UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MODÉLISATON DANS L'ESPACE: OBSTACLES DU PASSAGE DU 2D AU 3D.

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA
MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUE

PAR

DANIELA FURTUNA

Novembre 2008

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur, Monsieur Louis Charbonneau, pour m'avoir toujours encouragée à continuer l'idée de ce travail, pour sa disponibilité à réviser plusieurs versions du présent mémoire et pour ses commentaires généraux et ses critiques toujours constructives. L'aspect actuel du mémoire a été rendu possible grâce à lui. Je désire lui transmettre à cet effet toute ma reconnaissance.

Je voudrais aussi remercier M. Denis Tanguay et M. Fernando Hitt pour leur disponibilité à réviser une première version du mémoire. Ils m'ont facilité l'amélioration de plusieurs aspects dans le contenu d'ensemble mais aussi dans la substance de ce travail.

Je voudrais aussi transmettre ma gratitude à tous les professeurs du département de mathématique pour m'avoir encouragée à poursuivre ces études, spécialement à Monsieur Fernando Hitt et à Monsieur Philipe Jonnaert.

Je tiens à remercier tous mes amis pour leurs encouragements dans les moments difficiles, avec une mention spéciale pour Jean-Louis Portelance, Richard Myre et Mariana Dumitrascu. Je tiens aussi à remercier tout le personnel du Collège Jean-de-la-Mennais pour m'avoir aidée dans les moments opportuns et Marie-Claude Rémi pour m'avoir présenté les détails de l'enseignement québécois.

Finalement, je veux remercier mes parents pour leurs encouragements et mon mari Constatin Furtuna pour m'avoir comprise et soutenue pendant les études. Aussi, je veux remercier mes deux enfants, Alina et Alex, pour avoir fait preuve de compréhension quand je n'étais pas disponible pour les aider.

TABLE DE MATIÈRES

RÉSUMÉ

Notre recherche vise l'enseignement de la géométrie au secondaire, en particulier le passage de la géométrie plane (2D) à la géométrie de l'espace (3D). À cet effet nous avons fait une courte analyse du programme d'étude visant l'enseignement de la géométrie de l'espace. Le cadre théorique développé par Houdement et Kuzniak (2005, 2006, 2007) nous a permis de réaliser l'analyse du programme d'étude. Nous avons constaté un manque de continuité à cet égard dans l'enseignement de la géométrie. Le référentiel théorique de la géométrie plane est construit dans l'esprit de la géométrie euclidienne du type GII – 2D, alors que le référentiel théorique de la géométrie de l'espace, qui est une géométrie du type GI – 3D, n'est pas un référentiel organisé selon un modèle mathématique. Nous avons constaté que l'espace de travail de la géométrie plane est un espace du type ETG – GII – 2D, alors que pour la géométrie de l'espace, l'espace de travail correspond à un ETG – GI – 3D, construit sans égard à un éventuel ETG – GII – 3D.

À partir de ces constats, nous nous sommes surtout intéressés à l'articulation 2D – 3D. Nous avons construit une séquence qui s'intéresse spécifiquement au passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace. Un autre cadre théorique, plus flexible, s'avérait nécessaire dans l'analyse de la situation-problème proposée à tous les élèves du secondaire. Brousseau et Galvez (1985) ont développé une théorie qui montre la pertinence de l'étude entre un sujet et trois types d'espaces : micro, méso et macro. Ensuite, Berthelot et Salin (2000) développent cette théorie en adaptant aux trois types d'espace les concepts élémentaires de la géométrie qui correspondent en grand partie aux conceptions des élèves dans leur pratique de la géométrie. L'analyse de la situation-problème nous a permis de remarquer que le passage du micro-espace, l'espace de la feuille de papier, au méso-espace, l'espace qui nous entoure, n'est pas fait de façon spontanée. Un ancrage dans l'espace de la feuille de papier, l'espace micro, ne permet pas une bonne articulation avec l'espace méso. Nous remarquons l'importance de développer dans la conscience de l'élève la connaissance « espace » pour développer un vrai sens spatial. Nous allons donc conclure par l'importance de choisir un espace de travail pour la géométrie de l'espace qui soit en continuité avec la géométrie plane : ETG – GII – 2D passant par un ETG – GI – 3D construit de façon à mener plus naturellement et logiquement vers un ETG – GII – 3D.

Mots clés : enseignement de mathématiques, secondaire, géométrie, espace de travail

INTRODUCTION

La géométrie, comme objet d'étude, représente un modèle pour toutes les disciplines d'enseignement, par une rigueur qui lui est propre et qui est obligatoire dans un contexte de justification des affirmations. Elle permet un bon développement de la logique et des réflexes nécessaires dans les différents processus de construction des connaissances, ainsi que dans les productions des démonstrations qui suivent une logique mathématique, dans la résolution de tâches formelles ou, dans une situation réelle.

Comme personne nouvellement arrivée au Québec, j'ai remarqué certaines différences entre ce que j'ai connu comme géométrie à enseigner dans mon pays d'origine et ce qui s'enseigne ici. Une expérience enrichissante de plus de 16 ans comme professeur de mathématique au secondaire dans une grande ville au nord-est de la Roumanie, dans une école ayant une bonne réputation, constitue l'arrière-plan de mes réflexions sur l'enseignement de la géométrie.

Sans dire que la géométrie que j'ai enseignée en Roumanie est une autre géométrie que celle qui s'enseigne au Québec, je ne peux que remarquer certaines différences d'ordre structural, dans la façon de concevoir la manière de construire cette géométrie ici. En Roumanie, il y a une différence claire entre les deux géométries, plane et de l'espace, mais les deux ont le même support théorique, la géométrie euclidienne. Ce fait représente un premier aspect à mentionner comme différence dans le processus d'enseignement. Aussi, une bonne structuration théorique de la géométrie plane, ayant une base axiomatique euclidienne, constitue le support théorique dans l'introduction de la géométrie de l'espace. Toute la base axiomatique de la géométrie plane, on la retrouve comme partie intégrante de la géométrie de l'espace, ainsi que certains ajouts, mais qui respectent le même niveau de rigueur que dans la géométrie plane. Pour un professeur de mathématique, enseigner la géométrie de l'espace représente l'iceberg de ce que sont les mathématiques, par le fait que celle-ci nécessite l'utilisation de presque toutes les connaissances acquises par des élèves, en arithmétique, algèbre et en géométrie plane.

Le modèle euclidien de la géométrie plane ou de l'espace émane de la puissance d'un modèle mathématique qui donne la possibilité d'analyser l'espace physique d'une façon cohérente, tangible et intelligible pour un élève du secondaire. Cette compréhension de l'espace physique dépend en grande mesure de l'enseignant, de la façon dont lui-même comprend les propriétés des objets à travers la géométrie euclidienne. Cette modélisation de l'espace physique autour d'un processus d'enseignement a représenté pour moi un défi qui a entraîné un travail de trois ou quatre ans, parfois, avec les mêmes élèves. Le fait de voir à la fin du secondaire des élèves ayant les moyens de produire de longues démonstrations sur des objets de l'espace m'ont récompensée pour tout le travail que j'avais fait avec eux, dans la géométrie plane et, ultérieurement, dans la géométrie de l'espace. Ce passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D, dans un processus de modélisation de l'espace physique, représente en fait l'idée principale du mémoire structuré en deux chapitres : premier chapitre, « Vers les questions de recherche » et deuxième chapitre, « La modélisation de l'espace : une expérimentation ».

Dans le premier chapitre intitulé « Vers les questions de recherche », j'ai réalisé une première section décrivant ce qui s'enseigne en géométrie dans mon pays d'origine. Cette section vise à donner au lecteur un aperçu du modèle qui m'influence dans mes réflexions sur l'enseignement de la géométrie et qui m'incite à croire à l'importance d'aborder la géométrie dans un contexte euclidien. Une partie importante du chapitre portera sur le programme d'étude du Québec. Elle vise surtout l'enseignement de la géométrie de l'espace. Afin d'assurer une certaine qualité de cette analyse du programme, nous aborderons d'abord la question du passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D. Nous examinerons par la suite les contenus du programme liés à ce thème. Afin de pouvoir émettre un avis plus éclairé sur ce passage dans le programme, nous étudierons un cadre théorique, celui développé par Houdement et Kuzniak (2005, 2006, 2007), que nous appliquerons par la suite à l'analyse du programme. À la fin du chapitre, nous émettrons cinq hypothèses sur ce passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D.

Dans le deuxième chapitre intitulé « La modélisation de l'espace : une expérimentation », nous allons nous poser la question de l'articulation entre une géométrie 2D et une géométrie 3D autour de la connaissance « espace ». En ce sens, nous avons considéré que le cadre théorique utilisé dans le premier chapitre, pour analyser le Programme d'étude, ne donne pas les moyens nécessaires pour une analyse d'ordre expérimentale, qui vise le passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D. Pour ce fait, nous avons utilisé un cadre théorique spécifique, qui a été introduit par Brousseau (1983) et Galvez (1985) et ultérieurement développé par Berthelot et Salin (2000). À partir de la théorie des situations, Brousseau a développé les notions de micro-espace, de méso-espace et de macro-espace, ce qui nous a permis d'analyser les deux dernières hypothèses de travail énoncés à la fin du chaptire I, qui concerne de très près le passage 2D – 3D.

L'expérimentation a visé des élèves de tous les niveaux du secondaire, premier et deuxième cycle, deux classes par niveau. Nous avons présenté aux élèves une situation-problème en deux parties : la première partie (la problématique de modélisation) contenait deux tâches où les élèves devaient produire des dessins sur une feuille de papier et la deuxième partie (la problématique pratique) où les élèves devaient construire à l'aide d'objets réels (des bâtonnets en plastique et une pâte adhésive) ce qu'ils ont dessiné sur la feuille de papier. Une analyse quantitative et une analyse qualitative de l'expérimentation sont réalisées à la fin du deuxième chapitre.

Le Mémoire se termine par une « Conclusion » où nous remarquons la nécessité de choisir un référentiel géométrique spécifique à la géométrie de l'espace, qui soit construit en articulation avec ce que les élèves étudient dans la géométrie plane. Ainsi, lors de ce passage du 2D à 3D, nous remarquerons que l'élève doit développer dans sa conscience la connaissance « espace » pour marquer les approches et les différences entre l'espace réel et l'espace géométrique.

CHAPITRE I

VERS LES QUESTIONS DE RECHERCHE

1.1. Qu'est-ce que ma géométrie?

La géometrie est un objet d'étude qui a donné, au fil du temps, de grands mathématiciens et des gens qui aiment les mathématiques. Mes premières études mathématiques de la géométrie, je les ai commencées à l'âge de 12 ans en Roumanie, ce qui correspond à la sixième année de l'école primaire au Québec. La pratique de l'enseignement de la géométrie en Roumanie a évolué, tenant compte de l'évolution de la technologie et de l'intégration de la Roumanie dans l'Union européenne. Toutefois, on pourrait dire que la géométrie est enseignée de la même façon qu'il y a 30 ans. On ne trouve pas de changements majeurs dans cet enseignement, basé sur une approche euclidienne. Par contre, on trouve des changements au point de vue méthodologique, par exemple : les démonstrations sont simplifiées, les différents chapitres sont restructurés, on tient davantage compte des particularités psychologiques et pédagogiques des élèves, et de leur apport à la pratique de la géométrie.

Dans l'enseignement roumain, la pratique de la géométrie a commencé dans les années 1800. Les premiers cours ont été tenus à Iasi par Gh. Asachi et, après, à Bucarest (1818-1821) par Gh. Lazar. Le premier ouvrage de géométrie (1837) fut une traduction de A. Legendre. Aujourd'hui, l'enseignement de la géométrie commence à partir de la sixième année de l'école, comme objet d'étude indépendant, et il prend fin après six ans d'étude (la fin du lycée). Présentement, le système d'enseignement roumain est organisé de la façon suivante : quatre ans de primaire, quatre ans de gymnase (le secondaire) et quatre ans de lycée. L'étude de la géométrie comme discipline d'enseignement indépendante commence en deuxième année du secondaire. Les premières notions, qui sont introduites de façon intuitive à partir des descriptions, sont le point, la droite et le plan. On continue avec d'autres notions à l'aide de définitions, de propriétés et de théorèmes. L'élève commence à construire des démonstrations de problèmes de géométrie à partir de définitions, de propriétés et de théorèmes en suivant une logique très formelle, dès sa première année d'étude. Les axiomes de la géométrie euclidienne sont présents dans l'enseignement, par exemple sous la formulation suivante : 1. Si on donne deux points distincts A et B, alors on peut tracer une seule droite passant par les points A et B; ou, deux points distincts déterminent une droite; 2. Si le point M n'appartient pas à la droite AB, alors on dit que les points A, B, M sont non-colinéaires, etc.

Après la compréhension des notions les plus élémentaires (point, droite et plan), l'existence des points non-colinéaires permet l'introduction des notions suivantes: la demi-droite, le segment et le demi-plan. On continue avec la notion d'angle. L'angle droit est défini comme un angle congru à son supplément. La perpendicularité s'introduit à partir d'une démonstration basée sur l'observation. Étant donné que les élèves connaissent déjà le fait que deux droites concurrentes déterminent quatre angles, ils doivent comprendre que si un des angles mesure 90°, les autres angles mesurent aussi 90°. Sans entrer plus à fond dans des détails de l'enseignement de la géométrie, on peut remarquer que toute la construction de la pratique de la géométrie a à sa base un système déductif bien formalisé.

Au lycée, les difficultés dues à la compréhension des axiomes euclidiens ont déterminé une étude de la géométrie qui n'est pas basée sur des axiomes. Les axiomes sont plutôt assimilés en pratiquant la géométrie. Au secondaire, l'enseignement de la géométrie est un travail très difficile à réaliser. Un enseignant ayant de bons résultats dans sa pratique de la géométrie a derrière lui plusieurs cours de géométrie ayant une « base » euclidienne. Lors de ses études universitaires, il étudie aussi les géométries non-euclidiennes. Cet aspect compte beaucoup s'il doit répondre aux questions des élèves, surtout quand la conception de l'élève vis-à-vis de ce qui est enseigné en géométrie ne correspond pas à la conception de l'enseignant. La pratique de l'enseignement se fait par objectifs et les leçons doivent être préparées à l'avance, surtout par les nouveaux enseignants. Les méthodes les plus utilisées dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie sont : la problématisation, la conversation, la découverte, la modélisation, le travail avec le manuel et d'autres collections de problèmes et d'exercices, l'algorithmisation et la résolution de problèmes et d'exercices.

L'évaluation est un processus complexe de comparaison entre les résultats, dû au processus d'enseignement, les objectifs planifiés, les ressources utilisées et les résultats antérieurs. En fonction du moment de l'évaluation, on utilise l'évaluation initiale, l'évaluation continue, l'évaluation formative, etc. Les enseignants utilisent les tests docimologiques pour la vérification et l'évaluation des connaissances et la capacité de travailler avec ces connaissances. L'élaboration d'un test de géométrie passe par les étapes suivantes : préciser les objectifs (ce que l'élève doit connaître après une étape d'enseignement), la construction et la sélection des problèmes qui sont représentatifs pour la matière enseignée et les critères de correction.

En deuxième année d'étude de la géométrie, ce qui correspond à la troisième année du secondaire (au Québec, cela correspond à la première année du secondaire), on continue avec l'introduction d'autres notions de géométrie. Ces nouvelles notions complètent les notions étudiées en première année d'étude de la géométrie. La structuration des chapitres de géométrie de l'espace se fait généralement comme nous allons le présenter dans l'extrait de la table des matières de l'un des manuels utilisés au secondaire.

Table des matières[1]

Géométrie

Chapitre 1. Relations entre points, droits et plans.

1. 1. Tests de développement des aptitudes à l'égard de la géométrie de l'espace.

1. 2. Les corps géométriques connus.

1. 3. Les points, les droites, les plans.

1. 4. Les positions relatives d'une droite et d'un plan.

1. 5. Les positions relatives de deux plans.

1. 6. Parallélisme dans l'espace.

1. 7. D'autres théorèmes de parallélisme.

1. 8. La mesure de l'angle entre deux droites. Droites perpendiculaires.

1. 9. Droite perpendiculaire à un plan.

1. 10. Calcul de distances.

1. 11. Le prisme.

1. 12. La pyramide régulière.

1. 13. La symétrie dans l'espace.

1. 14. Les sections dans les corps étudiés.

Chapitre 2. Projections orthogonales sur un plan.

2. 1. Le théorème des trois droites perpendiculaires.

---

[1] Radu D. & Radu E. (2000), *Matematica – Manual pentru classa a VIII-a.* Editura Teora, Bucarest, Roumanie. *Mathématique – Manuel pour la classe VIII*[e], Édition et diffusion : Teora, Bucarest, Roumanie, Page 4, Extrait de la table des matières.

N.B. Les paragraphes écrits en italique sont des traductions d'extraits des Manuels de Mathématiques.

2. 2. L'angle entre deux plans.

2. 3. Plans perpendiculaires.

2. 4. Projections orthogonales sur un plan.

2. 5. L'angle entre une droite et un plan.

Chapitre 3. Calcul des aires et des volumes.

3. 1. Calcul des aires.

3. 2. Calcul des volumes.

Chapitre 4. Corps ronds.

4. 1. Cylindre.

4. 2. Cône.

4. 3. Sections dans le cône.

4. 4. Sphère.

Après deux ans au lycée, les élèves revoient les notions apprises au secondaire. Les éléments de géométrie du plan et de l'espace sont structurés, dans leurs grandes lignes, dans le chapitre suivant, selon la *table des matières*[2] que nous avons extraite d'un manuel utilisé dans les classes de sciences :

Chapitre 1. Éléments de la géométrie du plan et de l'espace.

1.1. Nombres complexes.

1.1.1. La forme algébrique d'un nombre complexe.

1.1.2. La forme trigonométrique d'un nombre complexe.

1.2. Transformations géométriques.

1.3. Le produit scalaire de deux vecteurs.

---

[2] Ganga M. (2001), *Matematica - Manual pentru clasa a X-a* ; Editura Mathpress, Ploiesti, Roumanie, page 3. Traduction du titre : *Mathématique – Manuel pour la classe Xe*. Nous avons extrait de la table des matières seulement le chapitre qui fait référence à la géométrie de l'espace. Le chapitre qui suit est dédié à l'étude de la statistique et des probabilités.

1.4. Les positions relatives dans l'espace tridimensionnel.

1.5. Sections dans les corps géométriques.

1.6. Corps inscrits; corps circonscrits.

1.7. Barycentres.

Au secondaire, la section « *1.3. Les points, les droites, les planes* » commence par une introduction en géométrie de l'espace à partir de cinq axiomes, qui représentent aussi le support de la géométrie plane.

A.1 Par deux points distincts, on peut tracer une et une seule droite; n'importe quelle droite contient au moins deux points distincts.

A.2 Par trois points non-colinéaires, on peut faire passer un seul plan; n'importe quel plan contient au moins trois points non-colinéaires.
(Si A, B, C sont trois points non-colinéaires, on notera alors (ABC) le plan déterminé par ces trois points).

A.3 Si deux points distincts appartiennent à un plan, alors la droite déterminée par ces deux points est incluse dans le plan.

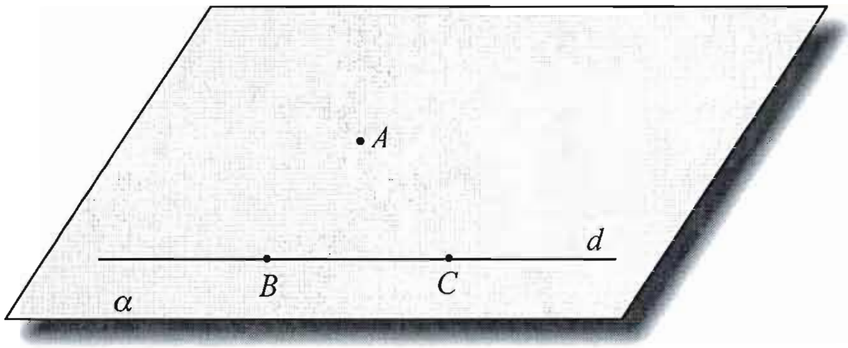
A.4 Si deux plans ont un point en commun, alors leur intersection est une droite.

A.5 Dans l'espace, il existe au moins quatre points non-coplanaires.

Pour cette géométrie, dans n'importe quel plan de l'espace, on considère vraies toutes les propositions connues de la géométrie plane qui font référence au parallélisme, à la perpendicularité, à la congruence, aux figures semblables, etc. Continuons avec les modalités de détermination d'un plan :

1. Trois points non-colinéaires déterminent un seul plan (on déduit cela à partir de l'axiome A.2). Si deux plans ont trois points non colinéaires en commun, alors les plans coïncident.

2. Une droite et un point qui n'appartient pas à la droite déterminent un plan. Il existe un seul plan qui contient la droite et le point.



La démonstration de cette proposition se fait à partir des axiomes donnés ci-dessus. Étant donné la droite d et A, un point, $A \notin d$, alors conformément à l'axiome $A1$, la droite d contient au moins deux points distincts B et C. Les points A, B, C étant non-colinéaires, ils déterminent un plan (conformément à $A1$) qui contient la droite d (conformément à $A3$). Nous démontrerons, par réduction à l'absurde, que le plan α est unique. S'il y avait un autre plan β contenant le point A et la droite d, alors les plans α et β auraient trois points non-colinéaires en commun, donc ils coïncideraient : contradiction.

Le plan déterminé par le point A et la droite d est noté par (A, d).

3. Deux droites concourantes déterminent un plan. (La justification se fait à partir des énoncés des axiomes). Le plan déterminé par les droites d et g est noté (d, g).

En géométrie plane, deux droites distinctes sont concourantes ou parallèles. En géométrie de l'espace, il existe une situation de plus : les droites non-coplanaires.

Définition : Deux droites coplanaires qui n'ont aucun point commun sont nommées droites parallèles.

Après avoir défini « deux droites parallèles », on ajoute un sixième axiome qui est, en fait, le cinquième postulat d'Euclide à partir duquel on peut déduire les positions relatives des droites dans l'espace : parallèle, concourantes ou non-coplanaires.

A.6 Par un point extérieur à une droite, on peut construire une seule droite parallèle à la droite donnée.

La définition donnée aux droites parallèles conduit à la considération d'un autre cas par lequel on peut déterminer un plan.

4. Deux droites parallèles déterminent un unique plan.

Les axiomes et les propositions, par lesquels on détermine un plan, représentent les énoncés nécessaires pour l'introduction des sections qui suivent : *1.4. Les positions relatives d'une droite et d'un plan; 1.5. Les positions relatives de deux plans.*
La section *1.4. Les positions relatives d'une droite et d'un plan* contient la définition d'une droite parallèle à un plan.

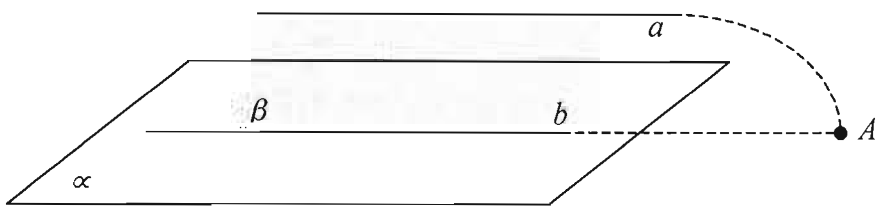
Définition : On dit qu'une droite a est parallèle à un plan α *si* $a \cap \alpha = \emptyset$. *On note :* $a \,//\, \alpha$.

On continue avec le théorème qui représente le vrai lien entre une droite, un plan et le parallélisme dans l'espace.

Théorème : Si une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, alors la droite est parallèle au plan ou est incluse dans ce plan.

La section qui met les bases du parallélisme dans l'espace contient cinq théorèmes qui sont donnés aux élèves avec leur démonstration. Pour que le lecteur puisse se faire une idée de ce qui s'enseigne sur le parallélisme dans l'espace, nous allons commencer par présenter les cinq théorèmes de façon exacte.

Théorème 1. Soit a une droite parallèle au plan α, et β un plan qui contient la droite a. Alors, ou bien $\alpha // \beta$, ou bien β et α s'intersectent le long d'une droite qui est parallèle à la droite a.

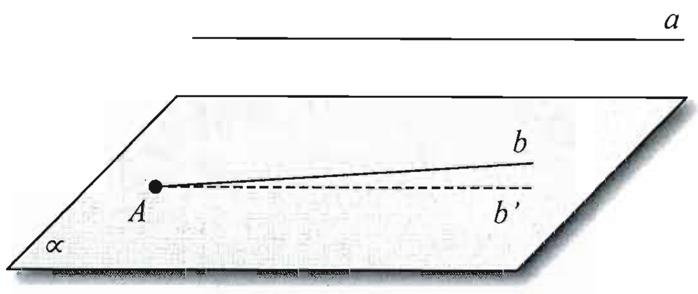


Démonstration :

Si on présuppose que α et β ne sont pas parallèles, alors il y a une droite d'intersection entre les deux plans, $b = \alpha \cap \beta$. La démonstration de ce théorème se fait par réduction à l'absurde. Si a et b ne sont pas parallèles, alors soit $\{A\} = a \cap b$ (a et b étant coplanaires). Si $A \in b$ et $b \subset \alpha$, alors $A \in \alpha$. Lorsque $A \in a$, on déduit que $A \in a \cap \alpha$, en contradiction avec $a // \alpha$.

Théorème 2. Soit a une droite incluse ou parallèle à un plan α et soit b une droite parallèle à a qui passe par le point A du plan. Alors, la droite b est incluse dans le plan α.

La démonstration de ce théorème se fait en considérant deux cas : quand la droite est incluse ou non dans le plan α.

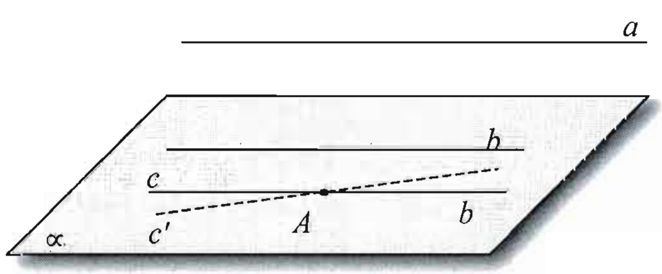


On continue en mettant en évidence que la relation de parallélisme est symétrique : si *a // b, alors b // a.* Le théorème qui suit démontre que la relation de parallélisme dans l'espace est transitive.

Théorème 3. Si a, b, c sont trois droites telles que a // b et b // c, alors a // c.

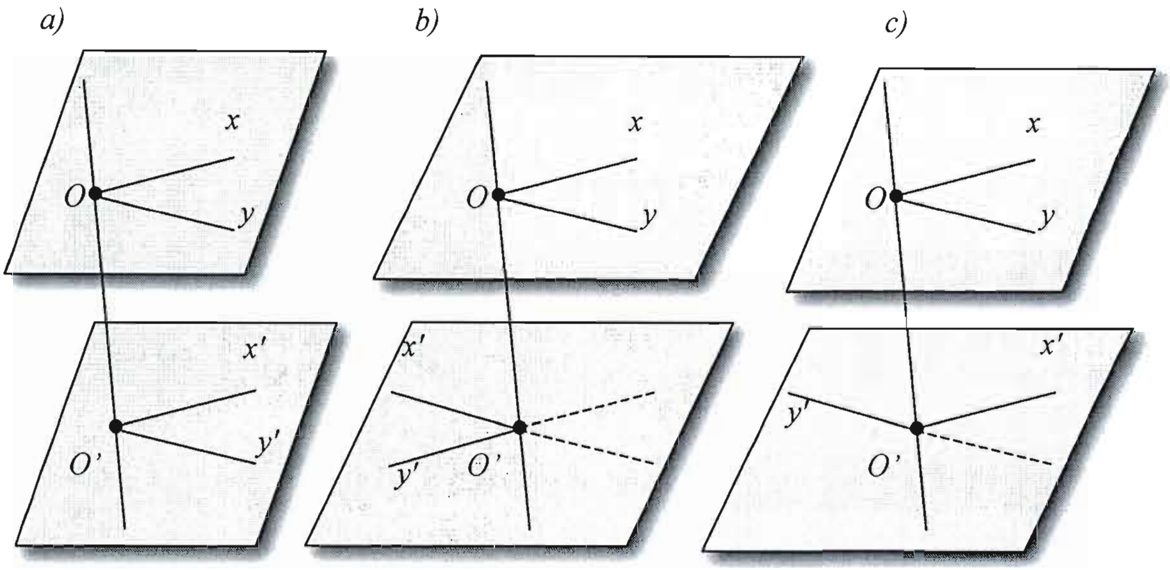
Démonstration.

On note α le plan déterminé par les droites b et c. Soit $A \in c$ et c' la parallèle à la droite a. Conformément au théorème 2, $c' \subset \alpha$, donc, c' est coplanaire avec la droite b. De là résulte que les droites c et c' coïncident (par conséquent, si les énoncés précédents sont faux, nous aurions par le point A deux parallèles à la droite a). Lorsque, c'// a (par construction), on déduit que c // a.



Pour le théorème suivant, la démonstration reprend de très près la démonstration de la géométrie plane pour les angles avec les côtés parallèles.

Théorème 4. Soit xOy et x'O'y' deux angles situés dans des plans différents. Si Ox // O'x' et Oy // O'y' , alors les angles xOy et x' O' y' sont congrus ou supplémentaires.



Démonstration.

Dans les cas a) et b), les angles xOy et x'O'y' sont congrus. Dans le cas c), les angles sont supplémentaires. Les droites Ox et O'x' étant parallèles, elles déterminent un plan α ; Oy et O'y' déterminent le plan β. Dans les deux plans, la droite OO' détermine deux demi-plans. Si les droites Ox // O'x' et Oy // O'y' sont incluses dans le même demi-plan ou dans des demi-plans différents, alors les angles sont congruents, (la figure a et la figure b). Si les droites Ox // O'x' ou les droites Oy // O'y' sont parallèles, alors les angles sont supplémentaires (la figure c).

Théorème 5. Étant donné un plan α et un point A, $A \notin \alpha$, il existe un plan unique qui contient le point A et qui est parallèle au plan α.

Démonstration.

Dans une section antérieure, on a vu qu'il existe un plan $\beta // \alpha$ qui contient le point A. β est le plan déterminé par deux droites AX et AY, parallèles à α. On démontre que le *plan γ, parallèle à α et qui contient le point A, est parallèle aux droites a et b. Conformément au théorème 2, le plan γ doit contenir les droites AX et AY. En conséquence, les plans β et γ coïncident (étant donné qu'ils ont en commun deux droites concourantes).*

Dans les manuels, à chaque section, on trouve des problèmes et des exercices spécifiques, qui utilisent constamment les théorèmes et les propriétés énoncés dans les paragraphes précédents.

Le paragraphe 1.9, *Droites perpendiculaires à un plan*, débute par la définition d'une droite perpendiculaire à un plan.

Définition : Une droite est perpendiculaire à un plan si la droite est perpendiculaire à n'importe quelle droite qui est incluse dans le plan.

On continue avec les théorèmes suivants :

Théorème 1. Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes qui sont incluses dans un plan, alors la droite est perpendiculaire à ce plan.

Théorème 2. Par un point M extérieur au plan α, on peut tracer une seule droite perpendiculaire à ce plan.

Théorème 3. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Théorème 4. Par un point donné, il n'existe qu'un unique plan, perpendiculaire à une droite donnée.

Théorème 5. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Par exemple, au lycée, le chapitre qui vise « le parallélisme dans l'espace » a une structure différente de celui qui est donné au secondaire. Après avoir donné les définitions de droites parallèles, droite parallèle à un plan et plans parallèles, on continue avec toutes les propriétés connues du parallélisme dans l'espace.

Au secondaire, après deux années de pratique de la géométrie plane, on commence l'enseignement de la géométrie de l'espace. Généralement, l'étude des objets géométriques, les solides géométriques, commence à partir du sens qu'on donne aux ensembles de points de l'espace. Pour les corps géométriques, on donne des définitions et des propriétés analogues aux propriétés étudiées dans les cas de la géométrie plane pour les surfaces polygonales. L'espace euclidien est un modèle mathématique de l'espace physique. Cet espace est compris à partir des propriétés qu'on donne à la « forme » des corps de l'espace physique et de leur « position » dans l'espace.

Au lycée, les corps géométriques sont étudiés comme étant des « images mathématiques » des corps qui proviennent de l'espace physique. Le but de ce modèle d'enseignement est le développement du sens spatial et de l'intuition spatiale, par la contemplation et l'étude de l'espace physique. Les théorèmes sont donnés avec des démonstrations rigoureuses, mais il se peut que parfois, le contenu du théorème soit justifié de façon intuitive. Les notions de congruence et de similitude sont utilisées dans la géométrie de l'espace, et ont les mêmes propriétés que celles de la géométrie plane. La géométrie plane et l'encadrement théorique axé sur la géométrie euclidienne créent les prémisses de l'étude de la géométrie de l'espace. La géométrie, comme objet d'étude indépendant, est étudiée parallèlement aux autres domaines de la mathématique. Par exemple, au secondaire, le nombre d'heures allouées par semaine à l'étude de la mathématique est de quatre : deux heures pour la géométrie et deux heures pour l'algèbre. L'avantage de ce contexte, dans lequel l'élève est suivi de façon autonome dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, par rapport aux autres domaines de la mathématique, est que l'élève peut créer les prémisses d'une bonne compréhension de la géométrie. Un autre aspect que nous croyons nécessaire de préciser, par rapport aux études universitaires, est qu'un professeur de mathématique du secondaire ou du lycée a étudié, pendant les cours universitaires, la géométrie euclidienne et les autres géométries non-euclidiennes d'une façon très intensive. Depuis quelques années, il n'y a pas de différences entre les études universitaires d'un professeur de mathématique qui enseigne au secondaire et les études de celui qui enseigne au lycée.

Pour conclure, je voudrais faire remarquer que, généralement, la géométrie comme objet d'étude a été un modèle pour toutes les autres disciplines d'enseignement. La rigueur et la justesse des affirmations en géométrie auxquelles on ajoute différentes opportunités de développer les habiletés en résolution de problèmes permettent le développement de la logique et de toutes les connaissances qui ont un support géométrique. Il est certain que l'enseignement de la géométrie est un des processus de construction de connaissances les plus difficiles, mais il peut donner une grande satisfaction aux enseignants.

1.2. Le passage de la géométrie plane (2D) à la géométrie de l'espace (3D).

Selon J. Piaget, l'enfant développe sa compréhension de l'espace en passant par quatre stades, dont le dernier, le stade formel, est atteint à l'âge de 12 ans. Le premier stade (de la naissance à 18 mois) est le stade sensori-moteur, pendant lequel l'enfant commence à comprendre l'organisation et les lois qui régissent l'espace. Il apprend à découvrir l'espace qui l'entoure par les premières expériences, les expériences spontanées. Pendant le deuxième stade, le stade pré-opératoire (de 2 à 7 ans), l'enfant découvre différentes représentations de l'espace qui ne correspondent pas nécessairement à ses perceptions, mais qui en restent très proches. Durant le stade opératoire (de 8 à 11 ans), l'enfant conceptualise l'existence d'une logique qui est en arrière de son raisonnement sur l'espace. Finalement, pendant le stade formel (qui commence à partir de l'âge de 12 ans), l'enfant développe une pensée abstraite. Son raisonnement doit être plus logique et devenir formel. Dans ce contexte, la représentation de l'espace ou des objets de l'espace s'élabore en accord avec les règles géométriques. Cependant, le développement des compétences spatiales géométriques rencontre des embûches à partir de cet âge et celles-ci restent pendant toute la période durant laquelle l'élève est à l'école secondaire, au collège et à l'université.

Nous croyons que l'enseignant de la géométrie a un rôle majeur à jouer pour surmonter ces embûches. Un bon enseignement de la géométrie plane, tout comme de celle de l'espace, peut avoir des chances de réussir à condition que l'élève soit conscient des différences géométriques entre l'objet et sa représentation, entre l'espace sensible et l'espace géométrique. Aussi, le transfert de connaissances de l'espace sensible dans l'espace géométrique passe par une bonne compréhension des propriétés des objets géométriques, que ce soit dans le plan ou dans l'espace.

On peut supposer qu'un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet (qui se situe dans l'espace) que s'il a une bonne image mentale de cet objet. Les représentations d'un objet dans un espace à deux dimensions (la feuille de papier) doivent passer par les représentations mentales de l'objet et, en général, par « l'espace ». On pourrait se demander si le passage par l'espace, nécessaire pour la représentation en 2D, n'est pas en même temps une représentation mentale de l'espace.

Généralement, nous voyons le cheminement suivant :

Espace→Objet→Représentation de l'objet en 2D.

Cependant, pour atteindre l'objectif *Représentation d'un objet 3D en 2D*, nous croyons qu'il est nécessaire de développer dans la conscience de l'élève, la connaissance *espace*, par le développement de la représentation mentale de la notion d'espace. Le passage de l'espace à l'objet passe par la représentation mentale de l'objet et par la représentation mentale de l'espace pour arriver ensuite à la représentation en 2D :

Espace→ Représentation mentale de l'espace (la sensibilisation des élèves par rapport à cette notion)→ Objet→ Représentation mentale de l'objet dans l'espace→ Représentation de l'objet en 2D.

Est-ce que cette représentation mentale de l'espace est toujours présente dans la conscience de l'élève? Pour répondre à cette question, nous avons construit une situation-problème. Nous en parlerons au chapitre II.

En géométrie plane, le triangle, le quadrilatère, le cercle, etc. sont considérés comme « objets d'étude », par le fait qu'on étudie leurs propriétés pour avoir accès aux étapes qui se suivent dans un raisonnement. Par exemple, si on prend le triangle, son dessin est proche de l'objet d'étude qui est le concept de triangle. Par ailleurs, le dessin 2D d'une pyramide est nécessairement éloigné du concept de pyramide (l'objet d'étude dans la géométrie de l'espace). Nous voulons justifier cette affirmation en faisant une comparaison entre les connaissances nécessaires pour développer la connaissance « triangle » et celles qui sont requises pour la connaissance « pyramide ». Nous définissons la connaissance d'un objet géométrique comme étant un ensemble de notions, savoirs, propriétés et énoncés, liés entre eux par un référentiel théorique, et qui donnent le pouvoir de raisonner autour de différentes représentations graphiques dans lesquelles intervient cet objet géométrique.

Pour développer la connaissance triangle, l'élève a besoin de « savoirs », qui sont à leur tour des objets d'étude de la géométrie plane. Par exemple, on utilise des savoirs préalables, comme : le point, la droite, le segment, le plan, l'angle, les types d'angles, la bissectrice, les droites perpendiculaires, la distance entre un point et une droite, les transformations géométriques. Ces savoirs, extérieurs de la connaissance triangle, sont nécessaires pour arriver ensuite à des connaissances un peu plus difficiles, et qui font la spécificité du triangle. Parmi ces connaissances, on pourrait énumérer : les autres droites importantes dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit dans le triangle, le centre du cercle circonscrit, les triangles équivalents et, finalement, les étapes d'une preuve qui passent par toutes ces connaissances et par les propriétés des objets étudiés.

On verra dans la section I.3 les limites de l'étude d'une pyramide ou d'un prisme. Dans le programme du premier cycle du secondaire, cette étude passe seulement par le calcul des aires et des volumes et par les sections parallèles avec la base. Nous croyons que, avant de commencer le calcul des aires et des volumes, on doit faire pratiquer aux élèves des connaissances qui doivent construire un véritable lien entre l'objet concret et sa représentation générique dans l'espace géométrique. Nous faisons l'hypothèse que l'introduction à partir des situations qui peuvent soulever des questions plus profondes dans la conscience de l'élève à l'égard de la notion d'espace et les modalités pour déterminer un plan, les positions relatives des droites et des plans dans l'espace, le parallélisme dans l'espace (Théorème de Thalès dans l'espace), la perpendicularité dans l'espace, etc. peuvent constituer un bon début pour la géométrie de l'espace.

