

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DES CLASSES DE COMMENSURABILITÉ POUR LES VARIÉTÉS
DE DIMENSION DEUX ET TROIS

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
VLADIMIR SARDE

FÉVRIER 2022

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Les conditions d'écriture de ce mémoire furent particulièrement éprouvantes en grande partie à cause des restrictions liées à la Covid 19. C'est pour ces raisons que je souhaite remercier d'autant plus toutes les personnes qui m'ont soutenu, aidé, et encouragé dans ce travail.

Je pense entre autres à mes amis de Lorraine pour m'avoir fait relativiser et pour m'avoir changer les idées à grands coups de sortie kebabs et de parties de CS.

Merci également aux membres du département de l'UQAM qui font vivre les mathématiques et dont l'envie et la persévérance ne semble pas avoir de limite. Merci notamment à Patricia, ta passion des mathématiques est contagieuse et inspirante. Discuter avec toi me rappelle toujours pourquoi j'aime tant cette discipline lorsque parfois je semble l'oublier.

Merci à Tom qui a su transformer trois mois de confinement strict en une expérience presque agréable! Merci pour tout ce qu'on a partagé mais aussi parce que sans toi je pense que mon réveil sonnerait encore à midi!

Merci à Steven Boyer pour m'avoir guidé dans cette épreuve que se soit en m'aidant dans le choix du sujet, dans le choix des articles à étudier, ou tout simplement en prenant le temps de répondre à mes questions. Merci aussi à Duncan McCoy à qui je dois une grosse partie de mes connaissances de topologie grâce entre autres à tout les cours que vous m'avez donné. Je ne cesserai jamais d'être impressionné par la facilité déconcertante avec laquelle vous manipulez les objets topologiques. Je voudrais également remercier ma famille pour m'avoir soutenu et encouragé et particulièrement ma mère. Merci pour ta compréhension, ta patience et ton soutien mental inconditionnel qui m'a permis de surmonter les difficultés de la situation.

Enfin je conclurai en remerciant Lissa. Merci pour ta patience et tes motivations. Merci de m'avoir accueilli et merci pour tout ces moments partagés malgré les conditions parfois difficiles. Il n'y a pas de mots pour qualifier ton soutien sans faille, sans toi ce mémoire n'existerait tout simplement pas.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	vi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I PRÉREQUIS	3
1.1 Généralités sur les variétés et les revêtements	3
1.2 Transformation de revêtement	10
1.3 Un peu de géométrie	15
1.3.1 Une métrique «agréable»	16
1.3.2 Les géométries de Thurston	20
1.4 La relation de commensurabilité et premiers résultats	26
1.4.1 La commensurabilité	26
1.4.2 Un aparté algébrique	34
CHAPITRE II LA COMMENSURABILITÉ DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 2	36
2.1 Propriétés des surfaces	36
2.1.1 Les surfaces sans bord	36
2.1.2 Les surfaces avec bords	41
2.2 La commensurabilité des surfaces fermées	42
2.3 La commensurabilité des surfaces compactes à bord	46
CHAPITRE III LA COMMENSURABILITÉ DE DIMENSION 3	54
3.1 Variétés de Seifert	55
3.1.1 Définitions	55
3.1.2 Les Orbifolds	59
3.1.3 Chirurgie de Dehn	69

3.1.4	Propriétés des EFS	71
3.1.5	Commensurabilité des variétés de Seifert	80
3.2	Variétés Sol	86
3.2.1	Définition et premières propriétés	86
3.2.2	Fibré en tores sur S^1	90
3.2.3	Un peu d'algèbre sur les corps	100
3.2.4	La commensurabilité	103
3.3	Variétés hyperboliques	109
3.3.1	Définitions et premières propriétés	109
3.3.2	La commensurabilité	116
	CONCLUSION	124
	RÉFÉRENCES	126

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Polygone fondamental du Tore	14
1.2 Polygone fondamental de K	14
1.3 2-revêtement de K	15
3.1 Tore fibré standard	56
3.2 Point cône (issu de (Scott, 1983), p.407)	62
3.3 Tore d'application	92
3.4 Tore d'application conjugué	92
3.5 3-revêtement cyclique	94
3.6 Revêtement fibre par fibre	94

RÉSUMÉ

Ce mémoire a pour but de comprendre et résumer l'étude de la commensurabilité des variétés de dimensions 2 et 3. Il s'agit d'un pan particulier de la topologie qui étudie le monde physique qui nous entoure à l'aide d'outils algébriques. Plus précisément, il sera question ici de la théorie des revêtements. Cette étude servira de fil rouge le long de ce mémoire mais sera également prétexte à explorer quelques uns des théorèmes fondamentaux qui régissent notre compréhension du domaine. Notamment introduire et justifier l'utilisation du concept de géométrie qui permet de donner une classification des variétés de basses dimensions (démontré par Perelman en 2003, ce résultat très attendu est parmi les plus célèbres de son champs d'étude). Ce mémoire est adressé à tout étudiant de mathématiques qui possède un niveau équivalent à celui d'une fin de baccalauréat, quelques bases de topologie et beaucoup de curiosité! J'introduirai les principaux concepts et définitions nécessaires à la compréhension du mémoire et je démontrerai les résultats importants. Néanmoins l'étude des variétés étant un sujet très riche, je serai également obligé d'admettre de nombreux résultats pour que ce mémoire reste de taille raisonnable! Mais j'essayerai toujours de résumer l'idée et l'aspect instinctif se trouvant derrière ces théorèmes. Tout au long de ce mémoire j'essayerai, à l'aide de figures et d'explications, de conserver au maximum le côté visuel des résultats qui représente à mes yeux l'aspect le plus important de l'étude des variétés. En effet, chaque idée, chaque théorème, provient avant tout d'une intuition développée d'abord sur un dessin, ou sur un résultat inspirant. Enfin, je profite de ce résumé pour souhaiter bonne lecture à tout les amateurs de topologies qui tenteront de s'y aventurer.

Mots-clés : Topologie, Géométrie, Conjecture de géométrisation de Thurston, Revêtement, Variété, Commensurabilité, Classification des surfaces, Variété de Seifert, Orbifold, Variété Sol.

INTRODUCTION

Le concept de variété a été introduit par Bernhard Riemann mais ses origines remontent au moins jusqu'à Gauss. Nous pourrions même considérer les premiers questionnements mathématiques concernant la cartographie comme des prémisses de ce domaine. En effet, bien avant de connaître la forme exacte de la terre nous tentions de la représenter morceau par morceau à l'aide de cartes planes tout en nous questionnant sur la conservation des formes, des distances, de la ressemblance globale ... Depuis, ce concept de variété a trouvé de nombreuses autres applications aussi bien en mathématiques qu'en physique où il sert par exemple à formaliser la relativité générale d'Einstein.

L'étude des variétés de basse dimension est donc un sujet à la fois ancien et très riche. Aujourd'hui encore il reste au centre de nombreuses recherches mathématiques. Si beaucoup de progrès ont été réalisés depuis Riemann certains aspects échappent encore à notre compréhension. Cet objet de variété, que nous réintroduisons dans ce mémoire, a été longtemps étudié avec des outils topologiques ou différentiels bien qu'il ait pourtant tout d'un objet géométrique. Mais les résultats récents du domaine, notamment le théorème de géométrisation des 3-variétés de Perelman (ci dessous), nous incitent à reconsidérer ses notions géométriques.

Théorème 0.1 (Perelman, 2003). *Toute variété de dimension trois fermée, orientable et indécomposable peut être découpée selon des tores, de telle sorte que l'intérieur de chaque sous-variété ainsi obtenue soit de volume fini, et soit géométrisable sur le modèle d'une des huit géométries de Thurston.*

Dans ce mémoire nous nous concentrerons sur la relation dite de commensurabilité

qui est définie de la façon suivante : deux variétés sont commensurables si elles possèdent un revêtement de degré fini en commun. Notre objectif principal sera de décrire explicitement les classes de commensurabilité des variétés de dimension 2 et 3. Nous nous restreindrons généralement aux variétés connexes et compactes, avec potentiellement des bords, pour des raisons que nous justifierons au fur et à mesure. Dans un premier temps nous reviendrons sur les définitions de ces objets et sur les premières propriétés de cette relation. Nous en profiterons aussi pour introduire le cadre géométrique que nous avons mentionné plus haut, en expliquant la construction et la signification du théorème de géométrisation. Ce cadre permet de comprendre les motivations derrière la relation de commensurabilité car l'étude de cette relation ainsi que la définition de géométrie repose sur une même théorie qui est celle des revêtements. Nous tâcherons donc dans ce premier chapitre de comprendre ces revêtements, aussi bien formellement qu'intuitivement ainsi que le lien qu'ils permettent de créer avec les propriétés géométriques élémentaires (angles, longueurs, etc ...). Puis dans un deuxième temps nous étudierons spécifiquement les variétés de dimension 2. D'abord d'un point de vue général, puis via la relation de commensurabilité. Enfin, dans un troisième chapitre nous analyserons les propriétés des variétés de dimension 3 selon leurs géométries. À chaque fois nous commencerons par des remarques globales sur la géométrie puis finirons par la classification de commensurabilité.

CHAPITRE I

PRÉREQUIS

Pour commencer ce mémoire nous allons définir la notion de revêtement qui sera notre principal objet d'étude. Puis nous étudierons les premiers résultats permettant de les comprendre et formaliserons le concept de géométrie. Enfin nous définirons la relation de commensurabilité qui sera le thème central de ce travail. Cette section s'appuiera notamment sur l'incontournable livre d'Allen Hatcher *Algebraic Topology* (Hatcher, 2002) (section *Covering Spaces*), et sur l'article de Peter Scott *The geometries of 3-manifolds* (Scott, 1983) qui offrent de nombreux détails et exemples illustrés. J'admettrai que le lecteur possède une base en topologie générale et qu'il est donc à l'aise avec les notions d'ouvert, de fermé, de compacité, de connexité, d'homéomorphisme ...

1.1 Généralités sur les variétés et les revêtements

Avant toute chose nous allons définir le terme de variété. Cette définition permettra de poser un cadre à notre étude. Elle formalise l'idée intuitive que nous avons d'un objet simple de dimension donnée. Cet objet est l'un des plus étudiés en topologie car il est particulièrement intéressant et qu'il trouve de nombreuses applications dans des domaines variés de mathématiques et de physique.

Définition 1.1. Une *variété* topologique M de dimension n est un espace topolo-

gique séparé à base dénombrable tel que chacun de ses points admet un voisinage ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n . Plus formellement nous avons : $\forall x \in M$, il existe U_x un voisinage ouvert de x et un homéomorphisme $\phi_x : U_x \rightarrow \phi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$.

Nous disons que (U_x, ϕ_x) est une *carte locale*. Une famille de carte (U_i, ϕ_i) qui recouvre entièrement M est un *atlas*.

Il est fréquent de demander en plus que la variété soit *lisse*. Il faut alors que l'atlas soit de classe C^∞ . C'est à dire que les fonctions de changement de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ soit de classe C^∞ . Nous munirons alors notre variété lisse d'une famille maximale d'atlas compatible entre eux (ie des atlas C^∞ tel que leurs réunions est encore un atlas C^∞).

Dans ce mémoire tous les espaces topologiques considérés à partir de maintenant seront des variétés connexes de dimension 2 ou 3. Nous nous restreignons au cas connexe car dans un cas général nous pouvons toujours étudier le problème composante connexe par composante connexe. De plus, dans cette situation il est démontré que chaque variété topologique possède une unique structure lisse (à difféomorphisme près). Ce théorème est dû à Moise (il résulte des théorèmes 3 et 4 de (Moise, 1952)). Ainsi nous ne différencierons pas les structures topologique et différentielle. Enfin remarquons que la définition de variété implique qu'elle est localement connexe par arcs, donc une variété connexe est connexe par arcs.

Maintenant que nous avons défini notre cadre de travail, intéressons-nous à l'étude des revêtements. La plupart des définitions et résultats énoncés peuvent être généralisés à des cas bien plus larges que des variétés, mais pour rendre ce document plus digeste nous n'entrerons pas dans ces détails (voir (Hatcher, 2002) section revêtement, p56 à 70, pour plus de précision). Pour la même raison nous ne démontrerons pas la plupart des résultats énoncés car ils n'apportent pas forcément d'éléments de compréhension utiles à l'étude de la relation de commensurabilité.

Définition 1.2. Soit M une variété, un *revêtement* de M est un espace \widetilde{M} muni d'une application continue surjective $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ satisfaisant :

Pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouvert de \widetilde{M} qui sont homéomorphes à U via la restriction de p . C'est-à-dire $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j \subset \widetilde{M}$ tel que $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme pour tout $j \in J$.

Nous nommerons \widetilde{M} le revêtement, M l'espace de base, p la projection et un tel U un voisinage trivialisant. De plus le cardinal de J définit le nombre de *feuilles* du revêtement. Si $|J| = n \in \mathbb{N}$ alors on dira que \widetilde{M} est un revêtement de degré n ou encore que c'est un n -revêtement.

Proposition 1.3. *Un revêtement d'une variété est une variété de même dimension.*

Démonstration. Considérons $\{U_i\}$ une famille de voisinages trivialisants qui recouvre M . Il suffit d'utiliser les ouverts $p^{-1}(U_i)$ pour définir un atlas sur \widetilde{M} \square

Remarque 1.4. Dans le cas fini (i.e. le nombre de feuille est fini) nous pouvons également définir un revêtement d'une variété comme un homéomorphisme local dont toutes les fibres ont $n \in \mathbb{N}$ éléments.

Intuitivement cela nous permet de voir un revêtement comme des «copies» de notre variété M ! Supposons que \widetilde{M} est un n -revêtement de M , alors la définition nous dit que \widetilde{M} possède n copies de chaque morceau de M . Donc \widetilde{M} est une sorte de n copies de M . Mais comme la condition n'est que locale nous pouvons d'une certaine façon «coller» ces copies entre elles comme l'illustrent les exemples ci-dessous. Cette définition est particulièrement utile car elle permet d'identifier des objets entre eux par leurs ressemblance globales. En effet, la définition de variété se fait localement mais ne dit rien de l'aspect global de l'objet. La notion

de revêtement permet donc d'apporter un premier lien formel entre des variétés qui paraissent similaire. De plus, un certain nombre de propriétés sont communes à un revêtement et à son espace de base. Ainsi trouver un revêtement relativement simple permet de faciliter l'étude d'un objet donné.

Exemple. 1. Le premier exemple évident qui nous vient en tête est de considérer que \widetilde{M} est littéralement n copies disjointes de M : $\widetilde{M} = M \times \{1, \dots, n\}$. Cela fonctionne effectivement mais ce n'est guère intéressant.

2. Un cas moins évident qui a motivé l'étude de cette notion est le suivant : $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ et $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Pour le comprendre visuellement il faut voir le cercle comme un segment de longueur 1 avec les deux extrémités identifiées. L'ensemble \mathbb{R} représente donc une infinité de copies de S^1 que nous aurions déplié puis collé entre elles. La projection est alors définie par $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tel que $p(x) = e^{2i\pi x}$. Nous pouvons remarquer que la projection identifie bien en un point chaque entier inclut dans \mathbb{R} .

Grâce à la simplicité de \mathbb{R} , cet exemple permet de calculer le groupe fondamental de S^1 qui est un outil crucial en topologie algébrique.

3. Nous verrons beaucoup d'exemples de revêtement dans ce mémoire mais un dernier qui reviendra souvent est : $M = S^1$ et $\widetilde{M} = S^1$! Comme $M = \widetilde{M}$ nous avons toujours un 1-revêtement donné par $p = Id$. Mais nous pouvons également créer ici un n -revêtement en utilisant $p(z) = z^n$ où les «copies» de S^1 sont produites par la projection.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés intéressantes des revêtements.

Définition 1.5. Soient $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement et $f : X \rightarrow M$ une fonction continue, nous appellerons un *relevé* de f une fonction $\tilde{f} : X \rightarrow \widetilde{M}$ tel que

$p \circ \tilde{f} = f$. De même le relevé d'un point $x \in M$ correspond aux $x_j \in \widetilde{M}$ tel que $p(x_j) = x$.

Théorème 1.6 (Propriété de relèvement des chemins). *Soient $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement, $\sigma : I \rightarrow M$ un chemin tel que $\sigma(0) = x \in M$, et $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ tel que $p(\tilde{x}) = x$. Alors il existe un unique relevé $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \widetilde{M}$ tel que $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{x}$.*

Nous pouvons élargir ce théorème à des cas plus généraux avec quelques conditions supplémentaires (voir (Hatcher, 2002), propositions 1.33, 1.34). Il existe également un théorème permettant de relever une homotopie à \widetilde{M} si nous avons une homotopie f_t de M et un relèvement de f_0 donné (proposition 1.30 dans Hatcher). Nous admettons ces résultats classiques qui reposent sur l'idée que pour un chemin de M donné, comme \widetilde{M} constitue des copies de M , il est possible de retrouver dans chaque copie (en sélectionnant le relevé de x correspondant à celle ci), une unique copie du lacet initial.

Tournons-nous maintenant vers les résultats concernant la fonction p_* induite par la projection p sur les groupes d'homotopies de \widetilde{M} . Le relèvement d'homotopies nous permet par exemple de déduire la prochaine proposition.

Proposition 1.7. *La fonction $p_* : \pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(M, x)$ est injective.*

Nous n'avons pas la surjectivité car certains relevés de lacets relient deux relevés de x différents, ce ne sont donc pas des lacets dans \widetilde{M} bien qu'ils soient projetés sur des lacets dans M .

La proposition nous fait remarquer que le groupe fondamental de notre revêtement est un sous-groupe de $\pi_1(M, x)$ (en prenant l'image par la projection). En fait le lien entre un revêtement et son sous-groupe associé est très profond comme le souligne les propositions 1.11 et 1.12 (voir (Hatcher, 2002) p.61 et 67 pour les détails). Mais pour comprendre cela nous aurons déjà besoin des notions d'isomorphisme de revêtement et de revêtement universel.

Définition 1.8. Nous définissons un *isomorphisme* entre deux revêtements $p_1 : \widetilde{M}_1 \rightarrow M$ et $p_2 : \widetilde{M}_2 \rightarrow M$ comme étant un homéomorphisme $f : \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_2$ tel que $p_1 = p_2 \circ f$.

Définition 1.9. Un espace topologique connexe par arcs est simplement connexe si son groupe fondamental est trivial. Autrement dit, si tout lacet de cet espace est homotope à un point.

Proposition 1.10. Une variété M possède toujours un revêtement simplement connexe unique à isomorphisme près. Nous l'appellerons le revêtement universel \widehat{M} . De plus, pour tout autre revêtement X de M nous avons que \widehat{M} est un revêtement de X .

Proposition 1.11. Le nombre de feuilles d'un revêtement $p : (\widetilde{M}, \tilde{x}) \rightarrow (M, x)$ est égal à l'index de $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}))$ dans $\pi_1(M, x)$.

Théorème 1.12. Soit M une variété. Pour chaque sous-groupe $H \subset \pi_1(M, x)$ il existe un revêtement $p : M_H \rightarrow M$ tel que $p_*(\pi_1(M_H, \tilde{x})) = H$ pour un point $\tilde{x} \in M_H$ bien choisi.

Plus que cela, si nous nous restreignons aux isomorphismes préservant le point de base, il y a alors une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtement connexe par arc et l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(M, x)$.

Démonstration. La construction de M_H est intéressante et repose sur l'existence du revêtement universel \widehat{M} . Nous définissons M_H comme le quotient de \widehat{M} par la relation d'équivalence suivante, deux points $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \widehat{M}$ sont identifiés s'ils respectent ces deux conditions : (1) Ils se projettent sur le même point y dans M (ie $\hat{p}(\tilde{y}_1) = \hat{p}(\tilde{y}_2) = y \in M$). (2) Il existe des chemins $\hat{\sigma}_i$ dans \widehat{M} de \tilde{x} à \tilde{y}_i tels que $(\hat{\sigma}_1) * (\hat{\sigma}_2)^{-1}$ se projette sur une boucle dans M basée en x dont la classe dans $\pi_1(M, x)$ est un élément de H . Le revêtement $p : M_H \rightarrow M$ est alors défini

comme la fonction induite sur le quotient $\widehat{M}/\sim = M_H$ par le revêtement universel $\hat{p} : \widehat{M} \rightarrow M$. Ceci est bien défini grâce à la condition (1). Pour mieux comprendre pourquoi nous avons choisi cette relation et pour quelles raisons elle est bien définie, il faut s'intéresser à la construction du revêtement universel disponible dans (Hatcher, 2002) (p.63). L'idée est simplement que nous identifions des relevés d'un même point dans \widehat{M} s'ils sont reliés par la pré-image d'un élément de H . Cela garantit que dans le quotient M_H un relevé d'un lacet de H sera bien un lacet engendrant les mêmes éléments dans le groupe fondamental. En fait, les lacets de $\pi_1(M_H, \tilde{x})$ sont exactement les lacets de $\pi_1(M, x)$ dont les relevés sont des boucles. Les autres lacets de $\pi_1(M, x)$ sont ceux dont les relevés relient deux relevés différents du point de base.

Pour la seconde partie de la proposition, prenons deux revêtements $p_H : M_H \rightarrow M$ et $p'_H : M'_H \rightarrow M$ tel que $p_{H*}(\pi_1(M_H, \tilde{x})) = p'_{H*}(\pi_1(M'_H, \tilde{x}')) = H$. Nous pouvons relever p_H au revêtement M'_H , et de même relevé p'_H au revêtement M_H (grâce au critère de relèvement de fonctions, voir (Hatcher, 2002) proposition 1.33). Des critères d'unicité (proposition 1.34 de Hatcher) permettent alors de conclure qu'ils sont inverses l'un de l'autre. Ils donneront ainsi un isomorphisme entre M_H et M'_H . Donc nous venons d'associer à tout sous-groupes H de $\pi_1(M, x)$ une classe d'isomorphismes de revêtement connexe par arc. L'injectivité et la surjectivité découlent alors respectivement de la définition d'isomorphisme et de la première partie de la proposition. \square

Ce théorème permet de classifier de façon algébrique les revêtements d'un espace donné. Il nous sera donc particulièrement utile pour la suite de ce mémoire !

1.2 Transformation de revêtement

Intéressons nous maintenant à une approche plus géométrique. Intuitivement nous avons vu les revêtements comme des copies d'un espace M (correspondant aux feuilles) collées entre elles. Deux questions naturelles consistent à se demander comment ces copies sont arrangées entre elles et pourquoi le groupe fondamental de M possède un rôle aussi crucial. Pour mieux comprendre ces questions nous allons définir les transformations de revêtements. Une telle transformation va «réarranger» les copies de M dans le revêtement. Nous pouvons nous référer à (Hatcher, 2002) (section Deck Transformations and Group Actions, p.70 à 78) pour plus de détails sur ces transformations.

Définition 1.13. Pour un revêtement $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ une *transformation de revêtement* (deck transformation en anglais) est un isomorphisme $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$. Ces transformations forment un groupe sous la composition. Nous le noterons $\text{Deck}(\widetilde{M})$.

Exemple. 1. Si nous prenons le revêtement $\widetilde{M} = M \times \{1, \dots, n\}$, alors une transformation peut être donnée par une permutation des feuilles : $f_\sigma : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, $f_\sigma(x, i) = (x, \sigma(i))$ où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

2. Considérons $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ et $M = S^1$. Ici chaque feuille est un intervalle de longueur un entre deux entiers. Pour les réarranger nous devons donc conserver tout ces intervalles mais modifier leurs place de façon continue. Prenons donc $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = x + i$ où $i \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.14. Nous dirons qu'un revêtement $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ est *normal* (ou *régulier* ou *galoisien*) si $\forall x \in M$ et pour toute paire de relevés \tilde{x}, \tilde{x}' de x il y a une transformation f tel que $f(\tilde{x}) = \tilde{x}'$.

Proposition 1.15. Soient $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement et $H = p_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}))$. Alors :

- (i) Le revêtement est normal si et seulement si H est un sous-groupe normal de $\pi_1(M, x)$.
- (ii) $\text{Deck}(\widetilde{M})$ est isomorphe au quotient $N(H)/H$ où $N(H)$ est le normalisateur de H dans $\pi_1(M, x)$.

En particulier, $\text{Deck}(\widetilde{M})$ est isomorphe à $\pi_1(M, x)/H$ si \widetilde{M} est normal. Ainsi pour le revêtement universel $\widehat{M} \rightarrow M$ nous obtenons $\text{Deck}(\widehat{M}) \cong \pi_1(M, x)$.

Démonstration. La première partie de cette proposition ne nous sera pas utile en dehors du fait qu'elle nous autorise à quotienter dans les cas classiques. Nous ne la démontrerons donc pas (voir proposition 1.39 de Hatcher). La deuxième partie permet de pointer une correspondance entre les transformations de revêtements et le groupe fondamental. Intuitivement nous avons déjà souligné que les lacets de $\pi_1(M, x)$ qui n'apparaissent pas dans $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}))$ sont ceux qui sont relevés dans \widetilde{M} à de chemins reliant deux relevés de x différents. Donc un tel chemin permet de passer d'une feuille à une autre. Ce résultat montre qu'en fait chacun de ces chemins correspond bien à une transformation s'il appartient au normalisateur. La preuve complète est disponible dans (Hatcher, 2002). L'idée est de s'appuyer sur le théorème 1.12, car un même revêtement \widetilde{M} considéré avec deux points de base distincts \tilde{x}, \tilde{x}' reliés par un tel chemin engendre le même sous-groupe dans $\pi_1(M, x)$. Ils appartiennent ainsi à la même classe d'isomorphisme. Nous avons donc bien l'existence d'un isomorphisme $(\widetilde{M}, \tilde{x}) \rightarrow (\widetilde{M}, \tilde{x}')$ qui est par définition une transformation de revêtement. \square

Ce résultat explique en parti le rôle de π_1 et décrit le groupe $\text{Deck}(\widetilde{M})$ d'un revêtement \widetilde{M} donné. Nous voudrions maintenant, pour conclure cette approche, avoir une sorte de réciproque qui permet cette fois de partir d'un groupe de transformation et de construire un revêtement grâce à celles-ci. Pour arriver à ce résultat il faut être un peu précautionneux. Partons de \widetilde{M} une variété et munissons-nous

d'un groupe (pour la composition) d'homéomorphismes G (pour tout $g \in G$, $g : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$).

Définition 1.16. Une *action* d'un groupe d'homéomorphismes G sur \widetilde{M} est une application $G \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, définie par $(g, x) \rightarrow g \cdot x = g(x)$. Cette action satisfait logiquement les propriétés d'action de groupe. En effet, il est clair que $\forall x \in \widetilde{M}$, $\forall (g, g') \in G$ nous avons bien que $e \cdot x = Id \cdot x = Id(x) = x$ et également que $g' \cdot (g \cdot x) = g'(g(x)) = (g' \circ g) \cdot x$.

Pour pouvoir construire un revêtement à partir d'une action, nous sommes intéressés par l'ensemble quotient \widetilde{M}/G où chaque point correspond à une orbite de l'action (ie $[x] = Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$). Nous nommerons cet ensemble *l'espace des orbites*. Mais pour obtenir un espace des orbites convenable (entendez par là des variétés ou des orbifolds que nous introduirons plus tard) il est nécessaire d'exiger certaines conditions.

Définition 1.17. Nous disons que l'action de G est *proprement discontinue* si pour tout compact $K \subset \widetilde{M}$, l'ensemble $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

De plus, nous disons que G agit *librement* si tous les stabilisateurs de points sont réduits au neutre, autrement dit, si tous les $g \in G$ différents de Id ne possèdent pas de point fixe.

Proposition 1.18. *Si l'action de G est libre et proprement discontinue sur la variété \widetilde{M} , alors la projection $p : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$, $p(x) = Gx$ est un revêtement normal. De plus, G est le groupe de transformations de revêtement correspondant.*

Je ne démontrerai pas cette dernière proposition. Il s'agit d'un très bon exercice de compréhension qui s'appuie principalement sur la définition des objets. Nous pourrions toutefois trouver les détails dans (Hatcher, 2002) (proposition 1.40). Attardons-nous plutôt sur différents exemples qui illustrent les notions de cette

partie. Pour bien les visualiser je vous encourage à regarder les animations disponibles sur (Saint-Gervais, 2015) (vidéos intitulés *Revêtement universel du tore*, *Revêtement universel de la bouteille de Klein*) car elles y sont particulièrement bien réalisées.

Exemple. 1. Soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement. Alors le groupe $\text{Deck}(\widetilde{M})$ agit librement, proprement et discontinuement sur \widetilde{M} . De plus, si le revêtement est normal, alors l'espace des orbites obtenu est homéomorphe à M .

2. Plus concrètement posons $\widehat{M} = \mathbb{R}^2$ et $M = T^2$. Comme $\pi_1(\mathbb{R}^2, x) = 0$ nous sommes en présence du revêtement universel. Il faut visualiser le tore comme un rectangle dont les bords ont été collés deux à deux (il s'agit de son polygone fondamental). L'équivalence entre les deux est représentée par la figure 1.1. Ainsi un pavage de \mathbb{R}^2 par des rectangles nous donne une infinité de copies de T^2 . Considérons le pavage par le quadrillage classique du plan. Les transformations de revêtement correspondent ici à changer les carrés de place et sont donc engendrées par les translations $a(x, y) = (x, y + 1)$ et $b(x, y) = (x + 1, y)$. Donc nous avons bien $\pi_1(T^2, x) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \text{Deck}(\widehat{M})$. Les deux translations a, b correspondent aux générateurs classiques du groupe fondamental du tore. Visuellement si nous prenons un point dans $[0, 1] \times [0, 1]$ et que nous relevons le lacet b nous obtenons un segment horizontal de longueur 1 qui décrit exactement l'effet de la translation b sur ce point. Réciproquement si nous prenons a, b deux translations de \mathbb{R}^2 qui ne sont pas colinéaires, nous obtenons un groupe G qui agit librement, proprement, discontinuement et \mathbb{R}^2/G est bien isomorphe à un tore!

3. Considérons maintenant $M = K$ la bouteille de Klein. Son polygone fondamental est un rectangle dont les côtés ont été collés deux à deux tel qu'un des deux collages renverse l'orientation (voir figure 1.2). Nous pouvons montrer que le tore est un 2-revêtement de K . L'image est la suivante : si nous

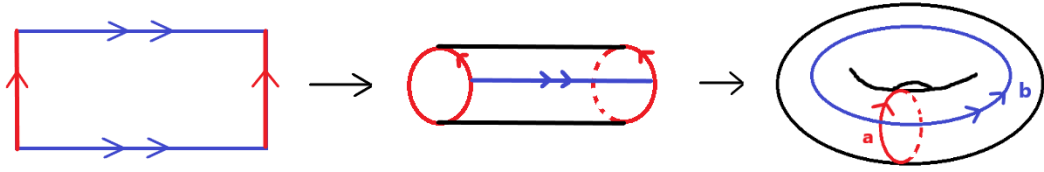


Figure 1.1 Polygone fondamental du Tore

collons deux fois le polygone fondamental de K côte-à-côte (en retournant la seconde copie), nous obtenons celui du tore (voir figure 1.3). Ainsi $\text{Deck}(T^2)$ correspond uniquement à échanger ces deux feuilles de place. Si nous notons $\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ et $\pi_1(K) = \langle a, b \mid ba = a^{-1}b \rangle$ alors la projection est définie par $p_*(a) = a$ et $p_*(b) = b^2$. Donc $\text{Deck}(T^2) \cong \pi_1(K) / p_*(\pi_1(T^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Les propriétés du revêtement universel nous donnent que $\widehat{K} = \widehat{T^2} = \mathbb{R}^2$. Il est intéressant de visualiser sa construction (voir (Saint-Gervais, 2015)). Nous pouvons générer K à partir de celui-ci grâce à l'action du groupe engendré par les deux homéomorphismes $a(x, y) = (x, y+1)$ et $b(x, y) = (x+1, -y)$ par exemple.

