rappeler le travail d'Artigue et Rogalski (1990) sur la résolution numérique d'équations différentielles. Dans le chapitre 6 (Demana, Leitzel, 1988) du livre de l'année du NCTM, on utilise la calculatrice extensivement pour développer une compréhension procédurale des équations et des fonctions avant de considérer ces objets plus formellement. On argumente qu'en observant la façon de calculer de la machine, on se familiarise avec les priorités des opérations et la gestion des parenthèses, et qu'on peut arriver à des généralisations par l'introduction de variables dans le format tabulaire. Il existe aussi une motivation à simplifier les expressions algébriques pour avoir moins de calculs après substitution d'une valeur. La réflexion sur la procédure avec les opérations inverses pour résoudre une équation du premier degré fait partie de cette approche ainsi qu'une approche essais et erreurs guidée par la covariation. On ne se limite pas quant à la complexité des expressions algébriques.

Voici des représentants de ce que j'ai nommé « lien fort » entre certains concepts arithmétiques et la pensée algébrique: taux, proportionnalité et rapports, résoudre par les opérations inverses. Linchevski n'a pas exclu l'apport de la préalgèbre en arithmétique primitive bien qu'elle discutait principalement d'un cours intermédiaire pour reprendre les conceptions formées en apprentissage de l'arithmétique pour en faire des alliés pour l'apprentissage de l'algèbre. Mais comme on connait la résilience des conceptions, on pense qu'elle avait raison d'évoquer la possibilité de venir ébranler les conceptions dès le primaire, avant qu'elles ne se cristallisent.

Limites de la recherche

L'outil développé a permis de réaliser l'étude ciblée et ne prétend pas avoir une portée beaucoup plus grande. Il a permis d'apporter une réponse aux questions posées par la problématique et revues dans la méthodologie, sans plus. Il ne s'agit en aucun cas de porter un jugement sur le matériel, mais d'établir un portrait des possibilités, ce qui était l'objectif visé. Cette expérience me donne le goût d'utiliser la grille pour analyser d'autre matériel, particulièrement ce qui a été produit aux États-Unis suite aux réformes récentes. Misant sur l'expertise accumulée depuis de nombreuses années par la noosphère états-unienne et mise en oeuvre dans ces contextes, il serait possible de porter un jugement critique supplémentaire sur la valeur de la présente grille pour évaluer le potentiel qu'elle entend mettre en lumière, et suggérer des façons de l'améliorer.

Dans les manuels étudiés, il y a des questions, des sous-questions et des activités dans les items qui s'adressent à l'élève dans différents buts, comme réactiver une connaissance, faire réfléchir, faire calculer, pratiquer, etc. Il faut noter que ces nuances ne sont pas prises en compte dans les résultats de l'analyse. Nous n'avons pas touché non plus les situations complexes qui se trouvent principalement dans le matériel d'évaluation portant particulièrement sur la C1 (Résoudre une situation-problème telle que définie par le Ministère). Voir comment des situations d'apprentissage et d'évaluation de ce genre peuvent influencer le développement de la pensée algébrique est un autre défi. De plus, un apprentissage peut être distribué dans une progression faisant intervenir une série de questions réparties d'une certaine façon dans les manuels, comme en spirale par exemple, mais qui constitue un filon intéressant. Tenir compte de ces particularités de façon systématique pour établir le niveau dans le volet C demanderait une méthodologie plus élaborée et n'apporterait peut-être pas plus d'éclairage à l'analyse, car on ne sait pas comment les enseignants vont utiliser les manuels alors je ne m'y aventure pas dans le présent contexte.

Ceci nous a quand même menés à permettre l'attribution de plusieurs cotes à un même item en considérant les numéros complets comme des items. Il a donc été nécessaire de tenir une double comptabilisation car on voulait discriminer l'effet sur les totaux d'attribuer plus d'une catégorie à des items et caractériser ces items ayant plusieurs liens avec la grille.

Question de méthodologie à méditer: peut-être qu'on ne devrait compter qu'une seule des cotes pour un item donné, soit la plus haute. Mais décrirait-on mieux le potentiel ainsi? Je ne crois pas.