La notion de « perpendicularité dans l'espace » est un des aspects qui ne peuvent pas être négligés avant de commencer le calcul des aires et des volumes pour les prismes et les pyramides droites. Dans le calcul de volumes, nous utilisons la notion de hauteur de l'objet et cela correspond à la notion de distance d'un point à un plan. En fait, les élèves construisent cette hauteur sans connaître les propriétés liées à la distance. Les propriétés intrinsèques, que la hauteur du corps présente, sont en fait des propriétés qui correspondent à la perpendicularité dans l'espace.

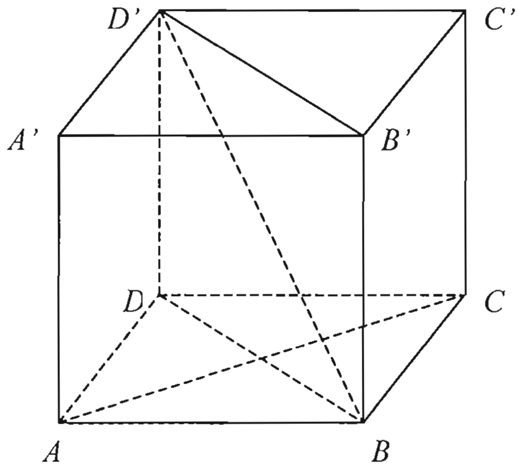
Pour les sections dans les corps, sections parallèles avec la base, on utilise des propriétés qui font référence aux angles dans l'espace, angles avec les côtés parallèles. D'autres situations peuvent demander l'utilisation du théorème de Thalès dans l'espace.

Sans entrer dans les modalités de définition d'un prisme, prenons le cas d'un cube qui a comme support de définition le prisme droit. Pour définir un cube, normalement, on commence par définir un prisme régulier droit : un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers. On continue en donnant la définition d'un parallélépipède : un prisme qui a comme bases des parallélogrammes. Le parallélépipède droit, on le définit comme un parallélépipède qui a une arête perpendiculaire au plan de la base. Ensuite, on définit le parallélépipède rectangle : un parallélépipède où toutes les faces latérales sont des rectangles. Finalement, on définit le cube comme un parallélépipède rectangle qui a toutes ses arêtes congrues.

En partant avec la définition d'un parallélépipède pour arriver ensuite à la définition d'un cube, nous avons implicitement besoin de définir la perpendiculaire sur un plan.

On peut aussi tenir compte des situations dans lesquels les élèves doivent calculer l'aire de la section diagonale dans un cube. Dans ce cas, il faut aussi connaître la définition d'une droite perpendiculaire à un plan et l'énoncé suivant : Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes qui sont incluses dans un plan, alors la droite est perpendiculaire à ce plan. (La démonstration de la constructibilité de cet énoncé, nous l'avons donnée dans le paragraphe 1.4).

Si ABCDA'B'C'D' est un cube, alors les arêtes sont perpendiculaires aux bases du cube.



Cet énoncé semble évident, mais en fait, la preuve a comme support logique et théorique les énoncés suivants : Si *ABCDA'B'C'D'* est un cube, alors $BB' \perp AB$ *et* $BB' \perp BC$ (Car les faces latérales *AA'B'B et BB'C'C* sont des carrés). Donc, *BB'* est perpendiculaire à deux droites non-parallèles, *AB* et *BC*, incluses dans le plan *ABC*. De cela, on déduit que $BB' \perp ABC$, conformément à l'énoncé suivant : Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes qui sont incluses dans un plan, alors la droite est perpendiculaire au plan.

Même si les enseignants n'utilisent pas ce type de démarche, nous croyons que ces étapes devraient êtres connues par les enseignants, afin qu'ils soient en mesure de justifier ou de répondre aux questions des élèves. On remarque que pour démontrer la perpendicularité à un plan, on a besoin de connaissances liées aux propriétés apprises dans la géométrie plane. Pour avoir accès à un savoir « cube », dans une perspective euclidienne, il semble que l'élève doive d'abord avoir une compréhension de la notion d'espace et la capacité de gérer la représentation des objets de l'espace sensible dans l'espace géométrique. À cet effet, il est nécessaire que l'élève soit un bon observateur des phénomènes qui ont lieu dans l'espace qui nous entoure, en plus de leur transposition dans l'espace géométrique (à ce sujet, l'enseignant peut avoir un rôle important à jouer).

Or, pour ce faire, il nous apparaît que se restreindre à des représentations 2D d'objet 3D ne permet pas de développer cette compréhension de l'espace et cette capacité de gérer le passage du sensible au géométrique. On sait que les élèves ont des problèmes avec toutes les représentations de la géométrie de l'espace sur un système 2D (la feuille de papier).

Les difficultés liées à la notion d'espace et aux représentations géométriques en perspective peuvent représenter des obstacles.

Mais, il est aussi possible que l'approche pédagogique y soit pour quelque chose. Présentement, toutes les représentations géométriques, dans la salle de classe, se font au tableau et ce, en utilisant rarement une calculatrice ou d'autres moyens. Il est possible que ces difficultés soient dues en grande partie à la façon dont l'élève construit ses connaissances en lien avec le développement de sa pensée.

Nous allons, dans la prochaine section, nous intéresser à ce passage de la géométrie dans le plan à la géométrie dans l'espace tel qu'il est proposé dans le programme au Québec.

1.3. Étude ponctuelle du programme

1.3.1. Structure du programme.

Les orientations du nouveau programme d'enseignement mettent l'accent sur le passage de la formation à la pratique. Les quatre orientations qui servent comme fondements au processus d'enseignement et d'apprentissage visent : la réussite pour tous, la formation centrée sur le développement de compétences, l'évaluation au service de l'apprentissage et une formation décloisonnée[3]. Les cadres théoriques qui sont à la base du programme représentent les fondements sur lesquels devraient se construire, selon les concepteurs du programme, tout apprentissage : le constructivisme, le socioconstructivisme et le cognitivisme [4].

> Conçu comme un système, le Programme de formation s'articule autour de trois éléments intégratifs : les domaines généraux de formation, les compétences transversales et les domaines d'apprentissage. [5]

Le Programme définit les domaines généraux de formation comme un ensemble de grandes intentions éducatives et d'axes de développement destinés à structurer l'action collective de tous ceux qui font l'école.[6] Les compétences transversales sont d'ordre intellectuel, méthodologique, personnel et social ou de l'ordre de la communication. Les domaines d'apprentissage du programme se constituent en cinq grandes lignes directrices: les langues; la mathématique, la science et la technologie; l'univers social; les arts; le développement personnel.

Le programme de mathématique est organisé autour de certaines rubriques qui sont les mêmes pour tous les programmes: Présentation de la discipline; Relations entre la discipline et les autres éléments du Programme de formation; Contexte pédagogique; Compétences; Contenu de formation.

Gérer la diversité des situations dans lesquelles une personne est entraînée tout au long de sa vie représente une des idées de base du programme. Ainsi, raisonner,

---

[3] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre I, page 8.
[4] *Ibid.*, page 9.
[5] *Ibid.*, page 15.
[6] *Ibid.*, page 15.

établir des liens et communiquer, représentent d'autres objectifs globaux, importants, dans l'enseignement de mathématique. En ce sens, le programme de mathématique au secondaire, comme celui du primaire, est axé sur le développement des trois compétences : *Résoudre une situation-problème, Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Ces trois compétences se développent en interaction avec le contenu mathématique et la formation de l'élève. Pour chaque compétence, le programme précise les composantes, les critères d'évaluation ainsi que les attentes de fin de cycle.

> Les composantes de la compétence permettent d'en cerner les facettes et en décrivent les aspects essentiels. Elles permettent également de s'en donner une représentation concrète et de saisir les principaux éléments en jeu lors de son exercice. [7]

Les composantes de la compétence *Résoudre une situation-problème sont les suivantes :* Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, Représenter la situation-problème par un modèle mathématique, Élaborer une solution mathématique, Valider la solution et Partager l'information relative à la solution. Pour la compétence *Déployer un raisonnement mathématique,* le programme présente trois composantes : Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques, Établir des conjectures, Réaliser des démonstrations ou des preuves. La troisième compétence, *Communiquer à l'aide du langage mathématique,* a aussi trois composantes : Analyser une situation de communication à caractère mathématique, Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique et Produire un message à caractère mathématique.

Les critères d'évaluations doivent permettre de porter un jugement sur les compétences. À cet effet, chaque compétence a ses propres critères d'évaluations et

[7] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle,* page 16.

dépendent de la situation-problème à laquelle on fait appel dans le processus d'enseignement. Les attentes de fin de cycle représentent ce qui est attendu de l'élève à la fin du premier cycle du secondaire par rapport à la compétence à développer, ainsi que pour chaque champ disciplinaire : arithmétique, algèbre, probabilité, statistique et géométrie. Dans le contenu de formation, en fonction de chaque domaine de la mathématique, on trouve englobés tous les savoirs nécessaires au développement d'une compétence.

Le programme de mathématique pour le deuxième cycle du secondaire reprend les éléments intégratifs de celui du premier cycle : les domaines généraux de formation, les compétences transversales et les domaines d'apprentissage. Avant d'entrer dans le contexte pédagogique, le programme de deuxième cycle, comme celui de premier cycle, présente la discipline en lien avec les autres éléments du Programme de formation. Dans une logique des compétences, les trois compétences, qui doivent se développer graduellement en fonction des savoirs à acquérir, sont reprises au deuxième cycle du secondaire. Dans la première année du cycle, les trois compétences sont reprises et leur contenu suit de très près ce que nous avons déjà présenté pour le premier cycle du secondaire : sens de la compétence, composantes, attentes de fin de cycle et critères d'évaluation. Si, dans la première année du cycle, troisième secondaire, le développement des compétences est suivi par tous les élèves de la même façon, à partir de la deuxième année du cycle, quatrième et cinquième secondaire, le développement des compétences se fait en fonction d'une de trois séquences d'enseignement : *Culture, société et technique*, *Technico-sciences* ou *Sciences naturelles*.

> La séquence *Culture, société et technique* s'adresse à l'élève qui aime concevoir des objets et des activités, élaborer des projets ou coopérer à leur réalisation. Elle est susceptible d'éveiller chez l'élève un intérêt pour les causes sociales et de développer son esprit d'entreprise.[8]

---

[8] *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2e cycle.* Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, page 5.

> La séquence *Technico-sciences* s'adresse à l'élève désireux d'explorer des situations qui combinent à l'occasion le travail manuel et le travail intellectuel. L'accent est mis sur la réalisation d'études de cas ainsi que sur l'aptitude de repérer les anomalies dans des processus ou dans des solutions en vue d'établir un diagnostique et d'apporter des correctifs appropriés. [9]
>
> La séquence *Sciences naturelles* s'adresse à l'élève qui cherche à comprendre l'origine et le fonctionnement de certains phénomènes, à les expliquer et à prendre des décisions dans ces domaines. [10]

La reconnaissance des compétences se fait par des situations-problèmes. Les situations-problèmes doivent être construites par rapport à la compétence à développer. À cet effet, le programme donne des indications qui suggèrent des différences entre les situations-problèmes. De façon générale, pour les premières deux compétences, *Résoudre une situation-problème* et *Déployer un raisonnement mathématique*, les situations-problèmes servent à évaluer les compétences, où le traitement oblige à faire appel à une combinaison nouvelle de concepts et de processus appris antérieurement.

Une situation-problème qui évalue la compétence *Résoudre une situation-problème* se caractérise par l'étendue des savoirs à mobiliser, le niveau d'abstraction requis, la difficulté des modélisations à réaliser et les liens sollicités entre les champs de la mathématique.[11]

La spécificité des situations-problèmes, pour l'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*, consiste par le fait que l'élève doit expliciter un raisonnement en se prononçant sur une conjecture émise ou non par lui. [12]

---

[9] *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2e cycle.* Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, page 5.
[10] *Ibid.*, page 5.
[11] *Ibid.*, page 19.
[12] *Ibid.*, page 20.

Dans les situations-problèmes, qui servent à évaluer la compétence *Communiquer à l'aide d'un langage mathématique*, l'élève doit communiquer dans un langage mathématique. Cela suppose l'exploitation de registres de représentations sémiotiques, de concepts ou de processus mathématiques avec lesquels l'élève s'est familiarisé antérieurement. [13]

Notre intention est de ne pas entrer beaucoup dans les détails du Programme mais, de donner au lecteur un bon aperçu de sa structure. À cet effet, nous allons finir cette introduction du programme de formation en remarquant qu'il accorde une place privilégiée aux relations entre les mathématiques et les autres disciplines d'enseignement :

> Le domaine de la mathématique, de la science et de la technologie contribue à la formation générale de l'élève tant par les compétences que par les savoirs qui y sont rattachés. Il lui fournit l'occasion de poursuivre le développement de la rigueur, du raisonnement, de l'intuition, de la créativité et de la pensée critique déjà amorcé au primaire. [14]

La géométrie étant un des domaines les plus importants de la mathématique, elle a des incidences majeures dans la construction de connaissances des élèves. Dans le présent chapitre, nous voulons nous faire une première idée sur la pratique de la géométrie au premier et au deuxième cycles du secondaire, en suivant le contenu du programme. Nous cherchons à préciser les étapes par lesquelles passe l'enseignement de la géométrie selon le Programme. Nous nous intéresserons plus spécifiquement au passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace, afin d'identifier les liens ou les ruptures dans cette évolution de l'enseignement.

---

[13] *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2e cycle.* Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, page 20.

[14] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 225.

1.3.2. Le programme d'enseignement de la géométrie, au premier cycle du secondaire.

La géométrie contribue d'une façon déterminante à l'évolution des connaissances des élèves dans tous les domaines d'apprentissages. Les compétences des élèves en géométrie sont mises à profit dans les arts, l'univers social, les langues, le développement personnel, les sciences et la technologie.

La pensée géométrique permet à l'élève d'interpréter l'espace et les formes qui nous entourent, en développant la rigueur, le raisonnement, l'intuition et la créativité. L'élève doit se créer des images personnelles sur la réalité en faisant appel à sa pensée géométrique « puisqu'il faut organiser dans l'espace des formes bidimensionnelles et tridimensionnelles.[15] » Les activités d'exploration qui mettent l'accent sur les connaissances géométriques représentent des expériences riches qui permettent à l'élève de conjecturer, de simuler, d'expérimenter et de construire ses savoirs et de tirer des conclusions.[16] Ces activités peuvent êtres réalisées dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, à l'intérieur ou à l'extérieur de l'institution d'enseignement (les projets interdisciplinaires peuvent nécessiter des étapes où l'élève n'est pas dans le milieu institutionnel), en suivant des objectifs qui comportent des données complètes, superflues ou manquantes. Par exemple, on trouve en arts des liens avec la géométrie par les figures et les transformations géométriques, ainsi que par le sens spatial. Le sens spatial est aussi présent dans l'univers social (par les représentations 2D et 3D, par le repérage de points sur un axe et dans un plan, par les transformations géométriques et les unités de mesure), dans le développement personnel et dans les sciences et les technologies.

Les activités doivent rencontrer les trois compétences visées par le programme :

---

[15] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 235.
[16] *Ibid.*, page 237.

Résoudre une situation-problème, Déployer un raisonnement mathématique et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Les situations-problèmes, qui sont au cœur du processus d'enseignement et d'apprentissage, doivent permettre à l'élève d'acquérir les habiletés intellectuelles nécessaires au développement de la pensée mathématique.

La « mise en situation » est la modalité par laquelle l'élève développe d'une façon active ses capacités de réflexion, de manipulation, d'exploration et de construction, en recourant à son intuition, à son sens de l'observation, à son habileté manuelle et à sa capacité d'écouter et de s'exprimer.[17] En ce qui concerne la géométrie, le sens de ces trois compétences prend une teinte particulière.

La compétence *Résoudre une situation-problème* se caractérise par le passage de l'observation au raisonnement. L'élève mobilise des connaissances appropriées, nécessaires dans l'analyse et dans la résolution de la situation-problème, en construisant des figures géométriques qui se démarquent par des propriétés et des définitions spécifiques.

> En géométrie, il passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation-problème. Il construit des figures au besoin, à l'aide d'instruments ou de logiciels de géométrie dynamiques, et il manipule des expressions numériques ou algébriques, en particulier pour le calcul de longueurs et d'aires. L'élève interprète et écrit les résultats numériques obtenus en utilisant les unités de mesure appropriée à la situation.[18]

Les critères d'évaluation doivent passer par la compréhension de la situation-problème, par la mobilisation des savoirs mathématiques appropriés à la situation-

---

[17] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 237.
[18] *Ibid.*, page 241.

problème et finalement, par l'élaboration d'une démarche et d'un résultat approprié à la solution du problème.

Déployer un raisonnement mathématique est la compétence qui développe chez l'élève la reconnaissance des caractéristiques des figures usuelles, mettant en évidence les propriétés de ces figures. L'élève évolue entre différents types de raisonnement : analogique, inductif ou déductif. Il parvient à utiliser ces raisonnements à partir du moment où il utilise la logique. À cet effet, l'élève est conduit vers l'application de certaines règles de la logique, par exemple : énoncé vrai ou faux, contre-exemple, condition nécessaire et/ou suffisante, etc.

> En géométrie, il déploie un raisonnement lorsqu'il apprend à reconnaître les caractéristiques des figures usuelles à l'aide de transformations, met en évidence leurs propriétés et effectue des opérations sur les figures planes à l'aide de transformations géométriques. Il compare et calcule des angles, des longueurs et des aires, et il forme des patrons (développement) de solides qu'il représente par un dessin. Il se familiarise avec les définitions et les propriétés des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. Il détermine des mesures manquantes dans différents contextes.[19]

Le sens de la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* vise la description et l'interprétation de la figure afin de la reproduire. La conceptualisation et l'explication des connaissances, dans un processus ou une démarche, représentent les liens avec cette compétence, « lorsque l'élève formule des conjectures à partir des réseaux de concepts et des processus mathématiques. »

> En géométrie, il communique lorsqu'il décrit et interprète une figure afin, notamment, de la reproduire. Lors de la recherche de mesures manquantes, il utilise des unités de mesure et peut produire ou interpréter des formules.[20]

---

[19] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 243.
[20] *Ibid.*, page 246.

Au primaire, l'élève étudie les solides : prisme, pyramide, boule, cylindre et cône. L'accent est mis sur l'étude des prismes et des pyramides sans entrer dans les propriétés des objets. En ce qui a trait aux figures planes, l'élève reconnaît et classifie les quadrilatères, les triangles et les éléments importants dans un cercle.

Au premier cycle du secondaire, les concepts qui sont primordiaux sont les figures géométriques et le sens spatial. La géométrie de l'espace est représentée par les concepts suivants : les solides et les figures semblables. Les solides étudiés sont : les prismes droits, les pyramides droites, les cylindres droits, les développements possibles d'un solide et les solides décomposables. Le processus de construction et de transformation géométrique a une contribution primordiale au développement de ces deux concepts. En passant par les figures planes, les angles, les solides et les figures isométriques et semblables, on retrouve les processus de construction géométrique, de transformation géométrique et de recherche de mesures manquantes.

Les concepts de figure géométrique et de sens spatial ont un degré élevé de difficulté. L'élève commence à étudier ces concepts au primaire. Au secondaire, il va approfondir le développement des compétences, par différents processus et diverses méthodes. L'accent est mis sur les propriétés des figures. Ces propriétés doivent constituer des conclusions dans un contexte où l'élève doit lui-même les découvrir.

Les propriétés des objets géométriques sont mises en évidence à l'aide de transformations (les translations, les réflexions, les rotations) et de constructions géométriques dans le plan, sans utiliser le plan cartésien. Parmi les moyens utilisés dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie, on retrouve la construction « papier-crayon » et l'utilisation de matériel concret. Ce type d'apprentissage nécessite de la part de l'élève du temps et de la réflexion sur la nature des objets et sur leurs propriétés. Le développement de la pensée géométrique et du sens spatial détermine le développement de la compétence d'un individu dans plusieurs domaines d'activité. Dans les arts, dans les sciences et technologies et dans différentes situations quotidiennes, l'élève est appelé à utiliser ses connaissances géométriques.

Donc, au premier cycle, la géométrie 3D se résume à l'étude des solides, sans entrer dans les propriétés spatiales des objets géométriques à étudier, et à l'étude de figures semblables.

1.3.3. Le programme d'enseignement de la géométrie, au deuxième cycle du secondaire.

Nous cherchons à identifier le développement des compétences et des connaissances en géométrie de l'espace selon le nouveau programme d'étude du deuxième cycle du secondaire. Le développement des compétences au deuxième cycle repose sur les acquis du premier cycle. De nouveaux contextes s'ajoutent aux situations qui ont déjà été présentées dans le programme du premier cycle.

À partir de la quatrième secondaire, les compétences se développent en fonction de la séquence choisie par l'élève : séquence *Culture, société et techniques*, séquence *Technico-sciences* ou séquence *Sciences naturelles*. Nous suivrons la séquence « Sciences naturelles » dans le but d'observer les étapes du développement des compétences et des connaissances. Nous considérons que, dans le nouveau programme, la séquence *Sciences naturelles* est celle où le niveau mathématique est le plus élevé, en plus d'être dédiée aux étudiants qui se destinent à des carrières à forte composante scientifique.

1.3.3.A. Le développement des compétences.

Compétence 1 - *Résoudre une situation-problème*

La compétence *Résoudre une situation-problème* développe chez l'élève son sens spatial et son sens de la mesure. Il cherche des mesures manquantes (en utilisant des relations, des propriétés ou des définitions), il structure et justifie les étapes de la démarche à l'aide de propriétés et d'énoncés connus, en s'assurant que le résultat qu'il obtient est correct. Cette compétence est développée chez l'élève en fonction de la séquence qui a été choisie et de l'année d'étude.

Première année du cycle - Description commune aux trois séquences

Dès la première année du cycle, l'élève est conduit à la construction et à la représentation de figures géométriques. Il doit utiliser son sens spatial et son sens de la mesure. Ce processus nécessite le recours aux différentes relations associées aux figures géométriques et la détermination de mesures manquantes.

Donc, au deuxième cycle, à la première année du cycle et conformément à la compétence *Résoudre une situation-problème,* la géométrie 3D se résume à l'étude de la description et de la construction des objets réels et, de la représentation des solides dans le plan, de la recherche de mesures manquantes associées à des calculs de volumes et des aires.

Deuxième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

Le développement de la géométrie autour de la compétence *Résoudre une situation-problème* passe par la nécessité d'utiliser les relations métriques ou trigonométriques, en faisant intervenir des triangles rectangles ou des figures isométriques, semblables ou décomposables.

Donc, au deuxième cycle, à la deuxième année du cycle et conformément à la compétence *Résoudre une situation-problème,* la géométrie 3D se résume au calcul des aires et des volumes de solides.

Troisième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

Les situations-problèmes de la troisième année du cycle sont liées aux phénomènes naturels. L'élève est amené à utiliser un réseau de concepts et de processus géométriques et algébriques, en faisant appel, si nécessaire, à la représentation vectorielle et à l'étude des coniques afin de représenter et d'analyser différents phénomènes.

Donc, au deuxième cycle, à la troisième année du cycle et conformément à la compétence *Résoudre une situation-problème,* la géométrie 3D n'est pas présente.

Compétence 2 - *Déployer un raisonnement mathématique*

En déployant son raisonnement mathématique, l'élève doit reconnaître les caractéristiques et les propriétés des figures géométriques lorsqu'il construit des figures, compare ou calcule des mesures manquantes. Dans ce processus, l'élève utilise des énoncés déjà admis et, au besoin, il recourt à des preuves indirectes pour mettre en évidence l'existence d'une propriété.

Première année du cycle (Description commune aux trois séquences)

Le développement de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* est mis en évidence par les démarches d'ordre inductif dans un processus de preuve. Les situations-problèmes permettent d'illustrer des raisonnements à l'aide de diverses représentations (représentations verbale, symbolique, graphique, table de valeurs, dessin), selon le contexte et le champ mathématique sollicité. Pour l'élève, l'utilisation des différents types de raisonnement (illustrer, expliquer, justifier ou convaincre), des exemples ou des contre-exemples lui permet de dégager les principales étapes des solutions et de mettre en évidence ses raisonnements. Les réseaux de concepts et de processus géométriques sont exploités pour déduire des mesures manquantes ou pour valider des conjectures.

Donc, au deuxième cycle, à la première année du cycle et conformément à la compétence *Déployer un raisonnement mathématique,* la géométrie 3D n'est pas vraiment présente, si ce n'est que par le calcul des aires et des volumes. Les raisonnements mathématiques à déployer, sur les figures géométriques en 3D, font appel à des propriétés géométriques spécifiques à la géométrie 2D et non à des propriétés de la géométrie 3D.

Deuxième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

À partir de la deuxième année du cycle, les situations-problèmes sont structurées pour permettre à l'élève d'utiliser les liens entre les concepts et les processus des différents champs de la mathématique. Le raisonnement (analogique, inductif ou déductif) doit être bien déployé au cours de la validation d'une conjecture. L'élève est incité à utiliser des définitions, des propriétés, des relations et des théorèmes pour prouver des conjectures ou pour dégager la structure du raisonnement déployé dans une démarche faite par autrui (analyser, critiquer, reformuler).

Donc, au deuxième cycle, à la deuxième année du cycle et conformément à la compétence *Déployer un raisonnement mathématique,* la géométrie 3D n'est pas vraiment présente, si ce n'est par le calcul des aires et des volumes. Les aspects que nous avons mis en évidence pour la première année du cycle restent aussi valables pour la deuxième année du cycle.

Troisième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

Au cours de la troisième année du cycle, les situations proposées favorisent le recours à divers types de raisonnement, à l'exploitation de réseaux de concepts, de processus et de relations dans les différents champs mathématiques par des démonstrations qui mettent en évidence une démarche déductive. L'utilisation du raisonnement géométrique nécessite aussi la mobilisation du raisonnement algébrique pour les concepts de conique et de vecteur.

Donc, au deuxième cycle, à la troisième année du cycle et conformément à la compétence *Déployer un raisonnement mathématique,* la géométrie 3D n'est pas présente.

Compétence 3 - *Communiquer à l'aide du langage mathématique*

Tous les processus de construction, de description, d'interprétation, d'explicitation des données et de justification du raisonnement d'un problème nécessitent l'utilisation du langage mathématique en un discours clair, pertinent et objectif. À cet effet, l'élève utilise des définitions, des propriétés et des énoncés déjà admis.

Première année du cycle (Description commune aux trois séquences)

Dans les situations de communication, l'élève doit généraliser, dégager des informations, soutenir une explication ou une justification. Aussi, l'élève est « en situation de communication » s'il analyse les diagrammes, les graphiques, les tables de valeurs pour en tirer des conclusions. Ainsi, les informations tirées de dessins, de constructions géométriques, et l'utilisation des définitions, des propriétés et des énoncés déjà admis, peuvent imposer des étapes de communication.

Donc, au deuxième cycle, à la première année du cycle et conformément à la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique,* la géométrie 3D n'est pas vraiment présente, si ce n'est par le langage utilisé pour le calcul des aires et des volumes. Comme nous l'avons précisé pour la compétence *Déployer un raisonnement mathématique,* les raisonnements mathématiques à déployer sur les figures géométriques en 3D font appel à des propriétés géométriques spécifiques à la géométrie 2D et non à des propriétés de la géométrie de l'espace. À cet effet, l'élève utilise un langage spécifique aux propriétés étudiées dans la géométrie 2D.

Deuxième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

La mobilisation des réseaux de concepts et des processus, pour présenter, justifier ou convaincre, informer ou s'informer, conjecturer ou valider, impose l'utilisation de la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Lors d'une situation de communication, l'élève doit être cohérent, en respectant les particularités des différents registres de représentation, et mettre à profit ses qualités de communicateur. Aussi, il doit décrire les liens entre les mesures à l'intérieur d'une figure géométrique.

Donc, au deuxième cycle, à la deuxième année du cycle et conformément à la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique,* la géométrie 3D n'est pas vraiment présente si ce n'est par le langage nécessaire utilisé dans le calcul des aires et des volumes.

Troisième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

Les situations de communication développent des aptitudes pour l'interprétation de messages à caractère mathématique et incitent l'élève à expliquer la structuration des étapes de la résolution du problème. L'élève doit utiliser des stratégies de résolution des problèmes, par exemple : décoder des informations, convertir des données, interpréter un message. Ainsi, la résolution des problèmes, à partir de différents registres de représentation, développe des éléments d'un message à caractère géométrique.

Donc, au deuxième cycle, à la deuxième année du cycle et conformément à la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique,* la géométrie 3D n'est pas présente.

1.3.3.B. Le développement de concepts

Dans ce qui suit, nous essayons d'extraire du programme les concepts qui visent spécifiquement la géométrie de l'espace (3D), mais aussi quelques concepts de la géométrie plane (2D). On va observer qu'il n'y a pas vraiment de traitement spatial pour les objets d'étude de la géométrie de l'espace. Seulement le calcul des aires, des volumes et des capacités, la représentation et la description dans le plan de figures en trois dimensions, le calcul de mesures manquantes des objets de l'espace sont les aspects 3D recommandés par le programme. Ainsi, dans la troisième année du cycle, il n'y a aucun traitement déductif d'éléments de la géométrie 3D.

Première année du cycle (Description commune aux trois séquences)

Dans la première année du cycle, les élèves développent leurs connaissances sur les solides : développement, projection et perspective, mesure (volume et unités de mesure, unités de capacités). Lors du développement des connaissances sur les solides, on vise l'analyse de situations qui mettent à profit les propriétés des figures : description et construction des objets, représentation dans le plan de figures à trois dimensions et recherche de mesures manquantes.

Le calcul de longueur est représenté par : le calcul des côtés d'un triangle rectangle (relation de Pythagore), le calcul des segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide. Ainsi, les élèves vont apprendre le calcul de l'aire d'une sphère, de l'aire latérale ou totale de cônes droits et de figures décomposables et, finalement, de l'aire de figures issues d'une similitude.

Les élèves vont apprendre le calcul du volume pour les solides décomposables (en prismes droits, en cylindres droits, en pyramides droites, en cônes droits, en boules) et solides issus d'une similitude. Dans ce processus de recherche de mesures manquantes, les élèves utilisent la conversion entre diverses unités de mesure : longueur, aire, volume et capacité.

Deuxième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

Les concepts construits dans la deuxième année du cycle sont les suivants : les figures équivalentes, en géométrie analytique – les concepts de droite et de distance entre deux points, pour le calcul de mesures – les relations métriques et trigonométriques dans le triangle (sinus, cosinus, tangente, lois des sinus et des cosinus). L'analyse de situations conduit l'élève, dans le processus de recherche de mesures manquantes, à utiliser le concept de distance, les propriétés des figures isométriques, semblables ou équivalentes. Il apprend à calculer les angles de triangles ou de figures se décomposant en triangles, les longueurs (segments issus d'une isométrie ou d'une similitude, côté d'un triangle, hauteur relative à l'hypoténuse, projection orthogonale des cathètes sur l'hypoténuse), les aires et les volumes de figures.

Troisième année du cycle - Séquence *Sciences naturelles*

En troisième année du cycle, l'élève continue à développer les concepts de la géométrie analytique, appris lors de la deuxième année du cycle, par l'étude du cercle trigonométrique (les identités trigonométriques), l'étude de vecteurs et de coniques (parabole, cercle, ellipse, hyperbole – centrés à l'origine). La manipulation d'expressions trigonométriques conduit l'élève à assimiler le processus de développement, de réduction ou de substitution d'expressions à l'aide d'identités trigonométriques. Ainsi, dans l'analyse de situations, l'élève fait appel aux concepts d'isométrie, de similitude, de transformation, de conique et de vecteur. Les processus construits dans l'analyse de situations passent par la recherche de mesures manquantes et les opérations sur les vecteurs (addition et soustraction de vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire, produit scalaire). Ainsi, la description d'un vecteur ou d'une règle à l'aide d'une figure et des éléments d'une conique (rayon, axes, directrice, sommets, foyers, asymptotes, régions) représente un des processus construits dans l'analyse de situations. La recherche de la règle d'une conique, de sa région intérieure ou extérieure, la détermination de coordonnées de points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique sont l'aboutissement des processus construits en troisième année du cycle.

Pour conclure, nous considérons que les concepts à être développés tout au long du second cycle, dans la géométrie 3D, se résument à la description et à la construction des solides, à une étude synthétique du calcul des aires et des volumes de ceux-ci en faisant appel à des propriétés étudiés dans la géométrie 2D, sans faire référence à des propriétés à trois dimensions.

1.4. Les questions qui s'ensuivent pour le passage du 2D au 3D

1.4.1. Le vocabulaire : forme, dessin, figure

Dans cette section, nous tentons de différencier, du point de vue géométrique, les notions de forme, de dessin et de figure, en lien avec le nouveau programme d'enseignement. Dans le langage habituel, la notion de forme est souvent utilisée pour désigner le contour extérieur d'un objet. Ce contour extérieur n'est pas nécessairement bien défini, alors que le dessin contient des traces bien particulières, à partir desquelles on pourrait observer, construire, analyser, démontrer et généraliser les figures géométriques.

L'existence d'une théorie générale de la forme (la Théorie de la Gestalt), qui a été développée par plusieurs chercheurs en psychologique à partir du XIXe siècle, a créé un lien avec le domaine de la géométrie. Sans entrer dans les détails de cette théorie, qui est d'ailleurs parfois contestée et contradictoire, voici une première approche de cette notion : « un groupement aléatoire de points qui tend à être perçu d'abord comme une forme; cette forme se veut simple, symétrique et stable, en somme une bonne forme.[21] » Dans cette théorie de la forme, on considère que les individus ne perçoivent pas les détails et on voit l'influence du « tout sur les parties qui les composent.[22] » Ainsi, dans les dictionnaires explicatifs, nous avons trouvé que, généralement, la forme représente un mode d'être à l'extérieur, une configuration d'un corps. Le nom est surtout lié à une apparence, « jugée sur la forme [23] ».

---

[21] http://fr.wikipedia.org/wiki/Psychologie_de_la_forme
[22] Dictionnaire *Encyclopédique Pour Tous, Petit Larousse illustré,* édition 1975, Librairies Larousse 17, rues du Montparnasse et boulevard Raspail,114. Paris VI^{e}, page 442.
[23] Dictionnaire *Encyclopédique Pour Tous, Petit Larousse illustré,* édition 1975, Librairies Larousse 17, Paris VI^{e}, page 442.

> Forme (lat. forma). Manière d'être extérieure, configuration des corps, des objets : *la forme d'une table, d'une maison.* Aspect physique du corps humain : *vêtement qui moule les formes.* Apparence, aspect : *juger sur la forme...* Tournure donnée à un objet : *la forme de cet objet n'est pas gracieuse...* Prendre forme, commencer à avoir une apparence reconnaissable. *Théorie de la forme*, théorie qui considère la perception d'ensembles, de structures organisées, avant la perception de détails, et qui affirme dans tous les domaines l'influence du tout sur les parties qui le composent. (On l'appelle aussi GESTALTHEORIE ou GESTALTISME.) [...][24]

Cela veut dire qu'une forme n'est pas nécessairement associée à des « figures » connues, comme les polygones. Aussi, on utilise souvent l'expression : « c'est en forme de cube ». « La forme » est utilisée dans le langage courant pour désigner l'aspect extérieur d'un objet. Cet objet peut provenir de l'espace bidimensionnel ou tridimensionnel. Ce mot, utilisé en géométrie et en mathématique en général, pourrait créer des confusions au niveau des connaissances et des savoirs mathématiques.

> La création d'images personnelles ou médiatiques en arts plastiques se prête bien au raisonnement géométrique et à l'exploitation de concepts et de processus mathématiques, **puisqu'il faut organiser dans l'espace des formes bidimensionnelles et tridimensionnelles.**[25]

Nous remarquons qu'une confusion se dégage du langage courant : l'objet (qui a sa place dans l'espace) vu comme une forme. Une première perception de l'espace nous dit qu'il est construit d'objets. Leur aspect extérieur, ce que notre perception nous indique par rapport à l'objet, c'est la forme de l'objet. Nous ne pouvons pas « organiser dans l'espace des formes ». Ce que nous organisons dans l'espace, ce sont les objets. Ces objets peuvent faire partie des objets géométriques connus ou non, étudiés ou non à l'école.

---

[24] Dictionnaire *Encyclopédique Pour Tous, Petit Larousse illustré,* édition 1975, Librairies Larousse 17, Paris VI^{e}, page 442.

[25] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle,* chapitre IV, page 235.

Note: Dans les différents extraits, les phrases importantes ont été mises en évidence en caractère gras.

> Dans un espace géométrique dont la dimension est donnée (0, 1, 2 ou 3), **une figure géométrique est un ensemble de points servant à représenter un objet géométrique tel qu'un point, une droite, une courbe, un polygone, un polyèdre**.[26]

Cette définition donnée pour « la figure géométrique » renvoie à l'approche euclidienne de la géométrie : les objets d'études sont formés de points. Les questions qui se posent à partir de ce moment deviennent très sensibles. Les difficultés rencontrées dans l'histoire de la mathématique, et aussi dans la pratique de l'enseignement de la géométrie, suggèrent une forte attention de la part des enseignants sur le processus de construction des connaissances des élèves. Si, au primaire, l'espace de travail des élèves est « l'espace intuitif et physique » et le dessin, un « objet d'étude et de validation », au secondaire, pour la géométrie plane, l'espace de travail est « l'espace physico-géométrique », où le dessin est « le support du raisonnement ».

Dans les dictionnaires, la figure, comme la forme, pourrait être une « figure de style ». Ainsi le même *Dictionnaire Encyclopédique Pour tous* (d'où nous avons extrait la signification de la notion de forme), nous avons trouvé les explications suivantes pour la notion de figure (p.429) :

> Figure (lat. figura) Forme extérieure d'un corps, d'un être : *il n'a pas de figure humaine*... Dessin, gravure, représentation, peinte ou sculptée, d'un être humain d'un animal... Dessin servant à la représentation d'êtres mathématiques... *figures de constructions (ellipse). Psychol.* Tendance d'une forme perceptive à se détacher du fond et à se constituer en structure autonome.

Par ailleurs, du point de vue mathématique, la figure est surtout liée à une construction précise d'un objet mathématique, en suivant des règles bien précises. À

[26] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre IV, page 259.

ce sujet, Gousseau-Coutat[27] (2006) différentie clairement un dessin d'une figure. Le chercheur souligne aussi la nécessité que les deux mots soient exploités adéquatement, selon leur nature, dans les cours de géométrie.

> Le travail sur la distinction entre le dessin et la figure ouvre la porte à une pratique théorique de la géométrie. Cette distinction entre le dessin et la figure présente chez Parzysz (1988) a été reprise par Laborde et Capponi (1994) à l'aide du triplet référent, signifiant, signifié. [28]

> La figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation. (...) Le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (...). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent ; le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. [29]

Pour argumenter son travail, Gousseau-Coutat nous donne comme exemple certains dessins qui représentent le même objet géométrique : un rectangle dont la longueur vaut deux fois la largeur. Même si on parle d'un même objet géométrique, le chercheur nous explique que les différences entre les représentations du rectangle sont dues à la façon dont on représente les éléments constitutifs de l'objet géométrique. Ces éléments constitutifs représentent pour le chercheur ce qu'il nomme « caractéristiques de l'objet géométrique ».

En essayant de nous situer face aux arguments du chercheur, nous croyons qu'une caractéristique géométrique représente ce qui caractérise un dessin sans y reconnaître

---

[27] Gousseau-Coutat S. *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse doctorale, Université Joseph Fourier, 2006.

[28] *Ibid.*, page 10.

[29] Laborde C. et Capponi B. (1994) *Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique ?* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14 N° 1-2 pages. 165-210.