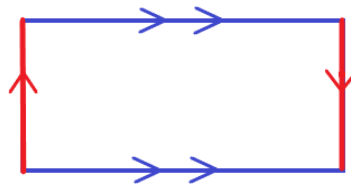
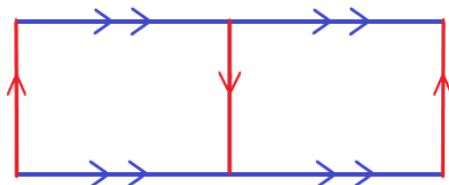


Figure 1.2 Polygone fondamental de K

4. De même si $M = \mathbb{RP}^2$, $\widehat{M} = S^2$ nous avons $\text{Deck}(S^2) = \{Id, -Id\} =: G$ et $S^2 / G = \mathbb{RP}^2$. Nous pouvons en déduire que $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ces exemples finissent d'expliciter le rôle prédominant de π_1 lors de l'étude des

Figure 1.3 2-revêtement de K

revêtements, intuitivement il suffit de quotienter le revêtement universel par le groupe fondamental pour décrire notre variété. De plus, cela illustre qu'une bonne connaissance des revêtements nous permet d'obtenir des informations sur l'espace de base.

1.3 Un peu de géométrie

Nous remarquons également dans les précédents exemples qu'un même espace peut générer deux variétés différentes selon le groupe d'homéomorphisme que nous faisons agir dessus. Dans nos exemples cela correspondait à K et T^2 qui provenaient tous les deux de \mathbb{R}^2 . Cette observation engendre de nombreuses interrogations : Quelles variétés proviennent d'un quotient d'un même revêtement universel ? Pouvons-nous lister tous les revêtements universels ? Pouvons-nous décrire les groupes d'homéomorphismes qui agissent librement, proprement et discontinuement ? Les variétés issues d'un même espace possèdent-elles des propriétés communes ? Ces questions particulièrement intéressantes sont au coeur de nombreuses recherches et jouent un rôle important dans notre compréhension des variétés. La relation de commensurabilité étudiée dans ce mémoire n'en est qu'une facette. Nous allons donc tracer dans cette section les grandes lignes de cette théorie qui fournit une approche plus géométrique de nos objets.

Pour commencer nous allons préciser un peu nos recherches. Nous ne nous intéresserons pas aux homéomorphismes en général mais plutôt au groupe réduit des isométries. Cela permet d'obtenir des liens géométriques très forts lorsque nous quotientons, mais aussi une classification plus précise. Cette restriction nous plonge également dans la géométrie riemannienne qui s'est intéressé à ces questions. Mais pour pouvoir parler d'isométrie et de géométrie il faut préalablement disposer d'une métrique précise sur nos revêtements universels. Une fois ce problème résolu nous reviendrons à nos quotients et nous définirons naturellement le concept de géométrie introduit par Thurston qui permet de formaliser tous les précédents questionnements. Lors de cette section nous nous appuierons notamment sur l'article très imagé de Peter Scott concernant les différentes géométries (Scott, 1983).

1.3.1 Une métrique «agréable»

Commençons par quelques définitions et résultats de topologie différentielle essentiels à la construction d'une telle métrique. Comme il ne s'agit pas ici du sujet étudié je passerai rapidement sur cette partie et me contenterai de définir qu'intuitivement certaines notions bien qu'elles soient des plus importantes dans leur domaine. Les ouvrages (Hitchin, 2014) et (Tu, 2017) apporteront bien plus de précisions et de détails.

Définition 1.19. Soient M, N deux variétés lisses. $F : M \rightarrow N$ est une *application lisse* si pour tout $x \in M$ et toutes cartes de coordonnées (U_α, ϕ_α) avec $x \in U_\alpha$ et (V_i, ψ_i) avec $F(x) \in V_i$, l'application composée $\psi_i \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ .

Nous noterons $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions lisses $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Il s'agit d'un espace vectoriel.

Définition 1.20. Soit M une variété différentielle de dimension n , nous défi-

nissons un *vecteur tangent* en $m \in M$ comme étant une fonction linéaire $X_m : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibnitz : $X_m(fg) = f(m)X_m(g) + g(m)X_m(f)$. Nous pouvons montrer que l'ensemble des vecteurs tangents de M en m est un espace vectoriel de dimension n que nous désignons par $T_m(M)$ et appelons *espace tangent* de M en m .

Ces définitions et celles qui suivent posent les bases de la topologie différentielle et permettent une étude approfondie des variétés lisses, mais elles ont aussi l'inconvénient d'être très techniques. Intuitivement nous savons que notre variété ressemble localement à \mathbb{R}^n grâce à notre atlas (U_α, ϕ_α) . Nous nous servons donc de cette ressemblance pour définir la dérivabilité d'une application localement en copiant la définition classique de dérivabilité dans \mathbb{R}^n . La définition de vecteur tangent correspond quand à elle à celle d'une dérivé directionnelle dans \mathbb{R}^n . En effet, lorsque que nous travaillons dans la cadre habituel $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nous pouvons définir en un point $a \in \mathbb{R}^n$ la dérivé directionnelle correspondant au vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ par $L_u(a) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Nous pouvons donc voir un vecteur tangent comme une direction instantanée dans laquelle peut se déplacer une fonction à un point donné, de la même façon qu'un vecteur u définit une direction instantanée possible pour une fonction classique. Ainsi $X_a(f)$ correspond à la vitesse de f dans la direction définie par X au point $a \in M$ et changer de vecteur tangent X revient à considérer une direction différente. Il est d'ailleurs aussi possible de définir un vecteur tangent comme une classe d'équivalence des chemins lisses de M possédant la même direction est la même vitesse.

Définition 1.21. Un *champs de vecteurs lisse* X est un choix lisse d'un vecteur tangent pour tout $m \in M$. Autrement dit c'est une fonction lisse $X : M \rightarrow TM =: \bigcup_{x \in M} T_x M$, qui est une section lisse du fibré tangent.

Définition 1.22. Une *variété riemannienne* est une variété différentiable M telle qu'en tout $m \in M$ il existe une forme quadratique définie positive g_m sur l'espace

tangent $T_m M$. De plus nous exigeons une certaine régularité sur g : pour tout champs de vecteurs lisses X, Y de M , l'application $m \rightarrow g_m(X_m, Y_m)$ est de classe C^∞ .

Nous disons alors que g est une *métrie riemannienne* sur M .

Nous pouvons définir la norme associée sur chaque espace tangent par $\| \cdot \|_m : T_m M \rightarrow \mathbb{R}$, et $\|v\|_m = \sqrt{g_m(v, v)}$.

Théorème 1.23. *Toute variété lisse admet une infinité de métriques riemanniennes.*

Nous possédons maintenant toutes les définitions et résultats nécessaires mais pour autant une métrie riemannienne ne semble pas donner exactement ce que nous recherchons ! En effet, nous souhaitons obtenir une métrie sur notre variété M mais nous ne possédons pour l'instant qu'une métrie sur chacun des espaces tangents. Nous allons donc régler ce problème avec la construction qui suit.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. Nous pouvons définir la longueur de cette courbe par : $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Nous admettons que la longueur est bien indépendante du paramétrage et qu'elle possède les caractéristiques évidentes que nous pouvons souhaiter. L'idée est que g nous permet de mesurer la vitesse d'une courbe en chaque point, ainsi en intégrant nous obtenons bien la longueur d'arc classique. Nous pouvons alors définir la distance entre deux points $x, y \in M$ comme la taille de la courbe la plus petite les séparant, ie $d(x, y) = \inf L(\gamma)$.

Définition 1.24. Nous disons qu'une variété riemannienne M est *complète* si l'espace M est complet pour la distance riemannienne, ie toutes les suites de Cauchy y convergent.

Nous avons donc un moyen de trouver des métriques sur nos revêtements, il ne

nous reste donc plus qu'à choisir quelles métriques nous intéressent car deux métriques différentes vont posséder des isométries différentes et ainsi engendrer des variétés potentiellement très différentes elles aussi. Nous allons donc nous concentrer sur les métriques complètes (car elles sont logiquement plus agréables) mais aussi utiliser la notion de courbure pour faire ce choix. Il existe plusieurs définitions équivalentes de la courbure mais toutes sont relativement techniques. La plus intuitive me semble l'approche par la courbure sectionnelle que nous allons décrire de façon superficielle pour nous éviter de nombreux calculs peu agréables..! La courbure sectionnelle est calculé en chaque point de la variété à partir de son espace tangent. Intuitivement elle correspond, en chaque point, à un réel qui décrit la déformation locale de notre variété. La valeur de ce réel décrit à quel point la variété est courbée, déformée en ce point et son signe représente la "direction" de cette déformation. Cette notion dépend fortement de la métrique choisie (nous pouvons voir une métrique comme une visualisation d'une déformation de l'espace). Par exemple pour S^2 la métrique naturelle induite par \mathbb{R}^3 possède une courbure constante égale à 1. Le plan \mathbb{R}^2 équipé de sa métrique classique possède lui une courbure constante égale à 0. Les variétés à courbure négative constante ne sont par contre pas visualisable. Nous définirons dans les prochaines pages le plan hyperbolique qui en est un exemple. Dans les deux premiers cas nous visualisons bien que la déformation est la même partout, c'est pour cela que nous obtenons des courbures constantes. Intuitivement une personne se trouvant sur une variété possédant une métrique à courbure constante verra la même image quelque soit l'endroit où il se situe et quelle que soit la direction dans laquelle il regarde.

Les métriques complètes avec une courbure constante seront donc notre premier choix et nous verrons qu'elles sont suffisantes pour décrire les variétés de dimension 2. Toutefois, nous aurons besoin d'être un peu plus général en dimension 3. Introduisons donc finalement la notion de métrique homogène avant de revenir à l'étude des quotients d'où nous sommes partis. Intuitivement un observateur sur

une variété possédant une métrique homogène verra bien la même image quelque soit l'endroit où il se situe mais par contre il verra potentiellement une image différentes selon la direction dans laquelle il regarde.

Définition 1.25. Nous disons qu'une action d'un groupe G sur un espace non vide M est *transitive* si elle ne possède qu'une seule orbite. Autrement dit, pour tout $x, y \in M$ il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

Définition 1.26. Soit M une variété équipée d'une métrique. Nous disons de cette métrique qu'elle est *localement homogène* si pour tout $x, y \in M$ il existe U et V des voisinages de ces points et une isométrie $(U, x) \rightarrow (V, y)$.

De plus une métrique est *homogène* si le groupe d'isométries de M agit transitivement.

1.3.2 Les géométries de Thurston

Maintenant que nous avons suffisamment d'éléments pour décrire les métriques sur nos espaces nous pouvons nous ramener aux questionnements qui avaient motivé notre étude dans un premier temps. L'idée de base consistait à essayer de décrire les variétés comme des quotients de leur revêtement universel par des isométries. Afin de rendre nos raisonnements des plus centraux nous aimerions que n'importe quelle variété admette une telle description. C'est ce but qui guidera l'étude de cette section. Pour formaliser cela nous allons définir le concept crucial de géométrie.

Remarque 1.27. Nous nous restreindrons à partir de maintenant aux espaces des orbites compacts sauf mention du contraire. En effet, la théorie de géométrisation est déjà très compliquée dans ces cas et très peu d'éléments sont connus pour les cas non compacts. Il en sera de même pour la relation de commensurabilité qui est étudiée que dans les cas compacts.

Définition 1.28. Soit X une variété simplement connexe avec une structure riemannienne complète, tel que son groupe d'isométrie agit transitivement. Nous disons que M possède une *structure géométrique modelée sur X* si M est une variété fermée décrite par $M = X/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe d'isométries de X tel que $X \rightarrow X/\Gamma$ est un revêtement normal. Nous disons également que X définit une *géométrie*.

Remarque 1.29. X est bien le revêtement universel de M car c'est un revêtement simplement connexe. Cette définition correspond donc exactement à ce que nous regardions.

Le premier avantage de cette définition est qu'elle nous permet de définir une métrique agréable sur les variétés quotient grâce à celle sur notre géométrie. En effet, si nous posons M et X tel que décrit dans la définition nous avons que X est un revêtement de M donc si nous considérons un chemin dans M , le théorème de relèvement (1.6) nous assure qu'il en existe des copies dans X . Nous pouvons alors définir la longueur d'un chemin dans M par la longueur d'un de ses relevés dans X . Pour que notre construction soit bien définie il est nécessaire que chaque relevé dans X possède bien la même longueur. C'est le cas car nous avons quotienté par des isométries, ainsi nos transformations de revêtements sont ces mêmes isométries (proposition 1.18) (c'est un très bon exercice de comprendre pourquoi cela implique que les relevés possèdent la même longueur ! Cela permet de se souvenir des premiers résultats sur le groupe $\text{Deck}(X)$). Cette construction nous permet également d'obtenir que la projection $p : X \rightarrow X/\Gamma$ est localement une isométrie. Maintenant si X possède une métrique complète avec une courbure constante alors ça sera aussi le cas de celle engendrée sur M . D'un autre côté si la métrique sur X est complète et homogène alors la métrique sur M sera complète est localement homogène.

Attardons-nous un instant sur la signification du concept de géométrie. Nous venons de voir que lorsque que nous avons une géométrie, toutes les variétés modelées dessus possèdent une métrique héritée qui est très semblable. Ainsi les variétés quotient posséderont beaucoup de points communs géométriques avec leur modèle. Par exemple nous pouvons penser à la forme des géodésiques, aux longueurs, ou aux théorèmes classiques tels que la somme des angles d'un triangle, etc ... Ce sont ces liens qui ont donné ce nom à cette définition ! L'étude de ce concept relève donc d'une approche et d'une intuition très géométrique là où les variétés étaient souvent étudiées avec des outils topologiques ou différentiels. Même si nous savions depuis longtemps qu'il existait une relation très forte entre topologie et géométrie (notamment en dimension 2), c'est la première fois qu'elle est formalisée d'une façon aussi précise. Concluons ces remarques en illustrant nos propos par quelques exemples de géométries de dimension 2.

- Exemples.**
1. Considérons \mathbb{R}^2 , nous avons déjà mentionné que sa métrique classique est complète et a une courbure constante égale à 0. Pour préciser que nous considérons \mathbb{R}^2 avec cette métrique en particulier nous noterons ce couple E^2 à l'avenir. Cet exemple produit la géométrie euclidienne avec laquelle nous sommes à priori très à l'aise ! Par exemple la somme des angles d'un triangle y est égal à π .
 2. Nous avons également dit que la métrique induite par \mathbb{R}^3 sur la sphère S^2 est complète et a une courbure constante égale à 1. De plus, nous avons bien que $\pi_1(S^2) = 0$, donc S^2 avec sa métrique naturelle définit elle aussi une géométrie dite sphérique. Une des différences classiques est que la somme des angles d'un triangle de S^2 est toujours supérieure à π .
 3. Un dernier exemple que nous pouvons considérer est le plan hyperbolique de dimension deux noté H^2 . Nous pouvons le définir par exemple comme le demi plan supérieur équipé d'une métrique différente. C'est-à-dire $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

et sa métrique est définie par la formule : $(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$. Il est possible de montrer qu'il s'agit bien d'une variété simplement connexe et que sa métrique est complète avec une courbure constante égale à -1 . Cet exemple définit donc une troisième géométrie en dimension deux. Nous pouvons remarquer que \mathbb{R}^2 est homéomorphe à H^2 mais ce choix de métrique engendre bien une géométrie très différente de E^2 . Je ne rentrerai pas dans le détail de ce que nous entendons par une courbure négative mais l'étude des espaces hyperboliques et de leur géométrie est très riche et nous pouvons par exemple s'intéresser à un ouvrage tel que (Benedetti et Petronio, 2012). Pour la comparer avec les géométries précédentes nous pouvons citer que la somme des angles d'un triangle y est toujours inférieure à π .

Maintenant que nous avons en tête quelques images de géométries nous pouvons nous demander quelles sont les variétés qui rentrent dans le cadre de cette définition. C'est en effet le but que nous nous étions fixé dans cette sous-section. Il est possible d'énoncer des conditions suffisantes pour qu'une variété M possède une structure modelée sur une géométrie.

Proposition 1.30. *Une variété M admet une structure géométrique si M possède une métrique complète et localement homogène.*

Démonstration. Nous avons vu avec la proposition 1.10 que M possède toujours un unique revêtement simplement connexe \widehat{M} . Nous pouvons alors équiper \widehat{M} d'une métrique (provenant du revêtement) telle que la projection $p : \widehat{M} \rightarrow M$ est localement une isométrie. Le groupe $\text{Deck}(\widehat{M})$ sera donc constitué d'isométries. De plus, la métrique héritée sera complète et localement homogène par construction. Enfin, comme \widehat{M} est simplement connexe nous obtenons que cette métrique est homogène globalement (c'est un résultat non-trivial démontré par Singer (Singer, 1960)). Donc M possède une structure géométrique modelée sur \widehat{M} . \square

Nous avons maintenant énoncé et expliqué ce qui constitue la base accessible et nécessaire à la compréhension de ce domaine. Nous profiterons donc de cette fin de partie pour énoncer les grands résultats concernant les géométries mais nous ne tenterons pas de les détailler. Nous pouvons consulter notamment (Scott, 1983) dont l'article s'attelle à décrire ces théorèmes. De plus, comme les résultats concernant la dimension trois sont particulièrement techniques ils comprendront quelques conditions que je n'ai pas évoquées pour ne pas alourdir l'étude.

Commençons par considérer le problème de classification dans l'autre sens. Nous aimerions connaître la liste des géométries et savoir lesquelles sont suffisantes pour décrire toutes nos variétés. En dimension deux le problème est relativement simple (elles correspondent à celles possédant une métrique à courbure constante). Mais en dimension trois les choses sont bien plus délicates.

Proposition 1.31. *Il existe seulement trois géométries de dimensions deux : \mathbb{E}^2 , \mathbb{H}^2 et S^2 .*

Théorème 1.32 (Thurston). *Toutes les géométries de dimension trois, maximales, qui admettent au moins un quotient compact (qu'elles revêtissent) sont équivalentes à l'une des huit géométries suivantes : \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 , S^3 , $S^2 \times \mathbb{E}^1$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$, $\widehat{SL_2\mathbb{R}}$, Nil ou Sol.*

Remarque 1.33. Nous disons d'une géométrie qu'elle est maximale si son groupe d'isométries est le plus grand groupe possible. Nous ignorons donc les cas où les groupes d'isométries peuvent être généralisés en de plus grands groupes avec une autre métrique.

Ces deux résultats sont fondamentaux dans ce domaine. Mis bout à bout avec ce qui a déjà été dit, ils nous permettent d'énoncer les deux théorèmes de classifications qui suivent.

Théorème 1.34. *Toute variété fermée de dimension 2 admet une structure géométrique modélée sur une seule des trois géométries E^2 , H^2 et S^2 .*

Remarque 1.35. Ce théorème est un résultat assez ancien et fut formulé de différentes façons. Il découle par exemple du théorème d'uniformisation de Poincaré. La formulation ici se fait en terme des géométries de Thurston car c'est l'aspect qui nous sera le plus utile dans ce mémoire.

Théorème 1.36 (Perelman, 2003). *Toute variété de dimension trois fermée, orientable et indécomposable peut être découpée selon des tores, de telle sorte que l'intérieur de chaque sous-variété ainsi obtenue soit géométrisable, avec un volume fini.*

Remarque 1.37. Dans les deux théorèmes il est question de variétés sans frontière (car fermées). Il s'agit des seules que nous avons pour l'instant définies. Nous reviendrons dans peu de temps sur cette notion de frontière qui sera importante pour l'étude de la commensurabilité. Il en est de même pour la notion d'orientabilité.

Ces deux théorèmes permettent d'affirmer que toutes les variétés de dimension 2 et 3 peuvent être décrites grâce à des propriétés géométriques ! En dimension deux le théorème est encore une fois relativement accessible et nous donne une correspondance parfaite entre les variétés et les structures géométriques. Quelques détails supplémentaires sont donnés dans (Scott, 1983) (p420, 421). Ce résultat, et notamment sa formulation, prend son importance quand nous le comparons au cas de dimension trois. En effet, au-delà du résultat technique en lui-même, il est surtout intéressant en tant que modèle pour la dimension supérieure. Nous reviendrons dessus au chapitre deux pour établir exactement quelle surface possède quelle géométrie. En dimension trois, il est nécessaire de découper notre variété en plusieurs morceaux pour obtenir le résultat voulu. Nous reviendrons sur ce genre

de découpage par des tores lors de l'étude approfondie de ces variétés.

Cette approche nous fournit donc de nouveaux outils pour étudier les variétés. En effet, nous pouvons déjà nous intéresser aux ressemblances entre deux variétés d'une même géométrie. La commensurabilité en sera un exemple. De plus, chaque géométrie possède ces propres spécificités et leur analyse est très riche (voir (Scott, 1983)). Enfin, comme la description de ces variétés passent par des sous-groupes d'isométries d'une métrique donnée, il est possible de déduire de nombreuses informations topologiques à partir d'informations et de restrictions algébriques sur ces sous-groupes. Or, historiquement, ces sous-groupes ont été longuement étudiés et nous possédons des descriptions et des intuitions très pertinentes sur eux.

Concluons par un petit aparté sur ce dernier théorème. Le résultat démontré par Perelman est l'une des plus grandes avancées récentes du domaine. Il vient valider la conjecture de géométrisation des 3-variétés formulée par Thurston en 1976. Cette conjecture implique avec elle de très nombreux résultats en topologie. Nous pouvons citer par exemple la conjecture de Poincaré connue pour faire partie des sept problèmes du millénaire recensés par l'Institut de Mathématiques Clay. Ce théorème et ces applications ont donc valu à Perelman de nombreuses récompenses, dont la médaille Fields en 2006, mais celui-ci choisira de toutes les refuser.

1.4 La relation de commensurabilité et premiers résultats

1.4.1 La commensurabilité

Maintenant que nous avons défini et décrit la plupart des objets nécessaires à notre étude, nous pouvons formuler la relation de commensurabilité qui sera le sujet de ce mémoire.

Définition 1.38. Deux variétés M_1 et M_2 connexes sont dites *commensurables* s'il

existe M définissant deux revêtements de degré fini $p_1 : M \rightarrow M_1$, $p_2 : M \rightarrow M_2$.
 Nous représenterons souvent cette relation par ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ M_1 & & M_2 \end{array}$$

Proposition 1.39. *La relation de commensurabilité est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Notons \sim la relation de commensurabilité, nous devons montrer les trois axiomes des relations d'équivalences.

- (i) Reflexivité : Comme la fonction $Id : M \rightarrow M$ définit un revêtement de degré 1, nous obtenons bien :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ Id \swarrow & & \searrow Id \\ M & & M \end{array} \iff M \sim M$$

- (ii) Symétrie : Soient M_1, M_2 deux variétés. Nous avons bien que $M_1 \sim M_2 \iff M_2 \sim M_1$ car la définition implique juste l'existence de deux revêtements dans les deux cas.

- (iii) Transitivité : Soient M_1, M_2 et M_3 trois variétés telles que $M_1 \sim M_2$ et $M_2 \sim M_3$. Montrons que $M_1 \sim M_3$. Nous savons qu'il existe M et M' tel que :

$$\begin{array}{ccccc} & M & & M' & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & p'_2 \swarrow & \searrow p_3 \\ M_1 & & M_2 & & M_3 \end{array}$$

Notons d_i les degrés de chaque revêtement.

Posons maintenant $X = \{(x, x') \in M \times M' \mid p_2(x) = p_2(x')\}$ que nous équipons

classiquement de la topologie induite par la topologie produit de $M \times M'$.

Nous allons montrer que X est bien un revêtement de degré fini de M via la restriction à X de la projection sur le premier facteur $q : M \times M' \rightarrow M$, $q(x, x') = x$. Avec une preuve symétrique nous obtiendrons le même résultat pour M' . Cela nous permettra de conclure que X est un revêtement de M_1 , M_2 et M_3 .

- Continuité : Par définition de la topologie produit, la projection q est continue. Donc sa restriction sur X l'est aussi.
- Surjectivité : Soit $x \in M$, nous avons que $p_2(x) \in M_2$. Comme p'_2 est surjective (car c'est un revêtement) il existe $x' \in M'$ tel que $p'_2(x') = p_2(x)$. Ainsi le point (x, x') appartient à X et $q|_X(x, x') = x$.
- Voisinage : Soit $x \in M$, $p_2(x) \in M_2$. Comme p_2 et p'_2 sont des revêtements nous avons deux voisinages trivialisants de $p_2(x)$ et donc en prenant l'intersection nous pouvons poser $V_{p_2(x)}$ un voisinage de $p_2(x)$ tel que $p_2^{-1}(V_{p_2(x)}) = \coprod_{i \in [1, \dots, d_2]} U_i \subset M$, et de même $p_2'^{-1}(V_{p_2(x)}) = \coprod_{j \in [1, \dots, d'_2]} U'_j \subset M'$. De plus, nos propriétés de revêtement nous donnent que $U_i \cong_{p_2} V_{p_2(x)} \cong_{p_2'^{-1}} U'_j$, $\forall i \in [1, \dots, d_2]$, $\forall j \in [1, \dots, d'_2]$.

Nous savons que $x \in U_l$ pour un unique $l \in [1, \dots, d_2]$. Prenons donc U_l ainsi défini comme notre voisinage trivialisant associé à q . Vérifions qu'il possède bien les propriétés attendues :

$$* \quad q^{-1}(U_l) = \{(x, x') \mid x \in U_l, p_2(x) = p_2(x')\}$$

Or comme $U_l \cong U'_j$, $\forall j \in [1, \dots, d'_2]$ nous avons que $\forall u \in U_l$ il existe un unique $u' \in U'_j$ tel que $p_2(u) = p'_2(u')$. Donc :

$$q^{-1}(U_l) = \coprod_{j \in [1, \dots, d'_2]} \{(x, p'_2|_{U'_j}{}^{-1}(p_2|_{U_l}(x))) \mid x \in U_l\}$$

Ainsi l'image réciproque de U_l est bien une union disjointe d'ouverts.

- * Notons W_j les composantes de $q^{-1}(U_l)$. Nous savons que $q|_{W_j}$ est continue car q l'est. De plus, c'est une bijection car pour tout j fixé $p'_2|_{U'_j}{}^{-1} \circ p_2|_{U_l}$ en est

une. Enfin comme $q(W_j) = U_l$ est un ouvert, nous pouvons vérifier facilement que $q|_{W_j}$ est une application ouverte.

Ainsi $W_j \cong_q U_l, \forall j \in [1, \dots, d'_2]$.

Donc X est un revêtement de degré d'_2 de M . De même, X est un revêtement de degré d_2 de M' . Le lemme qui suit cette preuve (et qui est relativement simple à montrer) nous permet donc de conclure que X est un revêtement de degré fini de M_1, M_2 et M_3 . Ainsi $M_1 \sim M_3$.

□

Lemme 1.40. *Soient $p : A \rightarrow B$ un revêtement de degré $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $q : B \rightarrow C$ un revêtement de degré fini $n \in \mathbb{N}$. Alors $q \circ p : A \rightarrow C$ est un revêtement de degré $d \times n$.*

Maintenant que nous avons introduit notre principale notion rappelons le cadre dans lequel nous travaillons : Nous nous intéressons aux variétés connexes, compactes de dimension 2 et 3 (le cas non-compact est très compliqué et très peu étudié). Le but sera donc de déterminer les classes d'équivalences de ces objets pour la relation de commensurabilité. La proposition 1.3 nous assure que dans une même classe de commensurabilité il n'y a que des variétés de même dimension. De plus, le lemme suivant nous permet aussi de voir que dans la classe d'une variété compacte il n'y a que des variétés compactes.

Lemme 1.41. *Soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré fini. Si M (respectivement \widetilde{M}) est un espace compact alors \widetilde{M} (respectivement M) l'est aussi.*

Démonstration. L'idée est de regarder l'intersection d'un recouvrement ouvert avec un recouvrement par des ouverts trivialisants puis de projeter (respectivement relever) dans l'autre espace.

Montrons le premier sens, le deuxième est similaire. Supposons que M soit compact. Soit \mathcal{C} un recouvrement ouvert de \widetilde{M} . Notons \mathcal{D} un recouvrement de \widetilde{M} par des ouverts trivialisants. Posons $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}_j \mid \forall i, j\}$ un recouvrement ouvert composé des intersections des ouverts de \mathcal{C} et des ouverts de \mathcal{D} . Nous avons alors que $p(\mathcal{E})$ est un recouvrement ouvert de M car : p est surjective, et comme $\forall l$ \mathcal{E}_l est inclus dans un ouvert trivialisant, $p(\mathcal{E}_l)$ est ouvert. La compacité de M nous permet d'en extraire un recouvrement fini $\mathcal{F} \subset p(\mathcal{E})$ encore inclus dans des ouverts trivialisants. Nous pouvons enfin relever \mathcal{F} dans \widetilde{M} . Il s'agit donc d'un recouvrement ouvert fini de \widetilde{M} (car le degré de p est fini) et chaque $p^{-1}(\mathcal{F}_k)$ est inclus dans un ouvert \mathcal{C}_i . Ainsi il suffit d'extraire de \mathcal{C} un ouvert pour chaque $p^{-1}(\mathcal{F}_k)$ pour obtenir un recouvrement fini de \widetilde{M} à partir de \mathcal{C} . \square

Mais allons un peu plus loin dans l'analyse avec deux nouvelles notions : les frontières et l'orientabilité. Il est possible de généraliser la définition de variété en y ajoutant de potentiels bords. Pour cela nous autorisons les cartes locales qui définissent sa structure à également être homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ pour une variété de dimension n . Un point est alors par définition sur le bord s'il possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ et qu'il est envoyé par cet homéomorphisme sur un point de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Par exemple en dimension 2 on voit que nos modèles pour les cartes deviennent donc le plan mais aussi le demi-plan supérieur (qui possède bien un «bord»). Cela permet de prendre en compte de nouveaux espaces tout en conservant les propriétés très fortes des variétés. Nous noterons alors le bord de M par ∂M , et nous pouvons remarquer que celui ci peut être constitué de différentes composantes connexes disjointes.

Remarque 1.42. Les variétés à bord et les variétés sans bord forment bien deux ensembles disjoints car les parties homéomorphes à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ (ie le bord) ne pourront jamais être incluses dans un voisinage de variété sans bord.

Proposition 1.43. *Le bord d'une variété de dimension n est une variété sans bord de dimension $n - 1$.*

Exemple. (i) Le disque D^2 est une variété de dimension deux à bord. De plus, son bord est égal à S^1 .

(ii) Une couronne $S^1 \times I$ est une variété de dimension deux qui possède deux bords disjoints. Nous avons alors $\partial(S^1 \times I) = (S^1 \times \{0\}) \sqcup (S^1 \times \{1\}) \cong S^1 \sqcup S^1$.

(iii) Le tore T^2 est une variété de dimension deux sans bord.

Lemme 1.44. *Soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement, si M (respectivement \widetilde{M}) possède un bord alors \widetilde{M} (respectivement M) en possède un aussi.*

Démonstration. De même que lors de la proposition 1.3 nous pouvons nous servir des ouverts trivialisants pour relever notre structure de variété. Ainsi un ouvert de bord sera bien relevé à un ouvert de bord.

