UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPRENTISSAGE DES FRACTIONS EN CONTEXTE DE FRANCISATION : UNE EXPLORATION DE LA DYNAMIQUE DES MODES D'AGIR-PARLER-PENSER

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
CATHERINE BILODEAU

AVRIL 2022

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord la professeure Fabienne Venant, qui a su m'encourager et m'accompagner avec beaucoup de patience et une grande humanité.

Je remercie tous les professeurs et les chargés de cours de l'Université Laval et de l'UQAM qui ont croisé mon chemin et ont fait de moi une meilleure enseignante, mathématicienne et didacticienne, notamment Frédéric Gourdeau, Bernard Hodgson, Caroline Lajoie, et Doris Jeannotte.

Je remercie mes collègues étudiants de tous les cycles, à Québec comme à Montréal : Amélie, Kim, Rosalie, Jonathan, Sarah, Marie-Line, Mathieu, Benoît, Fanny, Stéphanie, Charlotte, Rox-Anne et tous ceux que j'oublie sans doute. Merci pour les discussions stimulantes, les séances de travail motivantes, et les festivités divertissantes.

Je remercie ma famille directe et moins directe pour les encouragements inconditionnels.

Je remercie mes différentes colocataires Mathoora et Sébastien (et un peu Félix) pour avoir supporté mes humeurs changeantes.

Je remercie mes amis et mes élèves d'Inukjuak, qui étaient, apparemment, la motivation qu'il me fallait pour enfin croiser la ligne d'arrivée.

Enfin, je remercie Stéphane. Merci pour le support constant, les blagues, les tartes, et tout le reste.

DÉDICACE

À la mémoire de Patrice

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la compréhension des fractions chez des élèves en classe de francisation au secondaire dans une école du Québec. Une séance de cours a été analysée. Au cours de cette séance, huit élèves d'origine ethnique variée ont complété une séquence de tâches de pliage de bandes de papier, puis ont répondu à des questions de comparaison de fractions et de recherche de fractions équivalentes. L'outil utilisé pour analyser les interactions dans la classe est l'outil des modes d'agir-parler-penser, développé comme outil d'analyse par Bulf, Mathé et Mithalal (2014). Nous cherchons donc à répondre à la question : *quelles sont les dynamiques intra-personnelles et interpersonnelles des modes d'agir-parler-penser qui se manifestent lors de l'apprentissage de contenus mathématiques liés aux fractions dans un contexte de francisation chez des élèves du secondaire, au Québec?* Notre analyse nous permettra de relever d'intéressantes observations quant aux thèmes suivants : la validation des pliages, la dynamique entre les modes d'APP de l'enseignante et ceux des élèves, les enjeux de coordination des modes d'APP, les enjeux de langages liés au contexte de langue seconde, l'appréhension du concept de fraction par les élèves et les rôles multiples joués par le langage verbal. Notamment, nous concluons que les tâches de pliage de bandes de papier constituent un terreau fertile pour que l'élève mette de l'avant des modes d'agir-parler-penser qui pourront être transférés dans le travail avec les fractions en langage symbolique. Toutefois, nous relevons aussi un important risque de glissement : sans un retour explicite sur les fractions, le contexte de pliage peut prendre beaucoup de place et évacuer l'objet de la fraction des raisonnements des élèves. Le rôle que prend l'enseignante dans la séance observée est, notamment, de ramener à la surface le travail sur les fractions.

Mots clés : fractions, pliage, modes d'agir-parler-penser

INTRODUCTION

En 2011, 14,2% des élèves dans le réseau scolaire québécois étaient des élèves allophones, c'est-à-dire des élèves dont la langue maternelle n'est ni le français ni l'anglais. Ce pourcentage est à la hausse, car il était de 8,6% dix ans plus tôt. (Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS), 2013) Puisque les langues de scolarisation dans le système québécois sont le français et l'anglais, ces élèves sont nécessairement scolarisés dans une langue qui n'est pas leur langue première. Il peut arriver que ces élèves aient un niveau de français ou d'anglais leur permettant de cheminer dans le système régulier, mais lorsque ce n'est pas le cas, ils évoluent dans les classes dites « de francisation ». On les appelle parfois « classes d'accueil », ou encore, dans les documents ministériels, les classes d'intégration linguistique, scolaire et sociale (ILSS). Ces classes regroupent donc des groupes d'apprenants d'origines ethniques, de langues maternelles et d'historiques personnelles variées. Le point commun de ces apprenants est qu'ils sont issus de l'immigration et qu'ils sont en apprentissage de la langue de scolarisation (le français). Notre intérêt se dirige vers l'apprentissage des mathématiques dans ce contexte.

Le chapitre 1 présentera notre problématique. En plus de notre motivation personnelle, nous présenterons des données sur l'immigration dans notre province, et la clarification des définitions de termes clés pour la suite du mémoire. Nous présenterons ensuite une vue globale de quelques postures théoriques pertinentes en lien avec le langage et l'apprentissage des mathématiques en contexte de langue première, puis des résultats de recherche en lien cette fois avec les mathématiques à l'école en contexte de langue seconde ou étrangère. La suite du chapitre porte sur la place particulière des fractions dans le cursus scolaire québécois et leur relation avec le langage. Nous terminerons le chapitre en énonçant notre objectif de recherche. Le chapitre 2 porte sur notre cadre théorique. D'abord, nous exposerons les assises de notre outil d'analyse : les modes d'agir-parler-penser (Barrera-Cunin, Bulf et Venant, 2016 ; Bulf, Mathé et Mithalal, 2014). Puis, nous présenterons des éléments théoriques à propos de l'objet mathématique en jeu dans notre recherche : les fractions. Le chapitre 3 consiste à exposer notre méthodologie. Plus précisément, nous détaillerons le contexte de réalisation de notre collecte de données et fournirons une description et une justification derrière le choix de la séquence de tâche proposée aux sujets de l'étude. Le chapitre 4 est l'occasion pour nous de mettre en œuvre notre cadre théorique et contient notre analyse préalable : une description des modes d'agir-parler-penser que nous avons anticipés pour la séquence de tâches prévue. C'est dans le chapitre 5 que nous présentons une analyse descriptive de la séance observée à la lumière de ces modes d'agir-parler-penser anticipés. Toujours dans le chapitre 5, nous ajoutons les descriptions des modes d'agir-parler-penser que nous n'avions pas anticipés, mais qui ont émergé pendant la séance. Le chapitre 6 présente une discussion en relevant des thèmes présents dans l'analyse descriptive et en offrant un regard plus synthétique. Le chapitre 7 constitue la conclusion de notre mémoire : nous revenons sur nos questions de recherche et énonçons les limites de notre étude, de même que des pistes de recherche futures.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Nous présenterons dans ce chapitre l'origine du questionnement qui a motivé la recherche, puis nous préciserons les définitions de certaines termes et concepts pertinents en lien avec l'immigration et les langues. Ensuite, nous présenterons une revue de littérature qui s'attardera d'abord aux études et aux théories traitant du lien entre le langage et les mathématiques dans le contexte de la langue première, puis aux recherches s'intéressant à l'évaluation des mathématiques en contexte de langue seconde ou étrangère, et enfin à des études abordant à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques lorsque la langue de scolarisation n'est pas la langue maternelle des apprenants. Nous allons aussi justifier pourquoi les fractions sont un contenu mathématique intéressant pour notre recherche en résumant leur place dans les recherches déjà existantes sur le thème des mathématiques et du langage, ainsi que dans le curriculum scolaire québécois. Finalement, nous présenterons notre objectif de recherche.

1.1 Origine du questionnement

1.1.1 Motivation personnelle

Ma formation universitaire consiste en un baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire et un baccalauréat en mathématiques, tous les deux complétés. Toutefois, avant d'entreprendre le baccalauréat en enseignement des mathématiques, j'ai commencé un baccalauréat en enseignement du français comme langue seconde, que j'ai interrompu après un an. Mes intérêts rejoignent donc à la fois l'enseignement, les contenus mathématiques et le contexte de l'apprentissage d'une langue étrangère.

En discutant avec des collègues enseignants de Québec et de Montréal, j'ai réalisé que l'enseignement des mathématiques pour les élèves allophones représente un réel défi sur différents plans, notamment sur les plans didactique, mathématique, linguistique, pédagogique et organisationnel. Comment enseigner l'addition si l'élève ne peut pas nommer les nombres? Comment choisir quels sujets aborder en classe, quand mon groupe contient des élèves réfugiés sous-scolarisés et des élèves qui ont des connaissances mathématiques avancées, mais très peu de connaissances de la langue française? Doit-on enseigner d'abord le vocabulaire pour pouvoir expliquer, ou profiter des symboles mathématiques pour en faire un « langage universel »? Comment donner du sens aux concepts et éviter l'apprentissage axé sur le procédural si la communication est difficile? Est-ce que les obstacles langagiers sont seulement présents dans les résolutions de problèmes? Comment évaluer si l'élève ne peut pas lire les questions? Voilà seulement quelques-unes des questions soulevées par mes collègues ou entendues à différents endroits pendant mes années dans le milieu de l'éducation. Ainsi, dans le cadre de ma maîtrise en didactique des mathématiques, je m'intéresserai au regard didactique qu'on peut poser sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans le contexte particulier de la francisation.

1.1.2 L'immigration et les élèves allophones au Québec

Il importe d'abord de dresser un portrait de la situation des élèves allophones dans les établissements scolaires. Pour ce faire, nous clarifierons les définitions utilisées dans ce document pour certains termes. Les définitions que nous avons choisies sont adaptées de différentes sources (Statistiques Canada, 2011a ; Statistiques Canada, 2011b ; Statistiques Canada, 2017).

- *Élève immigrant de première génération* : élève évoluant dans le réseau scolaire local né à l'extérieur du Canada.
- *Élève immigrant de deuxième génération* : élève évoluant dans le réseau scolaire local né au Canada et dont au moins un des parents est né dans un autre pays.
- *Élève issu de l'immigration* : élève immigrant de première ou de deuxième génération.[1]
- *Langue première* (ou *langue maternelle, langue d'origine, langue de départ*) : première langue apprise et encore comprise.
- *Langue parlée à la maison* (ou *langue d'usage*) : langue qu'une personne utilise le plus souvent à la maison.
- *Allophone* : personne dont la langue maternelle n'est pas une des langues officielles du pays. Au Canada, il s'agit d'une personne dont la langue maternelle n'est ni l'anglais, ni le français.[2]

---

[1] Nous ne distinguons pas les différents statuts d'immigrant (citoyen canadien, résident permanent, résident non permanent).
[2] Avec cette définition, les personnes dont la langue maternelle est une langue autochtone sont considérées comme allophones. Ce n'est pas idéal comme catégorisation, étant donné que pour le

Selon un rapport rédigé par le MELS (2013), en 2001, 15,3% des élèves du réseau scolaire québécois[3] étaient des élèves issus de l'immigration. En 2011, la proportion d'élèves québécois issus de l'immigration était passée à 23,7%. Parmi ces élèves, 9,2% étaient des immigrants de première génération. Toujours selon les données du MELS (2013), pendant la décennie de 2001 à 2011, le pourcentage d'élèves allophones dans le réseau québécois est passé de 8,6% à 14,2%. Des données plus récentes (Comité de gestion de la taxe scolaire de l'île de Montréal (CGTSIM), 2020) nous indiquent que dans le réseau public de l'Île de Montréal, en 2019, 67,3% des élèves sont issus de l'immigration. De plus, toujours en 2019, 43,1% des élèves du système scolaire public montréalais sont allophones et 25,6% des élèves parlent à la maison une langue différente du français ou de l'anglais. Ces données mettent en évidence que les populations immigrantes et allophones sont très présentes dans les écoles québécoises.

Remarquons aussi que cette population immigrante allophone n'est pas du tout homogène. Elle est constituée de personnes de différents pays d'origine, de différentes langues maternelles et parlées à la maison, de différents statuts socioéconomiques et de différents niveaux de scolarisation (pour les parents comme pour les enfants).

Dans un article de 2013, Ledent *et al.* s'intéressent aux différences dans les parcours académiques et le succès scolaire chez les immigrants, et présentent des théories cherchant à identifier les facteurs pouvant expliquer ces différences. Parmi ces facteurs, on retrouve notamment la connaissance de la langue de scolarisation, mais aussi les caractéristiques socio-économiques, la culture et les valeurs reliées à l'école dans le pays d'origine, ainsi que la nature de la relation avec la communauté hôte. En effet,

---

Commissaire aux langues officielles (1993), les langues autochtones sont considérées comme les premières langues nationales du Canada. Toutefois, comme la présente recherche ne concerne pas la situation particulière des populations autochtones, nous ne ferons pas de distinction supplémentaire.

[3] Par « réseau scolaire québécois », nous entendons les établissements d'enseignement préscolaire, primaire et secondaire situés au Québec.

Ledent *et al.* (2013) cite Ogbu en affirmant que le caractère conflictuel ou positif de cette relation peut constituer un facteur déterminant de la réussite scolaire des élèves issus de l'immigration. De façon simplifiée, on peut concevoir que certains groupes de migrants conçoivent l'éducation dans le pays hôte comme un vecteur de mobilité sociale et économique, alors que d'autres – particulièrement si la relocalisation dans le pays hôte découle d'une situation hors de leur contrôle - ont une vision moins positive des institutions de la société hôte, en général, et ne perçoivent pas l'école comme un vecteur de mobilité potentiel.

1.1.3 Langue seconde, langue étrangère et langue de scolarisation

On utilise l'expression « langue étrangère » pour désigner une langue qui n'est pas une langue première pour l'individu. Pour plusieurs chercheurs (entre autres Cuq, 1995 et Vigner, 2009), le concept de « langue étrangère » est différent de celui de « langue seconde ». Cette dernière serait une sous-catégorie de la langue étrangère, et se distinguerait par son statut particulier (langue officielle du pays, par exemple). Chartrand et Paret (2014) rapportent que pour Besse, on parle de langue seconde lorsque la langue est aussi utilisée dans l'environnement extrascolaire. Jean-Pierre Cuq (1995) ajoute une distinction en définissant le concept de « français pour migrants », distinction qui n'est pas nécessaire selon d'autres auteurs, et qui n'est pas reprise dans les écrits anglophones et même francophones au Canada.

En fait, en ce qui concerne le cas du français au Canada, l'expression « français, langue étrangère » est très peu utilisée. L'adjectif « étrangère » porte des connotations qui ne semblent pas convenir considérant que le français est une des deux langues officielles et la langue d'un des deux peuples fondateurs du pays. Ainsi, on réfère autant au français appris par les anglophones canadiens qu'au français appris par les arrivants allophones en utilisant la locution « français, langue seconde ». (Cordier-Gauthier, 1995) Nous suivrons cette tendance dans le présent document.

Le contexte qui nous intéresse est celui des élèves allophones, où la langue en cours d'apprentissage est aussi la langue de scolarisation. Pour reprendre la définition de Verdelhan-Bourgade (2002), qualifier une langue de « langue de scolarisation » consiste à lui attribuer une fonction sociale qui « se décline en plusieurs rôles : appropriation de connaissances et formation intellectuelle, apprentissages pluridisciplinaires, acquisition de comportements intellectuels et relationnels, visée d'intégration sociale. » (p.79) Pour les élèves allophones immigrants, la langue de scolarisation n'est ni la langue maternelle de l'élève, ni une autre langue qu'il maîtrise déjà. Elle est apprise de façon préalable ou simultanée aux concepts mathématiques. Au Québec, dans les écoles secondaires, les élèves des classes d'accueil ont des cours de français et des cours de mathématiques. Les apprentissages dans ces deux domaines sont donc réalisés en simultanée.

C'est justement cet apprentissage simultané des contenus disciplinaires mathématiques et de la langue de scolarisation qui nous intéresse dans le cadre de ce mémoire.

1.2 Langage et apprentissage des mathématiques en langue première

Avant même de s'intéresser aux caractéristiques et aux défis propres à l'apprentissage des mathématiques dans une langue seconde, il convient de s'attarder à l'importance du langage dans l'apprentissage des mathématiques de façon plus générale. Ce lien entre langage et mathématiques a fait l'objet de plusieurs études en contexte de langue première.

Une perspective fréquemment rencontrée est celle des auteurs dits socioculturels (entre autres, Vygotsky, 1978, cité dans Barwell, 2015 ; Sfard, 2001). Bien qu'il existe des nuances entre les différents auteurs de ce courant, de façon générale, on y distingue le langage mathématique informel, celui de tous les jours qui serait utilisé par les élèves, du langage mathématique formel, plus scientifique, constitué d'expressions mathématiques dites standards, créées et utilisées par la communauté d'experts mathématiques. Le contact avec la collectivité mathématique, notamment via l'enseignant et les tâches qui lui sont soumises, permettra dans cette perspective à l'élève de transformer ses conceptualisations spontanées, associées au langage informel, et de les remplacer par des concepts mathématiques standards, associés au langage formel.

À ce propos, Barwell (2005, 2015, 2016) va un peu plus loin en affirmant que le langage mathématique n'est pas seulement constitué du vocabulaire formel, et que l'utilisation de langage informel fait aussi partie de l'activité et de l'apprentissage en mathématiques. Pour Barwell (2016), la relation entre l'informel et le formel n'est pas une relation à sens unique, et il ne serait pas juste d'affirmer que l'objectif ultime de la formation en mathématiques est une transition du premier vers le deuxième. Il s'agirait davantage d'un travail simultané fait par les élèves – et l'enseignant - qui porte à la fois sur le langage formel et sur le langage informel. Qui plus est, la définition même de « formalité » ne peut se faire sans la notion « d'informalité » ; ces deux concepts n'existent que mutuellement. Barwell (2016) parle d'une relation dialogique entre le langage informel et le langage formel : l'un n'existe pas sans l'autre et l'apprentissage des mathématiques consiste à pouvoir établir des liens entre eux, à développer des répertoires langagiers.

Barwell (2018) mentionne quatre principes fondamentaux à l'approche qui considère la langue comme une source de construction de sens, tirés de Bakhtine (1981, cité dans Barwell, 2018). Premièrement, la construction de sens est relationnelle : elle se déroule au cœur des interactions et évolue en fonction des énoncés formulés par chacun des acteurs de l'interaction. Deuxièmement, le langage lui-même a une influence : il ne s'agit pas d'un médium neutre au service de l'utilisateur, mais plutôt d'un porteur des intentions de l'autre autant que de celles de l'utilisateur. Troisièmement, le langage est varié : aucune langue n'est uniforme. On parle alors d'hétéroglossie. Il cite Busch

(2014) qui catégorise cette variation en trois dimensions : la diversité des voix, la diversité des discours, et la diversité des langues. Ces trois dimensions sont présentes au cours de toute interaction. Quatrièmement, la langue est hiérarchisée (et hiérarchisante). Malgré la diversité bien présente, il existe néanmoins des formes de langage qui sont valorisées socialement. Un certain niveau d'uniformité est recherché, et les personnes dont les répertoires sont plus cohérents avec les pratiques langagières encouragées par les normes risquent d'être moins marginalisées.

Ces principes s'actualisent dans la classe de mathématiques, comme ailleurs. On y assiste ainsi à une tension continue entre la recherche d'uniformité - via le langage formel - et l'hétéroglossie. De plus, par rapport aux expressions mathématiques utilisées en elles-mêmes, Barwell (2016) précise qu'elles ne peuvent exister indépendamment du contexte social, historique et immédiat de leur utilisation. Chaque énoncé utilisé porte en lui-même les utilisations passées, autant récentes que lointaines, et les perspectives et les intentions variées qui s'y rattachent.

> « Quand les élèves utilisent des expressions mathématiques, leurs énonciations reflètent les significations développées par le passé, telles que les différentes expressions utilisées par leurs enseignants, leurs pairs, leurs manuels scolaires et potentiellement leurs parents, etc. » (Barwell, 2016, p.40)

Pour Jaubert, Rebière et Bernié (2012), non seulement le langage est un produit des pratiques sociales, mais il a aussi lui-même une influence sur ces pratiques. Cela signifie que, dans la même lignée que pour Barwell et Bakthine, le discours ne peut pas être considéré séparément du contexte de l'énonciation actuelle et des énonciations passées. Mais, en plus, lorsqu'on reprend, reformule, répète ou cite un énoncé, on change le contexte et on en change le sens. Les énoncés de savoirs « savants » ou « standardisés » sont donc ceux qui sont porteurs d'un bagage considérable, historique et culturel, qui leur attribue une certaine stabilité de sens. Ce qui est visé en salle de classe, c'est l'appropriation de ces énoncés par les élèves, ou plutôt la transformation de formes langagières déjà présentes en formes langagières plus standardisées. Les formes langagières initiales de l'élève témoignent de concepts dits « quotidiens » ou « spontanés » : des savoirs qui sont développés à travers l'expérience de l'individu, qui sont construits et mobilisés dans des contextes familiers et qui sont fortement reliés aux pratiques langagières familières associées à ces contextes. Ainsi, pour progresser dans son apprentissage, l'élève doit passer par un processus de décontextualisation du contexte familier et de recontextualisation dans le contexte plus formel de la classe. Au cours de ce processus, l'activité langagière joue un rôle non négligeable : c'est au fil des reformulations, des mises en relation et des productions de discours formels que les concepts quotidiens deviendront des concepts savants. Pour Jaubert, Rebière et Bernié (2012), le langage est à la fois « le lieu et l'outil privilégié des apprentissages ».

Toutefois, même si on pourrait vouloir rapprocher la dualité entre les concepts quotidiens et les concepts standardisés avec celle entre l'informel et le formel, l'approche de Jaubert, Rebière et Bernié (2012) comporte davantage de nuances. En effet, bien qu'il existe des standards dans la communauté mathématique, il existe aussi, selon ces auteurs, des références et des conventions au niveau plus local : celui de la classe de mathématiques. Ils perçoivent la classe comme une communauté discursive : un ensemble d'individus qui partagent des pratiques discursives et sociales. Chaque individu contribue à la communauté à la fois par ses façons d'agir, de parler et de penser. Dans la salle de classe, on développe des pratiques (sociales et discursives) reliées à la discipline de même qu'au contexte de l'école. On parlera alors de *communauté discursive disciplinaire scolaire*. Chacune de ces communautés comporte un contrat, souvent implicite, de façons de faire et de communiquer et un ensemble de valeurs, de savoirs et d'outils qui y sont privilégiés. L'élève, lorsqu'il apprend une discipline, apprend en quelque sorte à être un membre de cette communauté discursive disciplinaire scolaire. De plus, chaque élève, chaque membre de la communauté, contribue nécessairement à la négociation et l'adoption des pratiques. La rencontre entre les différents concepts quotidiens et les façons de parler qui les constituent – les différentes voix – entraîne une négociation incarnée dans une activité langagière. Chaque apprenant est acteur dans cette négociation et se construit ainsi comme membre de la communauté discursive disciplinaire scolaire.

La place et le rôle du langage dans l'apprentissage des mathématiques demeurent donc un sujet actuel. Pour plusieurs chercheurs, le langage et l'activité mathématique sont indissociables, notamment parce qu'il existe dans les mathématiques un langage qui leur est propre – le langage dit « formel » ou « standard » - et dont l'appropriation ou la construction fait partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques. Alors que l'approche socioculturelle semble concevoir l'apprentissage comme un passage de l'informel vers le standard, Barwell (2016, 2018) insiste sur la tension constante entre la recherche d'uniformité et l'hétéroglossie, et Jaubert, Rebière et Bernié (2012) mettent de l'avant une vision plus locale des pratiques discursives et sociales. Cette dernière vision n'entre pas en contradiction avec celle de Barwell, mais met l'accent sur la communauté qu'est la classe de mathématiques et attire notre attention sur différents niveaux d'hétéroglossie. Ainsi, les théorisations de Barwell et de Jaubert, Rebière et Bernié nous semblent complémentaires.

1.3 Apprentissage des mathématiques en langue seconde

Rappelons que le contexte qui nous intéresse est le cas particulier de cette relation entre les mathématiques et le langage lorsque la langue de scolarisation est une langue non maternelle. Orosco *et al.* (2013) résument certains des défis spécifiquement liés à l'apprentissage des mathématiques en langue seconde. Entre autres, les auteurs soulignent qu'il n'est pas évident pour l'élève de comprendre les conventions de la langue comme les phrases conditionnelles ou interrogatives, de comprendre le vocabulaire, et de repérer les informations numériques inutiles. L'auteur ajoute aussi qu'il peut être difficile pour l'élève de saisir le langage mathématique dans les phrases, notamment en ce qui concerne les comparaisons et les modificateurs.

1.3.1 En ce qui a trait à l'évaluation

Plusieurs auteurs ont ainsi cherché à démontrer qu'il y a une différence dans les performances en mathématiques selon que les étudiants sont locuteurs natifs ou non de la langue de scolarisation. Parmi ceux-ci, on retrouve Maria Martiniello, qui présente dans un article de 2008 une étude qui cherche à explorer le lien entre la compréhension en lecture et la résolution de problèmes pour des hispanophones scolarisés en anglais aux États-Unis. L'auteure illustre dans cet article certaines caractéristiques linguistiques difficiles pour les élèves dont la langue de scolarisation n'est pas la langue première. D'abord, en ce qui a trait à la syntaxe, les phrases avec plusieurs subordonnées et avec de longs groupes du nom contenant des groupes prépositionnels sont plus difficiles à interpréter. Ensuite, en ce qui concerne le vocabulaire, les mots de la vie quotidienne usuellement appris à la maison, les mots d'un niveau de langage plus sophistiqué, et les mots polysémiques représentent un défi pour la compréhension de la question. À travers cet article, Martiniello suggère que la complexité linguistique de certaines questions influence la validité de l'évaluation des compétences mathématiques par les tests standardisés utilisés auprès des locuteurs non natifs de la langue utilisée dans ces tests.

Il semble donc qu'il faille porter une attention particulière, lorsqu'on évalue des élèves pour qui la langue d'enseignement et d'évaluation n'est pas la langue première, à distinguer au maximum l'évaluation des compétences langagières de l'évaluation des compétences mathématiques. La simplification linguistique pourrait être une façon de faire cette distinction. Cela consiste à modifier un énoncé pour en diminuer la complexité linguistique, sans toutefois modifier les contenus mathématiques sollicités. Dans un article de 2001, Abedi et Lord présentent les résultats d'une étude quantitative conduite dans le but de déterminer dans quelle mesure la simplification linguistique influence les performances d'élèves de 8e année. Ils concluent, à l'image de Martiniello, que la complexité linguistique des énoncés dans les tests n'est pas négligeable, en particulier avec la clientèle qui n'a pas la langue d'évaluation comme langue première, et que la simplification linguistique pourrait être une solution partielle pour diminuer l'effet de cet obstacle sur l'évaluation des compétences en mathématiques.

Quant à lui, Clarkson (1991) s'intéresse à la situation multilingue de la Papouasie-Nouvelle-Guinée (PNG), où plus de 720 langues locales sont utilisées dans les villages, mais où la langue officielle dans les écoles est l'anglais. L'auteur a mené une étude dans laquelle il présentait des problèmes écrits à des élèves. Le chercheur classait les erreurs en 5 catégories : lecture (lire la question à voix haute), compréhension (comprendre ce que la question demande de faire ou de trouver), transformation (savoir quels seront les calculs à faire pour répondre à la question), habiletés de procédure (effectuer les calculs), encodage (écrire la réponse). Considérées ensemble, les erreurs de lecture et de compréhension représentent le tiers des fautes commises. L'auteur mentionne quand même que la lecture et la compréhension sont deux habiletés distinctes qu'il faut travailler à développer. Dans une autre étude présentée dans le même article, Clarkson (1991) constate que les enseignants sont surpris de voir émerger ces difficultés de type langagier. De plus, l'auteur suggère d'utiliser les cinq catégories d'erreur mentionnées ci-haut comme des étapes d'intervention lors de l'enseignement de la résolution de problèmes écrits avec les élèves, afin de mieux cibler les difficultés à travailler chez les élèves.

À la lumière de ces articles, on peut affirmer qu'il y a bel et bien des différences dans les performances en mathématiques des locuteurs natifs et non natifs de la langue de scolarisation (et d'évaluation). Des questions se posent : les difficultés des locuteurs non natifs sont-elles dues seulement à la formulation des questions? Ces difficultés peuvent-elles être dues à la difficulté des mathématiques? Roxanne Tardif-Couture (2016) tente de répondre à cette question. Elle a mené une étude auprès de 16 élèves allophones du primaire au Québec. Elle conclut que la compréhension des structures mathématiques est une source de difficulté majeure pour les élèves allophones du primaire, et même qu'elle semble jouer un rôle plus important que la compréhension du français. Mais alors, comment pouvons-nous expliquer les différences dans les performances relevées par les autres auteurs? Une explication envisageable est que la nature de l'activité mathématique vécue en classe de francisation diffère de celle en classe régulière en raison du contexte particulier. Martiniello (2008) relevait d'ailleurs cette éventualité en remarquant que les questions de probabilités et statistiques étaient fortement représentées dans les questions posant problème aux sujets de son étude quantitative. Elle mentionne qu'il est probable que ce champ mathématique soit enseigné différemment ou moins souvent dans les classes de locuteurs non natifs, ou encore que les périodes d'enseignement traitant de probabilités et de statistiques représentent elles-mêmes des défis linguistiques.

On pourrait prolonger cette hypothèse en affirmant qu'il est possible que la nature de l'activité mathématique vécue par l'élève allophone, même intégré en classe régulière, soit différente de celle des locuteurs natifs. Bouchard et Cortier (2006) soulignent d'ailleurs que le passage de la classe d'accueil à la classe régulière est souvent difficile pour les élèves en raison d'un changement de culture auquel l'enseignant de la classe régulière n'est pas toujours sensible.

Ainsi, il semble que les différences dans les performances aux évaluations entre les locuteurs natifs et non natifs de la langue de scolarisation et d'évaluation puissent tirer leur origine non seulement dans les formulations des questions elles-mêmes, mais aussi dans les disparités dans les expériences mathématiques auxquelles ont été exposés les élèves en question, notamment en raison des enjeux langagiers.

1.3.2 En ce qui a trait à l'enseignement et à l'apprentissage

Dans sa thèse doctorale, Millon-Fauré (2011) s'intéresse à la situation des élèves migrants en France. En observant des séances d'enseignement et d'évaluation dans une classe régulière et dans une classe d'accueil, la chercheuse cherche à mettre en évidence des particularités dans l'activité de la classe qui sont directement liées aux difficultés langagières des élèves migrants. Entre autres, elle conclut que les difficultés langagières des élèves migrants affectent leur activité mathématique. Mais ces difficultés langagières affectent aussi les actions des enseignants, et cela se fait parfois au détriment de l'activité mathématique.

Tel que formulé dans l'idée de la communauté discursive disciplinaire scolaire de Jaubert, Rebière et Bernié (2012), la classe constitue une communauté et les élèves et les enseignants dans une classe développent des pratiques communes. Selon Million-Fauré, cela s'effectue en s'appuyant sur des référents langagiers et culturels communs. Or, en contexte de francisation, le terrain commun de l'usage de la langue est petit et peu fertile à des constructions de sens. En plus des références culturelles qui risquent d'être étrangères aux élèves immigrants, Bouchard et Cortier (2005, 2006) relèvent des caractéristiques des échanges pédagogiques qui peuvent représenter des enjeux en langue seconde. Entre autres, les interactions en salle de classe sont souvent polylogales, c'est-à-dire qu'elles impliquent plus de deux locuteurs. Les rôles, droits et devoirs de ces différents locuteurs sont inégaux et complémentaires. Les interactions sont ancrées dans des rituels ou des routines qui peuvent facilement varier d'une culture à l'autre. De plus, elles sont souvent longues et nécessitent une vision globale pour en suivre l'organisation. Aussi, les interactions pédagogiques sont souvent oralographiques, faisant intervenir à la fois le langage oral, le langage écrit, et le non verbal. La forme orale représente elle-même ses défis, par rapport à la forme écrite : elle est moins stable, elle fait souvent intervenir des interruptions, des reformulations et des réorganisations des propos, et elle peut comporter des ellipses, des métaphores, ou d'autres figures de style qui rendent son interprétation plus difficile pour les élèves qui n'ont pas tous les référents.

Louise Poirier s'est intéressée au rôle joué par les interactions entre les pairs dans le contexte de la classe d'accueil (1997). Après avoir observé des classes d'accueil pendant un an, elle a dégagé deux types d'enseignement des mathématiques en vigueur. Certains enseignants choisissent d'introduire le vocabulaire mathématique préalablement, puis de poursuivre avec les contenus et les concepts en lien avec ce vocabulaire. D'autres optent plutôt pour une séparation de la classe en petits groupes d'élèves, classés selon leur niveau de compétence en mathématiques. Ces petits groupes complètent des exercices adaptés à leurs niveaux respectifs. Dans son article, Poirier propose une troisième approche, qui mise sur les interactions entre les pairs dans le but de développer à la fois les habiletés mathématiques et langagières des élèves. Elle présente une tâche sur les fractions au cours de laquelle les élèves sont amenés à reformuler la consigne, à expliquer leurs démarches et à débattre des hypothèses et des solutions. De plus, au cours de l'intervention, les objets mathématiques sont nommés par l'enseignant après avoir été manipulés par les élèves. Le vocabulaire est ainsi introduit *au cours* de l'activité. Selon Poirier, les interactions sociales qui ont lieu pendant l'activité permettent une « coconstruction des concepts mathématiques » (p.82).

Cette double approche intégrant à la fois les contenus langagiers et les concepts mathématiques, hébergés dans des interactions sociales, est aussi ce que suggèrent Susanne Prediger et Lena Wessel (2013). Ces chercheuses allemandes ont développé une séquence d'enseignement des fractions qui s'adresse aux élèves en contexte de langue seconde. Pour ce faire, elles s'appuient notamment sur le modèle théorique des registres de représentations qu'elles ont poussé plus loin pour y inclure les différents registres de langue en langue première (L1) et en langue seconde (L2) (Prediger et Wessel, 2011, cité dans Prediger et Wessel, 2013). (Voir la figure 1.1)

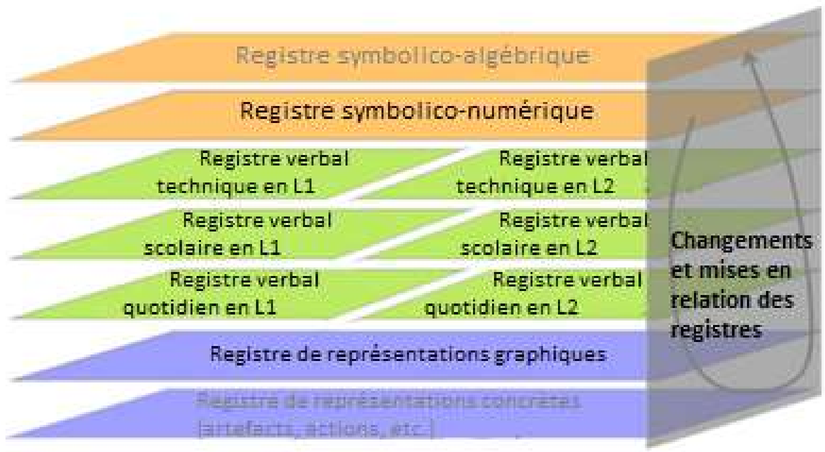

Figure 1.1. Différents registres langagiers et de représentations (Prediger et Wessel, 2011, tel que cité dans Prediger et Wessel 2013)[4]

Le registre verbal est séparé en trois strates : le registre quotidien, le registre utilisé à l'école (ou scolaire) et le registre technique. Une des distinctions intéressantes entre ces niveaux de langage est que le registre utilisé à l'école et le registre technique sont tous les deux plus abstraits et plus complexes linguistiquement que le registre quotidien, toutefois, le registre utilisé à l'école n'est pas enseigné de façon explicite aux enfants, ou bien il l'est rarement. Ainsi, les différences entre les milieux familiaux et, plus précisément, entre les niveaux de langage disponibles dans la langue d'enseignement (qu'elle soit L1 ou L2) au sein des milieux familiaux auront une influence sur la facilité pour un enfant de passer d'un registre à l'autre. Pour ces raisons, les auteures ont choisi d'intégrer dans leur approche des transitions volontaires et dynamiques entre les trois registres, ainsi que d'aborder de façon explicite le registre de langage utilisé à l'école. Notamment, cette mise en relation des différents registres se fera via la traduction entre les registres, la mise en contraste des différents registres, et la sollicitation directe d'un

[4] Traduction libre de la figure de Prediger et Wessel (2011, tel que cité dans Prediger et Wessel, 2013)

ou l'autre des registres pendant la tâche. Selon Prediger et Wessel (2013), cette mise en relation systématique et délibérée des différents registres au cours d'activités mathématiques en L2, en suivant une progression réfléchie aux niveaux macro et micro, contribue à la compréhension des concepts mathématiques de même qu'au développement d'un langage mathématique riche.

1.3.3 La place de la langue maternelle

Pour Nunes (1992), ainsi que pour Kaput (1991), la langue maternelle, de même que, de façon générale, le contexte culturel dans lequel se trouve un apprenant, influence la mise en œuvre de certaines activités mentales. Le développement de certaines habiletés mathématiques serait ainsi corrélé à la langue maternelle d'un individu. Un exemple relevé par Nunes (1992) est celui du système de numération. Une langue comme l'anglais, qui nomme les nombres de façon systématique, calquée sur le système de numération positionnelle en base dix, faciliterait les tâches de dénombrement d'une grande collection d'objets, notamment en limitant le rôle joué par la mémoire.

Certains auteurs étudiant le rôle de la langue maternelle dans l'apprentissage des mathématiques par l'élève allophone proposent de considérer le langage comme une ressource plutôt que comme un obstacle. Nous avons déjà mentionné que, même dans le contexte de langue première, Barwell rejette l'idée de l'apprentissage comme étant une transition de l'informel vers le formel, pour davantage considérer que les différents niveaux de langage coexistent et sont travaillés en simultanée. Son approche dans le contexte de la langue seconde est similaire, en ce sens qu'elle met en valeur la diversité langagière. En effet, Barwell (2018) s'appuie sur la notion de répertoire telle que définie par Blackledge, Creese et Kaur Takhi (2014, cité dans Barwell, 2018) : « l'ensemble des façons qu'a un individu d'utiliser le langage, la littératie et d'autres moyens de communication pour fonctionner dans les différentes communautés dans lesquelles il évolue » (p.487)[5]. Ainsi, dans le contexte de la classe de mathématiques, l'élève multilingue participe à différentes interactions langagières, sources de construction de sens, et il élargit son répertoire pour notamment y développer des éléments de communication dans la langue de scolarisation et des éléments du langage mathématique formel. Pour ce faire, il s'appuie sur des pratiques langagières déjà existantes dans son répertoire, issues de ses expériences variées, notamment dans les autres langues qu'il connaît.

Dans un contexte comme celui de la classe d'accueil au Québec, les langues maternelles sont multiples, et il est rare qu'un élève ait la possibilité d'interagir avec l'enseignant, ou même avec les autres élèves, dans sa L1. Il se verra alors placé dans une situation de *production forcée*[6] *en L2*. Selon Swain (1995, cité dans Prediger et Wessel, 2013), une telle production forcée permet non seulement de développer une aisance, une fluidité dans la langue en cours d'apprentissage, mais stimule aussi l'apprenant à y repérer ses limites (et donc ses besoins) ainsi qu'à tester des formules ou des éléments de vocabulaire et à percevoir le besoin de se corriger, le cas échéant.

1.4 La place des fractions dans le cursus et leur lien avec le langage

Un des contenus fondamentaux dans le cursus scolaire québécois est celui des nombres rationnels et de leur notation fractionnaire. Les nombres rationnels constituent, avec les nombres naturels, le domaine numérique dans lequel les élèves du début du primaire construisent leur sens du nombre. La rencontre avec les nombres rationnels se fait d'abord de façon informelle : ils font partie du paysage numérique des élèves dans des contextes de la vie quotidienne – en particulier certaines fractions unitaires exprimées

---

[5] Traduction libre à partir de la citation dans Barwell, 2018.
[6] Traduction libre de « pushed output ».

en mot : la demie, le tiers, le quart. Quant à elle, la rencontre plus formelle avec les nombres rationnels, qui se traduit notamment par la familiarisation avec la notation fractionnaire, requiert d'introduire de nouveaux symboles, du nouveau vocabulaire, et un sens nouveau à la juxtaposition de symboles.

Ghailane (2015) rapporte que Behr, Harel, Post et Lesh qualifient les nombres rationnels comme une notion mathématique d'importance fondamentale dans le parcours scolaire. En effet, en plus d'être eux-mêmes présents dans des problèmes de la vie courante, les nombres rationnels constituent un point d'appui pour l'apprentissage de plusieurs contenus mathématiques et même, plus globalement, pour le développement intellectuel et cognitif.

En outre, la fraction est un contenu-clé dans la transition du primaire au secondaire. En effet, dans les classes de primaire, les fractions sont vues principalement dans le cadre de contextes concrets, ancrés dans le monde réel, et souvent en faisant appel au sens partie/tout. Au secondaire, la notion de fraction est plutôt travaillée de façon décontextualisée, par le biais du travail sur d'autres contenus mathématiques. De plus, les opérations sur les fractions ne sont pas beaucoup présentes dans les tâches utilisées au primaire, alors qu'elles le sont beaucoup au secondaire. (Houle, 2016)

Pour ces raisons, il nous semble pertinent d'accorder une attention particulière aux nombres rationnels et à la notation fractionnaire.

1.4.1 Fractions et langage

Pour Thomas Kieren (1999), les tâches en lien avec les fractions constituent un terrain fertile pour observer l'utilisation incarnée du langage mathématique par les élèves – autant les symboles que les verbalisations. En effet, selon l'auteur, lorsque les enfants utilisent le langage fractionnaire pour désigner des quantités ou des objets, il ne s'agit pas seulement d'une correspondance entre un mot et ce qu'il désigne, mais bien d'une articulation qui implique des façons de penser et d'agir, des activités mentales qui mettent en relation différents objets et qui mobilisent des processus mathématiques. Les processus mathématiques dont il est question ici sont entre autres le partitionnement et la reconstitution de l'unité de référence. Dans un article de 1999, Kieren présente l'analyse de discours d'élèves et conclut que (1) l'utilisation du langage fractionnaire par les élèves est incarnée, c'est-à-dire qu'elle est conjuguée à des façons de penser et à des représentations mentales, (2) la nature de la tâche réalisée a une influence sur le langage utilisé, et (3) le contexte social et le besoin de communiquer ont aussi une incidence sur le langage mathématique utilisé. Ainsi, conclut-il, « l'utilisation du langage fractionnaire a été observée comme étant soumise aux dynamiques structurelles internes de l'individu et aux dynamiques sociales/interactionnelles de la communauté dans laquelle il évolue »[7].

En cohérence avec les conclusions de Nunes (1992) relevées plus tôt concernant le rôle de la langue maternelle, Miura *et al.* (1999) suggèrent que le concept de fractions est plus facilement accessible pour les locuteurs de certaines langues. Les auteurs s'intéressent particulièrement aux langues de l'Asie de l'Est. En coréen, soulignent-ils, certaines locutions s'appuient littéralement sur le sens partie/tout de la fraction. L'expression pour « un tiers » se traduit comme « de trois parties, une »[8]. Ils ont vérifié cette hypothèse à l'aide d'une étude quantitative comparative menée sur des enfants qui n'avaient pas été exposés à un enseignement formel des fractions.

---

[7] Traduction libre de la page 125 de Kieren (1999).

[8] L'expression originale en coréen mentionnée par Miura *et al.* (1992) est « *sam bun ui il* », qu'ils traduisent en anglais par « of three parts, one ».

À l'inverse, on pourrait aussi envisager que les locuteurs de certaines langues auront davantage de difficultés à conceptualiser les fractions en raison de certaines façons de penser portées par des façons de parler dans leurs langues maternelles. À titre d'exemple, Poirier (2007) avance que le mot utilisé pour « un » en inuktitut, qui signifie « indivisible »[9], pourrait représenter un obstacle dans le développement du sens des fractions.

Ainsi, quand est venu le temps de restreindre l'objet de notre recherche à certains contenus mathématiques et à leur apprentissage en contexte de langue seconde, nous avons choisi de suivre les traces de Poirier (1997) et de Prediger et Wessel (2013) et de nous intéresser aux fractions.

1.4.2 Fractions dans le curriculum

Le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) et la progression des apprentissages (PDA) publiés par le Ministère de l'Éducation prescrivent que les élèves du premier cycle du primaire soient mis en contact avec les fractions liées à son quotidien à l'aide de matériel concret ou des schémas. (Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS), 2006a ; MELS, 2009) Au cours des années suivantes, l'élève développe son sens des fractions. À la fin de sa scolarité primaire, il est attendu de l'élève qu'il soit en mesure :

- de représenter, lire et écrire les fractions,
- de les comparer avec zéro, une demie et 1,
- de vérifier l'équivalence de fractions et de construire un ensemble de fractions équivalentes,

[9] *Atausik* en Inuktitut.

- de comparer entre elles des fractions lorsqu'elles ont le même dénominateur ou lorsqu'un dénominateur est un multiple de l'autre,
- de situer des fractions sur une droite numérique,
- d'écrire une fraction sous sa forme irréductible,
- d'additionner et de soustraire des fractions lorsqu'elles ont le même dénominateur ou lorsqu'un dénominateur est un multiple de l'autre,
- de multiplier un nombre naturel par une fraction,
- de les utiliser dans des opérations arithmétiques. (MELS, 2009)

Au secondaire, l'élève poursuit son apprentissage conceptuel et procédural en lien avec les fractions. À la fin du premier cycle du secondaire, selon la progression des apprentissages, il est attendu que l'élève puisse :

- reconnaître les différents sens de la fraction,
- additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres positifs écrits sous la forme fractionnaire (MELS, 2006 ; MELS, 2016).

Au deuxième cycle du secondaire, les élèves vont effectuer les quatre opérations arithmétiques avec des nombres (même négatifs) écrit sous la forme de fractions. (MELS, 2007 ; MELS 2016) De plus, ils vont réinvestir leurs connaissances conceptuelles et procédurales de la fraction dans différents contextes mathématiques à travers leurs apprentissages dans tous les domaines mathématiques. Ainsi, les contenus liés aux fractions sont moins présents explicitement dans le programme de la fin du secondaire, mais le sont à travers les autres contenus.

Les documents institutionnels québécois pour les classes d'accueil et de francisation – appelées officiellement les classes d'intégration linguistique, scolaire et sociale (ILSS)

– ne mentionnent pas les fractions ou les nombres rationnels. En fait, autant dans le programme d'ILSS au primaire que dans celui du secondaire, on ne mentionne pas directement de contenus mathématiques. Dans le programme d'ILSS du primaire (MELS, 2014a), il est mentionné que l'élève doit acquérir le vocabulaire de base lié aux mathématiques et il est alors recommandé à l'enseignant de se référer au programme de mathématiques. Dans le programme d'ILSS au secondaire, on détaille davantage les attentes en lien avec le lexique de base en mathématiques. On mentionne que l'élève devra être exposé à des situations variées qui lui permettront d'apprendre :

- le vocabulaire relié aux relations spatiales

- le vocabulaire utilisé pour le nom des chiffres et les conventions d'écriture des nombres (chiffres écrits par groupes de trois séparés par un espace, utilisation de la virgule pour les nombres décimaux,…)

- les mots et les symboles utilisés pour les opérations arithmétiques et pour les comparaisons de quantité ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$, $\neq$)

De plus, pour la compétence langagière 2 « Lire et écrire des textes variés en français », on souligne que l'enseignant doit exposer l'élève à différents types de textes dans lesquels l'élève apprendra à repérer, interpréter et utiliser des informations importantes et à y réagir. Parmi ces textes variés, on retrouve notamment les textes « à contenu quantitatif qui exigent des connaissances et des compétences mathématiques » (MELS, 2014b, p.16).