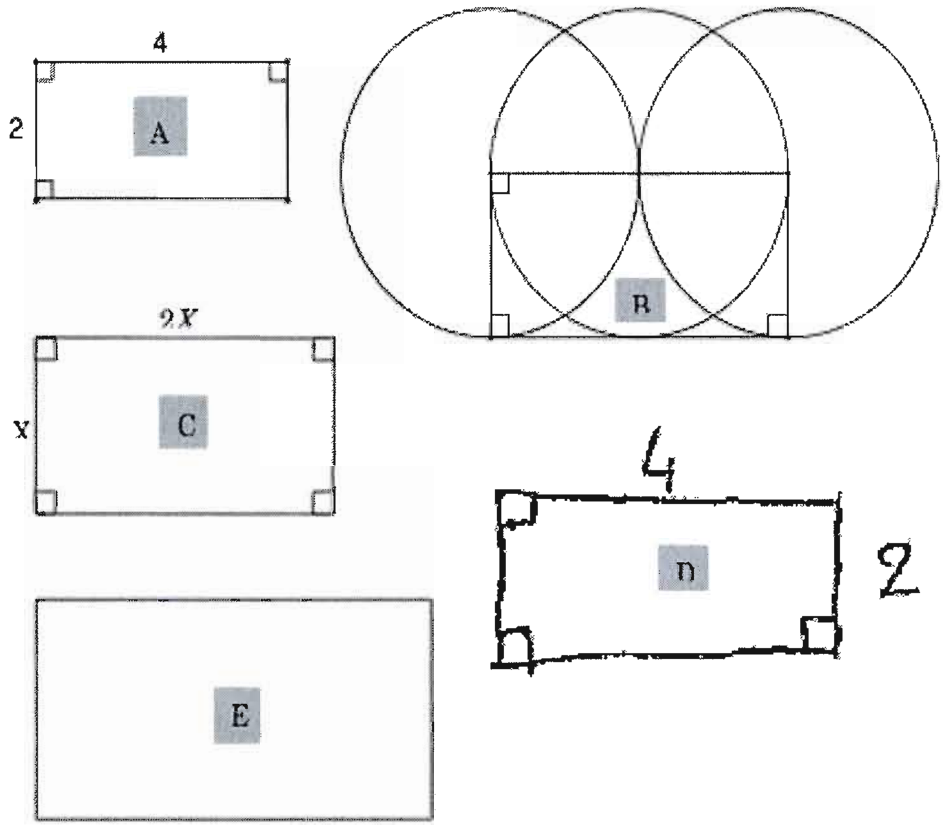
les propriétés intrinsèques de cette caractéristique. Par exemple, l'enfant préscolaire est capable de différencier un rectangle d'un carré, dès qu'il voit le dessin ou l'objet, qui a des caractéristiques semblables avec ce qu'il croit ou qu'il avait reconnu comme étant un quadrilatère ou un carré. C'est difficile d'apprécier quelles sont les caractéristiques qu'il reconnaît dans un dessin « rectangle » ou dans un objet « rectangle » mais, on peut supposer qu'il voit les côtés égaux, deux par deux. Les angles en général, ou même les angles droits ne sont pas de notions qui peuvent être apprises, à leur âge, au sens géométrique du terme. « Les angles droits » sont des caractéristiques qu'il reconnaît dans l'aspect du dessin ou de l'objet, sans qu'il sache nécessairement le nom de cette « caractéristique », ou même de ne voir cette caractéristique que de façon perceptive. Gousseau-Coutat nomme ce type de caractéristique, « caractéristique perceptive », qui n'est associée qu'à des dessins. À cet effet, le chercheur nous donne la définition d'un dessin dans un contexte où il y a une association avec une « caractéristique perceptible » et la définition d'une figure comme un lien entre les différentes représentations et l'objet géométrique.

Donc, on peut dire que l'enfant préscolaire associe à des objets géométriques certaines « caractéristiques » qui représentent les moyens par lesquels il devient capable de reconnaître d'autres objets semblables. Au primaire, les caractéristiques des dessins commencent à évoluer, lorsque des définitions de l'espace sensible sont mises en pratique mais, elles ne sont pas encore des propriétés si une théorie de la géométrie n'est pas encore utilisée.

> Les dessins sont considérés en géométrie comme des représentations graphiques des objets de la géométrie. Il n'existe pas nécessairement une seule représentation d'un objet géométrique (utilisation d'une échelle, dessin à main levée et surtout un objet géométrique est lui-même variable ...). Ainsi les caractéristiques perceptibles sur le dessin peuvent différer des caractéristiques

de l'objet géométrique. [30]

La notion de figure est un lien construit par le sujet entre les différentes représentations d'un objet géométrique et l'objet géométrique. Ce lien s'appuie sur les connaissances du sujet.[31]



(Image extraite de Gousseau-Coutat, page 10)

...le dessin A que nous avons produit est une représentation parmi l'ensemble infini des rectangles dont la longueur vaut 2 fois la largeur. Dans le dessin B, les caractéristiques de l'objet géométrique sont respectées, mais ne sont peut être pas accessibles immédiatement...Pour le dessin C, aucune mesure

[30] Gousseau-Coutat S. *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse doctorale, Université Joseph Fourier, 2006, page 10.
[31] *Ibid.*,page 11.

> particulière n'est donnée aux côtés, ce choix volontaire permet de considérer tous les rectangles dont la longueur vaut deux fois la largeur. Sur le dessin D, seul le codage (angles droits et mesure des côtés) permet de reconnaître les propriétés de la figure. Enfin, le dessin E ne nous donne aucune information sur les caractéristiques de l'objet, on peut appréhender perceptivement et considérer les angles droits, cependant dans un environnement papier-crayon, nous n'avons pas de moyens qui nous permettent de savoir si ses angles droits sont des caractéristiques réelles de l'objet ou des effets de représentation. Si l'on se contente du quadrilatère ou du rectangle tracé à main levée, les caractéristiques spatiales du dessin ne permettent pas d'inférer les caractéristiques géométriques de notre objet.[32]

Tanguay D., dans le cours de didactique de la géométrie (MAT 3135), différencie aussi clairement un dessin et une figure.

> En résumé, la *figure géométrique* véhicule avec elle (implicitement ou explicitement) les concepts, les définitions résultats géométriques nécessaires à son élaboration. Le *dessin* peut être moins qu'une représentation visuelle de la figure géométrique qu'il modélise, quand celui qui l'exécute ou le « lit » fait une trop grande à la perception, ne respectant pas en cela les règles du *jeu géométrique*. [33]

Plusieurs autres chercheurs, Laborde et Capponi (1994), Berthelot et Salin (1995), ont remarqué l'importance de construire un raisonnement géométrique à partir de la figure géométrique où le dessin n'est qu'un modèle de la figure. La figure est construite à partir de définitions et de propriétés des objets géométriques, alors que le dessin n'est que « l'image » de l'objet concret.

Dans la remarque qui suit, on fait la différence entre un dessin (*permet d'étudier les phénomènes*) et une figure (*plus proche de la pensée mathématique*).

---

[32] Gousseau-Coutat S. *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse doctorale, Université Joseph Fourier, 2006, page 10
[33] Tanguay D., (2007), *Didactique de la géométrie,* MAT 3135, document interne.

> Dans un manuscrit de 1646, le jeune Huygens – il a alors 17 ans – utilise l'approximation suivante : une corde supposée sans poids est chargée de poids égaux suspendus à des distances égales. Grâce à la statique, Huygens détermine ce qui se passe pour chacun des poids, puis extrapole au cas continu, où les poids sont répartis uniformément tout au long de la courbe. Cette approximation, qui permet un passage à la limite, du cas discret au cas continu, lui permet de conclure que la courbe cherchée ne peut être une parabole, comme Galilée l'avait suggéré. Huygens communiqua ce résultat au Père Mersenne dans une des premières lettres qu'il lui adressa. Mais il ne détermina la nature de la courbe qu'en 1690 lorsque Jakob Bernoulli lança son défi concernant la chaînette dans les *Acta eruditorum*. Huygens semble avoir eu besoin d'une impulsion de l'extérieur, d'un problème posé et à résoudre, pour se mettre à réfléchir en gribouillant. Selon Bos, ces figures aident Huygens à ordonner une information spatiale complexe. Michael Mahoney et Henk Bos ont l'un et l'autre examiné quelques figures excessivement complexes de ce que Joella Yoder a appelé la « cinématique géométrique » [Y1,52] de Huygens. Sans qu'il soit possible de faire justice dans un texte aussi bref que celui-ci à la richesse de leur analyse, résumons-en deux conclusions intéressantes pour notre propos. **D'abord, les figures permettent à Huygens de représenter l'irreprésentable, comme les paramètres physiques du mouvement : la vitesse, l'accélération, le temps et leurs relations mutuelles. Puis, Mahoney a pu montrer que, dans les figures de Huygens, trois strates différentes se superposent : un espace physique, l'espace mécanique des vitesses, temps, etc. et, finalement, l'espace mathématique.**[34] C'est par un va et vient entre ces strates que Huygens parvient à imaginer des solutions hautement techniques et singulières. Mahoney comme Bos sont d'accord pour voir la **figure** fonctionner chez Huygens comme un modèle géométrique d'un phénomène naturel complexe. L'art du **dessin** scientifique lui permet d'étudier ces phénomènes. La **figure** est plus proche de la pensée mathématique de Huygens que les équations et les formules qu'il note et publie ensuite, même si on retrouve dans celles-ci les éléments que le modèle exhibe. [35]

Un espace de travail dans lequel les différentes propriétés des objets peuvent être appliqués de façon cohérente nous ouvre une bonne porte d'entrée pour le développement de la pensée et du raisonnement géométrique. Cette notion *d'espace*

[34] Dans cet extrait, c'est nous qui soulignons en caractère gras.

[35] Jeanne Peiffer (2006), Les rôles dans la production et la transmission des mathématiques, page 124.

de travail mérite d'être précisée. C'est ce que nous ferons dans la section suivante.

1.4.2.A. Un cadre d'analyse du programme d'étude adéquat à l'enseignement de la géométrie : Houdement et Kuzniak (2005, 2006, 2007)

> Dans le cadre de recherches menées sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, nous avons introduit un certain nombre d'outils théoriques destinés à étudier les difficultés spécifiques de cet enseignement, notamment dans le cadre de la formation des enseignants. Nous avons plus particulièrement privilégié et développé deux outils : les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométrique (ETG). Une de nos hypothèses de base, amplement vérifiée par nos travaux, était que : Dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture, souvent signalée, dans l'enseignement français entre les différents cycles. Dans notre approche, la géométrie élémentaire peut s'envisager suivant trois paradigmes bien distincts dont les deux premiers (Géométrie I et II) jouent un rôle essentiel dans le contexte actuel de l'enseignement français,[36] mais aussi, comme nous avons pu le constater, dans de nombreux autres pays. Ces paradigmes sont globaux et consistants : chacun d'entre eux définit une forme élaborée de géométrie. Ils structurent des espaces de travail différents qui transforment la nature des activités géométriques.[37]

La pratique de la géométrie est passée par différentes approches et méthodes d'enseignement. Parmi les aspects dont on doit tenir compte dans la pratique d'enseignement, on remarque une évolution des approches des chercheurs quant à la notion d'espace. La géométrie euclidienne, construite à partir d'axiomes, où les objets primitifs « point », « droite », « plan », « espace » ne sont pas définis formellement, mais sont plutôt décrits intuitivement, a donné des règles bien précises. Cet aspect a

---

[36] Note de l'auteur cité : En France, les professeurs des écoles ont à enseigner toutes les disciplines de la maternelle au CM2, à des enfants de 3 à 11 ans (3 ans de maternelle : de 3 à 6 ans, 5 ans d'élémentaire : de 6 à 11 ans). Les professeurs de collège sont en général spécialistes de leur discipline.

[37] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy)* 6 - 8 Octobre 2005, page 211.

favorisé le développement du raisonnement déductif, utilisé maintenant non seulement en géométrie, mais aussi dans toutes les disciplines scientifiques. Depuis Aristote, les géomètres ont questionné les fondements de la géométrie euclidienne. Dans la seconde moitie du XVIII^e^ siècle et au XIX^e^ siècle, les discussions ont favorisé l'apparition des géométries non-euclidiennes. L'utilisation de ces géométries dans différents domaines, dont la physique, a favorisé l'apparition d'autres méthodes d'enseignement qui ne passent pas nécessairement par la géométrie euclidienne. Les différentes prises de positions à l'égard du processus d'enseignement ont déterminé qu'il était nécessaire de prendre en considération la notion de paradigme. Les chercheurs Houdement et Kuzniak (2006), dans un article publié dans les « Annales de Didactique et de Sciences Cognitives », ont écrit :

> L'enseignement de la géométrie a pour fonction première de permettre à l'élève de se construire un espace de travail géométrique efficace. Grâce à cet espace, il peut comprendre et résoudre des problèmes de géométrie. Mais l'interprétation des problèmes va dépendre de paradigmes géométriques qui diffèrent suivant les institutions (écoles, mais aussi pays) où s'effectue l'enseignement. Cette diversité des paradigmes entraîne une diversité des espaces de travail et explique un certain nombre de malentendus didactiques.[38]

Leur analyse sur la géométrie élémentaire et sur son enseignement les a conduits à développer des outils comme « les paradigmes géométriques » et « les espaces de travail géométriques ». Dans le même article, ils ont aussi écrit :

> La fécondité des crises et la genèse des nouveaux problèmes qu'elles ont engendrés ont rendu nécessaire l'introduction de la notion de paradigme avec le sens que lui donne Kuhn (1962) dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques.[39]

À cet effet, ils retiennent deux idées dégagées de ce concept :

---

[38] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, p.175-193, IREM de Strasbourg, page 175.

[39] *Ibid.*, page 178.

> 1. Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet.
>
> 2. Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective d'enseignement, Kuhn caractérise les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de ce champ disciplinaire.[40]

Les aspects mentionnés ci-dessus ont permis le développement d'un cadre théorique spécifique à l'enseignement de la géométrie. L'appartenance à un groupe scientifique qui partage les mêmes connaissances, savoirs et croyances signifie l'appartenance à un même paradigme épistémologique de la connaissance, qui intègre aussi des pratiques d'enseignement très spécifiques. À partir de ces constats, Houdement et Kuzniak ont mis en évidence trois paradigmes de la géométrie enseignée à l'école : la Géométrie I ou « géométrie naturelle », la Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle » et la Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste ». Prenant en compte les travaux de Gonseth (1946) sur les modes de pensée, Kuzniak (2005) et Houdement et Kuzniak (2006) considèrent que l'expérience, la déduction et l'intuition prennent des aspects très spécifiques en fonction de la géométrie qui est enseignée à chaque niveau de scolarité.

> Pour parvenir à dégager des paradigmes géométriques qui, par delà la perspective historique, rendaient compte des conceptions et des pratiques géométriques, nous avons suivi l'idée de Gonseth, c'est-à-dire de poser l'existence de la géométrie dans son articulation avec le problème de l'espace. Autour de trois modes de connaissances de l'espace (intuition, expérience, déduction), il est

[40] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, p.175-193, IREM de Strasbourg, page 178.

possible d'organiser une synthèse qui réorganise la relation avec l'espace et qui donne naissance à trois types de Géométrie.[41]

En suivant les travaux de Fischbein (1987)[42] à l'égard de l'intuition, ils remarquent que l'intuition est comme une « théorie première » qui lie « les incertitudes et qui permet au sujet de structurer une situation en un tout complet et cohérent qu'il utilise comme socle pour son raisonnement. » Dans ce contexte, l'intuition pourrait être une source d'erreurs, « car elle peut installer une cohérence artificielle entre des données pratiques ou théoriques.[43] » D'autre part, l'expérience s'oppose à la démonstration: une action physique ou mentale est nécessaire pour découvrir ou valider une proposition. En géométrie, l'expérience dépend des objets sur lesquels elle s'exerce en faisant des pliages, des découpages, des constructions à la règle et au compas ou en utilisant des logiciels. L'approche de Houdement et Kuzniak sur « le raisonnement déductif » vise une forme plus complexe, étant donné que dans un discours discursif, certaines connaissances peuvent être considérées comme déjà acquises : « le raisonnement déductif consiste à en tirer d'autres propositions qui en sont les conséquences, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure ».

La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

Les bases de la géométrie I sont la validation intuitive, la réalité et le sensible. « L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets

---

[41] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy) 6 - 8 Octobre 2005*, page 212.
[42] Fischbein, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht, Pays-Bas.
[43] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy) 6 - 8 Octobre 2005, page 211.

matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou à la mise en œuvre d'expériences mécaniques réels comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens, la géométrie d'Euclide n'est pas de la Géométrie I.[44] » Les deux chercheurs remarquent que dans cette géométrie, l'évidence perceptive est en soi une validation qui ne commande aucune autre forme de validation.

> La Géométrie naturelle (Géométrie I) a pour source de validation la réalité et le monde sensible. Dans cette géométrie, une assertion est légitime si l'intuition d'un résultat et les conclusions d'une expérience ou d'une déduction correspondent. La confusion entre le modèle et la réalité est grande et tous les arguments sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur.[45]

La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

> Ensuite, nous rencontrons la Géométrie axiomatique naturelle dont le modèle est la géométrie euclidienne classique. Cette géométrie (Géométrie II) est bâtie sur un modèle proche de la réalité. Mais une fois les axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système pour être certaines.[46]

Dans la géométrie GII, on a comme fondement un système axiomatique « aussi précis que possible » et qui a lui-même comme fondements les lois hypothético-déductives dans un environnement réel. Dans cette Géométrie, les connaissances géométriques sont issues de problèmes spatiaux. Le système axiomatique suppose une certaine formalisation, mais cela n'est pas absolument formel, car « la syntaxe n'est pas

---

[44] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume XI, IREM de Strasbourg, page 180.
[45] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy)* 6 - 8 Octobre 2005, page 212.
[46] *Ibid.*, page 212.

coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité.[47] »

La Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste »

La Géométrie III englobe toutes les géométries non-euclidiennes mais aussi la réécriture de la géométrie euclidienne par des mathématiciens comme Hilbert. Dans ce niveau de géométrie, on cherche à couper les liens entre la réalité et la géométrie.

> Dans cette géométrie, qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte.[48]

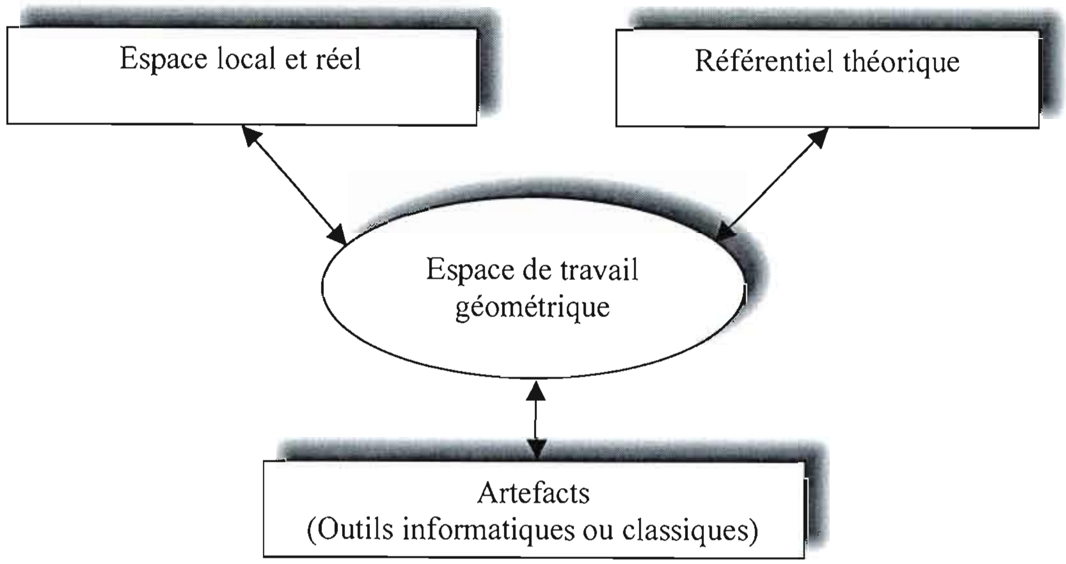
Les axiomes sont plutôt formels et ne représentent pas un fondement qui lie le sensible au géométrique. Les propos des chercheurs sur cette approche « axiomatique formaliste » s'appuient sur l'affirmation de Wittgenstein (1918)[49] : « Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité ». Entre la Géométrie III et la Géométrie II, il y a une différence : l'axiomatisation dans la Géométrie III n'est pas partielle comme nous l'avons soulevé dans la Géométrie II.

L'espace de travail

Sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG), les chercheurs désignent « un environnement par et pour le géomètre ». Dans cet environnement, on articule de façon idoïne trois composantes : un ensemble d'artefacts matérialisés dans un espace réel et local, un ensemble d'artefacts qui seront des outils et des instruments mis au service du géomètre et un référentiel théorique organisé en un modèle théorique.

---

[47] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 181.
[48] *Ibid.*, page 181.
[49] Wittgenstein L. (1918), !961 *Tractacus logico-philosophicus*. Gallimard.



Houdement & Kuzniak (2006)

ETG : Espace de travail géométrique

Un espace de travail géométrique (ETG) représente un environnement organisé, pour l'utilisateur d'une géométrie, qui s'articule autour de ces trois composantes.

> Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG), l'environnement organisé par et pour le géométre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composantes suivantes :
> - un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local,
> - un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin
> - un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique. [50]

[50] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 184.

Prenant compte des différents paradigmes de la géométrie, GI, GII et GIII qui servent comme référence dans l'interprétation des contenus des composantes, les espaces de travail se replient aussi en espaces de travail de référence, spécifiques à chaque paradigme **ETG I**, **ETG II** et **ETG III**.

> Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors **d'espace de travail géométrique de référence.**[51]

Objets géométriques

À chaque ETG, on associe des objets géométriques à étudier qui dépendent du modèle théorique qui les définit et de l'espace support dans lequel ils se trouvent.

Donc, dans ETG I, les objets géométriques sont les dessins ou les maquettes. Dans l'ETG II, certaines sous-parties de l'espace représentent les objets géométriques à étudier, dont les figures et les configurations. Dans l'ETG III, les objets géométriques à étudier sont des objets abstraits formés de points, de droites ou des plans, « dont les relations sont explicitées par le modèle».[52]

Espace local et réel

L'enseignement de la géométrie suppose l'existence d'une relation entre l'espace de travail géométrique et l'espace réel.

---

[51] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 185.
[52] *Ibid.*, page 186.

> L'espace qui intervient en géométrie se construit en étroite relation avec l'espace réel qu'il reconstruit ou qu'il dévoile de manière différente suivant les divers paradigmes. [53]

Pour chaque paradigme de géométrie, GI, GII ou GIII, il existe une ou des relations entre les objets constituants de l'espace de travail, leur nature (qui dépend du référentiel théorique choisi) et l'espace (support dans lequel se trouvent les objets).

Dans la Géométrie I, l'espace support, sur lequel se trouvent les objets géométriques à étudier, est un espace local et réel, constitué de dessins ou de maquettes.

Dans la Géométrie II, dont la géométrie euclidienne, l'espace support est un espace local et réel dans lequel on étudie une certaine partie de l'espace, dont les figures ou les configurations.

Dans la Géométrie III, l'espace local est constitué de points, de droites et de plans, dont les relations sont explicitées par un modèle qui ne correspond pas à la réalité, mais qui est déterminé par un référentiel théorique (par exemple, la géométrie vectorielle).

Artefacts

Les artefacts sont des outils ou des instruments dans le sens que leur donne Rabardel (1995)[54], tels que règle, équerre, feuilles de papier ou de carton à plier, etc. et, les nouveaux outils informatiques, notamment les logiciels de géométrie dynamique. Pour une géométrie GI, les instruments mentionnés sont utilisés de façon habituelle.

---

[53] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 186.

[54] Rabardel P. (1995), *Les homes et les technologies*. Armand Colin.

> Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils en constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. En réalité les choix et les usages de l'artefact (donc l'instrumentalisation) sont réglés par le paradigme dans lequel il s'insère..., la Géométrie II se différencie ainsi radicalement de la Géométrie I où la réalisation finale du dessin est essentielle.[55]

L'utilisation de ces logiciels se révèle utile pour mettre en évidence les propriétés d'un objet géométrique dans une géométrie GII ou GIII.

Référentiel théorique

Les objets géométriques, les artefacts, l'ensemble des définitions, des propriétés et des relations prennent du sens s'ils sont organisés en dans un modèle théorique, concret ou abstrait (référentiel théorique).

> Les objets et les artefacts de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans un sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle théorique. [56]

En fonction du paradigme géométrique dans lequel on s'intègre, le référentiel théorique, composant d'un espace de travail, prend différentes connotations.

> Le sens du mot (référentiel théorique) oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle ou norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. [57]

---

[55] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 186.
[56] *Ibid. page 187.*
[57] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page187.

Pour la géométrie GI, le référentiel théorique n'a pas une structuration en un modèle théorique. Il est constitué dans un modèle qui résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel.

> Le référentiel de la Géométrie I, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique, sauf à y admettre des « définitions sensibles ».[58]

Dans le cas de la géométrie euclidienne, qui est une géométrie axiomatique GII, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation du monde réel. Donc, pour la Géométrie II, le référentiel théorique doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes mais, aussi, basés sur la perception dans l'espace local et réel.

Dans le cas de la géométrie GIII, le modèle théorique préexiste et représente une interprétation ou une création qui doit rendre compte des objets ou des propriétés définis par les axiomes. Les représentations matérielles ou virtuelles sont destinées à donner du sens aux énoncés et aux axiomes.

Types d'ETG: ETG de référence, ETG idoine, ETG personnel

L'analyse, par Houdement et Kuzniak, des organisations et des adaptations possibles a déterminé la considération de différents types d'espace de travail.

ETG de référence, déjà introduit, est défini en fonction de critères mathématiques, et représente l'espace de travail des mathématiciens.

---

[58] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page187.

> ETG de référence, ... ,espace de travail défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert « épistémique ». On peut donc également envisager cet espace comme L'ETG institutionnel de la communauté des mathématiciens.[59]

L'espace de travail idoine (ETG idoine) suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Dans cet espace, l'utilisateur premier est un expert qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs futurs.

> L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Cela suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert, mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs.[60]

Le principe « d'idonéité » a été repris par Houdement et Kuzniak (2006) à partir des travaux de Gonseth (1945).

> La morale de notre fable formule précisément la nouvelle idée dont nous avons besoin, celle qui dénoue tout naturellement les difficultés dans lesquelles nous étions retenus. On remarquera que le tournant décisif, le passage à une nouvelle perspective, à une nouvelle façon de penser est marqué par l'intervention du mot idoine. Le sens qu'il doit prendre ressort clairement du contexte : il signifie qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction, etc. Nous pouvons maintenant introduire le principe d'après lequel la préférence peut être accordée à telle ou telle doctrine préalable : c'est le principe de la meilleure convenance, que nous appellerons aussi le principe d'idonéité.[61]

---

[59] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 189.
[60] *Ibid. page 189.*
[61] Gonseth F. (1945), *La géométrie et le problème de l'espace, I. La doctrine préalable.* Éditions du Griffon Neuchatel, Diffusion Dunod Paris, page 57.

> Dans le contexte de l'enseignement, l'ETG idoine correspond aux modifications de l'ETG de référence (par exemple, pour un enseignant ou un concepteur de manuel) ayant pour but de rendre l'ETG de référence accessible aux élèves.

ETG personnel.

Houdement et Kuzniak (2006) remarquent qu'en utilisant l'espace de travail idoine, les enseignants ou les étudiants doivent s'approprier cet espace en fonction de leurs connaissances et de leurs capacités cognitives. Cette transformation détermine une transformation de l'espace de travail idoine en un nouvel espace de travail, l'espace de travail personnel (ETG personnel). L'enseignant a le rôle de développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail adéquat à la situation d'enseignement.

> L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels.[62]

Il y a donc deux types d'espaces : l'espace de travail idoine qui correspond à celui d'une personne experte, et l'espace de travail personnel qui correspond à celui d'une personne qui maîtrise certaines composantes dans la recherche de la résolution d'un problème. La résolution du problème dans un espace de travail personnel n'arrive pas aux performances de l'espace de travail idoine.

Leur focalisation sur l'espace de travail personnel a conduit les Kuzniak (2005) à prendre en compte la dimension cognitive dans leur approche de la notion d'espace de

[62] Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigme géométriques et enseignement de la géométrie *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume XI, IREM de Strasbourg, page 189.

travail. À cet effet, Kuzniak (2005) a superposé au schéma de l'espace de travail les trois processus cognitifs développés par Duval (1995) [63] :

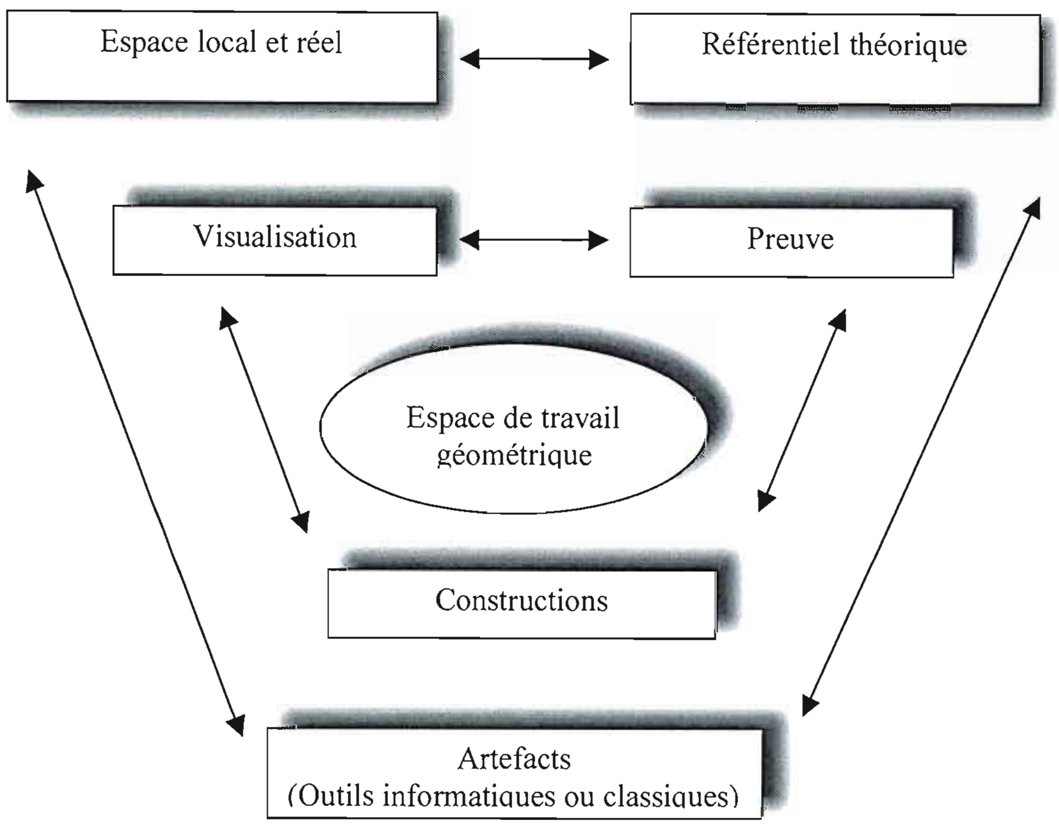
> Pour résoudre un problème de géométrie, l'expert dispose d'un espace de travail que nous qualifierons d'idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d'une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d'autres termes, l'expert faisant face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l'interpréter et de le résoudre grâce à l'espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous appellerons un ETG personnel. Ce dernier n'aura a priori ni la richesse ni la performance de l'ETG d'un expert. Cette centration sur l'ETG personnel, nous conduit à introduire une dimension cognitive dans notre approche de la notion d'espace de travail. Pour cela, nous suivons Duval (1995) qui introduit trois processus cognitifs.[64]

Comme nous allons voir dans le schéma qui suit, Kuzniak lie « l'espace local et réel » du point de vue cognitif à la « visualisation », le « référentiel théorique » à la « preuve », les « artefacts » (les outils informatiques ou classiques) à la « construction », pour que tout cela ensemble se constitue en un « espace de travail géométrique ». Ainsi, nous remarquons que les relations qui s'établissent entre les diverses composantes dépendent de la géométrie à l'intérieur de laquelle se trouve le processus d'enseignement.

---

[63] Duval R., (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang

[64] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy)* 6 - 8 Octobre 2005, page 222.



1. Le processus de visualisation est lié aux figures mentales ou au support matériel.
2. Le processus de construction dépend des outils utilisés (règles, compas, logiciels...).
3. Le processus de preuve est articulé sur un discours théorique.[65]

La Géométrie naturelle (Géométrie I) a pour source de validation la réalité et le monde sensible. Dans cette géométrie, une assertion est légitime si l'intuition d'un résultat et les conclusions d'une expérience ou d'une déduction correspondent. La confusion entre le modèle et la réalité est grande et tous les arguments reposent sur l'intuition du

[65] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy) 6 - 8 Octobre 2005, page 222.

réel, et sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur. Ensuite, nous rencontrons la Géométrie axiomatique naturelle dont le modèle est la géométrie euclidienne classique. Cette géométrie (Géométrie II) est bâtie sur un modèle proche de la réalité. Mais une fois les axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système pour être valides. Enfin, il y a la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III) où le plus important est le système d'axiomes lui-même, sans relation avec la réalité. Ce système doit être totalement axiomatisé, ce qui n'est pas le cas dans la Géométrie II.

Les relations qui s'établissent entre les différents processus cognitifs et les composantes de l'espace de travail dépendent de la géométrie qui entre en jeu dans la construction de la connaissance. Kuzniak (2007) considère que l'espace de travail se construit dans un enjeu pédagogique qui tient compte de la diversité culturelle géométrique, qui donne du sens aux mathématiques, aux applications et aux raisonnements. Aussi, il va conclure que la Géométrie I est technique et pratique, la Géométrie II, axiomatique et modélisante et la Géométrie III, logique et formelle.

Notre analyse, section I.3, sur l'enseignement de la géométrie de l'espace, nous a conduit à considérer que les concepts développés au secondaire se résument à la description et à la construction des solides, à une étude synthétique du calcul des aires et des volumes de solides, en faisant appel à des propriétés étudiés dans la géométrie 2D, sans faire référence à des propriétés à trois dimensions. À cet effet, nous considérons qu'une géométrie de l'espace qui se veut une géométrie GII et qui utilise un espace de travail spécifique, ETG – 3D – GII, doit répondre à des questions spécifiques.

Dans ce qui suit, nous mettons en évidence certaines questions qui se posent autour de la construction, de l'application des énoncés et du calcul des aires et des volumes des figures géométriques 3D, dans un espace ETG – 3D – GII.

Le cadre théorique de Houdement & Kuzniak implique qu'un référentiel théorique utilisé dans l'étude de la géométrie euclidienne doit se situer autour d'axiomes spécifiques. En classant les différents types de géométrie enseignées à l'école, Houdement & Kuzniak nous propose trois modèles différents : la Géométrie I ou « Géométrie naturelle » basée sur une expérience empirique et dans laquelle on n'est pas obligé de démontrer les choses qui nous semblent évidentes. En ce sens la géométrie euclidienne n'est pas une géométrie I; la Géométrie II ou « Géométrie axiomatique naturelle » dont le modèle est la géométrie euclidienne classique; et finalement, la Géométrie III qui regroupe les géométries euclidiennes et non-euclidiennes, dans lesquelles on ne voit pas directement un lien avec la réalité, comme dans le cas de la Géométrie II.

Selon notre cadre théorique, on voit bien les différences entre les trois géométries. Dans le cas de la GI, le raisonnement s'exerce sur des objets matériels ou matérialisés sans qu'on ait besoin d'un référentiel théorique précis. Dans le cas de la GII, le raisonnement s'exerce à partir d'un système axiomatique bien précisé, mais partiel, qui fait un vrai lien avec la réalité. Dans le cas de la géométrie GIII, on dépasse la réalité pour arriver à un système axiomatique qui pourrait n'avoir aucun lien avec la réalité, le raisonnement se faisant dans ce système axiomatique.

> ... Nous rencontrons la Géométrie axiomatique naturelle dont le modèle est la géométrie euclidienne classique. Cette géométrie (Géométrie II) est bâtie sur un modèle proche de la réalité. Mais une fois les axiomes fixés, les

> démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système pour êtres certaines.[66]

C'est évident que dans le programme d'étude, on ne voit pas d'une façon explicite les axiomes euclidiens, que ce soit pour la géométrie 2D ou 3D, mais cela ne signifie pas qu'ils ne sont pas présents dans la structuration du référentiel théorique utilisé pour la géométrie plane. Implicitement, tous les axiomes euclidiens spécifiques à la géométrie plane, on les retrouve dans les énoncés proposés à être étudiés, autrement, on serait en dehors d'une géométrie qui se veut euclidienne.

Même si on ne parle pas toujours dans la géométrie plane en termes de théorèmes, de propriétés ou de définitions, les énoncés proposés deviennent des propositions nécessaires dans la résolution de différentes situations-problèmes.

En ce qui concerne la géométrie de l'espace du programme d'étude, on ne voit pas une orientation qui suit le fondement déjà construit pour la géométrie plane. Le calcul des aires, des volumes et les constructions géométriques 3D, qui correspondent à une géométrie GII, devraient être précédés par des énoncés spécifiques à l'espace. Ces énoncés devraient suivre de très près les étapes parcourues dans l'étude de la géométrie plane. C'est évident que si on est dans une géométrie GI, les aspects mentionnés ci-dessus ne sont pas obligatoires, puisqu'une géométrie du type GI ne s'appuie pas sur un vrai référentiel théorique. Toutefois, pour pouvoir passer à une géométrie de type GII, il faudrait orienter le travail dans la géométrie GI de façon à préparer le terrain aux énoncés de base de la géométrie GII.

---

[66] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisième rencontre Internationales – Terzo convegno internazionale – Third Internationale Conference, A.S.I. Analyse Statistique implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis Palermo (Italy)* 6 – 8 Octobre 2005, page212.

Dans la géométrie euclidienne plane, la notion de hauteur est liée à la notion de perpendiculaire d'un point à une droite, aux angles droits et à la notion de distance. Dans une géométrie GII – 3D, par exemple, on ne peut pas parler de la hauteur d'une pyramide sans tenir compte qu'elle est liée à la droite perpendiculaire à un plan, aux angles droits (angles formés entre deux droites de l'espace ou entre une droite et un plan de l'espace) et à la distance d'un point à un plan.

La construction d'une droite perpendiculaire à un plan nécessite l'application de toutes les connaissances étudiées dans la géométrie plane sur la perpendicularité. Ensuite, à toutes les propositions provenant de la géométrie plane, on devrait ajouter certains énoncés qui pourraient nous acheminer vers la détermination de la hauteur d'une pyramide. En utilisant la construction d'une droite perpendiculaire à une autre droite, on peut considérer qu'on est dans le plan (deux droites concurrentes déterminent un plan). Dès qu'on considère la perpendiculaire d'un point à un plan, l'insuffisance créée par une seule relation de perpendicularité, ou plusieurs qui restent toujours dans le même plan, ne peut suffire à justifier le choix de la perpendiculaire à un plan. Dans ce contexte, il faudrait préciser quelles sont les propositions sur lesquelles se base notre construction.

Donc, les connaissances acquises en géométrie plane ne sont pas suffisantes pour justifier le choix de la perpendiculaire. Le passage vers l'espace n'est plus une simple construction d'une figure géométrique en trois dimensions. Pour aller dans une géométrie GII – 3D, il faudrait que ce passage soit uniformisé en suivant des propriétés bien précisées, comme dans la géométrie plane, et desquelles on tient compte dans toutes les constructions 3D dans l'espace 2D.

Les constructions par l'évidence, comme c'est le cas de la construction de la hauteur d'une pyramide, peuvent s'avérer de vrais points de questionnement. Pour ceux qui veulent avoir la preuve d'une affirmation, la géométrie GI ne donne que de réponses basées sur une démonstration perceptive, par exemple: Quel point appartenant à la base correspond au pied de la hauteur de la pyramide ? Peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles obtenus avec la hauteur dans une pyramide ? Est-ce que je suis vraiment dans un triangle rectangle ? etc.

Tous ces aspects peuvent se rapporter finalement à deux questions : 1. Comment peut-on établir qu'une droite est perpendiculaire à une autre droite de l'espace sans qu'elles aient, ou non, des points en commun ? 2. Comment peut-on établir qu'une droite est perpendiculaire à un plan ?