Réciproquement, si un revêtement possède un bord alors la projection enverra ce bord sur un bord car c'est un homéomorphisme local. \square

En terme général, tout ce que nous avons montré pour les variétés sans bord jusqu'à maintenant s'applique également à ce type de variété. De plus, ce dernier lemme nous permet de voir que la présence d'un bord est aussi un invariant de commensurabilité. Donc les variétés à bord constituent des classes d'équivalences distinctes.

Définition 1.45. Nous disons d'une variété qu'elle est *fermée* si elle est compacte et sans bord.

La notion d'orientabilité est elle un peu plus délicate. Bien qu'elle soit très imagée elle demande beaucoup de formalisme en topologie différentielle ou en topologie algébrique. Ainsi nous nous contenterons d'une définition intuitive et vous

pouvez vous référer à (Hitchin, 2014) (p.57) ou à (Hatcher, 2002) (p.233) selon vos préférences pour une définition formelle. L'idée est de s'inspirer de la notion d'orientation de \mathbb{R}^n . Une variété est orientable s'il est possible de trouver un atlas où toutes les cartes ont une orientation qui s'accordent. C'est à dire où toutes les cartes qu'y s'intersectent sur la variété possèdent la même orientation dans \mathbb{R}^n . Intuitivement, une autre façon de voir cette notion est de considérer qu'une variété est orientable si pour tous ses points x , les lacets qui partent de x y reviennent avec la même orientation. Entendez par là que si nous dessinons un repère cartésien sur x et que nous lui faisons suivre le lacet, alors il reviendra avec la même orientation. De plus, si une variété est orientable alors elle possède deux orientations distinctes (comme c'est le cas pour \mathbb{R}^n).

Exemple. (i) Le tore T^2 et la couronne $S^1 \times I$ sont des variétés orientables.
(ii) Le ruban de Möbius ainsi que $\mathbb{R}P^2$ sont des variétés non-orientables.

Comme nous pouvons nous en douter les variétés orientables sont nettement plus agréables intuitivement. Ainsi nous aimerions réduire notre étude à celles-ci. C'est possible grâce au résultat classique suivant (la démonstration dépend de la définition choisie).

Proposition 1.46. *Toutes les variétés possèdent un 2-revêtement dit d'orientation. De plus, ce revêtement orientable est connexe si et seulement si la variété est non-orientable.*

Donc si M est une variété non orientable alors nous pouvons considérer \widetilde{M} son revêtement d'orientation. Nous savons que \widetilde{M} est connexe et nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 & \widetilde{M} & \\
 Id \swarrow & & \searrow p \\
 \widetilde{M} & & M
 \end{array}
 \iff M \sim \widetilde{M}$$

Ainsi nous nous contenterons de déterminer les classes des variétés orientables car le cas non-orientable est totalement déterminé par celui-ci.

Cela conclut la présentation de notre cadre de travail. Regardons maintenant un dernier résultat pour mieux comprendre les liens existants entre nos sections.

Théorème 1.47. *La géométrie d'une variété est un invariant de commensurabilité. Autrement dit, si deux variétés appartiennent à la même classe de commensurabilité alors elles possèdent nécessairement la même géométrie.*

Le fait que l'étude de commensurabilité soit liée aux géométries semble assez naturel car les deux notions reposent sur la théorie des revêtements. Visuellement nous avons construit les géométries comme un modèle et les revêtements comme des copies. Ainsi pour que deux variétés partagent un même revêtement il semble intuitif d'espérer qu'elles soient basées sur le même modèle géométrique.

Ce théorème apparaîtra naturellement en dimension 2 et sera particulièrement utile en dimension 3 où il guidera complètement l'organisation de notre étude.

Exemple. Seules deux variétés fermées, connexes de dimension 2 possèdent une géométrie sphérique. Il s'agit de S^2 et de $\mathbb{R}P^2$. Cette géométrie ne possède donc qu'une seule classe de commensurabilité de variétés fermées car S^2 est le 2-revêtement d'orientation de $\mathbb{R}P^2$.

Pour finir donnons déjà une idée de quelques applications de ce concept. Le principal intérêt consiste à trouver des liens entre les variétés pour affiner nos classifications. Or beaucoup de propriétés ont un très bon comportement vis-à-vis des revêtements finis. Ainsi deux variétés commensurables posséderont des caractéristiques semblables. Nous venons de voir le cas de la compacité et des frontières mais cela sera aussi vrai dans bien d'autres situations que nous aborderons dans ce mémoire (par exemple la finitude du volume, la caractéristique d'Euler etc..).

Pour des applications plus concrètes nous pouvons citer par exemple des liens avec l'important théorème de la rigidité de Mostow ou des articles de recherche plus récents concernant l'étude des noeuds : (Boileau et al., 2012).

1.4.2 Un aparté algébrique

Concluons ce chapitre d'introduction par un petit aparté algébrique et étymologique.

Nous disons généralement de deux grandeurs qu'elles sont commensurables si elles sont reliées par un nombre rationnel. L'utilisation de ce terme est donc justifiée dans notre cadre car de nombreuses quantités intrinsèques aux variétés, telles que leurs volumes, seront reliées par des rationnels dans une même classe de commensurabilité. Ceci s'explique par le fait que si \widetilde{M} est un n -revêtement de M alors ces quantités varient de M à \widetilde{M} en étant multiplié par n .

Nous pouvons aussi citer le fait que la notion de commensurabilité existe en algèbre.

Définition 1.48. Deux groupes G_1 et G_2 sont *commensurables* s'il existe $H_1 \subset G_1$ et $H_2 \subset G_2$ des sous-groupes d'index fini tel que $H_1 \cong H_2$.

La proposition suivante explique le lien qu'il existe entre les deux notions.

Proposition 1.49. *Soient M_1 et M_2 deux variétés commensurables, alors $\pi_1(M_1)$ est commensurable avec $\pi_1(M_2)$.*

Démonstration. Posons M la variété assurant la commensurabilité. Comme les projections p_{i*} sont injectives (proposition 1.7) nous pouvons facilement trouver un isomorphisme entre $p_1(\pi_1(M)) \subset \pi_1(M_1)$ et $p_2(\pi_1(M)) \subset \pi_1(M_2)$. De plus, la proposition 1.11 nous confirme que les groupes sont d'index fini. \square

Remarquons par contre que la réciproque est largement fautive car il est facile de trouver des groupes fondamentaux commensurables pour des variétés qui ne le sont pas. Par exemple nous pouvons citer S^1 et $S^1 \times S^2$ qui ont toutes les deux un groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z} mais qui ne peuvent pas être topologiquement commensurables car elles n'ont même pas la même dimension. Nous pouvons également citer l'exemple de $\mathbb{C}P^2$ et de $S^2 \times S^2$. Nous avons que $\pi_1(\mathbb{C}P^2) = 0$ et également que $\pi_1(S^2 \times S^2) = \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^2) = 0$. Ainsi les deux groupes fondamentaux sont commensurables mais les variétés, elles, ne le sont pas.

CHAPITRE II

LA COMMENSURABILITÉ DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 2

Commençons à décrire en détails chaque classe de commensurabilité. Nous avons déjà vu plusieurs résultats qui nous permettent de réduire l'étude aux variétés connexes, compactes, orientables sans perdre trop de généralité. Comme le titre l'indique nous nous intéresserons dans ce chapitre aux classes de commensurabilité des *surfaces* (autre nom donné aux variétés de dimensions 2). Nous séparerons le cas avec et sans frontière grâce au lemme 1.44.

Pour étudier ces cas il nous faudra faire un rappel de la classification des surfaces de dimension 2 qui est un résultat classique de topologie. Cela sera suffisant pour établir la classification des surfaces sans bord. Puis nous nous intéresserons au théorème de Massey qui nous permettra d'établir la classification des surfaces avec bord.

2.1 Propriétés des surfaces

2.1.1 Les surfaces sans bord

Les surfaces sont très bien comprises et se classifient de façon relativement simple. Mais pour pouvoir énoncer ces résultats et comprendre les idées qu'il y a derrière nous devons définir différents outils. Comme il s'agit là d'objets très classiques de topologie, qui de plus ne sont pas centraux dans notre sujet, nous passerons

rapidement sur certains d'entre eux.

Définition 2.1. Soient M_1 et M_2 deux surfaces. Nous pouvons former la *somme connexe* des deux surfaces en retirant d'abord l'intérieur d'un disque $D_i \subset \text{int}(M_i)$ aux deux variétés, puis en collant les deux nouvelles composantes de frontière homéomorphe à S^1 ensemble (via un difféomorphisme renversant l'orientation). Nous obtenons alors un espace qui sera encore une variété et que nous noterons $M_1 \# M_2$.

Exemple. Regardons les deux cas les plus courants :

1. La somme connexe de deux tores $T^2 \# T^2$ est homéomorphe à un «double tore» (un tore à «deux trous») ou plus formellement à une surface de genre 2.
2. La somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à une bouteille de Klein K .

Remarque 2.2. La somme connexe est un procédé qui peut être généralisé aux variétés de toutes dimensions. En dimension n , il suffit de se munir de boules de dimension n à la place de disques (qui sont des boules de dimension 2). Nous obtenons alors des frontières homéomorphes à S^{n-1} et il n'y a bien qu'une seule façon de les coller ensemble. À noter que cette unicité ne découle pas trivialement ! Si les détails vous intéressent vous pouvez consulter l'article (Kervaire et Milnor, 1963) (notamment la partie 2.). Il existe d'autres généralisations mais aucun de ces cas n'est nécessaire pour notre étude.

Remarque 2.3. Lors de la suite de ce mémoire il sera souvent question de «découper»/«retirer»/«coller» différents morceaux de variétés. Il s'agit là de procédures formellement définies (dont la construction requière quelques précautions que nous n'évoquerons pas) :

- Nous pouvons retirer certains morceaux en privant l'espace de cette partie. Par exemple, si nous considérons l'image d'un disque D dans une variété M

nous pouvons le retirer en faisant $M \setminus D$. Pour conserver des objets compacts nous travaillerons souvent implicitement avec $\overline{M \setminus D}$.

- Nous pouvons coller deux morceaux semblables grâce à un homéomorphisme. Par exemple nous pouvons coller deux disques D_1 et D_2 par leur frontière en utilisant un homéomorphisme $\varphi : \partial D_1 \cong S^1 \rightarrow \partial D_2 \cong S^1$. Nous considérons alors en fait l'objet : $D_1 \sqcup D_2 /_x \sim \varphi(x)$. Nous noterons le résultat $D_1 \cup_\varphi D_2$. Ici nous remarquons que $D_1 \cup_\varphi D_2 \cong S^2$ si $\varphi = id$.

Continuons les définitions concernant l'étude des 2-variétés.

Définition 2.4. Nous définissons le *genre* d'une surface fermée M comme étant le nombre maximal $g \in \mathbb{N}$ de courbes fermées simples disjointes γ_i qu'il est possible de considérer tel que $M \setminus \{\gamma_i\}$ soit encore connexe.

Intuitivement le genre correspond au nombre de «trous» dans le sens où une sphère à un genre égal à zéro, un tore à un genre égal à un, un «double tore» à un genre égal à deux ... Cette définition ne s'applique qu'aux variétés fermées mais des questions analogues se sont posées pour des surfaces non-compactes comme le plan et ont donné lieu à de très belles démonstrations comme celle du théorème de Jordan (qui statue que tout lacet simple du plan le sépare en deux composantes connexes distinctes).

Définition 2.5. Un *complexe simplicial triangulaire* est un graphe constitué de triangles disjoints et de triangles collés entre eux par leur arêtes ou leurs sommets. Les sommets des triangles constituent ce qu'on appelle les cellules de dimension 0, les arêtes sont les cellules de dimension 1, et les triangles sont celles de dimension 2.

Définition 2.6. Une *triangulation* d'une surface M est un homéomorphisme $h : K \rightarrow M$ où K est un complexe simplicial triangulaire.

Théorème 2.7. *Toute surface compacte admet une triangulation.*

Il s'agit d'un des résultats fondamentaux qui permet de démontrer la classification qui suivra.

Un dernier outil dont nous auront besoin pour ce chapitre est la caractéristique d'Euler. Sa définition repose généralement sur la théorie d'homologie qui fait partie des incontournables de la topologie algébrique. Néanmoins, comme nous n'aborderons presque pas l'homologie pendant ce travail, nous définirons la caractéristique avec une approche moins riche mais très intuitive (le lien entre les deux est décrit par le théorème 2.44 de (Hatcher, 2002)).

Définition 2.8. La *caractéristique d'Euler*, notée χ , est égale à la somme alternée du nombre de cellules d'un complexe simplicial triangulaire selon leur dimension. Ainsi pour une triangulation $h : K \rightarrow M$, nous avons que $\chi(M) = k_0 - k_1 + k_2$ où k_i correspond au nombre de cellules de dimension i . Un résultat classique nous donne que $\chi(M)$ est bien indépendant du choix de la triangulation.

Proposition 2.9. *Soient M_1 et M_2 deux surfaces, nous savons que*

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

$$\text{De plus } \chi(S^2) = 2, \chi(T^2) = 0, \chi(\mathbb{R}P^2) = 1.$$

Cette dernière proposition peut être démontrée en regardant l'effet d'une somme connexe sur le nombre de cellules et en regardant des triangulations pour les variétés citées.

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour énoncer la classification des surfaces.

Théorème 2.10. *Toute variété de dimension 2 connexe, fermée, est homéomorphe à une et une seule de ces trois variétés :*

- (i) La sphère S^2

(ii) Une somme connexe de $g \in \mathbb{N}^*$ tores T^2 .

(iii) Une somme connexe de $k \in \mathbb{N}^*$ plans projectifs $\mathbb{R}P^2$.

Les deux premiers cas correspondent aux variétés orientables et le troisième à celles qui ne le sont pas.

Démonstration. La preuve est conséquente, donc nous n'en donnerons que les idées. Une démonstration complète et détaillée est disponible ici : (Pol, 2012).

Prenons une surface M que nous triangulons avec $h : K \rightarrow M$. L'idée consiste à écrire le complexe K d'une façon méthodique. Comme il s'agit de triangles collés entre eux nous pouvons le représenter à plat, sous la forme d'un polygone avec des côtés identifiés. Il est ensuite possible de simplifier l'écriture de ce polygone avec différentes manipulations. Nous montrons ainsi que nous pouvons toujours réduire K à un certain type de polygone précis. Nous remarquons alors que le polygone obtenu correspond forcément à une des trois familles du théorème (nous avons déjà vu par exemple lors de 1.2 qu'un rectangle avec les côtés identifiés deux à deux de façon orientable décrit un tore). Par conséquent M est bien homéomorphe à une des trois possibilités du théorème.

Il reste à montrer que toutes les surfaces du théorème sont bien distinctes à homéomorphisme près. Pour cela nous pouvons déjà remarquer que deux surfaces homéomorphes possèdent la même orientabilité. Il suffit alors de montrer que la caractéristique d'Euler est aussi un invariant de classes d'homéomorphismes. En effet, la proposition 2.9 permet alors d'affirmer que dans chaque cas (orientable ou non) les surfaces peuvent être distinguées par leurs caractéristiques d'Euler.

Lors du dernier argument nous aurions pu différencier les variétés par leur genre (plutôt que par leur caractéristique d'Euler) car dans une somme connexe le genre est égal au nombre de tores (si orientable) ou est égal au nombre de plans projectifs (si non-orientable). □

Nous pouvons maintenant compléter le théorème 1.34 avec cette classification.

Proposition 2.11. *Les surfaces fermées sont réparties selon leur géométrie de la façon suivante :*

Géométrie	χ	Variétés
Sphérique	$\chi > 0$	$S^2, \mathbb{R}P^2$
Euclidienne	$\chi = 0$	T^2, K
Hyperbolique	$\chi < 0$	Toutes les autres

2.1.2 Les surfaces avec bords

Proposition 2.12. *Une surface compacte avec bord peut être décrite comme une surface fermée à laquelle nous aurions retiré un nombre fini de disques ouverts. Pour chacun des disques retirés nous obtenons une composante de frontière distincte homéomorphe à S^1 .*

Proposition 2.13. *Le nombre de composantes de frontière d'une surface à bord est invariant par homéomorphisme.*

Démonstration. Si nous possédons un homéomorphisme $h : M_1 \rightarrow M_2$, alors la restriction de h au bord de M_1 est encore un homéomorphisme, et donc il préserve les composantes connexes. □

Au final nous obtenons que la classification des surfaces à bord correspond à la classification des surfaces sans bord à laquelle nous avons rajouté pour chaque variété un degré de liberté $k \in \mathbb{N}^*$ qui décrit le nombre de composantes de frontière connexe.

Exemple. Une sphère S^2 avec un disque retiré est homéomorphe à un disque D^2 . Une sphère S^2 avec deux disques retirés est homéomorphe à une couronne $S^1 \times I$.

Pour conclure cette section regardons ce que deviennent les invariants d'une surface fermée M à qui nous avons retiré $k \in \mathbb{N}^*$ disques pour former la surface compacte à bord M' :

- Dans une triangulation, retirer un disque ouvert revient à retirer l'intérieur d'un triangle. Donc si nous regardons la définition de la caractéristique d'Euler nous obtenons logiquement que $\chi(M') = \chi(M) - k$.
- En considérant la définition basée sur l'orientation des lacets, il est clair que l'orientabilité n'a pas de raison d'être affectée par une telle opération.
- Le genre de M' est défini par convention comme étant le genre de M .

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, nous serons particulièrement intéressés par les surfaces orientables. La classification établie nous permet donc de les représenter avec une notation unifiée : une surface orientable de genre g possédant k composantes de frontière sera écrite Σ_g^k (ou plus simplement Σ_g si $k = 0$). De plus, toutes les relations entre les invariants peuvent être résumées par cette dernière proposition.

Proposition 2.14. *Les invariants d'une surface orientable Σ_g^k avec $g, k \in \mathbb{N}$ sont liés par la formule : $2g + k = 2 - \chi$.*

2.2 La commensurabilité des surfaces fermées

Pour pouvoir effectuer la classification de ces classes de commensurabilité nous allons d'abord avoir besoin d'un résultat sur la caractéristique d'Euler.

Proposition 2.15. *Soient \widetilde{M} , M des surfaces compactes et $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors $\chi(\widetilde{M}) = n \times \chi(M)$.*

Démonstration. L'idée de cette démonstration repose sur le fait que nous pouvons relever un objet $X \subset M$ simplement connexe dans notre revêtement. En effet, nous

relevons d'abord un de ces points x_0 à \tilde{x}_0 , puis pour relever un point $x \in X$ nous pouvons nous munir d'un chemin σ tel que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 1.6 pour relevé σ à $\tilde{\sigma}$ et choisir $\tilde{\sigma}(1)$ comme relevé de x . La condition simplement connexe nous assure que le procédé est bien défini (voir le critère de relèvement de (Hatcher, 2002) : proposition 1.33).

Avec cela en tête considérons une triangulation de M . Notons k_i le nombre de cellules de dimension i . Comme chaque triangle T_j est simplement connexe nous pouvons le relever à n copies de lui-même en répétant le procédé pour chacun des n relevé d'un $x_0 \in T_j$. Ainsi nous obtenons une triangulation de \widetilde{M} qui possède $n \times k_2$ triangles. Nous pouvons faire la même chose avec chaque arête des triangles T_j et obtenir que notre triangulation de \widetilde{M} possède $n \times k_1$ arêtes. Enfin chaque sommet est relevé à n sommets distincts. Donc au final $\chi(\widetilde{M}) = nk_0 - nk_1 + nk_2 = n \times \chi(M)$ \square

Corollaire 2.16. *Soient \widetilde{M} , M des surfaces compactes et $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors $\text{signe}(\chi(\widetilde{M})) = \text{signe}(\chi(M))$.*

Rappelons également que si $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement alors M possède un bord si et seulement si \widetilde{M} en possède un (lemme 1.44).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.17. *Il n'existe que trois classes de commensurabilité pour les surfaces fermées. De plus, deux surfaces fermées sont commensurables si et seulement si elles possèdent la même géométrie.*

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux surfaces fermées tel que $M_1 \sim M_2$. Notons M leur revêtement en commun.

Le corollaire 2.16 nous donne que $\text{signe}(\chi(M_1)) = \text{signe}(\chi(M)) = \text{signe}(\chi(M_2))$.

Ainsi nous pouvons diviser la preuve en trois cas selon le signe de $\chi(M)$ car pour être dans une même classe il faut avoir une caractéristique de même signe.

1. $\chi(M) > 0$:

Notre classification couplée à la proposition 2.9 nous permettent d'affirmer que seules deux surfaces possèdent une caractéristique d'Euler strictement supérieure à 0. Il s'agit de S^2 et de $\mathbb{R}P^2$. Or nous avons déjà vu en 1.2 que la sphère est un 2-revêtement (d'orientation) du plan projectif réel. Donc nous avons :

$$\begin{array}{ccc} & S^2 & \\ Id \swarrow & & \searrow p \\ S^2 & & \mathbb{R}P^2 \end{array} \iff S^2 \sim \mathbb{R}P^2$$

Ainsi il n'y a qu'une seule classe de commensurabilité telle que $\chi(M) > 0$ et elle correspond à la géométrie sphérique.

2. $\chi(M) = 0$:

Là encore seules deux surfaces possèdent une caractéristique égale à zéro. Il s'agit de T^2 et de K . À nouveau nous avons montré en 1.2 que le tore est un 2-revêtement (d'orientation) de la bouteille de Klein. Ainsi $T^2 \sim K$ et il n'y a donc également qu'une seule classe de commensurabilité telle que $\chi(M) = 0$. Elle correspond à la géométrie euclidienne classique.

3. $\chi(M) < 0$:

Toutes les surfaces restantes possèdent une caractéristique d'Euler inférieure à 0. Nous allons observer qu'ici aussi il n'y a qu'une seule classe de commensurabilité. Elle correspondra à la géométrie hyperbolique. Pour cela nous pouvons nous contenter de montrer que Σ_g est commensurable avec $\Sigma_{g'}$,

pour tout $g, g' \geq 2$. En effet, nous avons déjà vu qu'une surface non orientable est toujours en relation avec son 2-revêtement d'orientation. De plus, le signe de sa caractéristique est préservé, donc le cas orientable est suffisant. Soit $g \geq 2$, démontrons d'abord que $\Sigma_g \sim \Sigma_2$. Regardons donc les revêtement de Σ_2 .

Posons $n = g - 1 \geq 1$ et considérons $H_1(\Sigma_2)$ le premier groupe d'homologie de Σ_2 . Nous pouvons définir ce groupe comme étant l'abélianisation de $\pi_1(\Sigma_2)$. Ainsi la projection nous donne $\pi_1(\Sigma_2) \twoheadrightarrow H_1(\Sigma_2)$.

D'un autre côté, il est classique de montrer que $H_1(\Sigma_2) = \mathbb{Z}^4$ en abélianisant $\pi_1(\Sigma_2)$ (voir (Hatcher, 2002) pour le calcul de $\pi_1(\Sigma_2)$ (avec le théorème de Van Kampen)). Ainsi il est facile de définir un morphisme $H_1(\Sigma_2) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Mis bout à bout nous obtenons le morphisme $\pi_1(\Sigma_2) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que nous noterons φ . Nous avons que $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(\Sigma_2)$ donc le théorème 1.12 établit l'existence d'un revêtement normal de Σ_2 associé à ce sous-groupe. Nous le noterons $\tilde{\Sigma}$ et la proposition 1.11 nous affirme qu'il est de degré $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$.

Nous savons que $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ par la proposition 2.9. Donc nous calculons que $\chi(\tilde{\Sigma}) = n \times \chi(\Sigma_2) = -2n = -2(g - 1) = 2 - 2g = \chi(\Sigma_g)$. La classification des surfaces fermées nous permet de conclure que $\tilde{\Sigma} = \Sigma_g$ car $\tilde{\Sigma}$ est orientable (il ne possède pas de lacet non orientable car il revêt Σ_2 qui n'en possède pas non plus). Ainsi Σ_g est un revêtement de Σ_2 et donc $\Sigma_g \sim \Sigma_2$ pour tout $g \geq 2$.

La transitivité de la relation de commensurabilité nous permet donc de conclure que $\Sigma_g \sim \Sigma_{g'}$ pour tout $g, g' \geq 2$.

□

2.3 La commensurabilité des surfaces compactes à bord

La classification de ces classes de commensurabilité repose essentiellement sur le théorème des revêtements de Massey (Massey, 1974). Celui ci permet de décrire complètement les relations de revêtements en termes uniquement algébriques dans le cas des surfaces à bord compactes et orientables. Mais avant de s'y consacrer regardons d'abord comment agit un revêtement sur les composantes de frontière.

Proposition 2.18. *Soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré $n \in \mathbb{N}$ entre deux surfaces à bord. Notons leur nombre de composantes connexes de frontières respectivement \widetilde{k} et k . Alors l'inégalité suivante est respectée : $k \leq \widetilde{k} \leq nk$.*

Afin d'alléger les démonstrations nous préférons à partir de maintenant noter uniquement «une frontière» ou «une composante» pour signifier «une composante connexe de la frontière».

Démonstration. Notons $\partial_1, \dots, \partial_k$ les frontières de M et $\widetilde{\partial}_l$ celles de \widetilde{M} .

L'idée est que lorsque nous relevons une frontière ∂_i chaque relevé est connexe et ne peut pas se joindre aux relevés d'une autre frontière ∂_j ($j \neq i$). Le seul degré de liberté provient donc du fait que les n copies d'une même frontière ∂_i peuvent être connexe entre elles ou non.

(i) $k \leq \widetilde{k}$: Supposons que $\widetilde{k} < k$. Comme p est continue elle préserve la connexité donc certaines frontières de M ne sont pas des images de frontières de \widetilde{M} . Prenons ∂_i l'une d'entre elles et regardons $x \in \partial_i$. Posons $U_x = W_x \cap V_x$ où W_x est un voisinage trivialisant de x pour p et V_x une carte de variété. Nous avons alors $p^{-1}(U_x) = \coprod_{j \in J} T_j$ et $T_j \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi nous obtenons une contradiction car la pré-image de ∂_i est bien une frontière.

(ii) $\widetilde{k} \leq nk$: Un raisonnement similaire à ci-dessus permet de montrer que la projec-

tion d'une frontière est forcément une frontière. De plus, comme p est continue elle préserve la connexité et donc $p(\tilde{\partial}_i) \subset \partial_i$ pour un certain i . Montrons donc que $p^{-1}(\partial_i)$ est composée d'au plus n frontières et nous pourrons conclure.

Fixons $x \in \partial_i$. ∂_i est une variété de dimension 1 (proposition 1.43) connexe donc elle est connexe par arc. Par conséquent, pour tout $y \in \partial_i$ il existe un chemin σ entre x et y . Comme p est de degré n , x et y possèdent chacun n relevés. Le théorème 1.6 nous permet d'affirmer qu'il existe n relevés de σ partant des différents relevés de x . Les relevés de σ sont distincts car la condition d'homéomorphisme local d'un revêtement assure que deux relevés égaux en un point sont égaux partout (or ils sont disjoints au moins aux \tilde{x}_i). Donc les n relevés de σ relient les n relevés de x aux n relevés de y . Ainsi chaque relevé de y appartient à la même composante connexe de frontière qu'au moins un relevé de x .

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Massey. Sa démonstration est très belle et est disponible dans l'article original de 1974 (Massey, 1974). Comme celle-ci est conséquente nous nous contenterons d'en faire une esquisse ici, mais je vous conseille d'aller voir le texte original tant pour sa précision que pour sa clarté et ses illustrations.

Théorème 2.19. *Soient M et \tilde{M} deux surfaces compactes, orientables avec bord tel que $\chi(\tilde{M}) = n \times \chi(M)$ et $k \leq \tilde{k} \leq nk$. Alors il existe une fonction continue $p : \tilde{M} \rightarrow M$ qui définit un revêtement de degré n .*

Pour le démontrer nous allons avoir besoin d'une variante de la somme connexe dans le cadre des surfaces à bord.

Définition 2.20. Soient M_1, M_2 deux surfaces à bord. Nous pouvons alors former la *somme connexe le long de leurs frontières*. Cette fois au lieu de retirer un disque

ouvert classique, nous retirons aux deux variétés un demi disque ouvert qui borde une frontière (ie un plongement du demi disque unité supérieur tel que l'ensemble $\{(x, 0)\}$ est envoyé sur la frontière de la surface). Puis nous collons les frontières des demi-disques ensemble. Nous obtenons alors $M_1 \#_b M_2$ qui est une surface possédant un bord homéomorphe à $\partial M_1 \# \partial M_2$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est en fait constructive. Pour chaque surface compacte orientable à bord M et chaque $\tilde{\chi}, \tilde{k}$ respectant les conditions du théorème nous construirons un revêtement \tilde{M} ayant \tilde{k} frontières et tel que $\chi(\tilde{M}) = n \times \chi(M)$. La classification des surfaces nous permettra alors de conclure que \tilde{M} est bien homéomorphe à l'unique surface orientable possédant cette description.

Pour parcourir toutes les surfaces compactes orientables M nous étudierons toutes les combinaisons entre le genre g et de nombre de composantes de frontières k . Nous avons vu lors de nos classifications que cela est suffisant.

Avant de commencer il convient déjà de regarder nos relations algébriques. La proposition 2.14 affirme que pour M nous avons que $2g + k = 2 - \chi$. Comme \tilde{M} est encore orientable (car c'est un revêtement de M) ses invariants suivent les mêmes contraintes : $2\tilde{g} + \tilde{k} = 2 - \tilde{\chi}$. Associé aux faits que $\chi(\tilde{M}) = n \times \chi(M)$ et $k \leq \tilde{k} \leq nk$ nous obtenons différentes restrictions sur les combinaisons possibles entre \tilde{k} et \tilde{g} pour un k et un g donnés. Nous ne détaillerons pas ces calculs algébriques (disponibles dans la section §1 de l'article de Massey) et nous nous contenterons de traiter uniquement les cas possibles.

1. $g = 0, k = 1, 2$:

Ici nous classons en fait les variétés tel que $\chi \geq 0$. Il s'agit de la sphère trouée une ou deux fois, ie le disque ou la couronne. Dans les deux cas la classification nous permet rapidement de voir qu'aucune variété \tilde{M} différente de M ne peut

respecter les conditions requises. Ainsi le théorème est vérifié trivialement pour le disque car il ne possède qu'un seul revêtement défini par l'application identité. La couronne, elle, peut décrire un revêtement d'elle même pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de considérer sa décomposition en cercles et de copier le n -revêtement vu au début du chapitre 1 : $p : S^1 \rightarrow S^1$, $p(z) = z^n$.

2. $g = 0, k = 3$, et $g = 1, k = 1$:

Ici nous classons en fait les variétés telles que $\chi = -1$. Ces deux cas serviront de base pour les prochains que nous traiterons principalement par induction. Ainsi se sont les seuls que nous devons traiter «à la main». Massey propose alors de dessiner directement tous les espaces \widetilde{M} possibles. Je ne recopierai pas ces dessins ici mais je vous invite à les consulter dans son article (Massey, 1974) (§2).

Le raisonnement de Massey repose sur le fait que Σ_0^3 et Σ_1^1 peuvent être ramenés à un graphe (i.e. un complexe simplicial de dimension 1) relativement simple via une rétraction par déformation. Ce graphe consiste en un wedge de deux cercles (i.e. $S^1 \vee S^1$), nous le noterons G . Ainsi il peut justifier que les surfaces dessinées représentent bien respectivement des revêtements de Σ_0^3 et Σ_1^1 en montrant que ces dessins peuvent être ramenés (via une rétraction par déformation) à des graphes qui sont des revêtements de G . Or les revêtements d'un wedge de cercles sont assez simples à reconnaître (il s'agit de copies de cercle collés entre elles). Nous obtenons également par ce raisonnement que ces dessins représentent des surfaces compactes orientables (grâce aux propriétés de revêtement). Il ne reste plus qu'à montrer que les surfaces dessinées peuvent être reproduites afin de couvrir toutes les valeurs de \widetilde{k} possibles pour chaque $\widetilde{\chi}$ fixé tel que $\widetilde{\chi} = n \times \chi$. Nous réduisons d'abord algébriquement le nombre de cas puis il est facile de se convaincre que tout les cas restants sont bien décrits par ces dessins. Pour cela je vous invite à tenter de reproduire ces dessins pour différentes combinaisons de n et m et de n et g , ce qui est très persuasif en plus d'être plutôt ludique.