Ainsi, même si les nombres rationnels et la notation fractionnaire ne sont pas nommés de façon explicite dans les programmes d'ILSS, ils font nécessairement parti du paysage numérique du futur citoyen. Leurs conventions d'écriture et leurs noms, de même que leur interprétation et leur utilisation, devront être appris par les élèves en

ILSS. Toutefois, ce sera à la discrétion de l'enseignant de déterminer avec plus de précision les contenus qui seront abordés et de quelles façons ils le seront.

1.5 Objectif de cette recherche

Au début de ce chapitre, nous avons établi notre intérêt et nos questionnements personnels pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques dans un contexte de francisation. Les statistiques sur la population immigrante au Québec, et en particulier dans la ville de Montréal – où 43,1% des élèves du réseau scolaire public étaient allophones en 2019 (CGTSIM, 2020) – viennent confirmer qu'il est pertinent de s'intéresser à ce thème. Pour les élèves issus de l'immigration dont la langue d'enseignement n'est pas la langue maternelle, l'apprentissage de la langue de scolarisation et l'apprentissage des mathématiques doivent se faire en même temps. Ce sont les défis propres à cette simultanéité qui nous intéressent.

Nous présentons d'abord des recherches et des théorisations qui traitent du lien entre le langage et l'apprentissage des mathématiques de façon générale, en contexte de langue première. De cela, nous retenons que pour plusieurs chercheurs, le langage et l'activité mathématique ne peuvent être dissociés. L'apprentissage des mathématiques serait nécessairement lié à l'appropriation ou à la construction du langage mathématique « formel » ou « standard ». Toutefois, alors que l'approche socioculturelle conçoit l'apprentissage des mathématiques comme une transition du langage informel vers le langage formel, Barwell (2016, 2018) insiste sur la tension constante entre la recherche d'uniformité et l'hétéroglossie, et Jaubert, Rebière et Bernié (2012) proposent la notion de communauté discursive disciplinaire scolaire, qui constitue une vision plus locale des pratiques discursives et sociales.

Ceci nous amène à nous intéresser aux études faites sur le contexte plus particulier de l'enseignement-apprentissage des mathématiques dans un contexte de langue seconde ou étrangère. Nous présentons des recherches qui concluent qu'il y a une différence entre les performances en mathématiques des locuteurs natifs et non natifs de la langue d'enseignement et d'évaluation. (Clarkson, 1991; Abedi et Lord, 2001; Martiniello, 2008) En cherchant à éclairer les causes de ces écarts, on relève entre autres les résultats de Tardif-Couture (2016), qui suggèrent que lors de la résolution de problèmes écrits par des élèves en classe d'accueil au primaire, la complexité mathématique jouerait un rôle plus décisif que la complexité linguistique. Ce résultat peut sembler contre-intuitif et nous amène à concentrer notre intérêt non pas sur l'évaluation, mais bien sur les activités d'apprentissage. Ainsi, une des hypothèses principales pour expliquer les différences dans les résultats aux évaluations est que les expériences mathématiques vécues par les élèves dont la langue maternelle n'est pas la langue de scolarisation sont différentes des autres.

Il semble alors naturel de s'intéresser à documenter davantage ces expériences mathématiques. C'est le travail amorcé en France entre autres par Millon-Fauré (2011) et Bouchard et Cortier (2005, 2006), qui relèvent des défis propres aux échanges pédagogiques en langue seconde. D'autres études, comme celle de Poirier (1997) au Québec et celle de Prediger et Wessel (2013) en Allemagne, proposent des pistes de solution. Notamment, ces chercheurs suggèrent d'utiliser une double approche qui intègrent en même temps les contenus langagiers et les concepts mathématiques, plutôt que de les traiter les uns après les autres.

Nous souhaitons donc poursuivre le travail qui a été amorcé et contribuer à éclairer quelles sont les expériences mathématiques vécues dans les classes pour les élèves immigrants non francophones, ici, au Québec.

Le contexte de l'apprentissage des fractions nous semble un terrain fertile pour effectuer nos observations : il s'agit d'un contenu mathématique qui occupe une place importante dans le cursus scolaire institutionnel québécois, dont les enjeux didactiques sont bien documentés (voir notamment, Ghailane, 2015 et Houle, 2016) et qui représente déjà un intérêt pour les chercheurs qui s'attardent au lien entre mathématiques et langage (voir entre autres Poirier, 1997; Kieren, 1999; et Prediger et Wessel, 2013).

Ainsi, l'objectif de la présente recherche sera de *décrire la dynamique langagière et mathématique lors de l'enseignement-apprentissage de contenus liés aux fractions dans un contexte de francisation au Québec*.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Afin d'orienter nos observations et de structurer notre analyse, nous avons choisi d'utiliser l'outil des modes d'agir-parler-penser développé comme outil d'analyse par Bulf, Mathé et Mithalal (2014). Nous allons aussi alimenter notre regard théorique en intégrant différentes interprétations de la fractions (Kieren, 1999 ; Behr *et al.*, 1992).

2.1 Modes d'agir-parler-penser

2.1.1 Ancrage théorique

Bulf, Mathé et Mithalal (2014) s'inscrivent dans la lignée de Guy Brousseau (1998, entre autres) et de sa théorie des situations didactiques (TSD), tout en se rapprochant aussi de théories plus sociales comme celles de Sfard (2001, 2012) et Radford (2011, entre autres). Dans la TSD, on conçoit l'apprentissage comme un double processus d'adaptation et d'acculturation. Le processus d'adaptation est celui par lequel le sujet, confronté au milieu, entre en phases d'assimilation et d'accommodation. Le sujet met alors en jeu et développe des *connaissances*. En effet, dans la TSD, les *connaissances* sont ce que le sujet mobilise ou met en œuvre lorsqu'il interagit avec un milieu et qu'il cherche à y retrouver un équilibre. Le processus d'acculturation est celui par lequel le sujet s'insère dans une communauté ou une institution, elles-mêmes porteuses de *savoirs*. Ces derniers sont des éléments standardisés, des construits sociaux et culturels. La mise en relation des *connaissances* et des *savoirs*, habituellement faite par l'enseignant, est nommée l'institutionnalisation. Dans ce contexte, les échanges langagiers, bien qu'ils ne soient pas du tout centraux dans la TSD, prennent néanmoins une importance dans l'appropriation de la situation par le sujet (dévolution), ainsi que dans le processus d'institutionnalisation. Bulf, Mathé et Mithalal (2014) vont encore plus loin en ce sens et accordent une place plus grande aux dimensions sociale, collective et langagière ainsi qu'au processus d'acculturation. Ils s'inspirent notamment globalement des idées de Sfard (2001, 2012) et de Radford (2011, entre autres), et se rapprochent aussi de celles de Jaubert, Rebière et Bernié (2012). Dans la vision portée par Bulf, Mathé et Mithalal (2014), l'apprentissage des mathématiques est une activité discursive et située, et les mathématiques sont une pratique sociale. Ainsi, l'apprentissage des mathématiques consiste à s'insérer dans une communauté, « dans un processus à la fois adaptionniste et social » (Bulf, Mathé et Mithalal, 2014, p.4).

2.1.2 Agir-parler-penser

Les interactions langagières, et en particulier le langage oral, jouent un rôle dans le volet adaptation comme dans le volet acculturation. D'une part, le sujet apprenant interagit avec la situation. Il met en œuvre et construit des manières de penser, qui se traduisent par des actions et par des manières de parler. En continuité avec Barrera-Curin, Bulf et Venant (2016) ainsi qu'avec Bulf, Mathé et Mithalal (2014), nous considérons ces états de l'activité mathématique comme des réalités à trois volets équitablement importants : l'agir, le penser et le parler. On leur donne le nom de *mode d'agir-penser-parler*. Décrire l'apprentissage d'un sujet, ou décrire son activité mathématique, consistera à s'intéresser aux modes d'agir-parler-penser qu'on peut observer.

D'autre part, l'aspect culturel et socialement situé de l'apprentissage implique que les objets d'apprentissage sont des savoirs standardisés. Les échanges langagiers agissent comme médiateurs dans les processus d'adaptation et d'acculturation, comme terrain fertile à la négociation des sens et à l'évolution des modes d'agir-penser-parler. Ainsi, décrire l'apprentissage et l'activité mathématique d'un apprenant, c'est aussi s'intéresser à la dynamique avec les autres sujets et à l'interaction et l'interinfluence entre les modes d'agir-penser-parler des différents individus.

Pour certains auteurs, les modes d'agir-parler-penser sont un construit théorique. Leurs manifestations dans un contexte d'activité mathématique portent le nom de « modes de fréquentation » et ce sont ces dernières qu'ils chercheront à identifier à travers les observations des élèves. (Bulf, Mathé et Mithalal, 2014 et Barrera-Curin, Bulf et Venant, 2016) Dans le cadre de notre recherche, nous avons jugé que cette distinction entre l'objet théorique des modes d'agir-parler-penser et son opérationnalisation (modes de fréquentation) n'était pas nécessaire. Ainsi, notre recherche utilise directement comme unités d'analyse les modes d'agir-parler-penser. Chaque mode d'agir-parler-penser (mode d'APP) est constitué de manières – ou de façons[10] – d'agir, de parler, et de penser. De plus, les modes d'APP sont divers et propres au contexte. En cohérence avec le volet adaptatif de l'apprentissage, les modes d'agir-parler-penser d'un sujet évoluent au cours des confrontations avec la situation. C'est la facette *intra-personnelle* de leur dynamique. Ainsi, s'intéresser aux dynamiques intra-personnelles des modes d'APP d'un sujet apprenant consiste à observer comment la situation l'amène à s'adapter et quels sont les modes d'APP qui sont exhibés pendant ce processus d'adaptation. Barrera-Cunin, Bulf et Venant (2016) mentionnent que l'évolution du point de vue intra-personnel est celle qui est reliée au caractère a-didactique de la situation. Quant à elle, la facette *interpersonnelle* de l'évolution des modes d'APP réfère aux changements dans les rapports aux objets qui sont provoqués par les rencontres avec les modes d'agir-parler-penser des autres sujets apprenants. On

[10] Dans notre description des modes d'agir-parler-penser et dans notre analyse, nous utiliserons comme des synonymes les mots « façons » et « manières » pour parler des différents volets d'un mode.

reconnaît là le volet de l'apprentissage qui a trait à l'acculturation et à la négociation avec autrui des savoirs culturels. Barrera-Cunin, Bulf et Venant (2016) parlent d'une « double dynamique d'évolution et de transformation des Modes [d'agir-parler-penser] (considérée comme concomitante et dialectique) » (p.46). L'apprentissage se caractérise donc par l'évolution des modes d'agir-parler-penser du sujet vers des modes d'agir-parler-penser et des pratiques qui sont partagées et valorisées dans la communauté disciplinaire scolaire, dans ce cas la classe de mathématiques.

Il convient toutefois de noter qu'on ne prétend pas pouvoir observer directement les modes d'agir-parler-penser, ni avoir un accès direct aux manières de penser des élèves. Plutôt, on les devine par le biais des manières d'agir et de parler, qui elles sont perceptibles. L'utilisation concrète de cet outil d'analyse se base donc sur un travail de repérage et d'interprétations d'actions et de comportements langagiers. Elle est aussi souvent, dans la pratique, couplée avec une analyse préalable des modes d'APP qui pourraient émerger et une analyse *a posteriori* des modes d'APP qui ont été observés, comme nous le décrirons dans notre chapitre 3.

2.1.3 Pertinence de ce cadre pour notre recherche

Nous avons choisi d'utiliser cet outil d'analyse pour notre recherche car il est en cohérence avec notre position épistémologique et qu'il permet de documenter différents volets de l'activité mathématique. En effet, l'intention à l'origine du développement de l'outil des modes d'agir-parler-penser est de pouvoir rendre compte à la fois de l'apprentissage mathématique, des échanges langagiers et de l'interaction entre les deux. Cela nous semble tout à fait convenir à nos objectifs de recherche, qui cherchent à explorer et à documenter l'apprentissage des mathématiques dans un contexte langagier particulier.

En outre, notre projet de recherche constitue une utilisation de l'outil des modes d'agir-parler-penser pour analyser l'appréhension d'un objet mathématique qui n'est pas un objet géométrique. Comme Houle, Venant et Barrera-Curin (2020), l'objet mathématique qui nous intéresse est celui des fractions. De plus, les interactions langagières analysées ont des particularités supplémentaires car elles ont lieu dans une langue qui n'est pas la langue première des sujets apprenants.[11] Considérant que l'outil d'analyse a été développé dans le contexte d'interactions entre locuteurs natifs de la langue de scolarisation et dans le paysage mathématique de la géométrie, la présente recherche constitue une extension de son utilisation.

2.2 Les fractions

Nous présenterons d'abord le concept de nombre rationnel, puis la fraction, qui est une représentation possible du nombre rationnel. Ensuite, nous présenterons les différentes interprétations de la fraction relevés par Kieren (tels que synthétisés par Houle, 2016), puis celles dégagées par Behr *et al.* (1992). Nous mettrons en lumière certaines difficultés possibles en lien avec le concept de fraction.

2.2.1 Le nombre rationnel

On peut définir les nombres rationnels comme les solutions aux équations $nx = k$ où k et n sont des entiers et n est différent de 0. Ces équations n'ayant pas toutes des solutions dans les entiers, l'ensemble des nombres rationnels constitue historiquement et mathématiquement une extension de l'ensemble des nombres entiers. Ainsi, le nombre rationnel peut s'écrire comme le quotient de deux entiers. La notation fractionnaire est une des façons possibles pour représenter ce nombre. Le trait de fraction représente alors la division et la solution à l'équation $nx = k$ sera notée $\frac{k}{n}$. Une autre représentation possible de ce même nombre serait d'utiliser le couple ordonné

[11] Notons que certaines interactions entre apprenants partageant une même langue d'origine ont été enregistrées. Toutefois, nous avons fait le choix de ne pas analyser ces interactions.

d'entiers impliqué dans l'équation en le notant (k, n) ou $k: n$. (NCTM, 1964, cité dans Ghailane, 2015)

Une autre notation possible pour le nombre rationnel est l'écriture décimale, c'est-à-dire une représentation du nombre qui utilise la virgule. Cette dernière s'inscrit en continuité avec le système de numération positionnel en base dix utilisé pour les nombres entiers, et même éventuellement pour les nombres irrationnels. Une caractéristique de l'écriture sous forme décimale est que chaque nombre ne compte qu'un seul encodage. Ce n'est pas le cas pour la notation fractionnaire et l'écriture sous forme de couples ordonnés. En effet, plusieurs équations peuvent avoir une même solution et plusieurs quotients peuvent être équivalents. C'est le cas par exemple de l'équation $5x = 3$ et de l'équation $15x = 9$: une même quantité x permet de vérifier ces deux égalités. Ainsi, on dira plutôt que le nombre rationnel correspond à une classe d'équivalence de couples ordonnés d'entiers ou à une classe d'équivalence de fractions (Houle, 2016). Cette infinité d'écritures équivalentes constitue une rupture importante avec le paysage arithmétique des élèves qui est souvent constitué, avant l'introduction aux fractions, exclusivement des nombres naturels. Nous développerons davantage sur les difficultés potentielles à la section 4 du présent chapitre.

Dans la présente recherche, nous allons nous concentrer seulement sur la représentation fractionnaire des nombres rationnels. Dans cette notation, deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont dites équivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$. Dans ce cas, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont dans la même classe d'équivalence et représentent le même nombre. Ainsi, ce qui caractérise un nombre rationnel écrit sous la forme d'une fraction, ce n'est pas la valeur des quantités impliqués dans son écriture, mais bien la relation multiplicative entre ces deux quantités. En ce sens, en plus de considérer le nombre rationnel $\frac{k}{n}$ comme le résultat du quotient k divisé par n, on peut le concevoir comme la relation multiplicative entre les entiers k et n : k est $\frac{k}{n}$ de (fois) n. (Houle, 2016)

En nous appuyant notamment sur les travaux de Houle (2016) et de Houle et Giroux (2018) – qui synthétisent les sens de la fraction relevés par Kieren (1976) et par Behr *et al.* (1992) – nous décrirons cinq interprétations de la fraction : partie/tout, mesure, quotient, opérateur et rapport.

Dans l'interprétation **partie/tout** de la fraction $\frac{k}{n}$, le dénominateur n correspond au nombre de parties égales qui constituent le tout et le numérateur k correspond au nombre de partie désignées. Le tout peut être un tout continu ou une collection d'éléments. C'est souvent ce sens de la fraction qui est présenté en premier aux élèves. Il constitue un point de départ pour développer les autres sens. C'est cette interprétation de la fraction qui est en jeu dans des situations comme : « La tarte est coupée en quatre portions et Alice mange une portion. Alice mange donc $\frac{1}{4}$ tarte. »

Dans une interprétation de la fraction comme **mesure,** la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à a répétitions de la mesure $\frac{1}{b}$. Dans ce contexte, l'unité de mesure est $\frac{1}{b}$: c'est-à-dire une mesure qui entre b fois dans l'unité. Deux fractions sont équivalentes lorsque les mesures qui leurs sont associées sont égales. De plus, le sens mesure de la fraction permet de représenter et de travailler avec des fractions dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, ce qui n'est pas facilement le cas avec le sens partie/tout. Cette conception de la fraction est notamment sollicitée dans des exercices avec la droite numérique. Un énoncé comme : « Place la fraction $\frac{5}{3}$ sur la droite numérique ». peut faire appel à l'interprétation mesure : l'élève qui connait la longueur de l'intervalle de mesure $\frac{1}{3}$ procéderait alors à cinq itérations de cet intervalle.

Le sens **rapport** de la fraction indique une relation (multiplicative) entre deux grandeurs. Les deux grandeurs n'ont pas à être de même nature ou à provenir du même tout. Elles peuvent aussi être discrètes ou continues. Par exemple, la fraction $\frac{2}{5}$ pourrait représenter une situation dans laquelle on forme des bouquets de fleurs contenant 2 tulipes pour 5 roses. Cela signifierait que chaque fois qu'on compte 2 tulipes, on compte 5 roses. Il n'est pas impératif que les bouquets contiennent au total 7 fleurs, mais le rapport entre le nombre total de tulipes et le nombre total de roses doit demeurer : pour chaque 2 tulipes, on trouve 5 roses. C'est la relation entre les deux quantités impliquées qui est mise de l'avant. Avec le sens rapport de la fraction, il est fréquent qu'on doive procéder à des comparaisons de fractions (rapports). Deux fractions sont alors considérées comme égales lorsqu'elles décrivent la même relation entre les grandeurs. Par exemple, le rapport $\frac{6}{15}$ est équivalent au rapport $\frac{2}{5}$ parce que, dans la situation « 6 tulipes pour 15 roses » comme dans la situation « 2 tulipes pour 5 roses », la relation multiplicative entre le nombre de tulipes et le nombre de roses est la même.

L'interprétation **quotient** de la fraction rejoint la définition que nous avons donnée initialement : le nombre rationnel $\frac{k}{n}$ est le résultat de la division du nombre entier k par le nombre entier n. Les situations de division dans un contexte de partage égal sont fréquemment utilisées pour introduire l'interprétation quotient. Ces contextes de partage égal doivent être choisis pour que le résultat du partage ne corresponde pas à un nombre entier. Par exemple : Alice a 3 barres de chocolat qu'elle partage également entre 5 personnes. Quelle portion d'une barre de chocolat chaque personne aura-t-elle?

Dans le sens **opérateur** de la fraction, on considère cette dernière comme une transformation d'une quantité. L'opérateur fractionnaire correspond à la composition de deux opérateurs : une multiplication par un nombre entier et une division par un nombre entier non-nul. Le sens opérateur de la fraction est notamment sollicité dans des exercices d'agrandissement ou de rétrécissement de figure ou encore dans des exercices du type : Le $\frac{3}{5}$ des élèves de l'école jouent au soccer. Il y a 1565 élèves en tout. Combien d'élèves jouent au soccer?

Bien que différents sens de la fraction aient été recensés et qu'on associe typiquement certaines tâches à la mise en œuvre de chacun d'entre eux, une même situation peut se prêter à la mobilisation de plusieurs sens différents, selon le raisonnement emprunté par l'élève, ou encore nécessiter la coordination de plus d'un sens de la fraction. Considérons par exemple la situation suivante : Charlie a 30 crayons et en donne le $\frac{1}{6}$ à Donald. Nous nous intéressons à la quantité de crayons que recevra Donald. Il est notamment possible de calculer cette quantité de crayons en s'appuyant sur une interprétation partie/tout de la fraction – je partitionne la collection de 30 crayons en 6 paquets, et j'en sélectionne un qui contient 5 crayons – ou en s'appuyant sur le sens opérateur – je multiplie 30 crayons par l'opérateur $\frac{1}{6}$ car je cherche la quantité correspondant à $\frac{1}{6}$ de 30 crayons.

2.2.2 Behr *et al.* (1992) et les interprétations du nombre rationnel

Behr *et al.* (1992) portent un regard analytique sur les nombres rationnels en s'inscrivant dans la lignée des « mathématiques sur les quantités ». Dans cette approche, la compréhension des relations entre les nombres et des opérations sur les nombres s'appuie sur les idées de grandeur[12] et les unités de mesure.

Behr *et al*. (1992) proposent un inventaire de différentes interprétations du nombre rationnel en termes « d'unités » et de « sous-unités ». L'objectif global de ce travail est, entre autres, d'offrir une assise commune pour les chercheurs qui s'intéressent aux nombres rationnels en fournissant à la fois les descriptions mathématiques des différentes interprétations mais aussi un système de notation qui est cohérent avec le

[12] En anglais : « magnitude of quantities »

formalisme mathématique tout en pouvant se coller aux différents processus mathématiques observés chez les enfants.

Le tableau 2.1 ci-dessous résume les quatre interprétations du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ recensées par Behr *et al.* (1992).

La première ligne du tableau nous présente une interprétation dans laquelle la bande de papier constitue l'unité de référence. Ainsi, la fraction $\frac{a}{b}$ désigne alors $\frac{a}{b}(1-bande)$, ou, en mots, $\frac{a}{b}$ *de la bande* de papier. Les *b* parties de la bande sont perçues mais sont unifiées[13], considérées ensemble comme formant une unité, la bande. Ainsi, la bande est considérée comme une unité, et les $\frac{a}{b}$ parties sont le sous-groupe qui nous intéresse.

L'interprétation qui figure dans la deuxième ligne du tableau est un peu différente, en ce sens que les *b* parties de la bande sont considérées elles-mêmes comme les unités de mesure. Ainsi, la fraction $\frac{a}{b}$ serait interprétée comme *a* répétitions de l'unité qui est $(\frac{1}{b}-bande)$. Cette interprétation est cohérente avec le sens « partie/tout » de la fraction : chaque partie du tout est une unité de $(\frac{1}{b}-bande)$ et on considère *a* parties parmi les *b* parties qui forment le tout. Cela n'est pas sans nous rappeler le sens mesure de la fraction relevé par Kieren. Bien que Behr *et al.* (1992) ne le mentionnent pas explicitement, il s'agit en effet d'interprétations similaires.

---

[13] En anglais : « unitized »

Ceci représente une nuance par rapport à la troisième ligne du tableau, dans laquelle on considère plutôt une unification de a répétitions de la bande en s'intéressant à $\frac{1}{b}$ de cette nouvelle unité de mesure.

Finalement, la quatrième interprétation présentée dans le tableau correspond à la perception de la fraction $\frac{a}{b}$ de la bande comme étant l'unité de référence. Il arrive que cette interprétation soit manifestée avec le sens partie/tout de la fraction : les a parties de chacune $(\frac{1}{b} - bande)$ sont considérées ensemble, de façon regroupée.

Lorsque la notation en fraction est une fraction unitaire, plusieurs interprétations peuvent être compatibles avec les façons de parler.

Tableau 2.1 : Les interprétations de la fraction et leur notation selon Behr *et al.* (1992)

	Interprétation du nombre rationnel dans la notation de Behr *et al.* (1992)	**Dans le contexte des bandes de papier**	**Façons de parler cohérentes avec l'interprétation**
1.	$\frac{a}{b}(1 - unité)$	$\frac{1}{2}(1 - bande)$ $\frac{3}{4}(1 - bande)$	« la moitié de la bande » « les trois quarts de la bande »
2.	$a(\frac{1}{b} - unité)$	$1(\frac{1}{2} - bande)$	« une fois la demie-bande » « une portion de une demie-bande »

		$3(\frac{1}{4} - bande)$	« trois fois le quart de la bande » « trois parties de un quart de bande »
3.	$\frac{1}{b}(a - unité)$	$\frac{1}{2}(1 - bande)$ $\frac{1}{4}(3 - bandes)$	« une demie fois la bande » « le quart de trois bandes »
4.	$1(\frac{a}{b} - unité)$	$1(\frac{1}{2} - bande)$ $1(\frac{3}{4} - bande)$	« Une fois la demie-bande. « une fois le trois-quarts de la bande »

Notons que l'article de Behr *et al.* (1992) propose des raisonnements potentiels qui illustrent comment les différentes interprétations proposées dans le tableau ci-haut sont mobilisées dans différents sens de la fraction. Notre utilisation de la typologie de Behr *et al.* (1992) est davantage descriptive et nous n'allons donc pas présenter ces différents exemples ici.

2.2.3 Difficultés potentielles

Lorsqu'ils sont mis en contact avec les fractions, ou plutôt avec les nombres rationnels et leur représentation fractionnaire, les élèves ont principalement travaillé avec des nombres entiers, et surtout des nombres entiers positifs. Ainsi, ils sont habitués à ce que chaque nombre soit associé à un seul code numérique. Ceci n'est plus vrai dans le contexte des nombres rationnels. En effet, en plus des différents modes de représentation des nombres rationnels (entre autres l'écriture décimale et la notation fractionnaire), il existe une infinité de fractions dites équivalentes qui représentent le même nombre rationnel. Ceci représente un défi important pour les élèves en apprentissage. (Ghailane, 2015).

De plus, le nombre « un » (1), avant de fréquenter les fractions, est associé à une unité qu'on peut accumuler, regrouper, compter, mais pas diviser. L'élève qui donne du sens aux fractions doit adapter sa compréhension du nombre « un » et de l'unité, ce qui peut être une source de difficultés. (Ghailane, 2015 qui cite Kieren, 1993)

Une autre différence notoire entre les nombres rationnels et les nombres entiers qui peut être un obstacle pour les apprenants est la densité des nombres rationnels. En effet, il est toujours possible de trouver un nombre qui se situe entre deux nombres rationnels donnés. Ceci n'est pas vrai dans l'ensemble des nombres entiers, où l'on peut définir et utiliser la notion de « successeur » ou de « prochain » nombre.

Il existe aussi d'autres difficultés potentielles selon le sens de la fraction en jeu et selon la nature discrète ou continue du contexte.

2.2.3.1 Sens partie/tout

L'interprétation d'une fraction selon le sens partie/tout requiert de partager le tout en un nombre de parties correspondant au dénominateur de la fraction. De plus, ce partage, ou partitionnement doit respecter 2 critères : les parties doivent toutes être égales et, lorsque considérées ensemble, elles doivent équivaloir au tout. C'est dans le respect de ces deux critères que se situe les possibles difficultés pour les élèves. Le niveau de difficulté est influencé à la fois par la nature du tout à partitionner ainsi que par le nombre de parties à former. (Houle, 2016)

Selon certains chercheurs, le sens partie/tout est surutilisé lorsque les enfants débutent leur apprentissage du contexte de fractions, et il est difficile pour les enfants de procéder à l'abstraction nécessaire pour ensuite pouvoir, notamment, opérer sur les fractions. (Coquin et Camos, 2006) Toutefois, selon d'autres chercheurs, le problème ne serait pas dans la surexposition au sens partie/tout, mais plutôt dans le nombre limité de modèles concrets : avec une grande variété de représentations, l'élève sera en mesure d'éventuellement passer à l'abstraction. (Coquin et Camos, 2006).

2.2.3.2 Sens mesure

Tel que mentionné dans la section 2.2.1, le contexte de la droite numérique est souvent privilégié pour mettre en œuvre le sens mesure de la fraction. Selon Charalambos et Charalambous Pitta-Pantazi (2007, cité dans Houle 2016), il est toutefois assez difficile pour les élèves d'accomplir de telles tâches. Une hypothèse pour expliquer cela est que les élèves ont du mal à traiter la fraction comme étant un seul nombre (plutôt que deux).

2.2.3.3 Sens rapport

Les tâches en lien avec le sens rapport sont souvent des tâches de comparaison ou de production de rapports équivalents. Les élèves risquent de mettre en œuvre des raisonnements additifs plutôt que multiplicatifs. (Houle, 2016)

2.2.3.4 Sens quotient

Comme indiqué dans la partie A, le sens quotient de la fraction établit une équivalence entre la notation $\frac{k}{n}$ et la division de deux nombres entiers $k \div n$. Toutefois, l'assimilation même de cette équivalence peut représenter un défi pour les apprenants, étant donné que l'opération de division et le nombre rationnel représenté sous forme fractionnaire sont traditionnellement traités de façon distincte en classe. (Houle, 2016)

2.2.3.5 Sens opérateur

Les difficultés avec le sens opérateur de la fraction sont reliées aux structures multiplicatives. En effet, dans des tâches de recherche d'opérateurs, des erreurs communes sont commises en recourant à des procédures additives plutôt que multiplicatives. (Houle, 2016 ; citant Blouin, 1993)

2.2.3.6 Contextes discrets et continus

Finalement, de façon globale, et selon Behr *et al.* (1992), les problèmes et les calculs sur les fractions dans des contextes discrets sont plus faciles pour les enfants, étant donné que ces derniers peuvent mettre en œuvre des connaissances et des procédures de dénombrement et de comparaison développées avec les nombres entiers. La résolution de problèmes impliquant des quantités continues, quant à elle, est plus difficile pour les élèves car ils doivent mettre de l'avant des stratégies différentes, comme le partitionnement. Ces éléments théoriques/conceptuels, basés sur des résultats de recherche ou des analyses existantes dans la littérature didactique mathématique, serviront à nourrir notre analyse préalable en termes de modes d'agir-parler-penser.

2.2.4 Évolution des connaissances de l'élève sur les structures multiplicatives des fractions

Au fur et à mesure qu'il fréquente les tâches qui travaillent les fractions, l'élève est de plus en plus apte à coordonner ses connaissances sur les différentes interprétations de la fraction et à développer une conception de la fraction comme structure multiplicative. En citant les travaux de Kieren (1980, 1988, 1993) et de Desjardins et Hétu (1974), Houle et Giroux (2019) présentent une progression dans l'articulation des connaissances des élèves permettant de développer une conception de la fraction somme structure multiplicative. D'abord, les tâches de partition, généralement associées à l'interprétation partie/tout, jouent un rôle crucial dans le développement d'une vision multiplicative de la fraction. En étant exposé à des tâches de partitionnement exhaustif d'un tout en parties égales, l'élève est exposé au fait que l'unité est divisible, au fait que les parties réunies correspondent au tout, et au fait qu'un plus grand nombre de parties correspond à des parties plus petites. De plus, le double critère d'exhaustivité du partitionnement et d'égalité des parties, lorsqu'assimilé par l'élève, lui permet de construire la structure multiplicative suivante : lors d'un partitionnement en n parties, la fraction $\frac{1}{n}$ peut entrer n fois dans le tout. Combiné à la familiarisation de l'élève avec les structures multiplicatives dans d'autres contextes (comme les nombres entiers), cela peut ensuite mener l'élève à concevoir que $\frac{1}{n}$ est n fois plus petit que le tout, ou l'unité (1). Il s'agit d'une mise en relation multiplicative entre la partie et le tout, qui peut aussi évoquer indirectement l'interprétation mesure de la fraction, ou même l'interprétation de la fraction comme opérateur. Plus tard, l'élève pourra approfondir sa conception de la fraction comme structure multiplicative et concevoir qu'une même fraction peut désigner des quantités différentes dans l'absolu, dépendamment du tout auquel elle est associée. Éventuellement, cela pourra mener l'élève à mobiliser et coordonner plus d'une interprétation de la fraction pour résoudre un problème.

2.3 Question de recherche

L'objectif de notre recherche, formulé sommairement, était d'approfondir nos connaissances des interactions langagières dans un cours de mathématiques en classe d'accueil. À la lumière des éléments théoriques présentés dans le chapitre 2, nous sommes maintenant en mesure de formuler une question de recherche plus précise, mais qui demeure assez ouverte, de par la nature exploratoire de notre recherche : *Quelles sont les dynamiques intra-personnelles et interpersonnelles des modes d'agir-parler-penser qui se manifestent lors de l'enseignement-apprentissage de contenus mathématiques liés aux fractions dans un contexte de francisation chez des élèves du secondaire, au Québec?*

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Nous décrirons dans ce chapitre la méthodologie utilisée ainsi que le déroulement global de notre cueillette de données, ainsi que certains détails concernant le contexte de réalisation de la collecte. De plus, nous présentons la tâche utilisée, ses avantages, ses limites et pourquoi nous l'avons choisie.

3.1 Présentation globale de la méthodologie

Pour répondre à la question de recherche présentée dans la section précédente, nous avons choisi de procéder à l'analyse qualitative d'une séance dans une classe de mathématiques avec des élèves en francisation. Des formulaires de consentement ont été signés par les gardiens légaux des élèves impliqués dans la recherche.

Le contenu de la séance a été suggéré à l'enseignante par la chercheuse : il s'agissait d'une séquence de tâches de pliage de papier visant à travailler les fractions. Le choix de la séquence de tâches est discuté plus en détails dans la section 3.3. Un travail d'analyse préalable de la séquence a été réalisée, au cours duquel nous avons anticipé des façons pour le sujet de prendre en compte l'objet mathématique en jeu. Au cours de cette analyse préalable, nous nous appuyons sur la littérature existante pour nommer des modes d'agir-parler-penser qui pourraient se manifester pendant l'expérimentation. Les différents modes d'agir-parler-penser qui sont alors mis en évidence agiront comme des indicateurs pour permettre le travail d'analyse *a posteriori* : l'identification des modes d'agir-parler-penser mis en œuvre et l'analyse de leur dynamique. Ces modes d'APP anticipés sont décrits dans le chapitre 4.

La séance a été entièrement filmée à l'aide de cinq caméras équipées de microphones disposées dans la classe. La chercheuse a aussi pris quelques notes pendant le déroulement de la séance. Après la collecte de données, les vidéos ont été visionnés et des transcriptions des dialogues ont été réalisées pour les passages jugés pertinents par la chercheuse. Ainsi, avec les extraits vidéos et les transcriptions des extraits, les modes d'APP anticipés ont été identifiés, et d'autres modes d'APP, émergents, ont été relevés. Cette description analytique du déroulement de la séance, présentée dans le chapitre 5, nous permettra de dégager et de documenter d'intéressantes dynamiques intra-personnelles et interpersonnelles.

Nous avons choisi de mener notre recherche de cette façon – par une analyse préalable des modes d'APP qui viendront nourrir nos observations, puis une description des modes d'APP réels qui ont été exhibés – car cela nous semble être une bonne voie pour une exploitation optimale des modes d'APP comme outils d'analyse, et ainsi pour répondre à notre question de recherche. De plus, cela s'inscrit en continuité avec les travaux sur lesquels nous nous sommes inspirés pour notre cadre d'analyse (Barrera-Cunin, Bulf et Venant (2016); Bulf, Mathé et Mithalal (2014)).

3.2 Le contexte de réalisation de la collecte de données

La collecte de données s'est déroulée dans une classe de francisation du secondaire. Dans l'école concernée, les élèves en francisation sont classés selon leur niveau de français pour leurs cours de français, mais en plus, sont classés selon leur niveau de mathématiques pour les cours de mathématiques. Ainsi, il est possible que les groupes de français et les groupes de mathématiques diffèrent. Cela a pour conséquence d'offrir une certaine homogénéité dans les connaissances et les habiletés mathématiques, mais qui peut être accompagnée d'une plus grande diversité dans l'aisance à s'exprimer et à comprendre la langue de scolarisation. La classe que nous avons visitée est une classe d'élèves en âge d'être au secondaire dont le niveau de mathématiques est estimé par l'enseignante comme étant environ équivalent à celui d'élèves au troisième cycle du primaire. Il a paru approprié de réaliser avec ces élèves une activité travaillant les fractions.

Notre collecte a donc eu lieu auprès d'un groupe constitué de huit élèves dont les origines ethniques sont variées. Cinq de ces élèves partageaient le même pays d'origine (la Syrie) et la même langue première. Ainsi, certains échanges ont eu lieu entre les élèves dans leur langue maternelle. Nous n'avons pas analysé ces interactions.

La séance avait lieu pendant une période de cours de 75 minutes. Quelques minutes ont été consacrées à la prise de présence et à la collecte des formulaires de consentement (envoyés plus tôt chez les parents des élèves). Ainsi, la séance filmée et analysée a plutôt une durée d'environ 65 minutes.

La séance a eu lieu en avril, ce qui signifie que les élèves et l'enseignante se connaissaient bien. Lorsqu'interrogée par la chercheuse, l'enseignante décrit les pratiques pédagogiques et l'organisation générale de la classe habituellement : même s'il arrive qu'elle enseigne à tout le groupe de façon magistrale ou qu'elle anime tout le groupe avec un petit quiz, une partie majoritaire du temps de classe est consacré au travail dans des cahiers individuels ou en utilisant l'application *Netmaths* pour *iPad*.

Avant la séance observée, la chercheuse était venue visiter la classe pour se présenter aux élèves et leur remettre un formulaire de consentement. Aucune autre préparation n'a été faite avec les élèves en lien avec la recherche.

Notons aussi qu’en plus de l’enseignante, la chercheuse était présente dans la salle de classe au moment de la séance. Bien qu’il était prévu que la chercheuse soit seulement observatrice, dans les faits, elle a participé aux échanges avec les élèves.

3.3 La séquence de tâches prévue

La séquence de tâches que nous avons choisie pour réaliser notre collecte de données est fortement inspirée de celle mentionnée par Louise Poirier dans son article de 1997, qui provient initialement de Scott (1981). Notre version est disponible en annexe A, telle qu’elle a été transmise à l’enseignante quelques semaines avant la séance analysée. Cette séquence met en jeu des tâches de pliage et traite surtout de la conception partie/tout de la fraction. D’abord, on remet à chaque élève une bande de papier rectangulaire et on lui demande de la plier en deux parties égales, puis de nommer ce que représente chacune des deux parties (la demie de la bande). Par la suite, on lui demande de faire la même chose, mais cette fois en pliant la bande de papier quatre en parties égales puis, successivement, en huit, trois, six, cinq et neuf parties égales. À chaque fois, on discute avec les élèves des stratégies de pliage et de ce que représentent les parties obtenues. Ensuite, il est prévu de demander à l’élève s’il serait possible de plier une bande en douze parties égales et comment y arriver (sans qu’ils procèdent réellement au pliage). La prochaine tâche dans la séquence consiste à placer les bandes de papier en ordre croissant de grandeur des parties obtenues par les pliages. On discute ensuite en questionnant les élèves sur l’existence d’une règle pour faire le classement et sur l’influence de la grandeur des bandes de papier sur le classement.

Nous avons choisi cette séquence pour différentes raisons. D’abord, la conception partie/tout de la fraction est souvent la première à laquelle les élèves sont exposés. Toutefois, une des difficultés par rapport à ce sens de la fraction est qu’il requiert de procéder à un partage exhaustif et égal du tout pour pouvoir obtenir un nombre de parties qui équivaut au dénominateur. (Houle, 2016) Or, ce sont exactement ces éléments qui sont demandés à l'élève, et donc qui sont mis de l'avant, lors des tâches de pliage : séparer la bande en un nombre donné de parties, qui sont toutes égales et qui, ensemble, équivalent à toute la bande de papier. Plus encore, selon Wayne R. Scott (1981), les tâches de pliage de bandes de papier en des parties égales permettent aux apprenants de progresser dans leur compréhension des fractions et des opérations sur les fractions. Notamment, ces tâches auraient les avantages suivants :

- L'unité est directement perceptible et la relation entre la partie et l'unité est directe
- La comparaison et l'ordonnancement de fractions peuvent être faites facilement en raison de la perception directe de la taille des fractions
- Dans le cas des additions et des soustractions, le dénominateur commun est accessible visuellement
- On peut facilement repérer et produire des fractions équivalentes
- Il est évident que le choix de ce qui constitue l'unité est un choix arbitraire
- Les quatre opérations arithmétiques élémentaires peuvent toutes être représentées en utilisant des pliages de bande de papier
- Il est plus facile de travailler avec un tout continu linéaire et ses fractions qu'avec un modèle qui utilise l'aire

Toutefois, la tâche de pliage de bandes de papiers compte aussi certaines limites. Notamment, le travail de la notion de fraction n'est pas intrinsèquement lié à la tâche elle-même. En effet, on pourrait aussi utiliser cette tâche dans un contexte de travail sur la décomposition de nombres entiers en facteurs premiers, par exemple. C'est donc dire que la tâche n'est pas spécifique à la connaissance visée. De plus, la séquence de tâches présentée ne permet pas de travailler facilement des interprétations différentes du sens partie/tout de la fraction, ni les fractions impropres.

Malgré ces limites, nous avons choisi d'utiliser cette séquence de tâches de pliage de bandes de papier car elle permet néanmoins de familiariser les élèves avec des raisonnements pertinents lorsqu'on travaille avec les fractions, comme le raisonnement multiplicatif et le partitionnement exhaustif en parties de même mesure, ainsi que d'offrir une représentation concrète des fractions pouvant être réutilisée par la suite (les bandes de papier pliées). En outre, la simplicité de la consigne nous apparaît appropriée dans le contexte de langue seconde et permet aux élèves de se mettre rapidement en action. Enfin, il était pratique pour nous d'utiliser une tâche qui avait déjà été expérimentée par Poirier (1997) et par Scott (1981), étant donné que les expériences et les analyses qu'ils partagent ont pu nourrir notre propre analyse préalable.

Il convient de mentionner que Louise Poirier (1997) a utilisé cette tâche dans le cadre d'un projet de recherche qui se déroulait sur toute une année scolaire dans une classe d'accueil montréalaise en 1995. Le contexte est assez similaire à celui de la présente recherche : il s'agit d'élèves d'origines ethniques et de langues maternelles variées qui se côtoient dans une classe d'accueil. Notons quand même que les élèves avec qui Poirier travaillait étaient âgés de 9 à 12 ans, donc plus jeunes que ceux rencontrés pour notre recherche. Scott, quant à lui, présente dans son article de 1985 des considérations théoriques par rapport à la tâche, mais ne mentionne pas dans quel contexte il a déjà expérimenté cette tâche en classe, s'il l'a fait.

Comme il le sera présenté dans les résultats, la séquence de tâches qui a été réalisée lors de la séance que nous avons examinée diffère de celle qui avait été prévue. L'enseignante a pris des initiatives dans le feu de l'action, certaines tâches ont été modifiés, d'autres ont été omises, et d'autres ont été ajoutées. Notre analyse porte sur ce qui s'est passé réellement, et non sur ce qui était prévu.

CHAPITRE IV

ANALYSE PRÉALABLE DES MODES D'AGIR-PARLER-PENSER

La séquence de tâches qui a été envoyée à l'enseignante[14] est une adaptation de celle utilisée par Poirier (1997) et Scott (1981). Nous avons utilisé le concept des modes d'agir-parler-penser (modes d'APP) mentionné dans notre cadre théorique (Barrera-Cunin, Bulf et Venant (2016); Bulf, Mathé et Mithalal (2014)). Toutefois, dans le but de les utiliser comme outil d'analyse afin de décrire les dynamiques présentes dans la salle de classe, il s'agit d'une version « opérationnelle » dans laquelle on considère chaque mode d'APP comme un « bloc » à trois volets qui ont tous la même importance : les manières d'agir, les manières de parler et les manières de penser. Rappelons quand même que les manières de penser ne peuvent pas être observées directement et sont ainsi inférées à partir des éléments observables et accessibles comme les manières de parler et d'agir.

Ainsi, pour chaque tâche prévue dans la séquence et réalisée par les élèves, nous présenterons les modes d'APP qui ont été anticipés. Il est important de préciser ici l'intention derrière notre choix de structurer les modes d'APP par tâche. En effet, tel que décrit dans notre cadre théorique, le mode d'agir-parler-penser est une unité d'analyse qui permet de rendre compte de comment un élève appréhende un concept ou un objet mathématique. On pourrait dire que l'élève « fréquente » un objet, ou qu'il

[14] Disponible en annexe A

est en contact avec un objet, et que le mode d'APP nous permet de documenter cette fréquentation ou ce contact. Au cours de la séquence, et même, au cours d'une même tâche, il est possible que l'élève fréquente plusieurs objets ou relations. Il peut s'agir des objets que la tâche prévoyait travailler, ou encore d'objets ou de relations qui sont mobilisés de façon inattendue. De même, il est aussi possible qu'un même objet mathématique soit fréquenté par l'élève dans différentes tâches, et même qu'une ou plusieurs dimensions des modes d'APP se ressemblent à travers les tâches. Toutefois, nous sommes d'avis qu'il y aura inévitablement des nuances pour au moins une des trois dimensions (fort probablement les façons d'agir, et potentiellement aussi les façons de parler). Plutôt que de généraliser les descriptions des modes d'APP abordant un même objet mathématique ou une même relation, nous avons choisi de conserver un cisaillement fin des modes d'APP et de les présenter par tâche. Ainsi, une démarche similaire pour le pliage en quatre parties égales et en huit parties égales sera associée à deux modes d'APP différents : un pour chaque pliage.

Pour nourrir notre analyse préalable et notre description des modes d'APP anticipés, nous utilisons à la fois les procédures « correctes » suggérées par Scott (1981), les propos d'élèves rapportés par Poirier (1997) ainsi que nos propres réflexions et expériences en lien avec les tâches de pliage. Notons quand même que les manières d'agir et de parler qui sont décrites sont des exemples, mais ne représentent pas une liste exhaustive de tous les éléments qui pourraient être associés à ce mode d'agir-parler-penser.

Dans le but de faciliter la lecture des analyses à venir, nous avons attribué des codes alphanumériques aux tâches, de même qu'aux modes d'agir-parler-penser (APP) que nous décrivons. Le « C » présent au début du code de la tâche indique qu'il s'agit d'une tâche suggérée par la chercheuse et présente dans la séquence initiale. La deuxième lettre du code de la tâche a été attribuée en ordre alphabétique en suivant l'ordre dans lequel les tâches ont été réalisées par les élèves, dans la mesure du possible considérant que ce n'est pas toujours un ordre linéaire. Enfin, les chiffres ont été ajoutés pour distinguer les différents modes d'agir-parler-penser associés à une tâche.

Nous présentons dans le présent chapitre les modes d'agir-parler-penser qui ont été dégagés avant le déroulement de la séance. Nous constaterons pendant l'analyse descriptive de la séance que certains modes d'APP qui se sont manifestés n'avaient pas été anticipés. De plus, certaines tâches ont été ajoutées par l'enseignante dans l'action, et donc les modes d'APP en lien avec ces tâches n'avaient pas pu être dégagés d'avance. Nous qualifierons tous ces nouveaux modes d'APP de modes d'APP émergents et les présenterons à la suite de l'analyse. Enfin, nous regrouperons les descriptions des modes d'APP anticipés et des modes d'APP émergents dans un tableau-synthèse dans la section 3 du chapitre 5.

4.1 Tâche CA : Plier une bande de papier en deux parties égales et nommer chacune des parties

De façon générale, les modes d'APP anticipés pour cette tâche correspondent au comportement attendu (ou « correct »).

4.1.1 Mode d'APP CA1

Le premier mode d'APP relevé, qui semble évident, est associé à la fraction comme partie d'un tout continu. Les manières d'agir de l'élève sont alors de plier la bande en deux parties égales en alignant les deux extrémités, tel que demandé, et d'écrire $\frac{1}{2}$ sur chaque partie. Les manières de parler sont ou se rapprochent de « Il y a deux parties égales » ou « Chaque partie représente la demie de la bande ». On associe alors comme manières de penser que pour l'élève, la bande de papier est le tout, l'unité, et que lorsqu'il y a deux parties, chacune est la demie du tout. En utilisant la notation introduite par Behr *et al.* (1992), on dirait que chaque partie est $\frac{1}{2}(1 - bande)$. De plus, le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction. C'est principalement le sens de la fraction partie/tout qui est cohérent avec ce mode d'APP. Toutefois, un élève qui adopte comme manière de penser qu'il faut deux fois la demie de la bande pour retrouver la bande initiale serait davantage aligné avec le sens mesure.