Dans ce qui suit, nous allons proposer un cheminement possible du référentiel théorique qui pourrait être utilisé dans la géométrie de l'espace et qui devrait précéder le calcul des aires et des volumes, tout en respectant le cadre donné dans le programme d'étude pour la géométrie plane. Puisque notre intention est de donner au lecteur un aperçu d'un cheminement possible de la géométrie de l'espace, nous ne passerons pas par tous les énoncés, les propositions et les démonstrations qui soient nécessaires à donner dans ce contexte spécifique.

Un cheminement possible du référentiel théorique spécifique à la géométrie de l'espace, correspondant à un ETG – 3D - GII, avec cette même rigueur que celle de la géométrie euclidienne plane qui correspond à un ETG – 2D – GII.

Notre proposition du cheminement possible, pour le référentiel théorique de la géométrie de l'espace, part de la question que nous avons posée par rapport au choix de la hauteur d'une pyramide et tout ce qu'implique la construction de cette hauteur. En considérant toujours notre exemple, les étapes décrites ci-dessous permettent de justifier, au sens d'une géométrie GII, l'angle entre deux droites de l'espace, la perpendicularité dans l'espace, la mesure des angles et la distance dans l'espace.

Un premier aspect qu'il faudrait retenir dans notre proposition c'est le support axiomatique sur lequel repose la construction d'une géométrie de l'espace. Les premiers cinq axiomes, donnés dans l'introduction de ce travail, peuvent constituer le premier pas dans la démarche de construction d'une géométrie 3D. Pour donner plus de consistance à notre travail, on va les reprendre en ce qui suit.

I. Les axiomes

A.1 Par deux points distincts, on peut tracer une et une seule droite; n'importe quelle droite contient au moins deux points distincts.

A.2 Par trois points non-colinéaires, on peut faire passer un seul plan; n'importe quel plan contient au moins trois points non-colinéaires.
(Si A, B, C sont trois points non-colinéaires, on notera alors (ABC) le plan déterminé par ces trois points).

A.3 Si deux points distincts appartiennent à un plan, alors la droite déterminée par ces deux points est incluse dans le plan.

A.4 Si deux plans ont un point en commun, alors leur intersection est une droite.

A.5 Dans l'espace, il existe au moins quatre points non-coplanaires.

Pour avoir accès à l'axiome des parallèles (l'axiome d'Euclide) qui est aussi valable dans la géométrie de l'espace, on doit définir les droites parallèles.

II. Le parallélisme dans l'espace

Définition 1 : Droites parallèles

Deux droites coplanaires qui n'ont aucun point commun sont nommées droites parallèles.

On peut maintenant énoncer l'axiome d'Euclide.

A6. (Axiome d'Euclide)

Par un point extérieur à une droite, on peut construire une et une seule droite parallèle à la droite donnée.

III. La détermination d'un plan de l'espace

À partir de l'axiome d'Euclide et de la proposition 1, et tenant compte de la définition donnée des droites parallèles, on peut considérer comme vraie la proposition ayant trait aux modalités pour déterminer un plan.

Énonçons maintenant quelques propositions relatives à la détermination d'un plan, propositions que nous ne démontrerons pas mais qui découlent immédiatement des axiomes.

Proposition 1

Trois points non-colinéaires déterminent un seul plan.

On déduit cela à partir de l'axiome A.2.

Corollaire

Si deux plans ont trois points non colinéaires en commun, alors les plans coïncident.

Après qu'on ait donné une première détermination d'un plan, on pourrait définir ce qu'est une droite parallèle à un plan.

Définition 2 : Droite parallèle à un plan

Une droite est parallèle à un plan si la droite et le plan n'ont aucun point en commun.

Dans le cheminement proposé pour la géométrie de l'espace, on doit considérer vraies dans un plan toutes les propositions connues de la géométrie plane qui font référence au parallélisme, à la perpendicularité, à la congruence, aux figures semblables, etc, ainsi que les modalités de détermination d'un plan :

Proposition 2

Deux droites parallèles déterminent un plan.

Proposition 3

Une droite et un point qui n'appartient pas à cette droite déterminent un plan. Il existe un seul plan qui contient cette droite et le point.

Le plan déterminé par le point *A* et la droite *d* est noté par *(A, d)*.

Proposition 4

Deux droites concourantes déterminent un plan.

Le plan déterminé par les droites *d* et *g* est noté *(d,g)*.

En suivant les étapes du modèle du référentiel théorique de la géométrie plane, le pas suivant semble être le parallélisme et l'intersection entre les plans et toutes les propriétés qui en découlent. En parlant de parallélisme dans l'espace, on se retrouve obligé à donner ce qui est l'angle et la mesure de l'angle entre deux droites dans l'espace.

Si on veut être dans GII, pour déterminer l'angle entre deux droites de l'espace, il faudrait d'abord savoir la mesure de cet angle en correspondance avec une théorie axiomatique de la mesure. Dans notre exemple, nous nous sommes intéressés à savoir quelles sont les conditions à remplir pour que la mesure de l'angle entre une droite et un plan soit de 90°.

IV. L'angle dans l'espace et sa mesure

Deux droites coplanaires concourantes en un point déterminent quatre angles ayant le même sommet. La mesure de ces angles est m° ou 180°- m°. Pour la mesure d'un angle entre deux droites coplanaires, on considère la plus petite des deux valeurs. Si m = 90° alors les droites sont dites perpendiculaires.

Définition 3 : La mesure d'un angle entre deux droites coplanaires
La mesure d'un angle entre deux droites coplanaires est considérée la plus petite des deux valeurs m° ou 180°- m°.

La proposition qui suit fait référence aux angles ayant leurs côtés parallèles. Cette proposition nous permet de donner une définition à la mesure de l'angle entre des droites non-coplanaires.

Proposition 5
Soit *xOy* et *x'O'y'* deux angles situés dans des plans différents. Si *Ox // O'x'* et *Oy // O'y'*, alors les angles *xOy* et *x'O'y'* sont congrus ou supplémentaires.[67]

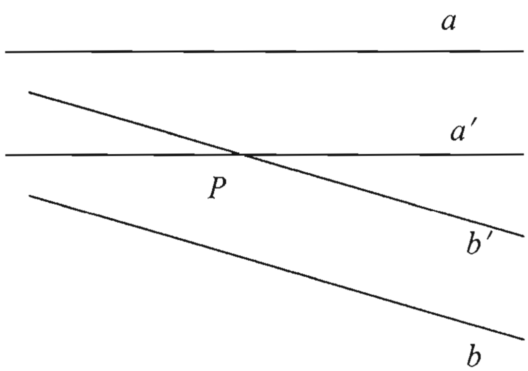
On peut donc réduire le problème de la mesure de l'angle entre deux droites de l'espace à la mesure de l'angle entre deux droite coplanaires.

Définition 4 : La mesure d'un angle entre deux droites non-coplanaires
Soit a et b deux droites non-coplanaires et P un point quelconque de l'espace. Soit a' l'unique parallèle à a qui passe par P (donnée par l'axiome d'Euclide) et soit b' l'unique parallèle à b qui passe par P. Conformément à la proposition 4, énoncé ci-

---

[67] La démonstration est donnée à la page 15 du mémoire.

dessus, les droites a' et b' sont coplanaires. La mesure de l'angle entre les deux droites a et b est la mesure de l'angle entre les droites a'et b'.



Selon notre cheminement, la définition de la mesure d'un angle, entre les droites non-coplanaires, nous permet de définir les droites perpendiculaires dans l'espace.

V. La perpendicularité dans l'espace

Définition 5 : Droites perpendiculaire dans l'espace

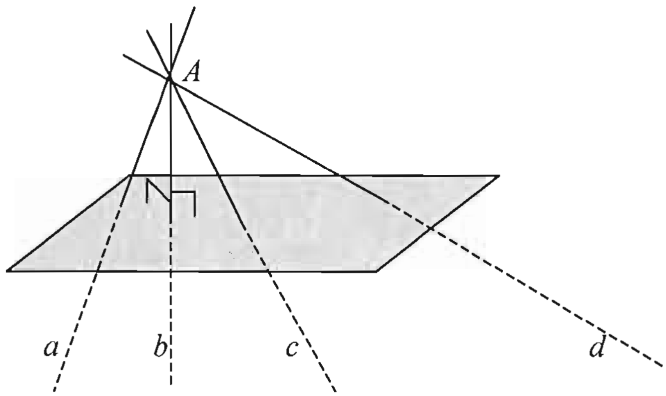
Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si la mesure de leur angle est $90°$.[68]

Généralement, dans l'espace, on utilise des relations successives de perpendicularité entre des droites qui ne sont pas nécessairement coplanaires et qui, par leur position dans l'espace, n'ont pas de point en commun.

Étant donné que par un point extérieur à un plan, on peut construire une infinité de droites ayant un point en commun avec le plan, une question s'impose : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite soit perpendiculaire au plan ?

---

[68] Parfois, dans les manuelles, elles sont nommées orthogonales pour les différencier des droites perpendiculaires du plan.



Il s'avère donc nécessaire de donner la définition d'une droite perpendiculaire à un plan.

Définition 6 : Droite perpendiculaire à un plan

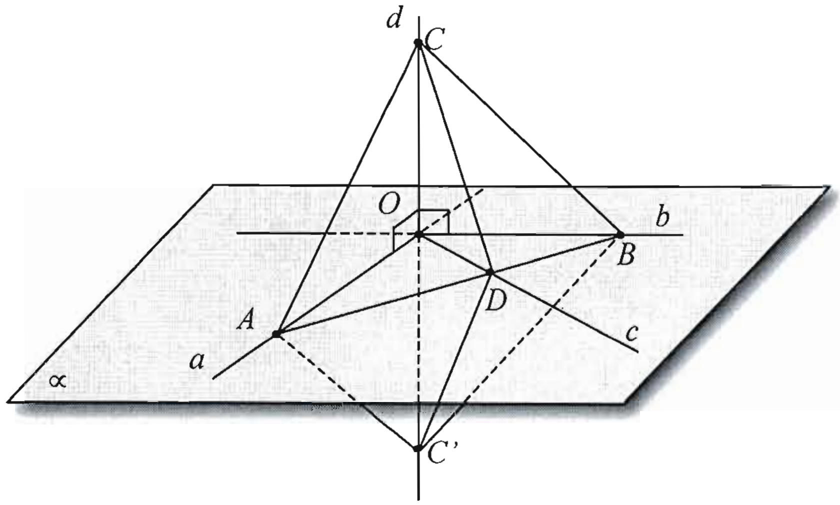
Une droite est perpendiculaire à un plan si la droite est perpendiculaire à toutes les droites incluses dans le plan.

Puisque la définition n'est pas vraiment utilisable (au sens qu'on ne peut pas démontrer qu'une droite est perpendiculaire au plan, en démontrant qu'elle est perpendiculaire à toutes les droites, en nombre infini, incluses dans ce plan), on a besoin d'un énoncé qui soit une condition suffisante pour démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan :

Proposition 6

Une droite est perpendiculaire un à plan, si la droite est perpendiculaire à au moins deux droites non-parallèles qui sont incluses dans ce plan.

Démonstration :



Soit α un plan, d une droite qui n'appartient pas au plan α et soit O le point d'intersection de d avec α. Soit a et b deux droites non parallèles incluses dans le plan α, telles que $d \perp a$ et $d \perp b$. En prenant en compte la proposition 5 et l'axiome d'Euclide dans le plan, on peut considérer que les droites a et b passent par le point O.

On va démontrer que d est perpendiculaire à n'importe quelle droite c incluse dans le plan α (*).

Considérons une droite c quelconque incluse dans le plan α. Si c est parallèle à a ou à b, alors l'affirmation (*) est évidente (tenant compte de la proposition 5 et des définitions 4 et 5).

Si c n'est pas parallèle à a ou à b, alors on doit suivre la démonstration suivante.
On sait que la droite c est incluse dans le plan α et non-parallèle à a et à b. Pour déterminer la mesure de l'angle formé entre deux droites de l'espace, dans notre cas entre les droites d et c, on applique la définition 4. En prenant en compte la définition

5 et l'axiome d'Éuclide dans le plan, on peut considérer que la droite *c* passe pas le point *O*.

On peut alors considérer que les droites *a*, *b*, *c* passent par le point *O*, comme dans la figure ci-dessus. Sur les droites *a*, *b*, *d*, on considère les points *A*, *B*, *C*, *C'* tels que : $C, C' \in d$ et $\overline{OC} \equiv \overline{OC'}$, $A \in a$, $B \in b$ et $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$. (On a choisi les points *A* et *B*, tel que l'intersection *D* de la droite *AB* avec la droite *c* soit un point situé entre *A* et *B*.)
Alors : $\Delta OAC \equiv \Delta OAC'$ (triangles rectangles en *O*, le cas C.C.) d'où $\overline{AC} \equiv \overline{AC'}$ (1)

$\Delta OBC \equiv \Delta OBC'$ (triangles rectangles, le cas C.C.) d'où $\overline{BC} \equiv \overline{BC'}$(2)

De (1) et (2), on déduit que $\Delta CAB \equiv \Delta C'AB$ (le cas C.C.C.) d'où $\angle\, CAB \equiv \angle C'AB$ (3).
De (1) et (3), on déduit que $\Delta CAD \equiv \Delta C'AD$ (le cas C.A.C.) d'où $CD \equiv C'D$ et donc, $\Delta CDC'$ est isocèle de base CC'. Dans ce triangle, *DO* est médiane et par conséquent, hauteur du triangle. On en déduit que $DO \perp CC'$. Cela implique que $d \perp c$.

Parmi les énoncés spécifiques à une géométrie GII – 2D utilisés dans notre démonstration, nous remarquons les cas de congruence des triangles quelconques ou les cas de congruence des triangles rectangles. Aussi, les propriétés spécifiques pour un triangle isocèle sont mises en évidence par la médiane correspondant à la base du triangle qui est aussi la hauteur du triangle. Ces énoncés et l'axiome d'Euclide dans le plan sont nécessaires et représentent un grand support dans notre démarche de preuve. Une fois la démonstration terminée, la proposition 6 peut être utilisée comme étant connue et démontrée dans toutes les autres démarches de preuves. Si on doit démontrer qu'une droite est perpendiculaire au plan alors, il suffit de démontrer que la droite est perpendiculaire à deux droites concourantes qui sont incluses dans ce plan. Tout cela grâce à un énoncé qu'il n'est plus nécessaire de redémontrer à chaque fois.

Cet exemple montre les modalités par lesquelles les propriétés et les énoncés appris dans la géométrie plane peuvent être transférés dans la géométrie de l'espace. Sans la proposition 6, on peut considérer les corps géométriques, les prismes, les pyramides, les corps ronds ou les sections dans ces corps comme des simples dessins, objets d'étude de l'espace de travail GI, géométrie naturelle.

Comme dans le parallélisme dans l'espace, il faudrait donner des énoncés sur la perpendicularité qui font une claire référence aux plans perpendiculaires et à quelques propriétés qui en découlent.

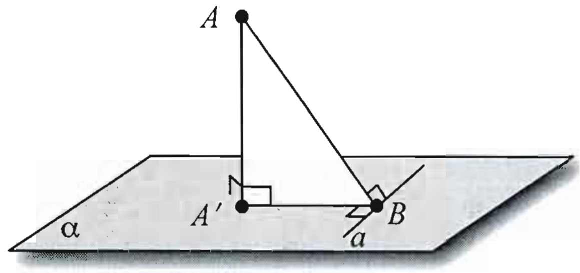
En revenant sur les deux questions en relation avec la hauteur de la pyramide, nous allons parler dans ce qui suit, d'un théorème qui est connu sous le nom de ***Théorème des trois perpendiculaires***.

Ce théorème, et une de ses deux réciproques, nous donne des réponses par rapport aux deux questions posées : 1. Comment peut-on établir qu'une droite est perpendiculaire à une autre droite de l'espace, qu'elles aient, ou non, des points en commun? 2. Comment-on peut établir qu'une droite est perpendiculaire à un plan ?

Axiome 7 : Par tout point extérieur à un plan, il existe une et une seule perpendiculaire à ce plan.

Proposition 7 : Théorème des trois perpendiculaires (T3⊥).

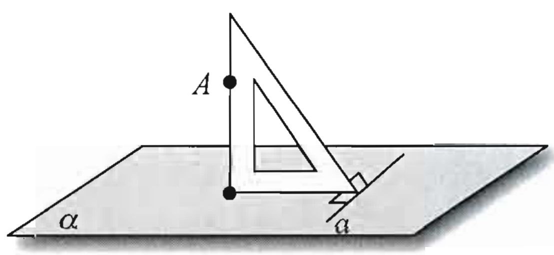
Soient α un plan, et A un point, $A \notin \alpha$, et a une droite, $a \subset \alpha$. Soit $A' \in \alpha$ tel que $AA' \perp \alpha$. Soit $B \in a$ tel que $A'B \perp a$, alors $AB \perp a$.



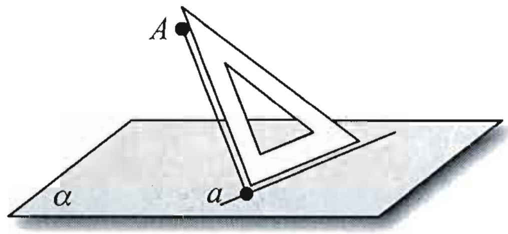
Démonstration : Nous allons utiliser la notation *(AA'B)* pour mettre en évidence le plan déterminé par trois points, dans notre cas par les points *A, A' et B.* Pour démontrer que $AB \perp a$, il est suffisant de démontrer que $a \perp (AA'B)$. En effet, si $a \perp (AA'B)$ et $AB \subset (AA'B)$, alors conformément à la définition 6, une droite est perpendiculaire au plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites incluses à ce plan, on obtient $a \perp AB$.

Démontrons donc que $a \perp (AA'B)$.

Si $AA' \perp \alpha$ et $a \subset \alpha$, on déduit par la définition que $AA' \perp a$. Étant donné que $a \perp A'B$, cela implique que la droite *a* est perpendiculaire aux deux droites concourantes *AA'* et *A'B* incluses dans le plan *(AA'B)*. Donc, par la proposition 6, la droite *a* est perpendiculaire à ce plan. La démonstration de ce théorème pourrait être considéré un peu difficile, mais en réalité, on a une sorte d'arrangement spatial des droites dans l'espace. Cet arrangement peut être réellement mis en évidence à l'aide d'une équerre. L'hypoténuse du triangle rectangle concerne la perpendiculaire demandée.



On peut observer en regardant le dessin qu'il nous suggère la construction de la droite perpendiculaire à l'aide d'une équerre. C'est évident, que ce dessin n'est pas la seule possibilité de placer l'équerre. La figure suivante nous donne aussi une autre variante pour la perpendiculaire concernée.

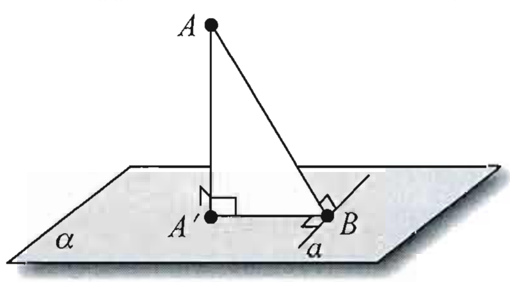


La différence entre les deux figures consiste en ce que dans le premier cas, on utilise une suite de relations de droites perpendiculaires, qui ne sont pas nécessairement coplanaires. Cet aspect nous donne la richesse d'un traitement spatial de la distance d'un point à une droite, mais aussi de la distance d'un point à un plan par une de ses réciproques.

Nous constatons la possibilité de construire trois réciproques du théorème des trois perpendiculaires. À partir de ces trois relations de l'hypothèse $AA' \perp \alpha$ *(1)*, $A'B \perp a$ *(2)*, $a \subset \alpha$ *(3)* et de la conclusion du théorème $AB \perp a$ *(4)*, on peut énoncer les trois réciproques.

Réciproque 1, de T3⊥

Soit le point A' tel que $A' \in \alpha$ et $AA' \perp \alpha$ *(1)*.Soient une droite a, telle que a incluse dans le plan α,($a \subset \alpha$ *(3)*), et une droite AB perpendiculaire à la droite a,($AB \perp a$ *(4)*), où le point B appartient à la droite a,($B \in a$), alors $A'B \perp a$ *(2)*.



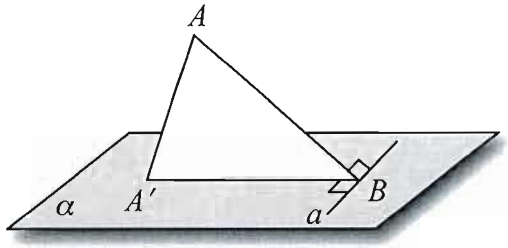
Démonstration : En utilisant les relations $AA' \perp \alpha$ *(1)* et $a \subset \alpha$ *(3)*, données dans l'hypothèse du théorème, et le fait que la droite AA' est incluse dans le plan $(AA'B)$, on déduit que $AA' \perp a$ (conformément à la définition 5, d'une droite perpendiculaire à un plan).

Puisque, dans l'hypothèse, on a la relation $AB \perp a$ *(4)* et qu'on a la relation de perpendicularité $AA' \perp a$, on déduit par la proposition 6, que $a \perp (AA'B)$. Par conséquent, étant donné que la droite $A'B$ est incluse dans le plan α et que la droite a est perpendiculaire au plan $(AA'B)$, on déduit par la définition 6, que la droite $a \perp A'B$.

Réciproque 2, de T3⊥

Soit le point $A' \in \alpha$ et une droite a incluse au plan α, $a \subset \alpha$ *(3)*. Soit $A'B$ perpendiculaire à la droite a, $A'B \perp a$ *(2)*, où $B \in a$. Si la droite AB est perpendiculaire à la droite a, $AB \perp a$ *(4)*, alors la droite AA' est perpendiculaire au plan α, $AA' \perp \alpha$ *(1)*,

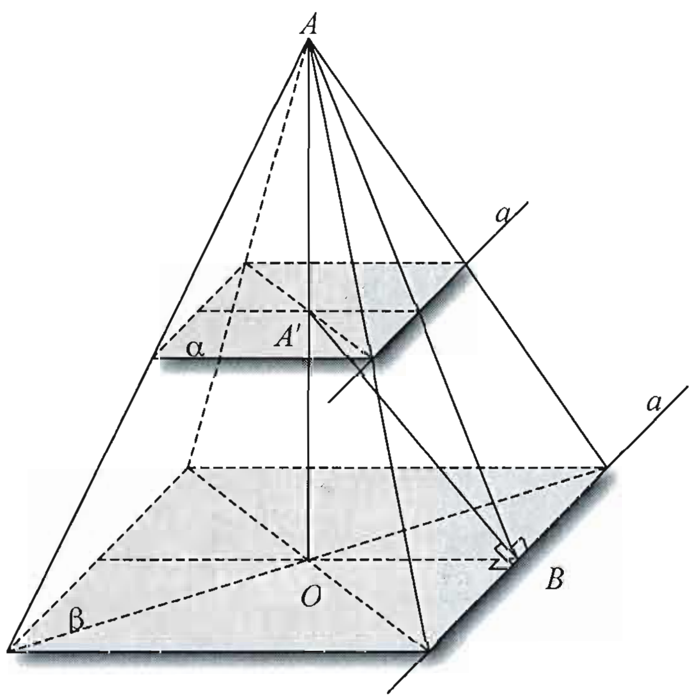
Le dessin qui suit nous démontre que cette réciproque n'est pas vraie. Étant donné que le point A' appartient à la droite $A'B$ sans restriction, alors il faut remarquer que le triangle $AA'B$ n'est pas nécessairement un triangle rectangle, autrement dit que AA' n'est pas nécessairement perpendiculaire à la droite $A'B$ et au plan α.



Réciproque 3, de T3⊥

Soit une droite AA' perpendiculaire au plan α tel que A est extérieur au plan et A' apparient au plan α, $(AA' \perp \alpha\ (1))$. Soient a une droite telle que $A'B$ perpendiculaire à la droite $a, (A'B \perp a\ (2))$, où $B \in a$, et la droite AB perpendiculaire à la droite a $(AB \perp a\ (4))$, alors la droite a est incluse dans le plan α $(a \subset \alpha\ (3))$.

Comme dans la réciproque précédente (Réciproque 2), la réciproque 3 n'est pas vraie. Le dessin qui suit indique que même si toutes les relations de l'hypothèse sont remplies, la droite a n'est pas nécessairement incluse dans le plan α. Étant donnée qu'on est dans l'espace, on peut construire une infinité de droites parallèles entre elles, mais qui ne sont pas toutes incluses dans le même plan.



Dans l'hypothèse de la deuxième réciproque, nous avons la relation $AA' \perp a$. Si on ajoute à l'hypothèse de cette réciproque la relation $AA' \perp A'B$, alors nous allons obtenir un autre théorème, on peut la nommer le théorème renforcé de la deuxième réciproque, qui nous permet de démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, en utilisant la construction des droites perpendiculaires sur d'autres droites. L'application de cette réciproque dans les problèmes de géométrie de l'espace nous permet de répondre à la question qui vise à établir des conditions relatives, nécessaires et suffisantes à la construction, pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan.

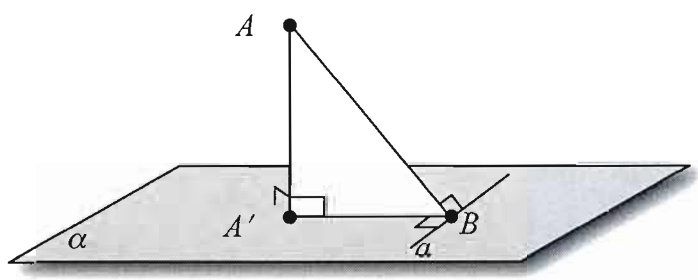
Dans l'hypothèse de la deuxième réciproque, nous avons deux relations, $A'B \perp a$, $AB \perp a$, qui nous conduit à déduire que la droite a est perpendiculaire au plan $(A'BA)$ et par suite, $a \perp AA'$. En renforçant l'hypothèse de la deuxième réciproque avec la relation $AA' \perp A'B$, nous allons obtenir l'énoncé d'un théorème vraiment utile dans les démarches d'une démonstration qu'une droite est perpendiculaire au plan.

Proposition 9 : Réciproque renforcé de T3⊥ ou, *Le théorème de l'existence d'une droite perpendiculaire au plan.*

Soit α un plan et A un point, $A \notin \alpha$, et a une droite, $a \subset \alpha$. Soit B un point appartenant à la droite a $(B \in a)$, telle que la droite AB est perpendiculaire à la droite a $(AB \perp a)$. Soit A' un point appartenant au plan α, $A' \in \alpha$, tel que la droite $A'B$ perpendiculaire à la droite a $(A'B \perp a)$, et la droite AA' perpendiculaire à la droite $A'B$ $(AA' \perp A'B)$ alors, la droite AA' est perpendiculaire au plan α $(AA' \perp \alpha)$.

Démonstration :

Nous utiliserons la même figure que dans le théorème direct.



En utilisant l'énoncé qui nous donne une condition suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire au plan, (Proposition 6 : une droite est perpendiculaire au plan si elle est perpendiculaire à au moins deux droites non parallèles incluses à ce plan), nous allons démontrer que la droite a est perpendiculaire au plan *(AA'B)*. On a la droite a perpendiculaire aux droites AB et $A'B$ ($a \perp AB$ et $a \perp A'B$), où les droites AB et $A'B$ sont incluses au plan *(AA'B)*. Conformément à la proposition 6, on obtient que la droite a est perpendiculaire au plan *(AA'B)* ($a \perp (AA'B)$).

Par conséquent, conformément à la définition d'une droite perpendiculaire au plan, puisque $a \perp (AA'B)$ et $AA' \subset (AA'B)$, on a $a \perp AA'$.

Puisque $a \perp AA'$, on a $AA' \perp a$. Donc, par la proposition 6, puisque $AA' \perp a$ et $AA' \perp A'B$ (hyp.), où a et $A'B$ sont incluses dans le plan α, on a $AA' \perp \alpha$.

On remarque la richesse de cette démonstration pour nous indiquer comment construire la perpendiculaire à un plan, depuis un point extérieur à ce plan, en n'utilisant que des droites perpendiculaires à d'autres droites.

En utilisant l'énoncé et la figure donnés ci-dessus, on peut dire que la construction réelle de la perpendiculaire d'un point qui n'appartient pas à un plan, au plan, passe par les étapes suivantes : 1. On construit une première droite perpendiculaire du point A (extérieur au plan) à la droite a (incluse dans le plan). On obtient un point d'intersection, entre les deux droites (la perpendiculaire et la droite incluse dans le plan), noté par B ; 2. On construit une deuxième perpendiculaire (incluse dans le plan α) du point B à la droite a ; 3. On construit une troisième perpendiculaire du point A (extérieur au plan) à la deuxième perpendiculaire. On note le point d'intersection entre les deux droites par A', $AA' \perp A'B$; 4. La construction de la dernière perpendiculaire représente aussi la perpendiculaire d'un point extérieur à un plan, au plan.

VI. La distance dans l'espace

La distance est aussi un point important dans un référentiel théorique spécifique à la géométrie de l'espace. Dans ce sens, à partir de la distance d'un point à une droite, il faut définir la distance d'un point à un plan. Ensuite, la distance entre deux droites parallèles en 2D, nous suggère une définition de la distance entre une droite et un plan parallèles, ainsi que la distance entre deux plans parallèles.

Il faut d'abord donner la définition d'une droite parallèle à un plan et la définition de deux plans parallèles.

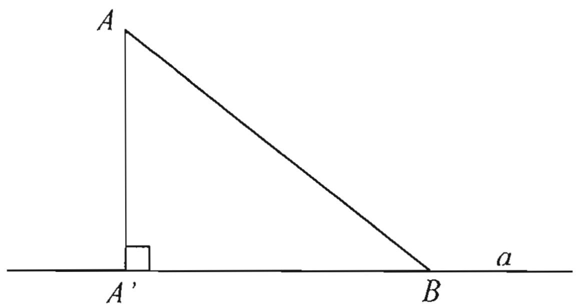
Définition 7 : Droite parallèle à un plan
Une droite est parallèle à un plan si la droite et le plan n'ont aucun point en commun. Autrement dit, si l'intersection entre la droite et le plan est l'ensemble vide, $a \cap \alpha = \varnothing$. Notons cette relation par, $a \,||\, \alpha$.

Définition 8 : Plans parallèles
Deux plans α et β sont parallèles s'ils n'ont pas de points en commun. Autrement dit, si l'intersection entre les plans est l'ensemble vide, $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Définition 9 : La distance entre un point et une droite
On considère un point A et une droite a. Alors, comme dans la géométrie plane, on peut donner la définition suivante : La distance entre le point A et la droite a, notée $d\,(A, a)$, est :

1. $d\,(A,A')$, si $A \notin a$, où A' est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur a;

2. *0,* si $A \in a$.



À partir de cette définition, on constate que tout point $B \in a$, B distinct de A', est plus éloigné de A que ne l'est A'. En effet, on a par Pythagore : $AB^2 = A'A^2 + A'B^2$ et $A'B \neq 0 \Rightarrow AB^2 > AA'^2$. On a donc la propriété suivante.

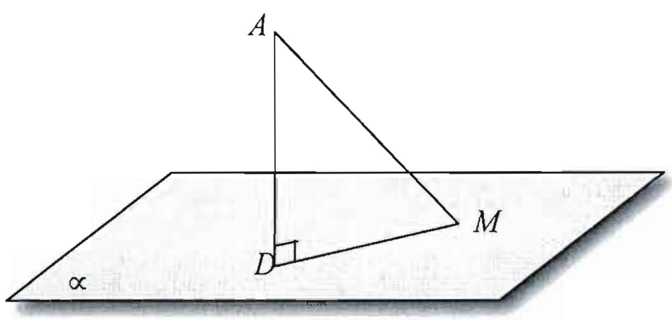
Propriété : $\forall\, B \in a, d(A,a) \leq d(A,B)$.

Ou encore, $\forall\, B \in a, B \neq A' \Rightarrow d(A,a) < d(A,B)$.

Définition 10 : La distance d'un point à un plan

On considère un point A et un plan α. Soit $AD \perp \alpha, D \in \alpha$. La distance du point A au plan α, notée $d(A, \alpha)$, est :

1. $d(A,D)$, *si* $A \notin \alpha$;
2. *0, si* $A \in \alpha$.



Aussi, comme dans le cas précédent, à partir de la définition de la distance d'un point à un plan, on constate que tout point $M \in \alpha$, M distinct de D, est plus éloigné de A

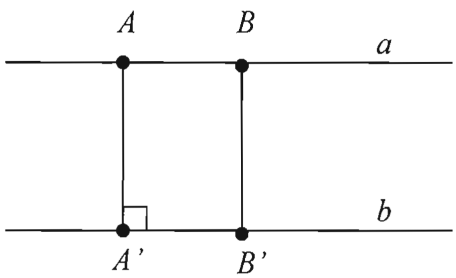
que ne l'est D. En effet, on a par Pythagore : $\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2$ et $DM \neq 0 \Rightarrow AM^2 > AD^2$. On a donc la propriété suivante.

Propriété : $\forall\ M \in \alpha, d(A,\alpha) \leq d(A,M)$.

Ou encore, $\forall\ M \in \alpha,\ M \neq D \Rightarrow d(A,\alpha) < d(A,M)$

Définition 11 : La distance entre deux droites parallèles de l'espace

Soient a et b, deux droites parallèles de l'espace. Comme dans la géométrie plane, la distance entre deux droites parallèles a et b, notée $d'(a,b)$, est la distance d'un point A appartenant à la droite a, à la droite b. Autrement dit, $d\,(a,\ b)= d(A,\ b),\ A \in a$.

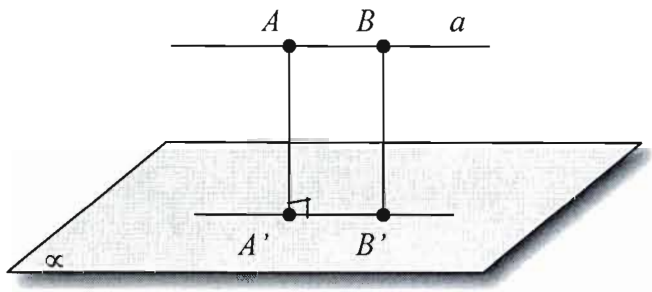


On peut démontrer que la distance entre deux droites parallèles ne dépend pas du point choisi. En considérant un autre point B appartenant à la droite a, alors il suffit de démontrer que la distance du point B à la droite b est égale à la distance du point A à la droite b.

En effet, puisque deux droites parallèles déterminent un plan (proposition 2), alors $AA'B'B$ est un quadrilatère inclus dans un plan bien déterminé. Puisque les droites a et b sont parallèles alors les segments AB et $A'B'$ sont aussi parallèles ($AB \,||\, A'B'$). Si $AA' \perp b$ et $BB' \perp b$ alors on déduit que $AA' \,||\, BB'$ (conformément à un énoncé connu dans la géométrie plane) et donc le quadrilatère $AA'B'B$ est un parallélogramme ($AB \,||\, A'B'$, $AA' \,||\, BB'$) ayant un angle droit ($AA' \perp b$), donc un rectangle. Il est suffisant de dire que le quadrilatère $AA'B'B$ est un parallélogramme pour avoir les segments *AA'* et *BB'* congrues, et donc leurs mesures égales. On obtient donc, que la distance entre deux droites parallèles de l'espace est indépendante du point choisi.

Définition 12 : La distance entre une droite parallèle à un plan et ce plan

Soit a une droite parallèle au plan α. La distance entre la droite a et le plan α, notée $d\,(a,\alpha)$, est la distance d'un point quelconque de a au plan α.



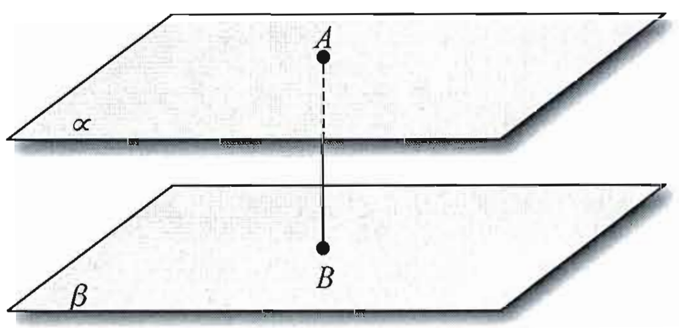
On peut démontrer d'une façon analogue, comme dans le cas de deux droites parallèles dans l'espace et tenant compte de l'axiome 7, que la distance entre une droite (parallèle au plan) et un plan est constante.

Soient les points A et B appartenant à la droite a et A', B', les pieds des perpendiculaires depuis A et B dans le plan α. Les trois points déterminent un plan $(AA'B')$ (conformément à la proposition 1). Étant donné que $BB' \| AA'$, et que le point B' appartient au plan $(AA'B')$, alors les droites AA' et BB' sont coplanaires (les deux sont incluses dans le plan $(AA'B')$) et forcement les droites AB et $A'B'$ sont parallèles. Pour démontrer que les distances concernées sont égales, il est suffisant de continuer la démonstration comme dans le cas de la distance entre deux droites parallèles dans l'espace ($AA'B'B$ est un parallélogramme et donc les segments AA' et BB' congrues, et leurs mesures égales).

Pour démontrer que les droites *AB* et *A'B'* sont parallèles, on suppose par réduction à l'absurde qu'elles ne sont pas parallèles et donc, elles ont un point en commun. Étant donné que la droite *A'B'* est incluse dans le plan α, alors le point d'intersection entre les deux droites appartient aussi au plan α. Ceci implique que la droite *AB* et le plan α ne sont pas parallèles. Ce qu'est faux, étant donné qu'on a supposé que la droite *AB* est parallèle au plan α.

Définition 13 : La distance entre deux plans parallèles

La distance entre deux plans parallèles α et β, notée $d(\alpha, \beta)$ est la distance au plan β d'un point quelconque qui appartient au plan α.



Généralement, pour le calcul de la distance entre deux droites parallèles, entre une droite et un plan parallèle avec la droite, ou la distance entre deux plans parallèles, on calcule la distance à partir d'un point qui appartient à une droite, droite incluse dans un de ces deux plans. Pour démontrer que la distance entre les deux plans parallèles reste constante et qu'elle ne dépend pas du point choisi, on peut suivre les mêmes démarches, comme dans le cas de la distance entre une droite parallèle au plan et le plan.

VII. Le calcul des aires et des volumes

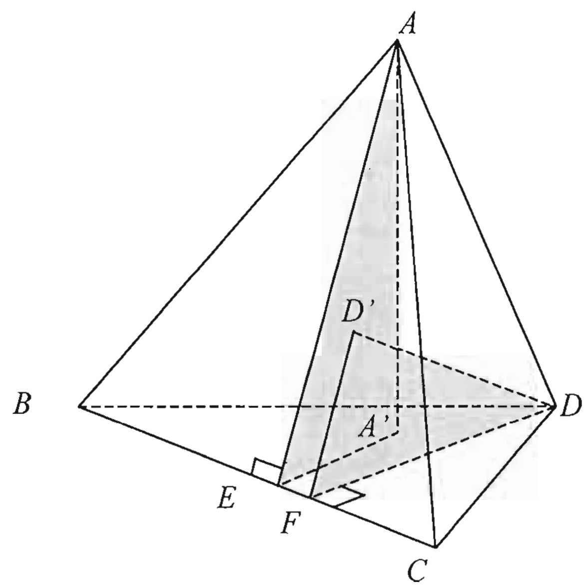
Le calcul des aires et des volumes des solides est généralement réduit à une formule qui n'est pas démontrée rigoureusement. Parfois ces types de démonstrations ne sont pas nécessaires au secondaire, mais il faut remarquer que pour la démonstration de la formule du volume d'un tétraèdre, le théorème de trois perpendiculaire s'avère vraiment nécessaire. Nous ne donnons pas la démonstrations ici.

Proposition 10: Le volume d'un tétraèdre est le nombre égal a tiers du produit obtenu entre l'aire d'une face quelconque du tétraèdre et la hauteur qui lui correspond.