3. $k = 1, g \geq 1$:

Pour démontrer ces cas nous allons faire une récurrence sur g . Nous venons de démontrer l'initialisation lorsque que $g = 1$ et $k = 1$ dans le point précédent. Soit $g \geq 2$, nous supposons que le théorème est vrai pour le cas $g - 1$. Nous pouvons décrire la variété Σ_g^1 comme la somme connexe le long de la frontière de la variété Σ_{g-1}^1 avec la variété Σ_1^1 . Nous avons alors que $\Sigma_g^1 = \Sigma_{g-1}^1 \cup \Sigma_1^1$ et que $\Sigma_{g-1}^1 \cap \Sigma_1^1$ est homéomorphe à un intervalle $[0, 1]$ car l'intersection correspond à l'ensemble par lequel nous avons collé les surfaces (ie la demi frontière d'un disque). Regardons comment cette description se transmet aux revêtements de Σ_g^1 .

Supposons que $p : \widetilde{M} \rightarrow \Sigma_g^1$ soit un revêtement de degré n . Alors $p^{-1}(\Sigma_{g-1}^1)$ est un revêtement de Σ_{g-1}^1 . De même pour $p^{-1}(\Sigma_1^1)$. Le théorème 1.6 nous permet de montrer que $p^{-1}(\Sigma_{g-1}^1) \cap p^{-1}(\Sigma_1^1) = p^{-1}(\Sigma_{g-1}^1 \cap \Sigma_1^1)$ possède n composantes, et que chacune d'entre elles est homéomorphe à l'intervalle unité. Ainsi \widetilde{M} peut être vu comme un n -revêtement de Σ_g^1 coller à un n -revêtement de Σ_1^1 le long de $p^{-1}(\Sigma_{g-1}^1 \cap \Sigma_1^1)$.

Donc pour construire un revêtement de Σ_g^1 nous pouvons coller un revêtement de Σ_{g-1}^1 issu de notre hypothèse de récurrence à des copies de Σ_1^1 (n copies disjointes de Σ_1^1 forme un n -revêtement de Σ_1^1 avec la projection évidente). Il est alors relativement simple de montrer, en regardant les relations algébriques, que les revêtements ainsi obtenus correspondent bien à tous ceux que nous voulions construire pour démontrer le théorème (voir (Massey, 1974)).

4. $g = 0, k \geq 3$:

La procédure passant par la somme connexe le long des frontières ne peut pas s'appliquer ici car cette procédure ne permet pas de faire apparaître de genre dans les revêtements si nous n'en n'avons pas au départ. Ainsi les revêtements construits ne suffiraient pas à décrire toutes les combinaisons de $\tilde{\chi}$ et \tilde{k} . Massey passe donc par une autre méthode que je ne décrirai que rapidement car elle est assez longue et les idées restent quand même semblables au cas précédent.

Il s'intéresse déjà au cas k pair. Σ_0^k est un disque auquel ont à retiré $k - 1$ disques

ouverts. Ici nous pouvons relier deux à deux les frontières par un chemin puis couper ou non le long de ce chemin. Nous faisons ça pour n copies de Σ_0^k . Il est alors possible de coller entre elles les copies en collant ensemble les bordures résultant du découpage d'un même lacet. Par exemple si nous avons deux copies et que $k = 2$, le découpage le long du lacet va laisser deux «pans» dans chaque copie. Nous pouvons alors coller le premier pan de la première copie avec le premier pan de la deuxième copie et le deuxième pan avec le deuxième. Nous construisons par cette procédure un n revêtement de Σ_0^k . Il est nécessaire de faire ces procédures pour au moins un chemin de chaque copie (car nous voulons un revêtement connexe). Choisir de le faire ou non pour les autres chemins laisse suffisamment de liberté pour décrire tous les revêtements souhaités. (Nous pouvons remarquer que si $k = 2$ cette procédure ne crée pas de nouvelle surface).

Si k est impair alors considérons Σ_0^k comme l'union de Σ_0^{k-1} et Σ_0^3 (union le long d'une composante de frontière). Les deux cas sont déjà traités respectivement dans 4. et 2. (car $k - 1$ est pair). Nous construisons alors les revêtements voulus en collant les revêtements de Σ_0^{k-1} et Σ_0^3 . Comme il ne s'agit pas de somme connexe le long de frontières mais d'une union le long d'un cercle il faut être un peu plus précautionneux mais cela ne pose pas de problèmes (voir (Massey, 1974) (§4)).

5. $k = 2, g \geq 1$:

L'idée ici est de voir Σ_g^2 comme la somme connexe le long d'une frontière des surfaces Σ_g^1 et Σ_0^2 . Les deux cas sont déjà traités. Il est alors possible de décrire tout les revêtements souhaités en collant ensemble : un revêtement bien choisi de Σ_g^1 ; des copies de Σ_0^2 ; un revêtement bien choisi de Σ_0^2 ; des copies de Σ_g^1 . Il est nécessaire d'être un peu précautionneux pour obtenir un revêtement connexe. Encore une fois je vous renvoie à Massey pour ces détails et pour montrer que ces revêtements décrivent tous les cas possibles (§5).

6. $g \geq 1, k \geq 3$:

Ici encore nous utilisons un raisonnement similaire : Σ_g^k est la somme connexe le

long d'une frontière des surfaces Σ_g^1 et Σ_0^k . À nouveau les deux cas sont connus et il est possible de décrire tout les revêtements souhaités en collant un mélange de revêtement de Σ_g^1 , de revêtement de Σ_0^k , et de copies de ces deux espaces.

□

Corollaire 2.21. *Toutes les surfaces à bord orientables, compactes possédant une caractéristique d'Euler strictement négative sont commensurables.*

Démonstration. Posons M_1 et M_2 tel que $\chi(M_i) = -n_i$ et notons k_i leur nombre de frontières. Considérons M la surface orientable définie par $\chi(M) = -2n_1n_2k_1k_2$ et $g = 1 + n_1n_2k_1k_2 - k_1k_2$. Alors M possède $2k_1k_2$ bords et définit un revêtement fini de M_1 et M_2 par le théorème de Massey.

□

Nous pouvons maintenant établir la classification des surfaces compactes à bord.

Théorème 2.22. *Il n'existe que trois classes de commensurabilité pour les surfaces compactes à bord. Ces classes sont ici aussi déterminées par le signe de χ .*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du cas fermé (théorème 2.17). Le signe de χ est conservé dans une même classe de commensurabilité. Nous avons donc trois cas :

1. $\chi > 0$: Seul le disque possède une telle caractéristique.
2. $\chi = 0$: Deux variétés ont une caractéristique nulle, il s'agit du ruban de Möbius (homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$ privé d'un disque) et de la couronne. Or la couronne est le 2-revêtement d'orientation du ruban de Möbius.
3. $\chi < 0$: Lors du théorème 2.17 nous avons vu qu'une surface non orientable est toujours en relation avec son 2-revêtement d'orientation et que le signe de sa caractéristique est préservé. Or le corollaire 2.21 nous donne qu'il n'y a

qu'une seule classe de commensurabilité pour les surfaces orientables avec cette caractéristique.

□

CHAPITRE III

LA COMMENSURABILITÉ DE DIMENSION 3

Maintenant que nous avons compris le cas des surfaces, nous pouvons nous intéresser aux variétés de dimension 3. Nous continuerons de nous restreindre aux cas connexe et compact car nous ne savons presque rien des 3-variétés non compactes. De plus, nous ajouterons ici la condition que la variété soit géométrique, c'est à dire qu'elle soit le quotient d'une des géométries de dimension 3 par un sous-groupe d'isométries. Cela n'est pas évident car nous avons vu lors du théorème 1.36 qu'une variété de dimension 3 fermée, orientable, indécomposable n'était pas a priori géométrisable. Il est en fait souvent nécessaire de la découper selon des tores avant (décomposition de JSJ).

Les résultats concernant les variétés de dimension 3 sont, comme nous l'avons vu, généralement bien plus techniques. La commensurabilité ne fait pas exception à la règle. Néanmoins il est tout à fait possible de classifier la commensurabilité de sept des huit géométries de dimension trois. Cela demandera un certain nombre de résultats non-triviaux sur ces variétés. Afin de garder ce document digeste, nous nous focaliserons sur les preuves concernant directement la classification. Ainsi nous devons admettre plusieurs éléments mais nous essayerons d'en garder au moins une idée visuelle.

Ce chapitre sera divisé en trois, d'abord nous aborderons les variétés dites de Seifert. Ces variétés regroupent six des géométries de dimension trois. Ensuite nous

étudierons les variétés de la géométrie Sol. Enfin nous nous tournerons vers les variétés hyperboliques. Ces dernières constituent l'unique cas encore non classifié mais plusieurs articles et pistes permettent déjà d'établir de premiers résultats dans le domaine.

3.1 Variétés de Seifert

3.1.1 Définitions

Les variétés de Seifert représentent de nombreuses variétés de dimension 3. Leur définition apporte à la fois une large généralité et une description très forte. Cela fait d'elles les variétés les mieux comprises de cette dimension. Si une description plus complète de ces espaces vous intéresse, vous pouvez vous référer à cet article : (Brin, 2007). Ici nous ne traiterons que de certains aspects de ces variétés et nous nous concentrerons sur le cas orientable. En effet, celui-ci est nettement plus intuitif et quelques remarques suffiront à comprendre le cas non orientable à partir de ce que nous aurons déjà fait.

Définition 3.1. Un *espace fibré de Seifert* est une variété de dimension trois qui admet une décomposition en cercles disjoints (les *fibres*). De plus, on exige que chaque fibre possède un voisinage tubulaire tel qu'il existe un difféomorphisme préservant les fibres entre ce voisinage et un tore solide fibré standard. Nous nommerons une telle décomposition une *fibration*.

Remarque 3.2. Une telle fibration n'est pas forcément unique. En effet, il existe quelques variétés admettant plusieurs structures de Seifert différentes. Ces cas sont très bien classifiés mais nous ne reviendrons pas dessus.

Définition 3.3. Un homéomorphisme $M \rightarrow N$ *préservant les fibres* est un homéomorphisme $M \rightarrow N$ tel que l'image de chaque fibre de M est une fibre de N .

Définition 3.4. Un *tore solide fibré standard* est construit de la façon suivante : Nous considérons $D^2 \times [0, 1]$ où $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Puis nous collons les deux bouts de ce cylindre par une rotation de $\frac{2\pi p}{q}$ avec p, q des entiers premiers entre eux. Cela revient à quotienter par la relation $(z, 0) \sim (e^{\frac{2\pi ip}{q}} z, 1)$.

Un tore fibré standard est toujours homéomorphe à un tore solide $S^1 \times D^2$. Mais l'intérêt de cette construction provient de la fibration qu'elle admet. En effet, $\{0\} \times [0, 1]$ sera collé en un cercle, de plus si $z \in D^2$ et $z \neq 0$ alors les arcs $\{z\} \times [0, 1]$, $\{e^{\frac{2\pi ip}{q}} z\} \times [0, 1]$, \dots , $\{e^{\frac{2\pi ip(q-1)}{q}} z\} \times [0, 1]$ formeront également après identification une fibre S^1 .

Intuitivement cela revient à fibrer classiquement le tore solide $S^1 \times D^2$, le couper par un disque, effectuer une rotation de $\frac{2\pi p}{q}$, puis recoller les deux bouts.

Exemple.

Ici nous avons représenté une fibre avant l'identification dans le cas $q = 5$ et $p = 2$. Elle sera composée de 5 arcs car $q = 5$. De plus comme $p = 2$ la rotation peut être visualisée comme tourner le bas de deux «crans» afin de ramener les chiffres identiques à la verticale. Une fois cette rotation effectuée il suffit de coller les deux bouts pour obtenir notre tore fibré standard $(5, 2)$.

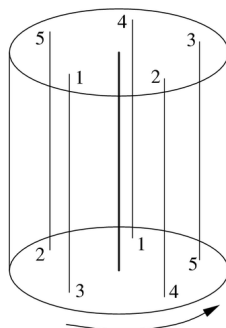


Figure 3.1 Tore fibré standard

Nous pouvons remarquer que la fibre centrale d'un tore fibré standard est toujours composé d'un seul arc quelle que soit la rotation appliquée. Comme dans une variété de Seifert différentes fibres peuvent posséder un tel voisinage, il est possible de retrouver plusieurs de ses fibres centrales de façon isolée. Nous nommerons une telle fibre une *fibre exceptionnelle* et nous dirons qu'elle est de *multiplicité* q si elle a un voisinage difféomorphe à un tore fibré standard (q, p) dont elle est la fibre centrale. Les autres fibres posséderont toujours un voisinage difféomorphe à un tore solide ordinaire, ainsi nous les appellerons *fibres ordinaires* (elles sont de multiplicité un).

Dans notre cas, la compacité nous permet de recouvrir un espace fibré de Seifert par un nombre fini de voisinages difféomorphe à des tores. Ainsi, dans une variété de Seifert compacte il n'y a qu'un nombre fini de fibres exceptionnelles.

Afin d'alléger les notations nous désignerons à partir de maintenant les «espaces fibré de Seifert» par «EFS». De même nous dirons isomorphisme (de structure) pour nommer les homéomorphismes préservant les fibres. Enfin nous désignerons les tores fibrés standards par le couplet (q, p) avec q, p des entiers premiers entre eux tel que $0 \leq p < q$. En effet, il est possible de montrer qu'un tel couple détermine bien la fibration à isomorphisme près. Regardons maintenant quelques exemples d'EFS pour se fixer les idées avant de continuer notre étude.

Exemple. (i) Le tore solide $S^1 \times D^2$ est bien sûr un EFS.

(ii) Plus généralement une variété de la forme $S^1 \times F$ où F est une surface est un EFS. La fibration est ici dite triviale.

(iii) La sphère de dimension trois S^3 est un EFS. Elle fait partie des variétés admettant plusieurs structures de Seifert différentes. Nous considérerons dans la suite de cet exemple celle donnée par la fibration de Hopf.

(iv) L'espace lenticulaire $L(p, q)$ est défini comme le quotient de S^3 par une

action (libre) de \mathbb{Z}/p . C'est donc une variété en utilisant les notions du chapitre 1 (S^3 est une géométrie). Plus précisément, nous définissons S^3 par $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$ et l'action par $(z, w) \rightarrow (e^{\frac{2\pi i q}{p}} z, e^{\frac{2\pi i}{p}} w)$. Il s'agit également d'un EFS.

Regardons de plus près ces exemples. Les deux premiers proviennent de la façon la plus intuitive pour construire des EFS. Nous partons d'une surface donnée et à chaque point de celle-ci nous faisons correspondre un cercle. Ici chaque fibre possède comme voisinage un tore solide ordinaire. Pour le former il suffit de se munir d'un disque $D \subset F$ inclus dans une carte locale et de considérer $D \times S^1 \subset F \times S^1$. Nous aimerions avoir des images similaires pour les deux autres exemples afin de mieux comprendre leurs structures. Nous allons donc effectuer le chemin inverse. Commençons par S^3 , sa fibration n'est composée que de tores solides ordinaires. Donc localement S^3 ressemble à des tores solides $S^1 \times D^2$. Nous allons faire correspondre chaque cercle à un point en quotientant notre variété par la relation $x \sim y \iff x$ et y appartiennent à la même fibre. Nous notons π la projection associée est F l'espace obtenu. Dans notre cas F est homéomorphe à S^2 . Nous avons donc $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ tel que $\forall x \in S^2, p^{-1}(x) \cong S^1$. Cette construction est toujours réalisable et nous nommerons F l'espace de base de la fibration.

Le cas des espaces lenticulaires met en avant une dernière caractéristique de l'espace de base. En effet, si nous quotientons $L(p, q)$ nous n'obtenons pas (généralement) une surface comme nous l'espérerions mais ce que nous appellerons par la suite une *orbifold*. Cette différence provient du fait qu'un espace lenticulaire admet (généralement) des fibres exceptionnelles.

L'espace de base a un rôle très important dans la compréhension que nous avons des variétés de Seifert. Ainsi il nous sera utile de passer un peu de temps pour mieux comprendre ces orbifolds.

3.1.2 Les Orbifolds

Définition 3.5. Une *orbifold* (sans bord) de dimension n est un objet qui généralise les variétés. C'est un espace topologique B séparé à base dénombrable tel que chacun de ses points admet un voisinage ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n ou homéomorphe à un quotient de \mathbb{R}^n par l'action d'un groupe fini. Plus formellement nous avons $\forall x \in B$, il existe : U_x un voisinage ouvert de x , Γ_x un groupe fini (potentiellement trivial), une action de Γ_x sur un ouvert \tilde{U}_x de \mathbb{R}^n , et un homéomorphisme $\phi_x : \tilde{U}_x/\Gamma_x \rightarrow U_x$.

De plus nous voulons que dès que $U_i \subset U_j$, il y ait un morphisme de groupe injectif $f_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ et un plongement $\tilde{\phi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$ équivariant relativement à f_{ij} tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \tilde{U}_j/f_{ij}(\Gamma_i) \\
 \downarrow \phi_i & & \downarrow \\
 U_i & \subset & U_j
 \end{array}$$

Nous munissons alors notre orbifold d'un atlas maximal respectant ces conditions.

La première partie de cette définition permet de visualiser une orbifold comme une variété possédant des singularités (issues de l'action d'un groupe fini). La deuxième partie est uniquement là pour éviter des cas dégénérés. Nous nous n'y

intéresserons donc pas, mais c'est un bon exercice de comprendre ce que signifie la commutativité de chaque carré du diagramme.

Nous souhaitons dans cette partie étudier également les EFS avec potentiellement des composantes de frontières. Nous avons donc besoin de définir les orbifolds à bord.

Définition 3.6. Une *orbifold avec bord* est définie de façon similaire. La seule différence consiste dans le fait que les voisinages ouverts peuvent être homéomorphe à \mathbb{R}_+^n ou homéomorphe à un quotient de \mathbb{R}_+^n par l'action d'un groupe fini.

Définition 3.7. Un *isomorphisme d'orbifold* est un homéomorphisme qui respecte la structure quotient des ouverts de l'orbifold.

Nous n'étudierons que des orbifolds de dimensions 2. Dans ce cas il est relativement simple de classifier toutes les singularités pouvant apparaître dans un espace en regardant quels sont les groupes finis agissant sur \mathbb{R}^2 . De plus, en dimension 2 toute orbifold est homéomorphe à une variété (mais pas isomorphe en tant qu'orbifold). Pour une orbifold B nous noterons $|B|$ la surface homéomorphe à celle ci et nous la désignerons comme *l'espace sous-jacent*.

Nous nous restreindrons également aux orbifolds compactes. Nous pouvons donc recouvrir notre orbifold par un nombre fini de cartes locales et ainsi toujours obtenir qu'un nombre fini de singularités.

Une façon intéressante de considérer les orbifolds provient du fait que si nous avons une variété lisse M et un groupe G qui agit de façon proprement discontinue dessus alors l'espace quotient est une orbifold lisse. Nous remarquons que la différence avec les variétés classiques est que nous avons autorisé les actions qui ne sont pas libres. Nous définirons également par la suite la notion de revêtement pour les orbifolds. Enfin, il est possible de définir des métriques naturelles de telle sorte que si nous quotientons, l'orbifold obtenue hérite également de cette métrique na-

turelle. Tout cela nous amène à définir un concept de géométrie pour les orbifolds de façon similaire à celui associé aux variétés en considérant des quotients par des actions proprement discontinues et en utilisant des isomorphismes d'orbifolds. Comme ceci nous éloigne de notre domaine, nous ne nous pencherons pas plus sur le sujet mais notre étude nous amènera quand même à recroiser quelques-uns des questionnements reliés à ces constructions.

Maintenant que nous avons défini les notions de base de ce domaine, la première chose à faire pour mieux comprendre ces objets et de regarder quelles sont les singularités qui peuvent apparaître. Il y en a trois types : les points cônes, les lignes de réflexions, et les coins de réflexions. Ils apparaissent dans les cartes locales des orbifolds en fonction de la composition du groupe fini choisi pour agir sur l'ouvert de \mathbb{R}^2 correspondant.

Un groupe d'isométrie qui est fini doit être engendré par des réflexions et des rotations. Pour mieux visualiser regardons ce qui arrive dans des cas particuliers :

1. Si le groupe Γ est d'ordre deux, engendré par une réflexion alors le quotient possédera une ligne de réflexion.
2. Si le groupe Γ est d'ordre $2n$ engendré par une rotation d'ordre n autour de 0 et une réflexion par une ligne passant par 0, alors nous obtiendrons un coin de réflexion d'angle π/n .
3. Enfin si le groupe Γ est engendré par une rotation de $2\pi/n$ autour de 0 alors nous obtiendrons un point cône d'angle $2\pi/n$.

En fait, seul le dernier cas nous intéressera car c'est le seul qui apparaîtra lors de l'étude d'un EFS comme nous le verrons bientôt. De plus, il est possible de faire disparaître les autres singularités en prenant des revêtements finis (il suffit de prendre le double de la surface sous-jacente collé par sa frontière pour constituer

la base d'un tel revêtement). Donc comme notre but principal est d'étudier les classes de commensurabilité des EFS, nous avons tout intérêt à ne pas détailler les premiers cas. Regardons donc mieux ce qui se passe pour les points cônes. Munissons-nous d'un ouvert centré en 0 et du groupe Γ engendré par la rotation de $2\pi/n$ notée α . Un domaine fondamental de cet action ressemble à un triangle isocèle avec un sommet en 0 et un angle de $2\pi/n$ à ce sommet (partie 1 de la figure ci dessous). En effet, ce triangle recouvrira bien l'ouvert au fur et à mesure que nous lui appliquerons des puissances de α entre 1 et n . Donc lorsque nous quotientons par Γ ce triangle suffit à décrire ce que nous obtenons. De plus, le deuxième côté du triangle correspond à l'image du premier par α donc ces deux côtés seront identifiés dans l'espace quotient. Nous avons donc une sorte de cônes (partie 2 de la figure) d'où cette appellation. Il est particulièrement utile de comprendre cette construction car elle permet d'avoir une très bonne intuition des propriétés de ces singularités.

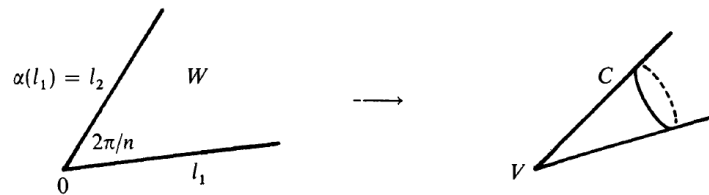


Figure 3.2 Point cône (issu de (Scott, 1983), p.407)

Les autres singularités peuvent se visualiser avec des constructions similaires.

Proposition 3.8. *L'espace quotient d'une variété de Seifert compacte est une orbifold compacte possédant un nombre fini de points cônes. De plus, chaque fibre exceptionnelle de multiplicité n correspond dans le quotient à un point cône provenant de l'action d'un groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (et réciproquement).*

Démonstration. Cette proposition découle logiquement de la construction de l'es-

pace quotient. Celle-ci est explicitée par exemple à la page 430 de l'article (Scott, 1983). \square

Pour pouvoir continuer notre étude des orbifolds nous avons besoin de définir formellement ce qu'est un revêtement dans cette catégorie. Pour cela nous pouvons modifier la définition classique pour l'adapter aux orbifolds. Il s'agit d'une généralisation de la définition car rappelons qu'une variété est une orbifold où toutes les actions de groupes sont triviales.

Définition 3.9. Un *revêtement d'une orbifold* M est un espace \widetilde{M} muni d'une application d'orbifold surjective $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ satisfaisant :

Pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j \subset \widetilde{M}$.

De plus, $\forall j \in J$, la fonction $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est la fonction quotient naturelle entre deux quotients de \mathbb{R}^n par des groupes finis où l'un est le sous-groupe de l'autre.

Mentionnons qu'un tel revêtement n'est pas forcément un revêtement de l'espace sous-jacent $|M|$.

Exemple. (i) Construisons une orbifold en prenant le quotient d'une variété lisse M par le groupe G agissant proprement discontinuement. Si H est un sous-groupe de G alors la fonction quotiente $M/H \rightarrow M/G$ est un revêtement d'orbifold.

(ii) Plus concrètement nous pouvons considérer la sphère avec deux points cônes de multiplicités respectives np_1 et np_2 (avec $n \geq 1$; $p_1, p_2 \geq 2$) nous la noterons $S^2(np_1, np_2) = M$. Nous pouvons définir un revêtement d'orbifold en considérant $S^2(p_1, p_2) = \widetilde{M}$. Pour la projection p il est plus clair de procéder visuellement. Nous pouvons considérer dans les deux cas que les points cônes se situent au pôle nord et au pôle sud des sphères. La fonction est alors définie sur tout les cercles horizontaux (ie pour tout x, y à chaque z fixé) par

$(x + iy) \rightarrow (x + iy)^n$. Il est clair que c'est une fonction continue surjective. De plus pour chaque point classique nous pouvons trouver facilement un voisinage tel qu'il possède bien une pré-image composée de n composantes toutes envoyées homéomorphiquement par p . C'est bien ce que nous espérons pour un point classique de M (correspondant à une action triviale) car dans ce cas notre définition se confond avec celle des revêtements classiques. Pour un point cône de M il faut regarder un ouvert centré en ce point. Cet ouvert possédera alors comme unique image réciproque l'ouvert centré au point cône correspondant dans \widetilde{M} . De plus la restriction de p à cet ouvert consiste bien à la fonction quotient entre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_{p_1} \subset \widetilde{M}$ et $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_{np_1} \subset M$ avec \mathbb{Z}_{p_1} sous-groupe de \mathbb{Z}_{np_1} (où \mathbb{Z}_m est une abréviation désignant $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

Remarque 3.10. Nous avons jusqu'à maintenant évité de parler de degré de revêtement. Nous définissons donc qu'un revêtement est de *degré* n si la pré-image d'un point régulier a une cardinalité de n . Remarquons que le dernier exemple illustre que les points singuliers possèdent potentiellement des pré-images de cardinaux différents.

Proposition 3.11. *Une orbifold M possède toujours un unique revêtement \widehat{M} dit universel dans le sens où : si X est un revêtement de M alors \widehat{M} est un revêtement de X .*

Démonstration. La preuve (en dimension deux) est disponible dans (Scott, 1983) à la fin de la page 423. L'article offre d'ailleurs une introduction très détaillé à la théorie des orbifolds. L'idée ici est de se munir d'un revêtement quelconque X et de se ramener au cas classique en retirant les points singuliers. Dans cet espace nous pouvons donc raisonner sur les sous-groupes du groupe fondamental grâce aux résultats du chapitre 1. Nous construisons ainsi un revêtement commun à tout X grâce à un sous-groupe commun. De plus, nous montrons au passage

que, comme dans le cas classique, X est le quotient du revêtement universel par l'action d'un groupe.

□

De cette preuve nous tirons également une présentation du groupe qui agit sur le revêtement universel afin de donner tout les autres revêtements. Par analogie avec le cas classique nous le désignerons comme le groupe fondamental de l'orbifold. Il est possible de montrer que ce groupe a effectivement toutes les propriétés attendues du groupe fondamental. Il existe de nombreuses images pour ce groupe mais nous, nous essayerons de comprendre ce qui se passe directement en terme de lacets.

Considérons une surface compacte M à laquelle nous rajoutons n points cônes de multiplicités respectifs p_i . Nous la noterons $M(p_1, \dots, p_n)$. Notons également N l'espace M auquel nous avons retiré tous les points cônes en retirant un disque ouvert autour de chacun d'entre eux. L'espace N est donc la surface M avec n composantes de frontière en plus. Regardons maintenant un lacet quelconque dans $M(p_1, \dots, p_n)$. Ce lacet se comporte de façon tout à fait classique en dehors des singularités. Mais si nous prenons un lacet autour d'un point cône il est possible de venir annuler ce lacet sur le point cône à condition que ce lacet ai la même multiplicité que le point cône (ie qu'il fasse p_i tours d'un point cône de multiplicité p_i). Formalisons ça de façon algébrique. Pour commencer partons de $\pi_1(N)$ qui à l'avantage d'être bien défini et facile à calculer. En retirant des voisinages des points cônes c'est comme si nous avions interdit aux lacets de passer par ces points. Notons α_i les générateurs supplémentaires qui apparaissent par rapport à $\pi_1(M)$. Intuitivement, pour un i donné, α_i correspond au lacet qui fait une fois le tour du ième point cône. Si un lacet fait m fois le tour du ième point cône il s'écrira donc α_i^m . Dans $\pi_1(N)$ ces lacets sont des générateurs libres

mais pour décrire le groupe fondamental de l'orbifold nous aimerions que ces lacets s'annulent à la puissance de la multiplicité du point correspondant. Ainsi il suffit de rajouter ces relations pour obtenir une présentation du groupe voulu :

$$\pi_1(M(p_1, \dots, p_n)) = \pi_1(N) / \langle\langle \gamma_1^{p_1}, \dots, \gamma_n^{p_n} \rangle\rangle.$$

Remarque 3.12. Ici la notation $\langle\langle \gamma_1^{p_1}, \dots, \gamma_n^{p_n} \rangle\rangle$ désigne le sous groupe engendré par $\gamma_1^{p_1}, \dots, \gamma_n^{p_n}$. De façon plus général, si G est un groupe et $g_1, \dots, g_n \in G$ alors $\langle\langle g_1, \dots, g_n \rangle\rangle \subset G$ désigne le sous groupe engendré par g_1, \dots, g_n .

Une autre approche aurait été de regarder ce qui se passe au niveau des transformations de revêtements du revêtement universel de l'orbifold en s'appuyant sur la formule $\text{Deck}(\widehat{M}) \cong \pi_1(M, x)$ (proposition 1.15). Si nous utilisons cette formule dans le cadre des orbifolds pour définir π_1 nous obtiendrons bien le même résultat. L'idée est que pour chaque point cône nous pouvons reprendre notre construction de la figure 3.2. Lorsque nous avons choisi notre domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nous avons fait un choix au hasard parmi les n triangles identiques décrit par la rotation de $2\pi/n$ (pour les obtenir nous pouvons prendre l'image de notre triangle par les différentes puissances de la rotation). Ainsi pour chaque point cône nous avons un nouveau générateur dans le groupe des transformations (qui correspond à une rotation de l'espace entier, centré au point cône) tel que celui ci s'annule à la puissance de la multiplicité. Mais pour le visualiser cela requiert de connaître le revêtement universel d'une orbifold donnée, ce qui n'est pas évident avec ce que nous avons déjà fait.

Exemple. 1. Calculons $\pi_1(S^2(p_1, p_2))$: En reprenant nos notations, il est facile de voir que le groupe $\pi_1(N)$ n'a qu'un seul générateur. De plus, dans $S^2(p_1, p_2)$ nous pouvons faire disparaître p_i tours de ce générateur en les annulant au point cône approprié. Inversement nous pouvons faire apparaître p_i tours de façon artificielle sans changer la classe de notre lacet. Ainsi le théorème de Bézout nous donne que chaque lacet pour être réduit de $\text{pgcd}(p_1, p_2)$

tours et ainsi $\pi_1(S^2(p_1, p_2)) = \pi_1(N) / \langle \langle \gamma_1^{p_1}, \gamma_1^{p_2} \rangle \rangle = \mathbb{Z} / \text{pgcd}(p_1, p_2)\mathbb{Z}$.