4.1.2 Mode d'APP CA2

Le deuxième mode d'APP anticipé est similaire au premier (CA1). Les actions posées par l'élève sont les mêmes : il plie la bande en deux parties égales en alignant les deux extrémités, il inscrit $\frac{1}{2}$ sur chaque partie. Les manières de parler, toutefois, peuvent différer légèrement. En plus de « Il y a deux parties égales. », on pourrait entendre des propos comme « Chaque partie est une demi-bande. » ou « Il y a deux demi-bandes. » Bien que le tout soit encore le même, c'est-à-dire la bande de papier, l'élève considère dans ce cas la sous-unité qu'est la demi-bande. Ainsi, les manières de penser de l'élève incluent que chaque partie est $1(\frac{1}{2} - bande)$. Autrement dit, lorsqu'il y a deux parties égales, chacune est un demi-tout. À nouveau, le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction. Cette fois, le mode d'APP est davantage cohérent avec le sens mesure de la fraction, étant donné qu'on considère une nouvelle sous-unité qui est issue du fractionnement du tout initial, et qu'on utilise, en quelque sorte, cette sous-unité comme une unité de mesure.

4.2 Tâche CB : Plier une bande de papier en quatre parties égales

4.2.1 Mode d'APP CB1

Le premier mode d'APP dégagé correspond à une vision multiplicative entre les étapes du pliage. L'élève qui exhibe ce mode utilise des verbalisations comme « C'est comme plier chaque partie en deux. », « On a deux fois plus de parties. » ou « Deux fois deux donne quatre. ». En ce qui concerne les actions, il s'agit de plier la bande en deux parties égales une première fois, puis de la plier en deux à nouveau, dans le même sens, et sans avoir déplié avant. La manière de penser sous-jacente est que le nombre de parties double si on plie la bande une fois de plus. Notamment, il est possible que l'élève pense qu'en pliant en deux une bande déjà pliée, on sépare chaque section existante en deux, et donc on double le nombre total de sections. Le deuxième pliage en deux agit comme le premier, mais sur chaque section comme une nouvelle sous-unité. La notation de Behr *et al.* (1992) nous permet de représenter la manière de penser ainsi : la bande initiale est $2(\frac{1}{2} - bande)$ après un premier pliage, et $4\left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - bande)\right)$, soit $4\left(\frac{1}{4} - bande\right)$, après le deuxième pliage. Une réflexion sur les grandeurs pourrait aussi émerger, dans laquelle l'élève remarque que si on plie en deux une fois de plus, chacune des parties aura la moitié de la longueur qu'elle avait précédemment. Toutefois, nous n'incluons pas cette réflexion sur les grandeurs dans notre description du mode d'APP CB1, mais nous gardons en tête que le contexte pourrait y être propice.

4.2.2 Mode d'APP CB2

Un deuxième mode d'APP anticipé est celui qui concerne la relation additive entre les différentes étapes du pliage. Pour l'élève qui exhibe ce mode d'APP, le raisonnement est que le nombre de parties augmente de deux si on plie la bande en deux une deuxième fois. Dans l'action, il n'y a pas de différence entre la procédure mise en place lors d'une vision multiplicative du pliage : pour obtenir quatre parties égales, on plie d'abord en deux, puis encore en deux sans avoir déplié. L'élève qui procède ainsi obtiendra le nombre de parties égales désiré, comme avec le mode d'APP précédent (CB1). Toutefois, les manières de parler qui accompagne les actions pourraient indiquer que les manières de penser sous-jacentes sont davantage additives que multiplicatives. Des exemples de telles verbalisations seraient : « Il y a deux parties de plus. » ou même « Deux plus deux donne quatre ». L'élève qui met de l'avant le mode d'APP CB2 n'est pas en contact avec le concept mathématique de la fraction, mais plutôt avec la démarche de pliage et sa relation avec le nombre de parties obtenues.

4.2.3 Mode d'APP CB3

Il est possible aussi que l'élève qui doive plier la bande en quatre parties égales le fasse en s'appuyant sur une estimation de la longueur des parties désirées. Les gestes et les actions de l'élève consisteraient alors à estimer la longueur de la partie qu'on obtiendrait avec un pliage réussi (c'est-à-dire, la longueur qui entre quatre fois dans la longueur de la bande de papier) puis à réaliser le pliage d'une ou l'autre des deux façons suivantes : (1) plier une première fois une section de la longueur estimée, puis reproduire cette longueur en pliant la bande en accordéon jusqu'à ce que la bande soit épuisée, c'est-à-dire qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur, ou (2) plier une première fois une section de la longueur estimée, puis reproduire cette longueur en pliant la bande en l'enroulant sur elle-même jusqu'à ce que la bande de papier soit épuisée. Les manières de penser qui sous-tendent de telles procédures consistent d'abord à savoir que les quatre parties de bande auront la même longueur, et ensuite, qu'il est possible d'anticiper cette longueur. En utilisant la notation de Behr *et al.* (1992), on dirait qu'une bande complète compte $4\left(\frac{1}{4} - bande\right)$ et qu'ainsi, chacune des parties représente $1\left(\frac{1}{4} - bande\right)$. L'interprétation mesure de la fraction est cohérente avec ce mode d'APP, en ce sens qu'on cherche à anticiper la longueur qui entre quatre fois dans le tout, et donc une unité de mesure qui correspond à $1\left(\frac{1}{4} - bande\right)$. Néanmoins, une interprétation partie/tout serait aussi envisageable, dans l'optique où un élève pourrait s'imaginer une partition exhaustive du tout continu en quatre parties de même longueur et utiliser cette longueur comme point de départ de sa procédure de pliage par estimation. Dans les deux cas, nous anticipons comme verbalisations possibles des phrases comme « Ça, ça rentre quatre fois dans ma bande. » ou « Ça va être la longueur de chaque partie. »

Les démarches de pliage qui s'appuient sur une estimation de la longueur désirée risquent de produire un excès ou un manque à la fin du pliage, nous avons choisi de distinguer les différentes gestions de l'excès ou du manque. Nous définissons donc des variantes du mode d'APP CB3 : elles ont toutes en commun les façons de parler, de penser et d'agir mentionnées précédemment, mais on y ajoute des distinctions en lien avec la réaction à la présence d'un excès ou d'un manque.

L'élève qui se retrouve avec un excès ou un manque pourrait ne pas le réaliser ou ne pas du tout s'en préoccuper. Ce sera le mode d'APP **CB3.1**. Aucune action particulière ne serait notable, c'est plutôt l'absence d'action ou de réaction qui traduirait ce mode d'APP. Une façon de parler associée à ce mode serait de dire « Ce n'est pas grave. ». Le raisonnement implicite qu'on peut tenter de deviner est que le processus de pliage est assez fiable et que cela suffit à être satisfait du résultat. En ce qui concerne l'objet mathématique de la fraction « un quart », il est évacué des façons de penser, de parler et d'agir de l'élève. C'est aussi le cas du nombre de parties obtenues et de la grandeur des parties : ils n'ont pas d'importance une fois que l'action d'effectuer le pliage est réalisée.

Dans le cas d'un excès, l'élève pourrait le considérer comme une partie. Dans ce cas, ses gestes pourraient être de pointer chacune des parties prévues en comptant (à voix haute ou dans sa tête) et continuer même pour l'excès. Il dirait, par exemple, « Il y a 5 parties ». Ce mode d'APP sera **CB3.2**, et on devine que l'élève pense que toutes les parties comptent, peu importe leur longueur. Il ne s'agit pas pour l'élève de porter un jugement sur la réussite ou l'échec de sa procédure de pliage, ni sur la fraction représentée par chacune des parties, mais seulement de considérer que chaque partie compte.

Une autre situation possible est que l'élève constate soit un excès ou un manque, et blâme l'approximation. Nous appellerons ce mode d'APP **CB3.3**. La façon de penser que l'élève met de l'avant est que le processus d'approximation en est un qui n'est pas précis, et qu'il est attendu que certaines incertitudes se glissent. L'excès, ou le manque, qui en découle n'est pas considéré comme problématique. On peut aussi en déduire que pour l'élève, il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en quatre parties égales : cela peut être parce qu'il n'a pas en tête le lien entre le pliage et les fractions représentées ou encore parce qu'il ne croit pas qu'une représentation précise soit possible avec le matériel de manipulation utilisé. La différence avec le mode d'APP CB3.1 est que l'élève ici est conscient de la situation et la justifie par l'incertitude de l'approximation, plutôt que de seulement l'ignorer. On peut détecter cette nuance avec des manières de parler comme « C'est à peu près ça. » ou « Ça donne environ 4 parties. ». Les actions associées pourraient être de hausser les épaules ou de balayer de la main au-dessus de la fin de la bande, pour dire que l'excès ou le manque est négligeable.

Devant la présence d'un excès ou d'un manque, l'élève peut aussi choisir de recommencer le pliage qu'il essaie de réaliser. Il pourrait alors dire, par exemple « Ce n'est pas ça. » ou « Attends, je vais réessayer. ». Les actions cohérentes avec ce mode d'APP, le mode **CB3.4**, seraient alors de tenter de lisser la bande pour effacer les plis, puis la replier ou encore de choisir une bande vierge et de tenter un nouveau pliage. La manière de penser la fraction sous-jacente ici est que si le résultat obtenu n'est pas une partition exhaustive en quatre parties égales, alors c'est incorrect et on doit recommencer. On pourrait reformuler en disant que s'il y a un excès ou un manque, c'est que chaque partie ne correspond pas effectivement à un quart de la bande de papier, et alors il faut reprendre le pliage.

Dans le cas d'un excès, il est aussi possible qu'un élève décide de se débarrasser de l'excès. Le raisonnement de l'élève associé à cela est de considérer que si cet excès n'était pas présent, l'objectif du nombre de parties égales serait atteint, alors la solution est de supprimer la partie de trop. L'élève ne s'inquiète pas du fait qu'il modifie l'unité de référence (la bande de papier) et priorise le nombre de parties et l'égalité des parties. En termes de fraction, on perçoit que la conservation du tout n'est pas importante pour l'élève : en bout de ligne, il veut que chaque partie représente le quart de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'au début. Les actions concrètes consisteraient à couper l'excès avec des ciseaux, le déchirer ou encore le cacher en le repliant derrière la bande. Des manières de parler associées à ce mode d'APP pourraient être « Comme ça, ça va. » ou « Sans ça, c'est ok. ». Nous nommerons ce mode d'APP **CB3.5**.

4.2.4 Mode d'APP CB4

Le quatrième, et dernier, mode d'agir-parler-penser que nous avons anticipé consiste à procéder à la vérification du résultat par comptage. Il s'agit d'un mode d'APP qui n'est pas indépendant des autres, car, par sa nature, il doit survenir après une première tentative de pliage. Il est donc nécessairement manifesté après au moins un des trois autres modes d'APP associés à la tâche CB. Toutefois, même si les manières d'agir, de parler et de penser la fraction dont il est question ici ne sont pas mises de l'avant pendant le pliage en tant que tel, elles sont reliées à la tâche quand même. Pour cette raison, nous avons choisi de considérer ce mode d'APP à part entière, tout en étant conscients qu'il sera obligatoirement en interaction avec au moins un des autres modes relevés plus haut. De la même manière, les variantes du mode CB3 décrites ci-haut vont être exhibées après la vérification. Cette dynamique entre les modes d'APP n'est pas inattendue. Ainsi, l'élève qui mobilise le mode d'APP CB4 est un élève qui a réalisé un pliage et qui déplie sa bande, puis compte le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Ceci peut se faire à haute voix, en récitant la comptine des nombres, ou dans sa tête. Différents gestes peuvent indiquer un comptage silencieux : le doigt qui pointe successivement chacune de parties, le mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier, ou encore le traçage d'un trait de crayon sur chaque partie. Les façons de parler seraient alors le comptage à voix haute, l'exclamation du nombre de parties (« Il y en a quatre! ») ou une affirmation à voix haute pour mentionner si le pliage est réussi ou non (« C'est ok. » ou « Ça ne marche pas. », par exemple). La manière de penser impliquée est que le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant et que si c'est le cas, le pliage est valide. En termes de fraction, l'attention est entièrement portée au nombre de parties obtenues dans le tout après le partage. En d'autres mots, pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{4}$, il faut, voire même parfois il suffit, qu'il y ait 4 parties dans le tout partagé.

4.3 Tâche CC : Plier une bande en trois parties égales

4.3.1 Mode d'APP CC1

Nous anticipons que les élèves pourraient procéder de la façon suivante pour effectuer le pliage en trois parties égales : d'abord, ramener vers l'intérieur les deux extrémités de la bande, avec une par-dessus l'autre ; s'assurer que les trois « étages » ont la même longueur, et appuyer pour compléter les plis. Une autre façon de faire serait de former une forme qui ressemble à un accordéon avec la bande, sans former les plis complètement, puis de s'assurer que les trois « étages » ont la même longueur avant d'appuyer pour finaliser les plis. Dans les deux cas, il s'agit de former les étages approximativement en les superposant sans finaliser les plis, d'ajuster les longueurs des étages en bougeant les extrémités pour bien les aligner, puis de former les plis. On associe à ces manières d'agir la façon de penser de la partition exhaustive : si j'utilise toute la bande pour former les trois étages, et que je m'assure que les trois étages ont la même longueur en les comparant visuellement en simultanée, alors j'obtiendrai trois parties égales. Chaque partie représente alors $\frac{1}{3}(1 - bande)$: la bande représente l'unité et elle a été séparée en trois parties de même mesure. L'interprétation partie/tout de la fraction serait cohérente avec ce mode d'APP. Quant à elles, les façons de parler possibles que nous avons anticipées consistent à décrire les manipulations en insistant sur l'égalité des étages. On pourrait donc entendre un élève dire, notamment, « Il faut que ça soit pile dessus », « Il faut que ça soit égal. », « Je pousse le bout jusqu'au coin avant de peser. », ou encore « J'ajuste un peu et ensuite je plie ».

4.3.2 Mode d'APP CC2

Comme pour la tâche précédente (plier une bande en quatre parties égales), il est aussi possible que les élèves qui veulent plier la bande de papier en trois parties égales s'y prennent en s'appuyant sur l'estimation de la longueur des parties désirées. Cette stratégie consistera à estimer la longueur qui correspondrait à une des sections lorsque le pliage serait fait, puis à reproduire cette longueur jusqu'à ce qu'il épuise la longueur de la bande de papier. L'élève peut reproduire la longueur en formant la forme d'un accordéon ou en enroulant la bande sur elle-même au fur et à mesure qu'il ajoute des plis. Les façons de penser cohérentes avec ces actions sont que l'élève considère que les trois parties doivent être de la même longueur, et donc que cette longueur peut entrer exactement à trois reprises dans la bande totale. En utilisant la notation de Behr *et al.* (1992), on pourrait dire que la bande de papier constitue $3\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ et que chacune des sections de la bande pliée représente $1\left(\frac{1}{3} - bande\right)$. Dans ce contexte, on pourrait considérer la longueur qui correspond à $1\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ comme une unité de mesure et ce serait l'interprétation mesure de la fraction qui serait exploitée dans ce mode d'APP. Néanmoins, on pourrait aussi considérer que l'interprétation partie/tout de la fraction est cohérente avec ce mode d'APP, en ce sens où l'élève qui cherche à approximer la mesure de $1\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ pourrait procéder en séparant mentalement la bande en trois parties de même longueur et ensuite se fier à la longueur d'une de ces parties comme longueur de référence pour son pliage. Quelques exemples de verbalisations anticipées lorsqu'un élève met en place la stratégie de pliage par estimation de la longueur des parties désirées seraient « Les trois parties vont mesurer à peu près cela. », « Ça, ça rentre trois fois dans ma bande. » ou « Ça va être la longueur de chaque partie. ».

Cette stratégie peut résulter en un excès ou un manque, et en différentes réactions face à cet excès ou ce manque. Ainsi, comme nous l'avons fait précédemment, nous distinguons des variantes du mode d'APP CC2 selon les gestions de l'excès ou du manque. Les manières d'agir, de parler et de penser que nous avons relevées pour chacune de ces variantes étant très similaires à celle décrites pour le mode d'APP CB3 (pliage en quatre parties égales par estimation de la longueur des parties désirées), nous ne les répéterons pas ici. Elles se retrouvent toutefois dans le tableau dans la section 3 du chapitre 5. Nous rappelons quand même les différentes approches et les codes que nous avons donnés aux variantes du mode d'APP CC2 :

- Ne pas constater la présence d'un excès ou d'un manque ou l'ignorer (mode d'APP **CC2.1**)
- Considérer que l'excès constitue une partie valide (mode d'APP **CC2.2**)
- Attribuer la présence d'un excès ou d'un manque sur la nature approximative de la stratégie mise en place et considérer que c'est négligeable (mode d'APP **CC2.3**)
- Être insatisfait par son pliage en raison de la présence d'un excès ou d'un manque et recommencer (mode d'APP **CC2.4**)
- Lorsqu'il y a un excès, le supprimer en le coupant, le déchirant ou le cachant (mode d'APP **CC2.5**)

4.3.3 Mode d'APP CC3 : Vérification par comptage

Le prochain mode d'APP que nous dégageons n'est pas directement associé à la réalisation de la tâche de pliage en tant que telle, mais constitue quand même un trio d'agir-parler-penser qui risque de se manifester dans le contexte de cette tâche car il est associé à la vérification de la validité du pliage. Il s'agit pour l'élève de vérifier que le nombre de parties qu'il a obtenu est celui que l'enseignante avait demandé. Les gestes qui traduisent cette vérification sont variés et peuvent être discrets : après avoir déplié la bande de papier, l'élève pourrait pointer du doigt chacune des parties tour à tour, faire un léger mouvement de hochement de tête de façon saccadée pendant que ses yeux balaient la bande de papier, ou encore tracer un trait de crayon sur chacune des parties. Les manières de parler risquent de nous informer davantage sur la vérification de l'élève : notamment, il est possible qu'il compte à haute voix, qu'il énonce le nombre de parties, qu'il affirme que « C'est ok. » ou encore que « Ça ne marche pas ». La manière de penser qui est associée à la vérification par comptage est que si le nombre de parties qui ont été comptées est le même que le nombre de parties qui a été demandé par l'enseignante, alors le processus de pliage est valide. Notons au passage que la taille des parties n'a pas d'importance pour l'élève dans cette façon de penser, c'est seulement le nombre de parties obtenues qui importe : pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{3}$, il est nécessaire (et suffisant) qu'il y ait 3 parties une fois le tout plié.

4.3.4 Mode d'APP CC4 : Vérification visuelle de la longueur des parties

Il s'agit ici d'un autre mode d'APP axé sur la validation du pliage par l'élève. Cette fois, l'attention est portée sur la longueur des parties créées par le pliage. L'élève s'adonne à une vérification visuelle de cette dernière. Il est difficile d'associer des gestes à ce processus de vérification : il est fort probable que l'élève qui le met en œuvre ne fasse que balayer la bande de papier des yeux en la dépliant. Toutefois, certaines verbalisations nous indiqueront que l'élève a effectué une telle vérification visuelle. Plus précisément, il pourrait exprimer sa satisfaction, par exemple « J'ai réussi, c'est égal. » ou sa déception, par exemple « Ça, c'est plus petit. » ou « C'est pas égal. ». On infère que l'élève pense qu'une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs et que pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Ceci s'inscrit dans une perception de la fraction qui accorde une importance capitale à l'égalité des parties. Cela serait notamment cohérent avec une interprétation partie/tout de la fraction.

4.4 Tâche CD : Plier une bande de papier en six parties égales

4.4.1 Mode d'APP CD1

Le premier mode d'APP anticipé pour cette tâche correspond à la relation multiplicative entre les étapes du pliage. La manière de penser associée à cette vision multiplicative est que le nombre de parties double lorsqu'on plie la bande en deux une fois de plus, parce que chaque section est une sous-unité qui est divisée à nouveau par le deuxième pliage. En utilisant la notation de Behr *et al.* (1992), on pourrait écrire qu'après un pliage en trois, la bande initiale correspond à $3(\frac{1}{3} - bande)$, puis, après le pliage en deux, à $6\left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{3} - bande)\right)$, soit $6\left(\frac{1}{6} - bande\right)$. Ainsi, la procédure mise en place par l'élève est de plier une bande en trois, puis, sans la déplier, la plier en deux. Une autre façon de faire serait de d'abord plier la bande en deux, puis en trois, sans l'avoir dépliée. Des verbalisations possibles sont « C'est comme plier chaque partie en deux », « On a deux fois plus de parties » ou « Trois fois deux donne six. » Il est possible que les élèves qui démontrent une compréhension multiplicative de la relation entre les étapes du pliage fassent aussi preuve d'une réflexion sur les grandeurs. Entre autres, on pourrait voit émerger des réflexions comme : si je plie en deux, chaque partie sera deux fois plus petite. Il est possible aussi que les élèves qui mettent de l'avant CD1 expriment plus explicitement une compréhension multiplicative liée aux fractions, comme « Le sixième est deux fois plus petit que le tiers. ». Nous demeurons conscientes que ces réflexions pourraient émerger, mais nous avons choisi de ne pas les inclure dans notre description du mode d'APP CD1 afin de la garder un peu plus large.

4.4.2 Mode d’APP CD2

Un autre mode d’APP que nous avons relevé est cohérent avec une vision additive de la relation entre les étapes du pliage. Nous reconnaissons que certains élèves perçoivent la tâche comme une tâche de pliage seulement. L’objet mathématique fréquenté par les élèves qui mettent de l’avant le mode d’APP CD2 que nous décrivons est la relation entre la démarche de pliage et le nombre de sections obtenues. L’élève qui exhibe le mode d’APP CD2 pense que le nombre de parties augmente de deux si on plie la bande en deux une fois de plus. Il est intéressant de noter que cette façon de penser, pour le pliage en 4, ne mène pas à un pliage erroné, mais que c’est le cas pour le pliage en 6. En effet, les manières d’agir correspondant à ce mode d’APP serait de plier la bande en deux à trois reprises, sans la déplier entre chaque fois (2+2+2 = 6). Toutefois, cela ne mène pas à une bande pliée en six parties, mais bien à une bande pliée en huit parties (2 x 2 x 2 = 8). Des exemples de phrases indiquant le raisonnement additif seraient « Je veux deux de plus donc je plie en deux une autre fois. » ou directement « Deux plus deux plus deux donne 6. ».

4.4.3 Mode d’APP CD3

Nous prévoyons aussi que certains élèves pourraient procéder au pliage en six parties égales en mettant de l’avant une stratégie basée sur l’estimation de la longueur des parties désirées. Cette procédure, et les façons de penser sur lesquelles elle s’appuie, est très similaire à ce que nous avons décrit pour le pliage en quatre parties égales basé sur l’estimation de la longueur des parties désirées (mode d’APP CB3). En effet, l’élève qui procède de cette façon devrait d’abord estimer la longueur qui correspondra à une partie lorsque le pliage serait terminé, puis à reproduire cette longueur (en pliant la bande comme un accordéon ou en enroulant la bande sur elle-même) jusqu’à ce que la bande soit épuisée. Il est implicite alors que pour l’élève, les six parties devront être de la même longueur, et ainsi que la longueur en question est celle qui entre six fois dans la bande totale. En reprenant la notation de Behr *et al.* (1992), on peut affirmer que l'élève conçoit qu'une bande complète représente $6\left(\frac{1}{6}-bande\right)$ et qu'ainsi, chacune des parties correspond à $1\left(\frac{1}{6}-bande\right)$. D'ailleurs, il est possible de concevoir cette longueur qui entre six fois dans la bande complète, et donc qui représente $1\left(\frac{1}{6}-bande\right)$, comme une unité de mesure. Ainsi, ce serait l'interprétation mesure de la fraction qui serait mobilisée. Par ailleurs, l'interprétation partie/tout de la fraction serait aussi cohérente avec la stratégie par estimation. En effet, l'élève pourrait d'abord mentalement séparer la bande en six parties de même longueur et utiliser la longueur d'un de ces parties comme longueur estimée pour son pliage. Des exemples de manières de parler cohérentes avec ces deux interprétations sont « Les six parties vont mesurer à peu près cela. », « Ça, ça rentre six fois dans ma bande. » ou « Ça va être la longueur de chaque partie. »

La procédure de pliage qui s'appuie sur une estimation de la longueur des parties désirées étant, justement, basée sur une approximation, il est fort possible que l'élève se retrouve avec un excès ou un manque à la fin. Nous avons anticipé différentes gestions de cet excès ou de ce manque, et les avons utilisées pour définir des variantes du mode d'APP CD3. En fait, les variantes anticipées pour la gestion de l'excès ou du manque sont très similaires à celles présentées pour le mode d'APP CB3 (pliage en quatre parties égales par estimation de la longueur des parties désirées). Pour cette raison, nous n'allons pas répéter les descriptions des manières d'agir, de parler et de penser. Nous rappellerons quand même les réactions que nous anticipons face à un excès ou à un manque :

- Ne pas reconnaître qu'il y a un excès ou un manque ou l'ignorer (mode d'APP **CD3.1**)
- Considérer que l'excès compte pour une partie valide (mode d'APP **CD3.2**)

- Blâmer la présence d'un excès ou d'un manque sur la nature approximative de la stratégie mise en place et considérer que c'est négligeable (mode d'APP **CD3.3**)
- Être insatisfait par son pliage en raison de la présence d'un excès ou d'un manque et recommencer (mode d'APP **CD3.4**)
- Lorsqu'il y a un excès, le supprimer en le coupant, le déchirant ou le cachant (mode d'APP **CD3.5**)

4.4.4 Mode d'APP CD4

La tâche qui est demandée aux élèves est de plier une bande en six parties égales. Les modes d'APP présentés jusqu'à présent pour cette tâche sont principalement associés à des façons d'aborder ou de réaliser la tâche. Toutefois, certains comportements et raisonnements sont aussi mis en place par l'élève pour valider qu'il a bien complété ce qui lui était demandé.

Ainsi, le mode d'APP dont il est question ici est celui que l'on constate lorsque l'élève effectue une vérification par comptage du nombre de parties obtenues après le pliage. Les actions de l'élève consistent alors à déplier la bande et à compter le nombre de sections de papier séparées par les traces de pliage. Il est possible alors que l'élève pointe du doigts les différentes parties successivement, qu'il hoche légèrement de la tête de façon saccadée pendant que ses yeux balaient la bande de papier, ou encore qu'il marque chaque section de la bande d'un trait avec son crayon pendant qu'il compte, à voix haute ou pas. Les paroles qu'on anticipe chez l'élève, autre que le comptage lui-même, sont d'affirmer le nombre de parties, par exemple « Il y a 6 parties. », et de mentionner si c'est acceptable ou non pour lui, par exemple « C'est ok. » ou « Ça ne marche pas. » La façon de penser associée à ce mode d'APP est que le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre de parties demandé par l'enseignant. Ainsi, si ces deux nombres sont égaux, la stratégie de pliage utilisée est valide. Ce critère de validité du pliage de la bande n'accorde de l'importance qu'au nombre de parties, et non à la longueur des parties. En termes de fractions, on pourrait dire que pour que chaque section de la bande pliée représenter la fraction $\frac{1}{6}$, il faut (et il suffit) qu'il y ait 6 parties. Au besoin, l'élève qui constate qu'il n'est pas satisfait à la suite d'une telle vérification pourra mobiliser à nouveau une des stratégies décrites dans les modes d'APP précédents.

4.5 Mode d'APP CD5

Toujours avec un objectif de validation de la démarche mise en place pour réaliser la tâche, il est possible que l'élève porte son attention à la longueur des sections créées. En effet, on demande à l'élève de plier la bande en six parties *égales*. Nous prévoyons que certains élèves procèderont, à la suite du pliage, à une vérification visuelle de la longueur des morceaux de cette égalité. La manière de penser associée à cette vérification est que pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur, et une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs. On infère que l'élève pense l'objet mathématique « fraction » en accordant une grande importance à l'égalité des parties d'un tout : pour que chaque partie représente un sixième, il faut que le tout soit composé de six parties équivalentes. Les gestes et les actions posées par les élèves lors d'une telle vérification sont très subtils, et risquent de se limiter à un balayage visuel des différentes parties de la bande de papier dépliée. Si l'élève est satisfait, il pourrait le mentionner (« C'est ok. »), mais il est aussi possible qu'il ne le dise pas et que sa validation visuelle de la longueur des morceaux ne soit pas perceptible. Si l'élève n'est pas satisfait, il y a de bonnes chances qu'il le mentionne, avec des phrases comme « Ça, c'est trop petit. » ou « C'est pas égal. », notamment.

4.6 Tâche CE : Plier une bande en huit parties égales

4.6.1 Mode d’APP CE1

Un premier mode d’agir-parler-penser que nous anticipons pour le pliage en huit parties égales est celui que nous pourrions qualifier de « visé » ou « désirable ». Nous le résumerons en disant qu’il correspond à une vision multiplicative de la relation entre les différentes étapes du pliage. La façon de penser est ainsi la suivante : lorsqu’on plie la bande en deux une fois de plus, le nombre de parties double. Ceci se manifeste dans les actions de l’élève par le fait de plier une bande en deux à trois reprises, sans la déplier entre chaque, afin d’obtenir huit parties. Après chaque pliage, les parties sont considérées comme des sous-unités qui sont toutes divisées en deux par le prochain pliage en deux. Ainsi, après un premier pliage en deux, la bande représente $2(\frac{1}{2} - bande)$. Puis, après un deuxième pliage en deux, elle représente $4\left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - bande)\right)$. Enfin, après le troisième pliage en deux, la bande correspond à $8\left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - bande))\right)$, soit $8(\frac{1}{8} - bande)$. Les verbalisations associées à ce raisonnement et ces actions consisteraient à verbaliser la multiplication, comme en disant « Deux fois deux fois deux donne huit » ou « Deux fois deux donne quatre, et quatre fois deux donne huit. », ou encore à mentionner l’effet multiplicatif de l’action de plier, comme en disant « Ça me fait deux fois plus (de parties). » ou encore « C’est comme plier chaque partie en deux. ».

4.6.2 Mode d’APP CE2

Il est possible que l’élève qui doive réaliser la tâche de plier une bande en huit parties égales adopte un point de vue multiplicatif en lien avec la longueur des sections de bande créées par le pliage. Les gestes posés pour effectuer le pliage lui-même seront les mêmes que ceux décrits précédemment : l’élève va plier la bande en deux une première fois, puis, sans la déplier, la pliera à nouveau en deux une deuxième, puis une troisième fois. Les façons de parler, toutefois, pourraient différer. Si l'élève dit des phrases comme « C'est comme plier chaque partie en deux. », « Les parties sont deux fois plus petites. » ou encore « Il faut que je plie encore pour avoir des parties deux fois plus petites. », cela nous indique que sa réflexion est davantage axée sur la longueur des parties. La manière de penser de l'élève est donc que la bande de papier (le tout) garde la même longueur, et donc que les huit parties égales devront être deux fois plus petites que les quatre parties égales. Ainsi, pour obtenir des parties deux fois plus petites, je dois plier en deux une fois de plus. Ainsi, dans la notation de Behr *et al.* (1992), la bande pliée en quatre parties égales correspond à $4\left(\frac{1}{4} - bande\right)$ et celle pliée en huit à $8\left(\frac{1}{8} - bande\right)$. Ainsi, puisque la longueur totale de la bande ne change pas, les parties représentant $\left(\frac{1}{8} - bande\right)$ sont deux fois plus nombreuses et deux fois plus petites que celle représentant $\left(\frac{1}{4} - bande\right)$. De façons plus générale, en termes de fraction, on pourrait dire que le huitième est deux fois plus petit que le quart, et que l'action de plier en deux permet de diviser la longueur de chaque section en deux.

4.6.3 Mode d'APP CE3

Il est aussi possible que l'élève aborde la tâche de pliage en huit parties égales en considérant que la relation entre les différentes étapes du pliage en est une additive. Pour cet élève, la façon de penser est que le nombre de parties augmente de deux lorsqu'on plie la bande en deux une fois de plus. Cela se traduira, dans les paroles de l'élève, par des phrases comme « J'ajoute (toujours) deux parties. » ou encore par une expression verbale de l'addition dont il serait question dans le cas du pliage en huit : « Deux plus deux plus deux plus deux donne huit. » ou « Quatre fois deux donne huit. ». Les façons d'agir cohérentes avec ce mode d'APP consistent à plier la bande en deux à quatre reprises, sans la déplier entre chaque. Dans le cas du pliage en huit, cette procédure ne mènera pas au nombre de parties attendues. Toutefois, nous anticipons que certains élèves mobilisent quand même ce mode d'APP étant donné qu'une procédure analogue ne pose pas problème dans le cas du pliage en quatre. Le mode d'APP CE3 se rapporte à la procédure de pliage et à son résultat en tant que tels, et il est difficile d'y associer des façons de penser la fraction sans tomber dans la spéculation.

4.6.4 Mode d'APP CE4

Nous anticipons que certains élèves pourraient utiliser une stratégie de pliage basée sur l'estimation de la longueur des parties désirées. Cette procédure, ainsi que les façons de parler et de penser, est similaire à ce qui a été décrit pour les modes d'APP analogues pour les tâches de pliage en 4, en 3 et en 6 (CB3, CC2 et CD3). Ainsi, nous nous contenterons de rappeler que, par sa nature approximative, cette procédure risque d'engendrer un excès ou un manque, et que l'élève peut gérer cela de différentes façons, selon nos anticipations. Chacune de ces façons a été associée à une variante du mode d'APP CE4 comme suit :

- **CE4.1** : Ne pas réaliser qu'il y a un excès ou un manque ou l'ignorer
- **CE4.2** : Compter la partie en excès comme une partie valide
- **CE4.3** : Attribuer la présence d'un excès ou d'un manque à la nature approximative de la procédure de pliage employée et considérer que c'est négligeable
- **CE4.4** : Juger que le pliage n'est pas valide en raison d'un excès ou d'un manque et le recommencer
- **CE4.5** : En cas de la présence d'un excès, le supprimer en le coupant, le déchirant ou le cachant

4.6.5 Mode d'APP CE5

Après avoir réalisé un pliage en tentant d'obtenir huit parties égales, nous prévoyons que les élèves pourraient chercher à vérifier la validité de leur pliage en comptant le nombre de parties obtenues. Les façons d'agir, de parler et de penser que nous anticipons et que nous associons à ce processus de validation sont similaires à celles décrites pour les modes d'APP CB4, CC3, CD4 (respectivement : vérification par comptage pour le pliage en quatre, trois et six parties égales).

4.6.6 Mode d'APP CE6

Une autre façon pour les élèves de valider leur pliage serait de s'attarder au critère de l'égalité des sections engendrées par le pliage. Ainsi, la vérification consisterait à une vérification visuelle de la longueur des parties. Encore une fois, ce mode d'APP se rapproche grandement de celui de la vérification visuelle de la longueur des parties décrit pour le pliage en trois (CC4) et en six (CD5).

4.7 Tâche CF : Plier une bande en cinq parties égales

4.7.1 Mode d'APP CF1

Le nombre de parties désirées n'étant pas une puissance de deux, ni même un nombre pair, le pliage successif en deux ne sera pas efficace ici et nous croyons que des élèves vont recourir directement à une procédure de pliage en superposant les parties approximativement puis en ajustant. Cette façon de faire est similaire à celle qui a été décrite et associée au mode d'APP CC1. Deux séries de gestes pourraient correspondre à cette approche. Premièrement, l'élève pourrait enrouler la bande sur elle-même pour avoir cinq couches de papier, mais sans appuyer pour compléter les plis. L'élève ajusterait ensuite la bande enroulée afin de s'assurer que les extrémités et les plis sont alignés, et ainsi que les cinq étages ont toutes la même longueur, puis il appuierait pour bien compléter le pli. Deuxièmement, l'élève pourrait plutôt former un accordéon avec la bande de façon à avoir cinq couches et sans appuyer pour former complètement les plis. Il ajusterait ensuite l'accordéon pour bien aligner les extrémités et s'assurer que les cinq étages ont toutes la même longueur, puis il appuierait sur les plis afin de terminer le pliage. L'élève qui procède d'une ou l'autre de ces deux façons pourraient verbaliser ses actions, par exemple en précisant « Je pousse le bout jusqu'au coin avant de peser » ou « J'ajuste un peu et ensuite je plie. ». Il pourrait aussi exprimer verbalement son souci pour l'égalité des parties : « Il faut que ça soit pile dessus. » ou « Il faut que ce soit égal. ». Le raisonnement sous-jacent à cette procédure est le suivant : si on utilise toute la bande pour former les cinq étages (ou parties), et qu'on s'assure qu'elles ont toutes la même longueur à l'aide d'une comparaison visuelle en les superposant, alors les cinq parties ainsi obtenues seront cinq parties égales. De plus, le pliage correspond à une partition exhaustive de l'unité en cinq parties égales, et chacune de ces parties représente $\frac{1}{5}(1 - bande)$. Les manipulations, les façons de parler et les manières de penser que nous associons à ce mode d'APP sont celles qui mèneront à un pliage correct en cinq parties de même longueur et son cohérentes avec une interprétation partie/tout de la fraction.

4.7.2 Mode d'APP CF2

Le deuxième mode d'APP que nous anticipons est celui associé à la stratégie de pliage par estimation de la longueur des parties désirées. Ce mode d'APP, de même que ses variantes résultant de la gestion de la présence d'un excès ou d'un manque, est très similaire à ce qui a été décrit pour les modes d'APP CB3 (pliage en quatre), CC2 (pliage en trois), CD3 (pliage en six) et CE4 (pliage en huit). Ainsi, plutôt que de répéter les descriptions, nous renvoyons le lecteur aux paragraphes traitant ces modes d'APP, ou encore au tableau-synthèse des modes d'APP de la section 5.3.

4.7.3 Mode d'APP CF3

Le pliage en cinq parties égales est particulier parce que le nombre cinq n'est ni un multiple de deux, ni un multiple de trois. Les élèves ne peuvent dont pas utiliser les pliages précédents comme point de départ et appliquer un principe multiplicatif pour obtenir cinq parties de même longueur. Nous prévoyons que certains élèves voudront quand même débuter avec un pliage familier, celui en quatre sections, et y ajouter une partie. Dans l'action, cela se concrétisera par le fait de plier une bande en quatre, ou de sélectionner une bande déjà pliée en quatre, puis de plier une partie qui est à une extrémité en deux. La manière de penser de l'élève qui fait cela se centre sur le critère de validation par le nombre de parties : obtenir cinq sections est l'objectif à atteindre. La fraction $\frac{1}{5}$ est obtenue par une partition exhaustive du tout en cinq parties. La taille des sections, leur égalité ou leur relation avec le tout ne sont pas des éléments importants. De plus, dans le raisonnement de l'élève, on dénote à la fois une vision davantage additive que multiplicative : en pliant la dernière section en deux, on obtient une section supplémentaire, qui vient s'ajouter aux quatre sections existantes pour un total de cinq. Les façons de parler cohérentes avec ce mode d'APP reflètent ces façons de penser et ressemblent aux affirmations suivantes : « Quatre plus un donne cinq. », « J'ajoute une cinquième partie dans la quatrième et j'en ai maintenant cinq. » ou « Je divise ma quatrième partie en deux pour en avoir cinq en tout. ».

4.7.4 Mode d'APP CF4

Le mode d'APP dont il est question ici ne constitue pas une façon d'effectuer le pliage demandé, en cinq parties égales, mais bien une façon pour l'élève de vérifier s'il a réussi la tâche. En particulier, il s'agit ici pour l'élève de vérifier si le pliage satisfait le critère concernant le nombre de sections obtenues en effectuant un comptage. Les manières d'agir, de parler et de penser que nous associons à ce mode d'APP sont analogues à celles qui ont été décrites pour les vérifications par comptage des pliages en quatre (CB4), en trois (CC3), en six (CD4) et en huit (CE5). Elles sont aussi résumées dans le tableau dans la section 5.3 du chapitre 5.

4.7.5 Mode d'APP CF5

Une autre façon pour l'élève de chercher à valider le pliage effectué est de vérifier si les sections obtenues ont toutes la même longueur. Les façons de parler, d'agir et de penser que nous associons à ce mode d'APP sont similaires à celles décrites précédemment pour la vérification visuelle de la longueur des sections lors des pliages en trois (mode d'APP CC4), en six (mode d'APP CD5) et en huit (mode d'APP CE6). Nous renvoyons le lecteur à ces descriptions, ou encore au tableau-synthèse de la section 5.3 du chapitre 5.

4.8 Tâche CG : Plier en neuf parties égales

4.8.1 Mode d'APP CG1

La première façon de réaliser le pliage en neuf parties égales que nous dégageons s'appuie sur une vision multiplicative de la relation entre les différentes étapes du pliage. Pour obtenir neuf sections, l'élève plie d'abord la bande en trois, puis, sans la déplier, la plie à nouveau en trois. Les paroles de l'élève cohérentes avec cette façon de faire que nous anticipons sont les suivantes : « On a trois fois plus de parties. », « C'est comme plier chaque partie en trois. » et « Trois fois trois donne neuf. ». Le raisonnement sous-jacent est que le nombre de parties triple si on plie la bande en trois une fois de plus. En effet, après la première étape du pliage, chacune des trois parties égales est une sous-unité qui sera à son tour divisée en trois parties égales lors de la deuxième étape du pliage. Dans la notation de Behr *et al.* (1992) : la bande correspond à $3\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ après la première étape, puis, après la deuxième étape, à

$9\left(\frac{1}{3}-(\frac{1}{3}-bande)\right)$, c'est-à-dire $9\left(\frac{1}{9}-bande\right)$.Il s'agit d'un raisonnement correct qui mènera fort probablement à un pliage en neuf parties égales réussi.

4.8.2 Mode d'APP CG2

Nous anticipons que certains élèves pourraient réussir le pliage en huit mais ne pas être en mesure de réaliser le pliage en neuf d'après une conception multiplicative. Ces élèves pourraient adopter une vision additive et ajouter une partie à un pliage déjà fait en huit parties. Les gestes qui nous indiqueraient cela seraient que l'élève prenne une bande pliée en huit parties, puis plie en deux une section qui se situe à une des deux extrémités. En le faisant, il est possible que l'élève verbalise ses actions et ses réflexions par des phrases comme « Huit plus un donne neuf. », « J'ajoute une neuvième partie dans la huitième et j'en ai maintenant neuf. » ou encore « Je divise ma huitième partie en deux pour en avoir neuf en tout. ». Le raisonnement que nous devinons en lien avec ces façons d'agir et de parler est qu'en pliant une partie en deux, on obtient une partie supplémentaire, et donc un total de neuf parties. De plus, c'est justement le nombre de parties qui est important pour l'élève dans ce contexte : l'égalité des parties n'est pas un critère qui est considéré.

4.8.3 Mode d'APP CG3

Une autre stratégie possible, selon nous, est que les élèves tentent de réaliser directement le pliage en neuf parties égales en superposant les parties de façon sommaire avant de compléter les plis. Il s'agit d'une stratégie que nous avions déjà anticipée pour le pliage en cinq parties égales et que nous avions associée au mode d'APP CF1. Les façons d'agir, de parler et de penser pour le mode d'APP CG3 sont analogues à celles décrite pour CF1 (et sont aussi décrites dans le tableau de la section 5.3 du chapitre 5).

4.8.4 Mode d'APP CG4

Comme pour les tâches de pliage en quatre, en trois, en six, en huit et en cinq, nous prévoyons que certains élèves vont réaliser le pliage en neuf en estimant la longueur des sections souhaitées. Puisque nous avons décrit les manières d'agir, de parler et de penser associées à cette procédure précédemment (notamment, pour le mode d'APP CB3), et comme elles se trouvent dans le tableau de la section 5.3 du chapitre 5, nous ne les répéterons pas ici.

4.8.5 Mode d'APP CG5

Certains comportements et manières de parler et de penser peuvent être mis de l'avant par les élèves en lien non pas avec la réalisation de la tâche de pliage en soi, mais plutôt avec la vérification de la validité du pliage. Il est possible que les élèves vérifient que le nombre de sections obtenues correspondent bien à ce qui était demandé. Les façons d'agir, de parler et de penser que nous associons à la vérification par comptage du nombre de parties obtenues ont déjà été décrites pour des modes d'APP analogues pour les autres tâches (notamment, le mode d'APP CB4 pour le pliage en quatre). Ainsi, nous y référons le lecteur. Un résumé se trouve aussi dans le tableau dans la section 5.3 du chapitre 5.

4.8.6 Mode d'APP CG6

Le processus de vérification de la validité du pliage effectué par l'élève peut aussi se centrer sur l'égalité de la longueur des morceaux. Dans ce cas, les manières d'agir, de parler et de penser seraient semblables à celles que nous avons décrites, entre autres, pour le mode d'APP CC4, associé à la vérification visuelle de la longueur des morceaux pour le pliage en trois.

4.9 Tâche CH : Identifier à quelle fraction de la bande de papier correspond chacune des parties (fraction unitaire)

4.9.1 Mode d'APP CH1

Dans cette tâche, on demande à l'élève d'écrire ou de nommer oralement la fraction de la bande de papier à laquelle chaque partie correspond. Nous anticipons qu'il pourrait utiliser la notation symbolique et le vocabulaire standardisé. Concrètement, cela se traduit par l'action de compter le nombre total (n) de parties dans la bande pliée, puis d'écrire $\frac{1}{n}$ sur une, plusieurs ou toutes les parties. Cela pourrait aussi se traduire oralement par des phrases comme « Chaque partie est un n-ième de la bande. » ou « Chaque partie est un sur *n* de la bande. ». De plus, nous associons aussi à ce mode d'APP des verbalisations en lien avec le comptage, même s'il ne s'agit pas de nommer oralement le nom des parties, comme « Il y a *n* parties. » ou « Il y a *n* parties égales. ». L'interprétation de la fraction que nous associons à ce mode d'APP est le sens partie/tout. La manière de penser est que la bande constitue le tout et que lorsqu'il y a *n* parties égales, chacune est le *n*-ième ($\frac{1}{n}$) du tout. Ainsi, en termes de Behr *et al.*(1992), chaque section de la bande pliée représente $\frac{1}{n}(1 - bande)$. Nous incluons aussi dans les façons de penser les connaissances en lien avec le symbolisme, plus précisément que le nombre de parties égales correspond au dénominateur et ainsi, au nombre écrit sous la barre dans l'écriture symbolique de la fraction.

4.9.2 Mode d'APP CH2

Il est possible que l'élève qui utilise la notation symbolique et le langage standardisé le fasse d'une façon qui est davantage centrée sur la partie de la bande que sur la bande entière. La nuance est subtile entre le mode d'APP CH1 et le mode d'APP CH2. En effet, les actions posées par l'élèves seront les mêmes : il va compter le nombre total (n) de parties dans la bande pliée, et il va peut-être écrire $\frac{1}{n}$ sur une, plusieurs ou toutes les parties. Il pourrait aussi faire les mêmes affirmations que celles que nous associons au mode d'APP CH1, soit « Chaque partie représente un n-ième (ou $\frac{1}{n}$) de la bande. » ou encore « Il y n parties. », « Il y a n parties égales. ». Toutefois, il pourrait aussi ajouter des verbalisations comme « Il y a n n-ièmes. » qui nous indiqueraient qu'il considère le n-ième comme la sous-unité dont il est question à ce moment. La nuance dans les façons d'agir et de parler est difficile à détecter dans le cas de la fraction unitaire, il s'agit d'une façon de penser qui se distingue de ce qui a été décrit pour le mode d'APP précédent. La notation de Behr *et al.* (1992) nous permet en effet de préciser cette distinction. En effet, ici, le raisonnement est que lorsqu'il y a n parties égales, chaque partie représente $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$. Enfin, comme pour le mode d'APP CH1, nous incluons dans les manières de penser les connaissances de l'élève quant à l'utilisation du langage standardisé oral et symbolique écrit, plus particulièrement que le nombre de parties égales est le dénominateur dans la fraction.