La proposition qui suit permet de montrer que le volume d'un tétraèdre ne dépend pas de la façon dont on choisit la base de la pyramide triangulaire.

Proposition 11 : Consistance de la Proposition 10

La formule du volume d'un tétraèdre ne dépend pas de la base choisie pour la pyramide triangulaire.



Démonstration :

Dans le tétraèdre *ABCD* considérons les hauteurs *AA'* et *DD'*. On note l'aire du triangle *BCD*, par $A_{\Delta BCD}$, et l'aire du triangle *ABC* par $A_{\Delta ABC}$. Nous allons démontrer que $A_{\Delta BCD} \cdot AA' = A_{\Delta ABC} \cdot DD'$.

Soient *A'* et *D'*, tels que $AA' \perp (BCD)$ et $DD' \perp (ABC)$. Soit $E \in BC$ tel que $A'E \perp BC$ et soit $F \in BC$ tel que $D'F \perp BC$ *(1)*. En utilisant le théorème des trois perpendiculaires dans ces deux cas, nous allons déduire que $AE \perp BC$ et $DF \perp BC$ *(2)*. En effet, puisque

$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp (BCD) \\ A'E \perp BC, \\ A'E \text{ et } BC \subset (BCD) \end{array}\right\} \text{alors, conformément } T3\perp \text{, on a } AE \perp BC,$$

De plus,

$$\text{puisque, } \left.\begin{array}{l} DD' \perp (ABC) \\ D'F \perp BC, \\ D'F \text{ et } BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \text{alors, conformément à } T3\perp \text{, on a } DF \perp BC \text{ (1).}$$

À partir des relations (1) et (2) on obtient deux relations de parallélisme :

$$AE \,//\, D'F \text{ et } A'E \,//\, DF.$$

Donc, puisque $AE \,//\, D'F$ et $A'E \,//\, DF$, alors $\angle AEA' \equiv \angle D'FD$.

Ensuite, puisque les angles sont congrus, alors leurs sinus sont égaux : $\angle AEA' \equiv \angle D'FD \Rightarrow \sin\angle AEA' = \sin\angle D'FD$.

En appliquant la définition du sinus, pour les deux sinus, nous obtenons deux rapports égaux : $\sin\angle AEA' = \sin D'FD \Rightarrow \frac{AA'}{AE} = \frac{DD'}{DF}$ et donc, $AA' \cdot DF = DD' \cdot AE$. En multipliant la relation obtenue par le rapport $\frac{BC}{2}$, nous obtenons la relation escomptée :

$$AA' \cdot DF \cdot \frac{BC}{2} = DD' \cdot AE \cdot \frac{BC}{2} \Rightarrow AA' \cdot \frac{DF \cdot BC}{2} = DD' \cdot \frac{AE \cdot BC}{2} \Rightarrow AA' \cdot A_{\Delta BCD} = DD' \cdot A_{\Delta ABC} \cdot$$

En multipliant la dernière relation par $\frac{1}{3}$, nous obtenons que la formule du volume de la pyramide est cohérente, et ne dépend pas de la face choisie comme base.

Sans entrer dans des questions qui pourraient nous faire sortir de la géométrie de niveau secondaire, on remarque que dans les *Eléments* d'Euclide, il n'existe pas une définition exacte de la notion de volume ou d'aire. Chez Euclide, le calcul des aires et des volumes passe par la comparaison des figures planes et de certains solides. En ce sens, le tétraèdre a un rôle de base dans la décomposition de certains polyèdres en un ensemble de pyramides triangulaires avec des intérieurs disjoints.

Pour construire un lien dans le passage du plan vers l'espace, une étape d'observation spécifique à la Géométrie I semble être nécessaire. Mais, il faudrait quand même que cette étape ne soit qu'une étape transitoire, pour être en mesure de répondre à des questions plus spécifiques à l'espace. En même temps, la géométrie GI – 3D doit être structurée de telle sorte à préparer ce passage à la structure euclidienne GII – 3D, que l'on veut utiliser dans nos démarches de preuve.

Les liens qui doivent êtres établis, entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace au niveau secondaire, se trouvent certainement autour de la géométrie euclidienne et dans la façon dont nous allons représenter les solides dans un plan 2D. Mais, il est nécessaire de ne pas se limiter à des représentations 2D des objets 3D. Ainsi, on ne peut tenir pour acquis que les propriétés euclidiennes en 2D des objets 3D soient perçues par les élèves, s'ils ne se réfèrent qu'à des représentations 2D des solides. On représente les solides dans un plan 2D, mais en même temps, on doit avoir un référentiel théorique qui pourrait nous donner le pouvoir d'argumenter dans nos démarches.

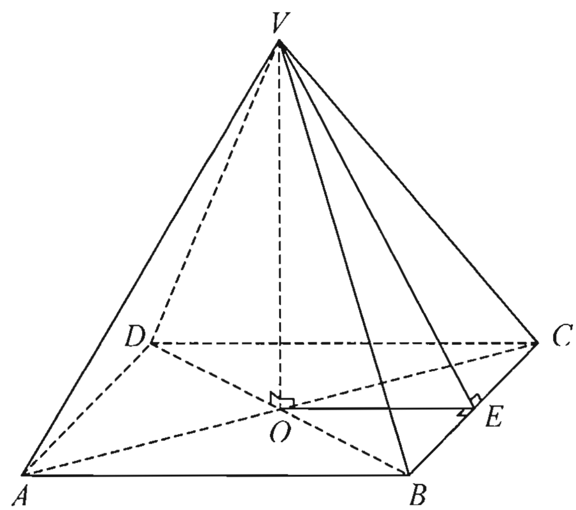
1.4.2.B. Discussion sur le cheminement de la géométrie proposé par le programme d'étude en regard de ce cadre.

La géométrie euclidienne représente la porte d'entrée dans une réalité qui est connue par nos élèves, depuis les premières perceptions géométriques et dessins qu'ils ont faits. La richesse d'une géométrie, qui représente la réalité et qui a un support théorique bien établi, ne peut pas être mis en doute dans les démarches d'une preuve. C'est pour cela que le programme d'étude fait un retour sur la géométrie euclidienne. Elle nous donne le référentiel théorique pour l'étude de la géométrie plane, mais en ce qui concerne la géométrie de l'espace, le référentiel théorique ne suit pas de démarches en phase avec un ETG – 2D – GII.

Conformément au paradigme de la géométrie GI, la géométrie naturelle ne correspond pas à la géométrie euclidienne. Dans cette géométrie, les démonstrations ne sont pas faites de façon rigoureuse en suivant un référentiel théorique bien établi. L'intuition, la déduction et le raisonnement sont liés aux « objets matériels ou matérialisés, grâce à la perception ou à la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles. » Comme nous l'avons déjà précisé, dans la Géométrie I, l'espace support, dans lequel se trouvent les objets géométriques à étudier, est un espace local et réel, constitué de dessins ou de maquettes. Si, on veut parler d'un référentiel théorique pour la géométrie GI, il est nécessaire de ne pas penser ce référentiel en termes d'un « modèle théorique », basé sur des définitions, des propriétés et des énoncés structurés selon une axiomatique bien précisée. Le référentiel de la géométrie GI est obtenu par un processus de modélisation par « schématisation et idéalisation du monde réel ». Ainsi, certaines définitions de l'espace sensible sont mises à la disposition de son utilisateur. Donc, dans la géométrie GI, l'espace de travail est un « espace intuitif et physique » et le dessin est un « objet d'étude et de validation. »

Nous considérons que la géométrie de l'espace qui s'enseigne au secondaire a des caractéristiques qui correspondent à la GI, géométrie naturelle.

Prenons encore l'exemple du problème de la pyramide quadrilatère régulière. On suppose que l'élève a dans les données du problème, la hauteur et les longueurs des côtés du quadrilatère à sa base. On lui demande de calculer l'aire latérale de la pyramide.



Dans ce cas, il utilise le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle bien choisi, par exemple ΔVOE, qui est rectangle par « évidence perceptive ». Nous considérons qu'une première étape est nécessaire dans la démonstration du problème, pour valider dans un ETG – GII – 3D le fait que ce triangle est rectangle, avant de passer directement aux calculs spécifiques ETG – 2D, dans lesquels on utilise le théorème de Pythagore. À partir des énoncés spécifiques, qui concernent un référentiel théorique ETG – GII – 3D, nous travaillons la déduction de façon rigoureuse. Nous considérons qu'il est nécessaire de se situer dans un ETG – GII – 3D et, de là, d'y intégrer des énoncés de la GII – 2D comme le théorème de Pythagore.

Par exemple, l'énoncé qui pourrait être pris en considération dans notre exemple est : *si une droite* (la hauteur de la pyramide) *est perpendiculaire à un plan, alors la droite est perpendiculaire à n'importe quelle droite* (dans notre cas, on considère l'apothème du quadrilatère) *qui est incluse dans ce plan.* En ce sens, dans une géométrie GII, avant de poursuivre nos calculs, nous devrions savoir que nous ne pourrons appliquer le théorème de Pythagore que si nous avons au préalable démontré que le triangle est un triangle rectangle. À cet effet, nous pourrons appliquer l'énoncé ci-dessus de la façon suivante : $\left.\begin{array}{l} VO\perp(ABC) \\ OE\subset(ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow VO\perp OE \Rightarrow \Delta VOE$ rectangle. Dès que cette étape de démonstration est finie, nous pourrons continuer par l'application du théorème de Pythagore.

Si nous ne nous sommes pas en mesure de justifier que notre triangle est un triangle rectangle, et allons directement faire des calculs dans ce triangle en utilisant le théorème de Pythagore, alors notre démarche pourrait être contestée ou simplement rejetée. Le manque d'une justification viable pour la perpendicularité d'une droite au plan peut conduire à considérer que le travail du géomètre dans ce cas se fait dans un ETG – GI - 3D.

Nous faisons la remarque qu'un référentiel théorique spécifique à la géométrie GII, qui représente la base de la déduction et qui donne le pouvoir de résoudre un problème de géométrie 3D, est absent de notre programme. C'est la raison pour laquelle l'élève doit utiliser, dans ses démarches de résolution, « l'intuition d'un résultat et les conclusions d'une expérience [69]». Ces démarches correspondent à un ETG spécifique à la géométrie GI et ne sont pas définies en fonction de critères géométriques spécifiques à la géométrie de l'espace GII.

Dans le paradigme de la géométrie GII, « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. » Le choix des axiomes est un problème crucial pour établir une relation avec la réalité. L'intuition, dans le paradigme de la géométrie GII, est *liée aux figures*, l'expérience est *un schéma de la réalité*, l'espace de travail est *l'espace physico-géométrique*, le dessin est *le support du raisonnement*. L'aspect le plus important qui se dégage de la géométrie GII est lié aux propriétés et aux démonstrations. Nous considérons que la pratique de la géométrie plane, selon le programme actuel pour le secondaire, a certaines caractéristiques qui se retrouvent dans le paradigme de la GII.

En revenant sur l'exemple ci-dessus, nous considérons que l'élève a à sa disposition le référentiel théorique nécessaire pour poursuivre la démonstration qui touche l'aspect « plan » du problème. Par exemple, il peut démontrer que l'apothème du carré représente une demie de son côté, en utilisant des énoncés spécifiques à la géométrie plane, ce qui n'est pas le cas du problème quand on touche l'aspect 3D.

Dans le paradigme GIII géométrie axiomatique formaliste, on intègre les géométries non-euclidiennes. Dans cette géométrie, « les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. » Remarquons que l'approche euclidienne de la géométrie de l'espace ne peut pas s'intégrer dans le paradigme de la GIII. La géométrie vectorielle enseignée aux dernières classes du secondaire peut s'approcher avec son contenu du paradigme de la GIII.

---

[69] Kuzniak A., Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales - A.S.I. Analyse Statistique Implicative (Italy)* 6 - 8 Octobre 2005, page 212.

La pratique de la géométrie suppose que l'élève ait à sa disposition un « espace de travail géométrique efficace. » Dans cet espace, l'élève construit ses connaissances géométriques, comprend et résout des problèmes de géométrie. L'espace de travail géométrique (ETG) est « organisé » autour de trois composantes : un ensemble d'objets matérialisés dans un espace local et réel, un référentiel théorique organisé en un modèle théorique et un ensemble d'artefacts qui servent comme des outils et des instruments mis au service du géomètre. Pour chacun des trois paradigmes de la géométrie GI, GII ou GIII, il y a un espace de travail géométrique de référence, qui établit un rapport entre un contenu et une forme. Le contenu est « lié à la matière visible » et la forme est « déterminée par le modèle de référence » (le référentiel théorique).

Le référentiel théorique de la géométrie GI, où s'encadre la géométrie 3D du programme d'étude, n'a aucune structuration en un modèle théorique. La construction du nouveau programme a une base axiomatique euclidienne seulement pour la géométrie plane. Ces axiomes, on les retrouve comme étant partie intrinsèque des énoncés de géométrie euclidienne, proposés comme modèles dans le programme du premier cycle du secondaire. Nous avons à notre disposition, pour la pratique de la géométrie GII, une partie empirique formée des objets qui constituent l'espace de travail géométrique. Par exemple, les points, les droites et les plans sont considérés comme des objets faisant partie de notre espace de travail de la géométrie plane, niveau géométrie GII. Un ensemble de définitions, de propriétés et de relations qui font appel aux axiomes de la géométrie plane sont mis à la disposition de l'élève pour le processus de validation d'un énoncé, d'un problème ou d'une situation-problème. Par contre, dans la géométrie de l'espace, l'élève n'a pas à sa disposition les énoncés nécessaires à la validation des problèmes. Par exemple, pour une pyramide, l'élève ne se pose pas de questions relatives à la hauteur de la pyramide. Généralement, s'il y a une pyramide droite régulière, il peut déduire de façon intuitive où se trouve le pied de la hauteur de la pyramide. Le programme du premier cycle du secondaire nous donne des indices pour développer la compétence *Résoudre une situation-problème*, de la façon suivante :

> En géométrie, il passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation-problème.[70]

Une question se pose alors : quel raisonnement va porter l'élève à justifier son « choix de la hauteur de la pyramide? » ou encore : reste-t-on dans la phase d'observation? Est-il nécessaire de poser aux élèves des questions relatives à la position des droites dans l'espace? Dans la pratique de la géométrie plane, l'élève apprend les méthodes par lesquelles il peut justifier la perpendicularité de deux droites : la méthode instrumentale, au primaire, et le raisonnement, au secondaire. Toutefois, quelles sont les méthodes que l'élève va utiliser pour démontrer la perpendicularité d'une droite à un plan? Est-ce qu'on doit vraiment enlever de la pratique de la géométrie les énoncés qui peuvent déterminer de vraies connaissances sur l'espace?

Dans ce chapitre, l'analyse que nous avons faite sur les indications données par le programme pour l'enseignement de la géométrie au premier cycle du secondaire a mis en évidence une étude approfondie sur les solides : prismes droits, pyramides droites et cylindres droits, développements possibles d'un solide et solides décomposables.

La définition classique d'une pyramide droite est en lien direct avec le polygone de la base et la hauteur de la pyramide : une pyramide droite est une pyramide dont la base est un polygone inscriptible dans un cercle, et le pied de la hauteur de la pyramide coïncide avec le centre de ce cercle.

[70] Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle, chapitre IV, page 241.

Pour un prisme droit, les arêtes latérales issues des bases sont perpendiculaires aux deux bases, et la hauteur (qui correspond à la distance entre les deux bases parallèles) est de la même longueur que n'importe quelle arête latérale. Ces types de définitions, on ne les trouve pas dans notre programme d'étude.

Nous remarquons que les définitions énoncées ci-dessus, à l'égard de la hauteur d'une pyramide droite ou d'un prisme droit, reposent sur la notion de perpendicularité qui, elle-même, découle souvent, selon l'approche choisie, de celle de distance. Dans le cas de la pyramide et du prisme, il s'agit des notions de distance entre un point et un plan et distance entre deux plans, respectivement.

Nous savons que les élèves apprennent la notion de distance dans la géométrie plane : la distance entre deux points, entre un point et une droite ou la distance entre deux droites parallèles. Notre expérience montre que cette notion pose des difficultés aux élèves dans les études de la géométrie plane et le passage de cette notion vers la géométrie de l'espace peut créer aussi des « malentendus didactiques ».

Si on veut se situer dans une géométrie GII, l'absence d'une définition exacte pour la distance entre deux plans, donnée dans l'esprit de la géométrie euclidienne, peut créer une rupture pour la connaissance « distance ». Les indications du nouveau programme à l'égard du développement du « sens spatial » passent surtout par les processus qui visent les transformations géométriques : translation, rotation, réflexion, homothétie de rapport positif. À ces indications s'ajoutent « les constructions » :

> Les processus liés aux transformations et aux constructions géométriques servent à construire des concepts et à dégager des invariants et des propriétés

> afin de les réinvestir dans différents contextes et de développer le sens spatial.[71]

Ainsi, au premier cycle du secondaire, le programme parle du développement du « sens spatial en trois dimensions », mais à partir de représentations planaires des solides.

> Lors de la recherche de mesures manquantes, l'élève est occasionnellement invité à effectuer des transferts dans des problèmes complexes, c'est-à-dire qui nécessite la décomposition d'un problème en sous-problèmes, par exemple le calcul de l'aire de figures décomposables. De ce fait, il gère un problème qui comporte plusieurs étapes. Il met aussi à profit le développement d'un solide. De plus, il utilise des relations et des propriétés connues... [72]

Ensuite, les sections dans les solides (les figures planes obtenues) doivent lui donner des informations. Cela veut dire que l'élève reste avec ses connaissances sur les propriétés des objets géométriques dans la géométrie plane.

> Pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée. Il identifie des solides soit par leurs développements ou par leurs représentations dans le plan. Il reconnaît des figures planes obtenues en sectionnant un solide à l'aide d'un plan.[73]

Les propriétés des figures géométriques qui proviennent de l'espace ne sont pas mises en évidence par un référentiel théorique adapté à la géométrie 3D. Les élèves ne peuvent pas vraiment continuer à développer leur « sens spatial ». Les solides qu'ils construisent restent au stade de dessins dont on connaît les caractéristiques, au sens d'une géométrie GI – 3D, mais dont on ne connaît pas les propriétés, au sens d'une géométrie GII – 3D. En ce sens, nous considérons que l'élève continuera à penser, dans l'espace, de la façon dont il avait pensé en géométrie plane. Le programme d'étude nous donne des indices pour la pratique de l'enseignement, mais un grand

---

[71] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre IV, page 259.
[72] *Ibid.*, page 259.
[73] *Ibid.*, page 261.

travail reste à faire par les enseignants pour la construction des situations-problèmes. Une approche euclidienne par situations-problèmes de la géométrie plane, et encore plus de la géométrie de l'espace, est un défi pour les enseignants.

La pratique de la géométrie, qui se base sur un référentiel théorique euclidien, n'est pas un espace de travail facile à développer par les enseignants et par leurs étudiants. Dans un référentiel euclidien de la géométrie 3D, le développement du « sens spatial » passe dans un premier temps par le développement de la connaissance « espace », en contemplant l'espace et deuxièmement, par les propriétés des objets géométriques construites sur un support axiomatique euclidien spécifique à une géométrie 3D. L'espace dans une approche euclidienne est formé par des points. Cela implique que tous les objets d'étude ont des propriétés bien définies et donc, qu'un effort d'abstraction s'impose, surtout au début de l'enseignement de la géométrie de l'espace. La complexité de la géométrie comme objet d'étude ne réside pas seulement dans les difficultés dues au développement de compétences spatiales. On remarque aussi les difficultés imposées dans la construction d'une démarche de preuve. Dans ce cas, un changement de registre s'impose : le dessin vu comme objet d'étude vers la figure vue comme objet de validation. Ce changement passe par les propriétés des objets géométriques. Une ample étude a été réalisée en ce sens par Gousseau-Coutat (2006), dans le passage de la pratique de la géométrie du primaire au collège, en France. L'utilisation du cadre théorique de Houdement et Kuzniak lui a permis d'identifier les ruptures lors du passage de l'école primaire au collège[74].

> Les représentations graphiques appartiennent à l'espace sensible présent à l'école primaire et les énoncés contribuent à l'entrée dans la théorie du collège. La principale différence dans l'approche de la propriété à l'école primaire et collège réside dans le lien qu'elle exprime. Les caractéristiques de l'école primaire ne possèdent pas d'ordre interne, elles utilisent une relation

[74] Le « collège » en France ne correspond pas à notre collégial mais plutôt, à notre secondaire.

> d'association. Les propriétés du collège utilisent une relation différente entre les contraintes et la conclusion.[75]

Après notre analyse du programme du secondaire, que ce soit au premier ou au deuxième cycle, on remarque qu'il n'existe pas de référentiel théorique pour la géométrie de l'espace qui soit dans l'esprit de la géométrie euclidienne, comme c'est le cas pour la géométrie plane. Si le référentiel théorique est pratiquement absent du nouveau programme, une question s'impose : comment va-t-on développer les propriétés des objets pour que « la figure » soit un objet de validation? Certainement, cette validation peut se faire dans le cadre d'une géométrie GI – 3D. Mais, rien n'indique vers quelle géométrie GII – 3D ce mode de validation s'oriente.

Les transformations et les constructions géométriques servent à construire des concepts et à dégager « des invariants et des propriétés afin de les réinvestir dans différents contextes et de développer le sens spatial.[76] » Cela veut dire que l'on commence par construire des objets géométriques, puis on extrait les propriétés qui caractérisent ces objets et, après, on les réinvestit dans d'autres contextes qui sollicitent ces propriétés. Dans ce cas, l'élève utilise ses capacités pour généraliser les « propriétés » des objets géométriques et pour les réinvestir dans un espace physico-géométrique où le dessin est « le support du raisonnement ».

> En géométrie, il procède par des déductions simples à partir de définitions simples et de propriétés, par exemple pour déterminer la valeur de mesures manquantes.[77]

Ce contexte implique un travail très difficile à réaliser par nos élèves, qui doivent

---

[75] Gousseau-Coutat S. *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse doctorale, Université Joseph Fourier, page 32.

[76] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 259.

[77] *Ibid.*, page 245.

exercer leur capacité à développer et à garder dans leur conscience des propriétés d'objets géométriques qui ne sont pas nécessairement explicitées dans un énoncé ou dans un dessin. Dans un espace de travail GII, les propriétés des objets devraient être les bases sur lesquelles repose tout raisonnement géométrique. L'utilisation d'un langage mathématique adéquat au raisonnement géométrique représente aussi une contribution essentielle au développement des compétences de l'élève dans une géométrie GII. En ce sens, la communication est un véritable lien avec la figure géométrique : « En géométrie, il communique lorsqu'il décrit et interprète une figure afin, notamment, de la reproduire » (Programme de formation, page 246). Nous remarquons l'intérêt pour une connaissance sans équivoque des propriétés de figures géométriques. Mais cela n'est valable, dans le programme, que pour la géométrie plane. Dans la géométrie de l'espace, « les propriétés » des objets ne sont pas vraiment des propriétés, mais plutôt des caractéristiques. Conformément au cadre théorique développé par Houdement et Kuzniak, les caractéristiques sont liées aux dessins, composantes de l'espace de travail ETG I, alors que les propriétés appartiennent aux figures géométriques, composantes de l'espace de travail ETG II.

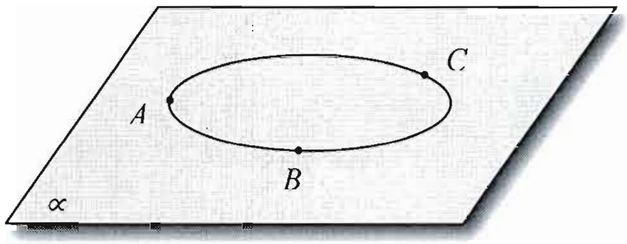
1.5. La formulation des questions de recherche.

1.5.A. Dans un cadre plus général.

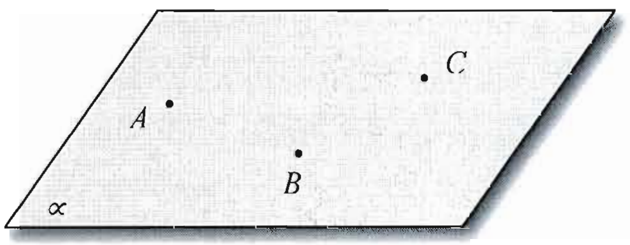
Le manque d'un référentiel théorique précis, développé à partir du référentiel théorique déjà acquis dans la géométrie plane, peut créer les prémisses d'un enseignement de la géométrie sans continuité ni logique. Tenant compte du cadre théorique développé par Houdement et Kuzniak (2000), on pourrait émettre une première hypothèse :

HP1. Les différents paradigmes de la pratique de la géométrie déterminent une rupture dans le passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace.

Les axiomes de la géométrie euclidienne, on les retrouve comme parties intrinsèques des énoncés proposés comme modèles dans le programme du premier cycle du secondaire. Par exemple : Trois points non-alignés déterminent un et un seul cercle.



Étant donné qu'un cercle est une figure géométrique à deux dimensions, implicitement, on pourrait reconnaître dans cet énoncé un passage vers des énoncés euclidiens dans l'espace : Trois points non-colinéaires déterminent un et un seul plan.



Ne pourrait-on, en donnant aux élèves des énoncés, à l'intérieur desquels on introduirait les axiomes les plus importants de la géométrie euclidienne 3D, construire une base de la géométrie de l'espace? Un aspect qu'on pourrait déduire du programme d'étude est l'approche axiomatique de la géométrie plane au sens GII, mais, où les axiomes ne sont pas donnés de façon explicite. Les notions les plus élémentaires, qui jouent un rôle important dans la pratique de la géométrie, sont le point, la droite, le plan, la distance et l'angle. À ces notions, utilisées dans un premier temps dans la pratique de la géométrie plane, s'ajoute la notion d'espace.

Dans le programme de mathématique du premier cycle du secondaire, on nous donne des exemples d'énoncés qui peuvent être utilisés lors de l'application des situations-problèmes. Quelques-uns font référence aux éléments homologues des figures planes ou des solides isométriques :

> Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure. Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.[78]

Bien que ces énoncés ne soient que des exemples à partir desquels les enseignants peuvent s'orienter pour construire des situations-problèmes, nous croyons qu'une approche précise par les propriétés des objets géométriques manque dans le programme. Les propriétés des objets déjà acquises dans la géométrie plane peuvent être mises à contribution dans le passage de 2D à 3D. En fait, le programme nous propose, parmi les éléments de méthode, la représentation des solides pour développer le sens spatial.

> Pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée.[79]

En construisant les objets de la géométrie de l'espace, on utilise involontairement plusieurs propriétés et énoncés de la géométrie de l'espace. Ces propriétés passent par le parallélisme et la perpendicularité dans l'espace, par le calcul de distances et par l'orthogonalité sur un plan.

Toutes ces notions et ces propriétés doivent impérieusement être connues et utilisées par les élèves dans leurs démarches de raisonnement, sinon au moins dans leurs démarches de construction d'objets géométriques et ce, avant de commencer l'étude du calcul des aires et des volumes des objets de l'espace.

---

[78] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle,* chapitre VI, page 261.
[79] *Ibid., page 261.*

La différence entre la pratique de la géométrie plane et celle de la géométrie dans l'espace passe par la notion de plan. Si, dans la géométrie plane, la pratique suppose l'existence d'un seul plan de travail, dans la géométrie de l'espace, la pratique suppose l'existence de plusieurs plans. Est-ce qu'au début de la pratique de la géométrie de l'espace, il est nécessaire de fixer dans la conscience de l'élève des « énoncés » et les « constructions » afférentes qui ont recours d'une façon très précise aux axiomes euclidiens spécifiques à la géométrie de l'espace? Comment pourrait-on construire ces énoncés?

Le cadre théorique de Houdement et Kuzniak concernant le paradigme de la géométrie GII nous dit que « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. »

À cet effet, nous considérons que la cohérence dans un travail pratique de la géométrie impose l'obligation d'effectuer un choix pour les axiomes (aussi précis que possible) qui assure un lien effectif avec la réalité.

Pour créer les prémisses d'un vrai développement spatial, nous émettons une deuxième hypothèse de travail :

HP2. Une approche de la géométrie de l'espace GII doit passer par une pratique de construction réelle dans un espace GI - 3D, qui tient compte des énoncés euclidiens élémentaires.

Qu'est-ce que signifie « la construction » d'une figure 3D? La construction de figures dans l'espace suppose d'avoir des connaissances élémentaires sur la détermination du point, de la droite et du plan. Par exemple, un point est déterminé dans une des conditions suivantes : il est donné, il se trouve à l'intersection de deux droites, il se trouve à l'intersection d'une droite et d'un plan qui n'inclus pas cette droite. Une droite est construite dans une des situations suivantes : si on la connaît, si on connaît deux points qui appartiennent à la droite, si la droite se trouve à l'intersection de deux plans.

Ainsi, un plan est construit[80] si : il est donné; on connaît trois points non-colinéaires qui appartiennent au plan; il est déterminé par deux droites parallèles ou par deux droites concourantes; il est déterminé par une droite et un point qui n'appartient pas à la droite. Lors de l'application d'une situation-problème, il faut tenir tenu compte de toutes ces possibilités. Du point de vue de la géométrie de l'espace, nous croyons que les modalités par lesquels on peut déterminer un plan sont entièrement liées à la notion d'espace.

Dans ce paragraphe, nous ne voulons pas évoquer de manière formelle la géométrie euclidienne. Nous voulons surtout mettre en évidence les possibilités de surmonter les difficultés de constructions de figures de la géométrie de l'espace. Normalement, tout problème de la géométrie de l'espace doit passer par un problème de construction. Construire une figure dans l'espace signifie déterminer la figure, ayant en tête des conditions bien précises à partir de la construction des figures simples, en plus de connaître leurs propriétés. Les transformations géométriques, la construction réelle de corps géométriques à partir de leurs développements ou les traces d'un dessin d'un objet géométrique 3D, ne peuvent pas donner de réponses à des questions élémentaires. Par exemple, nous considérons que la simple construction des traces d'une pyramide ou d'un prisme, sans entrer dans les propriétés les plus importantes de ces objets géométriques, ne peut créer les prémisses d'un vrai développement de compétences spatiales. Dessiner un objet en 3D, sans lui donner la preuve de

[80] Nous utilisons le mot « construire » au sens de « détermination ». Chez Euclide « construire » signifie produire explicitement avec la règle et le compas.

constructibilité à partir de propriétés étudiées, détermine une rupture dans le processus d'enseignement. Par exemple, comment peut-on aborder la question de « distance » dans l'espace, sans avoir les notions les plus élémentaires de construction et de propriétés, comme : la distance d'un point à un plan, la distance d'un point extérieur au plan à une droite qui est incluse dans plan ou la distance entre deux plans? Généralement, la notion de distance a un rôle essentiel pour préciser les positions relatives de deux éléments de l'espace, comme nous l'avons déjà souligné.

Partant de l'hypothèse selon laquelle l'élève peut résoudre les problèmes de construction dans l'espace ou qu'il peut calculer les distances dans l'espace, sans lui donner les propriétés les plus importantes de la géométrie de l'espace, on ne peut pas développer une pratique d'enseignement GII, même pour le calcul des volumes ou des aires. D'autre part, on ne peut pas utiliser, chaque fois, les énoncés d'Euclide dans la construction de figures géométriques. Chevalard et Julien (1991) ont émis l'hypothèse selon laquelle on peut analyser la solution d'un problème de construction géométrique selon quatre exigences :

1. Elle doit fournir une preuve de l'existence de « l'objet » à construire;
2. Elle doit fournir une preuve de sa constructibilité;
3. Elle doit fournir un algorithme de construction;
4. Éventuellement, elle peut fournir la construction géométro-graphique (déterminer parmi toutes les constructions possibles d'un objet celle qui est la plus simple) (page 68 de l'article).

Les étapes mentionnées représentent des exigences qui sont liées les unes aux autres. La preuve de l'existence de l'objet à construire représente en fait ce que nous comprenons par une construction réelle de cet objet. La preuve de constructibilité devrait passer par un référentiel théorique et finalement, l'algorithme de construction devrait faire les allers-retours entre l'objet réel et le référentiel théorique spécifique à une géométrie GII – 3D. La validité d'une situation-problème passe parfois par une situation de construction qui demande d'avoir de bonnes connaissances théoriques sur l'objet qu'on veut construire. Doit-on insister sur la deuxième exigence, celle qui vise « la preuve de la constructibilité » de la figure, qui est directement liée à « l'algorithme de construction »?

Par exemple, dans le cas d'un prisme droit, on construit les arrêtes perpendiculaires aux deux bases. Dans cette situation, l'élève utilise des propriétés et des énoncés qui sont liés à la perpendicularité dans l'espace. Toutefois, la preuve de constructibilité des arrêtes perpendiculaires repose sur l'existence de la définition d'une droite perpendiculaire à un plan.

Définition : Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à n'importe quelle droite qui est incluse dans ce plan.

Aussi, pour prouver la perpendicularité d'une droite à un plan, il est suffisant de démontrer qu'elle est perpendiculaire, au moins, à deux droites non-parallèles qui sont incluses dans ce plan. Dans ce cas, on doit utiliser l'énoncé suivant :

Énoncé :
Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes qui sont incluses dans un plan, alors la droite est perpendiculaire à ce plan.

L'étude des objets de la géométrie plane passe par l'étude et l'application de leurs propriétés dans les situations-problèmes ce qui correspond à une géométrie GII – 2D. Cela n'est pas le cas des objets d'étude de la géométrie de l'espace. Ce que notre programme propose, c'est une géométrie de l'espace du type GI. Une géométrie du type GI – 3D est une étape nécessaire, mais quand même, elle devrait être transitoire. Une géométrie GI – 3D devrait être le premier support à partir duquel on va faire « le choix des axiomes ». Le choix des axiomes est obligatoire pour pouvoir construire un référentiel théorique spécifique à un ETG - GII - 3D.

Comme nous l'avons déjà précisé, dans le paradigme de la géométrie GII, « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible ». Le choix des axiomes doit permettre de construire un lien important entre l'intuition, les figures à étudier, la réalité, l'espace d'étude et le raisonnement. Ce choix doit se faire lors du passage de GI à GII, mais en suivant le support théorique développé pour la géométrie plane.

1.5.B. À partir de traces plus particulières.

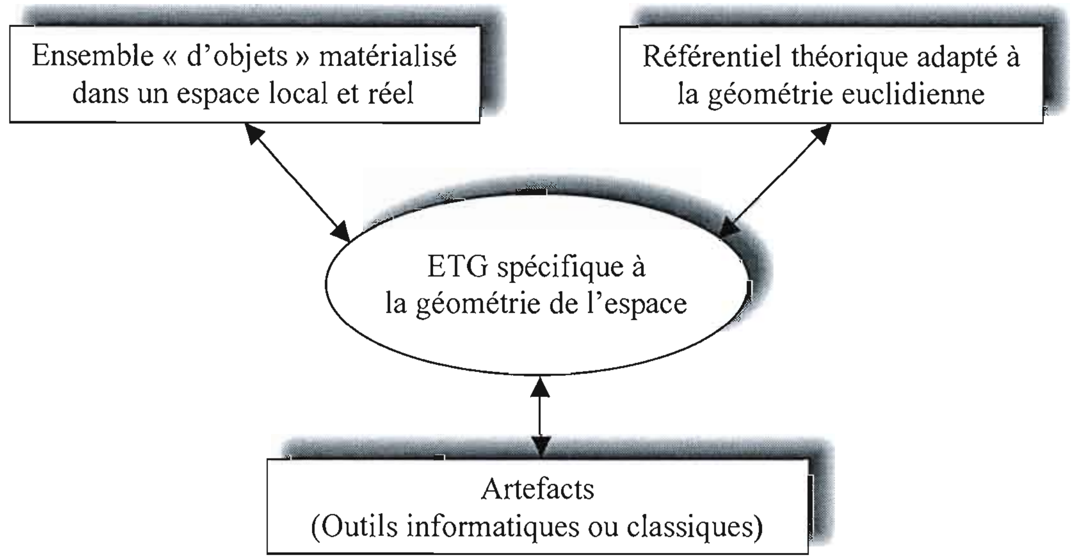
Étant donné que les premières connaissances de la géométrie correspondent aux notions les plus élémentaires (point, droite et plan), nous émettons l'hypothèse suivante entièrement liée à HP2 :

HP3. L'étude de la géométrie de l'espace GII – 3D doit passer, d'abord, par une étude approfondie du rapport qui s'établit entre les positions relatives des droites et des plans dans l'espace, afin de commencer la détermination de solides géométriques.

Le calcul des aires, des volumes ou les transformations géométriques à eux seuls (leur étude se fait dans le champ de la géométrie plane) ne peuvent développer le sens spatial. L'espace lui-même est une « connaissance » qui pose beaucoup de difficultés aux élèves. L'enseignement de la géométrie de l'espace, à partir des corps géométriques, peut soulever de profondes questions relatives à la notion d'espace.

Les aspects mentionnés ci-dessus induisent deux autres hypothèses qui vont faire l'objet d'une expérimentation développée au Chapitre II.

HP4. Si l'élève n'est pas habitué à penser dans l'espace (à partir de la position relative des droites et des plans dans l'espace), il va continuer à donner des solutions aux problèmes de l'espace dans la géométrie plane.
HP5. « Le sens spatial » se développe à partir du moment où l'élève développe des connaissances sur l'espace lui-même, sinon l'élève va donner la solution dans la géométrie plane.



(Schéma adapté pour la géométrie de l'espace, selon Houdement et Kuzniak)

L'articulation entre les trois composantes d'un espace de travail spécifique à la géométrie de l'espace demeure nécessaire pour construire les prémisses du développement du sens spatial. Les « définitions sensibles » qu'on utilise dans la pratique de la géométrie de l'espace ne peuvent pas se constituer en un modèle théorique. Un modèle théorique est structuré à partir des approches qui déterminent les éléments géométriques constitutifs. En fait, le programme suggère un retour d'ordre historique sur la géométrie euclidienne et sur ses éléments géométriques. Cependant, est-il nécessaire d'accorder un peu plus de temps à l'enseignement de la géométrie de l'espace, à partir des énoncés de la géométrie euclidienne, en accord avec l'approche euclidienne de la géométrie plane?

Dans le programme de premier cycle du secondaire, on trouve un paragraphe qui suggère une approche de la géométrie euclidienne :

> Pour soutenir l'élève dans l'organisation de ses savoirs et dans la structuration de ses démarches, pourquoi ne pas évoquer ceux qui ont jadis été confrontés aux mêmes problèmes? Si l'on parle aujourd'hui de géométrie euclidienne, c'est en l'honneur d'un mathématicien grec qui a construit un ensemble organisé d'éléments géométriques. Dans le déploiement du raisonnement déductif, l'élève devra s'initier à l'élaboration de démonstrations. Il pourra apprendre à cette occasion que le raisonnement déductif constituait pour Aristote le moyen privilégié d'accès au savoir et, pour Galilée et Descartes, l'occasion de produire une explication mathématique de phénomènes physiques.

Est-ce suffisant, pour aborder la géométrie 3D, de parler d'Euclide et de ses « Éléments » sans avoir une approche exacte sur les premiers six axiomes de la géométrie plane, auxquelles s'ajoutent encore quelques axiomes de la géométrie de l'espace? « L'espace de travail ne prend pas son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois composantes » (Houdement et Kuzniak, 2000, d'où le besoin de considérer la nécessité d'une géométrie de l'espace GI – 3D, mais bien orientée vers un ETG – GII – 3D. Une réflexion plus approfondie sur l'espace de travail et sur l'espace lui-même peut créer les prémisses d'une bonne construction sur la connaissance « espace » et sur le « sens spatial ». En effet, le sens spatial devrait être plus qu'un sens spatial développé dans un Géométrie GI.

L'étude de l'ETG, qui s'intéresse aux organisations et aux adaptations opérées par un individu qui effectue un travail de géométrie, a conduit les chercheurs à considérer différents types d'ETG : ETG de référence, ETG idoine et ETG personnel. L'espace de travail géométrique de référence, l'ETG de référence est un espace de travail idéal, défini en fonction de différents critères mathématiques. L'espace de travail idoine devient efficace si on réfléchit sur l'organisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. La compréhension de l'espace de travail idoine, par des élèves et par des enseignants, passe par les connaissances mathématiques et par les capacités cognitives. Cet espace est appelé ETG personnel.

> Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.
>
> (Houdement et Kuzniak, 2000)

La diversité des ETG de référence et des ETG idoines peut décliner « des malentendus pédagogiques dus à la diversité à la fois des ETG de référence et des ETG idoines ». Les aspects mentionnés ci-dessus mettent en évidence la nécessité de bien préciser les savoirs codifiés, dans le contexte d'un espace de travail de référence qui se veut efficace. Dans le cas de l'enseignement de la géométrie de l'espace, nous considérons qu'il reste encore du travail à faire, par les enseignants, sur les modalités de « mise en œuvre » des savoir codifiés de la géométrie de l'espace. Nous considérons qu'on ne peut pas parler du raisonnement déductif et d'initiation à l'élaboration de démonstrations sans avoir un référentiel clair de la géométrie plane et, aussi, de la géométrie de l'espace du type ETG – GII – 2D et ETG – GII – 3D. Ces référentiels, on doit les trouver autour de la géométrie euclidienne, pour éliminer les ambiguïtés quant au choix de l'espace de travail idoine. De plus, les calculs, les dessins des solides ou les transformations géométriques, qui visent surtout une géométrie plane du type GII – 2D et une géométrie de l'espace du type GI – 3D, ne peuvent pas développer « le sens spatial », qui représente en fait un but principal dans l'enseignement de la géométrie. L'articulation entre un ensemble d'objets matérialisés dans un espace local et réel, un référentiel théorique bien choisi et les artefacts constitue les vraies prémisses du développement du sens spatial. En ce sens, les « définitions sensibles », utilisées dans une géométrie GI – 3D, ne peuvent pas seules se constituer en un modèle théorique qui suppose l'existence des éléments géométriques constitutifs spécifiques, par exemple la notion de perpendiculaire dans l'espace liée à la notion de distance. Nous considérons que l'initiation dans la géométrie de l'espace doit se faire dans un premier temps, dans une géométrie du type GI – 3D, qui donne plus de sens à ces notions mais, qui nous conduit vers un espace de travail idoine spécifique à une géométrie GII – 3D.

L'émergence du choix de l'espace de travail pour la géométrie de l'espace est un premier pas pour mettre en accord le référentiel théorique, l'ensemble des objets et l'ensemble des artefacts. Tous ces objectifs doivent créer les prémisses du raisonnement déductif ainsi que celles de la solution des situations-problèmes spécifiques à la géométrie de l'espace.

CHAPITRE II

LA MODÉLISATION DE L'ESPACE : UNE EXPÉRIMENTATION.

2.1. Hypothèse

Nous avons formulé des questions de recherche à partir de perspectives très générales, qui visent la pratique de la géométrie au secondaire, pour arriver ensuite à limiter nos hypothèses de travail à un cadre très particulier, celui du passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace. En ce sens, la partie expérimentale du mémoire concerne l'articulation et le passage de 2D à 3D, dans la perspective d'une géométrie GI – 2D vers un GI – 3D. De ce point de vue, le cadre théorique de Houdement et Kuzniak utilisé au premier chapitre semble être insuffisant. Ce cadre théorique nous a donné les moyens nécessaires pour analyser le programme d'étude utilisé dans l'enseignement de la géométrie 2D ou 3D, mais il ne concerne pas l'articulation entre les deux géométries. À cet effet, nous allons utiliser pour la partie expérimentale un autre cadre théorique, à partir duquel on pourrait saisir la dynamique construite dans un passage 2D – 3D.

Dans le programme d'étude, nous avons soulevé certains passages qui font référence à ce que représente le « développement du sens spatial ».

> Les processus liés aux transformations et aux constructions géométriques servent à construire des concepts et à dégager des invariants et des propriétés afin de les réinvestir dans différents contextes et de développer le sens spatial.[81]

[81] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle,* chapitre IV, page 259.

Ainsi, nous avons remarqué que ce développement vise surtout la géométrie plane, même s'il y a quelques précisions par rapport à la géométrie de l'espace, comme dans le paragraphe qui suit :

> Pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée.[82]

Nous avons remarqué que dans la géométrie de l'espace, le développement du sens spatial se limite aux constructions géométriques et à la représentation des solides en trois dimensions. Aussi, la pratique de la géométrie de l'espace, conformément à ce que nous avons extrait du programme d'étude, vise les différents calculs des aires, des volumes ou des capacités. En ce sens, nous avons supposé que ces calculs, les dessins des solides ou les transformations géométriques, qui visent surtout une géométrie plane du type GII – 2D et une géométrie de l'espace du type GI – 3D, ne peuvent pas développer « le sens spatial ». Le développement du sens spatial, dans la géométrie 3D, passe par la compréhension de l'espace et de ses propriétés autour d'un référentiel ETG – 3D - GII, par la compréhension des propriétés dégagées par la représentation des solides dans un espace à deux dimensions à l'aide des artefacts et, en dernier lieu, par les allers-retours entre l'espace sensible et l'espace de représentation, pour y marquer les approches et les différences.

En ce sens, nous croyons que le « sens spatial » se complète dès le début par la compréhension de l'espace réel « ambiant » spécifique à une géométrie GI – 3D, comme support pour toutes les notions géométriques à apprendre ultérieurement. Ensuite, l'étape suivante semble être la compréhension de l'espace spécifique à une géométrie GII – 3D par la compréhension de l'articulation entre une GI – 2D vers

[82] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle,* chapitre IV, page 261.

une géométrie GII – 3D. Nous nous intéressons au passage d'un GI – 2D à GI – 3D, auquel se réfère les hypothèses 4 et 5.

HP4. Si l'élève n'est pas habitué à penser dans l'espace (à partir de la position relative des droites et des plans dans l'espace), il va continuer à donner des solutions aux problèmes de l'espace dans la géométrie plane.
HP5. « Le sens spatial » se développe à partir du moment où l'élève développe des connaissances sur l'espace lui-même, sinon l'élève va donner la solution de tout problème dans la géométrie plane.

La situation-problème que nous présenterons aux élèves vise deux aspects, entièrement liés aux deux dernières hypothèses de travail HP4 et HP5 : d'une part, les connaissances et les habiletés des élèves par rapport aux positions relatives des points, droites et plans dans l'espace, à partir des connaissances déjà acquises dans la géométrie plane et, d'autre part, une sensibilisation des élèves par rapport à la notion « d'espace ».

2.2. Cadre théorique spécifique.

Les deux dernières hypothèses de travail nous ont imposé de chercher un cadre théorique spécifique, dans lequel « l'espace » doit être bien mis en évidence lors de notre analyse de l'interférence et du passage d'une géométrie GI – 2D vers une géométrie GI – 3D qui tend, à son tour, vers une géométrie GII – 3D. Comme nous avons précisé, les hypothèses de travail HP 4 et HP5 concerne effectivement ce passage mais, aussi l'articulation entre les différents types d'espaces de travail.

La théorie des situations, initiée par Brousseau en 1983, a été à la base de plusieurs recherches en didactique de la mathématique, mais aussi, a conduit à la construction d'autres cadres théoriques, par exemple celui de Berthelot et Salin (2000). [83]

Brousseau a proposé « une situation fondamentale pour la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace.[84] » Pour Brousseau, les situations didactiques visent l'élaboration des connaissances de géométries utilisées dans la pratique de la géométrie, par la variation des composantes comme : détermination, communication, réalisation par tracés des formes et des dimensions de solides, déplacement de solides, etc. Ensuite, en limitant les informations de l'élève, on peut développer les différentes formes de ces connaissances, du modèle à la preuve.[85] Ainsi, Brousseau introduit les trois types d'espaces suivants : le micro-espace (lié à la manipulation des petits objets), le méso-espace (contrôlé par la vue, dans lequel le sujet se déplace) et le macro-espace (dont on ne peut avoir que des visions locales).[86]

Ensuite, Brousseau (1983) et Galvez (1985)[87] ont développé une théorie qui montre la pertinence de l'étude des interactions entre un sujet et les trois types d'espaces. Berthelot et Salin (2000)[88], en se référant aux travaux de Brousseau et Galvez, précisent que « les concepts de base qui caractérisent les rapports spatiaux

[83] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, pages 5-34.
[84] *Ibid.*, page 9.
[85] *Ibid.*, page 9.
[86] Pressiat A. & Combier G. (2001), *Apprentissage géométrique au début du collège*, Actes du colloque inter-IREM 1 cycle: Quelles géométries au collège? Geste physique, geste virtuel, geste mental, 21-23 juin; IREM de Montpellier.
[87] Galvez G. (Thèse C.I.I.P.N. Mexico février 1985, sous la direction de Brousseau G). "El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: una proposicion para la ensenanza de la géométria en la escuela primaria"
[88] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56.

correspondants ne sont pas nécessairement ceux de la géométrie.[89] »

À cet effet, Berthelot et Salin ont adapté les trois types d'espace aux concepts les plus élémentaires de la géométrie : le point, la droite, l'angle, le segment, la distance, la hauteur, la profondeur, la mesure, la forme, le lieu, le trajet, l'objet, l'espace, etc. Les définitions correspondent aux définitions données par Brousseau, auxquelles ont été ajoutées ces conceptions de base. On remarque que les traces et les définitions données aux micro-espace, méso-espace et macro-espace correspondent aux conceptions des élèves dans leur pratique de la géométrie. En ce sens, les chercheurs ont redéfini les trois types d'espace.

Le micro-espace est défini comme un espace « où les rapports spatiaux correspondent à la manipulation familière des petits objets. Il est associé à un domaine si familier au sujet que la plupart des problèmes qu'il y rencontre ne nécessitent pas de conceptualisation.[90] » Dans un micro espace, la résolution des problèmes est due à « une action dirigée par le sens sur des objets qui demeurent sous le contrôle de la vue et de la préhension.[91] »

> La notion centrale est l'objet. L'espace est constitué d'objets. Deux objets sont distincts si on peut les séparer par un espace(ment) que le sujet peut annuler dans l'instant. La notion de distance se distingue mal de celle d'espacement, qui n'a que deux valeurs pertinentes (il y a ou il n'y a pas d'espace entre les objets). La conception micro-spatiale de la longueur, qui peut être liée à l'identification des objets ou (des) parties d'objets, est plus proche de la notion géométrique. La notion de droite n'existe pas non plus, il n'y a que des traits. Il n'y a aucune raison de concevoir un trait comme un ensemble de points, c'est-à-dire de prendre le point de vue du professeur lorsqu'il parle de segment. La notion d'angle n'existe pratiquement pas dans

[89] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 16.
[90] *Ibid.*, page 16.
[91] *Ibid.*, page 16.

> ce rapport aux objets de petite taille, si ce n'est dans l'identification globale d'une forme.[92]

Dans notre expérimentation, le micro-espace correspond à l'espace de la feuille de papier, où les objets d'étude sont les triangles, les quadrilatères, les pyramides ou les prismes, sur lesquels, l'élève est constamment dirigé. Dans cet espace, l'élève reproduit les dessins correspondants à la tâche, mais il n'est pas obligé d'utiliser les propriétés des objets. Certaines caractéristiques des triangles ou des quadrilatères doivent être reconnues pour arriver à la tâche. En ce sens, l'élève utilise la feuille de papier pour reproduire d'une manière semblable des objets d'étude correspondants à une géométrie 2D (triangles, quadrilatères) ainsi que des objets d'études correspondants à une géométrie 3D (pyramides, prismes).

Le méso-espace est défini comme un espace où les rapports spatiaux « s'apparentent à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine de déplacements domestiques[93] », et « les actions du sujet se font dans une partie de l'espace sous le contrôle d'une vision partielle.[94] » Dans cet espace, les notions centrales sont celles de lieux, de trajets et d'objets. Il existe la conception de la longueur, articulée autour de la distance, de la profondeur, de la hauteur. Ainsi, une trajectoire est perçue comme un trait, une suite de positions temporelles. « Les angles permettent de repérer la position d'une ligne droite par rapport à une autre... L'espace - méso gagne à être représenté sur une feuille de papier et « se posent les questions des propriétés conservées.[95] »

---

[92] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, pages 16.
[93] *Ibid.*, page 17.
[94] *Ibid.*, page 17.
[95] *Ibid.*, page 17.

Comme nous l'avons souligné au début de ce chapitre, notre intérêt pour la partie expérimentale est représenté par l'articulation entre les différents types d'espace, lors du passage du 2D au 3D. En effet, la représentation des objets provenant de l'espace méso dans un espace micro passe par une forte conceptualisation de l'espace méso où, les trois dimensions des objets méso sont conceptualisées de façon naturelle.

Conceptualisation de « l'espace »
(L'élève doit avoir la « conscience »
de l'aspect
3D de l'espace)

Le micro-espace
(L'aspect 3D de l'espace n'est pas présent,
il doit être développé)

Le méso-espace
(L'aspect 3D de l'espace
est présent en mode naturel)

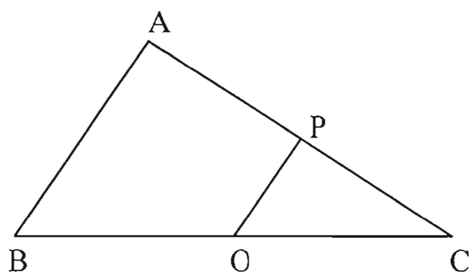
Résolution des situations-problèmes
(L'élève doit avoir la « conscience » qu'il donne des solutions
aux problèmes de géométrie, dans un micro-espace, mais qui
sont des situations qui proviennent de l'espace méso)

Donc, peu importe la géométrie dans laquelle on se situe, GI ou GII, l'élève doit conceptualiser l'espace dans des allers-retours entre le méso-espace et le micro-espace. Sans cette conceptualisation, le passage d'une géométrie GI – 3D vers une géométrie GII – 3D ne prend pas du sens dans la conscience de l'élève.

Dans le méso-espace, un point est vu comme l'intersection entre deux objets (dans notre cas : les bâtons) ou comme « un objet de dimensions minimales[96] » alors que,

[96] http://magesi.inrp.fr/seance.php?Rub=2&Id=16

dans l'espace micro (l'espace de la feuille de papier), il est vu comme l'intersection entre deux droites, entre une droite et un plan, entre deux ou plusieurs plans, etc. Ainsi, dans l'espace méso, les objets gardent leurs dimensions, alors que la modélisation de l'objet dans l'espace micro détermine un changement de la « taille » de l'objet et, même, de l'objet lui-même. Par exemple, si on prend un triangle quelconque et deux points qui appartiennent aux côtés du triangle par lesquels on trace un segment, la figure n'est plus un seul triangle.



Elle n'est plus la figure d'un triangle : elle pourrait être vue comme un triangle et un quadrilatère ayant un côté commun, ou comme un grand triangle à « l'intérieur » duquel il y a un autre « petit » triangle et un quadrilatère, etc. À ce moment, on pourrait se demander : combien de figures ai-je dessinées? Une seule figure (le grand triangle) à « l'intérieur » duquel il y a d'autres figures, ou les deux figures séparées (le petit triangle et le quadrilatère), ou les trois figures ensemble (parce qu'elles sont là, elles existent et sont dessinées). Dans l'espace micro, toutes ces variantes sont possibles.

Dans l'espace méso, qui représente en fait l'espace sensible, les objets sont indépendants les uns des autres. Nous pourrons avoir une relation univoque entre « une figure » et un objet qui occupe un espace. Par contre dans l'espace micro, cette relation change : on peut associer plusieurs dessins qui peuvent être associés à un même objet.

Dans le macro-espace, on parle surtout d'un travail d'ordre intellectuel sur des « représentations ». Dans cet espace, la perception n'est pas suffisante pour donner du sens aux rapports à l'espace.

> [Un macro-espace] correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'il est impossible pour le sujet d'obtenir une vision globale simultanée du secteur de l'espace avec lequel il est en interaction; on peut l'embrasser par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elle par les déplacements du sujet sur la surface terrestre.[97]

Pour orienter les déplacements, dans un macro-espace, il doit y avoir des repères bien identifiés et une représentation « globale » de l'espace. Dans cet espace, les notions importantes sont celles d'angle et de repérage. À cet effet, les chercheurs ont ajouté aux trois espaces les conceptions suivantes :

> Les repérages, les représentations et leurs articulations constituent les premiers problèmes à résoudre. Les moyens techniques pour déterminer un trajet dépendent du type de macro-espace qu'ils vont caractériser. Les angles y jouent un rôle essentiel.[98]

Pour chacun de ces types d'espace, le chercheur peut associer des notions géométriques (conceptions) et leurs représentations. La culture a une influence « naturelle » sur les connaissances géométriques. À ce sujet, les chercheurs remarquent :

> Les représentations obtenues n'ont aucune raison d'être articulées entre elles. Ce serait un des rôles de l'enseignement de la géométrie de développer ces articulations pour obtenir une représentation homogène de l'espace.[99]

---

[97] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, pages 17. Définition donnée par Brousseau.

[98] *Ibid.*, page 17.

[99] *Ibid.*, page18.

Ainsi, la représentation micro-spatiale est un outil important d'analyse des comportements d'élèves dans la pratique de la géométrie. À cet effet, Berthelot et Salin expliquent :

> La prise en compte de l'existence de ces représentations spontanées nous a permis de renouveler l'analyse de certaines erreurs des élèves dans le domaine de la géométrie : la presque totalité des problèmes leur est posée dans un contexte spécifique, l'espace de la feuille de papier qui présente un certain nombre de composantes contextuelles micro-spatiales. On peut donc s'attendre à trouver un mode de traitement micro-spatial de ces problèmes comme support des stratégies de base.[100]

Parmi les difficultés dues à la représentation des connaissances de l'espace dans un micro-espace, les chercheurs relèvent la notion de distance. Pour faire ici une parenthèse, nous remarquons qu'on se situe dans le domaine de la géométrie plane.

Ainsi, le cadre théorique développé par les deux chercheurs prend compte des différents aspects groupés autour de trois problématiques : la problématique géométrique, la problématique de modélisation, la problématique pratique.[101] Les trois problématiques sont représentées différemment, en fonction des connaissances que l'enseignant peut pratiquer par rapport aux connaissances de l'élève par rapport à l'espace.

Premièrement, Berthelot et Salin (2000) ont désigné la problématique de la géométrie : « les problèmes qui font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser les questions de consistance théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les

[100] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 18.
[101] *Ibid.*, pages 11-16.

Grecs.[102] » Comme dans le cadre théorique développé par Houdement et Kuzniak, nous retrouvons ici l'importance de bien choisir un espace de travail idoine, correspondant à une géométrie GII – 3D, qui soit dans l'esprit de la géométrie euclidienne et qui permette de développer de façon cohérente les connaissances sur l'espace.

Deuxièmement, Berthelot et Salin (2000) désignent la problématique de modélisation : un « type de rapport avec l'espace, finalisé en partie par l'efficacité dans l'espace sensible ou objectif.[103] » En construisant « un modèle », l'élève cherche une solution qui peut dépasser le problème immédiat, qui peut être partagée avec les autres et qui doit être prouvée. Le spatio-géométrique signifie : « la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique.[104] » La modélisation de l'espace est accompagnée des représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier. Les modèles sont tirés de domaines techniques ou scientifiques. Les contraintes spécifiques à chaque modèle peuvent être utilisées pour initier les élèves à la géométrie comme modèle de l'espace. Donc, la problématique de la modélisation de l'espace, selon Berthelot et Salin (2000), correspond en grandes lignes à l'émergence du choix de l'espace de travail développé dans le cadre théorique de Houdement et Kuzniak (2006).

Par la problématique pratique, Berthelot et Salin (2000) entendent : « le type de rapport caractéristique d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques, particulièrement importants dans la vie de tous les jours, dans lesquels l'individu contrôle ses rapports spatiaux de manière immédiate, empirique et contingente.[105] » Il s'agit de problèmes

[102] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 11.
[103] *Ibid.*, page 11.
[104] *Ibid.*, page 12.
[105] *Ibid.*, page 13.

de tous les jours, dans un milieu où le processus de validation n'a rien à voir avec le savoir géométrique, il se fait par l'évidence.[106] On peut remarquer que la problématique pratique fait recours à un espace de travail du type GI – 3D

2.3. Méthodologie de recherche.

> Les activités d'exploration sont des expériences riches parce qu'elles permettent à l'élève de conjecturer, de simuler, d'expérimenter, d'argumenter, de construire ses savoirs, et de tirer des conclusions. Par exemple, l'analyse de différents aspects des positions relatives de trois droites dans un même plan offre à l'élève l'occasion de dégager plusieurs propriétés à partir desquelles il pourra valider d'autres conjectures ou résoudre certaines situations-problèmes.[107]

Ce texte, extrait du programme d'étude, soulève une question : dans quelle mesure l'analyse des positions relatives de « trois » droites dans l'espace, mais pas dans un même plan, nous offre-t-elle l'occasion de dégager les propriétés nécessaires à la validation des conjectures spécifiques à la géométrie de l'espace? C'est dans ce sens que nous avons conçu les situations-problèmes, présentées aux élèves, et que nous avons utilisé un certain nombre de « droites », six ou douze, pour la construction des objets dans le plan de la feuille de papier, mais qui sont des objets d'étude qui proviennent de l'espace tridimensionnel.

Nos outils de recherche sont groupés autour de deux étapes principales : une étape de modélisation, la Tâche 1 et la Tâche 2, et une étape pratique, la Tâche 3.

---

[106] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 13.

[107] *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, chapitre VI, page 237.

Dans la Tâche 1, l'élève produira des dessins à partir des connaissances qu'il avait acquises dans la pratique de la géométrie plane, même si les réponses aux questions se prêtent aussi à des réponses dans la géométrie de l'espace. Cette Tâche correspond à la problématique de modélisation dans un espace 2D.

Dans la Tâche 2, l'élève est pratiquement obligé de répondre à des questions qui sont au début de l'apprentissage de la géométrie de l'espace même s'il n'a aucune indication en ce sens. C'est dans la Tâche 2, qu'on va voir comment l'élève va s'ouvrir au passage du 2D au 3D. L'énoncé de la Tâche 2 est en fait le même que dans la Tâche 1, mais avec des restrictions imposées supplémentaires, les bâtons ont la même longueur, ce qui doit lui faire penser à l'espace. Cette Tâche correspond à la problématique de modélisation de l'espace 3D dans un espace 2D.

La Tâche 3, c'est l'étape de manipulation des objets. Cette étape correspond à la problématique pratique définie par Berthelot et Salin. Elle veut confirmer le lien entre la problématique de la géométrie 3D et la problématique de modélisation dans un espace 2D. Nos outils sont des objets de l'espace qui correspondent en totalité aux restrictions imposées à la Tâche 2 (6 ou 12 bâtons ayant la même longueur).

2.3.1. Description de la séquence de la situation-problème.

La séquence se déroulera pendant une heure de cours avec des élèves du secondaire, premier et deuxième cycle, deux classes par niveau, dont une classe régulière et une classe enrichie (environ 30 élèves par classe). Nous donnerons d'abord aux élèves un Test sur papier contenant deux tâches, la Tâche 1 et la Tâche 2. Ces deux tâches consistent à résoudre chacune une situation problème. Elles sont conçues pour que tous les élèves soient en mesure de donner des solutions aux situations-problèmes en travaillant avec des outils comme, la règle, les crayons ou la gomme à effacer.

Pendant la séquence, le chercheur va être aussi l'enseignant de la classe. Au début, il expliquera en quoi consistent les trois Tâches (environ 5 minutes). Il répondra aux questions des élèves, mais il ne donnera pas de détails liés aux tâches qui pourraient induire le passage du 2D au 3D dans la conscience des élèves.

Tâche no 1 (environ 20 minutes)

1. Si on a 6 bâtons (leur longueur n'est pas importante), est-ce qu'on pourrait construire 4 triangles avec ceux-ci ?

Indication : Essayez de dessiner ce que vous imaginez et expliquez en quelques mots ce que vous avez obtenu !

2. Si on a 12 bâtons (leur longueur n'est pas importante), est-ce qu'on pourrait construire 6 quadrilatères avec ceux-ci ?

Indication : Essayez de dessiner ce que vous imaginez et expliquez en quelques mots ce que vous avez obtenu !

Le contenu de la Tâche1 reste dans la géométrie plane et vise un retour sur les connaissances : triangles, quadrilatères, polygones et leurs propriétés. En effet, les élèves doivent dessiner, sur la feuille de papier, des triangles et des quadrilatères à partir de propriétés qu'ils doivent reconstituer et reconnaître dans l'énoncé. À cet effet, il devrait dessiner des polygones avec des côtés et des intérieurs communs ou avec des côtés qui se coupent. L'enseignant ne donnera pas aux étudiants des indications qui pourraient conduire vers les solutions de la tâche.

Tâche no 2 (environ 15 minutes)

Pour les deux problèmes présentés à la « Tâche no 1 », est-ce que vous avez des solutions dans le cas où les bâtons sont de même longueur ?

Indication : Essayez de dessiner ce que vous imaginez et expliquez en quelques mots ce que vous avez obtenu !

Dans la Tâche 2, les restrictions (la même longueur) ajoutées aux contraintes (6 segments = 4 triangles, 12 segments = 6 quadrilatères), obligent, pour résoudre le problème, à construire « le passage » vers l'espace. Les élèves doivent, en effet, imaginer et dessiner des pyramides et des prismes, qui satisferont les conditions imposées à la Tâche 2. Comme dans la Tâche 1, l'enseignant ne donnera pas des indices qui pourraient faire l'élève à chercher les solutions dans l'« espace ».

Sur une feuille seule est indiqué un espace pour mettre les noms des élèves et une proposition qui indique le travail à faire :

Tâche no 3 (environ 20 minutes)
On va faire des constructions!

Après que l'enseignant ait ramassé les feuilles avec les Tests, il demandera aux élèves de former des groupes de trois ou quatre élèves. Dès que les groupes sont formés, il donnera à chaque groupe 12 bâtonnets en plastique comme ceux qu'on utilise pour mélanger le café et une pâte adhésive (utilisée pour coller des affiches au mur). Ensuite, l'enseignant demandera aux élèves de reproduire la Tâche 2, mais cette fois-ci, en utilisant les bâtonnets. Cette Tâche est consacrée à la partie « manipulations des objets ». Elle représente la partie qui confirme la possibilité de construire les objets demandés à la Tâche 2. En ce sens, l'élève a la possibilité de transposer ce qu'il avait pensé sur l'espace de la feuille de papier dans un espace réel.

Donc, lors de la première étape, la Tâche 1 et la Tâche 2, l'élève sera « mis en situation ». Il aura à reconnaître les contraintes d'un problème de la géométrie plane ou de la géométrie de l'espace et à dessiner des polygones ou polyèdres dans certaines conditions. On voit bien les limites de l'espace de travail par rapport aux outils : la feuille de papier, la règle et les crayons sont toujours utilisés pour représenter des objets d'étude de la géométrie dans un espace qui est fortement à deux dimensions. La deuxième étape, « de manipulation », la Tâche 3, sera celle par laquelle l'élève arrive à donner des solutions aux problèmes de « l'espace » 3D. Nous croyons que, dès qu'il va avoir sur la table des outils qui ne sont pas utilisés dans les représentations sur la feuille de papier, les bâtonnets et la pâte adhésive, il devrait remarquer que les contraintes de la Tâche 2 lui imposent la construction des vrais « objets » en trois dimensions: des prismes ou des pyramides.

Nous ne nous sommes pas intéressés à vérifier la perfection des constructions (ou des dessins) en 2D ou 3D. Ainsi, nous considérons que, dès que l'élève aura dans ses mains les bâtonnets, il construira avec facilité les objets en 3D. Étant donné que la partie manipulation sera un travail d'équipe, on pourrait penser que des élèves qui n'ont pas eu de réponses à la Tâche 2 vont alors comprendre qu'il s'agit de constructions d'objets en 3D. En ce sens, nous sommes surtout intéressés à observer comment l'élève comprend la Tâche 2 : dans quelle mesure il peut remarquer que les restrictions ajoutées aux contraintes des problèmes de la Tâche 1 (qu'il a déjà résolus dans la géométrie plane) lui imposent des solutions qu'il doit chercher dans l'espace sensible, mais, en travaillant seulement sur la feuille de papier. En ce sens, nous allons faire une analyse des résultats en regardant seulement la Tâche 1 et la Tâche 2; autrement dit, le travail que l'élève a fait dans un espace 2D (sur la feuille), mais qui comporte des contraintes qui mènent à l'espace 3D.

Aussi, il nous semble intéressant de regarder s'il y aura des différences majeures entre les productions selon les différents niveaux du secondaire concernant le passage du plan à l'espace. À cet effet, nous allons faire une analyse quantitative et qualitative des résultats des élèves.

Comme nous l'avons précisé, nos intérêts pour les situations-problèmes restent dans la zone du passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace. Si on parle de la géométrie plane ou de la géométrie de l'espace, l'élève va travailler les situations-problèmes dans un espace spécifique : celui de la feuille de papier. Le passage du plan à l'espace devrait se faire seulement dans la tête de l'élève. Les contraintes, qu'un problème de géométrie de l'espace lui pose, devraient lui faire penser sur le plan comme dans l'espace.

2.3.2. Analyse *a priori.*

L'histoire nous a montré que la connaissance « espace » et les modalités par lesquelles on essaie de représenter ses « propriétés » dans un plan en deux dimensions conduisent à des difficultés qui n'ont été dépassées qu'à la Renaissance. Ainsi, le référentiel théorique spécifique à la géométrie de l'espace, qui est construit dans l'esprit de la géométrie euclidienne (support théorique pour la géométrie plane) nous a conduit à émettre les hypothèses de travail HP4 et HP5. Notre analyse touchera plus spécifiquement l'aspect « 3D ». Dans quelle mesure, l'élève pourra donner une solution aux deux problèmes en utilisant les moyens de l'espace micro, alors que la solution, pour la deuxième Tâche, doit lui faire penser à l'espace méso?

En ce sens, pour la deuxième tâche, nous avons posé les problèmes dans un micro-espace, l'espace de la feuille de papier, mais sa résolution nécessite un transfert dans un méso-espace. Au début, on pourrait croire que les situations-problèmes sont faciles et que leurs solutions couvrent les connaissances des élèves, que ce soit dans un micro-espace, l'espace de la feuille de papier ou dans le méso-espace, l'espace où l'élève développe naturellement des connaissances géométriques. Toutefois, nous avons conçu les problèmes pour qu'ils puissent atteindre simultanément les deux espaces. C'est la raison pour laquelle nous pourrions croire que l'élève aura des difficultés dans le traitement de l'information.

Les concepts que nous voulons que les élèves utilisent, dans le cadre ce ces tâches, visent la géométrie plane, mais aussi la géométrie de l'espace. Nous les énumérons dans ce qui suit.

Figures planes

I. Triangles
   - Quelconques : avec tous les angles aigus ou, un angle obtus et deux angles aigus.
   - Particuliers : isocèles, équilatéraux.
   - Semblables ou isométriques.

II. Quadrilatères
   - Quelconques.
   - Particulier : parallélogramme, rectangle, carré, losange, trapèze.

III. Polygones avec 3, 4, 5, 6 côtés ou plus (triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones, etc.).

Solides

I. Prismes droits
   - Le prisme droit ayant pour bases des parallélogrammes particuliers (carrés ou losanges) et pour les faces latérales des carrés ou des losanges.
   - Le prisme ayant les bases carrées et les faces latérales carrées (le cube).

- Le prisme ayant les bases carrées et les faces latérales losanges (le prisme oblique);
- Le prisme ayant pour bases des losanges et pour faces latérales des losanges (le prisme oblique ayant pour bases des losanges).

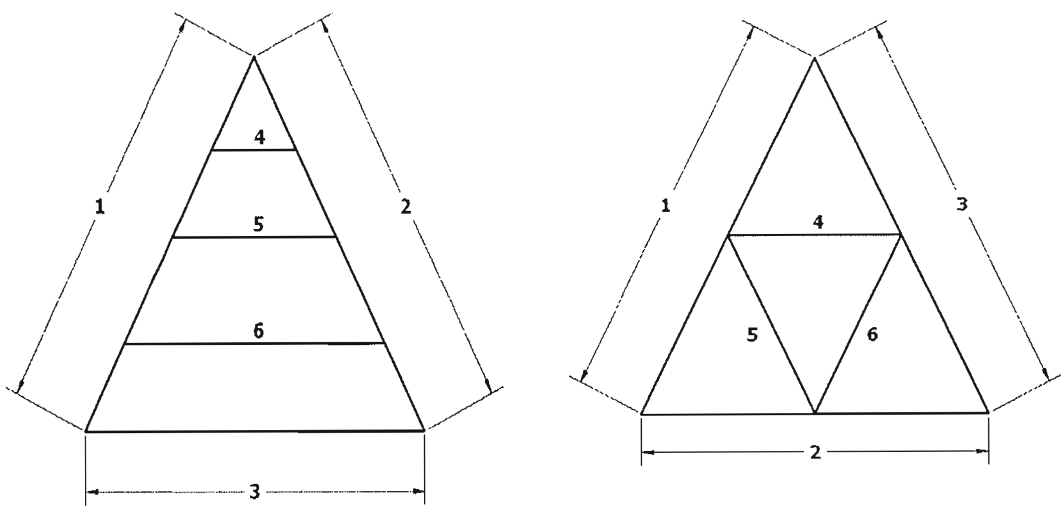
II. Pyramides droites

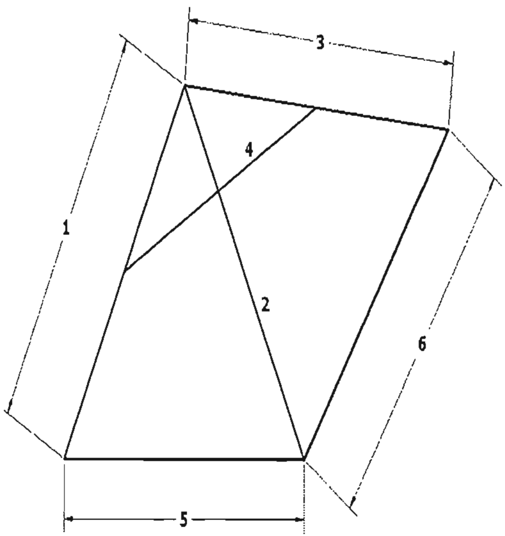
- Tétraèdre régulier.

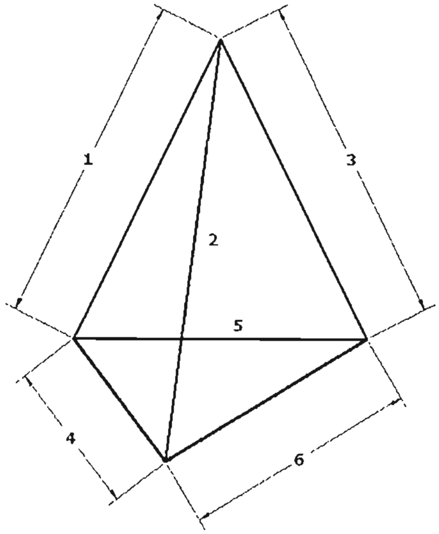
Parmi les procédures que nous attendions pour la Tâche no 1 et la Tâche no 2, nous allons mettre en évidence certaines possibilités de solutions d'élèves.

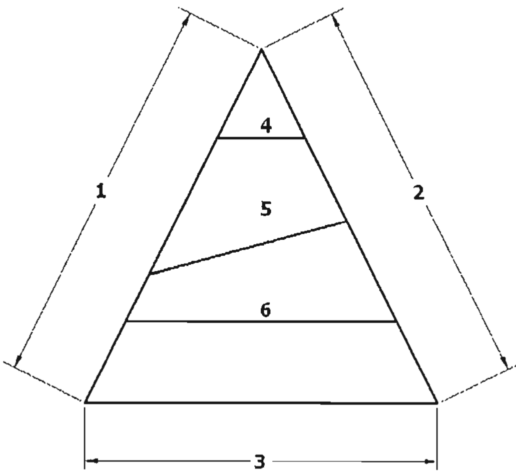
Tâche no 1:

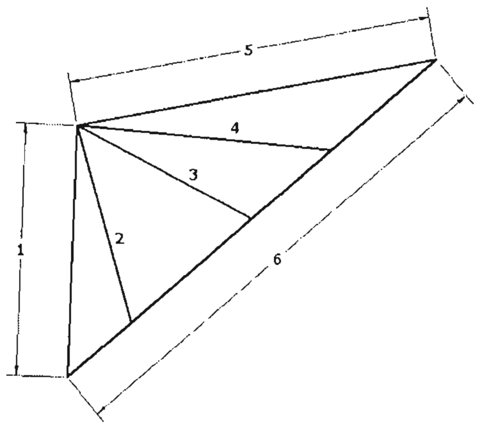
Remarquons que certaines figures planes peuvent faire penser à une présentation 2D d'un polyèdre et donc peut être interprétée comme une solution 3D de la tâche.