Du point de vue des transformations si nous reprenons l'image avec les points cônes situés aux pôles, il est clair que les deux rotations qu'ajoutent les points cônes se font autour du même axe. Ainsi, il n'y a qu'un nouveau générateur, et toutes les rotations qui respectent les deux points cônes en même temps sont celles données par $2\pi/\text{pgcd}(p_1, p_2)$.

2. Regardons maintenant $S^2(p, r, q)$. Un résultat classique de topologie affirme que $\pi_1(N) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$. Ainsi $\pi_1(S^2(p, r, q)) = \langle x, y, z \mid xyz = 1, x^p = y^r = z^q = 1 \rangle$. Ce résultat semble intuitif lorsque que nous nous plaçons du point de vue des lacets (un lacet s'annule soit sur un point cône soit en évitant les trois points cônes). Du point de vue des transformations, nous regardons en fait l'action d'un groupe triangulaire sur le revêtement universel de l'orbifold (qui dépend de la multiplicité des points cônes). Nous n'en dirons pas plus pour ces actions (proprement discontinues) mais une courte introduction est disponible dans (Scott, 1983) et la page (Wikipedia, 2021b) reprend de très belles images de groupes triangulaires des surfaces simplement connexes.

Définissons maintenant un dernier outil particulièrement utile pour comprendre les orbifolds : leurs *caractéristiques d'Euler*. Encore une fois nous allons imiter le cas des variétés. Repartons de M une surface compacte à laquelle nous rajoutons n points cônes de multiplicités respectifs p_i . Nous désignons toujours par N l'espace M auquel nous avons retiré tous les points cônes en enlevant un disque ouvert autour de chacun d'entre eux. Notons maintenant $D(p_i)$ l'adhérence respective du i ème de ces disques. Ici N est par construction une variété avec n bords pour laquelle la caractéristique d'Euler $\chi(N)$ est définie. De plus $\chi(N) = \chi(M) - n$.

Si nous considérons notre définition de χ nous pouvons facilement déduire la formule : $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ (nous faisons la somme des cellules

des deux complexes et nous retirons une fois celles qui sont comptées en double). D'un autre côté nous pouvons donner du sens à la caractéristique de $D(p_i)$ (un disque avec un point cône de multiplicité p_i). Pour cela il faut d'abord observer que si nous prenons D^2 et que nous faisons agir dessus les rotations engendrées par $2\pi/p$ nous obtenons bien $D(p_i)$. Donc D^2 est un revêtement de degré p_i de $D(p_i)$. Pour rester cohérent avec l'étude des surfaces nous aimerions que $\chi(D(p_i))$ respecte la relation $\chi(\widetilde{D^2}) = n \times \chi(D(p_i))$ (proposition 2.15). Ainsi $\chi(D(p_i)) = \chi(\widetilde{D^2})/p_i = 1/p_i$.

En observant que $\chi(N \cap D(p_i)) = \chi(S^1) = 0$, nous concluons que :

$$\chi(M(p_1, \dots, p_n)) = \chi(N) + \sum_{i=1}^n \chi(D(p_i)) = \chi(M) - n + \sum_{i=1}^n 1/p_i.$$

Proposition 3.13. *Soit $\widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement d'orbifold de degré $d < \infty$. Alors par construction $\chi(\widetilde{M}) = d \times \chi(M)$.*

Nous nous intéresserons notamment au signe de cette caractéristique d'une orbifold de dimension 2. En effet, il sera ici aussi une des bases de notre classification. Nous pouvons facilement illustrer qu'il a un rôle très similaire à celui qu'il joue pour les surfaces en reprenant l'exemple de la sphère avec trois points cônes. Celle-ci possède un revêtement universel correspondant à la sphère si $\chi(S^2(p, r, q)) > 0$, un revêtement universel E^2 si $\chi(S^2(p, r, q)) = 0$, et un revêtement universel H^2 si $\chi(S^2(p, r, q)) < 0$. Les points cônes donnent alors les angles des groupes triangulaires permettant d'associer $S^2(p, r, q)$ à un quotient de son revêtement universel.

Cet exemple nous permet aussi de remarquer que dans tous les cas le revêtement universel de $S^2(p, r, q)$ est une surface.

Définition 3.14. Une orbifold dont le revêtement universel est une surface est appelée *bonne*. Dans le cas, contraire elle est désignée comme *mauvaise*.

Proposition 3.15. *Si une orbifold sans frontière de dimension 2 ayant uniquement des points cônes comme singularités est mauvaise, alors elle appartient à un de ces deux types : $S^2(p)$ avec $p \neq 1$, ou $S^2(p, q)$ avec $p \neq q$.*

Nous pouvons même affiner ce résultat et obtenir la proposition suivante.

Proposition 3.16. *Toute orbifold de dimension 2 bonne, compacte, sans frontière est finiment revêtue par une surface.*

Corollaire 3.17. *Si une orbifold B sans frontière de dimension 2 ayant uniquement des points cônes comme singularités est mauvaise, alors $\chi(B) > 0$.*

Ces résultats techniques se démontrent plutôt bien. La preuve de la première proposition ressemble dans l'esprit aux manipulations effectuées pour montrer le théorème de Massey. La preuve de la seconde, elle, repose sur des considérations algébriques en analysant les sous-groupes des groupes qui définissent les orbifolds via une action sur le revêtement universel. Les deux sont disponibles dans (Scott, 1983), qui montre ces résultats avec une petite aide de (Fox, 1952) pour le second.

3.1.3 Chirurgie de Dehn

Nous venons d'étudier la plupart des propriétés des orbifolds qui nous seront nécessaires pour établir la classification de commensurabilité dans cette partie. Mais avant de revenir totalement aux EFS, nous allons avoir besoin d'un court détour par le procédé de chirurgie de Dehn. En effet, celui-ci joue un rôle très important dans notre compréhension des EFS. Nous profiterons du fait que les démonstrations de ces résultats soit plutôt courtes pour les inclure et ainsi donner une idée des raisonnements utilisés pour l'étude des variétés de dimension 3.

Définition 3.18. Soit M une variété de dimension 3 avec une composante de frontière T difféomorphe à un tore. Un *remplissage de Dehn* (de l'anglais *Dehn*

filling) correspond à coller un tore solide ($S^1 \times D^2$) dans cette composante de frontière. Pour cela nous utilisons un difféomorphisme $\varphi : \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow T$ et procédons de la façon déjà expliquée dans la remarque 2.3. Nous formons ainsi $M' =: M \cup_{\varphi} S^1 \times D^2$.

Il est naturel dans ce cadre de se demander si le choix de φ influe sur la variété obtenue. C'est effectivement le cas et les prochaines propositions nous permettront de comprendre comment.

Proposition 3.19. *Soit M' la variété formée avec le procédé de remplissage de Dehn. M' ne dépend que de la classe d'isotopie de $\varphi(\{pt\} \times \partial D^2)$.*

Démonstration. Remarquons qu'une fois le tore solide collé $\varphi(\{pt\} \times \partial D^2)$ est la frontière d'un disque dans M' . Donc partons de M et collons $D^2 \times I$ sur un voisinage dans T de $\varphi(\{pt\} \times \partial D^2)$. Nous obtenons une variété avec une composante de frontière S^2 là où M avait la composante T . Pour finir la procédure et obtenir M' , nous devons remplir la composante S^2 avec une boule B^3 . Or il n'y a qu'une unique façon de faire ça. En effet, c'est un résultat non trivial mais classique que tout homéomorphisme de S^2 préservant l'orientation est isotope (ie homotope via des homéomorphismes) à l'identité. \square

Pour affiner nos observations il est nécessaire de mieux comprendre $\varphi(\{pt\} \times \partial D^2)$. Notons cet objet γ . Il s'agit d'une courbe simple fermée sur T , c'est-à-dire un lacet qui ne se coupe pas lui-même. L'isotopie de ces courbes est très bien comprise et nous avons une bijection entre ces classes d'isotopies et les éléments primitifs de $H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De plus, le signe d'un élément est relatif à l'orientation du lacet associé.

Définition 3.20. Nous disons que $v \in H_1(T^2)$ est *primitif* si à chaque fois que $v = nw$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $w \in H_1(T^2)$, cela implique que $n = \pm 1$.

Sans entrer dans plus de considérations homologiques, nous pouvons simplement retenir qu'il existe une bijection entre les courbes γ possibles et les éléments de la forme $\pm(p\mu + q\lambda) \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ où $p, q \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et où μ est un méridien de T , et λ est une longitude de T . Intuitivement, l'isotopie d'une courbe simple fermée sur un tore ne dépend que du nombre de «tours de large» et du nombre de «tours de long» qu'elle fait du tore. De plus, ces nombres de tours doivent être premiers entre eux pour assurer que la courbe est simple et multiplier les deux par -1 revient à considérer la courbe avec l'orientation inverse.

Ainsi nous pouvons identifier γ lors d'un remplissage de Dehn avec uniquement la valeur de p et de q (où $\text{pgcd}(p, q) = 1$). Nous pouvons donc désigner M' par $M(\gamma)$ ou par $M(p/q)$ et ainsi regrouper toutes les informations de façon élégante. La bijection nous assure que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{pgcd}(p, q) = 1$, il est possible de définir $M(p/q)$ en choisissant un difféomorphisme φ approprié.

3.1.4 Propriétés des EFS

Revenons maintenant à l'étude des EFS. Pour pouvoir effectuer notre classification de ces espaces nous allons utiliser la chirurgie de Dehn. Commençons par regarder quand la structure de EFS est compatible avec ce remplissage.

Notons M un EFS avec une composante de frontière tore T . Pour commencer remarquons qu'une fibre classique définit une classe d'isotopies d'une courbe simple fermée. Notons cette classe γ_∞ .

Revenons un instant aux différentes fibrations d'un tore fibré standard décrites au début du chapitre. Si nous prenons une courbe simple fermée sur $\partial(S^1 \times D^2)$ différente de $\{pt\} \times \partial D^2$ alors il est possible de trouver une fibration modèle sur $S^1 \times D^2$ telle que cette courbe est une fibre. En revanche, si nous essayons de fibrer un tore solide avec comme modèle la courbe $\{pt\} \times \partial D^2$ nous n'obtenons

pas un EFS. En effet, la fibre centrale serait alors transversale à toutes les autres et ne respecterait donc pas la condition de voisinage tubulaire.

Reconsidérons notre EFS M . Effectuons un remplissage de Dehn pour former $M(\gamma)$. Nous pouvons donc étendre la structure de fibré de Seifert de M à $M(\gamma)$ à condition que les fibres classiques ne soient pas l'image de méridiens $\{pt\} \times \partial D^2$ (i.e. que les fibres classiques ne soient pas des frontières d'un disque du tore solide). Nous venons donc de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.21. *La structure de fibré de Seifert de M peut être étendue à $M(\gamma)$ à condition que $\gamma \neq \gamma_\infty$.*

Cette proposition permet de montrer que le remplissage de Dehn est un outil adapté à l'étude des EFS. Notre but est de s'en servir afin d'établir une classification des EFS.

Pour obtenir une meilleure description de ces remplissages il est nécessaire de paramétrer l'homologie de la composante de frontière de notre EFS car c'est elle qui décrit les courbes simples fermées γ possibles. Nous avons donc besoin de deux courbes simples fermées qui définissent une base de l'homologie. Nous possédons déjà la courbe γ_∞ définie par une fibre classique. La définition et la proposition qui suivent permettent de définir la deuxième courbe nécessaire.

Définition 3.22. Soit M un EFS, B son espace de base et $p : M \rightarrow B$ la projection. Une *section* de B est un plongement $\sigma : B \rightarrow M$ tel que $p \circ \sigma = Id_B$.

Proposition 3.23. *Tout EFS compact, connexe, sans fibre exceptionnelle et avec une frontière non-vide admet une section de son espace de base.*

Prenons à nouveau M un EFS avec une composante de frontière T et supposons maintenant également que M ne possède pas de fibre exceptionnelle. L'EFS M admet donc au moins une section. Notons C la projection de T sur B . L'image

de C par une section s définit alors une courbe simple fermée de T . Cette image dépend du choix de la section, notons-la γ_0 . Nous possédons donc maintenant deux courbes simples fermées sur T (γ_∞ et γ_0). Nous pouvons donc paramétrer γ grâce à celles-ci et écrire $\gamma = p\gamma_\infty + q\gamma_0$. Nous sommes passé ici très vite sur tous les détails concernant γ_0 mais ceux-ci sont disponibles dans (Brin, 2007) (partie 1.6). La proposition 3.23 y est également démontrée (il s'agit du corollaire 1.6.3.4).

Récapitulons notre démarche, nous sommes partis d'un EFS M sans fibre exceptionnelle et avec une composante de frontière tore T . Nous pouvons utiliser les fibres classiques et une section pour définir respectivement les courbes simples fermées γ_∞ et γ_0 . Les remplissages de Dehn de T sont alors totalement définis par $\gamma = p\gamma_\infty + q\gamma_0$, où $p, q \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$. De plus, la structure de EFS de M s'étend à $M(\gamma)$ si $\gamma \neq \gamma_\infty$. Concluons maintenant en remarquant qu'avec ce procédé nous obtenons une fibre exceptionnelle de multiplicité q (provenant de la fibre centrale du tore solide) dans $M(\gamma)$ lors du remplissage.

Nous pouvons maintenant entreprendre de construire un modèle type de EFS orientable.

Partons d'abord de F une surface compacte, potentiellement non-orientable et avec des frontières. Prenons k disques, notés $D_1, \dots, D_k \subset F$ et formons $F' = F \setminus (D_1 \sqcup \dots \sqcup D_k)$. Notons C_1, \dots, C_k les composantes de frontière de F' qui apparaissent dans l'opération. Nous pouvons maintenant construire l'espace M comme l'espace total de l'unique fibré en S^1 sur F' qui est orientable. Intuitivement nous collons à chaque point de notre surface un cercle en faisant attention à l'orientation que nous lui donnons (définition exacte de fibré en 3.36). Nous aurions d'ailleurs pu classifier les EFS non-orientables de la même façon en autorisant à cette étape plusieurs choix possibles dans l'orientation des fibres par rapport à F' . Revenons à M qui est donc un EFS orientable sur F' sans fibre exceptionnelle. Au-dessus de chaque composante de frontière $C_i \subset \partial F'$ nous avons une composante de fron-

tière tore, notée T_i , dans M (car $S^1 \times S^1 = T^2$). Nous pouvons alors réaliser un remplissage de Dehn pour chaque T_i en utilisant la même section σ pour tout les i . Nous obtenons la variété $M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$ (où F réfère à la surface de départ, et où les fractions représentent les invariants des courbes γ_i utilisées pour les remplissages).

Théorème 3.24. *Soit Y un EFS compact, orientable. Alors Y est isomorphe à un certain $M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$. Si maintenant nous considérons les espaces de Seifert $Y = M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$ et $Y' = M(F, p'_1/q'_1, \dots, p'_k/q'_k)$. Alors Y est isomorphe à Y' si et seulement si nous avons :*

- (i) $p_i/q_i \equiv p'_i/q'_i \pmod{1}$ (à permutation près)
- (ii) Si F est fermée : $\sum_i p_i/q_i = \sum_i p'_i/q'_i$

Ce résultat est démontré dans (Hatcher, 2007), proposition 2.1. De notre côté nous admettons ce résultat mais essayons quand même de visualiser d'où proviennent les deux conditions. Pour la première il semble logique de demander une égalité entre les invariants. Mais le choix de la section σ lors des remplissages de Dehn nous permet en fait d'obtenir ce degré de liberté. Intuitivement lorsque nous effectuons des chirurgies de Dehn nous infligeons à notre variété une sorte de «torsion interne». Si cette torsion représente un tour entier alors il est possible de l'annuler dans une composante de frontière. Imaginez une serviette que nous aurions tordue en tenant les deux bouts, si nous libérons une extrémité alors il est possible d'annuler la torsion dans la serviette en la passant d'un bout à l'autre. C'est exactement ce que permet de faire un choix différent de section : au lieu de visualiser la torsion dans le bout tenu nous la visualisons dans le bout relâché (ie la frontière).

Gardons cette même image pour essayer de comprendre la deuxième condition. Dans le cas où F est fermé il n'y a pas de frontière à laquelle nous pouvons an-

nuler la torsion entière. Par contre il est toujours possible de visualiser la torsion correspondante à un entier où nous le voulons dans la variété. Ainsi nous pouvons passer une torsion entière d'une composante à une autre mais jamais l'annuler, donc la somme de la torsion de toutes les composantes doit rester la même.

Ces dernières remarques nous permettent également de voir qu'il manque une petite étape dans notre construction initiale. En fait, il faudrait retirer un disque de plus dans F et effectuer un remplissage de Dehn avec un tore fibré standard $(1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$. Ce remplissage n'ajoute pas de fibre exceptionnelle mais ajoute une torsion entière. Or le théorème nous donne bien que cette torsion est un invariant de la classification si M est fermé et il n'est pas possible de la rajouter autrement si M ne possède pas de fibre exceptionnelle.

Remarque 3.25. Dans la grande majorité des cas la classification par isomorphisme est équivalente à celle via homéomorphisme. Il existe cependant quelques exceptions classifiées d'espaces possédant plusieurs structures de Seifert, c'est le sujet du chapitre 2 de (Brin, 2007). Nous ne détaillerons pas ces cas ici mais une fois connus ils nous permettent de démontrer la prochaine proposition en s'appuyant sur ce que nous avons déjà montré des orbifolds.

Proposition 3.26. *Soit M une variété de dimension 3 possédant deux structures de Seifert distinctes. Notons B_1 et B_2 les orbifolds associées (les espaces de base des fibrations respectives). Alors $\text{signe}(\chi(B_1)) = \text{signe}(\chi(B_2)) \geq 0$.*

La première application de notre classification sera de nous permettre de calculer le groupe fondamental d'un EFS quelconque. Nous construirons ici uniquement le cas le plus simple, c'est à dire le groupe d'un EFS orientable, fermé tel que la surface F de départ est orientable aussi.

Soit F une surface compacte, orientable de genre g possédant k composantes de frontière. Ici le fibré M orientable en S^1 sur F correspond à $F \times S^1$. Donc

$\pi_1(M) = \pi_1(F) \times \pi_1(S^1) = \pi_1(F) \times \mathbb{Z}$. Regardons les présentations de ces groupes :
 $\pi_1(F) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = c_1 \dots c_k \rangle$, donc
 $\pi_1(M) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k, t \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = c_1 \dots c_k, [t, a_i] = [t, b_i] = [t, c_i] = 1 \rangle$ (nous avons uniquement rajouté un générateur libre qui commute avec tout les autres éléments). Nous pouvons maintenant calculer le groupe fondamental de $M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$ en regardant l'effet d'un remplissage de Dehn sur π_1 grâce au théorème de Van Kampen. Au final nous obtenons la présentation suivante : $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k, t \mid c_1 \dots c_k [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = t^b, [t, a_i] = [t, b_i] = [t, c_i] = 1, c_i^{q_i} t^{p_i} = 1 \rangle$. Ici le $b \in \mathbb{Z}$ qui apparaît correspond à ce que j'avais désigné par la torsion entière dans la remarque suivant le théorème de classification. Rappelons que si le fibré M , fermé, ne possède pas de fibre exceptionnelle, alors il fallait retirer un disque de plus dans F et effectuer un remplissage de Dehn avec un tore fibré $(1, b)$ pour différencier les EFS via l'invariant ii) du théorème de classification. Sinon, si M possède des fibres exceptionnelles, alors ce b est en fait caché dans les invariants p_i/q_i . Cela est mieux explicité dans l'explication de la définition 3.29.

Une présentation plus générale du groupe fondamental d'un EFS quelconque est offerte par le théorème 2.2.2 de (Brin, 2007).

Ce qui nous intéressera particulièrement dans ce résultat c'est d'observer que le sous-groupe cyclique engendré par t (t représente une fibre classique) est normal dans $\pi_1(M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k))$. Pour plus de simplicité notons cet EFS uniquement M . Si nous regardons maintenant $\pi_1(M) / \langle t \rangle$ nous remarquons qu'il s'agit en fait du groupe fondamental de l'orbifold associée à M . Le résultat 1.12 ainsi que la construction du groupe fondamental d'une orbifold (qui permet d'étendre des conclusions du théorème 1.12 aux orbifolds) nous permettent donc de déduire la proposition 3.28. Mais pour nous assurer que tous les objets y sont bien définis nous allons avoir besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.27. *Si M est un EFS et $p_M : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré fini, alors \widetilde{M} hérite d'une structure de Seifert.*

Démonstration. Sans entrer dans tous les détails l'idée provient du fait qu'une fibre H de M est une variété de dimension 1. Donc $p^{-1}(H)$ est aussi une variété de dimension 1 (proposition 1.3). Ainsi chaque composante connexe de $p^{-1}(H)$ est un cercle ou une droite. Mais les droites proviennent uniquement de revêtements de degrés infinis. \square

Proposition 3.28. *Soit $\pi : M \rightarrow B$ la projection d'un EFS sur son orbifold de base. Alors :*

- (i) *Si nous avons $p_M : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de degré fini et que nous munissons \widetilde{M} de la structure de Seifert induite, alors il existe un revêtement $p_B : \widetilde{B} \rightarrow B$ tel que $p_B \circ \widetilde{\pi} = \pi \circ p_M$. Ou de façon plus visuelle :*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \widetilde{M} \\ p_M \downarrow \\ M \xrightarrow{\pi} B \end{array} & \Longrightarrow & \begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \overset{\widetilde{\pi}}{\dashrightarrow} & \widetilde{B} \\ p_M \downarrow & \circlearrowright & \downarrow p_B \\ M & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \end{array}$$

- (ii) *Si nous avons $p_B : \widetilde{B} \rightarrow B$ un revêtement de degré fini alors il existe un EFS noté $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{B}$ et un revêtement $p_M : \widetilde{M} \rightarrow M$ tel que $p_B \circ \widetilde{\pi} = \pi \circ p_M$. Ou de façon plus visuelle :*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \widetilde{B} \\ \downarrow p_B \\ M \xrightarrow{\pi} B \end{array} & \Longrightarrow & \begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \overset{\widetilde{\pi}}{\dashrightarrow} & \widetilde{B} \\ p_M \downarrow & \circlearrowright & \downarrow p_B \\ M & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \end{array}$$

Intéressons-nous maintenant à un dernier invariant des EFS. Celui-ci prend tout son sens lors de l'étude des EFS avec des outils classiques adaptés aux variétés de

dimension trois (surfaces plongées, homologie etc...). Mais comme nous n'avons que très peu abordé ces questions lors de ce mémoire nous admettrons la plupart de ces propriétés.

Définition 3.29. Soit $M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$ un EFS orientable, fermé. Notons à l'avenir $e(M) = \sum_i p_i/q_i \in \mathbb{Q}$. Cette quantité est connue comme étant le *nombre d'Euler* ou encore la *caractéristique d'Euler généralisée*.

Nous avons déjà vu cette somme lors du théorème 3.24. Il s'agissait d'un invariant que lorsque M est fermée (ce qui explique pourquoi nous restreignons la définition à ce cas). Nous considérerons donc par convention que $e(M) = 0$ si M possède une frontière. Il est possible de justifier ce choix en regardant notamment la possibilité de trouver une surface horizontale dans M .

Dans le théorème 3.24 nous avons vu que l'écriture des invariants des remplissages de Dehn peut varier d'un entier à condition que la variété possède une frontière ou dans le cas contraire à condition que cette somme totale reste inchangée. Ce nombre d'Euler quantifie intuitivement la torsion totale d'un EFS fermé. Afin de mieux mettre en évidence cela nous allons opter pour une écriture normalisée de ces invariants. Soit $M(F, p_1/q_1, \dots, p_k/q_k)$, nous pouvons réécrire cet EFS en réduisant les invariants pour qu'à chaque fois $p_i < q_i$. Dans le cas où M possède une frontière nous n'avons rien à ajouter car nous avons déjà le même EFS. Si M ne possède pas de frontière alors notons $b \in \mathbb{Z}$ la différence entre la somme des invariants initiaux et ceux normalisés. Il s'agit du même b que nous faisons apparaître en effectuant une chirurgie $b/1$ sur une fibre classique dans la remarque suivant notre théorème de classification. Avec notre nouvelle convention $e(M) = b + \sum_i p_i/q_i$ (avec $b = 0$ si M possède des frontières). Intuitivement la somme des invariants représente la torsion provenant des fibres exceptionnelles et b représente ce que j'ai désigné plus tôt comme la torsion entière.

Proposition 3.30. *Si M est un EFS orientable, alors $e(M) = 0$ si et seulement si M possède un revêtement fini de la forme $F \times S^1$ où F est une surface compacte.*

Démonstration. Pour les personnes à l'aise avec la topologie des variétés de Seifert, l'idée est que si $e(M) = 0$ nous pouvons trouver une surface horizontale dans M . Cette surface décrit un revêtement fini de l'orbifold de base. La proposition 3.28 permet alors de conclure. La démonstration détaillée est écrite dans (Scott, 1983) (lemme 3.7). \square

Proposition 3.31. *Soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement de EFS de degré $d = l \times m$ tel que nous avons ce diagramme commutatif où les flèches verticales représentent des revêtements et où les annotations représentent leurs degrés respectifs.*

$$\begin{array}{ccccc}
 S^1 & \xrightarrow{\text{fibre}} & \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{B} \\
 \downarrow l & & \downarrow l \times m & & \downarrow m \\
 S^1 & \xrightarrow{\text{fibre}} & M & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Alors $e(\widetilde{M}) = (m/l) \times e(M)$.

Nous admettons cette proposition (à convention près elle correspond au théorème 3.6 de (Scott, 1983) et sa preuve complète est disponible dans (Neumann et Raymond, 1978)). Intuitivement, si nous voyons M comme un fibré en S^1 sur B , un revêtement peut être décomposé par son effet sur les fibres et son effet sur l'orbifold. Pour revêtir finement un cercle il faut utiliser la projection $z \rightarrow z^l$. Donc un cercle dans le revêtement se projettera sur l cercles dans M . La valeur de e est donc divisée par l car la torsion dans M est l fois plus importante que dans \widetilde{M} . D'un autre côté un revêtement de degré m d'une orbifold peut être visualisé

comme m copies de cette orbifold. Donc si nous avons collé ensemble m copies de B , il semble logique que la torsion soit multipliée par m .

3.1.5 Commensurabilité des variétés de Seifert

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour établir la classification de commensurabilité des variétés de Seifert. Mais avant d'énoncer ce théorème nous allons préciser les différentes géométries de dimension trois des EFS à titre informatif.

Proposition 3.32. *Les variétés de Seifert sont réparties selon leur géométrie de la façon suivante :*

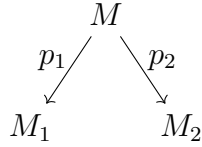
	$\chi(B) > 0$	$\chi(B) = 0$	$\chi(B) < 0$
$e(M) = 0$	$S^2 \times \mathbb{E}^1$	\mathbb{E}^3	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
$e(M) \neq 0$	S^3	Nil	$\widehat{SL_2\mathbb{R}}$

Théorème 3.33. *Soient $M_1 \rightarrow B_1$ et $M_2 \rightarrow B_2$ deux variétés de Seifert compactes, orientables et leurs orbifolds de base respectives. Nous avons que :*

$$M_1 \sim M_2 \iff \begin{cases} \partial M_1 = \emptyset \iff \partial M_2 = \emptyset \\ \text{signe}(\chi(B_1)) = \text{signe}(\chi(B_2)) \\ e(M_1) = 0 \iff e(M_2) = 0 \end{cases}$$

Où le symbole \sim représente la relation de commensurabilité.

Démonstration. \Rightarrow) Supposons d'abord que $M_1 \sim M_2$, montrons que cela implique les trois conditions. Par définition nous avons qu'il existe un espace M et deux revêtements de degrés finis $p_1 : M \rightarrow M_1$, et $p_2 : M \rightarrow M_2$. Rappelons que nous représentons ceci de cette façon :



De plus la proposition 3.27 nous permet d'assurer que M est une EFS.

1. Le lemme 1.44 nous permet immédiatement de conclure que $\partial M_1 = \emptyset \Leftrightarrow \partial M_2 = \emptyset$
2. Dans cette situation la proposition 3.28 nous permet de construire des revêtements $p_{B_i} : \widetilde{B}_i \rightarrow B_i$ tel que :

$$\begin{array}{ccc}
 M & \dashrightarrow & \widetilde{B}_1 \\
 p_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_{B_1} \\
 M_1 & \longrightarrow & B_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \dashrightarrow & \widetilde{B}_2 \\
 p_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_{B_2} \\
 M_2 & \longrightarrow & B_2
 \end{array}$$

La proposition 3.13 nous donne alors que $signe(\chi(\widetilde{B}_i)) = signe(\chi(B_i))$. Il faut rester vigilant pour conclure car potentiellement $\widetilde{B}_1 \neq \widetilde{B}_2$ si M possède plusieurs structures de Seifert. Néanmoins, la proposition 3.26 nous assure que $signe(\chi(\widetilde{B}_1)) = signe(\chi(\widetilde{B}_2))$.

3. Supposons que $e(M_1) = 0$. Nous avons que $e(M) = 0$ par le résultat 3.31. De la même façon $e(M_2) = 0$.

\Leftarrow) Maintenant que le premier sens est démontré, attaquons l'implication moins intuitive. Supposons que les trois conditions soient remplies pour les deux variétés de Seifert $M_1 \rightarrow B_1$ et $M_2 \rightarrow B_2$. Nous allons diviser notre preuve en deux cas selon le signe de $\chi(B_i)$.

1. $\chi(B_i) > 0$:

Ici il s'agit de cas particuliers. Nous avons déjà vu par exemple que toutes les mauvaises orbifolds ont une caractéristique strictement positive ou encore que la

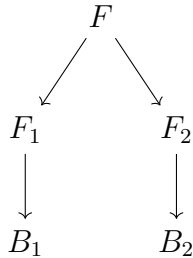
variété M peut admettre plusieurs structures de Seifert lorsque $\chi(B) > 0$. Les outils que nous avons introduit sont donc souvent insuffisant pour comprendre ces cas. Mais le calcul de la caractéristique d'Euler d'une orbifold nous permet de nous rendre compte qu'il n'existe qu'un nombre relativement faible de possibilités. Donc il est en fait possible de classifier tous ces objets. Vous pourrez trouver cette classification dans cet article (Marian, 2019) (partie 5) qui peut être complété par le chapitre 6 de (Jaco, 1980). De façon plus accessible, la classification exhaustive des cas fermés est disponible sur la page (Wikipedia, 2021a). Nous ne l'établirons pas ici (car nous n'avons pas développé la théorie pour) mais une fois celle-ci admise il est possible de regarder tous les cas orientables un à un pour établir la commensurabilité. Au final cette procédure nous donne qu'il existe trois classes de commensurabilité distinctes :

$$\begin{cases} S^1 \times D^2 \text{ si } \partial M_i \neq \emptyset \\ S^3 \text{ si } \partial M_i = \emptyset \text{ et } e(M_i) \neq 0 \\ S^1 \times S^2 \text{ si } \partial M_i = \emptyset \text{ et } e(M_i) = 0 \end{cases}$$

2. $\chi(B_i) \leq 0$:

L'avantage de ce cas est qu'ici toutes les orbifolds sont bonnes (corollaire 3.17).