Une remarque pour terminer cette section : nous avons discuté des contenus et de champs d'activité mathématique. Mais on sait que les approches pédagogiques sont aussi importantes que ces considérations. Les chercheurs citent souvent la nécessité d'une construction sociale de la connaissance par une communauté de recherche en classe. On a pu voir dans les manuels qu'on propose une approche basée sur la résolution de problèmes qui tente de faire découvrir des relations ou des formules par l'expérimentation en équipe et l'observation (circonférence, aire, périmètre, inégalité du triangle, relation d'Euler, dénombrement d'arrangements, etc.). Dans la plupart des activités, on prévoit aussi que les élèves doivent discuter ensemble pour faire émerger leur savoir. On peut alors ajouter que cet aspect a tendance à s'aligner avec les recommandations de la recherche.

Prolongements de cette recherche

Avoir en tête les compétences que les enfants doivent développer pour être en mesure d'avoir accès à l'algèbre plus formelle nous demande de continuer la réflexion sur les mathématiques du primaire. Robert (2017) a abordé la question importante du développement de la pensée fonctionnelle au primaire. Elle considère que le développement de la pensée algébrique et de la pensée fonctionnelle se produisent en parallèle. La recherche montre aussi qu'elles peuvent être au service l'une de l'autre. Une analyse de cette complémentarité serait bienvenue du point de vue de leur apport mutuel. Je me permets tout de même de rappeler que Lee (1996, p.89) considère que les fonctions sont des objets primitifs de l'algèbre « primitive algebraic object » et elles sont bien intégrées dans le modèle de Kaput (2008).

La question du contrôle dans la réalisation d'une tâche en algèbre primitive (Saboya, 2010) est un aspect important et que j'aurais aimé aborder mais qui ne se manifeste que lorsque l'élève est en mode résolution ou dans les traces qu'il laisse, donc non visible pour nous et on ne sait pas si la formulation des items a une incidence quelconque sur le réflexe de contrôle chez l'élève. Cette question pourrait être explorée dans un contexte de recherche sur la rédaction des questions.

Un autre sujet intéressant qui peut avoir un lien avec le développement des compétences algébrique est le calcul mental ou les mathématiques mentales (Proulx, 2013, p.537).

Quel rôle joue la nature du contexte socioculturel dans les items? (prolongement possible)

La façon dont les questions sont écrites a une incidence sur les stratégies cognitives activées par l'élève pour tenter d'y répondre (champ de recherche *problem posing*). En classe, il peut y avoir des étapes de clarification pour s'assurer que les élèves comprennent correctement la tâche. Mais on peut supposer que ce n'est pas toujours le cas. Alors, quelles sont les bonnes façons de poser les questions si on veut favoriser le développement de la pensée algébrique primitive?

Quel rôle joue la nature du contexte d'apprentissage?

Les élèves doivent-ils répondre seuls à ces questions en devoir ou s'il y a une discussion en classe pour une construction sociale du savoir? (contexte de résolution)

On ne pourra pas répondre à cette question avec cette recherche mais d'autres recherches pourraient permettre de suggérer une approche pédagogique, comme l'ACODESA de Hitt (2007).