4.9.3 Mode d'APP CH3

Le troisième mode d'APP que nous anticipons en lien avec la dénomination des parties de la bande de papier pliée est relié à l'utilisation de vocabulaire commun concernant les fractions. En effet, certains noms de fractions, plus précisément la demie, le tiers et le quart, sont des mots auxquels les apprenants ont pu être exposés avant que les concepts de fractions et le langage symbolique lié aux fractions ne leur soit formellement présentés. Ainsi, il est possible que l'élève compte le nombre de parties (de façon perceptible ou non dans ses manières d'agir) et, s'il en dénombre deux, trois ou quatre, soit en mesure d'associer chacune des parties à un nom spécifique qu'il connait, i.e. la demie, le tiers ou le quart. En tant qu'observateur, nous le saurons seulement s'il utilise un ou plusieurs de ces mots dans ses verbalisations, par exemple en affirmant « Ça, c'est un tiers. » ou « Cette partie est un quart. ». Nous avons choisi d'associer ces façons de parler et de penser à un mode d'APP distinct des deux premiers que nous avions relevés car il est possible qu'il s'agisse directement d'une association entre le nombre de parties comptées et le mot de vocabulaire, et non d'une interprétation partie/tout de la fraction. Toutefois, les façons d'agir et de parler sont très semblables, et donc il sera très difficile, en tant qu'observateur, de savoir si l'élève exhibe davantage le mode CH3 ou un des deux modes précédents. À notre avis, l'élève qui met en œuvre CH3 ne mettra pas l'accent sur le nombre de parties égales et n'utilisera pas des formulations comme « un sur n », car il est davantage dans une situation d'association directe des mots de vocabulaire avec une situation qu'il reconnaît.

4.10 Tâche CI : Nommer une fraction formée de parties de bande pliée lorsque la fraction n'est pas unitaire

4.10.1 Mode d'APP CI1

Dans le cas de cette tâche, l'élève doit désigner (par écrit ou à l'oral) une fraction qui est formée de sections de la bande de papier après qu'elle ait été pliée en n parties égales. On s'attend à ce que l'élève compte le nombre total (n) de parties égales dans la bande, puis le nombre (k) de parties contenues dans la section de bande qui est considérée. Ce comptage peut être perceptible dans les actions de l'élève, par exemple s'il pointe du doigt les parties pendant qu'il les dénombre. Il est aussi possible qu'aucun geste posé par l'élève nous indique qu'il procède au comptage. Dans ce cas, ce sont les paroles de l'élève qui nous informe davantage que l'élève a compté. Dans le cas où la bande est pliée en neuf et où on considère trois de ses parties, par exemple, il pourrait affirmer explicitement « Il y a neuf parties en tout et trois ici, donc c'est trois neuvièmes. », ou encore plus simplement « Neuf, trois, trois sur neuf. ». Il serait aussi possible, surtout s'il est questionné par l'enseignante ou par la chercheuse, que l'élève verbalise davantage : « Si je prends trois parties sur les neuf qu'il y a, alors j'ai pris trois neuvièmes de la bande. ». Évidemment, les formulations que nous avons utilisées ici sont celles pour le cas $k = 3$ et $n = 9$, mais sont généralisables pour les autres valeurs de k et de n. En ce qui concerne les manières de penser, l'interprétation de la fraction associée à ce mode d'APP est le sens partie/tout. Une première interprétation de la situation est la suivante : chaque partie représente $\frac{1}{n}(1 - bande)$, et alors lorsque k parties sont considérées, cela représente $\frac{k}{n}(1 - bande)$. L'unité de référence est l'unité principale : la bande de papier. Toutefois, il est aussi possible que l'élève considère comme unité de référence la sous-unité : la partie de la bande de papier pliée qui correspond au n-ième de bande. Dans ce cas, chaque partie représente $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$ et lorsqu'on considère k parties, cela représente $k\left(\frac{1}{n} - bande\right)$. Étant donnée la différence dans ces interprétations de la situation, nous les avions initialement associées à deux modes d'APP distincts. Toutefois, nous avons constaté que les manières d'agir et de parler de l'élève seraient très similaires et ne nous permettraient pas d'inférer quelle est sa façon de penser. Ainsi, nous avons plutôt opté pour inclure les deux façons de penser dans le même mode d'APP, contrairement à ce que nous avions fait pour la tâche CH. Comme pour les modes d'APP CH1 et CH2, nous incluons aussi dans les façons de penser les connaissances de l'élève quant aux normes d'écriture symbolique : le nombre total de parties égales est le dénominateur de la fraction et le nombre de parties considérées est le numérateur.

4.10.2 Mode d'APP CI2

Nous envisageons aussi que certains élèves seront familiers avec les noms de fractions utilisés dans la vie de tous les jours, plus particulièrement les demies, les tiers et les quarts. Dans ce cas, il est possible que l'élève reconnaisse certaines fractions particulières et utilise leurs noms sans que sa manière de penser implique une réflexion sur le sens partie/tout. Les noms des fractions se retrouveront ainsi dans ses façons de parler, dans des phrases comme « C'est trois quarts (de la bande). ». Mentionnons qu'à nouveau, la nuance entre le mode d'APP CI2 et le mode d'APP CI1 est subtile : dans le cas de CI2, l'élève fait une association directe entre la situation et du vocabulaire qu'il connaît, mais ses manières de penser n'incluent pas de réflexion sur la partition exhaustive du tout en n parties égales et sur le sens partie/tout de la fraction. Ce sera toutefois difficile d'observer cette nuance dans les actions, et même dans les paroles, de l'élève. Nous prenons comme position que l'élève qui exhibe le mode d'APP CI2 n'utilisera pas dans ses manières de parler des formulations comme « un sur n » ou des phrases qui mettent en évidence le nombre de parties égales au total (n) et le nombre de parties concernées (k).

4.11 Tâche CJ : Place les bandes en ordre croissant de grandeur des parties

4.11.1 Mode d'APP CJ1

Lorsque qu'on lui demande de placer les bandes de papier pliées en ordre croissant selon la grandeur des parties, il est possible que l'élève mette de l'avant une stratégie basée sur le nombre de parties. En effet, puisque le tout demeure toujours le même – car les bandes de papier initiales sont toutes de même longueur –, et puisque les parties sont toutes égales, alors la longueur de chacune des parties dépend du nombre de parties : moins il y a de parties, plus les parties sont longues. Il s'agit d'un raisonnement qui s'appuie sur le sens partie/tout de la fraction et qui est mathématiquement valide, et l'élève qui l'utilisera dans sa procédure obtiendra fort probablement un classement correct. Dans l'action, peu de gestes nous indiquerons clairement le raisonnement de l'élève. C'est plutôt l'absence de certaines manipulations du matériel qui nous suggérera que l'élève se base sur le nombre de morceaux pour effectuer le classement. Ainsi, nous nous attendons à le voir placer les bandes dans l'ordre croissant attendu, de façon assez rapide, et sans procéder à une comparaison visuelle de la longueur des parties des différentes bandes pliées. Ce sont davantage les façons de parler de l'élève qui pourraient nous informer sur ses façons de penser. Il pourrait expliquer son raisonnement de façon assez explicite, en disant par exemple « Le nombre (de parties) est plus grand alors les parties sont plus petites. » ou « Moins il y a de parties, plus les parties sont grandes. ». Il pourrait utiliser des verbalisations moins explicites mais quand même référer au total de morceaux, comme en disant « Il y en a plus ici, donc c'est plus petit. ». Dans le contexte de la langue seconde, nous nous attendons à des phrases plus courtes et moins explicites, comme la dernière. Le « y » et le « c' » pouvant néanmoins laisser place à l'interprétation, c'est avec le contexte que nous pourrons déterminer s'il s'agit ou pas de verbalisations cohérentes avec ce mode d'APP.

4.11.2 Mode d'APP CJ2

Nous anticipons aussi que certains élèves vont se fier au nombre de parties dans la bande de papier pliée, mais en considérant plutôt ce nombre comme un indicateur direct de la longueur des morceaux et de la place de la bande dans le classement. Ainsi, en suivant ce raisonnement, la bande pliée en cinq aurait des parties plus « grandes » que celle pliée en quatre. Comme pour le mode d'APP précédent, il est difficile de noter des gestes qui traduisent le raisonnement. Dans le cas présent, c'est davantage l'absence d'indices de comparaison visuelle qui nous indique que l'élève s'appuie principalement sur le nombre de parties dans la bande pliée pour procéder à son classement. On s'attend à ce qu'il place les bandes assez rapidement. Contrairement au mode d'APP CJ1, toutefois, le classement résultant sera erroné : il sera inversé par rapport au classement croissant correct. Les façons de parler que nous associons au mode d'APP CJ2 sont celles qui mettent l'accent exclusivement sur le nombre de parties. À titre d'exemple, on pourrait entendre l'élève dire « Il y en a plus. » ou « C'est plus. » en plaçant la bande à droite ou en bas (du côté des morceaux supposément plus gros). L'élève pourrait aussi être plus détaillé : « Il y a plus de parties et elles sont plus grandes. ». Il est aussi possible que la tâche de classement soit demandée à l'élève après qu'il ait nommé les parties. Dans ce cas, nous associons aussi à ce mode d'APP la manière de penser suivante : chaque partie correspond à la fraction $\frac{1}{n}$, et la valeur de la fraction $\frac{1}{n}$ – perçue alors comme un nombre – est associée à la valeur de *n*, et donc un plus grand *n* signifie une plus grande valeur pour la fraction (donc de plus grandes parties).

4.11.3 Mode d'APP CJ3

Une troisième procédure de classement que nous anticipons que les élèves pourraient mettre en place consiste à procéder par comparaison visuelle de la longueur des parties des bandes de papier pliée. Cette procédure peut fort bien mener à un classement correct. Elle ne s'appuie pas sur la relation entre la longueur du tout, la nombre de morceaux et la longueur des morceaux, mais découle plutôt d'une comparaison directe des attributs visuels des objets en jeu. La manière de penser que nous associons à ce mode d'APP est donc liée à cela : pour placer des objets en ordre croissant selon leur grandeur, il suffit de procéder à une comparaison visuelle de la caractéristique « grandeur » de ces objets. Dans l'action, on observera l'élève procéder en plaçant les bandes côte à côte, et en alignant les extrémités pour pouvoir comparer la longueur des morceaux et ainsi placer les bandes dans l'ordre demandé. Cela pourrait s'accompagner de verbalisations comme « Celle-là est plus petite que celle-là. » ou « Je vois que ça c'est plus grand. ».

CHAPITRE V

ANALYSE DES DONNÉES

Dans ce chapitre, nous allons décrire en ordre chronologique les interactions intéressantes qui ont lieu dans la classe et les commenter avec un regard analytique qui s'appuie sur notre cadre d'analyse des modes d'agir-parler-penser. Lorsque c'est possible, nous allons associer les observations à des modes d'agir-parler-penser anticipés. Lorsque nous remarquons que nous sommes témoins d'un mode d'agir-parler-penser qui n'avait pas été anticipé, nous le mentionnerons.

5.1 Analyse descriptive de la séance observée

Remarquons que la séquence de tâche suggérée par la chercheuse (disponible en annexe A) a été adaptée dans l'action par l'enseignante. C'est pourquoi l'ordre des tâches dans le chapitre précédent et l'ordre des tâches dans notre description chronologique peut différer. De plus, il faut savoir que l'enseignante a débuté la séance avec de courtes questions sur le concept des fractions (« C'est quoi une fraction ? »). Elle a ensuite commencé la séquence de tâches de pliage en utilisant un contexte : la bande de papier comme une barre de chocolat. Nous verrons plusieurs références à ce contexte au cours de l'analyse descriptive.

Rappelons aussi que dans le but de faciliter la lecture, nous avons attribué des codes alphanumériques aux tâches et aux modes d'agir-parler-penser. Le « C » au début du code de la tâche signifie que la tâche en question est une tâche prévue dans la séquence suggérée par la chercheuse. La deuxième lettre du code de la tâche a été attribuée en ordre alphabétique. Lorsqu'il s'agit d'une tâche qui n'était pas présente initialement dans la séquence proposée par la chercheuse, mais qui a plutôt été ajoutée dans l'action par l'enseignante, le « C » n'est pas présent dans le code, mais l'ordre alphabétique pour l'autre lettre a été continué. Ainsi, la première tâche suggérée par l'enseignante porte le code « K ».

5.1.1 Tâche CA : plier la bande en deux parties égales

La première tâche de la séquence consiste à plier une bande de papier en deux parties égales. Dans le contexte de la séquence, il était prévu que les élèves effectuent le pliage et nomme chacune des deux parties. Les modes d'APP qui avaient été ressortis a priori reflètent cela. Dans l'action, toutefois, l'enseignante invite les élèves à écrire sur la bande le nombre de parties égales qui ont été engendrées par le pliage. Elle induit directement une manière d'agir différente, qui consiste à identifier la bande de papier pliée par le nombre de parties égales qu'elle contient. L'enseignante encourage par la même occasion une manière de penser qui se centre sur le nombre de sections, et non sur la fraction qui est représentée par chacune de ces sections ou sur leur relation avec le tout. Ce mode d'agir-parler-penser ne figurait pas dans notre analyse *a priori*. Nous l'ajoutons sous le code CA3.

Pour l'enseignante, il est possible qu'une manière de penser implicite soit présente. On pourrait la formuler comme suit : « Le nombre de parties est directement relié à la valeur de la fraction représentée par chacune des parties : il correspond au dénominateur. » Cette possible manière de penser se traduit notamment par l'importance que l'enseignante accorde à l'égalité des parties, de même qu'au fait que la bande de papier représente l'unité.

Enseignante : Alors là vous allez vous organiser pour être sûrs, sûrs, sûrs, avec les mains, de plier la bandelette que vous avez et faire en sorte que la palette que vous avez soit séparée en *2 morceaux bien éga/bien égaux*.

Un élève[15] mentionne qu'il n'a pas compris la consigne. L'enseignante reformule.
Une élève dit qu'elle trouve ça facile. L'enseignante demande à l'élève de verbaliser.
Enseignante : Comment vous avez fait pour *être sûrs que ce soit égal*?
Sylvie : Ben parce que j'ai mis comme ça, là. Ça, ça. (L'élève avait fait le pliage en alignant les deux extrémités de la bande. Quand elle explique, elle fait d'abord un mime, puis elle déplie la bande et la replie)
Enseignante : T'as plié, t'as fait en sorte que les deux extrémités de la (Plusieurs élèves : Ouain!) bandelette soit *bien égales* et ensuite t'as créé le pli au bout, c'est ça? (Plusieurs élèves : Oui!)
Enseignante : Excellent, vous allez prendre un crayon et écrire "2" dessus (Sylvie : Juste 2?), et laisser le papier à côté de vous. Ouais.
Extrait 1

Dans l'extrait 1, on constate dans les manières de parler de l'enseignante l'importance de l'égalité des parties. Aux lignes 3 et 11, elle ajoute l'adverbe « bien » avant le qualificatif de l'égalité : non seulement les morceaux doivent être égaux, mais ils doivent être « bien égaux ». Mathématiquement, des objets sont égaux ou ils ne le sont pas, et cela fait peu de sens d'ajouter un adverbe pour amplifier l'idée d'égalité. Toutefois, dans l'action, on peut concevoir que « bien égal » s'oppose à « environ égal ». On comprend ainsi que pour l'enseignante, la tâche ne consiste pas seulement à plier en deux une bande de papier de façon approximative, mais de le faire en prenant soin que les deux sections ainsi créées soient exactement de la même grandeur.

Les manières d'agir mises de l'avant par l'élève Sylvie, dans l'extrait 1, sont cohérentes avec cette tâche : elle prend la peine d'aligner les extrémités avant de faire le pli. On remarque que l'élève, non francophone, décrit ces actions en utilisant des mots démonstrateurs (déictiques) : « ça » et « là » (ligne 7). Le langage utilisé attire l'attention sur ses actions, qui elles nous permettent de comprendre comment elle a

[15] Lorsqu'il ne nous est pas possible d'identifier quel élève parle, nous utiliserons le mot « élève ».

effectué le pliage. Lorsque l'enseignante reprend la parole (lignes 10 à 12), elle décrit plus en détails les actions. Elle propose une manière de parler en cohérence avec la manière d'agir exhibée par Sylvie.

Nous remarquons aussi que lorsque l'enseignante indique aux élèves d'identifier la bande de papier avec le nombre de morceaux,

L'enseignante demande ensuite aux élèves d'identifier la bande de papier en utilisant le nombre de parties (deux). Sylvie questionne en demandant « Juste 2? » (lignes 13-14). On pourrait interpréter cela comme l'expression de sa surprise, ou encore déduire que Sylvie aurait voulu écrire autre chose sur la bande de papier. Il est possible que Sylvie envisageait d'écrire la fraction $\frac{1}{2}$, mais nous ne disposons pas d'assez d'informations pour l'affirmer.

1	**Enseignante** : Hey, vous avez combien de palettes de chocolat dans les mains en ce
2	moment?
3	**Élèves** : Une!
4	**Enseignante** : Encore une?
5	**Élèves** : Une! Deux! Non, deux, deux!
6	**Enseignante** : Deux, êtes-vous sûrs? Ou une?
7	**Certains élèves** : Une!
8	**Sylvie** : Ben une, mais divisée/… mais deux. Si je coupe/
9	**Enseignante** : Comb/Ça c'est une palette de chocolat (elle tient une bande pas pliée
10	dans sa main et la montre aux élèves en la tenant bien haut). Combien de palettes
11	avez-vous dans votre main?
12	**Tous les élèves** : Une!
13	**Sylvie** : Ben non madame parce que/
14	**Marc** : Une demie, une demie!
15	**Autre élève** : Moitié de une, moitié de une.
16	Sylvie n'a pas fini son explication car plusieurs autres personnes parlaient. Elle lève la
17	main avec enthousiasme pour avoir le droit de parole.
18	**Enseignante** : Ça c'est une. (montre à nouveau la bande pas pliée en la tenant bien
19	haut) Vous avez combien avec ce que vous avez maintenant?
20	**Élèves** : Une! (Une élève dit encore : Un demi)
21	**Enseignante** : Qu'est-ce qu'elle a de particulier? *Elle est séparée en deux*.

22	**Élèves** : Ah.
23	**Enseignante** : Est-ce que j'ai une demie ou j'ai une complète? *Vous l'avez séparée en*
24	*deux.*
25	**Élèves** : Un! Une!
26	**Enseignante** : Mais est-ce que vous l'avez encore au complet dans vos mains?
27	**Plusieurs élèves** : Oui!
28	**Sylvie** : On n'a pas mangé encore Madame si…
29	**Enseignante** : On n'a pas mangé encore! Alors est-ce qu'on a encore une même si la
30	*palette est séparée en deux*?
31	**Plusieurs élèves** : Oui!
32	**Enseignante** : Alors on a encore une palette, ça va?

Extrait 2

Dans l'extrait 2, l'enseignante insiste sur le fait que le tout est constant. Cet échange met l'accent sur le fait que même après l'avoir pliée en deux parties égales, la bande de papier (palette de chocolat) demeure entière. Les gestes et paroles de l'enseignante établissent un lien direct entre la bande intacte, qui est clairement entière, et la bande pliée, qui est encore entière, mais maintenant composée de deux parties égales.

Lorsque questionnés par l'enseignante, certains élèves répondent initialement qu'ils tiennent deux palettes de chocolat. Ils considèrent chacune des sections après le pliage comme des entités distinctes. Si on voulait décrire cette manière de penser avec le symbolisme de Behr *et al.* (1992), on pourrait dire que chacune de ces sections est 1($\frac{1}{2}$-bande). Toutefois, il n'est pas du tout clair que les élèves pensent en termes de fractions, et qu'ils ne considèrent pas seulement la situation comme une situation distincte, indépendante de l'unité : nous avions un morceau avant le pliage, nous en avons deux après. Les questionnements de l'enseignante et sa mise en relation de la bande pliée avec la bande intacte guident les élèves vers une réunification des deux sections. Pour l'enseignante, même après le pliage, la bande de papier représente l'unité de référence. En termes de Behr *et al.* (1992), chaque section est $\frac{1}{2}$(1-bande). L'utilisation de plusieurs versions différentes de l'expression « une palette, séparée en deux » (lignes

21, 23-24 et 30) indiquent un passage, pour l'enseignante, vers une interprétation de la bande pliée comme une unité dont chacune des sections représente la demie (mode d'APP anticipé CA1). Elle semble tenter de faire émerger ce mode chez les élèves par son questionnement. On peut même remarquer dans l'extrait 2 que certains élèves utilisent les mots « divisée », « moitié » et « demi » (lignes 8, 14, 15, 20). Même si leurs réponses ne correspondent pas à ce qui était demandé par l'enseignante, on infère quand même qu'ils reconnaissent qu'on pourrait utiliser les fractions pour décrire la situation et qu'ils peuvent nommer la partie de bande. Il est difficile de savoir s'ils perçoivent la bande comme l'unité de référence (mode d'APP CA1) ou la demi-bande comme sous-unité (mode d'APP CA2).

5.1.2 Tâche CB : plier la bande en quatre parties égales

La deuxième tâche proposée par l'enseignante consiste à plier la bande de papier en quatre parties égales. À partir de ce moment, jusqu'à la tâche CH, l'objectif de la tâche pour les élèves est centré sur le nombre de parties demandé par l'enseignante. Ceci se distingue légèrement de la séquence prévue initialement (voir annexe A) et dans laquelle il était prévu de demander à l'élève d'identifier à quelle fraction de la bande chacune des parties correspond.

1	**Enseignante** : Je veux absolument que les morceaux, les quatre morceaux que vous
2	allez créer soit *bien égaux*. Même mesure.
3	**Sylvie** : J'ai fini!
4	**Enseignante** : Comment as-tu fait, Marc pour arriver à quatre morceaux *bien égals*?
5	Et Marc a bien compris qu'on allait écrire 4 dessus.
6	**Marc** : C'est comme ça (il plie en deux)
7	**Enseignante** : T'as plié en deux, en faisant attention que les deux extrémités soient
8	*bien égales*. (L'enseignante effectue les manipulations en même temps que Marc)
9	**Sylvie** : Et en deux!
10	**Marc** : Une deuxième fois en deux.
11	**Enseignante** : Et ensuite t'as replié de nouveau en deux.

Extrait 3

L'extrait 3 nous permet de remarquer à nouveau dans le discours de l'enseignante une grande importance accordée à l'égalité des parties, notamment par l'utilisation répétée de l'expression « bien égaux » ou de ses variantes (lignes 2, 4 et 7-8).

L'élève Marc explique comment il a procédé pour plier la bande de papier en quatre parties égales. L'élève mime davantage qu'il verbalise sa procédure, en ajoutant des éléments déictiques à l'oral, et l'enseignante reprend les mêmes manières d'agir en les coordonnant avec des manières de parler. Elle reformule ou répète les actions et les mots de l'élève. Dans ce cas-ci, les gestes comme le discours oral de l'enseignante et de Marc sont cohérents avec une interprétation multiplicative de la relation entre les étapes du pliage (mode d'ABB anticipé CB1). Notons quand même qu'il est possible que la conception qui se manifeste ici soit celle d'une relation additive : les manières d'agir et de parler pourraient être les mêmes.

La démarche mise en œuvre par l'élève Sylvie pour obtenir 4 morceaux est différente, comme on peut le constater dans l'extrait 4.

1	**Sylvie** : Ah, moi j'ai pas fait comme ça, Madame!
2	**Enseignante** : Toi, t'as fait quoi, Sylvie ?
3	**Sylvie** : Moi j'ai […] comme tantôt, là. J'ai fait, puis j'ai coupé le deux. Après ça, j'ai
4	fait ça (montre qu'elle a pris une des moitiés de la bande, qu'elle avait déchirée en
5	deux, et la plie en deux), puis j'ai fait ça (plie l'autre moitié de la bande).
6	**Enseignante** : Mais moi je voulais avoir une palette, séparée en 4.
7	**Sylvie** (en replaçant les morceaux ensemble dans sa main, comme pour "réparer la
8	bande") : Ben tiens, j'ai pas mangé encore!
9	(rires)
10	**Enseignante** : Ok. Alors vous écrivez "4" dessus et vous placez ça à côté de vous, s'il
11	vous plaît.
Extrait 4	

Sylvie a d'abord reproduit la procédure qui avait été effectuée lors de la première tâche et a plié en deux la bande. Puis, elle l'a déchirée en deux, ce qui lui donnait deux nouvelles bandes, plus petites, qu'elle a pu plier en deux parties égales, en répétant les mêmes façons de faire. Elle semble donc mettre de l'avant le mode d'APP CA2, à deux reprises.

Il ne s'agit pas d'une stratégie que nous avions anticipée lors de notre analyse *a priori*. Toutefois, l'itération de CA2 se rapproche d'une conception d'une relation multiplicative entre les étapes du pliage. En effet, chaque nouvelle petite bande est considérée comme une nouvelle unité. En répétant le pliage en deux sur chaque moitié, on manifeste une manière de penser selon laquelle si on fait subir la même action à chacune des moitiés, on obtiendra deux fois le même nombre de parties.

Par contre, la stratégie employée par Sylvie n'offre pas une solution à la tâche proposée par l'enseignante. Néanmoins, il s'agit d'une solution à la tâche que l'élève s'est donnée en interprétant les consignes de l'enseignante. En effet, pour l'élève, il n'y a pas de problème à couper la bande initiale, car l'objectif était d'obtenir quatre parties égales. Pour l'enseignante, toutefois, il est important de conserver la bande initiale entière, car elle représente l'unité, et on ne veut pas altérer l'unité. C'est d'ailleurs ce qu'elle exprime à la ligne 6 de l'extrait 4 : « Mais moi je voulais avoir *une* palette, *séparée* en 4. » On reconnaît encore une fois que l'enseignante semble garder en tête un travail sur les fractions, ce qui n'est pas le cas pour les élèves.

5.1.3 Tâche CE : plier la bande en huit parties égales

À la suite de cet échange, l'enseignante demande aux élèves de plier la bande en huit morceaux égaux. Notons que l'ordre est un peu différent de ce qui était initialement prévu dans la séquence de tâches. On constate ainsi que l'enseignante s'approprie la séquence et l'adapte dans l'action. À nouveau, l'égalité des parties revient à plusieurs reprises dans les formulations de l'enseignante (voir extrait 5, lignes 2, 3 et 7).

Enseignante : Et là c'est la dernière fois que c'est facile! Après, ça devient plus difficile. (…) vous allez me séparer ça en huit morceaux *bien égaux*. Et vous me dites comment vous êtes arrivés à faire huit morceaux *bien égaux* avec la magnifique palette de chocolat que je vous ai donnée.
Sylvie : J'ai fini.
Enseignante : Vous écrivez "8" dessus et vous me montrez comment vous êtes sûrs que c'est vraiment huit morceaux *égals*.
Extrait 5

Un des raisonnements anticipés pour la tâche de pliage est une conception additive de la relation entre les pliages. Un élève pourrait alors croire que le fait de plier la bande en deux une fois de plus ajoute deux au nombre de parties total. C'est le mode d'APP que nous avons nommé CE3. Ce raisonnement se révèle inefficace lors du pliage en huit parties, car il engendrera un trop grand nombre de sections. C'est ce qui s'est passé pour Sylvie.

Sylvie (déplie sa bande et la montre ; il y a plus que 8 morceaux, on en voit 16) : Ben non madame c'est [inaudible].
Marc : Madame, c'est comme le 4, mais…
Enseignante (en regardant la production de Sylvie) : Est-ce que c'est/wohhh, on dirait que ça n'a pas fonctionné Sylvie. Je crois qu'il va falloir que tu prennes un autre bandelette.
Extrait 6

Dans l'extrait 6, Sylvie vérifie sa production en dépliant sa bande, et est confrontée au fait qu'elle a obtenu plus que le nombre de parties qu'elle visait. Il semble qu'elle ait mis en œuvre les modes d'APP anticipés CE3, puis CE5 (associé à la vérification de la validité du pliage par comptage du nombre de morceaux). Ce n'est pas le cas pour d'autres élèves, comme Marc et Éléonore, comme on peut le constater dans l'extrait 7.

Enseignante : Mais, comment on fait?

Marc : Madame! Comme le 4, mais tu peux faire une deuxième fois (montre la bande pliée en 4 et la plie en deux une fois de plus).

Enseignante : Ok, alors tu fais comme le quat/alors, qu'est-ce que tu as fait Éléonore ? Tu as plié d'abord en 2?

Éléonore : J'ai plié en 2. Après j'ai [inaudible]

Enseignante : Encore en deux, et encore en deux! Et on remarque que huit morceaux, c'est effectivement 2 fois 2 fois 2 (écrit au tableau 2x2x2 au fur et à mesure qu'elle le dit) Êtes-vous d'accord? On dirait que j'ai parlé mais que personne m'a écoutée.

Sylvie : Hey madame, j'ai fait. (montre une bande pliée en huit)

Enseignante : T'as réussi? Tu écris 8 dessus.

Sylvie : Ah, ok.

Enseignante : Regardez ici! (tape le tableau avec le crayon pour pointer vers le 2x2x2 qu'elle a écrit plus tôt) Huit est-ce que j'ai raison de dire qu'on a plié en 2 (pointe le premier « 2 » écrit), pis que ces deux morceaux-là on les a encore pliés en 2 (pointe le deuxième « 2 » écrit), pis qu'on les a encore pliés en 2 (pointe le 3e « 2 » écrit). Alors 8 c'est 2 fois 2 fois 2 (tape avec son crayon le 2 correspondant écrit au tableau à chaque fois qu'elle dit 2)

Enseignante : On est d'accord?

Élèves : Oui! Oui madame!

Extrait 7

Aux lignes 2 et 3, on remarque avec les paroles et les gestes de Marc qu'il prend comme point de départ la bande pliée en quatre, et la plie une fois de plus pour obtenir huit parties (qui est le double de quatre). Ceci traduit bien une façon de penser qui établit une relation multiplicative : « le nombre de parties double si je plie la bande en deux une fois de plus ». Ainsi, Marc exhibe le mode d'APP anticipé CE1. L'enseignante, après avoir questionné Éléonore, verbalise le raisonnement multiplicatif en écrivant au tableau les opérations mathématiques associées : « 2x2x2 » (ligne 8), puis en y référant lorsqu'elle répète son explication du lien entre les multiplications et les pliages (lignes 14 à 19). Toutefois, bien qu'elle présente une coordination entre l'opération « fois deux » et le doublement du nombre de parties, elle n'exprime pas explicitement que le nombre de parties double lorsqu'on plie la bande en deux une fois de plus. Nous pouvons quand même interpréter que c'est cette façon de penser qu'elle tente de modéliser, et qu'elle exhibe ainsi elle aussi le mode d'APP CE1.

Notons aussi que l'enseignante, après avoir offert une verbalisation explicite de la relation multiplicative, questionne les élèves pour s'assurer qu'ils partagent, ou du moins qu'ils acceptent, cette façon de penser. On pourrait dire qu'elle modélise le mode d'APP CE1 et vérifie que les élèves sont aussi dans ce mode d'APP avant de poursuivre.

À la ligne 11 de l'extrait 7, il semble que Sylvie ait réussi les manipulations associées au mode d'APP CE1, mais il serait un peu prématuré d'affirmer qu'elle exhibe ce mode d'APP.

Dans l'extrait 8, on constate qu'Albert n'a pas obtenu les huit parties souhaitées, et ce, même après la tentative de la part de l'enseignante d'amener tout le groupe au mode CE1 en les guidant. L'enseignante le repère et l'accompagne dans une vérification du nombre de parties par comptage. Cette vérification correspond au mode d'APP anticipé que nous avons identifié CE5. Mentionnons que l'élève n'a pas mis de l'avant ce mode d'APP par lui-même, mais que c'était une initiative de l'enseignante : afin de vérifier si la tâche a été effectuée comme elle le demandait, elle compte le nombre de parties. Dans ce cas, on devine que le processus employé par Albert lors du pliage s'appuie sur une relation additive (plier en deux une fois de plus ajoute deux parties), et on peut le situer dans un mode d'APP CE3.

Enseignante (prend la bande pliée et identifiée avec le nombre 8 d'Albert): Huit, est-ce que ça a vraiment donné 8? Ah, je suis pas sûre, hein regardez! Albert, il dit : Moi j'ai fait 8 avec ça, Madame. On va compter : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Je crois que t'as plié une fois de trop.
Albert : Non!
Enseignante : T'as fait un fois 2 de plus.

8	**Enseignante** : Ok? Alors fais moi un vrai 8. Ça c'est pas huit, c'est 16. Tu peux écrire 16 dessus, mais pas 8.
Extrait 8	

L'intervention de l'enseignante, après le comptage, est brève et cohérente avec la vision multiplicative qu'elle véhicule : elle mentionne d'abord à l'élève qu'il a plié une fois de trop (ligne 4), puis elle reformule en disant qu'il a multiplié par deux une fois de plus (ligne 6). Pour elle, ce sont des propos équivalents, car plier une fois de plus correspond à doubler le nombre de parties une fois de plus. Elle met à nouveau en œuvre le mode d'APP CE1, mais ce n'est pas le cas de l'élève.

5.1.4 Tâche CC : plier la bande en trois parties égales

La prochaine tâche proposée par l'enseignante est de plier la bande de papier en trois morceaux égaux. L'enseignante et la chercheuse présente en classe ont toutes les deux mis l'accent sur le fait que les trois morceaux devaient être égaux.

La première élève à affirmer avoir terminé est Sylvie. Comme on peut le lire dans l'extrait 9, elle obtient 4 sections.

1 2 3	On voit Sylvie se mettre à la tâche. Elle fait comme un pliage en enroulant la bande sur elle-même, en faisant trois plis. Elle ajuste pour s'assurer que les morceaux sont égaux avant de finaliser les plis.
4	**Sylvie** : Oui! J'ai fini!
5	**Enseignante** : Comment t'as fait? Montre-moi si ça fonctionne.
6 7	**Sylvie** : (En même temps que l'enseignante la questionne, elle déplie la bande et la parcourt du regard.) Non, non, Madame, c'est 4. (Plus bas : Mais, je peux couper.)
8 9	**Enseignante** : Ah, Romeo a réussi. Marc t'as réussi. Ihhh, ça a pas marché ça donne 4.
10	**Sylvie** : Mais Madame, ça donne 4, pourquoi?
Extrait 9	

Comme décrit dans les premières lignes de l'extrait 9, Sylvie a effectué trois plis pour tenter d'obtenir trois parties. Elle a fait cela en utilisant une méthode de pliage qui consiste en quelque sorte à enrouler la bande sur elle-même. Dans cette manière de faire, la longueur de la première section sert de guide pour la longueur des autres sections. Ainsi, pour obtenir le bon nombre de parties, il est optimal d'estimer d'abord la longueur qu'aurait chacune d'entre elles une fois le pliage réussi, puis d'utiliser cette longueur pour la première section. Une fois qu'on a enroulé le bon nombre de fois autour de cette première section, on s'arrête, puis on ajuste les longueurs afin de s'assurer qu'on a des parties qui sont toutes égales. Ensuite, on finalise les plis. Ici, il n'est pas clair si Sylvie a fait cette estimation initiale ou pas. Considérant le résultat, il semble cohérent de croire qu'elle n'a en réalité pas anticipé la longueur des parties, mais plutôt débuté avec une certaine longueur arbitraire, et effectué des pliages en enroulant, jusqu'à épuisement de la bande. Il est possible qu'elle ait compté mentalement le nombre de pliages effectués et, en y retrouvant le nombre trois présent dans la consigne, qu'elle ait été sous l'impression qu'elle avait réussi la tâche demandée. Ce n'est pas une façon de faire et de penser que nous avions anticipée. Il s'agit d'une variante du mode d'APP de la superposition des parties avant de compléter le pliage, mais qui mène à un pliage erroné en raison d'une confusion entre le nombre de plis et le nombre de parties désirées, ainsi que d'une première longueur déterminée arbitrairement plutôt qu'estimée. Dans le mode d'APP que nous avions anticipé, l'estimation de la première longueur s'appuyait sur une interprétation mesure de la fraction : puisque la bande doit être divisée en trois parties égales, chaque partie représente le tiers, et donc il faudrait débuter avec une section qui représente environ le tiers de la bande et la répéter. Cette réflexion sur les fractions nous semble évacuée des façons d'agir, de parler, et de penser de Sylvie ici. Nous ajoutons ce mode d'APP comme mode émergent CC5.

Sylvie n'avait toutefois pas perdu complètement de vue que l'objectif était d'obtenir trois parties égales et a mis en œuvre par elle-même, sans sollicitation de l'enseignante, le mode d'APP CC3 : la vérification par comptage. Cela suffit à la convaincre que sa stratégie ne fonctionne pas, mais elle ne comprend pas pourquoi et questionne l'enseignante à ce sujet (ligne 10). L'enseignante est alors occupée avec d'autres interventions et ne répondra jamais à cette interrogation de Sylvie.

Un autre élément intéressant de cet extrait est la suggestion que fait Sylvie de couper sa bande de papier pour retirer la partie additionnelle (ligne 7). Ni l'enseignante, ni la chercheuse ne réagit à ce propos, mais cela suggère bien que l'élève ne voit pas de problème à modifier le tout (l'unité) pour atteindre l'objectif des trois parties égales.

Pendant ces manipulations faites par Sylvie, Romeo, qui est assis à côté d'elle, est parvenu à obtenir trois sections égales.

Enseignante : Romeo, peux-tu m'expliquer comment tu as réussi à faire ça?
D'autres élèves réussissent, l'enseignante mentionne d'écrire 3 dessus quand c'est réussi. D'autres élèves obtiennent 4 morceaux, l'enseignante le souligne et leur dit de recommencer.
Enseignante : Romeo va nous expliquer. Romeo, tu nous montres ce que tu as fait pour arriver à trois morceaux égaux, sans prendre de mesure.
Romeo : J'ai pris les palettes. Et là j'ai plié ça comme ça et puis j'ai essayé de mettre les côtés (Enseignante et élèves réagissent : aaaaah! Bonne idée!) (L'élève tient dans sa main la bande qu'il avait pliée, elle est dépliée, il la replie en parlant. Il fait un accordéon avec la bande, il y a 3 couches. Il pointe les extrémités pour dire qu'il a voulu les aligner.)
Enseignante : Alors vous avez… Il a simplement pis des fois on peut faire un rond comme ça (elle tient une bande bien en hauteur pour montrer aux élèves, elle « enroule » cette bande sur elle-même, mais sans grande précision, juste pour montrer l'idée générale) ça nous aide à déplacer le papier pour qu'une fois qu'il soit bien placé on puisse plier.
Extrait 10

À partir de la ligne 7 de l'extrait 10, Romeo décrit sa façon de faire pour plier la bande en trois parties égales. Il parle de « palettes » (au pluriel), en utilisant le contexte des barres de chocolat mis en place par l'enseignante dès le début. On comprend qu'il fait référence à la bande de papier (au singulier) qui était à plier. Son discours contient plusieurs déictiques (« ça », « comme ça ») et sa phrase est incomplète (« mettre les côtés… »). C'est seulement lorsqu'ils sont accompagnés de ses gestes que les propos de Romeo peuvent être compris. Et on remarque alors qu'il met en œuvre le mode d'APP de superposition approximative des parties avant de compléter le pliage (CC1). C'est aussi le cas de l'enseignante, qui en profite pour montrer aux élèves une autre façon de faire la superposition des parties avant de plier : c'est-à-dire d'enrouler la bande plutôt que de plier en accordéon. Après avoir été interrompue, l'enseignante utilise un questionnement pour rappeler aux élèves que la bande de papier est notre unité, et que même si elle pliée, elle correspond à une palette de chocolat (extrait 11, lignes 1 à 4). Ensuite, elle modélise à nouveau le mode d'APP CC1 (extrait 11, lignes 4 à 6). Encore une fois, les phrases sont incomplètes et c'est avec les gestes de l'enseignante qu'on comprend ce qu'elle fait.

Enfin, à la fin de l'extrait 11, l'enseignante demande aux élèves d'identifier la bande de papier en y inscrivant le nombre de parties.

1	**Enseignante** : On a combien de morceaux…on a combien de palettes dans notre
2	main, là?
3	**Élèves** : Un.
4	**Enseignante** : Encore une palette complète! Et là, pour arriver à séparer en trois,
5	comme il l'a expliqué, on s'arrange pour placer… (elle montre rapidement une bande
6	enroulée et aligne les extrémités) (**Romeo** : Ouais, c'est ça.) Et là ça fonctionne.
7	L'enseignante demande aux élèves d'écrire trois sur la bande de papier et on la met
8	de côté.
Extrait 11	

5.1.5 Tâche CD : plier la bande en six parties égales

Le prochain pliage demandé aux étudiants est le pliage en six parties de même grandeur. Dès le début, Sylvie affirme « Si on a fait le 3, on est capable de faire le 6. » (ligne 5 de l'extrait 12) Cela suggère qu'elle a d'emblée en tête une procédure qui s'appuierait sur ou s'apparenterait à celle utilisée pour le pliage en 3. Elle n'est toutefois pas en mesure d'expliquer d'avance ce que serait cette procédure (lignes 7-8), mais la met en œuvre (lignes 10-11). Les agissements de Sylvie sont cohérents avec une vision multiplicative de la relation entre les différentes étapes du pliage (mode d'APP CD1) : elle plie la bande en trois, puis en deux. Ensuite, elle semble exhiber le mode d'APP de validation du nombre de parties (mode d'APP CD4), alors qu'elle vérifie visuellement qu'elle a obtenu le bon nombre de parties. Lorsqu'on lui demande à nouveau d'expliquer sa procédure, Sylvie utilise beaucoup de déictiques et de gestes. (lignes 19 à 21 de l'extrait 12) Ainsi, ses manières de parler, en elles-mêmes, ne sont pas assez explicites pour être associées à des manières de penser. Toutefois, lorsqu'elles sont coordonnées avec les manières d'agir, nous pouvons interpréter que Sylvie met de l'avant le mode d'APP CD1.

En réaction aux propos et aux gestes de Sylvie, l'enseignante va verbaliser pour rendre plus visibles les étapes effectuées par Sylvie (ligne 23) : elle reformule ses propos pour tenter d'exposer le reste des élèves au mode d'APP relié à la vision multiplicative (mode d'APP CD1) qui est en jeu ici. En plus de mettre en évidence les manières d'agir, l'enseignante rend explicites les manières de penser en ce qui concerne la relation multiplicative entre les pliages successifs et le nombre de parties obtenues. Elle rappelle les différents pliages et les multiplications correspondantes, en les écrivant au tableau. (lignes 26 et 27 de l'extrait 12)

Enseignante : Autre défi. Ah là je vous ai dit que c'était facile au début hein, on pliait en deux, fois deux, fois deux ; là on a fait fois trois ; là vous allez me faire fois six. Vous allez prendre votre palette de chocolat et me la diviser en six morceaux bien égaux. Six morceaux bien égaux. Comment on fait ça? Oui, Madame?

Sylvie : Si on a fait le 3, on est capable de faire le 6.

Chercheuse : Ah ouais, pourquoi?

Sylvie : Ben, parce que on va faire la même chose c'est juste un autre…autour? (avec une main, elle fait le geste d'enrouler)

Chercheuse : Ok, fais-le. On va voir.

11	Sylvie plie en trois en alignant les extrémités, comme on vient de discuter, puis elle
12	plie en deux. Elle déplie, on voit le mouvement des yeux qu'elle compte le nombre
13	de parties.
14	**Sylvie** (crie) : Hey, j'ai fait!
15	Rires.
16	**Chercheuse** : Cool, qu'est-ce t'as fait?
17	**Sylvie** : Comme on a fait tantôt avec le trois.
18	Beaucoup de bruit, difficile à entendre.
19	**Chercheuse** : Tu l'as fait en trois.
20	**Sylvie** : heum…ça, trois, ok. (Reprend sa bande pliée en trois faite plus tôt, la montre
21	dépliée, refait le mouvement pour la plier en trois, puis fait le mouvement de plier
22	en deux à nouveau) Trois, c'est juste on fait…comme ça.
23	**Enseignante (et chercheuse)** : Ahhhh!
24	**Enseignante** : Alors elle a mis les papiers en trois, et ensuite plié en deux. Donc 6
25	c'est égal à 3 fois… (les élèves complètent : 2) (l'enseignante écrit au tableau en
26	même temps).
27	**Enseignante** : Trois fois 2. Vous vous rappelez, 4 on a fait 2 fois 2. 8 c'est deux fois
	deux fois deux. (Écrit au tableau)
Extrait 12	

Dans l'extrait 13, l'enseignante demande aux élèves de montrer leurs bandes de papier pliées en 6 sections afin de vérifier qu'elles sont égales et au nombre de six – les deux critères à respecter pour que le pliage soit correct. L'enseignante exhibe donc ici les modes d'APP de vérification concernant le nombre de parties obtenues (mode d'APP CD4) et concernant l'égalité de la longueur des parties (mode d'APP CD5).

1	**Enseignante** : Prenez le morceau s.v.p. séparé en 6, montrez-le moi, si ça fonctionne.
2	**Enseignante** (repère une erreur chez l'élève près d'elle : Albert) : Oh, oh, ça a pas
3	fonctionné, ça, c'est pas égal.
4	**Enseignante** : Montrez-en 6. Combien de palettes vous avez dans les mains? (Élèves :
5	Une!) Une! Vous écrivez 6 dessus.
Extrait 13	

Aux lignes 2 et 3 de l'extrait 13, l'enseignante repère une bande de papier qui ne satisfait pas un des deux critères : celui de l'égalité des sections. Nos données vidéos ne nous permettent pas de l'affirmer avec certitude, mais on devine alors qu'Albert a réalisé le pliage en procédant par estimation de la longueur des parties désirées. Cela correspond au mode d'APP CD3. On devine aussi que son estimation n'étant pas exactement la longueur du sixième de la bande, il a obtenu un excès ou un manque (une dernière partie trop longue ou trop courte) et qu'il n'a pas considéré cela comme problématique : cela correspond au mode d'APP CD3.1 (s'il ignore le problème) ou au mode d'APP CD3.3 (s'il constate le problème mais le juge négligeable). L'enseignante passe rapidement à autre chose après avoir signalé à l'élève le problème. Elle n'interviendra pas individuellement avec lui à ce propos. Cela suggère qu'elle n'est pas tout à fait consciente qu'un mode d'APP différent de celui qu'elle tente de mettre en place est en train d'émerger, ou encore qu'elle fait le choix de ne pas intervenir davantage pour d'autres raisons, en espérant que la modélisation du mode d'APP attendu soit suffisante pour guider l'élève. L'enseignante enchaîne en concluant la tâche CD comme elle conclut souvent les tâches. D'abord, elle rappelle l'unité, en établissant un lien avec le contexte : chaque bande de papier représente une palette de chocolat entière, même lorsqu'elle a été pliée. Ensuite, elle demande aux élèves d'identifier la bande de papier en y inscrivant le nombre de sections, renforçant ainsi l'importance accordée à cette quantité.

5.1.6 Tâche CF : plier la bande en cinq parties égales

La tâche suivante dans la séquence de l'enseignante requiert que les élèves plient la bande de papier en cinq parties de même longueur. L'enseignante formule cette tâche une première fois (extrait 14), puis discute d'autre chose avec la classe, et présente une deuxième fois la tâche CF (extrait 15). À nouveau, l'enseignante spécifie à la fois le nombre de sections et le fait que les sections doivent avoir la même longueur. (lignes 2-3 de l'extrait 15)

Enseignante : Là maintenant vous allez faire en… (Élèves : douze!) (Elle écrit au tableau) (Élève lit : cinq)

3	**Sylvie** : Hé! Non, ça sera pas égal, ça!
	Extrait 14

D'emblée, lorsque l'enseignante propose de plier la bande en 5 parties, Sylvie s'oppose. Ce n'est pas clair ce qu'elle entend par « pas égal » (ligne 3 de l'extrait 14), mais elle semble remarquer que le pliage en cinq est différent des autres, qu'il posera une difficulté. Dans l'extrait 15, lorsque l'enseignante donne une deuxième fois la consigne du pliage en cinq, Sylvie développe un peu plus sur ce qui ne fonctionnera pas selon elle (lignes 3-7).