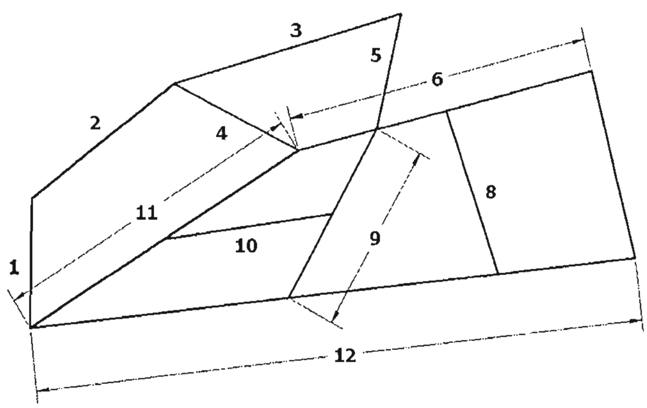


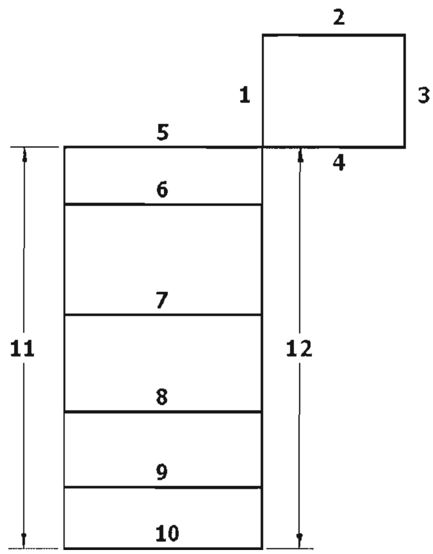

3
4
1
2
6
5

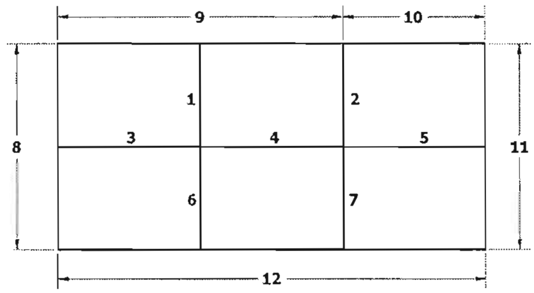

1
3
2
5
4
6

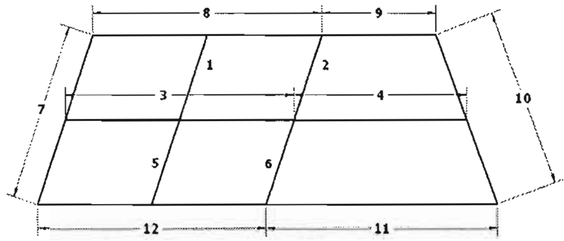

4
1
5
2
6
3

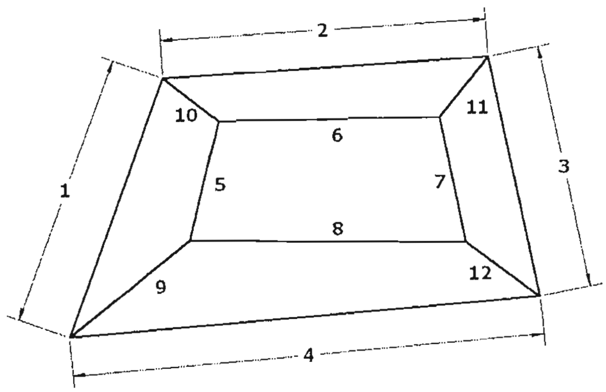

5
4
3
1
2
6

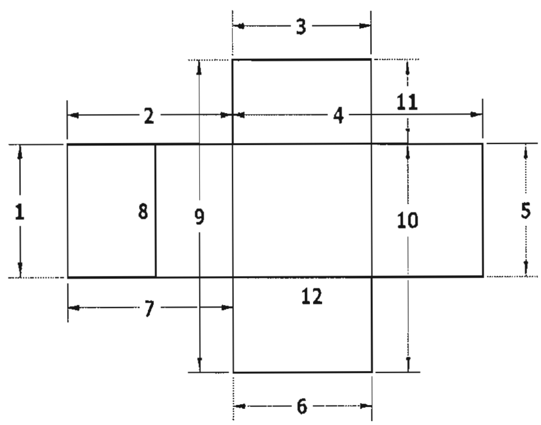

3
5
6
2
4
11
8
1
10
9
12

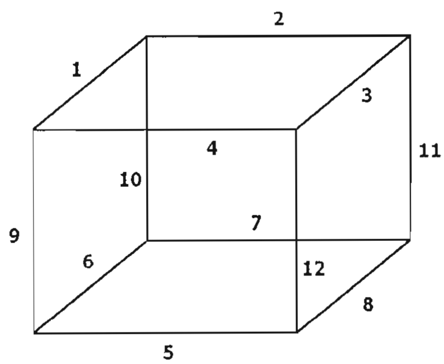

2
1
3
5
4
6
7
11
12
8
9
10

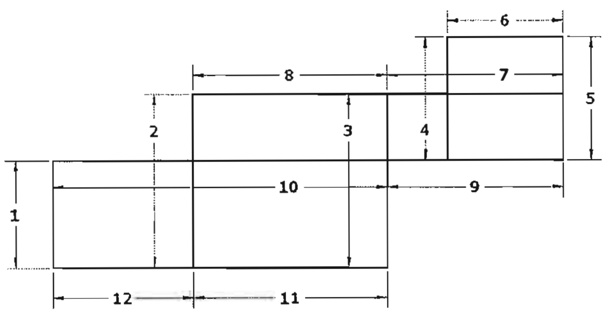

9
10
1
2
8
3
4
5
11
6
7
12

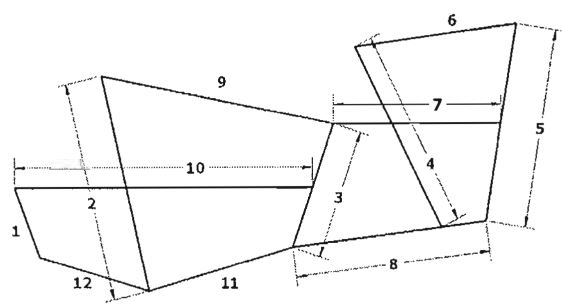

8
9
1
2
7
3
4
10
5
6
12
11


2
10
11
6
1
5
7
3
8
9
12
4

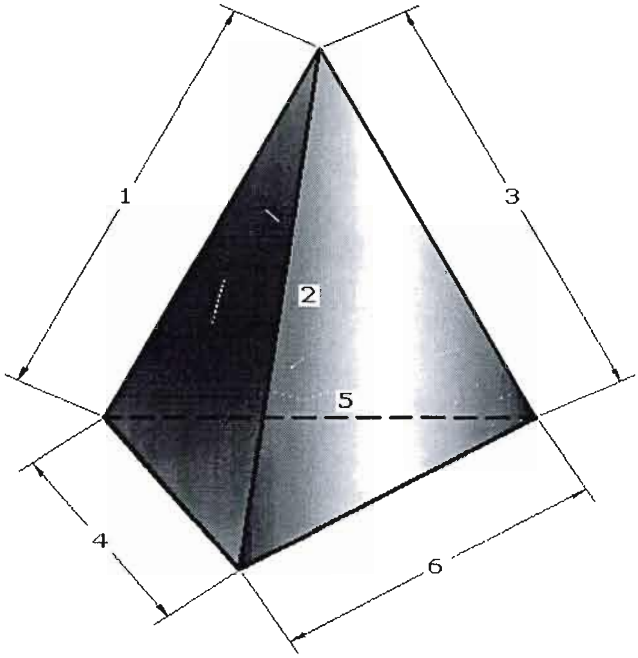

3
2
4
11
1
8
9
10
5
7
12
6

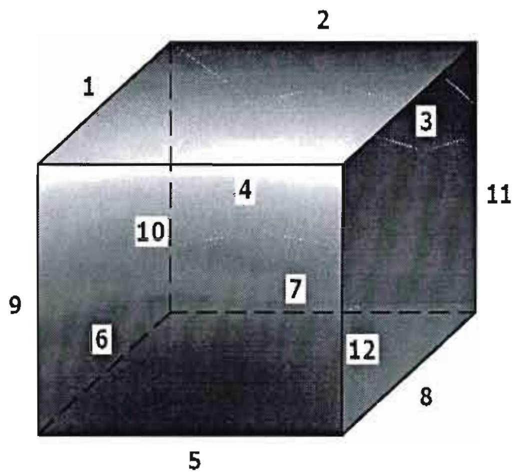

2
1
3
4
11
10
9
7
6
12
8
5

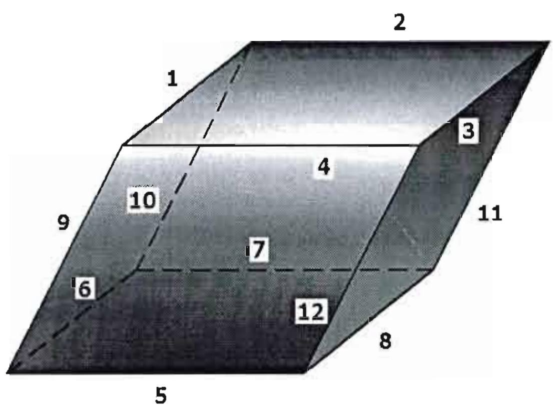

6
8
7
5
2
3
4
10
9
1
12
11


6
9
7
5
10
4
2
3
1
12
11
8

Tâche no 2 :







Nous croyons que le traitement micro-spatial va rester présent même si les informations devraient produire des connaissances spontanées qui couvrent l'espace méso. Les allers-retours entre les deux espaces sont nécessaires pour que l'élève donne une solution.

Dans « l'hypothèse des représentations spontanées », on considère que les représentations des connaissances sur l'espace 2D « n'ont aucune raison d'être articulées entre elles.[108] » En géométrie, une partie des erreurs persiste parce que « la presque totalité des problèmes leur [les élèves] est posée dans un contexte spécifique, l'espace de la feuille de papier [qui] présente un certain nombre de composantes contextuelles micro-spatiales.[109] » Cet aspect est plus puissant quand on parle de la géométrie de l'espace. Généralement, la représentation d'un « objet » dans l'étude de la géométrie plane est différente de la façon dont on le représente dans la géométrie de l'espace. Dans la géométrie de l'espace avec une représentation dans le plan, les angles ne gardent pas leur mesure exacte; dans certaines conditions, les longueurs ne sont pas les mêmes, parfois une longueur qui est « naturellement » plus grande qu'une autre pourrait être vue comme plus petite; ainsi, les « distances », comme définition et représentation, ne sont pas les mêmes, etc. La « problématique de modélisation » implique un type de rapport avec l'espace.

Dans la géométrie euclidienne, que ce soit la géométrie plane ou la géométrie de l'espace, les modalités de représentations ont été explicitées. Nous les appliquons en pratique, et la perspective cavalière s'ajoute bien à cela. Cependant, doit-on insister sur l'espace lui-même et soulever, dans la conscience de l'élève, avant toute étape de modélisation, les différences et les approches qu'on pourrait avoir au moment du

[108] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 18.
[109] *Ibid.*, page 18.

passage « dans la modélisation »? Pour l'élève, l'espace ne pose pas de problèmes. C'est autour de lui, il le voit, il le sent, il existe dans sa façon de vivre, c'est là. A-t-il toutefois une conscience claire de « l'espace » au moment où il construit un « modèle »? Nous croyons qu'il reste ici un travail à faire par l'enseignant, c'est-à-dire de mettre l'élève en situation de se poser des questions, de soulever son intérêt sur l'espace. Le référentiel théorique, qui construit un passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace, passe par la connaissance « espace », mais aussi par la conscience de l'espace et pour l'espace. Les différences que le micro-espace crée au moment de la modélisation de l'espace donnent à l'élève l'impression qu'il se situe dans autre monde, qui est en dehors de lui.

C'est en ce sens que nous voyons « l'espace » comme une connaissance. Dans la Tâche 2, nous avons omis intentionnellement des informations qui pourraient suggérer à l'élève des moyens clairs pour qu'ils puissent arriver à la solution de la Tâche.

La simplicité de la solution de la Tâche 1 réside dans le fait que les élèves sont mis en face d'un problème qui ne nécessite pas beaucoup de connaissances géométriques. La longueur des bâtons fait partie de l'objet, on n'a pas à utiliser les notions comme celles de droite ou de segment. Aussi, il n'est pas nécessaire de résoudre le problème en utilisant d'autres notions géométriques, par exemple la notion de distance ou d'angle. Nous croyons que l'élève va trouver plusieurs solutions au problème, tout en se limitant à l'espace de la feuille de papier (micro-espace).

Cependant, si on lui pose la question « Est-ce que vous avez des solutions dans le cas où les bâtons ont la même longueur? » (Tâche 2), il est possible que les élèves aient des difficultés. La « représentation » pour la première Tâche est plus simple du point de vue de sa réalisation effective dans un espace 2D. En revanche, la question ci-dessus mène à une situation qui oblige à un passage vers l'espace 3D.

On voit bien, dans ces deux Tâches, l'opposition de deux situations : d'une part une représentation sans avoir de restrictions (la longueur n'est pas importante), et d'autre part, la possibilité de réaliser une figure en respectant des contraintes (les bâtons ont la même longueur).

Notre analyse vise surtout la connaissance « espace ». En ce sens, nous croyons que les élèves vont avoir de la difficulté à trouver une solution à la deuxième Tâche. Il est possible que la plupart des élèves du premier cycle du secondaire ne soient pas en mesure de donner une solution à la deuxième Tâche : cela peut être dû soit au fait qu'ils n'ont pas eu l'occasion d'étudier les objets de la géométrie de l'espace, soit parce qu'ils n'ont pas pensé à l'espace comme « lieu » pour tous les objets d'étude de la géométrie, soit parce qu'ils ne sont pas en mesure de dessiner les objets. Cette supposition inclut le fait que le contrat didactique favorise une certaine inertie en ce qui concerne le passage d'un espace de travail à l'autre.

Nous mettons en doute la justesse de la première supposition. Le dessin d'un prisme ou d'une pyramide peut avoir des imperfections, mais à côté de la figure, l'élève peut écrire qu'il s'agit d'un objet qui fait partie de l'espace, un objet qu'il a eu l'occasion de connaître dans son histoire scolaire ou en dehors de l'école. En ce qui a trait à la troisième supposition, « ils ne sont pas en mesure de dessiner » les objets, nous la mettons aussi en doute. Probablement que beaucoup d'élèves ont « étudié » au primaire les corps géométriques et probablement qu'ils ont eu aussi l'occasion de les dessiner. La deuxième supposition risque donc d'être celle qui est plus souvent en cause.

Nous avons choisi de donner le test à des élèves de tous les niveaux du secondaire pour savoir s'il y a une différence entre ce qui se passe au premier cycle et ce qui se passe au deuxième cycle. Étant donné que, effectivement, les élèves du premier cycle n'ont pas touché à la géométrie de l'espace, il peut être intéressant d'observer s'il existe vraiment une différence entre les deux cycles.

Nous croyons que les élèves ne vont pas prendre en considération les possibilités du 3D au début de la Tâche no 3. Nous supposons que, au début, la grande majorité des élèves va continuer de faire avec les bâtons ce qu'ils ont « dessiné » sur la feuille de papier. Nous supposons que, même s'ils ont à leur disposition des objets qui proviennent de l'espace 3D, ils vont continuer de tenter de donner la solution du problème dans un plan 2D (sur la table, comme sur la feuille de papier). Ils vont « construire » dans un espace en trois dimensions, ce qu'ils ont « dessiné » en 2D : des triangles et des quadrilatères.

Cet ancrage dans un micro-espace (l'espace de la feuille de papier ou la surface de la table), nous supposons qu'il va rester présent chez les élèves du premier cycle autant que chez ceux du deuxième cycle du secondaire. Nous croyons que les élèves de quatrième et de cinquième secondaire seront plus débrouillards par rapport à la Tâche no 3. Dans méso et macro-espace, la notion de distance a surtout un aspect pratique. On considère les distances comme des trajets possibles des objets. Ainsi, la conception de longueur dans la conscience de l'élève « est articulée avec celles de distance, de profondeur, de hauteur.»

L'aspect pratique disparaît au moment de la transposition des « distances » dans un micro-espace. Nous considérons que ce changement de la taille de « la distance » par le passage du méso (et macro-espace) dans un micro-espace crée des confusions si l'élève n'est pas habitué à « visualiser l'espace » dans ses démarches de résolution de problème. Comme nous l'avons précisé, les allers-retours entre les deux espaces sont nécessaires pour que l'élève trouve une solution à la Tâche no 3.

Conceptualisation de « l'espace »
(L'élève doit avoir la « conscience »
de l'aspect
3D de l'espace)

Le micro-espace
(L'aspect 3D de l'espace n'est pas présent,
il doit être développé)

Le méso-espace
(L'aspect 3D de l'espace
est présent en mode naturel)

Résolution des situations-problèmes
(L'élève doit avoir la « conscience » qu'il donne des solutions
aux problèmes de géométrie, dans un micro-espace, mais qui
sont des situations qui proviennent de l'espace méso)

Dans le contexte dans lequel la « problématique pratique » peut construire le lien entre la « problématique de géométrie » et la « problématique de modélisation », nous croyons qu'à tous ces aspects s'ajoute la problématique de l'espace ou le « problème de l'espace ».

Nous considérons que la majorité des élèves, surtout ceux de première, de deuxième et de troisième année du secondaire, vont tenter de donner des réponses pour la deuxième Tâche, en gardant « leurs habitudes » de résolution de la première Tâche. En ce sens, nous évaluons que l'élève va continuer de donner des solutions aux problèmes de l'espace selon les caractéristiques des objets géométriques développés dans un micro-espace, étant donné qu'il n'est pas habitué à « penser » sur l'espace-même. Cet aspect est entièrement lié à l'hypothèse HP5.

Conceptualisation de « l'espace »
(Dans la conscience de l'élève, à travers
ses connaissances spontanées)

Le micro-espace ⟷ **Le méso-espace**

(L'espace de la feuille de papier)

(L'espace où l'élève développe de façon naturelle les connaissances géométriques)

Résolution des situations-problèmes
(L'élève doit avoir la « conscience » qu'il donne des solutions aux problèmes de géométrie, dans un micro-espace, mais qui sont des situations qui proviennent de l'espace méso ou macro)

Le changement de la « taille » du micro-espace au méso-espace pourrait imposer le changement des « instruments ». À cet égard, nous prenons les idées de Rabardel [110] (1999) sur l'approche instrumentale en didactiques des mathématiques. En fonction des instruments qui leur ont été fournis, les élèves pourraient êtres confrontés à des aspects différents pour le même « objet géométrique » et, implicitement, à des « propriétés » différentes. Notre activité veut dépasser ce problème créé par le changement d'espace. À cet effet, nous avons pris en compte la partie « manipulation des objets » pour construire un lien véritable entre les deux espaces : des concepts géométriques identiques à ce que l'on retrouve dans les deux espaces, mais exprimés de façon différente.

Nous allons considérer comme étant correctes les figures que nous avons données comme procédures attendues. Dans les Tâches 1 et 2, même si on parle des bâtons (l'espace méso), l'élève utilisera comme représentation de cet objet un segment

---

[110] RABARDEL P. (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Conférence, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, vol 1 pp. 203-213.

(l'espace micro) sur lequel on peut considérer une infinité de points, et implicitement une infinité de possibilités de diviser le segment en plusieurs segments. Si nous ne tenons pas compte des possibilités de modélisation dans l'espace micro, alors les solutions, pour les deux premières tâches, peuvent être perçues comme étant dans l'espace méso. Comme nous l'avons remarqué, dans l'espace micro, on peut associer plusieurs dessins à un même objet d'étude.

En revenant sur l'hypothèse HP4, nous considérons que plusieurs élèves ne vont pas trouver une solution pour la deuxième Tâche. Dans la résolution de cette Tâche, l'élève doit « établir un type de rapport » avec l'espace méso. Par exemple, en dessinant les prismes dont toutes les faces sont des losanges ou toutes les faces sont des carrés ou les bases des carrés et les faces latérales des losanges, ou les bases des losanges et les faces latérales des carrés (12 bâtons ayant la même longueur = 6 quadrilatères), l'élève peut établir les positions relatives des droites dans l'espace.

2.4. Analyse des résultats.

Dans cette section, nous analyserons d'abord de façon quantitative puis qualitative les résultats de notre expérimentation.

2.4.1. Analyse quantitative des résultats.

Au début de la séquence d'enseignement, le chercheur, qui a aussi été l'enseignant de la classe, a lu l'énoncé de la tâche et a répondu aux questions des élèves pour clarifier en quoi consistaient la Tâche no 1 et la Tâche no 2. Toutes les réponses sont restées près de l'énoncé, sans entrer dans les modalités de la résolution du problème. Le chercheur a alloué environ 5 minutes pour clarifier les aspects mentionnés ci-dessus, et donner les feuilles nécessaires au Test. Le rôle du chercheur, tout au long de la séquence, a été celui d'un observateur, d'un guide dans la compréhension de la situation.

Pendant le déroulement de la séquence, les élèves ont posé quelques questions, mais les réponses du chercheur n'ont pas donné d'indices qui auraient pu suggérer des solutions dans la géométrie de l'espace. Pour la résolution de la situation-problème, les élèves ont eu à leur disposition environ 35 minutes pour réaliser les deux premières Tâches. À la fin, le chercheur a ramassé les Tests et les réponses.

Pendant la « manipulation » des bâtonnets, Tâche 3, les élèves d'une même équipe ont discuté entre eux, ont donné différentes solutions et se sont posés des questions par rapport aux deux premières Tâches. Quelques-uns ont dit, en se référant aux corps géométriques : « ...Ah! C'est ça, ce que vous avez voulu qu'on « dessine »! »

Nous avons donné le test à des élèves du secondaire de tous les niveaux, deux classes par niveau, une classe régulière et une classe enrichie, sauf pour les élèves de troisième année de secondaire pour laquelle nous avons donné le test à une seule classe. Notons dès maintenant qu'il n'y a pas vraiment de différence entre les réponses des élèves qui proviennent d'une classe régulière et ceux d'une classe enrichie.

Le nombre d'élèves qui ont réussi à donner une réponse à la deuxième Tâche est réparti à peu près en mode égal entre les deux types de classes. C'est pourquoi nous n'avons pas spécifié cette distinction dans ce qui suit. Nous allons donc prendre en considération le nombre total des élèves par niveau et le nombre total des élèves du secondaire qui ont participé à la recherche.

Dans le tableau 1, nous allons donner le nombre d'élèves qui ont réussi à donner une solution à la Tâche no 1.

Secondaire	Nb. d'élèves	Nb. d'élèves qui ont réussi (6 bâtons= 4 triangles)		Nb. d'élèves qui ont réussi (12 bâtons= 6 triangles)	
I	72	68	94.44%	56	77.77%
II	64	64	100%	61	95.31%
III	32	30	93.75%	29	90.62%
IV	67	66	98.50%	63	94.02%
V	57	57	100%	57	100%
Total	292	285	97.60%	266	91.09%

Tableau 1.

Dans le tableau 2, nous donnons le nombre d'élèves qui ont réussi à donner des solutions à la Tâche no 2. Nous n'entrerons pas dans les détails des dessins que les élèves ont produits à la Tâche no 2 (même si leurs réponses ont été parfois extrêmement intéressantes).

Secondaire	Nb. d'élèves	Nb. d'élèves qui ont réussi le tétraèdre		Nb. d'élèves qui ont réussi le cube		Nb. total d'élèves qui ont réussi le passage 2D – 3D.	
I	72	3	4.16%	3	4.16%	3	5.55%
II	64	4	6.25%	3	4.68%	4	6.25%
III	32	1	3.12%	9	28.12%	9	28.125 %
IV	67	12	17.91%	20	29.85%	20	26.86%
V	57	7	12.28%	9	15.78%	9	14.03%
Total	292	27	9.24%	44	15.06%	44	15.06%

Tableau 2.

Comme nous l'avions prévu, la plupart des élèves ont recherché des solutions à la Tâche no 2 tout en se limitant à l'espace de la feuille de papier (micro-espace). Parfois, ils ont remarqué que les restrictions imposées aux bâtons (la même longueur) impliquaient de trouver d'autres solutions. À ce moment, plusieurs ont donné comme réponses, « il n'y a pas des solutions », « impossible », « je ne crois pas que c'est possible », etc., ou ils n'ont rien écrit.

Nous remarquons que très peu d'élèves du premier cycle du secondaire ont pu trouver une solution à la deuxième Tâche. Les suppositions émises dans notre analyse *a priori* sont donc confirmées. Les élèves du deuxième cycle de secondaire ont davantage réussi à donner des solutions à la Tâche no 2, dans une proportion un peu plus élevée que ceux du premier cycle.

Pour la Tâche no 3, les équipes de trois ou quatre élèves ont été placées séparément. Chaque équipe avait sa table, leurs propres bâtonnets et de la pâte adhésive. Il n'y avait pas d'échanges entre les équipes. Au début, les élèves n'ont pas pris en considération les possibilités du 3D. Plusieurs d'entre eux, même ceux de quatrième et de cinquième secondaire, ont eu quelques moments d'hésitation mais, dès qu'ils ont mis le bâtonnet en position verticale, les solutions sont venues de façon naturelle et sans difficulté. Quelques groupes, surtout ceux du premier cycle, ont « construit » avec les bâtons ce qu'ils ont « dessiné » en 2D : des triangles et des quadrilatères. À la fin, tous ont réussi à construire des objets en 3D.

La mise en situation consistant à utiliser le méso-espace a donc permis à un grand nombre d'élèves d'obtenir des solutions à la Tâche no 3. Le rôle du méso-espace apparaît donc important dans le passage 2D – 3D. Nous considérons que l'articulation entre les deux espaces, le micro-espace et le méso-espace, passe par la visualisation de « l'espace » dans la conscience de l'élève. Ce processus a lieu à travers ses connaissances. Même si on parle des connaissances spontanées, celles-ci doivent être développées par les allers-retours entre l'aspect 3D de l'espace méso et l'aspect 2D de l'espace micro (l'espace de la feuille de papier). Ces articulations entre les deux espaces (le « problème de l'espace ») sont partie intégrante d'un processus de modélisation des objets 3D (la « problématique de la géométrie ») dans un espace 2D (la « problématique de modélisation »), mais aussi de modélisation des objets 3D dans un espace 3D (la « problématique pratique »).

2.4.2. Analyse qualitative partielle.

Le cadre théorique de Brousseau et Galvez (1983, 1985), développé du point de vue géométrique par Berthelot et Salin (2000), introduit les trois types d'espace : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace. Nous avons considéré la feuille de papier, comme étant le micro-espace de l'élève, un espace à deux dimensions. Dans cet espace, l'élève est obligé de donner des solutions aux problèmes de l'espace qui l'entoure, le méso-espace.

Les restrictions, imposées dans la construction d'un certain nombre de triangles ou de quadrilatères, ne conduisent pas à des restrictions par rapport à la façon dont l'élève peut produire le dessin. Un nombre non défini de solutions, dans notre cas des dessins et les explications afférentes, est à la disposition de l'élève. Comme nous avons précisé antérieurement, notre intérêt de recherche vise le passage de la dimension du plan à celle de l'espace. Ce passage doit se réaliser, dans un premier temps, de façon individuelle, dans la conscience de l'élève, à partir des informations qu'il a déjà dans la tâche 1, mais aussi en tenant compte du fait que les segments ont la même longueur (tâche 2). La tâche 2 est aussi un travail individuel. En effet, le passage du plan à l'espace se fait à partir du moment où l'élève commence à lire la tâche 2. L'énoncé de la tâche 2, c'est le même que l'énoncé proposé à la tâche 1, sauf pour les restrictions imposées aux segments (la même longueur). Ces restrictions devraient conduire l'élève vers des solutions qu'il faut les chercher dans l'espace méso. Dans la tâche 1, l'élève se limite à penser la solution du problème dans un espace micro (la feuille de papier). Dans la deuxième tâche, il doit cependant élargir son horizon de pensée à l'espace méso pour arriver à en donner une solution. À partir de ces aspects, nous allons analyser les résultats des élèves en fonctions de leur travail individuel. Ainsi, nous allons analyser certaines productions d'élèves pour chaque niveau du secondaire.

Nous avons considéré que l'habitude de travailler dans un espace micro conduisait à un ancrage de l'élève dans cet espace, et que le passage du plan à l'espace se fera, pour la plupart d'entre eux, au moment où cette question sera soulevée par l'enseignant ou dans l'énoncé du problème. L'habitude de voir la feuille de papier comme étant l'espace de la résolution des problèmes de géométrie limite parfois la façon de penser et, implicitement, la production des solutions des problèmes. Les résultats des élèves à la Tâche 2 nous ont montré que la plupart d'entre eux considéraient que le problème posé à la tâche 2 n'avait pas de solutions. Ce type de réponse, nous l'avons rencontré à tous les niveaux du secondaire.

Les solutions du problème, par rapport à la première tâche, ne sont limitées que dans la mesure où l'élève est forcé de construire quatre triangles à l'aide de six segments. Pour cela, il se sent parfois obligé de « diviser » un quadrilatère en quatre ou de construire des triangles avec les côtés communs ou les intérieurs communs: « Un carré divisé en quatre, ça fait quatre triangles avec 6 bâtons », « Un losange divisé en 2 parties donne 4 triangles avec 6 bâtons » ou « Dans un trapèze fait de 4 bâtons, on met 2 bâtons croisés et on obtient 4 triangles». Aussi, dans le cas de la première tâche (6 bâtons pour construire 4 triangles), les solutions ne sont pas trouvées seulement autour d'un quadrilatère. Les élèves ont donné aussi comme réponse: « Quatre triangles équilatéraux avec 6 bâtons », « Voici un triangle à l'intérieur duquel sont dessinés trois autres triangles », « J'ai fait un rectangle avec 3 bâtons et ensuite à l'aide de 3 autres bâtons, j'ai fait un petit triangle à l'intérieur du grand. J'ai obtenu alors 4 triangles », etc.

Nous avons remarqué que les représentations de la tâche 1, indifféremment du niveau d'étude, mennet, de façon générale, aux explications suivantes: « un quadrilatère divisé » ou « un triangle divisé ». Parmi les productions des élèves, nous avons choisi deux élèves par niveau d'études. Comme nous l'avons anticipé, plusieurs dessins produits par les élèves coïncident avec ceux que nous avons donnés comme procédures attendues.

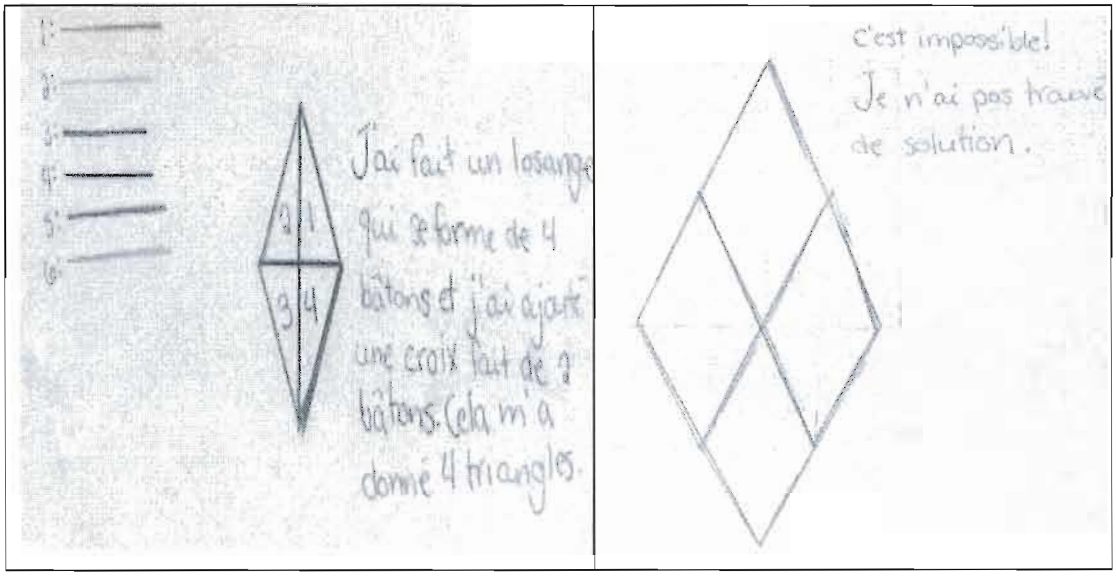
1^er^ secondaire, premier élève.

La représentation des objets, provenant du méso-espace, dans l'espace micro prend différents aspects. En passant par les représentations simplifiées (bâton = segment), par les représentations à l'échelle ou par les couleurs, les élèves utilisent différents moyens pour donner des solutions. Pour un élève de première année, l'utilisation de différentes couleurs semble être nécessaire. Pour lui, chaque couleur correspond à un bâton. Aussi, pour mettre en évidence les triangles, il écrit à l'intérieur de chacun un nombre de 1 à 4. De cette façon, il arrive à donner une solution : « J'ai fait un losange qui se forme de 4 bâtons et j'ai ajouté une croix de 2 bâtons. Cela m'a donné 4 triangles. » Quand on lui demande de dessiner des quadrilatères, il se sent bloqué. Il considère qu'il n'y a pas de solutions dans le cas de 12 bâtons : « C'est impossible! Je n'ai pas trouvé de solution. »

Aussi, pour la Tâche 2, cet élève n'a pas trouvé de solutions. En effet, il n'écrit rien sur la feuille. Pour lui, l'utilisation de plusieurs segments semble être impossible. L'ancrage dans le plan est total : le fait de ne pas donner une solution à la Tâche 1 n'ouvre pas les portes vers les solutions de la Tâche 2. L'élève ne voit qu'un nombre de segments, à partir duquel il faut dessiner des triangles ou des quadrilatères. Le fait que les bâtons appartiennent à l'espace méso est complètement perdu en vue

Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**



Tâche 2 : Pour cette tâche l'élève n'a pas de réponse. Le passage d'un espace à l'autre n'a pas été fait. Il reste avec les solutions des problèmes dans le micro-espace.

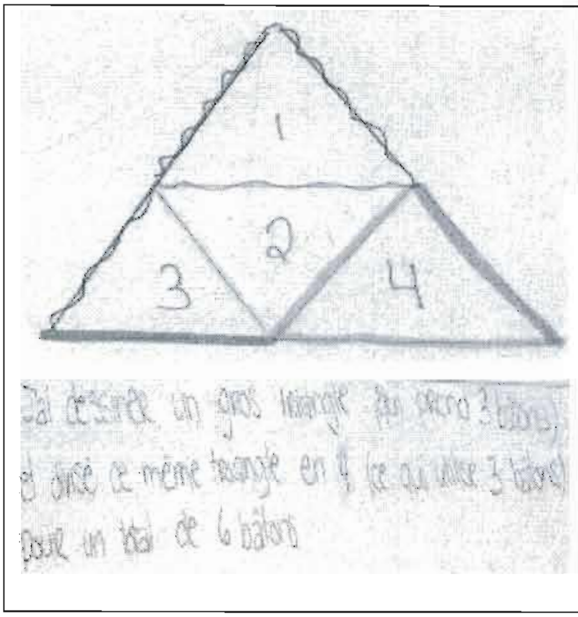
1er secondaire, deuxième élève.

En utilisant les couleurs pour faire les dessins et les chiffres pour mettre en évidence le nombre de triangles, l'élève nous explique : « J'ai dessiné un gros triangle (qui prend 3 bâtons) et (je) divise ce même triangle en 4 (ce qui utilise 3 bâtons) pour un total de 6 bâtons ».

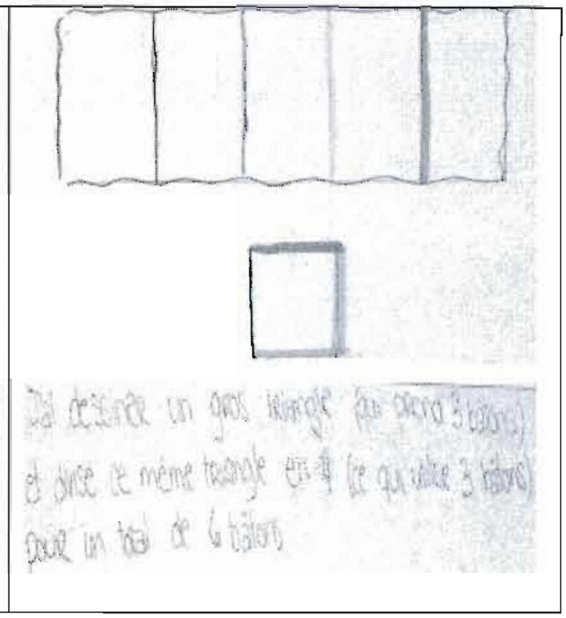
Dans le cas de 12 bâtons, l'élève nous explique : « J'ai premièrement dessiné un grand rectangle (4 bâtons) et divisé en 5 (4 autre bâtons), puis j'ai ajouté un petit carré (qui prend un autre 4 bâtons) pour un total de 12 bâtons ».

Tâche 1

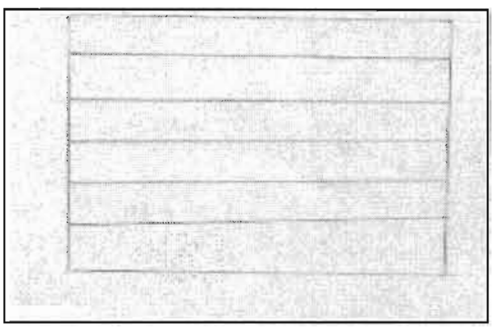
Triangles



Quadrilatères



Tâche 2



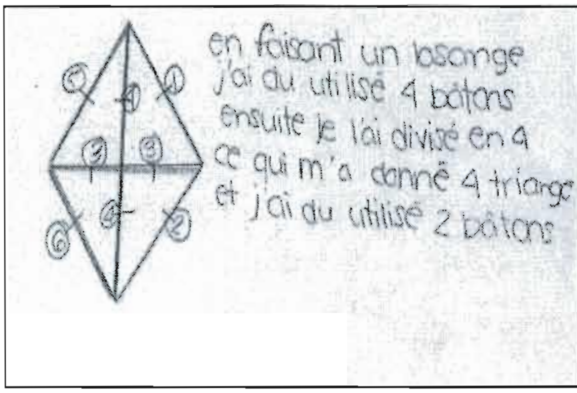
Pour la tâche 2, l'élève ne donne pas de solutions. Il essaye, mais il ne trouve pas de réponse valable. Le passage vers l'espace méso ne se fait pas. Les réponses restent dans l'espace connu pour la résolution de problèmes: celui de la feuille de papier.

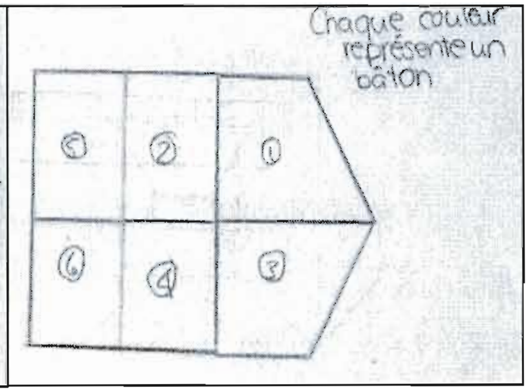
2^e secondaire, premier élève.

Comme dans le cas précédent, l'élève choisit les couleurs pour mettre en évidence les différents bâtons: « Chaque couleur représente un bâton ». Il nous explique : « En faisant un losange, j'ai utilisé 4 bâtons ensuite, je l'ai divisé en 4 ce qui m'a donné 4 triangles et, j'ai du utilisé 2 bâtons ». En comparaison avec l'élève de premier année, celui-ci a trouvé une réponse pour la construction de six quadrilatères avec douze bâtons. Mais cet aspect ne concerne pas tous les élèves de deuxième secondaire.

Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**





Il nous explique : « Non, je ne crois pas que ce soit possible ». Dans son cas, le passage vers l'espace méso n'est pas fait et une interaction entre deux espaces n'est pas possible.

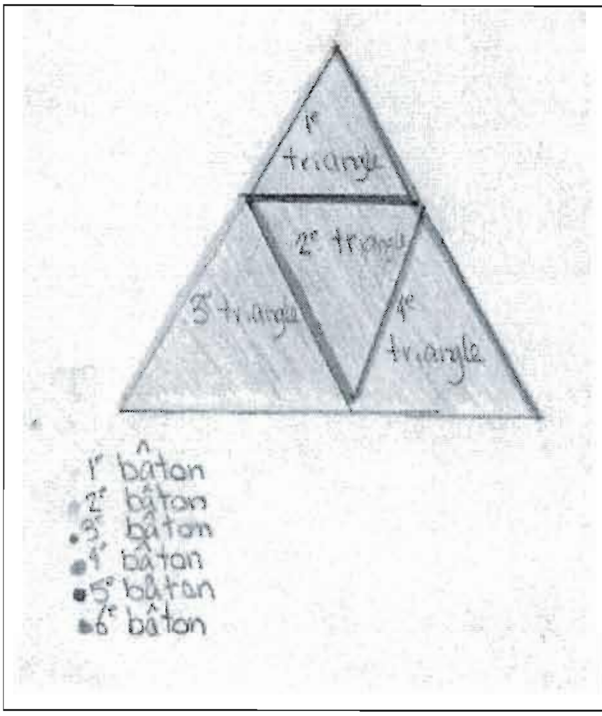
2^e secondaire, deuxième élève.

L'utilisation des couleurs est aussi remarquable. Non seulement les bâtons sont dessinés avec différentes couleurs, mais aussi les intérieurs des triangles. En utilisant les couleurs pour les intérieurs, la séparation des triangles est plus évidente, et ne donne pas le choix de dire que le dessin n'est pas seulement formé de quatre triangles (on peut facilement voir d'autres quadrilatères).

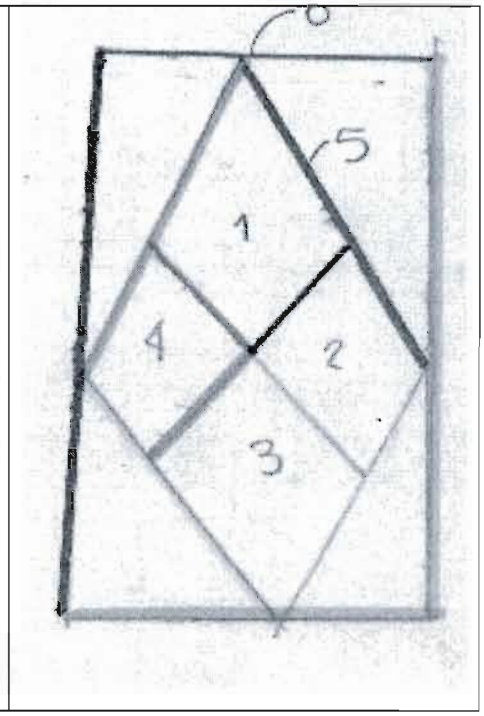
Dans le cas de 12 bâtons, l'élève trouve aussi une solution. Il utilise les chiffres de 1 à 6 pour mettre en évidence sa façon de penser les 6 quadrilatères, mais il ne donne pas d'explications.