APPENDICE A

NUAGE DE MOTS

action transformative (action sur) et d'activité générale méta (un travail métacognitif au niveau géneral comme dans la résolution de problèmes).
Générer des représentations par des expressions ou équations (GTGm);
transformer les représentations (GTGm);
(Réaliser des) activités où la lettre pourrait être utile ou des activités où la lettre n'est pas nécessaire (GTGm)
-en analysant les relations entre les quantités;
-en notant la structure;
-en étudiant le changement;
-en généralisant;
-en résolvant les problèmes;
-en modélisant;
-en justifiant;
-en prouvant et
-en prédisant.
concepts-clés: arithmétique généralisée, fonctions,
voir le général dans le particulier (et l'inverse).
relations mathématiques, les patterns et les structures arithmétiques, ainsi que sur les processus de raisonnement des élèves pour les aborder (remarquer, conjecturer, généraliser, représenter, justifier). Ces éléments sont en rapport avec les deux principaux champs de contenu mathématique, soit l'arithmétique généralisée (au sens de nombre et quantité, opérations, propriétés) et les fonctions
Représenter de différentes façons des nombres ou des quantités qui ne sont pas tous connus, et agir sur eux sans distinction d'avec les nombres ou quantités connus.
Mots-clés : indétermination. dénotation, analyticité, nombres, quantités.
Passage de l'inconnu vers le connu. Contexte géométrique de Descartes. Descartes a créé le plan cartésien.
formuler des généralisations (de régularités et de contraintes)
les exprimer (les symboliser de façon systématique, les représenter) dans des
systèmes de symboles de plus en plus formels et conventionnels en utilisant des
nombres et des quantités (physiques)
(raisonnement arithmétique generalisé; arithmétique generalisée;
raisonnement quantitatif généralisé);
(généralisation, représentation, justification, raisonnement avec des relations arithmétiques, incluant (commutativité, relations, opérations, pairs et impairs).
équivalences, expressions, équations, inégalités
sens relationnel du symbole d'égalité;
les actions de généraliser, représenter, raisonner avec les expressions, équations et inégalités, incluant les formes symboliques
raisonnement et actions sur les généralisations

actions (manipulations) sur les généralisations (sur des symboles, des formalismes)
exprimées dans les systèmes de symboles conventionnels organisés par une syntaxe établie qui guide les actions possibles
où les systèmes de symboles conventionnels disponibles pour les niveaux scolaires élémentaires sont interprétés largement pour inclure

-la notation [variable],
-les graphiques et
-les droites numériques
-les tableaux et les
-formes de langue naturelle

les généralisations justificatives et le raisonnement avec des généralisations établies, dans des situations nouvelles, sont deux
manières principales d'agir sur les systèmes de symboles conventionnels, interprétés au sens large.
Étude des structures et des systèmes, abstraits de calculs et de relations, y compris ceux qui surviennent dans l'arithmétique - l'algèbre en tant qu'arithmétique généralisée - et le raisonnement quantitatif.
Étude des fonctions, relations et covariations
Application d'un ensemble de langages de modélisation intra-mathématique et extra-mathématique
Une expression (ou une fonction) est algébrique si elle comporte un nombre d'opérations fini avec les 4 opérations et des exposants rationnels). À un niveau plus avancé, les fonctions elles-mêmes peuvent être les « nombres » d'un système algébrique avec des operations définies sur les fonctions en tant qu'objets. Ou encore, une fonction peut definir une operation sur un ensemble. Ces fonctions sont aussi des objets algébriques.
L'idée d'opération est centrale à l'algèbre (p.87);
Une approche mixte est recommandée dans l'enseignement de base (pas une approche qui privilégie seulement les fonctions ou seulement les structures par exemple).
-le raisonnement analytique (habileté à penser analytiquement);
-la manipulation des expressions algébriques selon les règles;
- le fait de generaliser et abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, et des structures de situations réelles ou mathématiques;
-le fait d'élaborer et d'appliquer des structures algébriques ou de situation intra et extra-mathématiques;
-le fait d'élaborer et d'appliquer des procedures (règles et algorithmes);
-construire, interpreter et valider des modèles algébriques de situation intra et extra-mathématiques;
-certaines fonctions ne sont pas algébriques (comme les fonctions trigonométriques);
-les approches (options curriculaires) «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions»
-dans un système algébrique, on peut aussi considerer autre chose que des expressions ou des equations, comme les inéquations et la divisibilité. Ex.: $x < 3$ ou encore $2 \mid 2x+4$ (2 divise 2x+4).
Compétences (comme celles du PFEQ) en développement dans les domaines de contenu que sont (1) la pensée fonctionnelle et (2) l'arithmétique généralisée (équivalences, expressions, équations, inégalités)
Langage mathématique, algébrique précis
généralisation et l'interaction entre l'arithmétique et l'algèbre
avoir différents sens, interprétations et représentations d'objets mathématiques
rechercher les similarités dans les structures et dans les suites
comparer des masses sur des balances à fléaux symétriques pour résoudre des problèmes écrits et construire le sens des actions sur les équations à l'aide de celles sur les masses.
dualités : représenter/résoudre, processus/produit, transparent/opaque (on laisse ou non des traces et le résultat sous une forme qui permet de voir les étapes)
sens relationnel de l'égalité en utilisant différentes représentations d'un même nombre naturel.
forme canonique de (3 x 4) - 5 est 7).
PFEQ
la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles
l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence,
l'utilisation des priorités des opérations et
la recherche de régularités dans différents contextes.
programme antérieur :
des suites en première secondaire,
la résolution de problèmes en deuxième secondaire et
les fonctions en troisième secondaire.