1	**Enseignante** : Et là maintenant (distribue de nouvelles bandes) vous essayez de la
2	séparer…de la séparer en cinq! Cinq morceaux, bien égaux!
3	**Sylvie** : Madame, ça marche pas parce que le 5. Regarde! Regarde! Cinq, là…
4	Regarde, y'a deux, puis deux! Ici, qu'est-ce qu'on va faire avec ça? (L'élève montre
5	les doigts de sa main, avec son autre main, elle prend 2 doigts quand elle dit
6	« deux », puis deux autres quand elle dit « deux » à nouveau. Elle pointe ensuite le
7	pouce quand elle dit « Qu'est-ce qu'on va faire avec ça? »)
8	**Roméo** : Ça peut. Ça peut. Ça peut, madame.
9	**Enseignante** : Qu'est-ce qu'on a fait avec le trois, ma chérie?
	Extrait 15

Les gestes que fait Sylvie pour accompagner son explication semblent indiquer que le problème qu'elle perçoit réside dans le fait que cinq est un nombre impair. Elle utilise les cinq doigts de sa main pour représenter les cinq sections qu'on veut obtenir. Elle fait deux paquets de deux, puis mentionne qu'elle ne saurait pas quoi faire avec le cinquième doigt, donc avec la cinquième section. Ce raisonnement laisse entendre une vision multiplicative entre les étapes de pliage : dans les pliages passés, pour doubler, on pouvait plier en deux. De même, dans les décompositions en facteurs notés au tableau par l'enseignante, on retrouve toujours un « fois deux ». C'est possible que l'élève constate la non-parité, ou même la primauté, du nombre cinq et qu'elle conclue que, comme on ne peut pas l'atteindre en doublant quelque chose, on ne peut pas l'atteindre. Il s'agit ici d'une manifestation d'une manière de penser que nous n'avions pas anticipée lors de notre analyse a priori, et que nous avons ajoutée en cours d'analyse. C'est le mode d'APP émergent CF6, qui correspond à considérer la non-parité de cinq comme un obstacle au pliage. Il s'agit d'un mode d'APP qui a comme objet la relation entre le pliage effectué et le résultat obtenu, et non la fraction en tant que telle.

La réponse de l'enseignante à l'objection de Sylvie (ligne 9 de l'extrait 15), sans mentionner directement la procédure visée, invite l'élève à se rappeler ce qui a été fait dans le passé pour un autre nombre impair (et premier), le trois. L'enseignante semble ainsi espérer que Sylvie mette de l'avant des manières d'agir et de penser analogues, et mobilise le mode d'APP visé qui s'appuie sur une superposition approximative et un ajustement des parties avant de compléter le pliage (mode d'APP CF1). Rappelons-nous toutefois que cette même élève, Sylvie, avait eu du mal à mobiliser CC1, le mode d'APP visé similaire pour le pliage en trois. On sait quand même qu'elle est arrivée à mettre en œuvre CC1, et même qu'elle l'a mobilisé à nouveau par elle-même comme étape intermédiaire lors de la réalisation du pliage en six morceaux.

Sur les vidéos, on peut ensuite voir Roméo, le voisin de Sylvie, qui place sa bande en accordéon et travaille à aligner les extrémités. On ne voit pas bien le nombre de couches, et il est ensuite hors-champ, mais ce début de procédure semble cohérent avec les manières d'agir attendues pour ce pliage, et donc avec le mode d'APP CF1.

Sylvie, quant à elle, tente de regarder ce que son voisin fait pour s'en inspirer. Il ne la laisse pas voir. Elle plie en trois avec la méthode de l'accordéon. Elle déplie. Elle plie en deux. Elle écoute une intervention que la chercheuse est en train de faire. Cette intervention porte sur une autre tâche, celle du pliage en six. Sa bande pliée en deux, elle la replie en deux. Puis à nouveau en deux. Elle déplie. Elle balaie du regard et compte qu'il y a huit morceaux. Elle dit : « Ça, c'est huit! ». La chercheuse lui demande si c'est ce qu'on voulait et elle répond que non.

En observant les manipulations de Sylvie, on constate d'abord qu'elle prend à la lettre le conseil de l'enseignante qui lui disait de se rappeler ce qu'ils ont fait pour plier en trois : elle plie sa bande en trois. Il semble ensuite qu'elle constate que cela ne la rapproche pas de son objectif et déplie sa bande. Il est difficile d'attribuer un sens aux manipulations qui suivent (plier en deux à trois reprises). Il s'agit de manières d'agir qu'il est difficile d'associer à des manières de penser. Une hypothèse est que, dans le doute et la confusion, l'élève s'en remet à des manipulations connues : plier en deux. Elle effectue cette action à trois reprises, et on pourrait poser comme hypothèse que c'est parce qu'il aurait été difficile de continuer, la bande pliée étant maintenant plutôt épaisse. Elle n'établit plus le lien entre l'action de plier en deux et la conséquence de doubler le nombre de sections. Ceci se reflète dans le fait que Sylvie n'est pas en mesure de prédire qu'elle obtiendra huit sections égales, et ce, même si ce sont des manipulations et un résultat qu'elle avait déjà expérimentés lors de la complétion de la tâche CE. Puisqu'elle n'anticipe pas le résultat, elle doit déplier et compter, ce qui constitue une vérification par comptage, que nous associons au mode d'APP CF4.

Parallèlement à cela, ailleurs dans la classe, l'enseignante intervient avec Albert. Il effectue les manipulations en dehors du champ de la caméra, mais quand il déplie et montre son résultat à l'enseignante, on observe quatre parties qui ont environ la même longueur et une partie plus petite. L'enseignante mentionne à l'élève que ce n'est pas égal, puis, intervient individuellement avec lui (extrait 16).

Enseignante : On va le faire ensemble. Regarde, premièrement on va le séparer en trois, ça va être plus facile. Ou on sépare en deux. Deux ou trois, c'est quoi que tu décides?
Albert : Deux.
Enseignante : Deux ça t'es à l'aise. Pis après ça, pour faire le 3, il faut que les extrémités ici pi les extrémités là soient toutes égales. Quand on voit que c'est correct, poup!, là on fait notre pli.
Albert : Cinq?
Enseignante : Ça fait 6. J'ai fait deux, fois trois. Six morceaux.
Albert : Et cinq?

	Enseignante : Là, là, c'est quelque chose. Vas-y essaie!
Extrait 16	

Il semble que l'élève avait pris du retard et l'enseignante l'accompagne à compléter le pliage en six, en modélisant le mode d'APP basé sur un raisonnement multiplicatif CD1.

Pendant que l'enseignante est occupée ailleurs, Amanda met de l'avant une procédure que nous n'avions pas anticipée. Il s'agit d'un hybride entre une stratégie d'estimation et une vision multiplicative du pliage, que nous associerons au mode d'APP émergent CF7. Amanda plie d'abord la bande en deux, mais pas au milieu : elle laisse un excès qui semble mesurer environ un cinquième de la bande. Puis, elle replie en deux cette portion de la bande qui est pliée sur elle-même. (Voir figure 5.1)

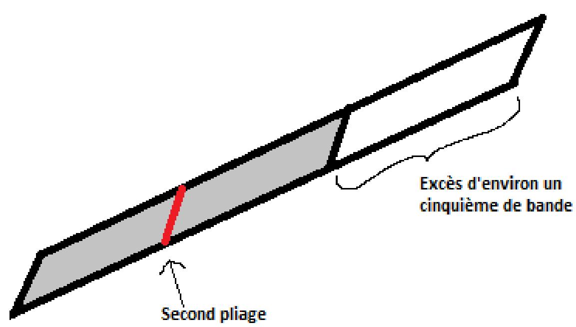

Figure 5.1 : Procédure de pliage d'Amanda

Elle a ainsi quatre parties égales obtenues par deux pliages en deux successifs, et une cinquième partie qui correspond à l'excès laissé initialement. Mentionnons qu'en observant les manipulations d'Amanda sur les vidéos, on voit qu'elle est un peu hésitante et semble décider de sa procédure au fur et à mesure qu'elle la met à exécution. Une fois qu'elle a terminé, elle déplie son papier, le manipule un peu sans but visible, puis refait les mêmes plis que la première fois. Lorsque l'enseignante vient la voir, elle valide visuellement que la bande de papier pliée correspond aux deux critères : il y a 5 sections et elles sont toutes (environ) de même mesure. L'enseignante met donc en œuvre les deux modes d'APP associés à la vérification CF4 et CF5. Elle s'exclame : « Amanda a réussi! ». Ainsi, une validation visuelle des deux critères laisse croire que la procédure réalisée est celle attendue, c'est-à-dire celle découlant d'une superposition approximative des parties avant d'ajuster et de compléter le pliage. Ce n'est pas le cas, ici, comme l'enseignante peut le constater lorsqu'Amanda verbalise sa procédure un peu plus tard (extrait 17).

Amanda : J'ai (*inaudible*) ça comme ça (plie en deux une partie de la bande en laissant un excès), mais j'ai laissé un bout et après je fais comme ça (plie en deux à nouveau la partie pliée, puis rabat l'excès).
Enseignante : Ah, ok. Il faut que tu t'assures que le bout que tu laisses est de la même grandeur.
(…)
Enseignante : Pensez à ce qu'on a fait pour le 3. Le 3 vous vous rappelez on a fait ça. Ok? Est-ce qu'il va falloir utiliser la même technique pour le 5?

Extrait 17

Le fait qu'Amanda prenne la peine d'expliciter ses manières de faire à l'enseignante laisse sous-entendre qu'elle fait confiance à son procédé : même s'il est possiblement issu d'une série de décisions prises sur le vif, elle le cristallise maintenant en une procédure en soi qu'elle propose comme étant une façon d'obtenir un pliage en cinq parties égales. D'ailleurs, la réaction de l'enseignante est justement d'insister sur l'importance de l'égalité des parties. Rappelons-nous que pour l'enseignante, nous sommes en train de travailler les fractions et on cherche une partition exhaustive et égale du tout : chaque section de la bande pliée en cinq doit représenter un cinquième de la bande. On peut croire que pour les élèves, la tâche est simplement une tâche de pliage de bandes de papier, dans un contexte de palettes de chocolat.

L’enseignante poursuit en rappelant aux élèves ce qui a été fait quand on voulait 3 parties égales. On devine qu’elle tente de les guider vers le mode d’APP relié à la procédure de superposition des parties avant de compléter le pliage (CF1) en leur rappelant un mode d’APP similaire (CD1). Marc explique ce qu’il a fait : il a d’abord superposé en roulant, puis en accordéon, pour obtenir 5 étages de même longueur. Ainsi, il met clairement en œuvre le mode d’APP CF1, et l’enseignante approuve en le reformulant à l’intention de toute la classe. De son côté, Roméo met aussi de l’avant le mode d’APP CF1 attendu, en plus d’exhiber une stratégie de validation correspondant au mode d’APP associé au comptage du nombre de parties (CF4).

De son côté, Sylvie continue de tenter de réaliser le pliage en cinq parties égales. Elle présente une bande qui semble être enroulée, mais pas pliée, en affirmant ne pas être certaine (extrait 18).

Sylvie : Je l’ai faite, mais je suis pas convaincue.
Chercheuse : Y’en a combien là des étages.
Sylvie : 2, 3, 4,…je sais pas.
Chercheuse : Y’en faut 5.
Sylvie ajuste son « rouleau », puis elle appuie pour faire le pliage. Elle déplie et compte.
Sylvie : Heille, madame, est 6! Est-ce que je peux avoir un ciseau, s.t.p.?
Chercheuse : Des ciseaux? Non.
Sylvie : Ben…
Chercheuse : Est-ce que si tu enlèves un bout de la barre de chocolat, ça marche ou pas?
(Silence de la part de l’élève)
Chercheuse : Fais comme t’avais commencé. Tu le fais en rond. (La chercheuse enroule la bande sur elle-même)
Sylvie : Comme ça? Ça? (Elle a rabattu une portion de la bande. Elle ne s’apprête pas à rouler, mais on dirait plutôt qu’elle estime la longueur et qu’elle veut plier cette longueur.)
Elle roule. La chercheuse l’accompagne dans l’idée d’ajuster pour aligner les extrémités.
Chercheuse : Je vais compter combien j’ai d’étages. J’ai le bon nombre d’étages, mais il faudrait que mes étages soient *toutes égales*. Je veux que le bout arrive au

22	bout (la chercheuse pointe le bout) pis je plie (la chercheuse plie). Est-ce que tu me
23	suis?
24	Sylvie ne répond pas. La chercheuse lui redonne la bande presque terminée de
25	plier en disant « je te laisse le faire ».
26	Elle le termine, le déplie, et balaie des yeux.
Extrait 18	

Sylvie semble prise au dépourvue. Elle effectue des manipulations un peu à l'aveugle. Sa réaction de surprise lorsqu'elle déplie et compte le nombre de parties obtenues après son pliage indique qu'elle n'est pas en mesure d'anticiper le résultat de ses manipulations (ligne 7 de l'extrait 18). Elle a roulé et appuyé pour plier, peut-être pour faire comme les autres, et a obtenu six parties. Ce n'est pas clair si toutes les parties ont la même mesure. On peut interpréter que Sylvie tente de copier les manières d'agir CF1 qu'elle voit que ses collègues mettent en place, et que Marc a explicitées, mais qu'elle n'arrive pas à les coordonner avec les manières de penser correspondantes. Pour Sylvie, la conservation du tout n'est pas importante.

En fait, l'objectif de la tâche a subi un glissement pour l'élève. Le but de l'activité, qui était de plier la bande de papier en cinq sections égales, semble être réduit au nombre de parties. L'égalité des longueurs des sections n'est plus une priorité, et la préservation de la bande complète comme unité de départ non plus. La chercheuse écarte l'idée de couper l'excès et met l'accent sur l'égalité des parties (à partir de la ligne 13 de l'extrait 18), en modélisant la procédure attendue, cohérente avec le mode d'APP CF1.

La situation d'Albert est similaire à celle de Sylvie. Il présente à l'enseignante une bande pliée en six, mais en ayant caché la sixième partie pour donner l'illusion qu'il n'y a que cinq sections. Or, cela modifie la longueur de la bande totale, et ne conserve pas le tout. L'intervention que fait l'enseignante en réponse à cette proposition d'Albert consiste à modéliser et verbaliser les façons de faire attendues (extrait 19).

Dans les premières lignes de l'extrait 19, l'enseignante explicite les façons de faire associées au mode d'APP visé, CF1. Albert n'arrive pas à les reproduire, et on devine qu'il ne coordonne par les manières de penser correspondantes. Comme Sylvie, il semble se concentrer sur le nombre de parties obtenues, et ne pas prendre en compte les autres conditions de réalisation de la tâche. L'enseignante, de son côté, met l'accent sur l'égalité des sections, comme on peut le constater aux lignes 8, 9, 19 et 20 de l'extrait 19.

Enseignante : Regarde, tu tournes, puis quand tu sais que ton papier à l'intérieur est de la même (inaudible), pis que ça fait quatre… faut que ça fasse, regarde, 1, 2, 3, 4, 5, et là faut vraiment que tu réussisses à faire en sorte que les papiers vont jusqu'au bout.
Marc : 1, …
Enseignante occupée ailleurs. Albert pense avoir réussi.
Albert : Madame j'ai fait comme toi, regarde.
Enseignante : Combien? 1, 2, ah, lala! Regarde, ça c'est *pas égal*! Faut pas que tu fasses plein de tours, tu y vas à peu près, 1, 2, 3, 4, ok? 1, 2, 3, 4, 5, ok? *Bien égal*, tu vois-tu? Garde! Le papier à l'intérieur va au bout…
Albert : Comment t'as fait? Comme ça?
Enseignante : J'ai mis deux doigts, t'sais, j'ai commencé à peu près, j'ai donné une approximation dans ma tête. Cinq, j'ai dit, garde, si je le divise en cinq, là, ce sera pas un gros morceau comme ça. Ok, pis ça sera pas un petit morceau comme ça. Alors j'ai fait à peu près déjà la bonne longueur. Pour pas qu'il m'en reste trop à faire par la suite. Ça marche? (**Albert** : oui) Et là après, là tu peux faire chk-chk-chk-chk-chk comme ça. (**Albert** : 6) Et là, poup!
Albert : 6.
Enseignante : ah, t'as fait 6. Ah, non, mais faut que ce soit *égal* comme ça, regarde. (**Albert** : sept…) Regarde : faut que ce soit tout *égal*.
Albert : C'est difficile.

Extrait 19

5.1.7 Tâche CG : plier la bande en neuf parties égales

La prochaine tâche demandée aux élèves consiste à plier la bande de papier en neuf parties égales.

La première réaction de Sylvie est de dire : « Ben on va faire le 8 pis on va faire même chose qu'on a fait dans le 6 (Enseignante : le huit?) Ben on va ajouter un. Comme on a fait, le 5 a fait le 6. » C'est intéressant comme commentaire, car dans la séquence, le pliage en 6 a été fait avant le pliage en 5. De plus, l'idée d'ajouter une partie à partir d'un pliage précédent n'a jamais fait partie des modes d'APP qui ont été mis de l'avant par l'enseignante, ni de ceux que nous avons pu relever chez les élèves. L'enseignante ne réagit pas à ces propos, et Sylvie ne les approfondit pas davantage. Il serait exagéré de tenter d'interpréter précisément ses manières de penser à ce moment en se basant sur ce seul commentaire, mais il est tout de même raisonnable de croire que Sylvie se situe encore dans une vision additive des relations entre les étapes des pliages (mode d'APP CG2).

Un peu plus tard, Sylvie affirme pouvoir faire le pliage en neuf sections. Sur les images vidéo, on la voit qui commence avec une certaine longueur de bande de papier. Elle semble avoir décidé de cette longueur en estimant. Elle enroule ensuite la bande de papier sur cette longueur, puis elle appuie pour compléter le pli, puis déplie la bande. Elle compte et dit qu'elle a obtenu 12 parties. Elle semble d'abord déçue de ne pas avoir 9 sections, puis contente d'en avoir eu 12. Ce n'est pas clair si les douze parties sont toutes de la même longueur. Ainsi, pour effectuer le pliage, Sylvie met en œuvre le mode d'APP que nous avions anticipé associé à l'estimation de la longueur des parties désirées (CG4). Parce que son estimation était assez loin de la longueur du neuvième de la bande, elle a obtenu plus qu'un excès : elle a obtenu douze parties. C'est en vérifiant le nombre de parties résultant de son pliage qu'elle l'a constaté. Nous associons ce comportement au mode d'APP de validation par comptage (CG5). On remarque toutefois qu'elle ne vérifie pas si les morceaux sont de même longueur. Le critère qui l'intéresse est seulement celui du nombre de sections.

De son côté, Roméo affirme avoir réussi le pliage en neuf. Sur les images vidéo, on le voit qui plie en trois en superposant en accordéon, puis qui plie en deux, puis à nouveau en deux, avant d'affirmer avec assurance « Madame, j'ai fait neuf. »

Enseignante : Comment t'as fait ça, Roméo? Montre-moi. Compte, voir. Moi je pense qu'il y en a plus que 9.
Roméo : 5,6,7,8, 9, …(rires)
Roméo compte en utilisant son doigt.
Élève : T'as fait 9? T'as fait 10?
Roméo : J'ai fait 12. (rires)
Extrait 20

L'enseignante encourage la vérification par comptage (ligne 1 de l'extrait 20). On peut s'étonner que l'élève ne pense pas lui-même à faire cette vérification. On peut aussi se demander quelles façons de penser l'élève déployait pour être certain d'avoir obtenu neuf parties en effectuant cette procédure. L'assurance de Roméo dans sa procédure et dans son affirmation qu'il a obtenu neuf parties indique qu'il s'appuie sur certaines manières de penser qui, dans l'action, mène à une réponse erronée.

Nous avons davantage accès aux façons de penser (associées à ses manières de parler) et de faire de Roméo dans l'extrait 21, qui décrit l'intervention de la chercheuse avec l'élève à la suite de cette première tentative.

La chercheuse demande si on peut obtenir 9 en faisant une stratégie multiplicative comme on avait fait avec 6. Roméo dit non.
Roméo : J'ai essayé. Parce que, pour faire 6, tu as doublé ça (fais un mime de plier en deux avec ses mains), et *pour faire 9, tu dois tripler ça, tripler trois* (montre trois doigts). J'ai essayé, ça… (La chercheuse : Tripler trois!) Mais c'est pas fait.

Chercheuse : Mais moi je pense que ça marche. Ré-essaie! De tripler trois. Comment on ferait pour tripler trois? On commence par plier en trois.

Roméo fait un mime avec ses mains qui semble vouloir dire plier en trois, puis un mime de plier en deux.

Roméo : Et puis tu plies ça, ça donner 6, et puis tu plies encore et ça fait 12.

Chercheuse : Oui, ah, ah! Parce que t'as plié en 2. Pis quand on plie en deux ça fait fois 2.

Roméo : Oooooh! Ok! Je vois maintenant!

Chercheuse : Vas-y!

Roméo prend une nouvelle bande de papier.

Roméo : Attends, j'essaie. (Il plie une bande en trois, puis la plie en deux, puis la plie en trois à nouveau. Puis déplie.)

Sylvie dit que ça va faire 24.

Roméo compte. Il ne les compte pas tous à haute voix.

La chercheuse rejoint Roméo et l'accompagne. Elle prend une nouvelle bande de papier.

Chercheuse : Là, y'a combien de parties?

Roméo : Un. Une seule.

Chercheuse : ok, si tu le plies en trois, y'a combien de parties?

Roméo : Trois. (Fais un trois avec ses doigts)

Chercheuse : Ok, fais-le.

Roméo plie en trois. La chercheuse écrit quelque chose sur la bande. On ne voit pas sur les images ce que la chercheuse écrit.

Chercheuse : Donc là, ça c'est une partie, ça c'est deux parties, pis ça c'est 3 parties. Fait que moi ce que je voudrais c'est que chaque partie soit divisée en trois. N'est-ce pas? Dans le fond tantôt ce que t'as fait sur le gros morceau, t'as pris une partie pis tu l'as divisée en trois. Fait que là tu peux-tu faire la même chose, mais pour chaque partie? Fait que là tu le fais, tu pars de ça, pis tu dis je vais faire ça pis je vais diviser ça en trois.

Roméo prend la bande qui est pliée en trois. La déplie, tente de prendre une des parties et de la plier en trois, la chercheuse l'interrompt.

Chercheuse : Maintenant fais-le quand y'est déjà plié. Prends tout ça (elle reprend la bande et la plie en trois, pour que les trois épaisseurs soient ensemble), pis faut que tu le plies en trois. (Commence le pliage sans le terminer) (**Roméo** : ah, ok) Tu comprends-tu? (**Roméo** : Oui, madame).

La chercheuse lui rend la bande, pliée en trois. Il la plie en trois à nouveau en utilisant la stratégie de l'accordéon. La déplie, compte les morceaux. Il y en a 9.

Chercheuse : Est-ce que tu comprends pourquoi?

Roméo : Oui, madame.

Chercheuse : (en partant de la bande pliée en trois, puis en trois) si je le plie en deux (je le fais en même temps), je vais en avoir combien au total?

Roméo : Dix-huit

Chercheuse : Ah! Ah! Pourquoi?
Roméo : Parce que tu as plié ça, tu as comme divi…multiplié par deux.
Chercheuse : Pis si je le plie en trois (Elle le fait), je vais en avoir combien?
Roméo : 27.
Extrait 21

Les manières de parler employées par Roméo sont cohérentes avec une vision multiplicative entre les étapes du pliage (mode d'APP CG1). Cela laisse entendre qu'il mobilise les manières de penser liées à cette vision, mais qu'il n'arrive pas les actualiser dans ses manières d'agir. Le problème semble être procédural : après le pliage initial de la bande, les seules autres manipulations accessibles à l'élève sont des pliages en deux. Lorsque questionné par la chercheuse sur les manipulations pour tripler trois, l'élève répète les manipulations qu'il avait faites (lignes 8 à 10 de l'extrait 21). Cette fois, il anticipe le résultat correctement. Plus encore, il établit le lien entre l'action de plier en deux et le doublage du nombre de sections obtenues en mentionnant qu'on obtiendra successivement 6 et 12 parties (ligne 10). On conclut que pour Roméo, les manières de penser et de parler sont cohérentes avec la vision multiplicative, mais les manières d'agir pour multiplier se limitent à plier en deux/doubler.

Le deuxième essai de Roméo (lignes 17 et 18 de l'extrait 21) implique cette fois des manipulations différentes : il plie la bande en trois, puis en deux, puis en trois. À nouveau (ligne 20), il doit compter le nombre de sections de bande obtenues afin de vérifier si sa procédure est valide (mode d'APP CG5). Il n'arrive pas à anticiper le résultat en s'appuyant sur sa manière de penser. Les manières d'agir ne sont pas coordonnées avec les manières de parler mise de l'avant plus tôt.

L'intervention de la chercheuse, à partir de la ligne 23, vise à modéliser et expliciter davantage les manières d'agir attendues. À la suite de cet échange, Roméo semble réussir à coordonner les manières d'agir avec les manières de parler et de penser. En effet, il met de l’avant les manières d’agir associées à la vision multiplicative entre les étapes du pliage lorsqu’il complète le pliage amorcé par la chercheuse aux lignes 42 et 43. De plus, les réponses qu’il fournit aux questions de la chercheuse (lignes 46 à 52) nous indiquent qu’il est maintenant en mesure d’anticiper le résultat d’un pliage donné. Dans l’extrait 22, on assiste à un échange qui a lieu entre Roméo et Sylvie. Après que la chercheuse ait demandé à Sylvie si elle a compris les manipulations de l’extrait 21, Roméo lui explique.

Roméo : Tu vois comme tu prends un. Tu plies ça en deux (rabats ses mains ensemble pour mimer le pliage en deux). Ça fait/ T’as un, tu plies ça, ça fait deux. Tu prends deux, tu plies ça, ça fait… (silence) Ça fait combien?
Sylvie rit.
Roméo : Ça fait quatre. Parce que tu doubles ça.
(Discussions hors contexte)
Roméo : Tu prends 4, tu plies ça en deux, ça fait combien? (**Sylvie** : huit!) Quand tu plies ça en deux, ça (**Sylvie** : seize!) multiplie par deux. Si tu plies ça en trois, ça multiplie par trois.
Extrait 22

Dans cet extrait, Roméo met assez clairement de l’avant une vision multiplicative (CG1). Toutefois, même si les manières de parler de Sylvie sont cohérentes avec le mode d’APP que nous avons associé à cette vision (CG1), il serait ambitieux de conclure qu’elle exhibe le mode d’APP CG1, car nous ne savons pas si elle est en mesure de coordonner les manières d’agir, de parler et de penser.

Parallèlement, Marc réalise le pliage en neuf parties égales en une seule étape, et n’exploite donc pas la relation multiplicative entre les différentes étapes du pliage tel qu’il l’avait fait assez clairement pour la tâche CE (pliage en huit parties). En effet, sur l’enregistrement vidéo, on le voit agir. Il estime d’abord la longueur d’une des sections de bande, puis enroule. Il compte les étages au fur et à mesure. Insatisfait, il déroule et recommence. Il tape légèrement le rouleau pour s’aider à aligner les bords. Satisfait, il appuie pour plier. Il déplie, puis compte mentalement, en faisant des hochements de têtes. Enfin, il tend sa bande pliée à l'enseignante. Cette dernière n'est pas disponible et c'est la chercheuse qui intervient avec lui : « Comment tu as fait, le neuf? Est-ce que tu l'as fait de la même façon que le 5, mais en faisant 9? (On devine que l'élève dit oui) Ok, moi je te dis y'a une autre façon de le faire. Regarde ce qu'on a écrit au tableau, est-ce que tu te rappelles comment on a fait le 6? »

Les manières d'agir de Marc sont celles du mode d'APP associé à la superposition des parties avant de compléter le pliage (CG3). Cela peut sembler surprenant pour cet élève, qui avait mis de l'avant assez rapidement un raisonnement multiplicatif pour le pliage en huit parties égales comme on peut le constater dans l'extrait 7. Toutefois, il s'agit d'une façon de procéder qui est valide : les parties de bandes obtenues de cette manière satisfont aux critères d'égalité et de quantité des parties, et le tout demeure inchangé. La chercheuse n'est toutefois pas satisfaite par les manipulations faites par l'élève, et l'oriente vers le mode d'APP associé à la relation multiplicative entre les étapes du pliage (CG1). Ceci nous suggère que l'intention de la chercheuse est de prioriser les stratégies qui font intervenir cette relation multiplicative.

Malgré cette interaction avec la chercheuse, Marc insiste pour que l'enseignante vienne valider son travail. L'extrait 23 présente cette interaction, de même que celle qui a lieu environ au même moment entre l'enseignante et Amanda.

1	**Marc** : Prends, Madame. Prends.
2	**Enseignante** : Ça, c'est…?
3	**Marc** : Neuf. Corrige.
4	**Enseignante** : Alors t'as commencé…Excellent. T'as commencé à faire comme avec
5	trois? Tu l'as séparé en trois. Pis ensuite t'as fait la même chose. C'est ça?
6	*Marc fait un bruit de bouche pour confirmer que c'est le cas.*
7	**Marc** : *Trois fois trois*, ça veut dire…
8	Amanda compte ses parties, elle en a plus que neuf.
9	**Enseignante** (à Amanda) : T'essaies le neuf, encore? Tu te souviens du trois, ma
10	belle? Le trois on faisait ça comme ça, d'accord?

Marc : Tu fais trois, *trois fois trois*.
Enseignante : Je le place. Là tu vois je vais me mouiller un peu les doigts pour que ça m'aide, parce que là, ça devient difficile. Là ça je m'arrange pour que à l'intérieur ça l'aille jusqu'au bout et à l'extérieur aussi. Ça va? Fait que là on sait qu'on a 3. On a fait la même chose avec nos bandelettes. (inaudible) Parce que neuf c'est trois fois trois. Pis si je voulais faire 12, ben *je partirais du trois, pis là je plierais en 2, et en 2. Trois fois quatre, douze.*
Marc : Tu fais *trois, après fois trois*. *Trois fois trois*.
Extrait 23

Il se passe beaucoup de choses en parallèle dans l'extrait 23, et il est donc un peu difficile à lire. Concentrons-nous donc d'abord sur le cas de Marc. Il insiste pour que l'enseignante valide son pliage en neuf parties. À la vue du produit fini, et possiblement à cause des modes d'APP exhibés dans le passé par ce même élève, l'enseignante conclut que l'élève a effectué les manipulations cohérentes avec une vision multiplicative. Lorsqu'elle le questionne à ce sujet, l'élève répond oui avec son langage non verbal (ligne 6 de l'extrait 23), laissant sous-entendre qu'il a plié la bande de papier en trois, à deux reprises. Ceci est surprenant pour nous, car nous avons bien vu dans les vidéos que ce ne sont pas les manipulations qu'il a faites. De plus, alors que l'enseignante décrit les manières d'agir cohérentes avec le mode d'APP associé à la vision multiplicative (CG1), Marc va de lui-même mettre de l'avant les manières de parler qui lui sont associées en disant « trois fois trois » à plusieurs reprises au cours des échanges de l'extrait 23 (lignes 7, 11 et 19). La première fois qu'il le fait, d'ailleurs (ligne 7) il ajoute même « ça veut dire ». Gardons aussi en tête que juste avant que Marc consulte l'enseignante, il avait discuté avec la chercheuse qui l'avait orienté vers une vision multiplicative en lui rappelant ce qui avait été effectué dans le cadre de la tâche de pliage en six parties égales. Il est raisonnable d'interpréter alors que Marc fait lui-même le passage entre les actions (plier en trois à deux reprises) et le raisonnement multiplicatif sur le nombre de parties qui en résultent. De ce fait, il semble que Marc exhibe les manières de parler et de penser du mode CG1 et que, s'il était sollicité, il pourrait y coordonner les manières d’agir. Or, l’enseignante croit qu’il l’a déjà fait et intervient donc davantage avec Amanda.

De son côté, Amanda a obtenu un trop grand nombre de sections dans sa bande de papier. En regardant les données vidéos, on peut voir les manipulations qu’elle a complétées avant cette interaction. D’abord, elle plie en « accordéon » sa bande de papier à partir d’une première longueur arbitraire. Elle la déplie, la balaie du regard, puis recommence le même type de pliage en prenant une première longueur arbitraire plus petite. Elle la déplie à nouveau, puis la plie en deux à deux reprises. Elle la déplie à nouveau, et compte les parties. À ce stade, la bande a été pliée et dépliée trois fois et les traces de plis sont nombreuses et un peu chaotiques, ce qui complique le comptage. Elle tente d’aplatir la bande de papier, puis recommence une procédure accordéon à partir d’une première estimation. Les plis sont plus facilement visibles et Amanda compte à haute voix les sections, jusqu’à neuf. Elle arrête de compter après neuf, mais il reste des parties. C’est à ce moment que l’enseignante arrive (ligne 9 de l’extrait 23) pour intervenir. Au cours des manipulations, Amanda a donc mis de l’avant à quelques reprises le mode d’APP relié à l’estimation de la longueur des parties désirées, et considérait l’excès ou le manque comme une erreur (mode d’APP CG4.4). De plus, pour réaliser qu’il y avait un excès ou un manque, ou que son pliage n’était pas une réussite, elle procédait par un comptage du nombre des parties (mode d’APP CG5). Aussi, lorsqu’elle a tenté de plier en deux à plusieurs reprises, il s’agit de manières d’agir liées à l’idée multiplicative, mais qui ne semblent pas coordonnées avec une manière de penser particulière. On dirait davantage qu’il s’agit d’une tentative d’obtenir des résultats concluants en reproduisant des manipulations qui étaient appropriées dans le passé. Rien ne nous indique qu’Amanda était en mesure d’anticiper le nombre de parties que ses manipulations allaient engendrer. L’intervention de l’enseignante, quant à elle, utilise un retour au mode d’APP de pliage en trois parties égales par superposition des parties avant de compléter le pliage (mode d’APP CC1), puis verbalise le mode multiplicatif attendu (CG1). On remarque que l’enseignante met beaucoup l'accent sur la technique du premier pliage en trois, allant jusqu'à suggérer de se mouiller les doigts, et insistant sur l'alignement des extrémités. Ce dernier point est important pour elle car il est fortement relié à l'égalité des parties obtenues. La relation multiplicative entre les étapes du pliage, quant à elle, est implicite lors de l'explication « parce que neuf, c'est trois fois trois », de même que dans l'exemple supplémentaire du pliage en douze. D'ailleurs, dans cet exemple, l'enseignante passe directement de « pli[er] en deux, et en deux » à « fois quatre ». Le double deux devient un quatre sans mention, et nous devinons que c'est parce que l'enseignante juge que ça a été abordé dans les tâches précédentes et que ça ne représente plus un enjeu.

Un peu après l'échange reporté dans l'extrait 23, la chercheuse s'entretient avec Marc et Albert afin de valider leur interprétation de l'effet des différentes étapes de pliage sur le nombre de sections. La première fois que la chercheuse questionne Marc et Albert sur l'effet de plier en deux, les deux élèves fournissent une réponse erronée (lignes 3 et 4 de l'extrait 24). La chercheuse n'est pas satisfaite et répète la question en reformulant légèrement. Cette fois, la réponse de Marc correspond à celle attendue. Albert est toujours témoin de la conversation, mais n'y participe pas. La chercheuse explicite la relation entre l'action de plier en deux et le doublement du nombre de parties engendrées, et l'élève approuve. Elle passe ensuite au pliage en trois, que l'élève associe avec le fait de tripler le nombre de parties. Marc semble en mesure d'anticiper l'effet multiplicatif d'ajouter une étape au pliage et la chercheuse paraît satisfaite.

Chercheuse : Ok, j'ai une question pour vous. Celui-là (tient une bande pliée) on l'a fait en neuf. Si je plie en deux comme ça je vais avoir combien de parties?
Marc : 12.
Albert : 12.
Conversation hors sujet pour demander à Albert de replacer la caméra.
Chercheuse : Donc si j'ai neuf, je le plie en deux, je vais avoir combien de parties?
Marc : Heum, dix-huit.
Chercheuse : Ah, ah! Pourquoi?
Marc : Parce que neuf fois deux, dix-huit.
Chercheuse : Ok, alors quand je le plie en deux, ça fait fois deux?

Marc : Ouain.

Chercheuse : Ok, maintenant si j'ai 9. Pis que je plie en trois.

Marc : 27.

Chercheuse : Pourquoi?

Marc : Parce que trois fois 9 ça donne 27.

Chercheuse : Super!

Extrait 24

5.1.8 Tâche CJ : Placer les bandes pliées en ordre croissant de grandeur des morceaux

La prochaine tâche n'est pas proposée à toute la classe en même temps, mais est plutôt mentionnée aux élèves par la chercheuse ou par l'enseignante au fur et à mesure que les élèves semblent avoir complété les tâches de pliage. On est ici dans un objectif différent : il ne s'agit plus pour les élèves de produire de nouvelles bandes pliées, mais bien de classer toutes celles dont ils disposent selon un ordre croissant de la grandeur des morceaux. L'attention était jusqu'à présent centrée sur chacune des bandes, individuellement, une à la fois. À partir de ce moment, il sera requis de placer les bandes en interactions, les comparer les unes aux autres.

Les premiers élèves à qui on demande ce classement sont Marc et Albert (extrait 25).

Chercheuse : Je vais te donner une autre mission. Mais ce sera pas du pliage mon autre mission. Tu vas prendre tout ce que t'as fait, pis tu vas les placer en ordre (avec sa main, la chercheuse fait un geste comme si elle indiquait des lignes une au-dessus de l'autre)

Marc mentionne que ce n'est pas Albert qui les a faites.

Chercheuse : (rires) Tu vas prendre tout ce que vous avez fait, pis tu vas les placer en ordre (encore le geste de la main) croissant de grandeur des morceaux. Donc déplie-les (elle prend une bande qu'elle déplie), pis prends toutes tes palettes de chocolat… elle attend pendant qu'Albert déplie)

Discussion hors contexte, la chercheuse demande aux deux garçons de travailler ensemble.

Chercheuse : Place-les en ordre croissant de grandeur des morceaux. (dit lentement) Est-ce que tu comprends ce que j'ai dit?

Chercheuse : Travaillez ensemble, placez-les en ordre croissant de grandeur des morceaux.
Extrait 25

Sur les images vidéo, on voit les manipulations de Marc. Il ne communique pas beaucoup avec Albert, il semble travailler individuellement. Certaines bandes sont déjà une au-dessus de l'autre. Chaque fois que l'élève prend une nouvelle bande dans le paquet de bandes pliées, il semble la comparer avec les autres (visuellement) et la placer au bon endroit. De haut en bas, l'ordre est l'ordre décroissant de grandeur des morceaux. Il est difficile de savoir si c'est parce qu'il travaille pour faire un ordre croissant de bas en haut selon la grandeur des morceaux, tel que demandé, ou bien s'il compare plutôt le nombre de morceaux, et fait alors un ordre croissant de haut en bas. Pour cette tâche, nous avons accès seulement aux façons d'agir de Marc. Ces dernières sont compatibles avec le mode d'APP que nous avons associé à la comparaison visuelle des parties des bandes de papier pliées (mode CJ3).

5.1.9 Tâche CH : Identifier à quelle fraction de la bande de papier correspond chacune des parties (fraction unitaire)

La prochaine tâche que la chercheuse propose aux élèves, de façon informelle, consiste à nommer certaines des fractions. Cela a d'abord lieu dans un échange entre la chercheuse et Amanda et Marc. Mentionnons que la tâche précédente, de classement des bandes de papier, a déjà été réalisée par ces élèves.

Chercheuse : Ok, cette partie-là (avec ses mains, elle pointe quelque chose sur la bande en haut de leur classement, c'est la bande divisée en deux parties égales ; elle encadre avec ses index une des parties de la bande) ça représente… ça représente… Commentaire/réponse inaudible de Marc. **Chercheuse** : Juste cette partie-là, là. Ça représente quelle *fraction* par rapport à toute la barre de chocolat? Amanda prend la bande qui était tout en bas du classement, et la place tout en haut.

Chercheuse : Non, c'est pas ça ma question. Ma question c'est ça, là (elle refait un mouvement qui encadre la partie de la bande divisée en deux, puis la pointe d'un seul doigt), si je veux l'exprimer comme une *fraction* (une de ses mains pointe le tableau), comme les *fractions* qu'on a fait au début/
Amanda : Ah, c'est un *sur* deux.
Chercheuse : Un sur deux! Tout le monde est d'accord? (**Élève** : Oui.) Ok. Et ça? (Avec ses deux index, la chercheuse encadre une partie de la bande divisée en 3)
Marc : Un *sur* trois.
La chercheuse pointe la bande divisée en quatre.
Marc : Un *sur* quatre.
Chercheuse : Ok, pis ça? (La chercheuse est encore sur la bande divisée en 4, mais avec ses index elle encadre deux parties collées de la bande ; elle encadre donc la moitié de la bande)
Amanda : Deux *sur* quatre.
Chercheuse : Ah, c'est bon!
Extrait 26

La confusion d'Amanda au début de l'échange (ligne 7 de l'extrait 26) semble due à une mauvaise compréhension de la question. On pourrait croire qu'elle ne comprend pas vraiment ce que veut la chercheuse, et a comme réaction de penser que si elle lui pose des questions, cela signifie peut-être qu'elle a fait quelque chose d'erroné et que quelque chose doit être changé. On peut se demander si cette confusion est liée au contexte de langue seconde. La chercheuse reformule.

L'utilisation du mot « fraction », par la chercheuse, dans chacune des formulations de sa question est une nouveauté (lignes 5, 10 et 11 de l'extrait 26). Depuis le début de la séquence de tâches de pliage des bandes de papier, il y a environ 30 minutes, l'idée qu'on travaille avec des fractions n'était plus du tout présente dans les dialogues avec les élèves. Plusieurs indices nous suggèrent que l'idée restait dans les intentions de l'enseignante et de la chercheuse, mais ce n'était pas présent explicitement dans les interactions avec les élèves jusqu'à ce moment. C'est peut-être aussi cela qui a pris les élèves au dépourvu. Après reformulation, et après référence par un mouvement de la main au rappel de la définition d'une fraction fait par l'enseignante en début de cours (ligne 10 de l'extrait 26), les élèves semblent avoir compris les attentes de la chercheuse. Ils donnent les réponses attendues à toutes les questions de cette dernière, même quand il ne s'agit pas d'une fraction unitaire (lignes 18 à 22).

Les manières de parler employées par Amanda et Marc dans leurs réponses sont très similaires et utilisent le mot « sur » (lignes 12, 15, 17 et 21 de l'extrait 26). On peut associer ces façons de parler à une interprétation « partie/tout » de la fraction, ainsi qu'à l'écriture symbolique des fractions. Pour les fractions unitaires, nous associons donc les réponses des élèves au mode d'APP anticipé que nous avions associé à l'utilisation du symbolisme ou du langage standard en mathématique, et qui considère la bande comme unité de référence (mode d'APP CH1). Il semble clair que pour les élèves comme pour la chercheuse, l'unité de référence est la bande complète, et que l'interprétation des fractions de Behr *et al.* (1992) qui ressort est $\frac{1}{n}(1 - bande)$. Pour la fraction « deux sur quatre », l'unité de référence semble demeurer la bande entière, et on associe comme interprétation de Behr *et al.* (1992) est $\frac{k}{n}(1 - bande)$. Ainsi, le mode d'APP anticipé que les élèves exhibent, principalement oralement, est celui associé à l'utilisation du symbolisme et du langage standard et qui considère la bande comme unité (mode d'APP CI5).

L'échange qui suit (extrait 27) est davantage un exposé de la part de la chercheuse sur l'écriture symbolique des fractions. Les élèves ayant démontré, à l'oral, les modes d'APP attendus, il semble que la chercheuse cherche à les formaliser et à y mettre des mots qui appartiennent aux savoirs standardisés.

1 **2**	**Chercheuse** : Donc quand on écrit une fraction, là. On écrit … est-ce que tu sais comment ça s'appelle en haut?
3	**Albert** : Ouais.
4 **5**	**Chercheuse** : Le numérateur, est-ce que ça te dit quelque chose? Nu-mé-ra-teur (lentement, en écrivant au tableau)
6	**Amanda** : Numérateur. (Répète à voix basse : Numérateur.)

7	**Chercheuse** : Donc ça, c'est, dans notre bande de chocolat, c'est quoi qu'on écrit en-
8	dessous? Ça représente quoi dans notre barre de chocolat?
9	**Marc** : Tout le chocolat.
10	**Chercheuse** : Le TOUT le chocolat, hein. Le chocolat au complet. Comment dans
11	TOUTE notre barre de chocolat, combien on a de morceaux.
12	**Chercheuse** : Pis en haut, c'est…?
13	**Amanda** : Moitié.
14	**Chercheuse** : Ouain, dans ce cas-là c'est la moitié.
15	**Amanda** : C'est divisé.
16	**Chercheuse** : Dans le fond c'est le nombre, c'est le nombre de parts qu'on prend.
Extrait 27	

L'accent mis par la chercheuse sur les mots de vocabulaire, entre autres sur le mot « numérateur » en le prononçant lentement et en y associant une graphie (lignes 4 et 5 de l'extrait 27), semble indiquer qu'elle est consciente du contexte de langue seconde. Il s'agit non seulement d'introduire ou de rappeler des mots de vocabulaire, mais de le faire avec des élèves qui sont aussi des apprenants de la langue de scolarisation.

En ce qui a trait au sens de la fraction, la chercheuse verbalise au cours de cet échange le sens partie/tout. Elle traite de façon distincte le numérateur et le dénominateur, en discutant de ce que chacun représente. Les expressions « combien on a de morceaux » et « le nombre de parts qu'on prend » nous indique qu'elle ne traite pas d'une fraction particulière, mais d'un cas générique. Cela ne semble pas être le cas d'Amanda qui, lorsque questionnée sur le numérateur, répond « moitié ». Il est vrai que dans la dernière fraction traitée (deux sur quatre, fin de l'extrait 26), le numérateur était la moitié du dénominateur. C'est difficile ici de conclure sur l'interprétation de la fraction véhiculée par le discours d'Amanda, mais il semble clair que l'élève traite du cas particulier de la fraction deux sur quatre. Elle renchérit ensuite en disant « c'est divisé ». Elle semble donc associer la fraction à l'opération de division, mais on ne peut savoir à quoi elle fait référence de façon plus précise. La chercheuse n'a pas investigué cela, et semblait vouloir enchaîner assez rapidement dans la formalisation du sens partie/tout et de l'écriture symbolique des fractions.

C'est à un autre moment de la séance que la chercheuse avait abordé la tâche CH avec Roméo. Cette interaction est présentée dans l'extrait 28.

Chercheuse : Si je veux écrire ça, ok, cette partie-là. (La chercheuse colorie une partie de la bande qui a été pliée en deux parties égales) Ça ici, en fraction?

Roméo : Un sur deux. (Pointe une des parties en disant un, et l'autre en disant deux)

Chercheuse : Un sur deux. Super. Et ça ici? (Cette fois, elle ne semble pas colorier mais encadrer avec son doigt d'une part et le crayon de l'autre une des parties de la bande pliée en trois)

Roméo : Un sur trois.

Chercheuse : Ah, ok. Super. Donc dans notre fraction ce qu'on écrit en bas (la chercheuse se tourne vers le tableau et écrit, mais la caméra bouge et on ne voit plus ce qu'elle fait), ce qu'on écrit en bas c'est quoi?

Roméo : C'est le, c'est le, c'est…tout…en général.

La discussion est interrompue par l'enseignante qui s'adresse à toute la classe.