Donc B_i est finiment revêtu par une surface que nous noterons F_i . Comme $\text{signe}(\chi(B_1)) = \text{signe}(\chi(B_2))$ la proposition 3.13 nous permet de déduire que $\text{signe}(\chi(F_1)) = \text{signe}(\chi(F_2))$. De plus $\partial M_1 = \emptyset \iff \partial M_2 = \emptyset$ implique que $\partial B_1 = \emptyset \iff \partial B_2 = \emptyset$ qui implique à son tour que $\partial F_1 = \emptyset \iff \partial F_2 = \emptyset$. Donc la commensurabilité des surfaces nous permet de conclure que $F_1 \sim F_2$. Ainsi il existe F une surface compacte, orientable tel que :



Nous pouvons remarquer que nous sommes en présence de quatre possibilités ici : $\chi(F)$ est égale ou inférieure à 0 et dans chaque cas F possède ou non des frontières. Comme ces quatre cas se traitent de la même façon, nous ne les différencierons pas.

Séparons maintenant à nouveau notre preuve en deux selon la valeur de $e(M_1)$ et $e(M_2)$.

(i) $e(M_i) = 0$

La proposition 3.28 nous permet de construire des revêtements de degrés finis des M_i à partir des F_i . Ces revêtements possèdent une surface comme espace de base. De plus, comme dans ces revêtements $e = 0$ nous pouvons déduire de la construction des EFS via la chirurgie de Dehn qu'ils sont en fait égaux à $F_i \times S^1$. Nous aurions pu également utiliser la proposition 3.30 pour effectuer le raisonnement dans l'autre sens. Nous avons donc la situation suivante (où les lignes pleines représentent des revêtements et celles en pointillés des projections) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F & & \\
 & & \swarrow & & \searrow \\
 F_1 \times S^1 & \dashrightarrow & F_1 & & F_2 & \dashleftarrow & F_2 \times S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M_1 & \dashrightarrow & B_1 & & B_2 & \dashleftarrow & M_2
 \end{array}$$

Il est maintenant facile de construire un revêtement $F \times S^1 \rightarrow F_1 \times S^1$ (en utilisant le revêtement de $F \rightarrow F_1$ sur la première composante, et l'identité sur la deuxième). Ainsi nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc}
 & F \times S^1 & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 F_1 \times S^1 & & F_2 \times S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_1 & & M_2
 \end{array}$$

Et donc $M_1 \sim M_2$.

(ii) $e(M_i) \neq 0$

Utilisons à nouveau la proposition 3.28 pour construire cette fois des revêtements de degré fini $W_i \rightarrow M_i$ à partir des revêtements $F \rightarrow B_i$. Nous avons donc :

$$\begin{array}{ccccc}
 W_1 & \dashrightarrow & F & \longleftarrow & W_2 \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow & \searrow & \downarrow \\
 M_1 & \dashrightarrow & B_1 & & B_2 \longleftarrow M_2
 \end{array}$$

Pour pouvoir conclure ici nous aimerions trouver un revêtement de degré fini de W_1 et W_2 . Ces deux EFS ne possèdent pas de fibre exceptionnelle mais peuvent potentiellement avoir un nombre d'Euler différent.

Regardons W_1 , c'est un EFS orientable, sans fibre exceptionnelle, fermé (car $e(W_1) \neq 0$) donc :

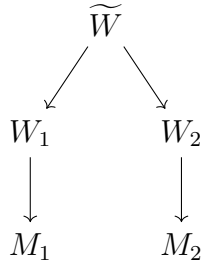
$$\pi(W_1) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, t \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = t^b, [t, a_i] = [t, b_i] = 1 \rangle$$

Considérons le sous-groupe engendré par $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, t^b \rangle$. Comme t commute avec tout les autres éléments il s'agit d'un sous-groupe normal. De plus le quotient est égal à $\{e, t^1, \dots, t^{b-1}\} \cong \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. Donc nous pouvons faire correspondre à ce sous-groupe un revêtement normal \widetilde{W}_1 de degré $|b| \in \mathbb{N}^*$ grâce au théorème 1.12. Nous avons alors que \widetilde{W}_1 est un EFS tel que :

$$\pi(\widetilde{W}_1) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, t' \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = t', [t', a_i] = [t', b_i] = 1 \rangle$$

Il s'agit donc de l'EFS sur F , orientable, sans fibre exceptionnelle, fermé, tel que $e(W_1) = \pm 1$ (le signe dépend ici de l'orientation choisie pour W_1).

Réalisons la même construction pour W_2 . Le théorème 3.24 nous permet alors de conclure que $\widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 =: \widetilde{W}$ et donc :



Ainsi $M_1 \sim M_2$.

□

Ce théorème nous assure qu'il existe donc 9 classes de commensurabilité pour les EFS. Elles se distinguent d'abord par la présence d'une frontière ou non. Puis chaque cas est divisé en trois selon que l'orbifold de base de l'EFS ait une caractéristique d'Euler positive, nulle, ou négative. Enfin, les cas sans frontière se divisent à nouveau en deux selon que le nombre d'Euler de l'EFS soit nul ou non.

Remarque 3.34. Nous avons restreint notre étude au cas orientable car nous avons déjà vu que le cas non-orientable est entièrement déterminé par celui-ci (grâce au 2-revêtement d'orientation). Nous concluons donc cette partie avec une proposition permettant de faire le lien entre un EFS non-orientable et son 2-revêtement d'orientation (détails disponibles dans la partie 2.4 de (Brin, 2007)).

Proposition 3.35. *Soit M un EFS compact, non orientable avec n fibres exceptionnelles et soit \widetilde{M} son 2-revêtement d'orientation. Alors \widetilde{M} possède $2n$ fibres exceptionnelles. Chaque invariant p_i/q_i de remplissage de Dehn de M est remplacé par une paire d'invariants p_i/q_i et $(q_i - p_i)/q_i$ pour \widetilde{M} . De plus, si M est fermé $b = -n$. Enfin, l'espace de base de \widetilde{M} est un 2-revêtement de l'espace de base de M .*

3.2 Variétés Sol

3.2.1 Définition et premières propriétés

Rappelons qu'il existe huit géométries en dimension trois. Six d'entre elles correspondent à des EFS et les deux dernières sont les géométries Sol et hyperbolique. La géométrie hyperbolique est un cas particulier que nous retrouvons déjà en dimension deux. Ces propriétés la différencient clairement des EFS et elle semble regrouper la plupart des difficultés du domaine car les outils classiques que nous possédons échouent souvent à la décrire convenablement. La géométrie Sol apparaît, elle, comme un cas plus inattendu. En effet, elle regroupe un ensemble relativement restreint de variétés possédant des contraintes très fortes. Notre approche nous amènera à les comparer à des variétés de Seifert dégénérées. Mais l'image la plus adaptée se dessine lorsque nous essayons de scinder une variété géométrique M de dimension trois en deux morceaux de dimension strictement plus petite. Pour cela nous allons utiliser la notion de fibration définie formellement juste après (3.36). Nous pouvons étendre cette définition à la catégorie des orbifolds (en autorisant notamment l'espace de base à être une orbifold). Les variétés de Seifert correspondent alors aux variétés admettant une fibration :

$$\text{Dimension 1} \longleftarrow M \longrightarrow \text{Dimension 2}$$

Les variétés de Sol admettent une fibration :

$$\text{Dimension 2} \longleftarrow M \longrightarrow \text{Dimension 1}$$

Alors que les variétés hyperboliques n'admettent aucune fibration en général.

Néanmoins, dans certains cas assez exceptionnels, une telle variété peut quand

même avoir une structure de fibré. Nous étudierons par exemple des variétés hyperboliques qui fibrent au-dessus du cercle.

Commençons cette partie par une courte introduction aux variétés Sol afin de justifier cette image. Cette géométrie provient d'un groupe de Lie. Le revêtement universel auquel elle correspond peut être identifié à \mathbb{R}^3 équipé de la métrique définie par $ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$.

Nous pouvons remarquer que cet espace Sol est *feuilleté* par les plans $z = \text{constante}$. Cela signifie que Sol se décompose en plans et que ces plans «s'empilent» entre eux pour former l'espace complet. Ce qui rend ce feuilletage particulièrement intéressant c'est d'observer que chacun de ces plans est isométrique à \mathbb{E}^2 . En effet, pour $z = cst$, il est facile de vérifier que la métrique induite est bien euclidienne. De plus, nous admettrons que toutes les isométries de Sol préservent cette fibration. Ainsi une variété Sol hérite d'un feuilletage naturel de dimension deux. Les feuilles sont alors des variétés euclidiennes c'est à dire des plans, des couronnes, des rubans de Möbius, des bouteilles de Klein ou des tores. Si vous êtes intéressés par une description plus détaillée de cette géométrie vous pouvez (encore) vous référer à l'excellent article de Scott sur les géométries (Scott, 1983).

Pour pouvoir continuer notre description nous allons avoir besoin de la définition formelle d'un *fibré*. Nous avons déjà fait appel à cette notion lors de la construction générique d'un espace de Seifert mais nous nous étions contenté d'un aspect intuitif.

Définition 3.36. Un espace E avec une structure de *fibré* en F sur B est un espace E muni d'une projection $p : E \rightarrow B$ satisfaisant que : $\forall b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b tel que $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F$ via h . De plus, nous exigeons que $p|_{p^{-1}(U)} = \pi \circ h$ où $\pi : U \times F \rightarrow U$ représente la projection sur le premier facteur.

Nous nommons alors F la *fibres*, B l'*espace de base*, h une *trivialisat*ion locale et

E l'espace total.

Intuitivement un fibré E est localement le produit $B \times F$ mais pas forcément globalement. L'exemple le plus simple consiste à regarder des fibrés en I sur S^1 . La couronne ($S^1 \times I$) est un exemple de ces fibrés. Il est dit trivial car il correspond globalement au produit de la base par la fibre. Le ruban de Möbius est aussi un fibré car localement il se confond avec le produit $S^1 \times I$ mais il est globalement différent de la couronne (car nous y avons ajouté un «twist», une torsion). Cette torsion rend le bord du ruban de Möbius connexe.

Nous pouvons aussi remarquer que cette définition est très proche de celle des revêtements. En effet, elle en est en fait une généralisation dans le sens où une structure de revêtement est équivalente à une structure de fibré avec F un espace discret.

Revenons aux variétés Sol. Nous avons vu que le feuilletage par des plans impose d'importantes contraintes sur les variétés. Nous pouvons aller plus loin avec la proposition suivante (démontré dans (Scott, 1983) p.471) :

Proposition 3.37. *Soit G un sous-groupe d'isométries de Sol dont l'action est libre et proprement discontinue sur Sol. Le feuilletage naturel de dimension 2 hérité par l'espace quotient $M = \text{Sol}/G$ lui donne alors la structure d'un fibré sur une orbifold de dimension 1.*

Cette proposition permet déjà de limiter énormément les possibilités car il n'existe que quatre orbifolds compactes de dimension 1. En effet, en dimension 1 la seule singularité possible provient d'une réflexion (et engendre un point «réflecteur»). Les quatre possibilités sont donc S^1 (sans point réflecteur), et l'intervalle I avec 0, ou 1, ou 2 points réflecteurs.

Nous n'en dirons pas plus sur les fibrés au-dessus d'orbifolds mais cela nous permet de restreindre notre champs d'étude. En effet, dans cette partie nous nous

intéressons à la commensurabilité des variétés Sol. Plus précisément des variétés Sol compactes (voir remarque 1.27). De plus, remarquons que comme les variétés Sol sont des quotients de \mathbb{R}^3 , elles sont sans bord. Or ce résultat nous permet de déduire que les variétés Sol compactes et sans frontière sont soit des fibrés en tores sur S^1 , soit des semi-fibrés en tores. Ce dernier cas signifie que la variété est une union de deux fibrés non-triviaux en I sur la bouteille de Klein. Plus précisément, la variété possède un tore qui la divise en ces deux fibrés. De même que lors de notre exemple avec le ruban de Möbius, ces fibrés sont non triviaux car ils possèdent une torsion.

Cette description est déjà très forte mais nous pouvons encore restreindre notre étude grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.38. *Si $M = Sol/G$ est une variété compacte avec la géométrie de Sol, alors M possède un revêtement de degré fini \widetilde{M} tel que \widetilde{M} est un fibré en tores sur S^1 .*

L'idée est de regarder quel est le type de sous-groupe d'isométries de Sol qui engendre ce genre de variété. Il s'agit des groupes qui agissent par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur les plans $z = cst$ et par translation sur la dernière composante. Pour en obtenir une description précise il faut observer que le groupe d'isométries $Isom(Sol)$ possède en lui une copie de Sol. Puis, en jouant sur le choix des éléments générateurs, il est possible de trouver de tels sous-groupes. Je précise que la loi de multiplication définie dans le groupe de Lie est la suivante : $(x, y, z).(a, b, c) = (x + e^{-z}a, y + e^z b, z+c)$. Une fois cette étape passée il faut alors observer que dans n'importe quel sous-groupe d'isométries G agissant librement, proprement discontinuement il est possible de trouver un sous-groupe d'indice fini tel que décrit dans la première partie. Encore une fois ces détails sont disponibles dans (Scott, 1983).

3.2.2 Fibré en tores sur S^1

Nous venons de voir qu'une variété Sol quelconque est toujours dans la même classe de commensurabilité qu'une variété Sol définissant un fibré en tore sur S^1 . Ainsi nous pouvons nous contenter de classifier ces dernières. En effet, si nous avons une telle classification alors pour une variété Sol quelconque il est relativement simple de décrire le revêtement de la proposition 3.38 et donc d'identifier sa classe de commensurabilité.

Penchons-nous donc plus amplement sur cet objet qu'est un fibré en tores sur S^1 . Pour le comprendre il faut d'abord regarder les homéomorphismes du tore dans lui-même.

Il est possible de définir le tore T^2 de plusieurs façons équivalentes. Nous alternerons entre la définition $T^2 = S^1 \times S^1$ et celle donnée par $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ déjà utilisée en 1.2.

Le *mapping class group* noté Mod d'une variété, ici T^2 , correspond au quotient des homéomorphismes $T^2 \rightarrow T^2$ préservant l'orientation par la relation d'isotopie. Plus formellement $Mod(T^2) = Homeo^+(T^2) / Homeo_0(T^2)$ où $Homeo_0(T^2)$ dénote la composante connexe de l'identité. C'est un sujet d'étude très intéressant et très bien compris dans le cas des surfaces. Il nous permet d'identifier tous les «types» d'homéomorphismes qui induisent un changement fort dans notre variété.

Proposition 3.39. *Nous avons que $Mod(T^2) \cong SL_2(\mathbb{Z})$ où $SL_2(\mathbb{Z})$ représente le groupe des matrices 2×2 à coefficient dans \mathbb{Z} tel que le déterminant vaut 1.*

Démonstration. Intuitivement les homéomorphismes sont déterminés par leurs effets sur un méridien et sur une longitude. Donc, sans entrer trop dans les détails, nous pouvons définir la fonction $Mod(T^2) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ par $[f] \rightarrow f_*$ où $f_* : H_1(T^2) \xrightarrow{\sim} H_1(T^2)$ est la fonction induite sur l'homologie.

Dans le sens inverse il est possible d'écrire la fonction de deux façons. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. La façon la plus intuitive de lui associer l'homéomorphisme $f_A : T^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ est de poser $f_A(u, v) = (u^a v^b, u^c v^d)$. Mais par la suite nous préférons utiliser la description suivante : $f_A : T^2 \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

□

Ces homéomorphismes nous permettent de décrire les fibrés en tore sur S^1 qui nous intéressent grâce à la construction du *tore d'application*.

Définition 3.40. Pour une matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ donnée, nous pouvons construire le *tore d'application* $M(A)$ de f_A . Celui-ci est défini par le quotient suivant : $M(A) = T^2 \times [0, 1] / (x, 1) \sim (f_A(x), 0)$.

Tous les fibrés en tores sur S^1 qui apparaissent lors de l'étude de la géométrie Sol sont bien de cette forme. Nous verrons par la suite qu'une minorité de ces tores d'applications sont en fait des EFS. Mais il sera facile de les séparer des variétés Sol et nous pouvons donc nous contenter d'une étude globale pour le moment. Nous visualiserons ces tores d'applications toujours avec la même image. Nous prenons d'abord $T^2 \times I$ puis nous collons les deux extrémités avec l'application induite par $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Voir figure 3.3.

Dans la figure chaque ligne horizontale représente un tore. De plus le collage par A va intuitivement induire des «torsions» dans $M(A)$.

Proposition 3.41. Soient $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, et $B \in GL_2(\mathbb{Z})$. Nous avons que $M(A^{-1}) \cong M(A)$ et que $M(A) \cong M(B^{-1}AB)$.

Démonstration. Commençons par la deuxième propriété. Si nous avons l'homéo-

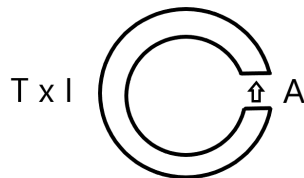


Figure 3.3 Tore d'application

morphisme $f_B : T^2 \rightarrow T^2$ induit par $B \in GL_2(\mathbb{Z})$ alors il est possible d'appliquer f_B à chacune des fibres (tores) de $T^2 \times I$ puis de former ensuite le tore d'application $M(A)$. Cela a pour effet de produire l'homéomorphisme suivant $M(A) \rightarrow T^2 \times [0, 1] / (f_B(x), 1) \sim (f_A(f_B(x)), 0)$. Nous pouvons alors appliquer l'homéomorphisme f_B^{-1} à toutes les fibres et obtenir un homéomorphisme vers $T^2 \times [0, 1] / (x, 1) \sim (f_B^{-1}(f_A(f_B(x))), 0) = M(B^{-1}AB)$.

Pour la première propriété il suffit de faire une réflexion sur I avant de coller par A . Ainsi nous identifions $(x, 0) \sim (f_A(x), 1)$ au lieu de $(x, 1) \sim (f_A(x), 0)$. Il ne nous reste plus qu'à appliquer f_A^{-1} à toutes les fibres pour obtenir un homéomorphisme avec le tore provenant de l'identification $(f_A^{-1}(x), 0) \sim (x, 1)$.

Visuellement nous avons :

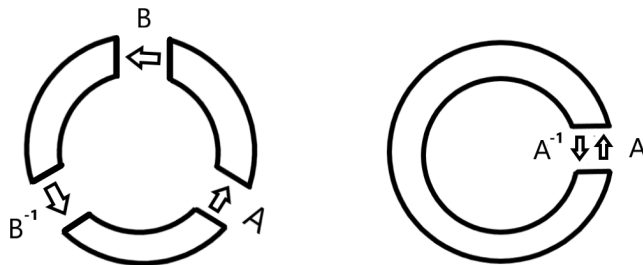


Figure 3.4 Tore d'application conjugué

□

En fait, la réciproque de ce résultat est aussi vraie. La preuve est bien plus technique et est disponible dans (Hatcher, 2007) (théorème 2.6). Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 3.42. *Soient $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $M(A), M(B)$ leurs tores d'applications, nous avons que $M(A) \cong M(B)$ si et seulement si A est conjugué à $B^{\pm 1}$ dans $GL_2(\mathbb{Z})$.*

Étudions maintenant les revêtements de ces tores d'applications. Comme souvent cette étude passe d'abord par le calcul du groupe fondamental de ces variétés.

Proposition 3.43. *Soient $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $M(A)$ son tore d'application associé, alors $\pi_1(M(A)) = \langle a, b, t \mid [a, b] = 1, t^{-1}at = f_{A^*}(a), t^{-1}bt = f_{A^*}(b) \rangle$ où f_{A^*} représente la fonction induite par f_A sur π_1 .*

Démonstration. Ce résultat se montre relativement simplement en utilisant le théorème de Van Kampen plusieurs fois. Je vous invite à tenter de le faire car c'est un très bon entraînement pour ce genre de calcul. Les ouverts à sélectionner au départ sont, par exemple, $V = T^2 \times [0; 0, 3[\cup T^2 \times]0, 7; 1]$ et $U = T^2 \times]0, 2; 0, 8[\cup \vee \gamma$ où $T^2 \times \{1\}$ et $T^2 \times \{0\}$ sont collés par A , et où $\vee \gamma$ représente un voisinage tubulaire d'un lacet $\gamma \subset V$ reliant $\{x\} \times \{0, 8\}$ à $\{x\} \times \{0, 2\}$ ($x \in T^2$ quelconque). □

Explicitons maintenant deux types de revêtement d'un fibré défini par $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

1. Si nous prenons un entier $n > 0$, alors nous pouvons construire un n -revêtement cyclique $p : M(A^n) \rightarrow M(A)$.

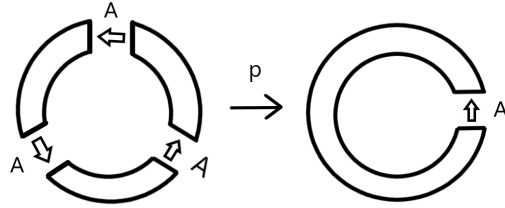


Figure 3.5 3-revêtement cyclique

Ce revêtement repose sur le revêtement classique $S^1 \rightarrow S^1$. Il est donc défini intuitivement par $p(x, t) = (x, t^n)$ où la deuxième composante de $M(A)$ est identifiée avec S^1 .

2. Observons que $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}^2$. Munissons-nous d'un sous-groupe L_0 de $\pi_1(T^2)$ tel que $L_0 \cong \mathbb{Z}^2$ et $A(L_0) = L_0$. Posons $A_0 = A|_{L_0}$, la restriction de A à L_0 . Ceci est bien défini grâce aux deux conditions mises sur L_0 . En effet, $L_0 \cong \mathbb{Z}^2$ donc nous pouvons lui attribuer une base canonique définie par l'image de la base de \mathbb{Z}^2 . Comme $A(L_0) = L_0$ nous pouvons considérer A_0 comme une matrice de ce sous-groupe. Puis nous obtenons un revêtement $\tilde{T} \rightarrow T$ tel que $\pi_1(\tilde{T}) = L_0$ grâce au théorème 1.12. Nous pouvons donc construire un revêtement $p : M(A_0) \rightarrow M(A)$ en utilisant le revêtement $\tilde{T} \rightarrow T$ fibre par fibre.

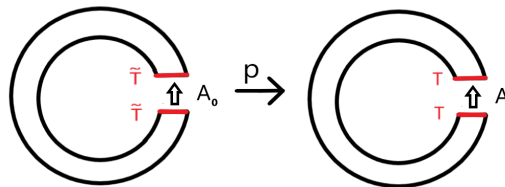


Figure 3.6 Revêtement fibre par fibre

Essayons de comprendre ce qui se passe ici. L'idée est de construire un revêtement fibre par fibre pour l'étendre à tout $M(A)$. Chaque fibre est un tore T^2 donc

pour en construire un revêtement nous choisissons un sous-groupe de $\pi_1(T^2)$. Pour obtenir un revêtement fini et compact il est nécessaire de prendre un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Nous avons déjà vu lors du chapitre 2 qu'en fait un tel revêtement de tore est forcément un tore lui-même (le revêtement provient ici aussi du revêtement $S^1 \rightarrow S^1$ en utilisant que $T^2 = S^1 \times S^1$). Donc $\tilde{T} \cong T^2$ et notons \tilde{p} le revêtement $\tilde{T} \rightarrow T$. Avec cela en main il est facile de créer un revêtement $p' : \tilde{T} \times I \rightarrow T \times I$ en définissant $p'(x, t) = (\tilde{p}(x), t)$. Nous voudrions maintenant construire $p : M(A_0) \rightarrow M(A)$. Le seul endroit problématique se situe à l'identification. Nous voulons que le collage soit identique donc nous utilisons logiquement une restriction de A . De plus, pour que tout soit bien défini il est nécessaire que L_0 soit stable par cette restriction (car sinon l'isomorphisme entre $SL_2(\mathbb{Z})$ et $Mod(\tilde{T})$ est mal défini car dans la nouvelle base donnée par L_0 les coefficients de A sont potentiellement rationnels). Ce choix de fonction nous permet bien d'étendre notre revêtement au quotient car dans ce cadre nous avons que $p'(f_{A_0}(x), 0) = (f_A(\tilde{p}(x)), 0)$. En effet, nous pouvons déduire ça de l'enchaînement de diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^2/L_0 & \xrightarrow{f_{A_0}} & \mathbb{R}^2/L_0 \\
\tilde{p} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tilde{p} \\
\mathbb{R}^2/L & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{R}^2/L
\end{array} & \implies &
\begin{array}{ccc}
\tilde{T} & \xrightarrow{f_{A_0}} & \tilde{T} \\
\tilde{p} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tilde{p} \\
T & \xrightarrow{f_A} & T
\end{array} & \implies &
\begin{array}{ccc}
\tilde{T} \times \{0\} & \xrightarrow{(f_{A_0}, 0)} & \tilde{T} \times \{0\} \\
p' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p' \\
T \times \{0\} & \xrightarrow{(f_A, 0)} & T \times \{0\}
\end{array}
\end{array}$$

Ces deux types de revêtements finis sont particulièrement intéressants car ils sont en fait les seuls qui peuvent apparaître. Intuitivement, notre objet est un fibré en tores sur S^1 donc un revêtement est soit un revêtement de S^1 , soit un revêtement de la fibre tore, soit un mélange des deux. Or nous savons qu'il n'existe que peu de revêtements du cercle et du tore. Ainsi nous avons :

Théorème 3.44. *Si $W \rightarrow M(A)$ est un revêtement de degré fini, alors il existe $M(A_0)$ tel que précédemment décrit, et nous avons un isomorphisme de revêtements $W \rightarrow M(A_0^n)$. De façon équivalente nous avons le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\cong} & M(A_0^n) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & M(A) \end{array}$$

(A circular arrow is drawn between the two diagonal arrows pointing to $M(A)$)

Démonstration. $M(A)$ est le tore d'application associé à $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ donc nous avons que $\pi_1(M(A)) = \langle a, b, t \mid [a, b] = 1, t^{-1}at = f_{A^*}(a), t^{-1}bt = f_{A^*}(b) \rangle$. Regardons les sous-groupes d'indice fini qui peuvent apparaître.

Soit H un sous-groupe de $\pi_1(M(A))$. Déjà remarquons que $\pi_1(M(A))$ possède trois générateurs libres, donc pour que H soit d'indice fini il faut retrouver des puissances de ces trois générateurs dans H . Notons l, k, m trois entiers supérieurs à 0. Si nous prenons $H = \langle a, b, t^l \rangle$ alors nous aurons un l -revêtement cyclique. De plus, ce sous-groupe est clairement le même que celui obtenu en regardant l'image de $\pi_1(M(A^l))$ par sa fonction de revêtement. Ainsi le théorème 1.12 nous permet de conclure que le revêtement associé à H est isomorphe à $M(A^l)$.

Si nous prenons $H = \langle a^k, b^m, t \rangle$ alors nous aurons un revêtement fibre par fibre. Ici aussi il est clair que ce sous-groupe est le même que celui correspondant à l'image de $\pi_1(M(A_0))$ où $A_0 = A|_{L_0}$ avec $\mathbb{Z}^2 \cong L_0 \leq \pi_1(T)$. Ainsi nous obtenons que le revêtement associé à H est isomorphe à $M(A_0)$.

Enfin dans le cas général si $H = \langle a^k, b^m, t^l \rangle$ nous obtenons que le revêtement associé à H est isomorphe à $M(A_0^l)$.

□

Ce théorème détermine la forme de tous les revêtements pouvant apparaître. Mais

avant de commencer l'étude de commensurabilité regardons quels sont exactement les fibrés qui possèdent la géométrie Sol. Notons $\tau_A \in \mathbb{Z}$ la trace de la matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 3.45. *Si $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ la variété $M(A)$ est un EFS si et seulement si $|\tau_A| \leq 2$. Sinon c'est une variété Sol.*

Démonstration. Regardons d'abord le cas $|\tau_A| \geq 3$. Lors de la démonstration de la proposition 3.38 nous avons vu que la construction d'un fibré provenant de Sol se faisait grâce à un sous-groupe d'isométries agissant par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur les plans $z = cst$ et agissant par translation sur la troisième composante. Cette dernière action est engendrée par un élément de la forme $(0, 0, t)$ (avec $t \neq 0$). C'est lui qui définit la fonction A lorsque nous quotientons. Or la loi de composition du groupe de Lie Sol nous permet d'observer qu'il existe une base tel que cette matrice s'écrit $\pm A = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Donc si $t \neq 0$ alors $\tau_A > 2$. Certaines conditions de stabilité (qui assurent que le sous-groupe d'isométries est discret) imposent des contraintes sur la valeur de t (obligeant notamment A à appartenir à $SL_2(\mathbb{Z})$). Néanmoins il reste possible de réaliser toutes les valeurs de trace qui sont entières et de valeurs absolues supérieures à 2.

Nous allons maintenant démontrer rapidement que $|\tau_A| \leq 2$ est équivalent au fait que $M(A)$ soit un EFS.

\Rightarrow) Supposons que $|\tau_A| \leq 2$:

1. Si $|\tau_A| \leq 1$ ou si $A = \pm Id$ alors A est d'ordre fini. En effet, c'est évident si $A = \pm Id$. Dans l'autre cas le théorème de Cayley-Hamilton nous donne que le polynôme caractéristique de A , χ_A , est un polynôme annulateur. Or $\chi_A = X^2 - tr(A)X + det(A)$ (avec $det(A) = 1$). Il est donc facile de montrer que A est d'ordre 3, 4 ou 6.

Or si A est d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ alors $M(A)$ a bien une structure de Seifert où une fibre modèle est définie par les arcs $\{x\} \times [0, 1]$, $\{A(x)\} \times [0, 1]$, ..., $\{A^{n-1}(x)\} \times [0, 1]$, pour $x \in T^2$. Visuellement une fibre fera n tours de notre fibré.

2. Si $|\tau_A| = 2$ et $A \neq \pm Id$ alors il est possible de montrer grâce à un peu d'algèbre linéaire que A est conjugué à $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. La transformation A a alors l'effet d'un *twist de Dehn* sur le tore. La définition formelle est disponible dans (Ivanov, 2002) (p.29) ou encore sur wikipedia, mais il peut être préférable pour l'intuition de regarder plutôt l'animation (*Saint - Gervais*, 2016). Avec cela en tête essayons de définir une structure de Seifert sur $M(A)$. Ici une fibre modèle sera un méridien d'un tore $T^2 \times \{t\}$. Donc chaque tore $T^2 \times \{t\}$ se décompose en fibres. Avec ce choix il est clair que nous avons une structure de Seifert sur $T^2 \times I$. Enfin, cette structure descend bien au quotient car un twist de Dehn définit un homéomorphisme $T^2 \rightarrow T^2$ qui préserve ces fibres S^1 .

\Leftarrow) Pour ce sens nous montrerons plutôt la contraposée. Supposons que $|\tau_A| \geq 3$, montrons que $M(A)$ n'est pas un EFS. Un résultat topologique classique des EFS nous donne qu'ici une fibre tore de $M(A)$ peut être considérée (grâce à une isotopie) comme étant soit transverse à toutes les fibres S^1 de notre EFS, soit égale à une union de fibres S^1 . Nous disons respectivement que ce tore est horizontal ou qu'il est vertical. Montrons donc que ces deux cas sont absurdes si $|\tau_A| \geq 3$.