Raisonner de façon abstraite et quantitative.
Modéliser avec les mathématiques.
Rechercher et utiliser la structure.
Rechercher et exprimer la régularité dans un raisonnement répété.
Comprendre les propriétés de la multiplication et la relation entre la multiplication et la division.
Travailler avec des égalités.
Résoudre des problèmes faisant intervenir les quatre opérations, et identifier et expliquer les patterns en arithmétique.
Générer et analyser des patterns et les relations.
Appliquer et étendre les acquis de l'arithmétique aux expressions algébriques.
Utilisez les propriétés des opérations pour générer des expressions équivalentes.
Résoudre des problèmes mathématiques et réels en utilisant des expressions et des équations numériques et algébriques.
Représenter et analyser des relations quantitatives entre les variables dépendantes et indépendantes.
Ontario 2005
On y abordait en 1re et 2e années du primaire les relations en situation [avec diverses représentations] et
les régularités : suites numériques et non numériques;
tables de valeurs en 3e et 4e années,
en 5e les équations et la généralisation d'une règle en mots
représenter, ordonner, comparer, composer, décomposer et recomposer des nombres, comprendre les propriétés des opérations, effectuer mentalement des calculs, effectuer des calculs de manière efficiente (...) en démontrant une bonne compréhension (...) des propriétés des opérations et de leur application à la résolution de problèmes.
différents types de suites et régularités dès la maternelle, croissantes, décroissantes, motifs répétés linéaires
utiliser des variables, résoudre des inégalités
codage informatique (l’algorithmique est un proche parent des mathématiques), modélisation

APPENDICE B

VOCABULAIRE RELIÉ AUX IDÉES ALGÉBRIQUES

abstraction, algèbre, analyser (les termes d'une suite non numérique/numérique avec entiers), analyticité, argumenter, arithmétique, axiomes de corps, cadre curriculaire, calcul (littéral), changement, communiquer, conjectures, (dé)connecté, construire, contextuelle, contraction sémiotique, continuum, décomposer et recomposer, décontextualisation, dénotation, dépendance, description, (in)égalité, entiers, équation, équivalence, essais et erreurs, évaluer, exprimer, factuelle, faits numériques, fonctions, formalisation, formule, fractions, généraliser/té, générer, géométrie, grandeurs, graphique, habitude, identités, inconnue, indétermination, inférence, interpréter. invariant, itérative, justifier, langage (naturel), lettre, liens, machine (à fonction), manipulables, mathématiser, mesure, modèles, modélisation (linéaire), moyens sémiotiques, narration, niveau (d'abstraction), (classe de) nombre, objets, obstacle (cognitif/affectif), opération (inverse), ostensif, outil, paramètre, partage (inéquitable), pattern, prédiction, priorité, problème, procédure, processus, produire, propriété, prolonger, proposition vraie, prouver, qualitatif, quantités, quasi-variable, questionnement (pour élargir le contexte), raisonnement (proportionnel), récursivité, règle, registres, régularité, relations (arithmétique ou algébrique), remarquer, représenter, réponse (contenant une opération), résolution, rupture sémiotique, schéma, (construire du) sens (du nombre/des opérations/de la structure), signes (médiateurs), situations problèmes, stratégies, structures, suites, symbolisation, syntaxe, taux, terme général (d'une suite), transformations, valeur non précisée, variable, (co)variation, visualisation...