Extrait 28

Les réponses fournies par Roméo aux lignes 3 et 7 indiquent l'interprétation des fractions de Behr *et al.* (1992) $\frac{1}{n}(1 - bande)$, et semblent cohérentes avec le mode d'APP anticipé associé à l'utilisation de langage standard ou de symbolisme pour nommer les fractions, et la considération de la bande comme unité de référence (mode d'APP CH1). Encore une fois, bien qu'il s'agisse de réponses à l'oral, l'utilisation du mot « sur » peut être associé à l'écriture verticale de la fraction et au sens partie/tout. La chercheuse établit un lien avec l'écriture symbolique de la fraction, justement, en demandant à l'élève de généraliser sur « ce qu'on écrit en bas » (ligne 8 de l'extrait 28). Ici, elle n'utilise pas le vocabulaire mathématique. La réponse de l'élève est cohérente avec la vision partie/tout. Toutefois, mentionnons que toutes les fractions traitées dans cet échange sont des fractions unitaires.

5.1.10 Tâche K : Comparer des fractions unitaires

En petit groupe avec la chercheuse

Dans un premier temps, cette tâche n'a pas été proposée à tous les élèves de la classe, mais seulement à un petit groupe. Il ne s'agissait pas non plus d'une tâche qui avait été prévue dans la séquence. En effet, c'est dans le feu de l'action que la chercheuse, alors qu'elle intervenait avec le petit groupe composé d'Albert, Roméo et Amanda, a demandé aux élèves d'effectuer des comparaisons deux à deux. Le classement en ordre croissant de toutes les bandes a déjà été fait, mais il semble que la chercheuse ait décidé de revenir sur la comparaison entre les grandeurs de parties. L'intention est probablement d'établir un lien entre les grandeurs des morceaux, qui sont accessibles visuellement et qui ont pu être utilisées pour le classement en ordre croissant, et le nombre de morceaux, et éventuellement de pouvoir comparer des fractions en utilisant leur écriture symbolique. De plus, ce n'est pas clair si le classement a été réalisé par les élèves en s'appuyant sur une comparaison de la grandeur des morceaux, ou même si la tâche avait été bien comprise et qu'ils n'ont pas simplement classé les bandes de papier en ordre du nombre de parties obtenues par le pliage sans se concentrer sur la longueur de chacune de ces parties.

Ainsi, dans l'extrait 29, la chercheuse demande aux élèves de comparer les sections de la bande pliée en quatre avec celles de la bande pliée en cinq. La question est initialement mal comprise, puis reformulée par la chercheuse (ligne 9 de l'extrait 29). Marc et Amanda offrent tous les deux la réponse attendue, qui serait cohérente à la fois avec un mode d'APP associé à une comparaison numérique utilisant le dénominateur comme indicateur du nombre de parties (nouveau mode d'APP K1) ou avec un mode d'APP associé à une comparaison visuelle des bandes de papier pliées comme représentations concrètes des fractions (nouveau mode d'APP K3.1). Il n'est pas possible de cibler de façon plus précise un mode d'APP avec seulement ces courtes réponses. De son côté, Albert répond de façon erronée que les sections sont de la même grandeur. Il est difficile de savoir s’il a effectué une comparaison visuelle erronée ou s’il n’a pas compris la question (comme Amanda à la ligne 6, avant de demander de clarifier).

Chercheuse : Ici, si j’ai 5 morceaux (elle pointe la bande de papier pliée en 5 parties égales). 5 parties.
Amanda : 1 sur 5
Chercheuse : Est-ce que chaque morceau est plus grande ou plus petite que quand j’en ai 4?
Amanda : Égales.
Chercheuse : Sont égales?
Amanda : Ah, attends. C’est quoi la question?
Chercheuse : Le morceau, est-ce que y’est plus grand ou plus petit quand j’en ai 5? (elle pointe les bandes pliées en quatre et en cinq)
Marc : (pointe la bande pliée en 5 parties égales) Plus petit.
Albert : Même grandeur.
Amanda : Plus petit! Plus petit!
Chercheuse : Plus grand ou plus petit?
Amanda : Plus petit.
Chercheuse : Plus petit. Ok. Et si j’avais huit morceaux, y’est plus grand ou plus petit que ça?
Marc (sans hésitation) : Plus petit.
Chercheuse : Ok, si j’avais 1000 morceaux?
Marc : *Plus, plus, plus, plus, plus* petit! (rires)
Extrait 29

L’interaction se poursuit avec une question de comparaison avec la bande pliée en huit. La comparaison visuelle directe est moins accessible, ici, car les bandes sont placées en ordre croissant et donc la bande pliée en huit n’est pas adjacente à celle pliée en quatre, ni même à celle pliée en cinq. Ainsi, lorsque Marc fournit la réponse attendue, sans hésitation, il est raisonnable pour nous d’associer cela au mode d’APP associé à la comparaison numérique considérant le dénominateur comme un indicateur du nombre de parties (mode K1). En outre, lorsque la chercheuse propose de comparer avec une bande hypothétique pliée en mille parties égales, la réponse de Marc est très évocatrice d'une façon de penser qui établit le lien entre le nombre de morceaux et la grandeur des morceaux. En effet, non seulement il répond que les sections de la bande seraient plus petites, mais il utilise la répétition du mot « plus » pour signaler que les morceaux seraient très petits (ligne 20 de l'extrait 29). Il déploie ainsi le raisonnement selon lequel comme le tout demeure le même (la bande de papier) et que les morceaux sont de même grosseur, s'il y a un très grand nombre de morceaux, chacun de ces morceaux sera très petit. Nous affirmons donc que Marc exhibe clairement à cet instant le mode d'APP K1.

La suite de cette interaction est présentée dans l'extrait 30. L'utilisation du mot « finalement » par la chercheuse (ligne 1) semble signaler qu'elle veut conclure et formaliser ce qui vient d'être dit. Elle fait référence à la première comparaison qui a été faite dans l'extrait précédent, mais cette fois, utilise les mots « quart » et « cinquième ». Ces mots n'ont pas été utilisés jusqu'à présent dans la séance. On référait plutôt à « une partie de la bande pliée en quatre », ou même à « un sur quatre », mais pas au « quart ». De plus, la chercheuse utilise une notation écrite symbolique en écrivant au tableau les fractions avant de demander aux élèves de les comparer. Il s'agit de fractions qui ont été comparées quelques minutes plus tôt seulement, mais cette fois, elles sont décontextualisées, et on utilise une écriture symbolique et des mots de vocabulaire nouveau. Il semble que la chercheuse vise à solliciter le mode d'APP K1 chez les élèves, ou à vérifier s'ils sont en mesure d'exhiber ce mode d'APP si on ne réfère pas au matériel de manipulation.

La réponse fournie par Amanda initialement (ligne 8 de l'extrait 30) n'est pas celle attendue. Il est difficile pour nous d'inférer les façons de penser derrière cette réponse, mais il semble qu'Amanda n'ait pas établi un lien entre d'une part, la fraction unitaire écrite de façon symbolique « $\frac{1}{5}$ » ainsi que l'expression « un cinquième » et, d'autre part, la fraction « un sur cinq » dont il avait été question plus tôt et qui était associée à une section de la bande pliée en cinq. Une hypothèse serait alors qu'en comparant les fractions écrites « $\frac{1}{4}$ » et « $\frac{1}{5}$ », Amanda ait comparé les nombres à la position du dénominateur, faisant fi du reste de l'écriture. Le nouveau mode d'APP que nous associons aux façons de parler et d'agir d'Amanda est donc celui de la comparaison numérique utilisant le dénominateur comme un indicateur de la grandeur des parties ou de la valeur des fractions (mode d'APP K2). Marc, quant à lui, propose la réponse attendue, cohérente avec ses comportements récents, dans lesquels il manifestait de façon assez claire le mode d'APP de comparaison numérique avec le dénominateur associé au nombre de parties (K1).

Chercheuse : Donc finalement ce qu'on pourrait dire (replace des bandes déplacées), mettons que je prends mon quart pis mon cinquième (pointe en même temps la bande pliée en 4 et la bande pliée en 5), est-ce que c'est vrai…est-ce que si…

La chercheuse se déplace. Elle va au tableau et y écrit ¼ et 1/5.

Chercheuse : Ici, j'ai UN quart, pis UN cinquième. Qu'est-ce qui est plus grand? Un quart? Ou un cinquième? Qu'est-ce qui est plus grand?

Amanda : C'est le plus gr…cinquième, un cinquième!

Marc : Un quart!

Chercheuse : C'est plus grand? Un cinquième?

Elle écrit au tableau le symbole d'inégalité qui dit que 1/5 plus grand que ¼.

Moment un peu chaotique, on n'entend pas très bien. Finalement Amanda semble dire que le quart est plus grand. La chercheuse efface et change le signe d'inégalité.

Amanda : Un quart c'est plus grand. Parce que 100 divisé par 4 ça donne 25 pis 100 divisé par 5 ça donne 20. (Elle l'écrit au tableau en même temps qu'elle le dit)

Chercheuse : Ok, ou est-ce que tu vois 100? (On devine que l'élève fait un signe qui signifie qu'elle ne sait pas) T'as pris… t'as pris 100. Ok. Si on regarde nos bandes, on remarque que, regarde, on peut aussi le voir avec les bandes, hein (elle prend la bande pliée en 4 et celle pliée en 5) Un cinquième, c'est lequel?

Marc pointe le morceau de la bande.

La chercheuse colorie un morceau de la bande pliée en 5 pour l'associer à la fraction un cinquième.

26	**Chercheuse** : Puis ça, un quart (elle colorie une partie de la bande pliée en 4). On voit que un cinquième c'est plus petit, on avait raison.
Extrait 30	

La chercheuse décide de poursuivre le travail avec Amanda. Cette dernière révise sa réponse, et fournit une explication de son raisonnement aux lignes 15 et 16 de l'extrait 30. Le raisonnement alors verbalisé est en rupture avec ce qui a été fait au cours de la séance jusqu'à ce moment. Le sens de la fraction utilisé ici est celui de la fraction comme opérateur. L'élève utilise une quantité qu'elle choisit arbitrairement, et associe le quart à une division par quatre de ce nombre (et le cinquième à une division par cinq). Ce qui est sous-entendu est que l'utilisation de « ¼ » comme opérateur correspond à deux opérations : une multiplication par le numérateur, 1, et une division par le dénominateur, 4. Toutefois, comme il s'agit d'une fraction unitaire, la multiplication laisse la quantité initiale inchangée et peut ne pas être mentionnée. C'est d'ailleurs possiblement ce que fait l'élève. On peut se questionner à savoir comment l'élève aurait géré la situation avec une fraction qui n'est pas unitaire. Peut-être qu'alors le sens opérateur n'aurait pas fait surface. Néanmoins, nous associons la réponse d'Amanda à un mode d'APP émergent de l'utilisation d'un tout numérique et de calcul des quantités (mode d'APP émergent K4).

L'intervention de la chercheuse par la suite (lignes 18 à 26) consiste en un retour au matériel de manipulation, au cours duquel elle associe explicitement les mots « quart » et « cinquième » à des parties de bandes pliées avant de faire la comparaison visuelle pour valider. En coloriant une section de la bande pliée en cinq, elle fait appel au sens de la fraction partie/tout. Le mode d'APP visé semble être celui associé à la comparaison visuelle des représentations concrètes (K3.1).

En plénière avec l'enseignante

Dans un deuxième temps, la tâche de comparaison de fractions deux à deux a été donnée à toute la classe par l'enseignante au cours d'une activité de quiz réalisée en plénière. En effet, après avoir terminé la séquence de pliages, et avoir passé un certain temps à intervenir en individuel ou en petits groupes, l'enseignante a mis en place un jeu-questionnaire auquel elle a fait participer toute la classe. La suite de l'analyse portera donc sur les tâches proposées par l'enseignante au cours de ce jeu-questionnaire improvisé.

La première question du quiz consiste donc à comparer des paires de fractions écrites au tableau. L'enseignante formule ainsi la consigne : « Vous avez à placer plus petit, plus grand ou égal (elle dessine les symboles au tableau) entre les nombres que je vous écris, entre les nombres que je vous écris. »

Il ne s'agit pas de tâches de comparaison qui avait été préparées en planification de la séance, et donc on déduit que l'enseignante les improvise. Les élèves écrivent leurs réponses sur des feuilles plastifiées individuelles à l'aide de marqueurs effaçables à sec. Il leur est demandé d'écrire sur leur feuille les fractions ainsi que les symboles de comparaison.

À l'aide de la caméra, on voit que Marc procède assez directement. Il écrit la réponse attendue pour la comparaison de ½ avec ¼ assez rapidement. Il compare ensuite 1/7 et 1/11 : il écrit la première fraction, fait une brève pause avant d'écrire le symbole, puis écrit la deuxième fraction. Il fait la même chose en comparant 1/12 avec 1/9. Il passe à la comparaison suivante : 1/6 et 1. Cette fois il écrit d'abord la fraction, puis 1, puis le symbole. Il termine avec la comparaison de 1 avec ½, où il procède dans le même ordre que les premières comparaisons : écrire le premier nombre, le signe, puis le deuxième nombre. Toutes ses réponses sont correctes. Cette tâche ne semble pas difficile pour

Marc, et il est raisonnable pour nous de penser qu'il continue de mettre en œuvre le mode d'APP K1.

L'extrait 31 présente le début de la correction de cette question de quiz par l'enseignante, en plénière. On remarque dès la première ligne l'utilisation par l'enseignante des mots « demie » et « quart », qui n'ont pas été introduits à tout le groupe. Les réponses suggérées par les élèves ne sont pas unanimes. L'intervention que choisit de faire l'enseignante (lignes 4 à 8) est alors de représenter chacune des fractions par un dessin et de poser à nouveau la question. Dans le dessin, elle utilise comme représentation des pizzas. C'est donc le mode d'APP K3.2 que l'enseignante met de l'avant ici. La verbalisation de l'enseignante semble traduire l'interprétation de Behr *et al.* (1992) selon laquelle la demie représente 1($\frac{1}{2}$-pizza) et le quart représente 1($\frac{1}{4}$-pizza). Il nous paraît aussi surprenant que l'enseignante décide de s'appuyer sur des touts circulaires et d'utiliser un contexte de pizzas. Bien qu'il s'agisse d'un contexte très souvent utilisé dans le milieu scolaire lorsqu'on traite des fractions, il s'agit d'une rupture avec les touts rectangulaires et le contexte des bandes et des barres de chocolat qui ont été exploités jusqu'à présent dans la séance. L'intervention de la chercheuse (lignes 10 et 11) va d'ailleurs dans le sens d'un retour aux contextes utilisés préalablement dans la séance. Elle suggère l'utilisation de représentations concrètes et la manipulation des bandes afin de faciliter la comparaison. Il semble qu'elle cherche à modéliser des façons d'agir associées au mode d'APP K3.1. L'enseignante fait de même pour la suite de l'extrait, et obtient une réponse satisfaisante de la part des élèves (ligne 16).

Enseignante : Une demie est-ce que c'est plus petit ou égal à un quart?
Élèves : Plus petit! Plus grand! (Pas de consensus ; ils crient et répètent leurs réponses et s'obstinent)
Enseignante : Si on pense à une demie (elle dessine des touts circulaires qu'elle sépare en deux parties et en colorie une, et en 4 parties et en colorie une pour représenter la demie et le quart) et mon quart je vais séparer ma pizza en combien?

En quatre! Et j'en prends combien de morceaux? Un! Alors ça me donne… Alors une demie, un quart, est-ce que Ralph a raison? Est-ce qu'une demie est plus grand qu'un quart?
Chercheuse : Si tu n'es pas certain tu peux regarder sur les bandes de chocolat que t'as faites. Tu en as une demie, puis tu en as un quart.
Enseignante : Ça c'est une demie (montre une bande) et ça c'est un quart (montre la bande correspondante). Alors on veut savoir, avec les bandes que vous avez fait, est-ce que un quart c'est plus grand, plus petit ou égal à une demie. (Elle pointe les parties pendant qu'elle parle)
Élèves : Plus petit!
Extrait 31

Ainsi, dans l'extrait 31, l'enseignante semble mettre de l'avant et tenter de modéliser pour les élèves les façons de parler et d'agir du mode d'APP de la comparaison visuelle des bandes de papier pliées (représentations concrètes des fractions), i.e. le nouveau mode d'APP K3.1, et établit un lien direct entre les bandes qu'on a pliées plus tôt et certaines fractions. Toutefois, elle ne va pas jusqu'à détailler la relation entre le nom de la fraction et les caractéristiques de la bande comme le nombre de parties, ou le fait que ces parties sont égales.

La correction continue dans l'extrait 32. Cette fois, les façons de parler et d'agir de l'enseignante impliquent directement une comparaison visuelle à l'aide de matériel, que l'on associe au mode d'APP K3.1. De plus, lorsque l'enseignante parle du nombre « un onzième », elle tient la bande pliée en onze. Elle associe donc une partie de la bande pliée en onze à la quantité « un onzième ». Elle fait de même avec le septième après avoir demandé l'aide de Marc. Puis, elle encourage une comparaison visuelle en demandant : « est-ce qu'on le voit bien? ». Toutefois, même après que les élèves ont fourni une réponse attendue (ligne 17), l'enseignante poursuit son intervention en exploitant cette fois le lien entre le nombre de parties et la grosseur des parties. Pour ce faire, elle s'appuie sur la constance de l'unité en utilisant des expressions comme « le même tout, la même palette de chocolat ». (lignes 18 à 20) Ainsi, bien qu'elle ne mentionne pas que le dénominateur de la fraction à comparer correspond au nombre de parties, elle fournit un modèle de raisonnement sur la grosseur de ces parties qui pourrait mener à une comparaison qui ne nécessiterait pas d'appui visuel. Elle modélise des façons de parler qui s'apparentent à celles du mode d'APP K1, qui peuvent aussi s'accompagner d'une vérification de la validité en utilisant la comparaison visuelle, ce que nous associons au nouveau mode d'APP K4).

Enseignante : Maintenant, un septième versus un onzième. Est-ce que vous êtes d'accord avec Marc et s'il vous plaît, vous faites en sorte que le bout du triangle soit égal à la fraction, à la barre de la fraction (écrit la réponse au tableau en même qu'elle parle). Vous le savez en mathématiques, on change la place : wouh! C'est autre chose!
Enseignante : (prend la bande de papier pliée en onze parties égales) un onzième, alors là si je prends un onzième, wo, mes séparations sont où, je les vois plus. (Elle prend un crayon et trace les plis avec un crayon pour qu'on voit bien les parties égales) Ok, un onzième. Prenez-moi un septième, qui peut me le préparer?
Enseignante : Marc tant qu'à rien faire peux-tu me préparer mes fractions?
Marc : Quoi?
Enseignante : Me préparer mes fractions, me faire des barres, oui.
Marc : Toutes?
Enseignante : Oui, pour en avoir une de chaque.
Enseignante : Je veux savoir si un onzième c'est plus petit ou égal ou plus grand à un septième, est-ce qu'on le voit bien?
Élèves : Plus petit.
Enseignante : On a pris le même tout, la même palette de chocolat et on l'a séparée en onze morceaux ou en sept, (inaudible) en sept mes morceaux sont plus gros. On est d'accord?
Extrait 32

Par la suite, dans un échange que nous ne détaillerons pas ici, l'enseignante aborde la comparaison 1/9 et 1/12. Une élève a écrit une réponse valide au tableau et les autres ont dit qu'ils étaient d'accord. L'enseignante prend la bande pliée en 9 et la bande pliée en 12, sur lesquelles les plis ont maintenant été tracés au crayon par Marc. Elle présente ces deux bandes à la classe et invite à une validation visuelle de la comparaison. Elle met en œuvre le mode d'APP K3.1.

La prochaine comparaison demandée est celle de 1 et de 1/6. On en présente la correction dans l'extrait 33.

L'enseignant a invité Albert à venir écrire sa réponse au tableau pour comparer 1 et 1/6. L'élève écrit 1/6 > 1.
Enseignante : Est-ce que vous êtes d'accord avec Albert?
Élèves : Non.
Albert dit quelque chose d'inaudible.
Enseignante : C'est pas ça que tu as écrit, là.
Albert : Mais, ça c'est le flèche y va être…Ah! Comme ça! (Mime avec son doigt le mouvement pour tracer le symbole d'inégalité inverse)
Enseignante : Où est-ce qu'on met le plus grand? Moi je sais.
Albert : Attend, madame, ça c'est le flèche qui colle…? (Pointe l'extrémité pointue d'un des symboles dessinés sur le tableau)
Enseignante : Où c'est petit, c'est le petit, où c'est grand, c'est le grand.
Albert réécrit le symbole entre 1/6 et 1, mais cette fois il écrit 1/6 < 1.
Enseignante : Est-ce que vous êtes d'accord?
Élèves : Oui.
Enseignante : Un, c'est carrément un, hein. On est tous partis de un. Un, c'est au complet. (Elle prend une bande neuve, pas pliée, et la montre à la classe.) Et là on a un sixième. Y sont ou mes sixièmes? (Elle prend la bande pliée en six parties égales avec les plis tracés au crayon et la montre à la classe, en même temps que la bande pas pliée). Alors, un sixième c'est ça. Un, c'est ça (a abaissé la bande pliée en six et tient et agite la bande pas pliée), c'est six sur six. On est d'accord?
Extrait 33

La première partie de l'extrait 33 (lignes 1 à 12) porte davantage sur un enjeu de convention d'écriture et de signification des symboles mathématiques. On y reconnaît que le rôle de l'enseignante est aussi d'être porteuse de la culture mathématique standard. Elle fournit à l'élève un truc pour ce symbole qui est associé au sens du symbole (ligne 12). Une fois cet enjeu réglé, l'enseignante ne se contente pas de demander aux élèves s'ils sont d'accord avec la réponse d'Albert. Même après avoir obtenu une réponse affirmative, elle poursuit avec des explications. Au cours de ces dernières, elle met l'accent sur le fait que le nombre un représente l'unité. Dans un langage qui fait appel au sens partie/tout des fractions, on pourrait dire que l'unité, c'est l'ensemble des parties du tout. C'est ce qu'évoque l'enseignante en disant « c'est six sur six ». En termes d'interprétation de Behr *et al.* (1992), on se place ici dans l'optique où le nombre 1 correspond à 6 sixièmes de bande, soit $6(\frac{1}{6} - bande)$, et qu'il correspond ainsi à une bande complète. Les façons d'agir et de parler de l'enseignante ici dirigent les élèves vers une comparaison visuelle et on les associe donc au mode d'APP émergent K3.1.

5.1.11 Tâche M : Comparer des fractions non unitaires

La deuxième question du quiz consiste aussi à comparer des fractions deux à deux. Cette fois, cependant, il ne s'agit pas uniquement de fractions unitaires. Il s'agit à nouveau d'une tâche qui n'était pas prévue dans la séquence initiale. Ainsi, tous les modes d'APP qui sont mis en œuvre ici n'avaient pas été anticipés.

Lors de la correction en plénière de cette question, la première comparaison abordée est celle de 2/3 avec 1/5. Une élève va au tableau et écrit sa réponse. L'enseignante demande aux autres s'ils sont d'accord. Un élève répond d'abord oui, puis plusieurs répondent non. La suite de l'interaction est présentée dans l'extrait 34.

Enseignante : Là tu as pris, … Qui peut prendre la palette de chocolat un tiers?
Enseignante : Alors j'ai ici (brandit la bande pliée en trois, avec les plis tracés au crayon) … séparée en trois. Deux tiers, ça veut dire que je prends combien de morceaux sur trois? (**Roméo** : Deux.) Deux morceaux sur trois. Alors j'ai cette quantité là, tout le monde est d'accord?
Enseignante : Et là qui peut me donner la bandelette de cinq? Ok, alors la bandelette de cinq…Je sépare en cinq morceaux (elle dit cela en même temps qu'elle trace les plis avec un crayon feutre) et je prends combien de morceaux? (**Élève** : Un.) Un!

9	**Enseignante** : Je veux savoir lequel des deux est le plus grand.
10	**Amanda** : Heu, deux sur trois.
11	**Enseignante** : Deux tiers!
12	**Amanda** : Deux tiers.
Extrait 34	

D'abord, c'est intéressant de remarquer que l'enseignante utilise l'expression « palette de chocolat un tiers » pour référer à la bande pliée en trois parties égales (ligne 1 de l'extrait 34). Ainsi, pour elle, ce qui est important pour cette bande, c'est le fait que chaque partie représente un tiers de bande, au point que c'est cette caractéristique qu'elle emploie pour désigner la bande.

Dans la suite de son intervention, elle revient à la locution « séparée en trois », pour désigner la bande pliée en trois. En demandant « je prends combien de morceaux sur trois », elle met de l'avant le sens partie/tout de la fraction : il y a trois morceaux, chacun est un tiers, et comme la fraction que l'on souhaite représenter est deux tiers, j'en prends deux. En termes d'interprétation de Behr *et al.* (1992), le deux tiers de la bande est $2(\frac{1}{3} - bande)$. C'est similaire lorsque l'enseignante réfère à la bande pliée en cinq morceaux égaux (lignes 6 à 8). En effet, ses façons d'agir et de parler évoquent l'idée de séparer la bande en un certain nombre de parties égales, qui correspond au dénominateur, puis d'en sélectionner un nombre égal au numérateur. Il s'agit du sens de la fraction partie/tout et de l'interprétation de Behr *et al.* (1992) a$(\frac{1}{b} - bande)$. Avec ces façons d'agir et de parler, l'enseignante guide les élèves vers une comparaison visuelle qui repose sur l'utilisation des bandes de papier pliées comme représentations concrètes des fractions, ce que nous avons associés au nouveau mode d'APP M2.1.

La réponse d'Amanda, « deux sur trois » est cohérente avec le sens de la fraction partie/tout mis de l'avant dans les récentes actions de l'enseignante. Toutefois, l'enseignante reformule en disant « deux tiers », et l'élève répète « deux tiers ».

Il est intéressant de noter les différentes expressions utilisées par l'enseignante pour désigner les bandes de papier. D'abord, elle dit parfois « bande » ou « bandelette », et d'autres fois « barre de chocolat » ou « palette de chocolat », rappelant ainsi la mise en contexte imagée de l'activité. De plus, pour préciser de quelle bande elle parle, elle utilise généralement le nombre de parties égales, par exemple en disant « séparée en cinq » ou « pliée en cinq », ou même en nommant le nombre de parties sans préciser les pliages, comme lorsqu'elle dit « bandelette de cinq ». À quelques occasions, l'enseignante désigne une bande en mentionnant directement la fraction qu'elle y associe, comme lorsqu'elle dit « la bande de un tiers ». Pour l'enseignante, il semble s'agir de locutions équivalentes.

L'extrait 35 nous présente la suite de cette interaction, au cours de laquelle l'enseignante tente d'effectuer une transition vers un raisonnement qui s'appuie moins sur les représentations concrètes. Elle tente de guider les élèves pour les éloigner du mode d'APP de comparaison qui s'appuie sur les représentations concrètes (M2.1), mis en œuvre jusqu'à présent.

Enseignante : Pour y arriver autrement qu'en faisant des bandelettes, comment je pourrais faire?
Élèves : Aahh…heu…
Enseignante : Comment je vais faire pour comparer ça sans avoir à plier des bandelettes? J'ai pas toujours des palettes de chocolat blanc sous la main?
Roméo : (inaudible)
Enseignante : Ouais, écris-moi. Qu'est-ce que tu fais pour être sûr de ta réponse? (Hors sujet)
Roméo va au tableau : il dessine deux bandes rectangulaires juxtaposées (collées une au-dessus de l'autre). Celle du haut est séparée en trois et celle du bas en 5.

Roméo : J'ai fait ça en cinq. (Trace des traits verticaux dans le rectangle du bas pour séparer en 5 parties approximativement de même longueur) Et ça j'ai fait ça en 3. (Trace des traits verticaux dans le rectangle du haut pour séparer en 3 parties approximativement de même longueur) Et puis si je (inaudible) (colorie une des 5 parties du rectangle du bas) et deux des… (colorie deux des parties du rectangle du haut)

Enseignante : Ok, là tu fais comme on vient de faire.

Extrait 35

Roméo suggère une démarche qui s'appuie sur une représentation semi-concrète des fractions par des rectangles dessinés, puis procède à une comparaison visuelle. Les unités rectangulaires, qui représentent les touts, sont de la même longueur et sa représentation est valide. Il exhibe le mode d'APP associé à la comparaison visuelle qui s'appuie sur des représentation semi-concrètes (le nouveau mode d'APP M2.2). Il met de l'avant le même sens de la fraction que l'enseignante exploitait plus tôt (le sens partie/tout) et on y reconnaît la même interprétation de la fraction. L'enseignante ne semble pas satisfaite par la démarche proposée par Roméo, et juge que la représentation semi-concrète de l'élève se rapproche trop de la représentation concrète avec les bandes de papier.

Enseignante : On va essayer d'autre chose. Regarde bien. Mettons qu'on le fait avec le dessin. (Elle dessine deux rectangles un au-dessus de l'autre, collés, et les sépare comme Roméo l'a fait : celui du haut en trois parties approximativement égales et celui du bas en 5 parties approximativement égales)

Enseignante : On va faire ce que Roméo avait fait au départ. Est-ce que y'a quelqu'un qui a une autre idée?

Un peu de confusion / hors-sujet.

Albert : Moi, madame quand je vois, une lettre[16], ça c'est une lettre ici (pointe le 3 au dénominateur de 2/3) plus petit que ça (pointe le 5 au dénominateur du 1/5) je dis que ça est plus grand.

Enseignante : Ça marche quand c'est le même numérateur. Mais quand c'est pas le même numérateur…

Albert : Tu dois faire comme ça (pointe le dessin de Roméo)

Extrait 36

[16] Nous devinons que l'élève s'est trompé de mot et voulait dire « chiffre » ou « nombre ».

On constate dans les premières lignes de l'extrait 36 que l'enseignante utilise les mêmes représentations par dessin que Roméo précédemment, mais souhaite aller au-delà de la comparaison visuelle des longueurs concernées. Sur la vidéo, on remarque que l'enseignante porte une attention particulière à l'emplacement des traits de séparation des rectangles en parties égales. Bien qu'elle ne mesure rien, elle tient à avoir une certaine précision. Sur la vidéo, on la voit effacer et retracer certains segments à quelques reprises.

Toutefois, lorsque l'enseignante questionne les élèves, la réponse suggérée par Albert ne correspond pas au raisonnement qu'elle espérait voir émerger. En effet, la démarche verbalisée par Albert s'appuie uniquement sur une comparaison numérique des dénominateurs. Il s'agit d'un raisonnement cohérent avec ce qui a été mis de l'avant pour les questions de la section 1 du quiz, alors qu'on comparait des fractions unitaires en comparant la grosseur des parties à partir du nombre de parties dénoté par le dénominateur. Ces manières de parler et de penser correspondent à une comparaison numérique des dénominateurs comme indiquant le nombre de parties, sans nécessairement tenir compte du numérateur, que nous associons maintenant au nouveau mode d'APP M1). Cependant, il ne s'agit pas d'une démarche valide pour toutes les fractions, comme le souligne l'enseignante (lignes 11 et 12 de l'extrait 36).

Lorsque confronté aux limites du raisonnement qu'il a proposé, Albert revient au mode d'APP de comparaison visuelle s'appuyant sur des représentations semi-concrètes (M2.2) mis de l'avant précédemment par Roméo.

Enseignante : En combien de morceaux…là, j'ai un problème…effectivement si je les colle comme ça je suis capable de voir. Sauf que ici (ajoute des traits dans les rectangles), qu'est-ce que vous en pensez si je *sépare* (inaudible) morceaux…j'ai trois morceaux en cinq. Je vais *séparer* mes cinq morceaux en bas en combien? (Les élèves ne répondent pas vraiment) Regardez ce qui se passe. Regardez ce qui se passe (elle est toujours en train d'ajouter des traits verticaux sur le dessin).
Amanda : Égal, c'est égal!

8	**Enseignante** : Mes séparations deviennent-elles exactement pareilles? Alors là ici j'ai
9	vraiment *mon deux tiers* ici (elle colorie le deux tiers), et j'ai mon un cinquième (elle
10	colorie le un cinquième).
11	**Enseignante** : En fraction, j'ai pas à passer par le dessin, je vais mettre ça sur
12	combien? Ça fait combien de morceaux en tout ça? Si j'ai *séparé* mes 5 morceaux en
13	trois ou mes trois morceaux en cinq, je suis rendue à combien de morceaux? Mes
14	cinq morceaux, je les ai *séparés* en trois… (**Amanda** : Quinze!) et mes trois morceaux
15	je les ai *séparés* en cinq. (**Amanda** : C'est quinze)
16	L'enseignante avait écrit 2/3 et 1/5, et en-dessous elle écrit ___ /15 et ___/15.
17	**Enseignante** : Ici j'ai *multiplié* par combien? (**Élèves** : Trois! Cinq!) Alors on va
18	*multiplier* par combien pour garder la même fraction? Par cinq! (Elle ajoute des
19	flèches vers la fraction sur 15 en écrivant x3 près des flèches) Ça nous donne …
20	(**Élèves** : dix!) Vraiment dix ici (Elle écrit 10 au numérateur de la première fraction
21	sur 15 qui était en dessous du 2/3 et qui est maintenant reliée avec des flèches)
22	**Enseignante** : Mon un cinquième ici, j'ai fait *fois combien* pour me rendre à quinze?
23	(**Amanda** : Trois). J'ai *séparé* mes cinq morceaux en trois.
24	**Albert** : Mais madame, ça c'est facile. C'est plus simple.
25	**Enseignante** : Et ici je fais…? (Elle fait le même genre d'ajout : flèches, puis écrire 3
26	au numérateur) (**Élèves** : trois).
	Extrait 37

Les modes d'agir et de parler de l'enseignante au début de l'extrait 37 sont cohérents avec l'utilisation d'un dénominateur commun via une représentation par dessin, ce qui correspond au nouveau mode d'APP M3.1. À la ligne 9 de l'extrait 37, l'enseignante utilise la locution « mon deux tiers », ce qui laisse entendre qu'elle considère le « deux tiers » comme une sous-unité et qui indique une transition dans les interprétations de la fraction selon Behr *et al.* (1992), passant de $2\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ à $1(\frac{2}{3} - bande)$.

À partir de la ligne 11 de l'extrait 37, l'enseignante cherche à se détacher de la représentation semi-concrète et à passer à une utilisation d'un dénominateur commun avec seulement une représentation symbolique, ce que nous associons au nouveau mode d'APP M3.2. Par ses actions et son discours, elle modélise une procédure qui correspond à ce mode d'APP. On remarque un cheminement assez logique dans les modes d'APP mis de l'avant par l'enseignante : elle encourage d'abord les élèves à procéder par comparaison visuelle qui s'appuie sur les représentations concrètes des fractions (mode M2.1), puis une comparaison visuelle qui s'appuie sur des représentations semi-concrètes (mode M2.2), puis l'utilisation d'un dénominateur commun, mais toujours en s'appuyant sur des représentations semi-concrètes (M3.1), dans l'objectif d'éventuellement pouvoir procéder à l'utilisation d'un dénominateur commun en utilisant seulement les représentations symboliques des fractions (M3.2).

Un élément notable de l'extrait 37 est la cohabitation des champs lexicaux liés à la division et à la multiplication, dont les occurrences sont mises en italique dans l'extrait. Alors que ces idées semblent contradictoires, elles semblent presque utilisées de façon interchangeables dans les propos de l'enseignante. Un bon exemple se trouve dans les lignes 23 et 24. L'enseignante dit d'abord : « J'ai fait *fois combien* pour me rendre à quinze? », puis « J'ai séparé mes morceaux en cinq ». Nous comprenons que ce qui est sous-entendu est que si on sépare chacun des trois morceaux en 5 parties chacun, on multiplie par 5 le nombre total de morceaux. Toutefois, ce passage est très implicite et semble être une source potentielle de confusion. C'est d'ailleurs ce qu'on peut constater dans l'extrait 38, qui présente la suite de cette interaction.

Enseignante : Alors est-ce que je vois très bien lequel des deux est le plus grand ou le plus petit? (**Albert** : Très bien.) (**Autre élève** : Oui, madame.) **Albert** : En haut, il est plus grand qu'en bas. **Enseignante** : Est-ce que tu vois? Deux tiers, c'est vraiment plus grand que un cinquième (Elle ajoute les symboles d'inégalité.) **Amanda** : (inaudible) **Enseignante** : Chacun des trois morceaux, je les ai *séparés* en cinq. **Amanda** : Mais pourquoi? Ah, parce que c'est cinq ici? **Enseignante** : Pour arriver à la même chose. (Inaudible) toutes les séparations après ça arrivent bien égales. Ok? Ça va? Alors je *sépare* en un même nombre de morceaux. **Amanda** : Mais madame, pourquoi tu *diviser* ça en cinq? (Elle se lève et s'approche du tableau pour pointer, de loin quand même) **Enseignante** : *Multiplier*! (Elle fait un mouvement de main qui suit la flèche x5 et ensuite la flèche x3) Ici j'ai *multiplié* par cinq pis ici j'ai *multiplié* par trois.
Extrait 38

Dans les lignes 7 à 15 de l'extrait 38, l'enseignante verbalise la manière de penser qui correspond aux actions posées plut tôt. Nous associons ceci au mode d'APP M3.1 : l'enseignante utilise son dessin pour soutenir sa recherche de dénominateur commun, puis la conversion en fractions équivalentes.

Dans l'extrait 39, l'enseignante demande aux élèves de comparer deux nouvelles fractions : deux tiers et quatre sixièmes. Il s'agit d'une tâche de comparaison de fractions non unitaires. Toutefois, pour effectuer la comparaison, une stratégie possible est la recherche de fractions équivalentes qui ont un même dénominateur (six, dans ce cas). On pourrait donc parler ici d'une tâche de calcul de fractions équivalentes : c'est une tâche qui n'était pas présente dans la séquence initiale et que nous incluons maintenant comme la tâche L[17]. L'objet mathématique dont il est question ici étant nouveau, il va de soi que les modes d'APP que nous décrivons sont tous des modes d'APP émergents, que nous n'avions pas anticipés au préalable.

On remarque dans l'extrait 39 que l'enseignante trouve une fraction équivalente à deux tiers en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même facteur. Si on en parle en termes de recherche de fraction équivalente (tâche L), nous associons les façons d'agir, de parler et de penser en lien avec cette procédure au nouveau mode d'APP L2. Toutefois, en ce qui concerne la tâche de comparaison, on constate que l'enseignante utilise le dénominateur commun et s'exprime en utilisant le langage standard lié aux fractions ainsi que la notation symbolique, et ne s'appuie ni sur les représentations concrètes, ni sur les représentations semi-concrètes. Ainsi, on associerait la procédure explicitée par l'enseignante au mode d'APP M3.2. Les modes

[17] L'ordre alphabétique et l'ordre chronologique des tâches émergentes diffèrent.

d'APP L2 et M3.2 sont très similaires, en fait, car pour procéder à une comparaison de fractions en utilisant le dénominateur commun avec seulement des représentations abstraites, une étape intermédiaire et essentielle est de trouver, pour chacune des fractions, un fraction équivalente qui aura comme dénominateur le dénominateur commun. Ainsi, la tâche L (et le mode d'APP L2) est incluse, en quelque sorte, dans le mode d'APP M3.2.

Enseignante : Est-ce que ça marche? Si j'essaie ça, si je fais deux tiers ou quatre sixièmes. Lequel des deux est le plus grand ou le plus petit ou égal? Deux tiers, quatre sixièmes. Trouvez-moi la réponse.
Albert et Roméo disent que c'est égal.
Enseignante : C'est égal. Ok. Si je le mets sur six ici (Elle écrit au tableau deux fractions sans numérateur : ___ / 6 ___ / 6). Je peux choisir des fois un facteur, ça va? Ça va rester quatre. (Elle écrit 4 comme numérateur de la deuxième fraction) Par combien j'ai multiplié trois pour arriver à six? (Élèves, pas fort : Deux.) (L'enseignante dessine une flèche et écrit x2) Je dois multiplier la même chose. (Elle ajoute 4 comme numérateur de la première fraction.) Est-ce que c'est égal? (Élèves : Oui, madame). (Elle ajoute le signe d'égalité entre les deux fractions.)
Roméo : Madame! Moi je prends, je fais, ok. Parce que je sais que, déjà, heum, je regarde (Il pointe le tableau avec sa main). Je vois que trois… Six, moitié de six c'est trois, et je fais, moitié de quatre c'est deux. Et six (inaudible)
Enseignante : Alors toi t'es allé plutôt en disant j'ai divisé par deux, j'ai divisé par deux. (Elle ajoute des flèches.) C'était la moitié. Très bonne façon de faire.
Extrait 39

Roméo, quant à lui, met en œuvre une démarche légèrement différente. En effet, le raisonnement qu'il exprime (lignes 13 à 15 de l'extrait 39) consiste à remarquer que le rapport entre les deux dénominateurs est le même que le rapport entre les deux numérateurs. L'enseignante reconnaît la similarité entre la démarche de Roméo et la sienne, tout en soulignant la différence : Roméo a (mentalement) remarqué qu'on pouvait passer d'un numérateur à l'autre et d'un dénominateur à l'autre en divisant par deux, alors qu'elle utilisait une multiplication. Dans les deux cas, il s'agit d'une opération multiplicative appliquée au numérateur et au dénominateur qui fait en sorte que le rapport entre les deux éléments de la fraction est conservé, et que la fraction obtenue est équivalente. Une autre différence est que Roméo constate l'équivalence des fractions en relevant que la transformation multiplicative est la même au dénominateur qu'au numérateur, alors que l'enseignante effectue la transformation pour avoir des fractions qui sont identiques afin d'en constater l'égalité. Néanmoins, dans les deux cas, il s'agit d'appliquer une transformation multiplicative au numérateur et au dénominateur d'une même fraction pour obtenir une fraction équivalente et, par la même occasion, constater son égalité à une autre fraction. C'est le mode d'APP L2.

5.1.12 Tâche L : Recherche de fractions équivalentes

La dernière question de quiz posée par l'enseignante pendant cette séance en est une de recherche de fraction équivalente (extrait 40). Nous avions déjà ajouté cette tâche en la nommant la tâche L car alors qu'il s'agissait d'une étape intermédiaire dans la comparaison de fractions, mais ici, l'enseignante demande explicitement aux élèves de trouver une fraction qui est équivalente à la fraction $\frac{2}{5}$.

1 **2**	**Enseignante** : Dernière question vous me trouvez une fraction égale à celle-ci. (Elle écrit 2/5 au tableau)
3 **4**	L'enseignante donne des consignes sur la fin du cours et le rangement car il reste 5 minutes à la séance.
5	Roméo écrit 4/10 et le montre à l'enseignante.
6 **7** **8**	Elle approuve et demande aux autres de trouver une autre fraction qui est aussi équivalente mais qui est différente de 4/10. (Elle écrit =4/10 au tableau à côté de 2/5.)
9	Sylvie demande de l'aide à Roméo.
10	**Roméo** : Prend ça, doubler ça.
11	**Sylvie** : Huit…
12	**Roméo** : Sur quoi?
13	**Sylvie** : Sur vingt? Huit vingtièmes, madame!

Extrait 40

Rapidement, Roméo fournit une réponse valide. Nous ne disposons pas des traces de sa démarche, et Roméo ne verbalise rien à part la solution elle-même. Toutefois, puisque dans les interactions précédentes, Roméo a exhibé des façons de faire et de parler cohérentes avec le mode d'APP de recherche de fraction équivalente en utilisant une opération multiplicative au numérateur et au dénominateur (L2), nous croyons qu'il est raisonnable de croire qu'en fournissant la réponse « $\frac{4}{10}$ », l'élève met à nouveau de l'avant ce même mode. Il s'agit d'ailleurs du mode d'APP qui est attendu par l'enseignante, et qu'elle a utilisé et modélisé avec les élèves dans les échanges précédents. De plus, lorsque Sylvie demande de l'aide à Roméo, ce dernier utilise des verbalisations qui correspondent en effet à un processus multiplicatif et au mode d'APP L2 (à partir de la ligne 9 de l'extrait 40).

La suite des interactions en lien avec cette tâche finale est présentée dans l'extrait 41. Dès le début de l'extrait (lignes 4 et 5), l'enseignante verbalise la procédure souhaitée. Albert suggère une réponse : $\frac{8}{20}$. Il s'agit d'une réponse valide, mais l'enseignante se lance quand même dans une intervention pour expliquer le sens de la procédure et établir des liens avec les bandes de papier (lignes 12 à 20 de l'extrait 41).

L'enseignante utilise d'abord les bandes de papier pour représenter des fractions, et l'action de plier pour représenter la recherche de fractions équivalentes. Nous associons ces comportements au nouveau mode d'APP de recherche de fractions équivalentes par l'utilisation d'un support visuel concret (mode L1). On retrouve aussi des façons de parler et d'agir qui nous rappelle les modes d'APP mis en œuvre lors des tâches de pliage. Notamment, l'idée de la relation multiplicative entre le nombre de pliages effectués et le nombre de parties, associée notamment aux modes d'APP CB1 et CD1, est réinvestie lorsqu'elle dit : « [j]e plie en deux. […] je fais fois deux pour chaque morceau. Chaque morceau est séparé en deux. » C'est sur cette idée que s'appuie le passage de la représentation concrète avec du matériel au principe de multiplication du numérateur et du dénominateur par un même facteur pour obtenir une fraction équivalente. En termes d'APP, il s'agirait du passage du mode L1 au mode L2.

Au cours de cette intervention (lignes 12 à 20 de l'extrait 41), l'enseignante tente d'accompagner Albert dans son passage d'une procédure qui s'appuie sur le concret vers une procédure plus abstraite (associée au mode d'APP L2), et ce, en mobilisant les façons de parler, penser et agir mises en place plus tôt dans la séance. Plus particulièrement, la constance de l'unité et l'égalité des parties sont essentielles pour accepter que chaque partie représente un cinquième de la bande. Et que si je colorie deux parties, j'ai alors une représentation de la fraction $\frac{2}{5}$. Puisque la bande de papier est un objet, et que l'action de plier ne modifie ni la longueur de la bande, ni celle du coloriage, il est logique d'accepter que la partie de la bande qui est coloriée représente toujours la même fraction, soit 2/5. De plus, comme on a pu le constater lors des tâches de pliage, l'action de plier la bande affecte également chaque partie de la bande. Ainsi, si on plie la bande en deux une fois de plus, chaque partie est pliée est deux. On se retrouve alors avec deux fois plus de parties. Cela est valide autant pour le nombre total de parties que pour les parties qui constituent la portion colorée de la bande de papier. C'est sur ces façons de penser que s'appuie le passage vers le mode d'APP associé à l'utilisation de langage symbolique et d'une opération multiplicative du numérateur et du dénominateur par un même facteur (mode d'APP L2). L'enseignante modélise les façons d'agir et de parler de ce mode d'APP à deux reprises : une fois pour obtenir la fraction $\frac{4}{10}$ et une fois pour obtenir la fraction $\frac{8}{20}$.

À la ligne 28, Albert demande si « ça marche ». On peut supposer qu'il se demande si la fraction obtenue avec les manipulations est la même que celle obtenue avec la procédure de multiplication présentée plus tôt par l'enseignante. L'échange qui suit confirme que c'est le cas (lignes 30 à 38). Pendant cette discussion, certains propos d'Albert sont cohérents avec le mode d'APP visé (L2), notamment lorsqu'il suggère lui-même une opération multiplicative (« Et aussi fois quatre. ») en parlant des dénominateurs (ligne 37).

La séance se conclut sur un dernier exemple de l'enseignante, dans lequel elle choisit un dénominateur différent : quinze. Il s'agit d'un exemple fait rapidement en fin de cours, et qui semble avoir pour but d'utiliser seulement la procédure multiplicative, sans s'appuyer sur des représentations concrètes ou semi-concrètes. On serait alors directement dans le mode d'APP L2.

Enseignante : Roméo a trouvé quatre dixièmes, vous devez m'en trouver une autre pour que ce soit bon.