1. T horizontal :

Supposons que nous ayons une structure d'EFS telle que toutes les fibres soient transverses au tore T où nous avons effectué l'identification. Prenons la fibre S^1 d'un élément $x \in T$. Une fois que cette fibre aura fait un tour complet (car elle est transverse à tous les tores) elle sera envoyée sur $A(x)$. Deux possibilités, soit $A(x) = x$ et dans ce cas nous sommes passés par toute la fibre, soit la fibre refait un tour. Or comme par hypothèse nous avons une structure de Seifert ce processus s'arrête en un nombre fini d'étapes car la fibre est homéomorphe à S^1 . Ainsi

$\forall x \in T, \exists l \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^l(x) = x$. Comme $M(A)$ est compact nous pouvons le recouvrir d'un nombre fini de tores solides (voisinages de fibres hérités de la structure d'EFS). Pour les fibres d'un même tore solide ce l est homogène. Donc en prenant le produit des l de chaque voisinage nous obtenons un entier noté n tel que $A^n = Id$. Donc A est d'ordre fini.

D'un autre côté regardons à nouveau le polynôme caractéristique $\chi_A = X^2 - tr(A)X + 1$. Un rapide calcul nous donne que les valeurs propres de A sont $\lambda_A = \frac{\tau_A + \sqrt{\tau_A^2 - 4}}{2}$ et $\lambda_A^{-1} = \frac{\tau_A - \sqrt{\tau_A^2 - 4}}{2}$ (elles sont l'inverse l'une de l'autre). De plus, si $|\tau_A| \geq 3$ alors $\lambda_A^{\pm 1} \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Donc un vecteur propre de A fournit la preuve que A ne peut pas avoir un ordre fini si $|\tau_A| \geq 3$. Donc il n'existe pas de structure de Seifert tel que T est horizontal et tel que $|\tau_A| \geq 3$.

2. T vertical :

Supposons que nous ayons une structure d'EFS tel que les tores soit des unions de fibres S^1 . Dans ce cas la structure de Seifert peut être restreinte à une structure sur $T \times [0, 1] = M(A) \setminus \mathring{N}(T)$. Cette structure est forcément une structure produit, de plus comme elle provient de $M(A)$ nous avons que les fibres sont préservées par A . Nous admettons que cela n'a lieu que si A est conjugué à $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\tau_A = 2$ et nous avons ici aussi une contradiction. \square

Concluons cette étude des fibrés en tores sur S^1 par deux petits résultats.

Proposition 3.46. *Soit M une variété fermée avec la géométrie Sol. Alors M possède un revêtement de degré fini $M(A)$ avec $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau_A \geq 3$.*

Démonstration. La proposition 3.38 nous donne que M possède un revêtement de degré fini $M(A)$. De plus, comme M est Sol, $M(A)$ l'est aussi. Ainsi $|\tau_A| \geq 3$. Enfin si $\tau_A \leq -3$ alors un rapide calcul nous donne que $\tau_{A^2} = \tau_A^2 - 2 \geq 3$. Donc $M(A^2)$ fournit le revêtement recherché. \square

Proposition 3.47. *Soit M une variété fermée avec la géométrie Sol tel que M est commensurable avec M' (nous écrivons $M \sim M'$). Alors M' est Sol aussi.*

Démonstration. Comme M est Sol elle possède un revêtement de degré fini $M(A)$ avec $\tau_A \geq 3$. Donc $M \sim M(A)$ et $M \sim M'$. Comme c'est une relation d'équivalence nous obtenons que $M' \sim M(A)$. Donc nous avons \widetilde{M} tel que :

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ M' & & M(A) \end{array}$$

Le théorème 3.44 affirme que $\widetilde{M} \cong M(A_0^n)$.

Calculons τ_{A_0} . Nous avons que $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ et que L_0 est un sous-groupe de $\pi_1(T^2)$ tel que $L_0 \cong \mathbb{Z}^2$. Si nous pensons ces objets dans \mathbb{Q}^2 alors nous avons que la base de $\pi_1(T^2)$ et la base de L_0 sont toutes les deux des bases de \mathbb{Q}^2 . Donc il existe une matrice de changement de base $B \in GL_2(\mathbb{Q})$. Comme A_0 est juste la restriction de la matrice A à L_0 nous avons que $A_0 = B^{-1}AB$. Ainsi $\tau_{A_0} = \text{tr}(A_0) = \text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(ABB^{-1}) = \text{tr}(A) = \tau_A$.

De plus, des calculs matriciels nous assurent que $\text{tr}(A^n) \geq 3$ si $\text{tr}(A) \geq 3$. Ainsi $\tau_{A_0^n} \geq 3$ et $M(A_0^n)$ est donc Sol. Donc au final M' possède un revêtement fini $M(A_0^n)$ dont le revêtement universel est Sol. Donc M' est Sol. \square

3.2.3 Un peu d'algèbre sur les corps

Pour étudier les classes de commensurabilité des variétés Sol nous allons introduire un invariant complet. Cet invariant repose sur la théorie des extensions de corps donc introduisons d'abord quelques notions. Si vous souhaitez avoir plus de détails sur ces objets je vous invite à consulter (Blanchet, 2009).

Définition 3.48. Soit K et L des corps commutatifs, nous appelons *morphisme de corps* tout morphisme d'anneaux $f : K \rightarrow L$. Un tel morphisme est injectif et est aussi appelé *extension* de K . Le degré de l'extension, noté $[L : K]$ est la dimension de L comme espace vectoriel sur K .

Il existe deux grandes façons de construire une extension de corps (elles sont équivalentes si le degré est fini). Soit nous prenons un polynôme irréductible $P \in K[X]$ et nous formons l'extension $K \rightarrow K[X]_{(P)}$ de degré $\deg(P)$. Soit nous nous munissons d'une extension $K \rightarrow L$ et d'un élément $\alpha \in L$ et nous formons l'adjonction $K(\alpha)$ qui est le plus petit sous-corps de L qui contient K et α .

Nous nous intéressons dans cette partie à la deuxième construction avec $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{R}$. Ce cadre (lorsque le degré est fini) est généralement dénommé un *corps de nombres*.

Définition 3.49. Un *entier algébrique* est une racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{Z} .

Tout les entiers sont, par exemple, des entiers algébriques car pour $n \in \mathbb{Z}$, n est la racine du polynôme $P(X) = X - n$. Il est également possible de montrer qu'un entier algébrique appartenant à \mathbb{Q} appartient en fait à \mathbb{Z} .

Proposition 3.50. *Les entiers algébriques d'un corps de nombre F forme un anneau. Il est noté O_F .*

Définition 3.51. Une *unité* d'un anneau A est un élément $u \in A$ qui possède un inverse pour la multiplication. Il $\exists v \in A$ tel que $uv = vu = 1$.

Proposition 3.52. *L'ensemble des unités d'un anneau A forme un groupe sous la multiplication. Il est noté $U(A)$.*

Théorème 3.53 (Théorème des unités de Dirichlet). *Si F est un corps de nombre inclus dans \mathbb{R} , alors le groupe des unités de l'anneau des entiers algébriques $U(O_F)$ est isomorphe au produit de $\mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1}$ et du groupe des racines de l'unité de F .*

Remarque 3.54. Le théorème est en fait plus complet si nous prenons en compte les F inclus dans \mathbb{C} . Vous en trouverez l'énoncé et la preuve dans tout bon livre sur le sujet. Nous pouvons citer par exemple (Cohen, 1993) (théorème 4.9.5).

De plus, comme ici nous nous sommes restreint aux corps de nombre inclus dans \mathbb{R} , les racines de l'unité se limitent à 1 et -1 . Ainsi dans notre cas nous aurons que $U(O_F) \cong \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1} \times \{-1, 1\}$.

Avant de retourner aux variétés Sol montrons deux derniers résultats bâtis pour une future preuve.

Lemme 3.55. *Si $r \geq 3$ est un entier, alors r peut être écrit de façon unique comme $r = r_1 r_2^2$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tel que r_1 n'a pas de facteur p^2 où p est premier. Nous avons alors que $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1})$.*

Démonstration. Soit un entier $r \geq 3$, sa décomposition en nombres premiers nous donne que $r = p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}$. Nous avons alors que $r_1 = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ et $r_2 = p_1^{i_1 - k_1} \dots p_n^{i_n - k_n}$ avec $k_j \in \{0, 1\}$ tel que $k_j \equiv i_j \pmod{2}$.

Donc $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1 r_2^2}) = \mathbb{Q}(r_2 \sqrt{r_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1})$ car $r_2 \in \mathbb{N}$. En effet, si nous regardons l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ alors c'est par définition le plus petit sous-corps de \mathbb{R} qui contient \sqrt{r} et \mathbb{Q} . Donc par stabilité il contient $b\sqrt{r}$ pour tout $b \in \mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{Q}(b\sqrt{r}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{r})$. L'inclusion inverse est identique avec $1/b \in \mathbb{Q}$. \square

Lemme 3.56. *Si $r, s \geq 3$ alors $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$ si et seulement si $r_1 = s_1$.*

Démonstration. \Rightarrow) Supposons que $\mathbb{Q}(\sqrt{r_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})$ avec $r = r_1 r_2^2$ et $s = s_1 s_2^2$. Il s'agit d'extensions de degrés 2 donc $\mathbb{Q}(\sqrt{s_1}) = \{a + b\sqrt{s_1}, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Par

hypothèse nous avons que $\sqrt{r_1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})$, donc $\sqrt{r_1} = a + b\sqrt{s_1}$.

Si $ab \neq 0$ alors $\frac{r_1 - a^2 - b^2 s_1}{2ab} = \sqrt{s_1}$. Donc $\sqrt{s_1} \in \mathbb{Q}$, ainsi $s_1 = c^2$ ce qui est absurde par construction de s_1 .

Si $b = 0$ nous avons que $\sqrt{r_1} = a \in \mathbb{Q}$. Or $r_1 \in \mathbb{N}$ donc $r_1 = c^2$ ce qui est absurde.

Donc $a = 0$ et $r_1 = b^2 s_1$. Comme par hypothèse r_1 n'a pas de facteur carré nous obtenons que $r_1 = s_1$.

\Leftrightarrow Si $r_1 = s_1$ alors $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$. □

3.2.4 La commensurabilité

Maintenant que nous avons révisé nos notions d'algèbre, nous pouvons introduire un invariant pour notre étude de commensurabilité des variétés Sol. Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $\tau_A \geq 3$, posons $\mathbb{F}_A = \mathbb{Q}(\sqrt{\tau_A^2 - 4})$ un corps de nombres. Nous pouvons remarquer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\tau_A^2 - 4}) = \mathbb{Q}(\lambda_A^{\pm 1})$ où $\lambda_A^{\pm 1}$ sont les valeurs propres de A que nous avons déjà calculées plus tôt. En effet, $\lambda_A^{\pm 1} = \frac{\tau_A \pm \sqrt{\tau_A^2 - 4}}{2}$ et nous avons déjà montré que multiplier l'élément adjoint par un rationnel ne modifie pas l'extension, il en est de même si nous ajoutons un rationnel. Enfin, il est clair que \mathbb{F}_A est une extension de degré 2 et qu'elle est incluse dans \mathbb{R} (car $\tau_A^2 - 4 \geq 0$ si $\tau_A \geq 3$). Nous dirons que c'est une extension quadratique réelle de \mathbb{Q} .

Proposition 3.57. *Si $M(A') \rightarrow M(A)$ est un revêtement de degré fini, alors $\mathbb{F}_{A'} = \mathbb{F}_A$.*

Démonstration. Le théorème 3.44 nous permet déjà de voir que $M(A') = M(A_0^n)$. De plus, nous avons montré lors de la preuve de la proposition 3.47 que $\tau_A = \tau_{A_0}$. Ainsi $\mathbb{F}_{A_0} = \mathbb{F}_A$ (ici nous parlons bien d'égalité, ce qui est plus fort qu'un isomorphisme entre les deux extensions).

Prenons $n \geq 1$ et rappelons que $\lambda_A^{\pm 1} = \frac{\tau_A \pm \sqrt{\tau_A^2 - 4}}{2}$. Il est facile de voir que

$\lambda_A + \lambda_A^{-1} = \tau_A$ et que $\lambda_A - \lambda_A^{-1} = \sqrt{\tau_A^2 - 4}$. D'un autre côté $A^n \in SL_2(\mathbb{Z})$ donc nous avons également $\lambda_{A^n} + \lambda_{A^n}^{-1} = \tau_{A^n}$ et $\lambda_{A^n} - \lambda_{A^n}^{-1} = \sqrt{\tau_{A^n}^2 - 4}$. De plus, la définition de valeur propre nous donne que $\lambda_{A^n}^{\pm 1} = \lambda_A^{\pm n}$. En effet, si nous prenons x le vecteur propre associé à λ_A alors $A(x) = \lambda_A x$, $A^2(x) = \lambda_A^2 x$, ..., $A^n(x) = \lambda_A^n x$. Donc λ_A^n est la valeur propre de A^n . Ainsi nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau_{A^n}^2 - 4} &= \lambda_{A^n} - \lambda_{A^n}^{-1} \\ &= \lambda_A^n - \lambda_A^{-n} \\ &= (\lambda_A - \lambda_A^{-1})(\lambda_A^{n-1} + \lambda_A^{n-3} + \dots + \lambda_A^{-(n-1)}) \text{ (en factorisant)} \\ &= (\sqrt{\tau_A^2 - 4})(\tau_{A^{n-1}} + \tau_{A^{n-3}} + \dots) \end{aligned}$$

Or $(\tau_{A^{n-1}} + \tau_{A^{n-3}} + \dots)$ est composé de traces de matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ et potentiellement de $\lambda_A^0 = 1$. Donc $(\tau_{A^{n-1}} + \tau_{A^{n-3}} + \dots) \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\mathbb{Q}(\sqrt{\tau_{A^n}^2 - 4}) = \mathbb{Q}(\sqrt{\tau_A^2 - 4})$. Ici $\mathbb{F}_A = \mathbb{F}_{A^n}$.

Au final $\mathbb{F}_{A'} = \mathbb{F}_{A_0^n} = \mathbb{F}_{A_0} = \mathbb{F}_A$. □

Proposition 3.58. *Soient $M(A_1)$ et $M(A_2)$ tel que $A_i \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\tau_{A_i} \geq 3$. Si $M(A_1) \sim M(A_2)$ nous avons que $\mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_{A_2}$.*

Démonstration. Il existe \widetilde{W} tel que :

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{W} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ M(A_1) & & M(A_2) \end{array}$$

Le théorème 3.44 nous donne que $\widetilde{W} = M(A)$. Donc la proposition précédente affirme que $\mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_A = \mathbb{F}_{A_2}$. □

Proposition 3.59. *Soient $M(A_1)$, $M(A_2)$ deux revêtements d'une variété Sol W . Alors $\mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_{A_2}$.*

Démonstration. En utilisant le revêtement de la proposition et l'identité nous avons que $M(A_i) \sim W$. Donc $M(A_1) \sim W \sim M(A_2)$ avec $A_i \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\tau_{A_i} \geq 3$ (car W est Sol et donc $M(A_i)$ l'est aussi). \square

Définition 3.60. Considérons W une variété Sol fermée. Prenons $M(A)$ un revêtement de degré fini donné par la proposition 3.46 ($A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\tau_A \geq 3$). Nous définissons \mathbb{F}_W l'invariant associé à W par $\mathbb{F}_W = \mathbb{F}_A$.

La proposition 3.46 ne donne pas l'unicité d'un tel revêtement. Mais la proposition précédente nous assure que \mathbb{F}_W est quand même bien défini.

Proposition 3.61. Soient W et W' deux variétés Sol fermées telles que $W \sim W'$. Alors $\mathbb{F}_W = \mathbb{F}_{W'}$.

Démonstration. Considérons $M(A_i) \rightarrow W_i$ les revêtements de degrés finis donnés par la proposition 3.46. Nous avons $M(A_i) \sim W_i$, donc les propriétés de relation d'équivalence nous donnent que $M(A_1) \sim M(A_2)$. Ainsi $\mathbb{F}_{W_1} = \mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_{A_2} = \mathbb{F}_{W_2}$. \square

Notre extension de corps définit donc bien un invariant de classe de commensurabilité des variétés Sol. Pour conclure notre classification il faut maintenant montrer que cet invariant est complet. C'est-à-dire que pour deux variétés Sol fermées W, W' nous ayons que $\mathbb{F}_W = \mathbb{F}_{W'}$ implique que $W \sim W'$. C'est exactement ce que dit notre prochain théorème.

Notre dernière proposition nous donne qu'il existe une fonction bien définie :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \text{Comm}(\text{Sol}) & \rightarrow & \text{Extensions quadratiques} \\ & & \text{réelles de } \mathbb{Q} \\ [W] & \mapsto & \mathbb{F}_W \end{array}$$

Théorème 3.62. *L'application Ψ est injective.*

Démonstration. Soient W_1, W_2 deux variétés Sol fermées tel que $\mathbb{F}_{W_1} = \mathbb{F}_{W_2}$. Prenons $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ tels qu'il existe des revêtements de degré fini $M(A_i) \rightarrow W_i$. Nous avons encore que $\mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_{W_1} = \mathbb{F}_{W_2} = \mathbb{F}_{A_2}$.

D'un autre côté, par définition $\mathbb{F}_A = \mathbb{Q}(\sqrt{\tau_A^2 - 4}) = \mathbb{Q}(\lambda_A)$. De plus, $\lambda_A^{\pm 1}$ sont par définition des racines du polynôme caractéristique $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + 1$. Donc λ_A et λ_A^{-1} sont ce que nous avons appelé des entiers algébriques, ie $\lambda_A, \lambda_A^{-1} \in O_{\mathbb{F}_A}$. De plus, comme λ_A et λ_A^{-1} sont inverse l'une de l'autre nous obtenons qu'elles appartiennent au groupe des unités de l'anneau des entiers algébriques. Donc $\lambda_A, \lambda_A^{-1} \in U(O_{\mathbb{F}_A})$. Or le théorème des unités de Dirichlet nous assure que $U(O_{\mathbb{F}_A}) \cong \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ (car dans \mathbb{R} les racines de l'unité sont seulement -1 et 1). Nous avons également vu lors de la démonstration de la proposition 3.45 que $\lambda_A \neq \pm 1$. Mis bout à bout nous obtenons que λ_A se décompose de façon non-nulle sur \mathbb{Z} dans la somme $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$. Posons maintenant $u \in U(O_{\mathbb{F}_A})$ tel que u est envoyé sur $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$. Nous savons alors qu'il existe un entier n tel que $\lambda_A^2 = u^n$.

Revenons à W_1 et W_2 . Nous avons que $\mathbb{F}_{A_1} = \mathbb{F}_{A_2}$ et donc nous pouvons appliquer le raisonnement précédent à λ_{A_1} et λ_{A_2} pour le même $u \in U(O_{\mathbb{F}_A})$. Ainsi $\lambda_{A_1}^2 = u^{n_1}$ et $\lambda_{A_2}^2 = u^{n_2}$. Donc $\lambda_{A_1}^{2n_2} = u^{n_1 n_2} = \lambda_{A_2}^{2n_1}$. De même, $\lambda_{A_1}^{-2n_2} = u^{-n_1 n_2} = \lambda_{A_2}^{-2n_1}$. Or rappelons que $\lambda_A + \lambda_A^{-1} = \tau_A$. Donc ici nous obtenons que $\lambda_{A_1}^{2n_2} + \lambda_{A_1}^{-2n_2} = \lambda_{A_2}^{2n_1} + \lambda_{A_2}^{-2n_1}$ implique finalement que $\tau_{A_1^{2n_2}} = \tau_{A_2^{2n_1}}$. Le lemme suivant permet alors de conclure que $M(A_1^{2n_2}) \sim M(A_2^{2n_1})$. Ainsi $M(A_1) \sim M(A_1^{2n_2}) \sim M(A_2^{2n_1}) \sim M(A_2)$. Et donc $W_1 \sim M(A_1) \sim M(A_2) \sim W_2$. \square

Lemme 3.63. *Soient $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau_{A_1} = \tau_{A_2} \geq 3$. Alors $M(A_1) \sim M(A_2)$.*

Démonstration. Cette preuve repose en partie sur un résultat algébrique qui assure que si $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\tau_{A_1} = \tau_{A_2} \geq 3$, alors il existe une matrice $X \in GL(\mathbb{Q}) \cap M_2(\mathbb{Z})$ telle que $A_2 = XA_1X^{-1}$. Vous pourrez en trouver la preuve

dans l'article (Traina, 1985) (théorème 4 et 5).

Notons $L =: \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ et posons $L_0 = X(L)$. Comme $X \in M_2(\mathbb{Z})$ ceci est bien défini, et nous avons que L_0 est un sous-groupe de L car X est une application linéaire. Plus que cela, X définit un isomorphisme entre L et L_0 car X est inversible. Notons aussi que $A_2 = XA_1X^{-1} \Leftrightarrow A_2X = XA_1$. D'un autre côté, nous avons que $L_0 \xrightarrow{i} L$ (car L_0 est un sous-groupe) et donc par injectivité $A_2 \circ i = i \circ A_2|_{L_0}$. Mis bout à bout nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{\cong_X} & L_0 & \xleftarrow{i} & L \\
 \downarrow A_1 & & \downarrow A_2|_{L_0} & & \downarrow A_2 \\
 L & \xrightarrow{\cong_X} & L_0 & \xleftarrow{i} & L
 \end{array}$$

Notons $M(A_1, L)$ le fibré en tores sur S^1 obtenu en utilisant la matrice A_1 exprimée pour le groupe L . Formons $M(A_2|_{L_0}, L_0)$ en prenant comme groupe L_0 à la place de L . La variété $M(A_1, L)$ est isomorphe à $M(A_2|_{L_0}, L_0)$ car nous avons juste effectué la même construction en regardant les objets dans un groupe isomorphe. En effet, si nous identifions $\pi_1(T^2)$ à L_0 via l'isomorphisme X alors dans ce cadre $A_2|_{L_0}$ correspond à A_1 dans le groupe isomorphe L_0 . Ainsi, encore dans ce cadre, c'est une transformation de $SL_2(\mathbb{Z})$ et donc nous pouvons construire la variété $M(A_2|_{L_0}, L_0)$. Cette variété est isomorphe à $M(A_1, L)$ car nous avons utilisé la même transformation, nous l'avons juste regardé dans deux identifications différentes. Pour résumer, nos objets de départ sont par définition $M(A_1) = M(A_1, L)$ et $M(A_2) = M(A_2, L)$ et nous avons formé la variété $M(A_2|_{L_0}, L_0) \cong M(A_1, L)$. Nous pouvons maintenant conclure en observant que $M(A_2|_{L_0}, L_0)$ est un revêtement fini de $M(A_2, L)$ (sur le modèle de la figure 3.6). Effectivement, L_0 est un sous-groupe de L , $L_0 \cong \mathbb{Z}^2$ (car $L_0 \cong_X L$), $A_2(L_0) = L_0$

(donnée par le carré gauche du diagramme commutatif), et nous avons utilisé $A_2|_{L_0}$. Ainsi $M(A_1) \cong M(A_2|_{L_0}, L_0) \sim M(A_2)$. \square

Cela conclut bien notre classification car, pour deux variétés Sol connexes, fermées $M_i = \text{Sol}/G_i$ données, nous avons une méthode constructive pour trouver des revêtements de degrés finis $M(A_i)$ avec $A_i \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau_{A_i} \geq 3$. Donc pour savoir si $M_1 \sim M_2$, il suffit de comparer \mathbb{F}_{A_1} avec \mathbb{F}_{A_2} grâce au lemme 3.56. Mais contrairement aux précédentes géométries nous ne pouvons pas lister exactement toutes les classes de commensurabilité car ici il en existe une infinité ! C'est la première fois que nous rencontrons ce phénomène qui sera également vrai pour la géométrie hyperbolique. Ceci renforce le côté particulier de la géométrie Sol car malgré une description restrictive de la forme de ces variétés, nous obtenons une classification bien moins agréable que lors des cas précédents.

Proposition 3.64. *Il existe une infinité dénombrable de classes de commensurabilité distinctes pour les variétés Sol, fermées, connexes.*

Démonstration. Soient $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11, \dots$ la liste des nombres premiers croissants plus grands que 5. Posons $A_n = \begin{pmatrix} p_n - 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Notons $\tau_n =: \text{trace}(A_n) = p_n - 2 \geq 3$. Nous pouvons former la variété Sol $M(A_n)$.

Remarquons que $\tau_n^2 - 4 = (p_n - 2)^2 - 4 = p_n(p_n - 4)$. Cela nous permet de déduire que la partie sans facteur carré (lemme 3.55) de $\tau_n^2 - 4$ contient p_n et aucun facteur premier plus grand que p_n .

Regardons maintenant \mathbb{F}_{A_n} et \mathbb{F}_{A_m} , si $n \neq m$. Le lemme 3.56 nous permet de conclure que $\mathbb{F}_{A_n} \neq \mathbb{F}_{A_m}$ car $\tau_n^2 - 4$ et $\tau_m^2 - 4$ ne possèdent pas la même partie sans facteur carré. Donc il existe au moins autant de classes de commensurabilité que de nombres premiers plus grands que 5.

D'un autre côté il s'agit bien d'une infinité dénombrable car pour toute W variété

Sol, fermée, connexe il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $\tau_A \geq 3$ telle que $W \sim M(A)$. Donc il y a moins de classes de commensurabilité de Sol que de matrices dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Or $SL_2(\mathbb{Z}) \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$ et \mathbb{Z}^4 est dénombrable car c'est un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. \square

3.3 Variétés hyperboliques

3.3.1 Définitions et premières propriétés

Rappelons que la visée de ce chapitre est de comprendre la commensurabilité des variétés géométriques de dimension trois (ie des variétés qui sont définies comme le quotient d'une des géométries de dimension trois par un sous-groupe d'isométries). Nous avons déjà classifié totalement la commensurabilité de sept de ces huit géométries. Il ne nous reste donc plus qu'à étudier les variétés construites sur le modèle de \mathbb{H}^3 . Mais comme je l'ai déjà mentionné, l'étude du cas hyperbolique est très souvent le plus compliqué car, contrairement aux autres géométries, nous ne disposons pas de descriptions particulièrement agréables de ces variétés. Ainsi la classification de commensurabilité reste encore un sujet ouvert pour les variétés hyperboliques. Néanmoins, nous profiterons de cette partie pour établir les premiers résultats et pistes de ce champ de recherche.

Mentionnons également que la géométrie hyperbolique, de par sa difficulté, a été l'objet de beaucoup de recherches. Ainsi, il existe différentes approches et de très nombreux théorèmes et constructions concernant ce domaine. Tenter d'en résumer rapidement les grands axes dans ce mémoire, comme nous l'avons fait pour les précédentes géométries, n'aurait pas trop de sens car produire quelque chose de compréhensible exigerait bien plus d'espace que celui que nous pouvons lui allouer ici. Vous pouvez donc vous tourner vers des sources prenant le temps de détailler tout ce qui doit l'être comme par exemple (Benedetti et Petronio, 2012),

(Ratcliffe et al., 1994) ou encore (Maclachlan et al., 2003). Nous nous appuyerons principalement sur ces ouvrages pour rédiger une courte introduction aux objets nécessaires à la construction de nos résultats.

Commençons comme d'habitude par fixer notre cadre de travail. Nous nous intéressons aux variétés hyperboliques connexes et complètes (définition 1.24). Ces variétés correspondent exactement aux quotients de \mathbb{H}^3 par des sous-groupes d'isométries Γ_i (choisis à conjugaison près) où Γ_i agit librement, proprement et discontinuement. Ces variétés possèdent une courbure sectionnelle égale à -1 .

De plus, les variétés hyperboliques complètes ne possèdent pas de frontière.

Comme souvent, nous privilégierons les variétés orientables car elles sont plus intuitives. Or tous les résultats de classification sur ces variétés s'étendent relativement bien à celles non orientables grâce à l'existence du 2-revêtement d'orientation.

Enfin, contrairement à d'habitude, nous n'exigerons pas la compacité des variétés étudiées mais plutôt une conditions un peu moins forte : nous voulons que le volume soit fini. Toutes les variétés hyperboliques complètes compactes possèdent bien un volume fini mais la réciproque n'est pas vraie. Ces variétés non compactes de volumes finis possèdent ce que nous appelons des *cusps*. Nous n'entrerons pas dans les détails ici non plus mais visuellement un cusp ressemble à $\{(x, y, z) \mid z \geq z_0\} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ie $T^2 \times [z_0, \infty)$ où les tores sont de plus en plus petits au fur et à mesure que nous tendons vers l'infini (pour la variable z). Or un certain nombre de ces variétés non-compactes sont très intéressantes notamment pour la théorie des noeuds par exemple. En effet, pour un noeud K , il est souvent utile de regarder son complément. Ce complément correspond à $S^3 \setminus N$ où N est un voisinage tubulaire de K . Or pour une très grande portion de noeuds, leur complément est une variété hyperbolique dans le sens où $S^3 \setminus N$ admet une structure hyperbolique complète de volume fini. Nous pouvons remarquer que $S^3 \setminus N$ n'a

pas de frontière et n'est pas compact (car nous enlevons un fermé mais ici nous ne recompactifions pas après). De plus, nous pouvons montrer qu'il possède bien un volume fini qui est d'ailleurs un invariant topologique du noeud (ce résultat classique de théorie des noeuds est par exemple disponible dans la partie 2. de (Adams et al., 1991)).

Donc en résumé, notre variété type dans la partie qui suivra sera $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ une variété hyperbolique orientable, sans frontière, de volume fini où Γ est un sous-groupe d'isométries qui agit librement, proprement et discontinuement.

La façon la plus simple de comprendre ces variétés est de s'intéresser à Γ . En effet, les espaces hyperboliques sont étudiés depuis longtemps et leurs isométries sont relativement bien comprises. Cela permet également de donner une intuition visuellement sur la forme de ces variétés. Regardons donc quelques résultats sur ces sous-groupes.

L'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 peut être défini de plusieurs façon. Nous le regardons ici comme étant le demi-espace euclidien $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ équipé de la métrique définie par $(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{z^2}$. Les propositions et théorèmes qui suivent proviennent principalement de (Ratcliffe et al., 1994) partie 4 (où ils sont rigoureusement démontrés). Ils sont ici réécrits avec des notations et un ordre différent. Ces résultats partiels ne sauraient se substituer à une étude approfondie de ces espaces, ils apportent ici seulement un aspect visuel et un début d'intuition sur la géométrie hyperbolique.

Définition 3.65. Si Σ est une sphère de rayon r centrée en $a \in \mathbb{R}^3$, nous pouvons définir *l'inversion le long de la sphère Σ* comme $\sigma : \mathbb{R}^3 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$, $\sigma(x) = r^2 \frac{(x-a)}{\|x-a\|^2} + a$.

Cette construction est facilement visualisable en coordonnées polaires avec la sphère unité centrée en l'origine. Tout point $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ peut être écrit de

façon unique comme λu où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et où u est un vecteur unité. Nous avons alors $\sigma(x) = \lambda^{-1}u$.

Proposition 3.66. *Si $a \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ alors l'inversion de sphère σ est une isométrie de \mathbb{H}^3 .*

Proposition 3.67. *Les isométries de \mathbb{E}^2 s'étendent à des isométries de \mathbb{H}^3 .*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ nous pouvons définir $\hat{\varphi} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ par $\hat{\varphi}(x, y, z) = (\varphi(x, y), z)$. Il est alors facile de vérifier que c'est une isométrie. \square

À partir de maintenant nous écrirons $Isom(\mathbb{H}^3)$ le groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 . De plus, nous noterons $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ le groupe d'isométries préservant l'orientation.

Théorème 3.68. *$Isom(\mathbb{H}^3)$ est engendré par les inversions de sphère et les isométries de \mathbb{E}^2 .*

Définition 3.69. Un *géodésique* est le chemin le plus court entre deux points donnés d'un espace métrique. Il se peut que pour deux points donnés il existe plusieurs chemins distincts minimisant la distance, ils sont alors tous des géodésiques.