APPENDICE C

APERÇU DE LA FEUILLE DE TRAVAIL

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18
1				1epage	**pages**	section	**nos**			MGS	1.x.x	conc et proc	long terme	2.1.x	ifficul	suivi pda	description
2	**nbq**	**e-volu**	**tuatio**	**re pag**	**page**	**sous, S**	**numéro(s)**	**rré/ror**	**couleur**	**ser, G:**	**pture du**	**CONCEPTS ET PRO**	**e/llien naturel sur quoi le**	**code d**	**e la d**	**INTERVENTION générale, liens et su**	**DESCRIPTION SOMMAIRE**
3	33	A1	S1	2	**2 à 8**		(p.2 sp) a b c (p.3 a1) a b (jmx) a b c (p.4 a2) a b c d (jmx) a b (p.5 a3) a b c d (					savoir poser une qu	umme), fonction de type correspondan			mathématiser, valider	statistiques, éléments abordés qui seront éventuellement réinvestis, ar
4	1	A1	S1	9	**9**	jme	**7**	carré	bleu	S	.3.1 1.3.	interpréter diagram				amener raisonnement proportionne	diagramme à bande avec graduation masquée, total connu
5	4	A1	S1	10	**10**	jsc	**1 2 3 4**					directives pour enquête					
6	1	A1	S1	11	**11**	jr	**"(1)"**					représenter des do	s catégories, de quelles données doit-o			types de graphiques statistiques	faire un diagramme à bande avec regroupement de données (création
7	2	A1	S2	12	**12**	SP	**a b**			M g	1.1.4	méthodes d'estima	s un domaine particulier, r	2.2	ut, va	faire voir la valeur estimée comme u	estimer la population mondiale des fous de Bassan
8	3	A1	S2	13	**13**	jmx	**a b c**										estimer nb points sur grille
9	6	A1	S2	13	**13**	a1	**a b1 b2 b3 b4 c**					méthodes d'estimation, saisir le sens de un million, unités					temps nécessaire pour 1M de poignées de mains
10	4	A1	S2	14	**14**	jmx	**a b c d**			S	1.3.4	conversions avec le	*convertir de la même faç*	2.2	ositio	permuter les chiffres, plus grand no	barres 10k multibases et conversions
11	5	A1	S2	14	**14**	a2	**a b c d e**					familiarisation avec	le matériel multibases			travail à base 10	familiarisation avec le matériel multibases
12	2	A1	**S2**	**15**	**15**	a3	c1 c2			**S g**	**1.3.6**	comparaison en plu	naire autre: 100(10 a1+b1	**2.2**	space	décomposition en somme de puissa	min max avec 9 cartons, 9x8x7 possibilités
13	2	A1	S2	15	**15**	a3	**a b**			S	1.3.7	tri (dé)croissant, m	e nombre avec des chiffre	2.2	on ave	faire hypothèses si un chiffre est eff	cartons paires de chiffres max min
14	7	A1	**S2**	**15**	**15**	jmx	**a1 a2 a3 a4 a5 a6 b**										de texte en chiffres
15	5	A1	**S2**	**16**	**16**	**jme**	**1a 1b1 1b2 1b3 1b4**	**rond**	**orange**	**S**	**1.3.2**	actions sur les bm c	si on ne donne pas le nor	**2.2**	dificat	calculs entiers 3 opérations	transfos multibases sur ordres de grandeurs
16	4	**A1**	**S2**	**16**	**16**	**jme**	**2a 2b 2c 2d**	**rond**	**rouge**	**S**	**1.3.5**	représenter entiers	efficients et puissances d'une même b			valeur de position	changement simple de représentation
17	1	A1	S2	17	**17**	**jme**	**3**	**rond**	**orange**	S	1.3.8	au moins dix fois pl	eur inconnue dans un don	2.2	parai	faire voir la valeur estimée comme u	combien de chiens et chats avec valeurs et comparaisons approximativ
18	1	A1	S2	17	**17**	**jme**	**4**	**rond**	**vert**	S		tri numérique d'un tableau				tri nombres à virgules, tri général po	trier numériquement sur la langue la plus parlée
19	3	A1	S2	18	**18**	**jme**	**5a 5b1 5b2**	carré	orange	S	1.3.2	calcul et représenta	îtes, puissances de 100x,	2.2	tion (	4 opérations en général	boîtes de clous par 100 et 100x100
20	5	A1	S2	18	**18**	**jme**	**6a 6b 6c 6d 6e**	carré	orange	S	1.3.4	placer de grands en	nbre, changer les bornes, r	2.0		interprétation de graphiques (interp	placer des grands nombres sur une droite
21	2	A1	S2	19	**19**	**jme**	**7a 7b**	carré	rouge	S	1.3.2	estimer un grand n	fonction exponentielle	2.2.	tion (	méthodes d'estimation, échantillon	nb de petits sacs vs base 10, approx (variable)
22	2	A1	S2	20	**20**	jsc	**a b**			M		comparer le résulta	somme de monômes			4 opérations en général, comparaiso	œufs de saumons dans les océans
23	1	A1	S2	21	**21**	jr	**2a**			G	1.2.1	suite des chiffres de	vation de régularités ou pa	[illegible]	suite n	compter jusqu'à 1M	chiffre des nombres de 1 à 1M concatenés
24	1	A1	S2	21	**21**	jr	**2b**			S	1.3.1	résolution de probl	r de position, compter se	2.2	mpter	traiter l'information, dénombrer, ba	chiffres des nombres de 1 à 1M concatenés
25	1	A1	S2	21	**21**	jr	**1**			S	1.3.4	plus grand nombre	us grands qui commencen	2.2	aleur (	valeur de position	plus grand nombre avec 6 chiffres donnée
26	1	A1	S3	22	**22**	SP	**b**			M	1.1.1	observer fraction q	rtage inéquitable, ppcm,	2.2	4,6,8	fractions dont la somme donne 1 vis	espace pour fraises et framboises dans la serre (en fraction)
27	2	A1	S3	22	**22**	SP	**a1 a2**			M		estimer fraction d'un tout visuellement				raisonnement proportionnel, compa	espace pour fraises et framboises dans la serre (en fraction)
28	1	A1	S3	23	**23**	a1	**a**			M s	1.1.1	représentation visu	rtage inéquitable, ppcm,	2.2	s 4 pa	fractions dont la somme donne 1 vis	poivrons de couleur en fractions