Albert : J'ai pas compris.

Enseignante : Parce que il faut simplement que tu multiplies le numérateur et le dénominateur par la même chose.

Albert : Huit…vingtièmes?

Sylvie : Huit vingtièmes, madame!

Albert : C'est moi qui a dit.

Sylvie : Non, je viens d'en parler avec Roméo.

L'enseignante va chercher une bande de papier pliée en 5 parties égales et intervient auprès d'Albert.

Enseignante : Regarde, 1/5, t'es d'accord? (Elle tient la bande pliée en 5.) Fait que si j'en avais deux j'aurais ça. D'accord? (Elle colorie deux sections de la bande.) Si je prends mes cinq morceaux et que comme ça, et que je plie en deux. (Elle a replié la bande en 5, puis replie en deux.) T'es d'accord, je suis rendue à 10 morceaux? Alors je fais fois deux pour chaque morceau. Chaque morceau est séparé en deux. Tu le vois bien? (Albert : Ouais.) Fait que je suis rendue à combien sur 10? (**Albert** : heu…) J'avais 2 cinquièmes. 4 sur 10. 1,2,3,4 sur dix. (Elle compte les sections pliées et coloriées) (**Albert** : 4 sur 10?) Regarde, 4 morceaux sur dix. Ça c'est dix (Elle fait un mouvement de la main qui longe toute la bande). 4 morceaux sur dix.

Enseignante : Regarde bien, si je prends encore mes 5 morceaux (Elle replie la bande en cinq). Pis que là, j'avais fait 10, là c'était à 10. (Elle replie la bande en deux, il y a maintenant 10 épaisseurs) Si je le replie, je suis rendue à combien de morceaux? (Elle replie la bande en deux une fois de plus.) 10 fois 2, vingt. (L'enseignante déplie la bande) Deux cinquièmes, c'est égal à combien? 1,2,3,4,5,6,7,8. (Pendant qu'elle compte, elle pointe les sections coloriées.)

Albert : Ça marche?

Enseignante : Regarde, est-ce que ça marche? (Elle se déplace au tableau, à côté de 2/5, elle ajoute un symbole égal et une barre de fraction.) Je pars de là, je vais faire fois combien à 2?
Albert : Ça marche, madame.
L'enseignante ajoute une flèche qui part de 2 et qui va vers le nouveau numérateur, elle y écrit « x 4 ».
Enseignante : Fois quatre?
Albert : Fois quatre. Et aussi fois quatre. (L'enseignante ajoute une flèche pour les dénominateurs et y inscrit « x 4 ».) Ça marche.
Enseignante : Ouais, je pourrais même faire sur quinze (Ajoute au tableau : ____ : / 15). Sur quinze, regarde Albert, sur quinze : j'ai fait fois trois. (Ajoute des flèches sur lesquelles elle indique « x 3 », puis ajoute 6 au numérateur.)
La séance est terminée, on range.
Extrait 41

5.2 Retour sur les modes d'APP non anticipés

Au cours de l'analyse descriptive de la séance, nous avons constaté à quelques reprises que les élèves, ou l'enseignante, mobilisaient des modes d'APP qui n'ont pas été présentés dans le chapitre 4. D'abord, certains modes d'APP qui ont émergé n'avaient simplement pas été anticipés. Ensuite, certaines tâches ont été ajoutées à la séquence prévue dans l'action, et donc tous les modes d'APP associés aux objets mathématiques ciblés par ces tâches sont nécessairement nouveaux. Nous décrivons ici les façons d'agir, de parler et de penser en lien avec ces modes d'APP émergents. Nous procéderons par tâche pour les tâches concernées.

5.2.1 Tâche CA : Plier une bande en deux et nommer chacune des parties

Lorsque nous avions planifié la séquence et anticipé les modes d'agir-parler-penser en lien avec la tâche CA, nous nous attendions à ce que les élèves nomment les sections de la bande pliée en utilisant un langage lié aux fractions. C'est d'ailleurs ce qu'on peut voir dans les façons de parler, et d'agir, décrites pour les modes d'APP anticipés.

Toutefois, quand la séance a eu lieu, c'est davantage le nombre de parties résultant du pliage qui a été l'élément important pour l'enseignante et pour les élèves. Ainsi, nous avons ajouté le mode d'APP émergent **CA3** qui consiste à identifier la bande de papier par le nombre de parties qu'elle contient. Les manières d'agir associées à ce mode d'APP sont de plier la bande en deux en alignant les deux extrémités, puis d'écrire le nombre 2 sur la bande. Les manières de parler consistent à expliciter le nombre de parties : « Il y a deux parties. » ou « C'est deux. ». La manière de penser pour les élèves est simplement que le nombre de parties est l'élément important dans le pliage. Pour ce qui est de l'enseignante, qui a guidé les élèves vers les manières d'agir associées au mode d'APP CA3 en leur demandant d'écrire « 2 » sur la bande pliée en deux, on peut interpréter que pour elle, le nombre de parties est directement relié à la valeur de la fraction représentée par chaque partie. En effet, il correspond au dénominateur. En revanche, il nous semble crédible que l'idée de la fraction ne soit pas considérée par les élèves, et que la tâche soit pour eux une tâche de pliage. Ainsi, l'objet mathématique concerné par le mode d'APP CA3 est la relation entre le pliage et le nombre de parties obtenues.

5.2.2 Tâche CC : plier une bande en trois parties égales

Le premier mode d'APP que nous avions anticipé pour le pliage en trois consiste à commencer par plier sommairement en trois la bande, en superposant les parties, mais sans appuyer sur les plis pour les former complètement, puis à ajuster pour aligner les extrémités, avant d'appuyer pour finaliser les plis. Dans l'action (extrait 9), nous avons pu observer une élève qui a procédé de façon similaire, mais en débutant avec une longueur arbitraire et en démontrant une confusion entre le nombre de plis et le nombre de parties. En effet, même si ce n'était pas clair si c'était intentionnel ou non, elle a débuté par un pliage sommaire en quatre couches de papier, ce qui donnait trois plis. Elle semblait satisfaite, et nous devinons que c'est en raison d'une confusion entre le nombre de parties demandées (trois) et le nombre de plis qu'elle a obtenus (trois).

Toutefois, avec trois plis, on obtient quatre sections. Nous avons jugé pertinent d'ajouter ce mode d'APP émergent (mode **CC5**). Ainsi, les façons d'agir correspondent à ce qui a été décrit ci-haut : plier sommairement la bande en l'enroulant pour avoir trois plis, et donc quatre étages de papier, s'assurer que les extrémités et les plis soient alignés, puis appuyer pour compléter le pliage. Une autre façon d'agir serait de plutôt former sommairement un accordéon avec la bande de papier en comptant trois plis, et donc quatre étages de papier, puis d'ajuster afin d'aligner les extrémités et les plis, avant d'appuyer pour finaliser le pliage. Dans les deux cas, on obtiendra quatre parties dans la bande pliée. Les verbalisations qui pourraient être entendues pendant ces actions pourraient concerner le nombre de plis, par exemple « Il faut tourner trois fois. » ou simplement le dénombrement « Un, deux, trois, … », ou encore l'égalité des parties avant de finaliser, par exemple « Ça doit être égal. ». Mentionnons quand même que l'élève qui a exhibé ce mode d'APP dans l'extrait 9 n'a pas parlé pendant sa procédure, et ce sont seulement ses actions qui nous indiquent qu'elle pense que trois plis conviennent. C'est d'ailleurs cette façon de penser que nous associons au mode d'APP : puisqu'on souhaite avoir trois parties, alors il faut plier à trois reprises. Il est aussi pertinent de s'intéresser à la longueur de départ choisie par l'élève avant d'enrouler ou de former l'accordéon : c'est une longueur arbitraire. Cela nous permet de conclure que l'élève ne perçoit pas la tâche comme une tâche de fraction. En effet, si c'était le cas, l'élève chercherait à débuter la procédure avec une section qui mesure environ le tiers de la bande. Ceci serait en cohérence avec le fait qu'une bande qui compte trois parties égales compte donc 3($\frac{1}{3}$ -bande) et que chaque partie représente ainsi 1($\frac{1}{3}$ -bande). Ainsi, bien que le mode d'APP CC5 ne nous éclaire pas sur comment l'élève appréhende la fraction, il nous informe sur comment l'élève perçoit la tâche de pliage, et notamment que le concept de la fraction n'est pas présent dans ses réflexions.

5.2.3 Tâche CF : plier en cinq parties égales

Nous avons été surpris lorsque l’élève Sylvie a exprimé que le pliage en cinq parties égales ne serait pas réalisable (extraits 14 et 15). Ce n’était pas quelque chose que nous avions anticipé, et c’est pourquoi nous avons ajouté le mode d’APP correspondant, **CF6**. La façon de penser de l’élève semble être que pour effectuer des pliages un peu plus complexes, c’est-à-dire différents du pliage en deux et du pliage en trois, on utilise la stratégie de plier en deux pour doubler. Cela fait en sorte qu’on ne peut pas obtenir un nombre impair de parties. Ainsi, lorsqu’on la questionne pour savoir pourquoi on ne peut pas plier la bande en cinq parties égales, l’élève coordonne des gestes et des verbalisations pour expliquer que le nombre cinq n’est pas un multiple de deux. Ce sont ces façons d’agir et de parler que nous associons au mode d’APP. Ainsi, les façons d’agir consistent à montrer les cinq doigts d’une main et à utiliser l’autre main pour grouper les doigts en paires, laissant le pouce seul, et ensuite à agiter le pouce pour indiquer qu’il est seul. Les façons de parler mettent l’accent sur cette non-parité, notamment en disant « Y’a deux, puis deux. Qu’est-ce qu’on va faire avec ça? », et sur l’impossibilité perçue par l’élève : « Ça marche pas. », « Ça sera pas égal, ça. ». Le blocage de l’élève semble s’appuyer sur sa façon d’interpréter la tâche de pliage en elle-même. Le mode d’APP CF6 concerne donc la relation entre le pliage effectué et le résultat obtenu, et ne traite pas de l’objet mathématique de la fraction.

Une autre stratégie observée et à laquelle nous ne nous attendions pas est celle exhibée par Amanda dans l’extrait 17, qui correspond à un hybride entre l’estimation de la longueur désirée et la relation multiplicative entre les étapes du pliage. Concrètement, nous avons pu observer les manières d’agir d’Amanda : plier la bande en deux de façon à ce qu’une des deux parties dépasse l’autre d’environ un cinquième de bande, puis replier en deux la portion de bande qui a maintenant deux épaisseurs pour obtenir ainsi quatre parties égales, plus l’excès laissé au début. La seule verbalisation qu’Amanda a faite et qui nous informe sur son processus est de dire « J’ai laissé un bout et après je fais comme ça. », en parlant de laisser un bout et ensuite de plier pour doubler. Nous croyons que d'autres verbalisations possibles pourraient être « Je plie en deux pour doubler ces deux parties. » ou « Deux fois deux donne quatre, et quatre plus un donne cinq. » Nous inférons comme façon de penser associée aux actions d'Amanda le raisonnement suivant : en laissant initialement de côté une section de bande, il suffit de porter son attention sur le reste pour obtenir quatre parties égales ; on peut le faire en utilisant le procédé multiplicatif utilisé plus tôt ; de plus, la section initialement mise de côté doit avoir la même mesure que les autres sections, et représente ainsi un cinquième de la bande. En termes de Behr *et al.* (1992), cette partie de bande laissée de côté correspondra donc à $1(\frac{1}{5} - bande)$. En effet, comme on veut cinq parties égales, la bande entière correspond à $5(\frac{1}{5} - bande)$, et chaque section, au final, à $1(\frac{1}{5} - bande)$. Cette façon de procéder est cohérente avec une interprétation mesure de la fraction $\frac{1}{5}$: le $1(\frac{1}{5} - bande)$ laissé de côté agit comme une unité de mesure pour les parties à obtenir, qui doivent toutes être égales. De plus, le sens partie/tout de la fraction est aussi mobilisé dans le cas où l'élève effectue un fractionnement visuel mental de la bande en cinq parties égales afin d'estimer la longueur correspondant au cinquième.

5.2.4 Tâche K : Comparaison deux à deux de fractions unitaires

Cette tâche n'était pas prévue dans la séquence de tâches initialement proposée à l'enseignante. Pour cette raison, tous les comportements que nous avons observés chez les élèves sont des comportements non anticipés. Pendant l'analyse, nous avons repéré les façons d'agir et de parler des élèves. Nous avons dégagé et consigné les nouveaux modes d'APP correspondants dans le tableau-synthèse dans la section 3 du chapitre 5 et les décrivons plus en détails ici. Mentionnons qu'il pourrait y avoir d'autres modes d'APP associés à la comparaison deux à deux de fractions unitaires, mais nous nous limitons à ceux qui ont été observés pendant la séance analysée.

5.2.4.1 Mode d'APP K1

Le premier mode d'APP que nous dégageons en lien avec la comparaison de fractions unitaires en est un qui mène à une réponse correcte. Il s'agit de la comparaison numérique des dénominateurs qui considère le dénominateur comme indicateur du nombre de parties. Il est difficile de dégager des manières d'agir et de parler qui témoignent de ce mode d'APP, outre le fait de donner la bonne réponse, soit sous forme écrite ou sous forme orale, sans faire appel à des représentations concrètes ou semi-concrètes. Il serait possible qu'un élève, surtout s'il est questionné, explicite son raisonnement en disant « C'est plus petit parce qu'il y a plus de morceaux ». Toutefois, nous n'avons pas été témoin de verbalisations aussi précises dans les interactions observées. Les manières de penser que nous associons à ce mode d'APP vont comme suit : le tout demeure le même, et donc plus le nombre de parties est grand, plus les parties sont petites ; si on considère le dénominateur comme représentant directement le nombre de parties, alors plus le dénominateur est grand, plus la fraction unitaire associée à la partie est petite.

5.2.4.2 Mode d'APP K2

Il est aussi possible qu'un élève se trompe et interprète le dénominateur comme indiquant directement la grandeur de la partie, ou encore la valeur de la fraction. Dans ce cas, la manière de penser est plutôt qu'un grand nombre (n) indique de plus grandes parties, ou encore indique une plus grande valeur pour la fraction $\frac{1}{n}$. Même avec la notation fractionnaire $\frac{1}{n}$, c'est la valeur de n qui a davantage d'importance. Cette façon de penser conduira l'élève à fournir une mauvaise réponse, oralement ou en écrivant un signe d'inégalité erroné. Toutefois, il n'y a pas vraiment d'autres façons d'agir ou de parler qui sont associées à ce mode d'APP.

5.2.4.3 Mode d'APP K3.1

Les deux prochains modes d'APP que nous allons décrire porte sur un processus de comparaison visuelle. D'abord, nous avons constaté à quelques reprises que l'enseignante et les élèves utilisaient les bandes de papier pliées en tant que représentations concrètes pour comparer les fractions unitaires deux à deux. Dans ce cas, les gestes qu'on peut observer consistent principalement à pointer, colorier ou désigner d'une autre façon les bandes de papier en question, puis d'écrire le signe d'inégalité et d'affirmer que c'est plus petit ou plus grand. Certaines personnes, surtout l'enseignante, pourrait utiliser des mots en lien avec l'aspect visuel de la comparaison comme « regarde » ou « je vois ». La façon de penser que nous associons à ce mode d'APP repose sur le sens partie/tout de la fraction et sur le principe de la partition exhaustive et égale. Si la bande est pliée en *n* parties égales, alors chaque partie correspond au $\frac{1}{n}$ de la bande. Ainsi, je peux comparer visuellement les parties de deux bandes différentes pour comparer les fractions unitaires associées à ces bandes. Nous jugeons que la personne qui met de l'avant un tel raisonnement pourrait considérer comme unité de référence la bande entière – dans la notation de Behr *et al.* (1992), chaque partie est $\frac{1}{n}(1 - bande)$ – ou encore la sous-unité – et alors chaque partie est $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$.

5.2.4.4 Mode d'APP K3.2

L'autre processus de comparaison visuelle que nous avons observé est celui qui s'appuie sur des représentations semi-concrètes, c'est-à-dire des dessins. Dans les cas observés, il s'agissait de représentations rectangulaires. Les actions associées à ce mode d'APP consistent à dessiner deux rectangles de même longueur et à séparer les rectangles avec des lignes verticales pour obtenir des nombres de parties correspondant aux dénominateurs des fractions à comparer, puis à colorier, pointer ou désigner autrement une partie de chaque rectangle, avant de fournir une réponse orale ou écrite.

À l'oral, on remarque donc que les verbalisations consistent simplement à formuler une réponse, avec à l'occasion l'utilisation des mots attirant l'attention sur l'aspect visuel de la comparaison, comme « regarde » ou « je vois ». À nouveau, les manières de penser impliquées dans ce mode d'APP reposent sur le principe de la partition exhaustive du tout en n partie égales et le sens partie/tout de la fraction. Ainsi, le rectangle est séparé en n parties égales et chaque partie correspond à $\frac{1}{n}$ de la bande. Il est donc possible de comparer visuellement les parties des deux rectangles pour comparer les fractions unitaires associées. De plus, encore une fois, il serait compatible de considérer comme unité de référence la bande entière – et donc que chaque partie est $\frac{1}{n}(1 - bande)$ – mais aussi de considérer la sous-unité comme référence – et alors chaque partie est $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$.

5.2.4.5 Mode d'APP K4

Dans l'extrait 30, on peut constater que l'élève Amanda utilise un calcul pour pouvoir comparer les fractions un quart et un cinquième. C'est ce que nous associerons au mode d'APP K4 : l'utilisation d'un tout numérique et le calcul des quantités correspondant à chaque fraction pour les comparer. Dans le cas d'Amanda, ça se passe surtout à l'oral : elle ne fait pas vraiment de geste, et ne laisse pas non plus de traces écrites. Ce serait toutefois possible qu'un élève qui mobilise ce mode d'APP écrive ses calculs. Ce sont vraiment les manières de parler d'Amanda qui nous ont informés sur la stratégie qu'elle a mise en place. Ses manières de parler consiste à détailler le calcul qu'elle a fait : « Un quart, c'est plus grand qu'un sur cinq. Parce que 100 divisé par 4 ça donne 25 pis 100 divisé par 5 ça donne 20. » C'est donc ces façons de parler que nous associons au mode d'APP K4, en gardant en tête que d'autres nombres pourraient être utilisés. En ce qui concerne les façons de penser, il s'agit cette fois d'interpréter la fraction comme un opérateur : le quart de cent, c'est équivalent à cent divisé par quatre. En fait, l'utilisation de la fraction comme opérateur équivaut plutôt à deux opérations, soit la multiplication par le numérateur et la division par le dénominateur. Toutefois, les fractions en question ici étant des fractions unitaires, la multiplication par un laisse la quantité initiale inchangée et peut être omise par l'élève. Ainsi, en utilisant le même tout numérique avec les deux fractions, la tâche de comparaison de deux fractions peut devenir une tâche de comparaison de deux entiers.

5.2.5 Tâche M : Comparaison deux à deux de fractions non unitaires

5.2.5.1 Mode d'APP M1

Nous avons observé un élève, Albert, qui utilise dans l'extrait 36 une stratégie qui fonctionne dans le cas des fractions unitaires, mais pas toujours dans le cas des fractions non unitaires. Il s'agit de la comparaison numérique des dénominateurs en utilisant le dénominateur comme indicateur de nombre de parties. En fait, l'association directe entre le dénominateur et le nombre de parties n'est pas mentionnée par l'élève, mais nous l'incluons quand même dans notre description du mode d'APP car nous interprétons la procédure comme nous l'avons fait dans le contexte des fractions unitaires. Ainsi, la manière de penser est que le tout est le même pour les deux fractions, et donc plus le nombre de parties, indiqué par le dénominateur, est grand, plus la longueur des parties est petite, et par la même occasion la valeur de la fraction. Nous ajoutons que le numérateur n'a pas d'incidence. Nous reprenons aussi les mêmes façons de parler que nous avions dégagées dans le cas de la comparaison des fractions unitaires, mais nous y ajoutons celle d'Albert dans l'extrait 36, quand il explique son raisonnement : « Quand je vois un chiffre plus petit, je dis que c'est plus grand. » Pour ce qui est des manières d'agir que nous associons au mode d'APP M1, nous constatons que si l'élève exprime son raisonnement, comme Albert l'a fait, il pourrait pointer les dénominateurs pendant qu'il parle. Il est aussi possible que l'élève écrive sa réponse sous la forme d'un signe d'inégalité entre les deux fractions à comparer. Cette réponse pourrait être valide ou pas, dépendamment des numérateurs des fractions à comparer.

Toutefois, lorsque l'enseignante questionne les élèves, la réponse suggérée par Albert ne correspond pas au raisonnement qu'elle espérait voir émerger. En effet, la démarche verbalisée par Albert s'appuie uniquement sur une comparaison numérique des dénominateurs. Il s'agit d'un raisonnement cohérent avec ce qui a été mis de l'avant pour les questions de la section 1 du quiz, alors qu'on comparait des fractions unitaires en comparant la grosseur des parties à partir du nombre de parties dénoté par le dénominateur. Ces manières de parler et de penser correspondent à une comparaison numérique des dénominateurs comme indiquant le nombre de parties, sans nécessairement tenir compte du numérateur, que nous associons maintenant au nouveau mode d'APP M1). Cependant, il ne s'agit pas d'une démarche valide pour toutes les fractions, comme le souligne l'enseignante (lignes 11 et 12 de l'extrait 36).

5.2.5.2 Mode d'APP M2.1

À quelques reprises, l'enseignante et les élèves procèdent à la comparaison deux à deux de fractions non unitaires en utilisant les bandes de papier comme représentations concrètes des fractions en question. Les manières d'agir peuvent varier dans les détails, mais on peut les résumer globalement en disant que la personne va pointer, colorier ou désigner la section de la bande de papier qui correspond à une des fractions à comparer, puis faire de même avec l'autre fraction à comparer et ensuite fournir une réponse orale ou écrite pour dire laquelle est la plus grande. Pour ce qui est des façons de parler, il est possible, surtout s'il s'agit de l'enseignante, que la personne verbalise la représentation du dénominateur et du numérateur dans la bande de papier pliée. En effet, lorsqu'elle voulait comparer deux tiers et un cinquième, nous avons pu entendre l'enseignante affirmer « J'ai ici la bande séparée en trois. Deux tiers, ça veut dire que je prends deux morceaux sur trois. ». Ceci traduit bien la façon de penser selon laquelle si la bande est pliée en trois parties égales, chaque partie est $1\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ et que le deux tiers correspond à $a\left(\frac{1}{b} - bande\right)$. Il est alors possible de comparer visuellement les sections associées aux fractions sur deux bandes. Cette façon de penser repose sur une interprétation du nombre rationnel qui utilise la fraction unitaire comme sous-unité de référence, mais il serait aussi cohérent d'envisager une façon de penser s'appuyant sur la bande entière comme unité de référence. On le formulerait comme suit : lorsque la bande est pliée en b parties égales, chaque partie est $\frac{1}{b}(1 - bande)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à $\frac{a}{b}(1 - bande)$.

5.2.5.3 Mode d'APP M2.2

Nous avons aussi observé la comparaison de fractions non unitaires en utilisant des dessins (représentations semi-concrètes). De façon générale, les manières d'agir associées à ce mode d'APP consistent à dessiner deux rectangles de même longueur, puis à séparer chaque rectangle pour obtenir le nombre de parties correspondant aux dénominateurs des deux fractions qu'on veut comparer, puis à colorier, pointer ou désigner le nombre de parties correspondant au numérateur de chaque fraction dans le rectangle associé afin de procéder à la comparaison. Cela peut être suivi de l'écriture du signe d'inégalité approprié, ou de l'expression orale de la réponse par des phrases comme « C'est plus petit/plus grand. ». Un exemple de mobilisation de ce mode d'APP pendant la séance est la démarche proposée par Roméo dans l'extrait 35, et nous fournit une autre façon de parler à ajouter à notre description. Toutefois, puisque Roméo parle pendant qu'il effectue les manipulations, et peut-être aussi en raison du contexte de langue seconde, il remplace parfois des mots par des gestes, ou bien les dit de façon moins claire qui fait qu'on ne comprend pas tous les mots. On comprend néanmoins son propos général, et nous le formulerons succinctement comme suit : « J'ai fait ça en trois. Et si je dessine deux des parties… ». Cette verbalisation est cohérente avec une façon de penser selon laquelle dans le cas d'un rectangle divisé en trois parties égales, chaque partie est $1\left(\frac{1}{3} - rectangle\right)$ et que le deux tiers correspond à $a\left(\frac{1}{b} - rectangle\right)$. Il est alors possible de comparer visuellement les fractions en regardant les portions des rectangles qui y sont associées. Notons que la façon de penser que nous venons de décrire exploite l'interprétation du nombre rationnel qui utilise la fraction unitaire comme sous-unité de référence. Toutefois, nous jugeons que ce serait aussi cohérent de la formuler en utilisant plutôt la bande entière comme unité de référence, en disant que lorsque le rectangle est séparé en b parties égales, chaque partie est $\frac{1}{b}(1 - bande)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à $\frac{a}{b}(1 - bande)$. Nous avons donc inclus les deux formulations dans les manières de penser associées à ce mode d'APP.

5.2.5.4 Mode d'APP M3.1

Une autre façon de faire pour comparer des fractions est de chercher un dénominateur commun. On peut le faire en s'appuyant sur une représentation par dessin, en rectangles. Chacune des deux fractions à comparer est alors représentée par un rectangle. Les deux rectangles sont un au-dessus de l'autre, de même grandeur, et alignés. On ajoute des séparations dans les sections des rectangles afin de créer des sous-sections qui seront égales pour les deux rectangles et par la même occasion, un même nombre de sous-sections. On peut accompagner ces représentations semi-concrètes par des représentations symboliques en écrivant les opérations correspondantes. Le raisonnement derrière cette façon de faire est que si on sépare chacune des sections d'un rectangle en un même nombre de sous-sections, la fraction représentée demeure la même. Ainsi, lorsqu'on fait cela avec les 2 rectangles (représentant les 2 fractions à comparer), et qu'on obtient des sous-sections de mêmes dimensions, il est plus facile de comparer les deux fractions. Dans la séance que nous avons observée, les manières de parler associées à ce mode d'APP concernaient des fractions qui avaient comme dénominateurs trois et cinq. Une version synthétisée des manières de parler exhibées va comme suit : « Je sépare mes trois morceaux en cinq et je sépare mes cinq morceaux en trois. Mes séparations deviennent exactement les mêmes. »

5.2.5.5 Mode d'APP M3.2

Éventuellement, la comparaison de fractions non unitaires se fera à l'aide d'un dénominateur commun sans représentation par dessin, seulement avec une représentation symbolique (notation fractionnaire, nombres, symboles reliés aux opérations). Les manières d'agir consistent donc à laisser des traces de ces opérations. Les manières de parler que nous avons relevées établissent le lien entre l'idée de diviser les sections en sous-section et l'opération de multiplication, et mettent l'accent sur l'idée de conserver la même fraction en effectuant la même opération au numérateur et au dénominateur. Dans l'action, il s'agissait d'interactions entre l'enseignante et les élèves, mais nous résumons ainsi les manières de parler : « Mes trois morceaux, je les ai séparés en cinq, alors j'ai multiplié par cinq. Je suis rendue à quinze. Ici, je vais multiplier par cinq aussi pour garder la même fraction. Ça nous donne dix. » Ainsi, les manières de penser qui sont cohérentes avec ce mode d'APP sont que séparer toutes les sections d'un rectangle en un nombre k de sous-sections fait en sorte qu'on obtient un nombre total de sous-sections k fois plus grand que le nombre de sections initiales. Ainsi, cela correspond à multiplier le nombre de sections par k, autant au numérateur qu'au dénominateur. Donc, en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même facteur, on ne change pas la valeur de la fraction. On pourrait aussi le formuler en disant qu'en appliquant la même opération multiplicative au numérateur et au dénominateur, on ne change pas le rapport entre les deux nombres et donc la valeur de la fraction demeure la même.

5.2.6 Tâche L : Recherche de fractions équivalentes

5.2.6.1 Mode d'APP L1

On observe que l'enseignante utilise les bandes de papier comme représentations concrètes des fractions pour la recherche d'un dénominateur commun. Nos descriptions de façons d'agir, de parler et de penser s'inspirent de celles exhibées par l'enseignante dans le cas de la fraction deux sur cinq. Les actions posées consistent globalement à utiliser une bande pliée en cinq parties égales et à colorier deux des morceaux pour représenter la fraction deux cinquièmes, puis à replier la bande en cinq et ensuite la plier en deux, pour finalement la déplier et compter combien de morceaux on obtient au total et combien de morceaux sont coloriés. Les façons de parler qui accompagnent ces manipulations sont assez descriptives : « Je prends deux morceaux sur mes cinq. Ensuite, si je prends mes cinq morceaux et que je plie en deux, je suis rendue à 10 morceaux. Je fais fois deux pour chaque morceau, chaque morceau est séparé en deux. J'avais deux cinquièmes, je suis rendue à combien sur dix : 1, 2, 3, 4. 4 sur 10. » Notons qu'il ne s'agit pas exactement des propos que l'enseignante a dit dans l'action, mais d'une version plus synthétique de ses verbalisations. Les façons de penser que nous associons à ce mode d'APP sont les suivantes : si on sépare chacune des sections d'une bande en un même nombre de sous-sections égales, la fraction représentée demeure la même et on peut compter le nombre de sections coloriées et le nombre de sections totales pour obtenir, respectivement, le numérateur et le dénominateur de la fraction équivalente.

5.2.6.2 Mode d'APP L2

L'autre mode d'APP qui a été mis en place pendant la séance observée en ce qui concerne la recherche de fractions équivalentes est celui que nous associons à l'opération de multiplication au numérateur et au dénominateur. Les seules manières d'agir que nous dégageons en lien avec ce mode d'APP consistent à laisser des traces écrites en lien avec les opérations mathématiques effectuées. Les manières de parler que nous associons à ce mode d'APP consistent aussi à décrire les opérations effectuées. Elles pourraient être précises, comme « Je multiplie par quatre au numérateur et au dénominateur », ou plus vague, comme « J'ai fait fois trois ici et je fais fois trois ici ». Dans ce dernier cas, elles devraient être accompagnées de flèches ou de gestes. Enfin, nous associons deux raisonnements au mode d'APP L2. Le premier est associé à la transition entre une représentation concrète ou semi-concrète de la fraction et une procédure dans la notation abstraite : Séparer toutes les parties de la bande en *k* parties donne *k* fois plus de parties et correspond à multiplier le nombre de parties par *k*, autant au numérateur qu'au dénominateur. Le deuxième est plus purement numérique, et s'appuie sur le sens rapport de la fraction : En multipliant le numérateur et le dénominateur par le même facteur, on ne change pas le rapport multiplicatif entre les deux et donc la valeur de la fraction demeure la même.

5.3 Tableaux-synthèses des modes d'agir-parler-penser anticipés et émergents

Nous incluons ici un tableau par tâche, qui résume les modes d'APP qui ont été décrits dans le chapitre 4 - pour les modes d'APP anticipés – et dans la section 2 du chapitre 5 - pour les modes d'APP émergents. Lorsque le code et le nom du mode d'APP est sur fond vert, cela signifie qu'il s'agit d'un mode émergent.

Tableau 5.1 : Modes d'APP de la tâche CA

Tâche CA : Plier une bande de papier en deux et nommer chacune des deux parties.			
Objets ou relations mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CA1 : Plier en deux et nommer les parties en considérant la bande comme unité			
La fraction comme partie d'un tout continu La fraction unitaire	Plier une bande en deux en alignant les deux extrémités Écrire ½ sur chaque partie.	Il y a deux parties égales. Chaque partie représente la *demie* de la bande.	Lorsqu'il y a deux parties égales, chacune est la demie du tout. La bande de papier est le tout, l'unité. Chaque partie est $\frac{1}{2}(1-bande)$. Le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction.
CA2 : Plier en deux et nommer les parties en considérant les demi-bandes comme unités			
La fraction comme mesure La fraction unitaire	Plier une bande en deux en alignant les deux extrémités. Écrire ½ sur chaque partie.	Il y a deux parties égales. Chaque partie représente une demi-bande. Il y a deux demi-bandes.	Lorsqu'il y a deux parties égales, chacune est un demi-tout. La bande de papier est le tout, l'unité. Chaque partie est $1(\frac{1}{2}-bande)$. Le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction.
CA3 : Identifier la bande par le nombre de parties			
Relation entre la démarche de pliage et le nombre de parties obtenues	Plier une bande en deux en alignant les deux extrémités. Écrire 2 sur la bande.	Il y a deux parties. C'est deux.	Pour les élèves : Ce qui est important, c'est le nombre de parties. Pour l'enseignante : Le nombre de parties est directement relié à la valeur de la fraction représentée par chaque partie car il correspond au dénominateur.

Tableau 5.2 : Modes d'APP de la tâche CB

Tâche CB : Plier une bande de papier en **quatre** parties égales.			
Objets ou relations mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CB1 : Relation multiplicative entre les étapes du pliage			
Relation multiplicative entre les étapes du pliage	Pour obtenir 4 : Plier une bande en deux une première fois, puis la plier en deux à nouveau.	C'est comme plier chaque partie/demie en deux. On a deux fois plus de parties. Deux fois deux donne quatre.	Le nombre de parties double si on plie la bande en deux une fois de plus. La bande est $2(\frac{1}{2}-bande)$ après un premier pliage, et $4\left(\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-bande)\right)$, donc $4\left(\frac{1}{4}-bande\right)$, après un deuxième pliage
CB2 : Relation additive entre les étapes du pliage			
Relation additive entre les étapes du pliage	Pour obtenir 4 : Plier une bande en deux une première fois, puis la plier en deux à nouveau.	Il y a deux parties de plus. Deux plus deux donne quatre.	Le nombre parties augmente de 2 si on plie la bande en deux une fois de plus.
CB3 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{4}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{4}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée (qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée.	Ça, ça rentre 4 fois dans ma bande. Ça va être la longueur de chaque partie.	Les quatre parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d'anticiper cette mesure : il s'agit de $1(\frac{1}{4}-bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{4}-bande\right)$. Une bande compte $4\left(\frac{1}{4}-bande\right)$.
	CB3.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n'est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de l'élève une fois la procédure entamée.

	CB3.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 5 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CB3.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 4 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en quatre parties égales.
	CB3.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en quatre parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était pas correcte. Il faut recommencer.
	CB3.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Après avoir compté et constaté l'excès, couper ou déchirer l'excès. Replier l'excès derrière la bande pour le cacher.	Comme ça, ça va. Sans ça, c'est ok.	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le quart de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CB4 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels) La fraction $\frac{1}{4}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon	Un, deux, trois, quatre, … Il y a 4 parties. C'est ok. Ça ne marche pas.	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide.

	saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie		Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{4}$, il suffit qu'il y ait 4 parties dans le tout partagé.

Tableau 5.3 : Modes d'APP de la tâche CC

Tâche CC : Plier une bande de papier en **trois** parties égales.			
Objets ou relations mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CC1 : Superposition des parties avant de compléter le pliage			
Fraction $\frac{1}{3}$ selon le sens partie/tout	Ramener vers l'intérieur les deux extrémités de la bande, avec une par-dessus l'autre ; s'assurer que les trois « étages » ont la même longueur, et appuyer pour compléter les plis. Former une forme d'accordéon avec la bande, sans former les plis complètement, puis s'assurer que les trois « étages » ont la même longueur avant d'appuyer pour finaliser les plis.	Il faut que ça soit pile dessus. Il faut que ça soit égal. Je pousse le bout jusqu'au coin avant de peser. J'ajuste un peu et ensuite je plie.	Si j'utilise toute la bande pour former les trois étages, et que je m'assure que les trois étages ont la même longueur en les comparant visuellement en simultanée, alors j'obtiendrai trois parties égales. Chaque partie représente $\frac{1}{3}(1-bande)$.
CC2 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{3}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{3}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée (qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée.	Les trois parties vont mesurer à peu près cela. Ça, ça rentre trois fois dans ma bande. Ça va être la longueur de chaque partie.	Les trois parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d'anticiper cette mesure : il s'agit de $1(\frac{1}{3}-bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{3}-bande\right)$. Une bande compte $3\left(\frac{1}{3}-bande\right)$.
	CC2.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n'est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de

			l'élève une fois la procédure entamée.
	CC2.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 4 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CC2.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 4 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en trois parties égales.
	CC2.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en trois parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était pas correcte. Il faut recommencer.
	CC2.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	« J'ai réussi. » « Ça, c'est plus petit. » « C'est pas égal. »	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le tiers de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CC3 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels)	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon	Un, deux, trois, … Il y a 3 parties. C'est ok. Ça ne marche pas.	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide.

	saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie		Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{3}$, il suffit qu'il y ait 3 parties dans le tout partagé.
CC4 : Vérification visuelle de la longueur des morceaux			
Approximation et comparaison de longueurs La fraction $\frac{1}{3}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	« J'ai réussi. » « Ça, c'est plus petit. » « C'est pas égal. »	Pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs.
CC5 : Superposition des parties avant de compléter le pliage, confusion entre le nombre de plis et le nombre de parties			
Relation entre la procédure de pliage et le nombre de parties obtenues	Plier la bande en l'enroulant pour avoir trois plis (« coins ») et donc quatre couches de papier, mais sans « compléter » le pli tout de suite. S'assurer que les extrémités et les plis sont superposés, puis compléter le pli. Former une forme d'accordéon avec la bande en formant trois plis (« coins »), sans former les plis complètement, puis s'assurer que les quatre « étages » ont la même longueur avant d'appuyer pour finaliser les plis.	Ça doit être égal. Il faut tourner trois fois. Un, deux, trois,…	Puisqu'on veut avoir trois parties, il faut plier trois fois.

Tableau 5.4 : Modes d'APP de la tâche CD

Tâche CD : Plier une bande de papier en **six** parties égales.			
Objets ou relations mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CD1 : Relation multiplicative entre les différentes étapes du pliage			
Relation multiplicative entre les étapes du pliage	Plier une bande en 3, ne pas la déplier, puis plier en deux. Plier en 2, puis en 3.	C'est comme plier chaque partie en deux. On a deux fois plus de parties. Trois fois deux donne six.	Le nombre de parties double si on plie la bande en deux une fois de plus. La bande est $3(\frac{1}{3} - bande)$ après un premier pliage, et $6\left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{3} - bande)\right)$, donc $6\left(\frac{1}{6} - bande\right)$, après un deuxième pliage

CD2 : Relation additive entre les différentes étapes du pliage			
Relation additive entre les étapes du pliage	Plier une bande en 2, puis plier en deux à deux autres reprises (sans l'avoir dépliée).	Je veux faire deux de plus, donc je plie en deux une autre fois. Deux plus deux plus deux donne six.	Le nombre de parties augmente de 2 si on plie la bande en deux une fois de plus.
CD3 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{6}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{6}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée (qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée.	Les six parties vont mesurer à peu près cela. Ça, ça rentre six fois dans ma bande. Ça va être la longueur de chaque partie.	Les six parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d'anticiper cette mesure : il s'agit de $1(\frac{1}{6} - bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{6} - bande\right)$. Une bande compte $6\left(\frac{1}{6} - bande\right)$.
	CD3.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n'est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de l'élève une fois la procédure entamée.
	CD3.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 7 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CD3.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 6 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en six parties égales.

	CD3.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en six parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était pas correcte. Il faut recommencer.
	CD3.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Après avoir compté et constaté l'excès, couper ou déchirer l'excès. Replier l'excès derrière la bande pour le cacher.	Comme ça, ça va. Sans ça, c'est ok.	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le sixième de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CD4 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels)	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie	Un, deux, trois, quatre, cinq, six, … Il y a 6 parties. C'est ok. Ça ne marche pas.	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{6}$, il suffit qu'il y ait 6 parties dans le tout partagé.
CD5 : Vérification visuelle de la longueur des morceaux			
Approximation et comparaison de longueurs La fraction $\frac{1}{6}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	« J'ai réussi. » « Ça, c'est plus petit. » « C'est pas égal. »	Pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{6}$, il faut qu'il y ait 6 parties de

			même mesure dans le tout partagé.

Tableau 5.5 : Modes d’APP de la tâche CE

Tâche CE : Plier une bande de papier en **huit** parties égales.			
Relations et objets mathématiques	Manières d’agir	Manières de parler	Manières de penser
CE1 : Relation multiplicative entre les différentes étapes du pliage (nombre de parties)			
Relation multiplicative entre les étapes du pliage	Plier une bande en deux une première fois, puis la plier en deux à nouveau, et enfin encore la plier en deux.	Ça fait deux fois plus (de parties). Deux fois deux fois deux donne huit. Deux fois deux donne quatre et quatre fois deux donne huit. C’est comme plier chaque partie en deux.	Le nombre de parties double si on plie la bande en deux une fois de plus. Après un premier pliage en deux, la bande est $2\left(\frac{1}{2}-bande\right)$. Après un deuxième pliage en deux, elle est $4\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-bande\right)\right)$. Après le troisième pliage en deux, la bande est $8\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-bande\right)\right)\right)$, soit $8\left(\frac{1}{8}-bande\right)$.
CE2 : Relation multiplicative entre les différentes étapes du pliage (longueur des parties)			
Relation multiplicative entre les étapes du pliage	Plier une bande en deux une première fois, puis la plier en deux à nouveau, et enfin encore la plier en deux.	Les parties sont deux fois plus petites. Il faut que je plie encore pour avoir des parties deux fois plus petites. C’est comme plier chaque partie en deux.	Le tout (la bande de papier) est le même. Donc les huit parties égales seront deux fois plus petites que les quatre parties égales. Pour obtenir des parties deux fois plus petites, je dois plier en deux une fois de plus.
CE3 : Relation additive entre les différentes étapes du pliage			
Relation additive entre les étapes du pliage	Plier une bande en deux une première fois, puis la plier en deux à nouveau trois autres fois.	J’ajoute (toujours) deux parties. Deux plus deux plus deux plus deux donne quatre. Quatre fois deux donne huit.	Le nombre de parties augmente de 2 si on plie la bande en deux une fois de plus.

CE4 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{8}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{8}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée (qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée.	Les huit parties vont mesurer à peu près cela. Ça, ça rentre huit fois dans ma bande. Ça va être la longueur de chaque partie.	Les huit parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d'anticiper cette mesure : il s'agit de $1(\frac{1}{8} - bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{8} - bande\right)$. Une bande compte $8\left(\frac{1}{8} - bande\right)$.
	CE4.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n'est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de l'élève une fois la procédure entamée.
	CE4.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 9 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CE4.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 8 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en huit parties égales.
	CE4.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en huit parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était

			pas correcte. Il faut recommencer.
	CE4.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Après avoir compté et constaté l'excès, couper ou déchirer l'excès. Replier l'excès derrière la bande pour le cacher.	Comme ça, ça va. Sans ça, c'est ok.	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le huitième de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CE5 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels)	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie	Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, … Il y a 8 parties. C'est ok. Ça ne marche pas.	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{8}$, il suffit qu'il y ait 8 parties dans le tout partagé.
CE6 : Vérification visuelle de la longueur des morceaux			
Approximation et comparaison de longueurs La fraction $\frac{1}{8}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	« J'ai réussi. » « Ça, c'est plus petit. » « C'est pas égal. »	Pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{8}$, il faut qu'il y ait 8 parties de même mesure dans le tout partagé.

Tableau 5.6 : Modes d'APP de la tâche CF

Tâche CF : Plier une bande de papier en **cinq** parties égales.			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CF1 : Superposition des parties avant de compléter le pliage			
La fraction $\frac{1}{5}$ selon le sens partie/tout	Plier la bande en l'enroulant pour avoir cinq couches de papier, mais sans « compléter » le pli tout de suite. S'assurer que les extrémités et les plis sont superposés, puis compléter le pli. Former une forme d'accordéon avec la bande, sans former les plis complètement, puis s'assurer que les cinq « étages » ont la même longueur avant d'appuyer pour finaliser les plis.	Il faut que ça soit pile dessus. Il faut que ça soit égal. Je pousse le bout jusqu'au coin avant de peser. J'ajuste un peu et ensuite je plie.	Si j'utilise toute la bande pour former les cinq étages, et que je m'assure que les cinq étages ont la même longueur en les comparant visuellement en simultanée, alors j'obtiendrai cinq parties égales. Chaque partie représente $\frac{1}{5}(1 - bande)$.
CF2 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{5}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{5}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée (qu'il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu'on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu'à ce que la bande soit épuisée.	Les cinq parties vont mesurer à peu près cela. Ça, ça rentre cinq fois dans ma bande. Ça va être la longueur de chaque partie.	Les cinq parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d'anticiper cette mesure : il s'agit de $1(\frac{1}{5} - bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{5} - bande\right)$. Une bande compte $5\left(\frac{1}{5} - bande\right)$.
	CF2.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n'est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de l'élève une

			fois la procédure entamée.
	CF2.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 5 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CF2.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 5 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en cinq parties égales.
	CF2.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en cinq parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était pas correcte. Il faut recommencer.
	CF2.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Après avoir compté et constaté l'excès, couper ou déchirer l'excès. Replier l'excès derrière la bande pour le cacher.	Comme ça, ça va. Sans ça, c'est ok.	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le cinquième de la bande, même s'il ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CF3 : Relation additive entre les différentes étapes du pliage			
Relation additive entre les étapes du pliage	Partir d'une bande pliée en 4 parties. Choisir une partie à un des bouts de la bande et la plier en deux.	Quatre plus un donne 5.	En pliant une partie en deux, j'obtiens une

		J'ajoute une cinquième partie dans la quatrième et j'en ai maintenant cinq. Je divise ma quatrième partie en deux pour en avoir cinq en tout.	partie supplémentaire au final. La fraction $\frac{1}{5}$ est obtenue par une partition exhaustive du tout en cinq parties. Ce n'est pas grave si elles ne sont pas égales.
CF4 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels)	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie	Un, deux, trois, quatre, cinq, … Il y a 5 parties. C'est ok. Ça ne marche pas.	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{5}$, il suffit qu'il y ait 5 parties dans le tout partagé.
CF5 : Vérification visuelle de la longueur des morceaux			
Approximation et comparaison de longueurs La fraction $\frac{1}{5}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	J'ai réussi. Ça, c'est plus petit. C'est pas égal.	Pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{5}$, il faut qu'il y ait 5 parties de même mesure dans le tout partagé.
CF6 : Considérer la non-parité de cinq comme un obstacle au pliage			
Relation entre les étapes du pliage et le nombre de parties obtenues	Utiliser les cinq doigts de la main pour représenter les 5 sections désirées, utiliser son autre main pour agripper deux doigts à la fois et agiter le pouce qui est resté seul.	Ça marche pas. Y'a deux, puis deux. Qu'est-ce qu'on va faire avec ça? Ça sera pas égal, ça.	Pour effectuer des pliages plus complexes, on plie en deux pour doubler. Or, un nombre impair ne contient pas de facteur deux. Ainsi, on ne pourra pas réaliser

			le pliage d'un nombre impair de parties.
CF7 : Hybride entre l'estimation de la longueur désirée et la relation multiplicative entre les étapes du pliage			
La fraction $\frac{1}{5}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{5}$ selon le sens partie/tout	Plier la bande en deux de façon à ce qu'une des parties dépasse l'autre d'environ un cinquième de bande. Replier en deux la portion de bande qui a deux étages pour obtenir quatre parties égales, plus l'excès laissé initialement.	Deux fois deux donne quatre. Plus une donne cinq. J'ai laissé un bout et après je double. Je plie en deux pour doubler ces deux parties.	En laissant initialement de côté une section de bande, il suffit ensuite de se concentrer sur le reste pour obtenir quatre parties égales. Cette section initialement mise de côté doit avoir la même mesure que les autres sections. Il est possible d'anticiper cette mesure : puisque la bande doit compter $5\ (\frac{1}{5} - bande)$, cette section est $1(\frac{1}{5} - bande)$.