Tâche 1

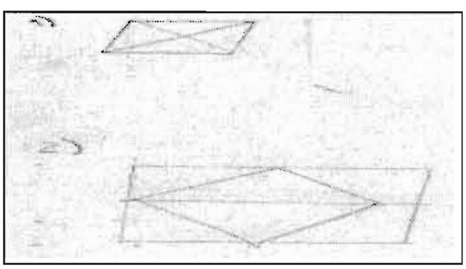
Triangles



Quadrilatères



Tâche 2



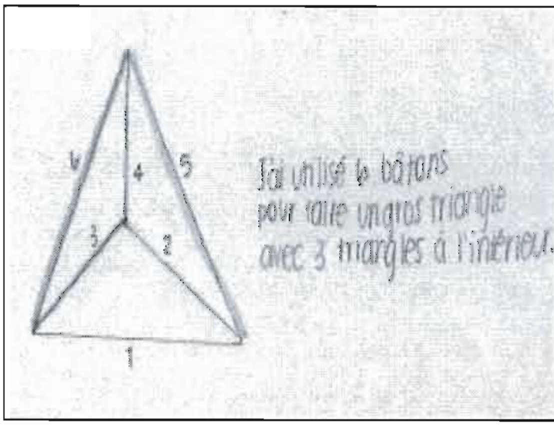
Le dessin qui a été réalisé à la tâche 2 nous conduit à remarquer que, pour cet élève de 2^{e} secondaire, le passage entre les deux espaces n'a pas été fait. Il cherche les solutions du problème seulement dans le micro-espace.

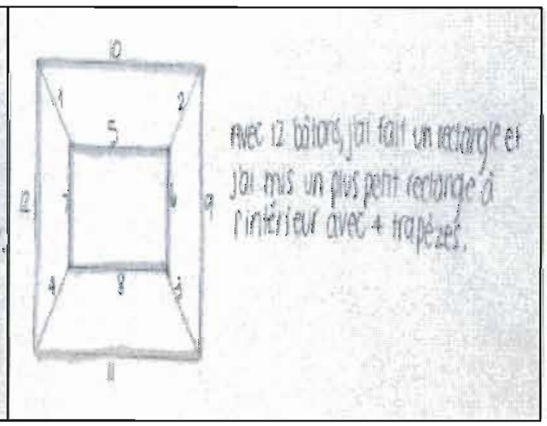
3^e secondaire, premier élève.

Les deux dessins, réalisés par notre élève de troisième secondaire, sont intéressants, pas nécessairement parce qu'il a utilisé les couleurs pour mettre en évidence les six bâtons, mais aussi parce qu'on voit une construction spéciale: les deux dessins peuvent nous faire penser à une pyramide ou à un prisme. Il nous explique ce qu'il a fait dans la tâche 1: « J'ai utilisé 6 bâtons pour faire un gros triangle avec 3 triangles à l'intérieur » et «Avec 12 bâtons, j'ai fait un rectangle et j'ai mis un plus petit rectangle à l'intérieur avec 4 trapèzes ».

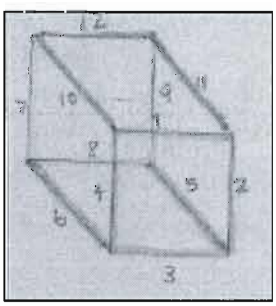
Tâche 1

Triangle **Quadrilatère**





Tâche 2



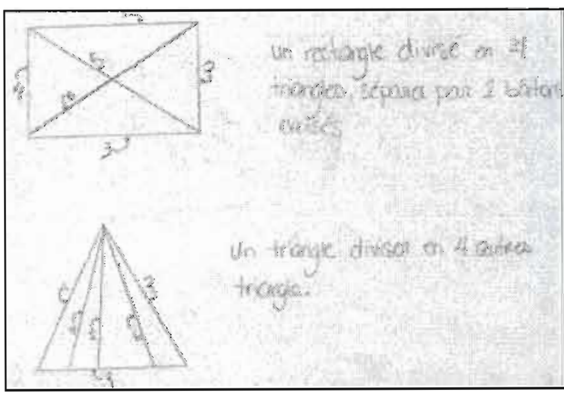
Même si l'élève n'a pas fait référence à des objets de l'espace, on voit que les dessins de la tâche 1 ont « un aspect » 3D. Ainsi, à la tâche 2, l'élève ne donne pas d'explications, mais, on peut voir une représentation d'un prisme en 3D. Nous croyons que dans son cas, le passage vers l'espace méso a été fait dès la première tâche, mais comme dans plusieurs cas, la pyramide n'est pas prise en compte pour répondre au problème. Dans son cas, on pourrait dire qu'il a la conscience de l'espace, mais à partir de certains objets. Il n'a pas une vision élargie de l'espace méso, dans lequel on trouve un nombre non-défini d'objets.

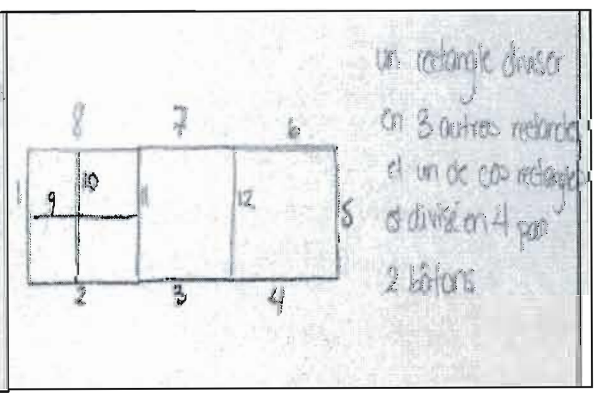
3^e secondaire, deuxième élève.

Comme dans les productions précédentes, et de façon générale comme pour une grande partie des élèves, dans les dessins ci-dessus, on voit aussi une interprétation du type « triangle divisé » ou « quadrilatère divisé ». L'élève nous donne comme solution à la première tâche : « Un rectangle divisé en 4 triangles, séparés par 2 bâtons croisés », « Un triangle divisé en 4 autres triangles », « Un rectangle divisé en 3 autres rectangles et un de ces rectangles est divisé en 4 par 2 bâtons ». La numérotation de segments ou l'utilisation des couleurs semble être nécessaire pour notre élève. Il trouve les solutions attendues à la première tâche, mais pas pour la deuxième tâche. Les solutions qu'il essaye à la tâche 2 sont conçues de la même manière qu'il avait utilisée à la première tâche. Le passage vers le méso-espace n'est pas fait dans son cas.

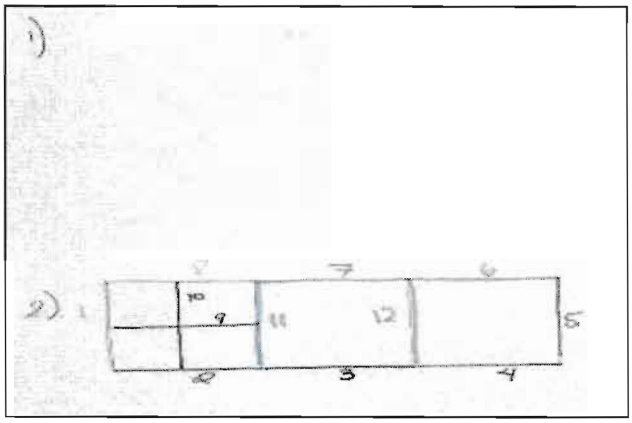
Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**





Tâche 2

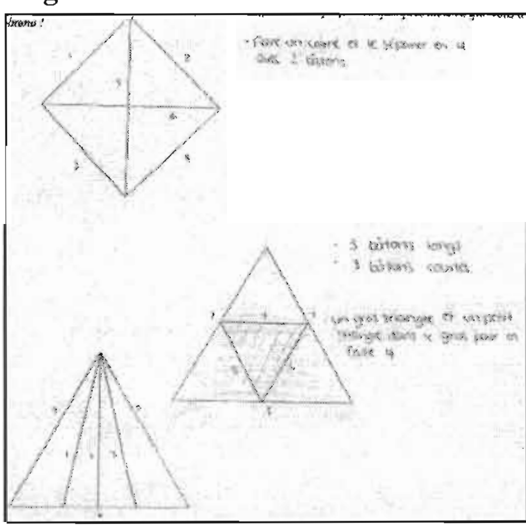


4^e^ secondaire, premier élève.

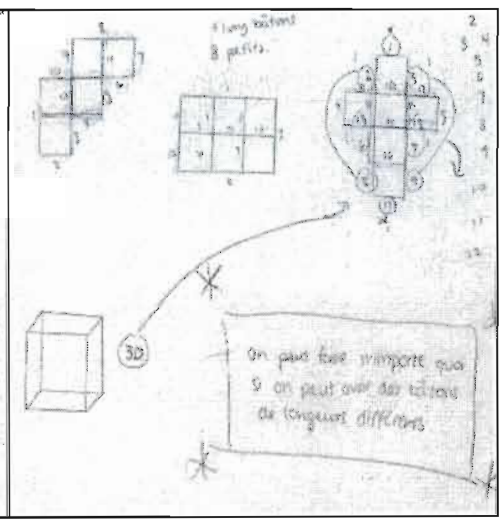
La tâche 1 ne pose pas de difficultés à cet élève. Il nous donne trois solutions dans les deux cas (6 bâtons = 4 triangles, 12 bâtons = 6 quadrilatère) : « Faire un carré et le séparer en 4 avec 2 bâtons » ou « Un gros triangle et un petit triangle dans le gros pour en faire 4 ». La remarque qui suit la construction de quadrilatères, c'est en fait ce que nous avons cherché à faire dégager chez l'élève : « On peut faire n'importe quoi si on peut avoir des bâtons de longueurs différents ».

Tâche 1

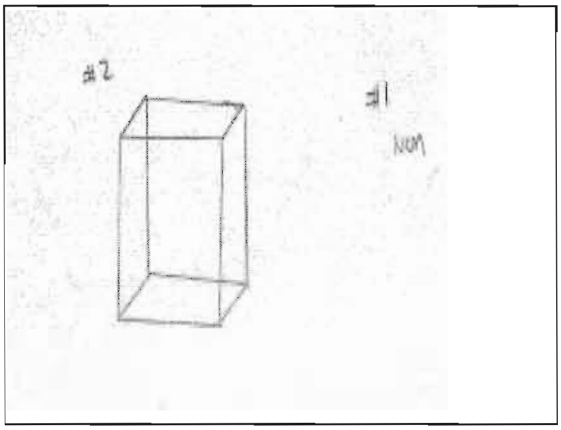
Triangles



Quadrilatères



Tâche 2



Pour cet élève, le passage vers l'espace a été fait dès qu'il a résolu la première tâche, mais de façon très restrictive. Il ne pense qu'à des prismes. Même si, à la tâche 1, le premier dessin pourrait être vu comme une pyramide, il ne pense pas à cela. Il trouve des solutions à la deuxième tâche, pour le cas 12 bâtons = 6 quadrilatères, mais pas pour le cas 6 bâtons = 4 triangles. Il n'est pas le seul à avoir agit ainsi. À la tâche 2, les élèves donnent plus facilement une solution dans le cas 12 bâtons = 6 quadrilatères, que dans le cas 6 bâtons = 4 triangles, comme nous l'avons observé lors des derniers dessins.

4ᵉ secondaire, deuxième élève.

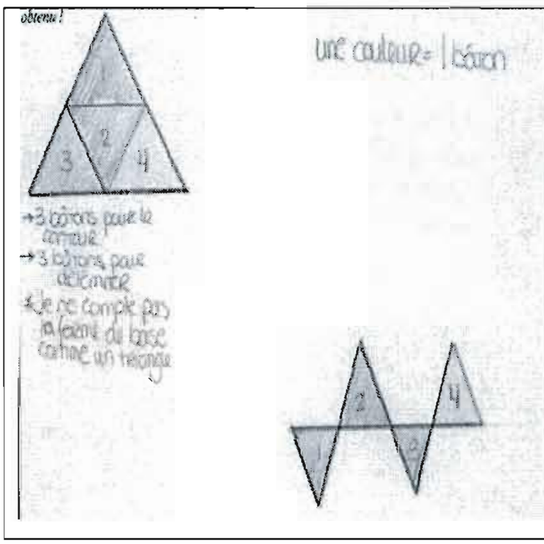
Les différences entre les espaces de travail correspondent en grande mesure à ce qu'on utilise pour expliquer nos choix. En géométrie, ça pourrait être déterminé par un référentiel théorique ou simplement par ce qu'il est permis d'utiliser pour expliquer ces choix. Par exemple, dans le dessin ci-dessous, l'élève nous explique : « 1 couleur = 1 bâton », « 3 bâtons pour le contour », « 3 bâtons pour délimiter » et, avec l'astérisque, « Je ne compte pas la forme de base comme un triangle ».

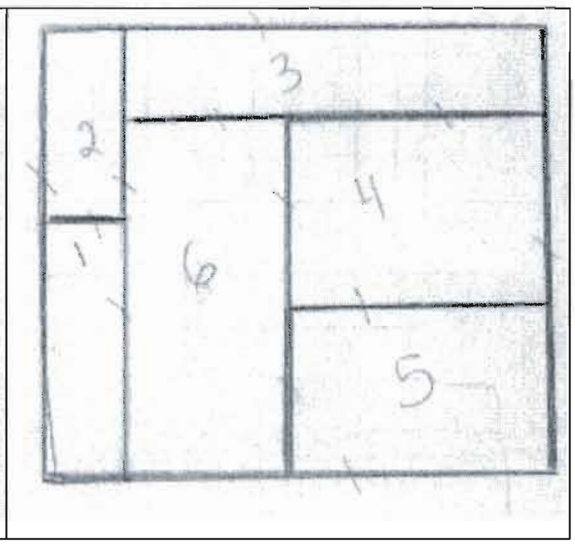
Cette dernière remarque dévoile la multitude des notions géométriques qui entre dans l'interprétation d'une figure géométrique. En fait, en regardant la figure, on voit aussi des quadrilatères, mais si je ne fais pas de référence à eux, je ne les compte pas. Une question pourrait être soulevée dans ce cas, et qui est spécifique à cet espace : est-ce que je suis obligé de compter toutes les figures géométriques observées dans un dessin ou est-ce que je peux me limiter à compter seulement les triangles demandés ?

Dans l'espace de la feuille de papier, qui est un espace fortement à deux dimensions, tous ces aspects sont permis : je peux compter seulement les triangles demandés, ou bien, je peux compter toutes les figures géométriques observées. Par contre, dans le cas de cet élève, on voit bien qu'il essaye de trouver une réponse à notre question, mais sans faire référence à d'autres figures géométriques observées.

Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**





Tâche 2

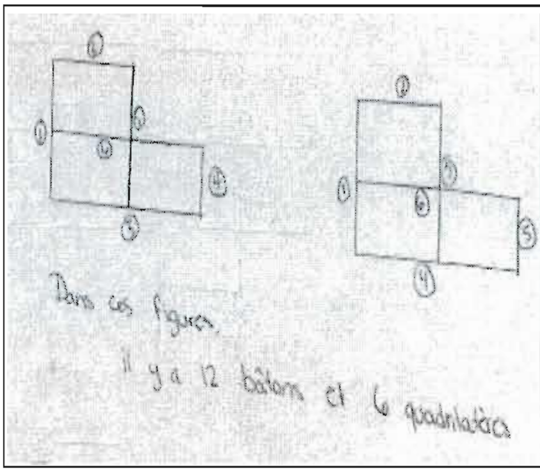
En ce sens, il trouve une solution inédite à notre question : les triangles sont séparés en deux demi-plans (voir la figure ci-dessus). Pour lui est important la compréhension du micro-espace et des différences rencontrées dans la façon dont on interprète les figures géométriques associées à cet espace. Par contre, ses pensées se développent au cours de la résolution du problème seulement dans le micro-espace et, le méso-espace est complètement absent. À la tâche 2, il nous explique : « Non, pas dans ce cas ». On voit bien que l'élève est intéressé à trouver une solution, mais, il considère que le problème n'a pas de solution. Le passage du micro au méso-espace ne se fait pas de façon spontanée.

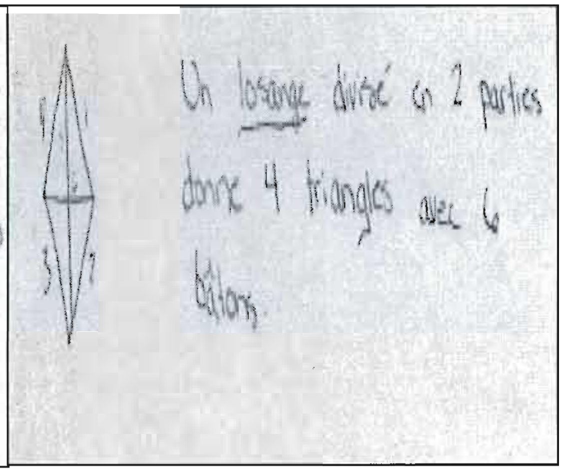
5^e secondaire, premier élève.

On remarque une séparation complète des bâtons, pour trouver la solution dans le cas 12 bâtons = 6 quadrilatères. Dans ce cas, l'élève nous explique : « Dans ces figures il y a 12 bâtons et 6 quadrilatères ». Nous avons trouvé, parmi les productions des élèves, ces types de réponses, mais pas très souvent. Nous avons choisi cette réponse pour faire en sorte que, dans le cas de 12 bâtons = 6 quadrilatères, on pourrait bien jouer sur la séparation des objets. Cet aspect n'a pas été pris en compte lors de notre analyse a priori, mais de façon générale, il ne joue pas sur le passage vers l'espace. En ce qui concerne la tâche 1, pour les triangles, l'élève nous donne aussi comme solution une réponse devenue standard : « Un losange divisé en 2 parties, donc 4 triangles avec 6 bâtons ». Comme dans plusieurs cas, cet élève de 5^e secondaire cherche les solutions du problème dans un espace qui lui est familier : la feuille de papier. Il nous explique : « Je pense que ce problème est impossible ». Pour lui le passage de l'espace micro vers l'espace méso ne se produit pas. Il considère que les restrictions imposées à la tâche 2 (les bâtons ont la même longueur) ne conduisent pas à une solution acceptable.

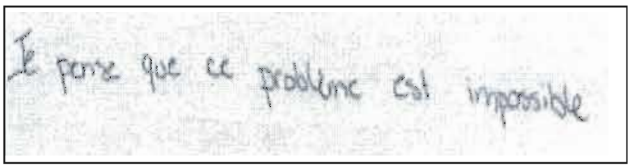
Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**





Tâche 2



5^e secondaire, deuxième élève.

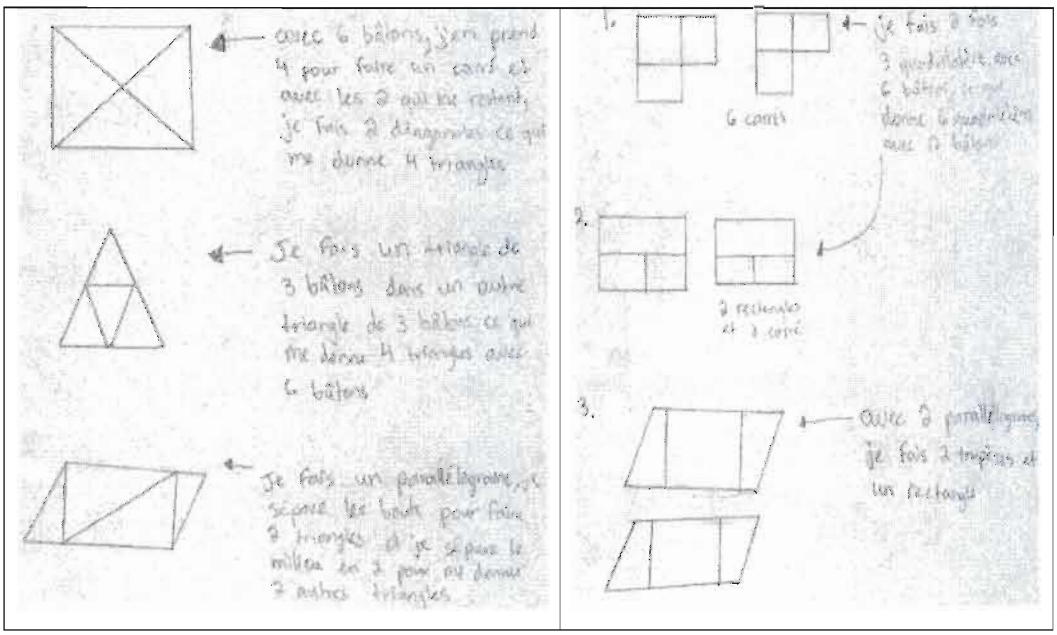
Nous allons analyser une dernière production donnée par un élève de 5^e secondaire. Dans son cas, il essaye de trouver au moins trois solutions pour chaque question posée à la tâche 1. Il nous explique : « Avec 6 bâtons, j'en prends 4 pour faire un carré et avec les 2 qui me restent, je fais 2 diagonales ce qui me donne 4 triangles », « Je fais un triangle de 3 bâtons dans un autre qui me donne 4 triangles avec 6 bâtons » ou « Je fais un parallélogramme, je sépare les bouts pour faire 2 triangles et je sépare le milieu en 2 pour me donner 2 autre triangles » (en fait, il utilise 7 « bâtons » et non 6).

En gardant les idées qu'il a eues à la première question, il continuera à répondre à la deuxième question (12 bâtons = 6 quadrilatères) en suivant des démarches appropriées à la première question : « Je fais 2 fois 3 quadrilatères avec 6 bâtons, ce qui donne 6 quadrilatères avec 12 bâtons », «...2 rectangles et 2 carrés » ou « avec 2 parallélogrammes, je fais 2 trapèzes et un rectangle ».

Bien que ses réponses à la tâche 1 soient intégrées dans l'espace micro, l'espace de la feuille de papier, les autres réponses de la tâche 2 n'existent pas. Il écrit un simple « non ». Pour lui, la deuxième tâche n'a pas de solution. Comme dans le cas que nous avons analysé précédemment, le passage du micro au méso-espace n'a pas été fait.

Tâche 1

Triangles **Quadrilatères**



Tâche 2

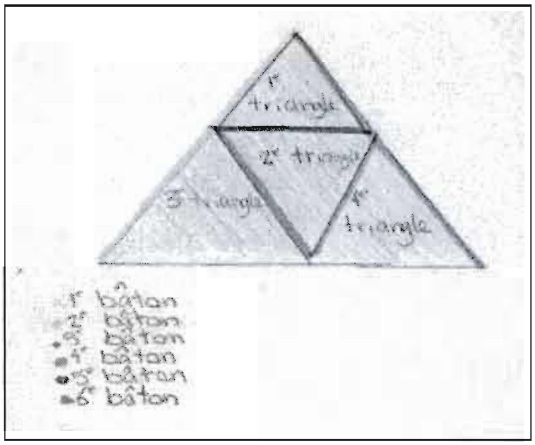
« Non ».

2.4.3. Synthèse de l'analyse qualitative.

Après les travaux analysés, nous remarquons que les élèves sont intéressés à donner des solutions à la première tâche. Mais le fait d'avoir beaucoup plus travaillé dans l'espace micro, sans faire référence à l'espace méso, conduit à un blocage : certains élèves, peu importe l'année d'étude, donnent des solutions aux problèmes de la tâche 2 en pensant seulement à la feuille de papier, même si les réponses doivent êtres trouvées dans l'espace méso.

On voit bien que l'élève fait une sorte de reconstitution de l'objet qui appartient à l'espace méso pour le placer dans l'espace micro. Il sait bien que le bâtonnet n'appartient pas à la feuille de papier, et qu'on cherche seulement une sorte de représentation de celui-ci dans un espace à deux dimensions. Mais cet aspect est par la suite oublié de la plupart des élèves. Au début, les élèves reconstituent les bâtonnets, pas nécessairement à l'aide de segments, mais aussi en utilisant des représentations qui sont plus près de la « réalité » de l'espace méso. Pour cela, ils recourent à plusieurs modalités de représentations d'un bâtonnet : la couleur, la grosseur, l'arrangement par objet, la superposition des objets, etc.

Dans l'espace méso, le bâtonnet est un objet matériel qui, par son arrangement, nous fait penser entre autres à la position verticale. Par contre, dans l'espace micro (dans notre cas, la feuille de papier), le bâtonnet est dessiné à une échelle qui est en deux dimensions. En ce sens, les réponses des élèves soulèvent des questions plus profondes, qui visent le passage de l'espace au plan. Nous avons en vue les questions sur la façon dont on construit les figures géométriques sur la feuille de papier, à partir de ce que ces « figures » représentent dans l'espace méso. Nous ne voulons pas entrer dans ce type de détails, mais il serait intéressant de voir ce qui se passe dans la conscience de l'élève. Comment l'élève perçoit les transformations par lesquelles passe un objet réel pour être représenté sur la feuille de papier et, quel est le rôle de l'enseignant dans ce type de situations?



On sait bien que les différences entre les deux espaces, méso (l'espace qui nous entoure) et micro (la feuille de papier), ne se retrouvent pas nécessairement dans « les dimensions » des objets, deux ou trois dimensions, mais aussi dans la façon dont on comprend ces espaces. Plus souvent, on remarque les différences entre les espaces, mais on ne se demande pas comment on peut faire mieux comprendre ces différences. Par exemple, pour le deuxième élève de secondaire deux, le 3^{e} triangle, qui est dessiné en bleu, a pour un de ses côtés un « bâton » vert. Mais ce « bâton » n'appartient pas seulement à ce triangle-là. Il est aussi un côté pour le 1er triangle. On pourrait demander : est-ce que c'est permis de dire qu'un seul bâton est un côté pour deux triangles? On pourrait répondre que oui, c'est permis dans un espace à deux dimensions. Dès qu'on passe à trois dimensions, il se peut que cet aspect ne soit plus valable : la séparation des objets géométriques est très puissante. Dans le plan, nous avons une situation semblable : en précisant certains points sur une droite, on n'a pas seulement une droite, mais aussi plusieurs segments ou demi-droites (valable aussi pour les plans et demi-plans). Ces aspects sont intéressants, et ils peuvent êtres développés dans d'autres recherches. Pour nous, l'intérêt reste le passage du plan à l'espace.

Les résultats obtenus à la deuxième tâche, à tous les niveaux du secondaire, nous suggère que certaines difficultés sont dues à l'ancrage de l'élève dans l'espace de la feuille de papier. Les représentations des élèves ont confirmé que la plupart d'entre eux pensent la résolution du problème en se limitant à l'espace de la feuille de papier. Comme Berthelot et Salin avaient remarqué : « On peut donc s'attendre à trouver un mode de traitement micro-spatial de ces problèmes comme support des stratégies de base.[111]»

Le traitement micro-spatial est nécessaire, mais il faut développer dans la conscience de l'élève que l'espace micro n'est qu'un moyen pour représenter les objets qui proviennent de l'espace méso ou macro, et les allers-retours entre les deux espaces sont nécessaires toute au long de l'enseignement de la géométrie. Autrement dit, il faudrait conscientiser l'élève que les objets matériels ont trois dimensions, et que dans certaines conditions, pour rendre plus simple leur représentation, on renonce volontairement à une des dimensions.

[111] Berthelot R. & Salin M.-H. (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, *Petit x*, no. 56, page 18.

CONCLUSIONS

L'enseignement de la géométrie, et en particulier de la géométrie de l'espace, a subi des changements majeurs dans tous les pays au cours du temps. Parfois, les difficultés dues aux savoirs géométriques spécifiques à la géométrie de l'espace, parfois les changements dus à une nouvelle stratégie d'enseignement ou la politique de l'enseignement ont produit des modifications majeures dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de la « géométrie de l'espace ». En ce sens, nous avons analysé le programme d'étude du Québec concernant l'enseignement de la géométrie de l'espace. Pour assurer une certaine qualité de notre analyse, nous avons aussi abordé la question du passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D. Nous avons examiné les contenus du programme liés à ces aspects. L'analyse du programme d'étude en ce qui a trait à l'enseignement de la géométrie de l'espace nous a imposé l'utilisation d'un cadre théorique spécifique à la géométrie.

Le cadre théorique de Houdement et Kuzniak (2005, 2006, 2007) nous a donné les moyens nécessaires pour réaliser cette analyse. Les Géométries, GI, GII, et GIII, et leurs espaces de travail ont constitué les trois modèles sur lesquels s'appuie notre analyse. À chaque géométrie correspond un espace de travail géométrique (ETG), constitué de trois composantes : un ensemble d'objets appartenant à un espace réel et local, un ensemble d'artefacts qui seront les outils du géomètre et un référentiel théorique qui pourrait s'organiser dans un modèle théorique. Nous avons élargi cet environnement d'analyse à l'espace de travail géométrique spécifique à la géométrie plane ETG – 2D et à l'espace de travail géométrique spécifique à la géométrie de l'espace ETG – 3D.

Nous constatons que dans le Programme d'étude, la géométrie de l'espace est organisée autour d'une géométrie du type GI – 3D, où la pratique est construite autour d'un référentiel théorique du type ETG – GI – 3D, alors que pour la géométrie plane, qui est une géométrie euclidienne du type GII, le référentiel théorique utilisé correspond à un ETG – GII – 2D. À cet effet, nous avons constaté que la géométrie de l'espace ne se situe pas en continuité avec la géométrie plane. La pratique de la géométrie plane s'organise dans un espace de travail spécifique, celui de la géométrie euclidienne du type ETG – GII – 2D. Cependant, pour la géométrie de l'espace, cela n'est pas le cas.

En ce sens, nous considérons qu'on ne peut pas parler du raisonnement déductif et d'initiation à l'élaboration de démonstrations sans avoir un référentiel géométrique construit autour du modèle euclidien du type ETG – GII – 2D, respectivement ETG – GII – 3D. Nous avons aussi remarqué que les calculs, les dessins des solides ou les transformations géométriques, qui visent surtout une géométrie plane du type GII – 2D et une géométrie de l'espace du type GI – 3D, ne peuvent pas développer « le sens spatial », qui représente un aspect principal dans l'enseignement de la géométrie. La nécessité d'articuler les trois composantes d'un espace de travail spécifique à la géométrie au secondaire, un ensemble d'objets, un référentiel théorique bien choisi et les artefacts constituent les vraies prémisses du développement du sens spatial.

À cet effet, les « définitions sensibles » utilisées dans une géométrie GI – 3D, ne peuvent pas se constituer dans un modèle théorique qui suppose l'existence des éléments géométriques constitutifs spécifiques. En ce sens, nous avons analysé la notion de perpendicularité dans l'espace liée à la notion de distance. La démonstration de la perpendicularité d'une droite à un plan a été faite à partir des énoncés et propriétés apprises dans l'étude de la géométrie plane. Nous avons remarqué que, si cette preuve ne faisait pas partie de connaissances des élèves, alors on pouvait considérer les corps géométriques, les prismes, les pyramides, les corps ronds ou les sections dans ces corps, comme de simples dessins, objets d'étude de l'espace de travail GI, géométrie naturelle. Aussi, nous avons considéré que l'initiation à la géométrie de l'espace peut se faire en articulation avec la géométrie 2D, en passant dans un premier temps par une géométrie du type GI – 3D, mais qui dans le même temps doit nous conduire vers une géométrie qui utilise un espace de travail idoine spécifique à une géométrie GII – 3D.

L'importance de choisir un espace de travail pour la géométrie de l'espace est aussi un aspect important dans notre analyse. Mettre en place le référentiel théorique, l'ensemble des objets et l'ensemble des artefacts, pour créer les vraies prémisses du raisonnement déductif spécifique à la géométrie de l'espace, représente un aspect aussi important dans la pratique de la géométrie 3D. En ce sens, nous avons émis cinq hypothèses de travail qui concernent la pratique de la géométrie de l'espace.

HP1 : *Les différents paradigmes de la pratique de la géométrie déterminent une rupture dans le passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace.* HP2 : *Une approche de la géométrie de l'espace GII doit passer par une pratique de construction réelle dans un espace GI – 3D, qui tient compte des énoncés euclidiens élémentaires.* HP3 : *L'étude de la géométrie de l'espace GII – 3D doit passer, d'abord, par une étude approfondie du rapport qui s'établit entre les positions relatives des droites et des plans dans l'espace, afin de commencer la détermination de solides géométriques.*

Nous nous sommes arrêtés sur les deux dernières hypothèses, HP4 et HP5, qui visent surtout l'articulation et le passage entre la géométrie 2D et la géométrie 3D, passant par les positions relatives des droites et des plans ainsi que par la connaissance « espace ». HP4 : *Si l'élève n'est pas habitué à penser dans l'espace (à partir de la position relative des droites et des plans dans l'espace), il va continuer à donner des solutions aux problèmes de l'espace dans la géométrie plane.* HP5 : *« Le sens* *spatial » se développe à partir du moment où l'élève développe des connaissances sur l'espace lui-même, sinon l'élève va donner la solution dans la géométrie plane.* Pour ce faire, dans la séquence expérimentale, nous avons utilisé un cadre théorique spécifique introduit par Brousseau (1983) et Galvez (1985), et ultérieurement développé par Berthelot et Salin (2000). Les notions de micro-espace, de méso-espace et de macro-espace nous ont permis d'analyser ces deux dernières hypothèses de travail, qui regardent de très près l'articulation et le passage 2D – 3D.

Les résultats de notre expérimentation ont validé nos hypothèses. Seulement un petit nombre d'élèves du secondaire ont réussi à donner de bonnes solutions à la situation-problème impliquant un passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D. La problématique de modélisation, construite dans la situation-problème autour des deux premières deux tâches, nous a permis de vérifier dans quelle mesure il y avait dans la conscience de l'élève une articulation entre le micro-espace (l'espace de la feuille de papier) et le méso-espace (l'espace qui l'entoure).

Les résultats obtenus à la deuxième tâche, à tous les niveaux du secondaire, nous ont suggéré que certaines difficultés sont dues à l'ancrage de l'élève à l'espace de la feuille de papier, où l'élève utilise cet espace comme un « support » de base dans ses démarches de résolution de problèmes. Le passage 2D à 3D ne s'est pas fait de façon spontanée. La problématique pratique, la construction de vrais objets dans la troisième tâche, a permis à un grand nombre d'élèves d'obtenir des solutions correspondantes à la problématique de modélisation. En ce sens, nous avons marqué l'importance du rôle du méso-espace dans le passage 2D-3D. Aussi, nous avons considéré que l'articulation entre les deux espaces, le micro-espace et le méso-espace, passe par la visualisation de « l'espace » dans la conscience, à travers les connaissances de l'élève. À cet effet, nous avons constaté que, même si on parle des connaissances spontanées, celles-ci doivent être développées par les allers-retours entre l'aspect 3D de l'espace méso et l'aspect 2D de l'espace micro (l'espace de la feuille de papier). Ces articulations entre les deux espaces (le « problème de l'espace ») sont partie intégrante dans un processus de modélisation des objets 3D (la « problématique de la géométrie ») dans un espace 2D (la « problématique de modélisation »), mais aussi de modélisation des objets 3D dans un espace 3D (la « problématique pratique »).

L'enseignement de la géométrie doit passer par l'étude et l'application des propriétés des objets dans les situations-problèmes. Dans le programme d'étude, cela n'est pas le cas des objets d'étude de la géométrie de l'espace. En effet, il n'existe pas une source de validation, car en Géométrie GII : « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible ». Aussi, nous avons précisé que le choix des axiomes, pour être en accord avec le paradigme de la géométrie GII, devrait établir vraiment un lien entre l'intuition, les figures à étudier, l'espace d'étude et le raisonnement.

Nous allons donc conclure, comme dans le chapitre I, par la nécessité de choisir un espace de travail spécifique à la géométrique de l'espace qui articule entre elles les trois composantes et qui soit construit dans l'esprit de la géométrie euclidienne, pour éliminer les ambiguïtés quant au choix de l'espace de travail.

RÉFÉRENCES

BACHELARD G., (1937), *L'expérience de l'espace dans la physique contemporaine*, F. Alcan 1937.

BACHELARD G., (1977), *La formation de l'esprit scientifique*, éd. Vrin, Paris (10 ième édition).

BERTHELOT R. et SALIN M., (2000), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* no. 56, pp. 5 à 34, IUFM d'Aquitaine.

BERTHELOT R. & SALIN M.H., (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, *Grand N*, no. 53 pp. 39-56.

BROUSSEAU G., (1983), Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique,* no.45, Grenoble : LSD IMAG et Université Joseph Fourier.

BROUSSEAU G., (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7/2, pages 33-115.

CHEVALLARD Y. et JULIEN M., (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, *Petit x,* no.27, IREM de Grenoble.

Dictionnaire Encyclopédique Pour Tous, Petit Larousse illustré, édition 1975, Librairies Larousse 17, rues du Montparnasse et boulevard Raspail,114. Paris VIe, page 442.

DUVAL R., (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

FISCHBEIN, E., (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht, Pays-Bas.

GANGA M., (2001), *Matematica - Manual pentru clasa a X–a* ; Editura Mathpress, Ploiesti, Roumanie, page 3. Traduction du titre : *Mathématique – Manuel pour la classe X^e^*.

GALVEZ G., (1985), El *aprendizage de la orientacion en el espacio urbano : Una proposicio para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*, Tesis, Centro de Investigacion del IPN Mexico.

GONSETH F., (1945), *La géométrie et le problème de l'espace, I. La doctrine préalable*, Éditions du Griffon Neuchatel, Diffusion Dunod Paris.

GOUSSEAU-COUTAT S., (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété,* Thèse doctorale, Université Joseph Fourier.

HOUDEMENT C., & KUZNIAK A., (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactiqque et de sciences cognitives,* vol XI, IREM de STRASBOURG.

KUZNIAK A., (2005), Espace de travail géométrique personnelle : une approche didactique et statistique, *Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno*

Internazionale - Third International Conference, A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis, Palermo, (Italy) 6 - 8 Octobre.

KUZNIAK A., (2007), *Sur la nature du travail géométrique dans le cadre de la scolarité obligatoire,* IUFM d'Orléans-Tours, Équipe Didirem, Université Paris 7, École d'été de didactique des mathématiques.

PIAGET, J., (1968), *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Paris, Delachaux et Niestlé.

PRESSIAT A., & COMBIER G., (2001), *Apprentissage géométrique au début du collège*, Actes du colloque inter-IREM 1 cycle: Quelles géométries au collège? Geste physique, geste virtuel, geste mental, 21-23 juin; IREM de Montpellier.

Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle, Ministère de l'Éducation, 2003, Dépôts légaux -Bibliothèque nationale du Québec, 2004.

Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2e cycle, Version approuvée par le ministre de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2006.

PEIFFER J., (2006), Les rôles de figures dans la production et la transmission des mathématiques, *Centre Alexandre Koyré, UMR CNRS-EHESS- MNHN 8560 27 rue Damesme, 75013 Paris.*

RABARDEL P., (1995), *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin.

RABARDEL P., (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, Conférence, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, vol 1, pp. 203-213.

ROMMEVAUX M.-P., (1991), Le premier pas dans l'espace, in *Annales de Didactiques et de sciences cognitives,* vol 4, IREM de Strasbourg, pp. 85-123.

RADU D., & RADU E., (2000), *Matematica – Manual pentru classa a VIII-a.* Editura Teora, Bucarest, Roumanie. *Mathématique – Manuel pour la classe VIII^e,* Édition et diffusion : Teora, Bucarest, Roumanie, Page 4, Extrait de la table des matières.

SINACEUR H., (1993), La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth, *La figure et l'espace,* Actes du 8^e colloque INTER-IREM, Épistémologie et Histoire des Mathématiques, Lyons 31Mai-1er Juin 1991, Édition et diffusion: IREM de Lyon, 1993.

TANGUAY D., (2007), *Didactique de la géométrie,* MAT 3135, Coop-UQAM Montréal.

WITTGENSTEIN L., (1918), 1961 *Tractacus logico-philosophicus.* Gallimard.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Psychologie_de_la_forme
http://magesi.inrp.fr/enseigner.php
http://magesi.inrp.fr/seance.php?Rub=2&Id=16