RÉFÉRENCES

Arcavi, A., Friedlander, A. et Hershkowitz, R. (1990). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, 24, 61-67. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR90027/IGR90027.pdf

Artigue, M., Rogalski, M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG première année. Dans M. Artigue, H. Hélène, D. Bessot, A.Delale (dir.), *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*. (p.113-128). IREM de Lille. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WN/IWN90004/IWN90004.pdf

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, 80, 55-75. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR09010/IGR09010.pdf

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.115-136). Kluwer.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (dir.) (1996). *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*. Kluwer.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner A. M., Stroud, R., Fonger N. L. et Stylianou, D.. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, (p.27-49). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Boissinotte, C. (1996). L'évaluation d'expressions arithmétiques : comment l'aborder? *Revue Envol du GRMS*, (96), 59-62.

Boissinotte, C. (2019). [Communication par affiche]. Congrès du GDM. Québec, Canada. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34720.02567

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson.

Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre: Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, (p.247-264). Actes du colloque EMF2015–GT3, Alger. Unige.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann. http://eric.ed.gov/?id=ED474452

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F.K. Lester Jr (dir), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p.669-705). Information Age Publishing (IAP).

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 193–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. (P.107-138). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. et Schwartz, J. L. (2008). Early Algebra is not Algebra Early. Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 235-272). Routledge.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes : Algebra and it's relation to geometry. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.15-38). Kluwer.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au college (premiere partie). L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, (5), 51-94. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR84010/IGR84010.pdf

Chevallard, Y. et Joshua, M.-A. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Edition augmentée. La Pensée Sauvage.

Davis, R. B. (1960). The « Madison Project » of Syracuse University. *The Mathematics Teacher*, *53*(7), 571-575.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 195-208.

Davis, R. B. (2003). Changing school mathematics. Dans J. Kilpatrick et G. M. Stanic (dir.), *A history of school mathematics* (p. 623-645). National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (1991). Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. *Soviet Studies in Mathematics Education,(6)*. National Council of Teachers of Mathematics.