Théorème 3.70. *Les géodésiques de \mathbb{H}^3 sont exactement les lignes verticales et les demi-cercles qui intersectent l'espace $\{(x, y, 0)\}$ en angle droit.*

De plus, pour tout deux points distincts de \mathbb{H}^3 , il existe un unique géodésique entre les deux.

Avec tous ces résultats préliminaires en tête nous pouvons nous intéresser et démontrer l'un des théorèmes fondamentaux dans l'étude des variétés hyperboliques.

Théorème 3.71. *Nous avons que $Isom^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL(2, \mathbb{C})$*

Pour le démontrer nous allons prolonger \mathbb{H}^3 avec une frontière $\partial\mathbb{H}^3$. Posons $\partial\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \mid z = 0\} \cup \{\infty\}$. Il est possible de définir cette frontière formellement comme un prolongement des géodésiques de \mathbb{H}^3 . Les demi-cercles définissent la partie $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$ tandis que les lignes verticales sont toutes prolongées (lorsque $z \rightarrow \infty$) par un même point identifié que nous notons ∞ .

La définition exacte consiste à utiliser l'ensemble des géodésiques semi-infinies $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^3$ quotienté par la relation : $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow d(\gamma(t), \gamma'(t))$ est majorée lorsque $t \rightarrow \infty$.

Nous pouvons maintenant identifier $\partial\mathbb{H}^3$ avec $\hat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann en faisant correspondre $(x, y, 0)$ avec $x + iy$ et $\{\infty\}$ avec $\{\infty\}$.

Proposition 3.72. *Toutes les isométries de \mathbb{H}^3 s'étendent à $\partial\mathbb{H}^3$.*

Démonstration. Une isométrie de \mathbb{H}^3 peut être écrite comme une composition d'inversions de sphère et d'isométries de \mathbb{E}^2 . Or les isométries de \mathbb{E}^2 s'étendent à $\partial\mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ facilement. Elles prennent la forme $z \rightarrow e^{i\theta}z + b$ ou $z \rightarrow e^{i\theta}\bar{z} + b$ (s'il y a un nombre impair de réflexions) avec $b \in \mathbb{C}$ pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Les inversions de sphère s'entendent également. Si nous considérons l'inversion le long de la sphère centrée en $a \in \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ de rayon r nous obtenons sur $\hat{\mathbb{C}}$: $\sigma(z) = a + r^2 \frac{(z-a)}{\|z-a\|^2} = a + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}} = \frac{a\bar{z}-|a|^2+r^2}{\bar{z}-\bar{a}}$ (si $z \neq a, \infty$), et $\sigma(a) = \infty, \sigma(\infty) = a$. □

Démonstration. (Théorème 3.71)

Nous pouvons définir un homomorphisme Ψ entre $Isom(\mathbb{H}^3)$ et l'ensemble des fonctions : $\{f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ ou } f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, ad - bc \neq 0\}$.

Il est possible de montrer que Ψ est injective car l'action d'une isométrie sur $\partial\mathbb{H}^3$ détermine l'action de cette isométrie sur les géodésiques.

Remarquons alors que $Isom^+(\mathbb{H}^3) \hookrightarrow \{f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\}$. Plus que cela, cette restriction est en fait un isomorphisme. En effet, la surjectivité peut

se voir en montrant que toutes les fonctions de l'ensemble peuvent être construites avec un bon choix de compositions d'inversions de sphère et d'isométries de \mathbb{E}^2 .

Donc $Isom^+(\mathbb{H}^3) \cong \{f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\}$. Cet ensemble correspond exactement aux transformations de Möbius, noté $Möb(\mathbb{C})$. Or il est connu que $Möb(\mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$. Effectivement nous pouvons montrer que la fonction $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Möb(\mathbb{C})$ définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est un homomorphisme. De plus, il est surjectif car si nous posons $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $ad - bc \neq 0$ alors nous pouvons remarquer que $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a/\Delta z + b/\Delta}{c/\Delta z + d/\Delta}$ avec $\Delta = \sqrt{ad - bc}$. Donc nous obtenons bien un antécédent dans $SL(2, \mathbb{C})$.

Enfin le noyau correspond à l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a^2 = 1 \right\} = \{\pm I\}$.

Ainsi le premier théorème d'isomorphisme nous permet de conclure. Au final $Isom^+(\mathbb{H}^3) \cong Möb(\mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$. \square

Avant de retourner vers la commensurabilité énonçons rapidement une classification des isométries de \mathbb{H}^3 et un second théorème. Cette classification est basée sur l'isomorphisme que nous venons de mettre en lumière. Ces théorèmes ne nous seront pas utiles en soi mais ils nous permettront de comprendre d'où provient l'invariant que nous définirons sur les classes de commensurabilité.

En utilisant un autre modèle pour l'espace hyperbolique et en appliquant le théorème du point fixe de Brouwer nous pouvons montrer que n'importe quel élément de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ possède au moins un point fixe dans \mathbb{H}^3 ou dans $\partial\mathbb{H}^3$.

Théorème 3.73. *Soit $f \in Isom^+(\mathbb{H}^3)$ une isométrie non triviale et $M \in PSL(2, \mathbb{C})$ sa matrice correspondante. Alors :*

- f possède un point fixe dans \mathbb{H}^3 si et seulement si $tr(M) \in \mathbb{R}$ et $|tr(M)| < 2$.
Nous disons alors que f est elliptique.
- f ne possède pas de point fixe dans \mathbb{H}^3 et a un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^3$

- si et seulement si $\text{tr}(M) = \pm 2$. Nous disons alors que f est parabolique.*
- *f ne possède pas de point fixe dans \mathbb{H}^3 et a deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^3$ si et seulement si $\text{tr}(M)$ ne respecte aucune des deux conditions précédentes. Nous disons alors que f est hyperbolique (si $\text{tr}(M)^2 \in \mathbb{R}$) ou loxodromique sinon.*

Les propriétés des géodésiques et des transformations de Möbius nous permettent de nous assurer que si nous possédons plus de points fixes alors l'isométrie est triviale.

Ce dernier théorème permet de caractériser les isométries préservant l'orientation en fonction de leur matrice correspondantes dans $PSL(2, \mathbb{C})$. Comme le groupe $PSL(2, \mathbb{C})$ se manie bien plus facilement que $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ nous aimerions en fait pouvoir travailler uniquement avec celui-ci. Nous avons mis en avant que nous nous intéressons principalement aux sous-groupes d'isométries qui agissent librement, proprement et discontinuement. De plus, comme nous regardons les variétés orientables, nous pouvons nous restreindre à de tel sous-groupes dans $Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Pour pouvoir travailler qu'avec $PSL(2, \mathbb{C})$ nous aimerions donc décrire ces sous-groupes en termes de matrices.

Théorème 3.74. *Se munir d'un sous-groupe discret Γ dans $PSL(2, \mathbb{C})$ est équivalent à avoir un sous-groupe Γ dans $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ qui agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^3 .*

Ces deux derniers théorèmes nous permettent d'affirmer que dans notre cadre de travail nous pourrions nous contenter d'étudier des sous-groupes discrets de $PSL(2, \mathbb{C})$ qui ne possèdent pas d'élément elliptique.

Nous concluons sur deux définitions concernant ces objets.

Définition 3.75. Nous appelons les sous-groupes discrets de $PSL(2, \mathbb{C})$ des *groupes*

kleiniens.

Un groupe kleinien a un *covolume fini* si \mathbb{H}^3/Γ a un volume fini.

3.3.2 La commensurabilité

Dans cette partie nous allons montrer qu'il est possible d'introduire un invariant pour les classes de commensurabilité des variétés hyperboliques. Cette construction, assez semblable à celle effectuée pour les variétés Sol, nous permettra de prouver qu'il existe ici aussi une infinité de classes de commensurabilité distinctes. Malheureusement, cet invariant reste incomplet et donc bien qu'il nous permette de différencier plusieurs classes, il ne suffira pas à établir une classification comparable à celle des précédentes géométries.

Pour définir un tel invariant nous allons à nouveau regarder une extension des rationnels basée sur la trace de matrices. Nous venons de voir que la trace des matrices de $PSL(2, \mathbb{C})$ joue un rôle très important dans la compréhension des isométries de \mathbb{H}^3 conservant l'orientation et donc dans la compréhension des variétés hyperboliques complètes orientables. Regarder de tels objets semble donc relever d'une étude algébrique classique, mais pour s'assurer que nous avons bien un invariant de commensurabilité nous allons devoir nous focaliser sur un sous-groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 particulier.

La partie qui suit est basée sur les pages 111 à 120 de (Maclachlan et al., 2003). Dans ce mémoire nous nous focaliserons sur les groupes kleiniens ayant un covolume fini (afin de simplifier la situation) même si certains résultats sont en fait plus généraux.

Définition 3.76. Soit Γ un groupe kleinien ayant un covolume fini. Posons $\hat{\Gamma} = P^{-1}(\Gamma)$ avec $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ la projection définissant le groupe spécial linéaire projectif. Le *corps de traces* de Γ , noté $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$, est alors défini comme étant le corps : $\mathbb{Q}(\text{tr } \hat{\gamma} : \hat{\gamma} \in \hat{\Gamma})$.

Dans cette définition nous passons par le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ parce qu'il sera plus maniable par la suite. Mais nous pouvons remarquer qu'ici, pour les matrices 2×2 , cela ne modifie que le signe des traces. De plus, rappelons que nos variétés sont définies par Γ choisi à conjugaison près. Cela ne posera pas de problèmes car $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$ est invariant par conjugaison de Γ puisque la trace est invariante par conjugaison.

Pour pouvoir trouver un corps de traces invariant nous allons avoir besoin de constructions algébriques et de certaines de leurs propriétés. Toutes les preuves sont disponibles dans (Maclachlan et al., 2003).

Définition 3.77. Un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ est dit élémentaire s'il existe un x , tel que l'orbite Γx est finie.

Proposition 3.78. Soit Γ un groupe kleinien ayant un covolume fini. Le corps de traces $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$ est une extension finie des rationnels.

Proposition 3.79. Soit $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ une variété hyperbolique de volume fini. Alors $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$ est un invariant topologique de M .

Proposition 3.80. Soit Γ un groupe kleinien ayant un covolume fini. Alors le groupe $\hat{\Gamma} = P^{-1}(\Gamma)$ avec $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe finiment engendré et non élémentaire de $SL(2, \mathbb{C})$.

Définition 3.81. Soit Γ un sous-groupe non-élémentaire de $SL(2, \mathbb{C})$. Nous associons à Γ une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$ noté $A_0\Gamma$. Cette algèbre est définie par $A_0\Gamma = \{\sum_i a_i \gamma_i \mid a_i \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma), \gamma_i \in \Gamma\}$ tel que pour tous les éléments seul un nombre fini de a_i soit non-nuls.

Théorème 3.82. $A_0\Gamma$ est bien une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma)$.

Définition 3.83. Soit Γ un sous-groupe finiment engendré et non élémentaire de $SL(2, \mathbb{C})$. Nous noterons $\Gamma^{(2)}$ le sous-groupe $\langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma \rangle$.

Proposition 3.84. $\Gamma^{(2)}$ est un sous-groupe normal d'indice fini de Γ tel que le quotient $\Gamma/\Gamma^{(2)}$ est un 2-groupe abélien élémentaire (ie un groupe abélien où tous les éléments non-triviaux sont d'ordre 2).

Revenons maintenant à la commensurabilité. Nous avons vu en 1.48 une définition de commensurabilité pour deux groupes distincts. Mais nous pouvons raffiner cette définition pour deux sous-groupes d'un même groupe.

Définition 3.85. Soient G un groupe et Γ_1, Γ_2 deux sous-groupes. Nous disons que Γ_1 et Γ_2 sont *directement commensurables* si l'intersection $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ a un indice fini dans Γ_1 et dans Γ_2 .

Nous disons que Γ_1 et Γ_2 sont *commensurables* si Γ_1 et un conjugué de Γ_2 sont directement commensurables.

Proposition 3.86. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset PSL(2, \mathbb{C})$ deux groupes kleiniens ayant un covolume fini. La commensurabilité de Γ_1 et Γ_2 est équivalente à la commensurabilité de $M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ et $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$.

Démonstration. \Rightarrow) Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes kleiniens commensurables ayant un covolume fini. Posons $g\Gamma_2g^{-1}$ le sous-groupe avec lequel Γ_1 est commensurable. Nous savons qu'il existe une isométrie entre $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ et $\mathbb{H}^3/g\Gamma_2g^{-1}$ donc nous ne les différencierons pas. Les propositions 1.15 et 1.18 nous donnent que $\pi_1(M_i) \cong \text{Deck}_i(\mathbb{H}^3) = \Gamma_i$. Notons $\Gamma = \Gamma_1 \cap g\Gamma_2g^{-1}$. Par hypothèse Γ est d'indice fini dans Γ_1 et dans $g\Gamma_2g^{-1}$ donc nous pouvons voir Γ comme un sous-groupe d'indice fini dans $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$. Comme d'habitude nous avons deux revêtements \widetilde{M}_1 et \widetilde{M}_2 associés à Γ vu dans chacun des deux groupes fondamentaux. Ces revêtements sont de degrés finis car Γ est d'indice fini. Remarquons alors que $\widetilde{M}_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma = \widetilde{M}_2$.

\Leftarrow) Supposons que $M_1 \sim M_2$. La proposition 1.49 nous assure que $\pi_1(M)$ est

commensurable avec $\pi_1(M_2)$ (en terme de deux groupes distincts). À nouveau nous pouvons voir ces groupes fondamentaux comme des sous-groupes Γ_i de $PSL(2, \mathbb{C})$. Quelques résultats algébriques nous permettent de montrer qu'il existe un g tel que nous avons un sous-groupe $H \subset \Gamma_1 \cap g\Gamma_2g^{-1}$ qui est d'indice fini dans Γ_1 et $g\Gamma_2g^{-1}$. Ainsi Γ_1 et Γ_2 sont commensurables. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 3.87. *Soit Γ un sous-groupe finiment engendré et non-élémentaire de $SL(2, \mathbb{C})$. Le corps $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)})$ est un invariant de la classe de commensurabilité de Γ : si Δ est commensurable avec Γ , alors $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Delta^{(2)})$.*

Démonstration. Nous allons suivre la démonstration de (Maclachlan et al., 2003) (théorème 3.3.4) et effectuer la preuve en trois temps. Notons Γ_1 un sous-groupe de Γ d'indice fini. Nous montrerons d'abord que $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$ si Γ_1 est normal. Puis, nous montrerons que ceci est vrai aussi dans le cas où Γ_1 n'est pas normal. Enfin, nous pourrons conclure en démontrant le théorème à partir de cette propriété.

i) Supposons donc que nous avons Γ_1 normal, d'indice fini dans Γ . Considérons $A_0\Gamma_1 = \{\sum_i a_i \gamma_i \mid a_i \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1), \gamma_i \in \Gamma_1\}$ l'algèbre de quaternions associée à Γ_1 . Nous voulons montrer que pour tout $g \in \Gamma$ nous avons $g^2 \in A_0\Gamma_1$. Comme Γ_1 est normal dans Γ n'importe quel $g \in \Gamma$ induit un automorphisme de Γ_1 par conjugaison. En effet, nous avons $\Phi_g : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ tel que $\Phi_g(\gamma_i) = g\gamma_i g^{-1}$. Nous pouvons facilement vérifier que son inverse Φ_g^{-1} est égal à $\Phi_{g^{-1}}$. Ces deux morphismes nous intéressent car ils peuvent s'étendre à des automorphismes de $A_0\Gamma_1$ par $\Phi_g : A_0\Gamma_1 \rightarrow A_0\Gamma_1$ avec $\Phi_g(\sum a_i \gamma_i) = \sum a_i g\gamma_i g^{-1}$.

Le théorème 3.82 nous assure que $A_0\Gamma_1$ est une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$. Or le théorème de Skolem-Noether, un des grands résultats du domaine, affirme

en particulier que tout automorphisme d'une algèbre de quaternions est intérieur. Ce résultat est montré dans (Maclachlan et al., 2003) (théorème 2.9.8). Donc ici nous obtenons qu'il existe $a \in (A_0\Gamma_1)^*$ tel que $\forall x \in A_0\Gamma_1$:

$$\Phi_g(x) = axa^{-1}$$

Nous sommes donc partis d'un $g \in \Gamma$ et nous venons de trouver un $a \in (A_0\Gamma_1)^*$. Cela nous permet aussi de voir que $g^{-1}a$ commute avec tout les autres éléments car $\forall x \in A_0\Gamma_1$:

$$\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}}(x) = x \Leftrightarrow \Phi_g(g^{-1}xg) = x \Leftrightarrow ag^{-1}xga^{-1} = x \Leftrightarrow ag^{-1}x = xag^{-1}$$

.

D'un autre côté la preuve du théorème 3.2.1 de (Maclachlan et al., 2003) montre au passage que $A_0\Gamma_1 \otimes_{\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)} \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$. Donc $g^{-1}a$ commute avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{C})$. Or il est facile de montrer que le centre de $M_2(\mathbb{C})$ est uniquement composé des matrices scalaires. Ainsi $g^{-1}a = yI$ pour un certain $y \in \mathbb{C}$. Comme $g^{-1} \in SL(2, \mathbb{C})$ nous déduisons facilement la suite d'égalités suivantes :

$$y^2 = \det(g^{-1}a) = \det(g^{-1})\det(a) = \det(a)$$

Nous pouvons continuer en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton et obtenir que $\det(a)I = -a^2 + \text{tr}(a)a$. Or $-a^2 + \text{tr}(a)a \in A_0\Gamma_1$ par définition de a et de $A_0\Gamma_1$, donc $\det(a)I \in A_0\Gamma_1$. Écrivons $\det(a)I = \sum a_i\gamma_i$.

$$\text{tr}(\det(a)I) = \text{tr}\left(\sum a_i\gamma_i\right) = \sum a_i\text{tr}(\gamma_i)$$

Nous avons que $a_i, \text{tr}(\gamma_i) \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$ donc $\det(a) \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$ ie $y^2 \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$. Enfin $g^{-1}a = yI \Rightarrow g^2 = y^{-2}a^2$. Or $y^{-2} \in \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$ et $a^2 \in A_0\Gamma_1$ donc $g^2 \in A_0\Gamma_1$ comme voulu.

Nous venons de montrer que $\forall g \in \Gamma$ nous avons $g^2 \in A_0\Gamma_1$. Ainsi

$$\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\text{tr } g^2 : g \in \Gamma) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \gamma : \gamma \in A_0\Gamma_1) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$$

ii) Nous venons de conclure la première partie de la preuve. Supposons maintenant que Γ_1 d'indice fini dans Γ n'est pas normal. Notons C le *coeur normal* de Γ_1 (ie $C = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma\Gamma_1\gamma^{-1}$). C est le plus grand sous-groupe normal inclus dans Γ_1 . Comme Γ_1 est d'indice fini dans Γ alors C l'est aussi. En effet, nous avons un morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Hom}(\Gamma/\Gamma_1)$ défini par la multiplication à droite ayant comme noyau exactement C . Or $\text{Hom}(\Gamma/\Gamma_1)$ est un groupe fini car Γ_1 est d'indice fini dans Γ . Comme C est un sous-groupe normal, d'indice fini dans Γ nous pouvons lui appliquer la propriété de i). Ainsi $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } C)$. Or $\mathbb{Q}(\text{tr } C) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_1)$ car $C \subset \Gamma_1$.

iii) Concluons maintenant cette preuve. Supposons que Γ est commensurable avec Δ . Nous avons que $\Gamma^{(2)} \cap \Gamma = \Gamma^{(2)}$ et nous savons que $\Gamma^{(2)}$ est d'indice fini dans Γ par la proposition 3.84. Donc $\Gamma^{(2)} \sim \Gamma$ et de même $\Delta^{(2)} \sim \Delta$. De plus, la commensurabilité des sous-groupes est une relation d'équivalence car elle est équivalente à la commensurabilité des variétés hyperboliques. Ainsi $\Gamma^{(2)} \sim \Gamma \sim \Delta \sim \Delta^{(2)}$. Donc par définition $\Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}$ a un indice fini dans $\Gamma^{(2)}$ et dans $g\Delta^{(2)}g^{-1}$. Au final, nous obtenons que $\Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}$ est d'indice fini dans Γ et dans $g\Delta g^{-1}$. En effet, les relations d'indice nous assurent que :

$$|\Gamma : \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}| = |\Gamma : \Gamma^{(2)}| \times |\Gamma^{(2)} : \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}|$$

$$|g\Delta g^{-1} : \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}| = |g\Delta g^{-1} : g\Delta^{(2)}g^{-1}| \times |g\Delta^{(2)}g^{-1} : \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}|$$

Nous pouvons maintenant appliquer la propriété ii). Ainsi, nous obtenons que

$$\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1})$$

$$\mathbb{Q}(\text{tr } g\Delta^{(2)}g^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1})$$

Or $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \gamma : \gamma \in \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \gamma : \gamma \in \Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)})$. Donc les deux inclusions sont en fait des égalités et nous avons alors :

$$\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)} \cap g\Delta^{(2)}g^{-1}) = \mathbb{Q}(\text{tr } g\Delta^{(2)}g^{-1}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Delta^{(2)})$$

(La dernière égalité provient du fait que la trace est invariante par conjugaison).

□

Corollaire 3.88. *Soit Γ un groupe kleinien ayant un covolume fini. Le corps $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)})$ est un invariant de la classe de commensurabilité de la variété \mathbb{H}^3/Γ . C'est-à-dire, si \mathbb{H}^3/Δ est commensurable avec \mathbb{H}^3/Γ alors $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Delta^{(2)})$.*

Nous pouvons remarquer qu'il existe différentes méthodes (présentées plus tard dans (Maclachlan et al., 2003)) qui permettent de simplifier le calcul de cet invariant. Cela rend donc ce critère d'autant plus intéressant.

Corollaire 3.89. *Il existe une infinité de classes de commensurabilité pour les variétés hyperboliques fermées.*

Démonstration. Pour ce résultat nous suivons la preuve de (Reid, 1990).

L'article (Jorgensen, 1977) décrit la construction d'un groupe Γ_n , $\forall n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Ce groupe a la particularité d'admettre la présentation suivante :

$$\Gamma_n = \langle X_n, Y_n, T_n \mid (X_n Y_n X_n^{-1} Y_n^{-1})^n = X_n^{-1} T_n X_n T_n^{-1} Y_n = T_n Y_n X_n T_n^{-1} Y_n^{-1} = 1 \rangle$$

L'article (Jorgensen, 1977) démontre aussi que \mathbb{H}^3/Γ_n est une orbifold hyperbolique fermée. En particulier en considérant des sous-groupes sans torsion d'indice fini dans Γ_n nous pouvons obtenir une variété hyperbolique fermée.

Notre stratégie pour prouver ce corollaire est de montrer que le corps de traces

$\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_n^{(2)})$ contient le corps $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$. En effet, admettons cela. Nous pouvons alors utiliser un résultat classique de théorie des corps qui assure que le degré $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}\phi(n)$ où ϕ représente la fonction indicatrice d'Euler. Nous savons également que $\phi(n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Maintenant si nous considérons $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_n^{(2)})$, il s'agit d'une extension de degré fini par la proposition 3.78. Prenons alors $m \in \mathbb{N}$ tel que l'extension $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/m))$ a un degré supérieur. Il est évident que $\mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_n^{(2)}) \neq \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_m^{(2)})$ car les deux extensions n'ont pas le même degré. Nous pouvons ainsi construire une infinité de corps de traces différents et ainsi construire une infinité d'orbifolds fermées hyperboliques appartenant à des classes de commensurabilité différentes. Comme les sous-groupes sans torsion sont d'indice fini nous pouvons ramener ces résultats à des variétés en regardant les revêtements de degrés finis associés.

Il ne reste donc plus qu'à voir que $\mathbb{Q}(\text{tr } \cos(2\pi/n)) \subset \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma_n^{(2)})$. La présentation de Γ_n nous assure que Γ_n contient un commutateur non trivial d'ordre n (l'élément $X_n Y_n X_n^{-1} Y_n^{-1}$). Or la proposition 3.84 affirme que le quotient $\Gamma_n / \Gamma_n^{(2)}$ est abélien. Donc ce commutateur appartient à $\Gamma_n^{(2)}$. Donc $\exists a \in \Gamma_n^{(2)}$ tel que $a^n = I$. Une analyse classique du groupe de matrices nous assure alors que a est en fait une matrice de rotation. Donc $\text{tr}(a) = 2\cos(2\pi/n) \in \text{tr}(\Gamma_n^{(2)})$. \square

Nous concluons cette section en soulignant que ce corollaire ne concerne qu'une partie des variétés hyperboliques. En effet, la construction présentée ne donne en fait lieu qu'à des variétés qui possèdent une structure de fibré au dessus d'un cercle. Ces variétés suffisent donc déjà à produire une infinité de classes de commensurabilité. Cela renforce l'idée qu'une classification complète de la commensurabilité des variétés hyperboliques sera très difficile à établir.

CONCLUSION

Lors de ce Mémoire nous avons étudié la commensurabilité des variétés géométriques de dimension deux et trois avec la plus grande généralité possible. Les principaux résultats sur ce sujet que nous avons démontré sont les théorèmes 2.17, 2.22, 3.33, 3.62, et 3.87 qui établissent une classifications très précise de la commensurabilité, à l'exception du cas hyperbolique. Mais nous avons également pris le temps de développer l'étude des structures géométriques en construisant pas à pas la définition de géométrie, puis en apportant une première description des spécificités des variétés de chacune des géométries. Cette étude géométrique a permis de donner tout son sens à la définition de commensurabilité, car les deux reposent sur la théorie des revêtements qui occupe une place centrale dans la compréhension géométrique des variétés de basse dimension. J'espère donc que ce Mémoire a pu apporter une description approfondie et intuitive de ces concepts importants et de ce qui a motivé leur introduction.

Au delà de ce travail, cette approche géométrique et ce concept de commensurabilité sont encore des domaines actifs aujourd'hui dans le monde de la recherche. Pour conclure ce Mémoire j'aimerais présenter différents travaux sur le sujet. Je commencerais par citer les chercheurs Michel Boileau, Steven Boyer, Radu Cebanu et Genevieve S Walsh qui ont étudié dans leur article (Boileau *et al.*, 2012) la commensurabilité des noeuds. Deux noeuds sont dit commensurables si leurs compléments sont commensurables. Nous avons déjà dit que la plupart de ces compléments admettent une structure hyperboliques. Un des principaux résultats démontrés dans ce papier est le suivant (théorème 1.4) :

- Théorème 3.90.** (i) *Les noeuds sans symétrie cachée qui sont commensurables sont en fait cycliquement commensurable : ils possèdent un revêtement cyclique commun (c'est-à-dire un revêtement dont les transformations forment un groupe cyclique).*
- (ii) *Une classe de commensurabilité cyclique contient au plus trois compléments de noeuds hyperboliques.*

Ce théorème met en avant un lien qui peut sembler inattendu entre l'étude de la commensurabilité et la compréhension des noeuds.

Dans un cadre différent nous pouvons aussi citer les travaux de Jason A. Behrstock et Walter D. Neumann concernant la classification quasi-isométriques des groupes fondamentaux de variétés non-géométriques ayant des composantes hyperboliques. En effet, dans leur article (Behrstock et Neumann, 2012) ils mettent en évidence un lien, pour ces variétés, entre le fait de posséder des groupes fondamentaux quasi-isométriques et le fait d'être commensurables (voir le «Commensurability Theorem»).

RÉFÉRENCES

- Adams, C., Hildebrand, M. et Weeks, J. (1991). Hyperbolic invariants of knots and links. Transactions of the American Mathematical Society, 1–56.
- Behrstock, J. A. et Neumann, W. D. (2012). Quasi-isometric classification of non-geometric 3-manifold groups. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 2012(669), 101–120.
- Benedetti, R. et Petronio, C. (2012). Lectures on hyperbolic geometry. Springer Science & Business Media.
- Blanchet, C. (2009). Extension de corps. Accessed : 2021-06-04. Récupéré de https://webusers.imj-prg.fr/~christian.blanchet/enseignement/2009-10/ch6_extensions_corps.pdf
- Boileau, M., Boyer, S., Cebanu, R. et Walsh, G. S. (2012). Knot commensurability and the berge conjecture. Geometry & Topology, 16(2), 625–664.
- Brin, M. G. (2007). Seifert fibered spaces : Notes for a course given in the spring of 1993. arXiv preprint arXiv :0711.1346.
- Cohen, H. (1993). A course in computational algebraic number theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer.
- Fox, R. H. (1952). On fenchel’s conjecture about f-groups. Matematisk Tidsskrift. B, 61–65.
- Hatcher, A. (2002). Algebraic topology. Cambridge University Press.
- Hatcher, A. (2007). Notes on Basic 3-Manifold Topology.
- Hitchin, N. (2014). Differentiable manifolds. Accessed :2021-15-03. Récupéré de <http://people.maths.ox.ac.uk/~joyce/Nairobi2019/Hitchin-DifferentiableManifolds.pdf>
- Ivanov, N. V. (2002). Mapping class groups. Handbook of geometric topology, 523–633.

- Jaco, W. H. (1980). Lectures on three-manifold topology. Numéro 43. American Mathematical Soc.
- Jorgensen, T. (1977). Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle. Annals of Mathematics, 106(1), 61–72.
- Kervaire, M. A. et Milnor, J. W. (1963). Groups of homotopy spheres : I. Annals of Mathematics, 504–537.
- Maclachlan, C., Reid, A. W. et MacLachlan, C. (2003). The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds, volume 219. Springer.
- Marian, M. (2019). From seifert fibrations to geometry.
- Massey, W. S. (1974). Finite covering spaces of 2-manifolds with boundary. Duke Mathematical Journal, 41(4), 875–887.
- Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds : V. the triangulation theorem and hauptvermutung. Annals of mathematics, 96–114.
- Neumann, W. D. et Raymond, F. (1978). Seifert manifolds, plumbing, μ -invariant and orientation reversing maps. In Algebraic and geometric topology 163–196. Springer.
- Pol, D. (2012). Classification des surfaces topologiques compactes. Accessed : 2021-06-04. Récupéré de <https://www.math.univ-angers.fr/~pol/memoirem1.pdf>
- Ratcliffe, J. G., Axler, S. et Ribet, K. (1994). Foundations of hyperbolic manifolds, volume 149. Springer.
- Reid, A. W. (1990). A note on trace-fields of kleinian groups. Bulletin of the London Mathematical Society, 22(4), 349–352.
- Saint-Gervais, H. P. (2015). Revêtement universel. Accessed : 2021-12-03. Récupéré de <https://www.youtube.com/channel/UCeUsNAJHZ6uKRoa3q8ApXfw/videos>
- Saint-Gervais, H. P. (2016). Dehn twist. Accessed : 2021-27-05. Récupéré de <https://www.youtube.com/watch?v=07qsB5boS7s>
- Scott, P. (1983). The geometries of 3-manifolds. Bulletin of the London Mathematical Society, 15(5), 401–487.
- Singer, I. M. (1960). Infinitesimally homogeneous spaces. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(4), 685–697.

Traina, C. (1985). The conjugacy problem of the modular group and the class number of real quadratic number fields. Journal of Number Theory, 21(2), 176–184.

Tu, L. W. (2017). Differential geometry : connections, curvature, and characteristic classes, volume 275. Springer.

Wikipedia (2021a). Fibré de seifert. Accessed : 2021-17-05. Récupéré de https://fr.wikipedia.org/wiki/Fibré_de_Seifert

Wikipedia (2021b). Triangle group. Accessed : 2021-26-04. Récupéré de https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_group