Demosthenous, E. et Stylianides, A. (2018). Algebra-related tasks : Teachers' guidance in curriculum materials. *La matematica e la sua didattica* (*26*)1,7-27. http://www.incontriconlamatematica.org/ita/download/Rivista 26/Demosthenous Stylianides M&D 26 1 2018.pdf

Denis C. (1997) *Une introduction de l'algèbre en secondaire 3: généralisation et construction de formule*. [Mémoire de maitrise en enseignement des mathématiques, Université du Québec à Montréal].

Descartes, R., [Traduit et édité par Anscombe, G. E. M., et Geach, P. T. (1954)]. *Philosophical writings*.

Dougherty, B. (2008). Measure Up: A Quantitative View of Early Algebra. Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 389–412). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435-18

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée Humaine*. Coll. Exploration, recherches en sciences de l'Èducation. Éditions Peter Lang.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (5),37-65. IREM de Strasbourg.

Fennema, E., Franke, M. L. et Grouws, D. A. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Springer.

Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. Educational Studies in Mathematics, 5(1), 391-412.

Fujii, T. et Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: the role of quasi-variables. Dans H. Chick, K. Stacey, J. Vincent et J. Vincent (dir.), The future of the teaching and learning of algebra[69] [Proceedings of the ICMI Study Conference]. (p. 258-264). The University of Melbourne.

Gouvernement de l'ontario. (2016). Programme de la maternelle et du jardi d'enfants. https://files.ontario.ca/books/edu_the_kindergarten_program_french_aoda_web_july28.pdf

Gouvernement du Québec. (2010). Progression des apprentissages au secondaire - Mathématique. Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS).

Gouvernement du Québec. (2009). *Progression des apprentissages (au primaire) : Mathématique*. Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS).

[69] Les textes préparatoires sont sous le même titre mais sont une publication différente.

Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire*. Ministère de l'Éducation du Québec.

Gouvernement du Québec (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation du Québec.

Gouvernement du Québec. (1993). *Mathématique 068116*. Ministère de l'Éducation du Québec.

Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International journal of computers for mathematical learning*, *10*(2), 109-141.

Hitt, F. (2006). Apprentissage en collaboration, débat scientifique et auto-réflexion (ACODESA). *Actes de la CIEAEM*, *58*, 121-126.

Hitt, F., Kieran, C. (2009). Constructing Knowledge Via a Peer Interaction in a CAS Environment with Tasks Designed from a Task–Technique–Theory Perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*(2), 121-152.

Hitt, F., Saboya, M. et Zavala, C. C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education, 48*,775–791. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5

Hoyles, C. et Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics 23*, 31–57 (1992).

Hunter, J., Anthony, G. et Burghes, D. (2018). Scaffolding Teacher Practice to Develop Early Algebraic Reasoning. Dans C. Kieran (dir.). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice.* (p.379-401). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Jeannotte, D., Squalli, H. et Robert, V. (2019b). *Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du PFEQ au primaire*. Actes du GDM. https://www.dropbox.com/s/isgj5eu1ck5qt8h/2019 GDM Actes complets avec références.pdf?dl=0

Jeannotte, D., Squalli, H., Robert, V. et Koudogbo, J. (2019a). *Fondements d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique en contexte québécois*. Communication 9 du colloque de l'OIPA à Sherbrooke. https://bit.ly/3H5fwEd

Kaput, J.J., et Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. Dans H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, et J. Vincent (dir.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 344–351). The University of Melbourne

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5–17). Routledge. Kaput, J. J., Carraher D. W. et Blanton, M. L. (dir.). *Algebra in the early grades*. Routledge.

Kaput, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power*. https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Karsenti, T. et **Savoie-Zajc, L. (dir.).** (2018). *La recherche en éducation: Étapes et approches. 4e édition revue et mise à jour*. Les Presses de l'Université de Montréal.

Kieran, C. (dir.). (2018). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (ICME-13). Dans G. Kaiser (dir.), Faculty of Education, University of Hamburg. Springer: Open access eBook. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1),139-151.

Kieran, C. (1998). The changing face of school algebra. Dans *8th International Congress on Mathematical Education: selected lectures*: Sevilla 14-21 july 1996 (pp. 271-290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Kieran, C., Boileau, A et Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.257-293). Kluwer.

Kieran, C. (1989). A Perspective on Algebraic Thinking. Dans G. Vergnaud, J. Rogalski, et M. Artigue (dir.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *13th*, *Paris, France, 2*, (p.163-171).

Kieran, C et Filloy E. (1988) *The learning of school algebra from a psychological perspective* [first draft of chapter for PME book, April 1988].

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. Dans D.Tall, *Proceedings of the third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (p.128-132). Warwick University.

Kouki, R., Jeannotte D., Vlassis J. (2015) Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum. Dans L.Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* [Compte-rendu du Groupe de Travail n° 3], (p. 199-205). http://emf2015.usthb.dz/actes/EMF2015GT3COMPLET.pdf

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture Through Generalization Activities. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.87-106). Kluwer.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113-120.

MacGregor, M. et Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19. Kluwer. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

Malara N.A. et Navarra, G. (2018). New Words and Concepts for Early Algebra Teaching : Sharing with Teachers Epistemological Issues in Early Algebra to Develop Students' Early Algebraic Thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. (p.51-78). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'AMQ*, XXXXIX. 30-40.

Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 57–94). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435-18

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.65-86). Kluwer.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. et Gowar, N. (1985). *Routes to/ roots of algebra*. Milton Keynes. Open University Press.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année, Mathématiques* [périmé]. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Molina, M., Ambrose, R. et del Rio, A. (2018). First encounter with Variables by First and Third Grade Spanish Students. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, (p.261-280). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Standards for school mathematics*. . NCTM.

Demana, F. et Leitzel, J. (1988). Establishing concepts through numerical problem solving. Dans A. F. Coxford et A. P. Shulte (dir.), *The ideas of algebra K-12* [1988 Yearbook] (p.61-68). National Council of Teachers of Mathematics.

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.197-220). Kluwer.

Papert, S. (1980) *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books Inc.

Papert, S. (1972) *Teaching Children Thinking, Programmed Learning and Educational Technology, 9*(5), 245-255. https://doi.org/10.1080/1355800720090503

Proulx, J. (2013). Mental mathematics and algebra equation solving. Dans B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti, *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8-WG3),* Manavgat-Side, , Antalya, Turkey. (Vol. 8, p. 530-539).

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277.

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p.3-25). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. Dans E. Knuth et J. Cai (dir.). *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (p.303-322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Radford (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.1)*, *Mérida, Mexico*. Universidad Pedagógica Nacional.

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke].

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 55-62). Springer.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. Dans N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 137-145). Springer.

Romano, D. A. et Crvenkovic, S. (2014). Рана алгебра и раноалгебарско мишљење [Algèbre précoce et pensée algébrique précoce]. Dans Jagodina (dir.). *Troisième Conférence internationale « Méthodes d'enseignement des mathématiques »,* (p. 20).

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. [Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal].

Saboya, M., Bernarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1: La résolution de problèmes. Dans E. Roditi et F. Pluvinage, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *20*, (p. 61-100).

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 277. https://doi.org/10.7202/031881ar

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier, *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. CRIRES. https://bit.ly/3H84gGX

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires*. CRIRES. https://bit.ly/3H84gGX

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. [Thèse de doctorat, Université Laval].

Stephens, A., Blanton, M., Torres, R.V., Stroud, R., Stylianou, D., Gardiner A. M., Strachota, S., Knuth, E. et Sung, Y (2019). Sixth-grade students' retention of early algebra understandings after an elementary grades intervention. Dans S. Otten, A. G. Candela, , Z. de Araujo, C. Haines et C. Munter, *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (p.147-156). University of Missouri. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED606556.pdf

Stylianides, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: A curricular perspective* {Thèse de doctorat non publiée, University of Michigan]. https://www.proquest.com/docview/305447583

Venant, F. et Migneault, P. (2017). Développer la pensée algébrique précoce en jouant? Représentations et manipulations dans Dragon Box. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 33–55. https://doi.org/10.7202/1055727ar

Wheeler, D. (1996). Rough or smooth? The transition from arithmetic to algebra in problem solving. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p.147-149). Kluwer.

Williams, D. et Stephens, M. (1992). Activity 1: Five steps to zero. Dans J.T.Fey (dir.), *Calculators in mathematics education*, [Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics], 233-234. NCTM.