Tableau 5.7 : Modes d'APP de la tâche CG

Tâche CG : Plier une bande de papier en **neuf** parties égales.			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CG1 : Relation multiplicative entre les différentes « couches » /étapes du pliage			
Relation multiplicative entre les étapes du pliage	Plier une bande en 3, puis la plier en trois à nouveau.	C'est comme plier chaque partie en trois. On a trois fois plus de parties. Trois fois trois donne neuf.	Le nombre de parties triple si on plie la bande en trois une fois de plus. La bande correspond à $3\left(\frac{1}{3} - bande\right)$ après un premier pliage, puis, après un deuxième pliage, $9\ \left(\frac{1}{3} - (\frac{1}{3} - bande)\right)$, soit $9\left(\frac{1}{9} - bande\right)$.
CG2 : Relation additive entre les différentes étapes du pliage			
Relation additive entre les étapes du pliage	Partir d'une bande pliée en 8 parties. Choisir une partie à un des bouts de la bande et la plier en deux.	Huit plus un donne 9.	En pliant une partie en deux, j'obtiens une partie supplémentaire au final.

		J’ajoute une neuvième partie dans la huitième et j’en ai maintenant neuf. Je divise ma huitième partie en deux pour en avoir neuf en tout.	Obtenir neuf parties est l’objectif. Ce n’est pas grave si elles ne sont pas égales.
CG3 : Superposition des parties avant de compléter le pliage			
La fraction $\frac{1}{9}$ selon le sens partie/tout	Plier la bande en l’enroulant pour avoir neuf couches de papier, mais sans « compléter » le pli tout de suite. S’assurer que les extrémités et les plis sont superposés, puis compléter le pli. Former une forme d’accordéon avec la bande, sans former les plis complètement, puis s’assurer que les neuf « étages » ont la même longueur avant d’appuyer pour finaliser les plis.	Il faut que ça soit pile dessus. Il faut que ça soit égal. Je pousse le bout jusqu’au coin avant de peser. J’ajuste un peu et ensuite je plie.	Si j’utilise toute la bande pour former les neuf étages, et que je m’assure que les neuf étages ont la même longueur en les comparant visuellement en simultanée, alors j’obtiendrai neuf parties égales. Chaque partie représente $\frac{1}{9}(1 - bande)$.
CG4 : Estimation de la longueur des parties désirées			
La fraction $\frac{1}{9}$ comme mesure La fraction $\frac{1}{9}$ selon le sens partie/tout	Estimer la longueur de la partie qu’on désire. Plier la bande de papier en accordéon pour obtenir cette longueur jusqu’à ce que la bande soit épuisée (qu’il ne reste pas suffisamment de papier pour répéter cette longueur). Estimer la longueur de la partie qu’on désire. Plier la bande de papier « en enroulant » pour obtenir cette longueur jusqu’à ce que la bande soit épuisée.	Ça, ça rentre 9 fois dans ma bande.	Les quatre parties de bandes auront la même mesure. Il est possible d’anticiper cette mesure : il s’agit de $1(\frac{1}{9} - bande)$. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{9} - bande\right)$. Une bande compte $9\left(\frac{1}{9} - bande\right)$.
	CG4.1 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque ignoré		
	Aucune action particulière.	Ce n’est pas grave.	Le processus de pliage est jugé fiable en lui-

			même, donc c'est satisfaisant. La fraction comme objet mathématique est évacuée des façons de penser de l'élève une fois la procédure entamée.
	CG4.2 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès compté comme une partie		
	Pointer les parties en les comptant, incluant la dernière (excès).	Il y a 9 parties.	La dernière partie compte même si elle est plus petite que les autres, peu importe sa longueur.
	CG4.3 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque est considéré comme conséquence l'approximation		
	Hausser les épaules ou balayer de la main, après avoir compté.	C'est à peu près ça. Ça donne environ 9 parties.	Le processus d'approximation n'est pas précis. Il contient des incertitudes. Ce n'est pas problématique. Il n'est pas important que le pliage corresponde à une partition exhaustive de la bande en neuf parties égales.
	CG4.4 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès ou manque considéré comme une erreur		
	Tenter de lisser la bande pour effacer les plis et recommencer le pliage. Prendre une nouvelle bande vierge et tenter le pliage à nouveau.	Ce n'est pas ça. Attends, je vais réessayer.	Le pliage n'est pas une partition exhaustive en neuf parties égales : le résultat n'est pas satisfaisant, et donc la procédure n'était pas correcte. Il faut recommencer.
	CG4.5 : Estimation de la longueur des parties désirées, excès supprimé		
	Après avoir compté et constaté l'excès, couper ou déchirer l'excès. Replier l'excès derrière la bande pour le cacher.	Comme ça, ça va. Sans ça, c'est ok.	Si cet excès n'était pas présent, l'objectif serait atteint. Ainsi, la solution est de supprimer la partie de trop. La conservation du tout n'est pas importante, c'est le nombre de parties et l'égalité des parties qui importent. Il faut que chaque partie représente le neuvième de la bande, même s'il

			ne s'agit pas de la même bande qu'initialement.
CG5 : Vérification par comptage			
Comptine (nombres naturels)	Déplier la bande et compter le nombre de parties séparées par les marques de pliage. Gestes de comptage : pointer du doigt successivement chacune de parties ; faire un mouvement de la tête qui hoche légèrement de façon saccadée pendant que les yeux balaient la bande de papier ; tracer un trait de crayon sur chaque partie	Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, … Il y a 9 parties. C'est ok. Ça ne marche pas	Le nombre de parties comptées devrait être le même que le nombre demandé par l'enseignant. Si le nombre est le même, le pliage est valide. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{9}$, il suffit qu'il y ait 9 parties dans le tout partagé.
CG6 : Vérification de la longueur des morceaux			
Approximation et comparaison de longueurs La fraction $\frac{1}{9}$ selon le sens partie/tout	Déplier la bande de papier et la balayer du regard.	« J'ai réussi. » « Ça, c'est plus petit. » « C'est pas égal. »	Pour que le pliage soit réussi, il faut que toutes les parties aient la même longueur. Une confirmation visuelle permet de comparer adéquatement les longueurs. Pour que chaque partie représente la fraction $\frac{1}{9}$, il faut qu'il y ait 9 parties de même mesure dans le tout partagé.

Tableau 5.8 : Modes d'APP de la tâche CH

Tâche CH : Identifier à quelle fraction de la bande de papier correspond chacune des parties (fraction unitaire)			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CH1 : Utilisation du symbolisme – la bande comme unité			
Le sens partie/tout de la fraction La fraction unitaire	Compter le nombre total (n) de parties égales dans la bande. Écrire $\frac{1}{n}$ sur chaque partie.	Chaque partie est un n-ième de la bande. Chaque partie est un sur n de la bande. Il y a n parties. Il y a n parties égales.	Lorsqu'il y a n parties égales, chacune est le n-ième ($\frac{1}{n}$) du tout. La bande de papier est le tout.

			Chaque partie représente $\frac{1}{n}(1 - bande)$. Le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction.
CH2 : Utilisation du symbolisme – la portion de bande comme sous-unité			
Le sens partie/tout de la fraction La fraction unitaire	Compter le nombre total (*n*) de parties égales dans la bande. Écrire $\frac{1}{n}$ sur chaque partie.	Il y a *n* parties égales. Ce sont n 1/n (n-ièmes). Chaque partie représente un *n*-ième de la bande.	Lorsqu'il y a *n* parties égales, chacune est un 1/n (*n*-ième) du tout. Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$. Le nombre de parties égales est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction.
CH3 : Utilisation du vocabulaire particulier			
Certaines fractions unitaires « connues » ou « particulières »	Compter le nombre total (*n*) de parties dans la bande pliée.	Ça, c'est une demie/un tiers/un quart. Cette partie est une demie/un tiers/un quart.	Reconnaître certaines fractions unitaires particulières (bien connues) : la demie, le tiers, le quart.

Tableau 5.9 : Modes d'APP de la tâche CI

Tâche CI : Nommer une fraction formée de parties de bande de papier pliée lorsque la fraction n'est pas unitaire			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CI1 : Utilisation du symbolisme			
Le sens partie/tout de la fraction	Compter le nombre total (*n*) de parties égales dans la bande. Compter le nombre de parties égales (*k*) dans la section de la bande qui est considérée.	Si je prends *k* parties sur les *n* qu'il y a, alors j'ai pris *k/n* de la bande. Il y a neuf parties en tout et trois ici, donc c'est trois neuvièmes.	La bande de papier est le tout. Chaque partie représente $\frac{1}{n}(1 - bande)$. Alors lorsque k parties sont considérées, cela

		Neuf, trois, trois sur neuf. Si je prends trois parties sur les neuf qu'il y a, alors j'ai pris trois neuvièmes de la bande.	représente $\frac{k}{n}(1 - bande)$. OU Chaque partie représente $1\left(\frac{1}{n} - bande\right)$. Lorsqu'on considère k parties, cela représente k $\left(\frac{1}{n} - bande\right)$. Le nombre de parties égales a total est le dénominateur dans l'écriture symbolique de la fraction. Le nombre de parties considérées est le numérateur.
CI2 : Utilisation du vocabulaire			
Certaines fractions unitaires « connues » ou « particulières »		Cette section est trois quarts de la bande. Cette section est le deux tiers de la bande.	Reconnaître certaines fractions particulières (bien connues) : Les deux tiers, les trois quarts, etc.

Tableau 5.10 : Modes d'APP de la tâche CJ

Tâche CJ : Placer les bandes en ordre croissant de grandeur des parties.			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
CJ1 : Comparaison numérique des dénominateurs (comme nombre de parties)			
Le sens partie/tout de la fraction	Placer les bandes dans l'ordre croissant attendu, de façon assez rapide, et sans procéder à une comparaison visuelle de la longueur des parties des différentes bandes pliées.	Il y en a plus ici, donc c'est plus petit. Le nombre (de parties) est plus grand alors les parties sont plus petites. Moins il y a de parties, plus les parties sont grandes.	Puisque le tout est toujours le même, alors moins il y a de parties, plus les parties sont grandes/longues.

CJ2 : Comparaison numérique des dénominateurs (comme indicateur de la grandeur)			
Le sens nombre de la fraction	Placer les bandes dans l'ordre inverse de l'ordre croissant attendu, de façon assez rapide, et sans procéder à une comparaison visuelle de la longueur des parties des différentes bandes pliées.	Il y en a plus. C'est plus. Il y a plus de parties et elles sont plus grandes.	Un plus grand nombre (n) indique de plus grandes parties. La fraction $\frac{1}{n}$ est associée à la valeur de n. Un plus grand n signifie une plus grande valeur pour la fraction (donc de plus grandes parties).
CJ3 : Comparaison visuelle des parties de bandes de papier			
Approximation et comparaison de longueurs	Placer les bandes de papier côte à côte et observer la longueur des parties des différentes bandes. Placer les bandes en ordre en se basant sur les observations faites.	Celle-là est plus petite que celle-là. Je vois que ça c'est plus grand.	Pour placer en ordre décroissant de grandeur des objets, il suffit comparer visuellement les « grandeurs » en question.

Tableau 5.11 : Modes d'APP de la tâche CK

Tâche K : Comparaison deux à deux de fractions unitaires			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
K1 : Comparaison numérique avec le dénominateur comme nombre de parties			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de nombres entiers	Écrire le signe d'inégalité attendu entre deux fractions.	C'est plus grand / plus petit. Le morceau est plus grand / plus petit. C'est plus petit parce qu'il y a plus de morceaux.	Le tout demeure le même. Ainsi, plus le nombre de parties grand, plus les parties elles-mêmes sont petites. En considérant le dénominateur comme nombre de parties, plus le dénominateur est grand, plus la fraction unitaire associée à la partie est petite.
K2 : Comparaison numérique avec le dénominateur comme indicateur de grandeur			
Comparaison de nombres entiers	Écrire le signe d'inégalité contraire à ce qui est attendu	C'est plus gros / plus petit. (*réponse erronée*)	Un plus grand nombre (n) indique de plus grandes parties. La fraction $\frac{1}{n}$ est associée à la valeur de n. Un plus grand n signifie une plus grande valeur pour la fraction (donc de plus grandes parties).

K3 : Comparaison visuelle			
K3.1 : En utilisant les représentations concrètes (bandes)			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de longueurs	Pointer, colorier ou désigner autrement les bandes de papier qui correspondent aux fractions impliquées dans la comparaison. Écrire le signe d'inégalité.	Regarde, c'est plus petit/plus grand. C'est plus petit/plus grand. Je vois que c'est plus petit/plus grand.	Si la bande est pliée en n parties égales, chaque partie est $\frac{1}{n}(1-bande)$. On peut comparer visuellement les parties de deux bandes différentes pour comparer les fractions unitaires associées. OU Si la bande est pliée en n parties égales, chaque partie est $1\left(\frac{1}{n}-bande\right)$. On peut comparer visuellement les parties de deux bandes différentes pour comparer les fractions unitaires associées.
K3.2 : En utilisant les représentations semi—concrètes (dessins)			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de longueurs	Dessiner deux rectangles de même longueur. Séparer chaque rectangle pour obtenir le nombre de parties correspondant aux dénominateurs des deux fractions (respectivement). Colorier, pointer, ou désigner autrement une partie de chaque rectangle. Écrire le signe d'inégalité.	Regarde, c'est plus petit/plus grand. C'est plus petit/plus grand. Je vois que c'est plus petit/plus grand.	Si le rectangle est séparé en n parties égales, chaque partie est $\frac{1}{n}(1-rectangle)$. On peut comparer visuellement les parties de deux rectangles différents pour comparer les fractions unitaires associées. OU Si le rectangle est séparé en n parties égales, chaque partie est $1\left(\frac{1}{n}-rectangle\right)$. On peut comparer visuellement les parties de deux rectangles différents pour comparer les fractions unitaires associées.
K4 : Utilisation d'un tout numérique et calcul des quantités			
Sens opérateur de la fraction	Écrire un calcul comme 100 divisé par 4 ou 100 divisé par 5.	Un quart c'est plus grand que un sur 5. Parce que 100 divisé	La fraction $\frac{1}{n}$ est considérée comme un

	Écrire un signe d'inégalité cohérent avec le calcul écrit (ou mentionné à l'oral).	par 4 ça donne 25 pis 100 divisé par 5 ça donne 20.	opérateur et équivaut à une division par *n*. En utilisant ce sens avec un même tout numérique pour les deux fractions, on peut traduire le problème de comparaison de fractions en un problème de comparaison d'entiers.

Tableau 5.12 : Modes d'APP de la tâche CL

Tâche L : Recherche de fractions équivalentes			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
L1 : Avec représentation visuelle concrète (bandes)			
Sens partie/tout de la fraction Relation multiplicative entre les étapes d'un pliage	Utiliser une bande pliée en cinq morceaux égaux et colorier 2 des morceaux pour représenter deux cinquièmes. Plier la bande en cinq, puis replier en deux. Déplier et compter combien de morceaux on a au total et combien de morceaux sont coloriés.	Je prends deux morceaux sur mes cinq. Ensuite, si je prends mes cinq morceaux et que je plie en deux, je suis rendue à 10 morceaux. Je fais fois deux pour chaque morceau, chaque morceau est séparé en deux. J'avais deux cinquièmes, je suis rendue à combien sur dix : 1, 2, 3, 4. 4 sur 10.	Si on sépare chacune des sections d'une bande en un même nombre de sous-sections égales, la fraction représentée demeure la même. On peut compter le nombre total de morceaux (nouveau dénominateur) et le nombre de morceaux coloriés (nouveau numérateur).
L2 : Opération multiplicative au numérateur et au dénominateur par un même facteur			
Opération de multiplication Sens partie/tout de la fraction Sens rapport de la fraction	Laisser des traces écrites (flèches, symboles de multiplication) correspondant au fait de multiplier par un même facteur le numérateur et le dénominateur de la fraction.	J'ai fait fois trois ici et je fais fois trois ici aussi. Je multiplie par quatre au numérateur et au dénominateur.	Séparer toutes les parties de la bande en *k* parties donne *k* fois plus de parties et correspond à multiplier le nombre de parties par *k*, autant au numérateur qu'au dénominateur. En multipliant le numérateur et le dénominateur par le même facteur, on ne change pas le rapport multiplicatif entre les deux et donc la valeur

			de la fraction demeure la même.

Tableau 5.13 : Modes d'APP de la tâche CM

Tâche M : Comparaison deux à deux de fractions non unitaires			
Relations et objets mathématiques	Manières d'agir	Manières de parler	Manières de penser
M1 : Comparaison numérique avec le dénominateur comme nombre de parties, sans nécessairement tenir compte des numérateurs			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de nombres entiers	Pointer les dénominateurs en les nommant. Écrire un signe d'inégalité entre deux fractions.	Quand je vois un chiffre plus petit, je dis que c'est plus grand. C'est plus grand / plus petit. Le morceau est plus grand / plus petit. C'est plus petit parce qu'il y a plus de morceaux.	Le tout demeure le même. Ainsi, plus le nombre de parties grand, plus les parties elles-mêmes sont petites. En considérant le dénominateur comme nombre de parties, plus le dénominateur est grand, plus la fraction associée à la partie est petite. Le nombre en haut de la ligne (le numérateur) n'a pas d'importance.
M2 : Comparaison visuelle			
M2.1 : En utilisant les représentations concrètes (bandes)			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de longueurs	Pointer, colorier ou désigner autrement les sections des bandes de papier qui correspondent aux fractions impliquées dans la comparaison. Écrire le signe d'inégalité.	J'ai ici la bande séparée en trois. Deux tiers, ça veut dire que je prends deux morceaux sur trois. La bandelette de cinq, je sépare en cinq morceaux et je prends un morceau. C'est plus grand/plus petit. Celui-ci est plus grand, on le voit.	Si la bande est pliée en b parties égales, chaque partie est $\frac{1}{b}(1 - bande)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à $\frac{a}{b}(1 - bande)$. On peut comparer visuellement les sections de deux bandes différentes pour comparer les fractions associées. OU Si la bande est pliée en b parties égales, chaque partie est $1\left(\frac{1}{b} - bande\right)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond

			à $a\left(\frac{1}{b}-bande\right)$. On peut comparer visuellement les sections de deux bandes différentes pour comparer les fractions associées.
M2.2 : En utilisant les représentations semi—concrètes (dessins)			
Sens partie/tout de la fraction Comparaison de longueurs	Dessiner deux rectangles de même longueur. Séparer chaque rectangle pour obtenir le nombre de parties correspondant aux dénominateurs des deux fractions (respectivement). Colorier, pointer, ou désigner autrement le nombre de parties correspondant au numérateur de chaque fraction dans le rectangle associé. Écrire le signe d'inégalité.	J'ai fait ça en trois. Et si je dessine deux des parties… Regarde, c'est plus petit/plus grand. C'est plus petit/plus grand. Je vois que c'est plus petit/plus grand.	Si le rectangle est séparé en b parties égales, chaque partie est $\frac{1}{b}(1-rectangle)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à $\frac{a}{b}(1-rectangle)$. Je peux comparer visuellement les sections de deux rectangles différents pour comparer les fractions associées. OU Si le rectangle est séparé chaque partie est $1\left(\frac{1}{b}-bande\right)$ et la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à $a\left(\frac{1}{b}-bande\right)$. Je peux comparer visuellement les sections de deux rectangles différents pour comparer les fractions associées.
M3 : Utilisation d'un dénominateur commun			
M3.1 : En s'appuyant sur une représentation semi-concrète (dessin)			
Sens partie/tout de la fraction	Représenter les deux fractions à comparer en utilisant des rectangles de même longueur superposés et alignés. Ajouter des séparations dans les deux rectangles pour avoir le même nombre de parties égales dans chaque rectangle.	Je sépare mes trois morceaux en cinq et je sépare mes cinq morceaux en trois. Mes séparations deviennent exactement les mêmes.	Si on sépare chacune des sections d'un rectangle en un même nombre de sous-sections, la fraction représentée demeure la même. Lorsqu'on fait cela avec les 2

	Écrire les opérations correspondantes en langage symbolique.		rectangles dans le but d'obtenir des sous-sections de la même grandeur, il est plus facile de comparer les fractions représentées.
M3.2 : Avec représentation abstraite			
Opération de multiplication Sens partie/tout de la fraction Sens rapport de la fraction	Laisser des traces écrites (flèches, symboles de multiplication) correspondant au fait de multiplier par un même facteur le numérateur et le dénominateur de la première fraction, puis de la deuxième, dans le but d'obtenir le même dénominateur pour les deux fractions.	Mes trois morceaux, je les ai séparés en cinq, alors j'ai multiplié par cinq. Je suis rendue à quinze. Ici, je vais multiplier par cinq aussi pour garder la même fraction. Ça nous donne dix.	Séparer toutes les parties du rectangle en *k* parties donne *k* fois plus de parties et correspond à multiplier le nombre de parties par *k*, autant au numérateur qu'au dénominateur. En multipliant le numérateur et le dénominateur par le même facteur, on ne change pas le rapport multiplicatif entre les deux et donc la valeur de la fraction demeure la même.

CHAPITRE VI

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Nous présenterons dans les prochaines sections une discussion synthèse à la lumière de ce qui a été présenté dans les chapitres 4 et 5. Rappelons que l'objectif de notre recherche était d'apporter un éclairage sur les expériences mathématiques des élèves dans une classe d'accueil au Québec. Ainsi, notre discussion cherche à présenter une synthèse des observations et des analyses que nous avons réalisées en utilisant l'outil des modes d'APP. Elle se veut un regard transversal sur l'analyse descriptive, structuré en fonction des thèmes suivants : la validation des pliages, la dynamique entre les modes d'APP de l'enseignante et ceux des élèves, les enjeux de coordination des modes d'APP, les enjeux de langages liés au contexte de langue seconde, l'appréhension du concept de fraction par les élèves et les rôles multiples joués par le langage verbal.

6.1 Validation des pliages

Il importe de se rappeler que pour l'enseignante, il s'agit d'une activité pour travailler les fractions. Ainsi, toutes les tâches de pliage que les élèves sont mandatés de réaliser sont en fait des tâches de partition exhaustive et égale du tout. Ainsi, pour qu'un pliage de la bande de papier en n parties égales soit considéré valide, il doit respecter les trois critères suivants :

(i) Le tout doit être conservé

(ii) La bande pliée doit compter n parties

(iii) Les *n* parties doivent être de la même longueur

Mentionnons d'abord que le troisième critère, concernant l'égalité des parties est particulier. En effet, bien qu'il soit théoriquement possible de partitionner un tout en parties exactement égales, dans la pratique, il y a nécessairement une marge de manœuvre. Ainsi, la classe doit s'entendre, implicitement ou explicitement, sur ce qui est considéré comme étant « des morceaux égaux » dans la réalité avec le matériel de manipulation.

Ensuite, il serait faux de dire que les élèves accordent également de l'importance à ces trois critères. En fait, la tâche semble à quelques reprises subir un glissement pour certains élèves : l'objectif est d'obtenir le bon nombre de morceaux après avoir plié la bande. La conservation du tout et l'égalité des morceaux n'est pas nécessairement requise. C'est le cas notamment de Sylvie dans l'extrait 18 (tâche CF de pliage en cinq parties égales) : elle constate qu'elle a obtenu six parties plutôt que cinq et demande des ciseaux à la chercheuse. La même élève avait d'ailleurs fait un commentaire similaire qui n'a pas suscité de réaction de la part de l'enseignante ou de la chercheuse dans le cadre du pliage en trois (tâche CC) à la ligne 7 de l'extrait 9. Un autre élève, Albert, avait aussi géré un excès en le pliant pour le cacher lors de la réalisation de la tâche CF (pliage en cinq). La conservation du tout n'est pas une priorité pour ces élèves.

En ce qui concerne le critère de l'égalité des morceaux, un exemple intéressant est le cas d'Albert lors du pliage en six (tâche CD, extrait 13) : avant l'intervention de l'enseignante, l'élève n'avait pas conscience que son pliage ne répondait pas aux attentes. En fait, ce même exemple (extrait 13) est aussi intéressant en lien avec les processus de validation de façon plus globale. Rappelons-nous que la tâche demandée ici est de plier une bande de papier en 6 morceaux de même grandeur. Si on met de côté pour un instant le critère de conservation du tout, deux critères doivent être respectés : le nombre de sections et l'égalité de ces sections. Pour l'enseignante, ces deux critères sont essentiels et intrinsèquement liés au fait qu'on est en train de représenter des fractions : pour que chacune des parties représente le sixième du tout, il faut qu'il y ait six parties égales. Elle répète souvent ces deux critères, comme nous avons pu le remarquer dans les différents extraits présentés (notamment, en ce qui concerne la tâche CD, à la ligne 3 de l'extrait 12). Les vérifications qui ont eu lieu dans les extraits présentés avant l'extrait 13 étaient en lien avec le nombre de morceaux. Quant à elle, l'égalité des morceaux était un peu tenue pour acquise et découlait des stratégies mises en place. Elle n'était pas validée de façon explicite, ni par l'enseignante, ni par les élèves. Ce qui est sous-entendu ici, c'est que si les bandes satisfont les critères vérifiés, la procédure employée est probablement la bonne, et l'élève est probablement en mesure de mettre en œuvre le mode d'APP visé. Dans plusieurs cas, les élèves vont procéder eux-mêmes à la vérification par comptage du nombre de morceaux. Il arrive quand même que ce ne soit pas le cas, comme dans le cas d'Albert pour le pliage en huit, dans l'extrait 8. C'est donc l'enseignante qui va devoir initier avec lui le mode d'APP associé à la vérification par comptage dans le cas de cette tâche (le mode d'APP CE5). Cette remarque nous amène à examiner davantage les rôles de l'enseignante pendant la séance, et plus particulièrement la relation entre les modes d'APP mis de l'avant par l'enseignante et ceux mobilisés par les élèves. Nous explorerons cette dynamique dans la sous-section 6.2.

En bref, le critère de la conservation du tout est pris pour acquis, est induit par la nature de l'activité de manipulation car le tout correspond à une bande de papier, et que les bandes de papier sont fournies aux élèves. Les élèves n'ont pas vraiment de contrôle sur le tout, et donc il demeure toujours le même. Il arrive néanmoins à quelques reprises, comme dans les exemples mentionnés ici, que les élèves manifestent le souhait de modifier le tout au profit des deux autres critères de validité des pliages. On constate alors que la conservation du tout n'est pas un critère important pour eux. En ce qui concerne le critère du nombre de morceaux, il est le premier critère vérifié par l'enseignante pour valider un pliage, et est souvent vérifié par les élèves eux-mêmes, mais pas toujours. Beaucoup d'importance est accordée au nombre de morceaux, et ça devient même l'élément central pour plusieurs élèves. Finalement, le critère de l'égalité de la longueur des morceaux, lorsqu'il est vérifié, est vérifié visuellement, sans prendre de mesure précise. Il est particulier parce qu'il est inhérent au processus de pliage lorsque ce dernier est réalisé de la façon attendue, ou « souhaitable ». Ainsi, pour les premiers pliages, les élèves, et même l'enseignante, n'accordent de l'importance qu'au nombre de morceaux. Il est sous-entendu que si le nombre de morceaux est le bon, le processus utilisé est le bon et les morceaux sont de même longueur. Toutefois, à partir d'un certain moment, plus précisément quand on demande le pliage en six parties égales, on constate que ce n'est plus le cas. Une personne peut obtenir le nombre de morceaux demandé sans qu'ils soient égaux, et sans avoir mis en œuvre la procédure attendue. C'est alors que l'enseignante, et certains élèves, commencent à mobiliser les modes d'APP de vérification visuelle de la longueur des morceaux.

Rappelons que le partage exhaustif et égal du tout pour obtenir un nombre de parties correspondant au dénominateur est une des difficultés du sens partie/tout de la fraction, relevée notamment par Houle (2016), mais est aussi un élément crucial dans l'articulation d'une conception multiplicative de la fraction (Houle et Giroux, 2018). En étant exposés aux différents critères de validation des pliages, c'est à cet enjeu de partage que les élèves étaient exposés. Ils ont été sensibilisés à l'importance de chacun des trois critères dans le pliage. L'intention derrière la séquence de tâches est que cette sensibilisation se transfère dans un contexte de travail plus explicite avec les fractions. Dès la fin de la séance, on peut d'ailleurs voir Roméo mettre en pratique cette compréhension de la partition alors qu'il utilise la représentation rectangulaire des fractions (extrait 35).

6.2 Interaction entre les modes d'agir-parler-penser de l'enseignante et ceux des élèves

Comme mentionné dans la sous-section précédente, une dynamique que l'on observe entre l'enseignante et les élèves concerne la vérification de la validité des pliages. En effet, un des rôles que prend l'enseignante est de s'assurer que les productions des élèves respectent les trois critères mentionnés (conservation du tout, nombre de parties et égalité des parties). Ce sont des critères importants pour elle afin que les bandes de papier puissent être associées à des fractions plus tard dans la séquence, mais les élèves ne sont pas conscients de cela. Ainsi, l'enseignante va parfois devoir initier ou modéliser les façons d'agir et de parler en lien avec les modes d'APP de vérification par comptage ou de vérification de l'égalité de la longueur des morceaux. En plus des exemples déjà mentionnés dans la sous-section précédente, mentionnons le cas de Roméo dans l'extrait 20 : alors qu'il affirme avoir réussi la tâche CG (pliage en neuf parties), l'enseignante doit lui demander de dénombrer les morceaux de la bande pliée pour qu'il réalise que ce n'est pas le cas.

En vérifiant que les pliages effectués par les élèves respectent les trois critères de validité, l'enseignante s'assure que les bandes de papier pliées puissent être utilisées comme représentations concrètes des fractions. Cette utilisation est prévue par l'enseignante, et constitue même une des raisons derrière le choix de cette séquence de tâches. De plus, la vérification des trois critères de validité constitue une façon indirecte de valider que l'élève a mis en œuvre la bonne procédure de pliage. En effet, il est sous-entendu que si les morceaux sont au bon nombre et tous de même longueur, la stratégie pour plier la bande est celle qui était attendue. Ce n'est toutefois pas le cas à tout coup, comme l'illustre l'exemple d'Amanda pour la tâche du pliage en cinq (CF) : l'enseignante affirme qu'Amanda a réussi en regardant la bande, mais constate par la suite que l'élève n'a pas procédé par une superposition sommaire des parties avant d'ajuster, puis de compléter le pliage (mode d'APP attendu CF1). Ainsi, puisque l'élève n'a pas mis en œuvre le mode d'APP attendu, l'enseignante doute maintenant de l'égalité des parties – avec raison. Elle poursuit en rappelant l'importance d'avoir des sections de même longueur et tente de rediriger l'élève vers le mode d'APP attendu. Il est sous-entendu qu'elle souhaite ainsi que l'élève respecte tous les critères et qu'elle développe elle-même le regard critique par rapport aux trois critères de validité d'une partition acceptable pour que chaque partie représente la fraction unitaire.

Ainsi, nous remarquons qu'un autre des rôles de l'enseignante est d'intervenir auprès des élèves. Bien que l'enseignante ne formulerait probablement pas ses interventions en termes de modes d'agir-parler-penser, c'est en ces termes que nous formulerons notre analyse de ses interventions.

Un premier type d'intervention que l'on observe chez l'enseignante consiste à tenter de repérer le mode d'APP manifesté par l'élève, puis, si elle le juge nécessaire ou pertinent, d'intervenir pour guider l'élève vers le mode d'APP qui est attendu ou qui est considéré comme souhaitable pour la tâche en question. Un exemple de cela se produit dans l'extrait 15 : alors que Sylvie affirme qu'il sera impossible de réaliser le pliage en cinq, l'enseignante intervient en la questionnant pour lui rappeler ce qui a été fait antérieurement dans le cas du pliage en trois et stimuler la mobilisation d'un mode d'APP analogue pour le pliage en cinq. Le pliage en trois et le pliage en cinq ont en commun qu'ils ne sont pas réalisés en se basant sur un raisonnement multiplicatif, mais plutôt directement en réalisant une partition de l'unité – la bande – en trois ou cinq parties de même longueur. La procédure attendue par l'enseignante pour le pliage en cinq, comme pour le pliage en trois, est celle qui consiste à superposer sommairement la bande, puis à ajuster avant de finaliser les plis. Cette procédure s'appuie sur le sens partie/tout de la fraction. Lorsque l'enseignante questionne l'élève pour lui rappeler ce qui a été fait pour le pliage en trois, cela nous informe qu'elle reconnaît la similarité entre les démarches attendues. Toutefois, dans ce cas, l'intervention par le questionnement n'a pas suffi pour conduire Sylvie à réussir le pliage tel qu'attendu.

Parfois, un élève exhibe déjà le mode d'APP attendu pour la tâche, et l'enseignante va s'appuyer sur les comportements de cet élève pour tenter de guider les autres élèves du groupe et les amener à mobiliser cet APP aussi. On assiste à un bon exemple de ce type d'interrelation entre les modes d'APP des différentes personnes impliquées lors de la réalisation de la tâche de pliage en huit parties égales (tâche CE), plus précisément autour des extraits 6 et 7. Sylvie a d'abord essayé de réaliser la tâche en s'appuyant sur une vision additive de la relation entre les étapes du pliage (mode d'APP CE3). L'enseignante le constate et lui suggère de prendre une autre bande de papier pour essayer à nouveau. Elle questionne ensuite les élèves qui ont réussi le pliage, comme Éléonore et Marc, afin qu'ils explicitent leur procédure qui s'appuie, cette fois, sur une vision multiplicative de la relation entre les étapes du pliage (mode d'APP CE1). Les élèves offrent des verbalisations un peu sommaires, mais des gestes qui nous indiquent bien la procédure utilisée et le raisonnement multiplicatif. Le moyen d'intervention adopté par l'enseignante, dans ce cas, est de reformuler les propos pour fournir à la fois une formulation détaillée des actions (« plié en 2 […] encore pliés en 2 […] encore pliés en 2 ») et une coordination des actions avec des opérations de multiplication (« 2 fois 2 fois 2 »). Un autre exemple intéressant est celui de l'interaction entre l'enseignante et Sylvie dans l'extrait 12. L'échange se déroule dans le cadre de la tâche CD (pliage en six). Lorsqu'elle exprime sa stratégie, qui correspond à celle qui était attendue, à toute la classe, Sylvie montre bien les gestes, mais offre des verbalisations incomplètes. L'enseignante va donc opter pour un moyen d'intervention qui consiste à produire les manières de parler qui correspondent aux manières d'agir exhibées par Sylvie. Une interaction similaire a lieu entre Marc et l'enseignante dans l'extrait 3. Dans les deux cas, il ne s'agit pas ici de reformuler les propos de l'élève, mais d'ajouter des descriptions orales plus complètes et explicites pour accompagner la gestuelle et ainsi essayer d'influencer les autres élèves de la classe vers le même mode d'APP, qui est celui qui est visé.

À certaines occasions, l'enseignante adopte une position plus directive et offre davantage une modélisation des façons de parler et d'agir attendues. Elle n'a pas nécessairement le temps de partir de là où l'élève est pour l'accompagner ailleurs, ni de le questionner ou d'identifier le mode d'APP qu'il met de l'avant : elle présente alors la procédure attendue à l'élève (ou au groupe d'élèves). On trouve un exemple de cela dans le contexte du pliage en cinq (tâche CF), dans l'extrait 19. L'élève Albert a alors présenté un pliage non valide à l'enseignante. Au début de l'extrait 19, l'enseignante modélise les façons de faire et les décrit verbalement en même temps. Lorsqu'elle constate qu'Albert n'a pas réussi à reproduire la procédure attendue, elle recommence ses explications, elle reformule et elle modélise à nouveau les gestes attendus. On constate bien que l'enseignante procède à une présentation du mode d'APP attendu, et les moyens qu'elle met en place pour y arriver sont des gestes, des verbalisations et des onomatopées. Une autre occurrence d'une intervention plus dirigée de la part de l'enseignante survient lors du travail de comparaison deux à deux de fractions non unitaires (tâche M, plus précisément dans l'extrait 37). À ce moment de la séance, les comparaisons de telles fractions ont été réalisées en s'appuyant sur des représentations visuelles. Au cours de l'extrait 37, on observe que l'enseignante tente de modéliser des façons d'agir et de parler qui se détache des représentations concrètes et semi-concrètes, en passant plutôt à l'utilisation d'un dénominateur commun et une démarche située seulement dans les représentations symboliques. Aucun élève n'a mis de l'avant une telle démarche, et l'intervention de l'enseignante consiste donc à présenter et à offrir un modèle de cette procédure.

6.3 Enjeux de coordination des modes d'agir-parler-penser

Dans le cadre de notre recherche, nous avons défini et utilisé le concept théorique des modes d'agir-parler-penser comme des unités à trois volets équitablement importants (l'agir, le parler et le penser). C'est ainsi que nous avons défini chaque mode que nous avons anticipé et que nous avons relevé dans l'action : en décrivant les façons d'agir et de parler que nous pourrions observer, ainsi que les façons de penser cohérentes. Il serait toutefois exagéré d'affirmer que si un apprenant met de l'avant les éléments présents dans la description d'un des trois volets, alors il mobilise le mode d'APP associé. En fait, il peut arriver que l'individu ait du mal à coordonner les différents volets d'un même mode, ou encore qu'il exhibe les façons d'agir d'un mode et les façons de parler d'un autre mode. Une illustration intéressante de ce phénomène dans le cadre de notre recherche peut être observée dans l'extrait 21, alors que Romeo travaille sur la tâche de pliage en neuf parties égales (tâche CG). On remarque dans cet extrait que les façons de parler de Roméo sont cohérentes avec une interprétation multiplicative de la relation entre les étapes du pliage, ce qui correspond au mode d'APP visé pour cette tâche, soit le mode d'APP CG1. Il dit notamment : « J'ai essayé. Parce que, pour faire 6, tu as doublé ça, et pour faire 9, tu dois tripler ça, tripler trois. ». En entendant ça, on croirait donc que l'élève mobilise le mode d'APP CG1 et serait en mesure de réaliser le pliage attendu. Toutefois, il ajoute « J'ai essayé ça. Mais c'est pas fait. » et, en effet, il n'est pas parvenu à traduire en action les façons de penser multiplicatives dont ses propos témoignent. C'est comme si à ce moment, pour Roméo, les manières de parler et de penser sont cohérentes avec la vision multiplicative, mais les manières d'agir accessibles pour multiplier sont limitées à celles permettant de doubler (plier en deux).

Ceci nous amène à une autre observation qui traite du statut particulier du doublement des parties. En effet, assez rapidement dans la séquence, on utilise le pliage en deux comme un outil pour doubler le nombre de parties. C'est ainsi qu'on réussit le pliage en huit et en six parties égales. On pourrait donc être tenté de croire que l'élève qui met de l'avant cette manière d'agir (plier en deux) et qui la coordonne avec des manières de parler associées à la multiplication par deux fait preuve d'une vision multiplicative des étapes entre les pliages, et vice versa. Toutefois, une telle affirmation serait prématurée. Nous avons en effet pu observer au cours de la séance des cas d'élève qui exhibaient les modes d'APP associés à la relation multiplicative lorsque le pliage demandait un nombre de morceaux pairs, mais qui ont vécu des difficultés de coordination pour le pliage en neuf. C'est le cas notamment de Romeo qui, comme on l'a mentionné ci-haut, a du mal à coordonner les manières d'agir et de parler pour la relation multiplicative entre les étapes du pliage dans le cas du pliage en neuf. C'est aussi le cas d'Amanda, toujours dans le cas du pliage en neuf (tâche CG). Elle explore plusieurs stratégies pour réaliser le pliage demandé, et l'une d'elles consiste à plier la bande en deux à plusieurs reprises. Lorsqu'elle déplie la bande, il est évident qu'elle n'est pas en mesure d'anticiper le nombre de morceaux dans la bande pliée. Ainsi, bien que ses manières d'agir soient cohérentes avec un raisonnement multiplicatif, elles ne sont pas coordonnées avec des façons de penser.

En outre, nous pouvons remarquer dans l'analyse de la séance observée une dynamique dans l'évolution des modes d'APP au fur et à mesure de la progression dans la séquence de tâches. Nous pourrions qualifier cette dynamique de dynamique « en spirale », dans le sens que les manières d'agir manifestées plus tôt dans la séquence viennent alimenter les manières de parler – et potentiellement les manières de penser – plus tard. Cela se produit même assez tôt dans la séance, dès la tâche de pliage en huit : dès que l'enseignante demande de plier la bande en huit parties égales, l'élève Marc affirme « Madame! Comme le 4, mais tu peux faire une deuxième fois » pendant qu'il montre la bande pliée en quatre et la plie en deux une fois de plus. On dénote donc que le mode d'APP multiplicatif et le principe de doubler en pliant en deux qu'il a mobilisés plus tôt lors du pliage en quatre sont sollicités à nouveau, mais cette fois dans le contexte du pliage en huit.

6.4 Enjeux de langage liés au contexte de langue seconde

À ce stade, il convient de rappeler que la séance que nous avons observée dans le cadre de notre recherche se déroulait dans un contexte particulier : celui d'un groupe d'immigrants en francisation au secondaire. Ainsi, la langue de scolarisation – le français – est une langue seconde ou étrangère pour tous les élèves, et la langue première de l'enseignante et de la chercheuse. À quelques reprises, ce contexte mène à des incompréhensions liées au vocabulaire. Par exemple, au tout début, dans un échange qui n'a pas été rapporté dans notre analyse descriptive, un élève qui entend le mot fraction demande « Une fraction, c'est le plus? ». Ceci nous amène à nous demander s'il n'est pas arrivé à d'autres reprises que la compréhension de la langue pose un obstacle à la réalisation de la tâche ou à la compréhension conceptuelle. Certaines interactions semblent indiquer que c'est le cas, comme l'échange avec Amanda dans l'extrait 26. La chercheuse lui demande de nommer la fraction correspondant à une section de la bande qu'elle désigne avec ses mains, mais l'élève a comme réaction de déplacer une bande pour changer le classement en ordre croissant qu'elle vient de proposer. L'interprétation que nous en faisons est qu'Amanda ne comprend pas ce que demande la chercheuse, mais conclut que si cette dernière l'interroge, elle a probablement fait une erreur et donc elle tente de corriger cette « erreur ». Nous ne détenons pas assez d'informations pour affirmer avec certitude que la confusion d'Amanda est causée par des obstacles langagiers, mais il nous semble qu'il est très possible que ce soit le cas. Ainsi, on en vient à se demander, de façon plus générale, si certaines manières de parler de l'enseignante ou de la chercheuse ne seraient pas inaccessibles à certains élèves? Ou encore : est-ce que les entraves langagières pourraient contribuer aux difficultés de coordination des façons de parler et des façons d'agir?

L'enseignante, de même que la chercheuse, demeure consciente du contexte particulier de scolarisation en langue seconde et des potentielles difficultés liées à la langue. Nous remarquons qu'elle emploie différents moyens pour améliorer la communication et diminuer l'ampleur de ces potentielles difficultés. Parmi ces moyens, nous retrouvons la reformulation ou la répétition des affirmations ou des questions, même sans que ce ne soit sollicité par les élèves. Un bon exemple de ça a lieu quand l'enseignante commence son quiz avec une tâche de comparaison de fractions écrites au tableau (tâche K). Elle dit : « Vous avez à placer plus petit, plus grand ou égal (elle dessine les symboles au tableau) entre les nombres que je vous écris, entre les nombres que je vous écris. ». Elle répète la dernière partie de la phrase de façon spontanée. Nous dénotons aussi que l'enseignante dessine au tableau les symboles correspondants à « plus petit », « plus grand » et « égal » pendant qu'elle les nomme. Il s'agit là aussi d'un moyen de faciliter la compréhension des élèves concernant ces symboles, dont ils connaissent peut-être le nom mais pas la signification. Dans la même veine, nous remarquons aussi que l'enseignante accompagne ses propos de beaucoup de gestes, tout au long de la séance. En plus d'offrir un modèle de coordination des manières d'agir avec les manières de parler cohérentes, cela peut permettre aux élèves qui ne comprennent pas tous les mots de comprendre les stratégies que décrit l'enseignante. En d'autres mots, il semble que l'enseignante tente de pallier les défis posés par la forme orale – défis relevés par Bouchard et Cortier (2005, 2006) – en accordant une importance relativement grande aux autres formes de langage.

À ce sujet, nous constatons que les élèves utilisent aussi beaucoup la gestuelle. Toutefois, la fonction que joue les gestes semblent différer légèrement de chez l'enseignante. Pour les élèves, les gestes ne font pas qu'accompagner les paroles, ils les remplacent. Dans l'extrait 2, notamment, lorsque l'enseignante interroge Marc pour savoir comment il a réalisé le pliage en quatre parties, celui-ci dit « C'est comme ça… » puis effectue l'action de plier sa bande en deux une première fois. Ainsi, il mime davantage qu'il ne verbalise la stratégie qu'il a employée, mais en utilisant quand même des éléments déictiques dans son expression orale. L'enseignante, quant à elle, reformule ou complète les manières de parler de l'élève en reprenant ses manières d'agir. Elle vient donc combler les trous et offrir un modèle de verbalisation dans la langue de scolarisation qui est cohérente avec les actions proposées par l'élève. À d'autres occasions, les élèves vont simplement omettre des bouts de phrases et les remplacer par des gestes, comme Roméo dans l'extrait 10. Alors qu'il explique à la classe comment il est parvenu à plier sa bande de papier en trois parties égales (tâche

CC), il dit « J'ai pris les palettes. Et là j'ai plié comme ça et puis j'ai essayé de mettre les côtés… ». Il ne termine pas sa phrase, mais les actions qu'il pose en même temps nous permettent de comprendre comment il a procédé. La verbalisation de ces actions est difficile, surtout en français pour un locuteur non natif, alors il choisit plutôt de montrer ce qu'il a fait. Dans ces deux exemples, on constate que les manières de parler ne peuvent pas être indépendantes des manières d'agir, voir même que dans ce contexte, l'agir occupe une place plus importante que le parler pour une communication réussie.

Cette prégnance de l'agir sur le parler fait partie de la culture locale dans cette classe de mathématiques, ou plutôt, pour reprendre le concept de Jaubert, Rebière et Bernié (2012), dans cette communauté discursive disciplinaire scolaire. Nous avons d'ailleurs relevé d'autres normes de cette communauté concernant le langage. Notamment, on remarque une grande tolérance par rapport aux erreurs de prononciation ou de vocabulaire. Un exemple frappant de cela survient lorsqu'Albert utilise le mot « lettre » pour désigner un chiffre ou un nombre, dans l'extrait 36, et que personne ne le reprend. On interprète cette absence de réaction de la part de l'enseignante et des autres élèves comme une indication que si les propos sont compréhensibles, il n'est pas toujours nécessaire ni pertinent de corriger les erreurs de langue qu'on pourrait qualifier de « mineures ». Le seuil utilisé pour déterminer si une erreur est négligeable ou non nous semble beaucoup plus élevé qu'il ne le serait en contexte de scolarisation en langue première. Cela n'est pas sans rappeler les idées de Barwell (2018). En effet, Barwell (2018), qui cite Bakhtine (1981), mentionne une tension constante entre une certaine recherche d'uniformité et une variabilité entre les individus, qu'il appelle l'hétéroglossie. Cette tension est bien présente dans la classe de francisation que nous avons observée, mais il semble qu'on tolère une assez grande variabilité. C'est comme si, au moins pour certains éléments de langage, la force centrifuge – en direction de l'uniformité – était un peu plus forte que la force centripète – dirigée vers l'hétéroglossie. Un bon exemple de cette tolérance de la variabilité individuelle s'observe quand Albert dit « le flèche » au lieu de « la flèche » dans l'extrait 33, et que personne ne le corrige. De plus, les formes syntaxiques utilisées par les élèves et qui sont comprises dans ce contexte, ne le serait pas nécessairement dans une autre communauté. On pense entre autres à « J'ai fait ça en … » (extrait 35) pour indiquer « J'ai séparé la bande en … morceaux. ». Localement, cette forme est acceptée. En fait, même l'enseignante et la chercheuse vont utiliser des formes de langage qu'il serait surprenant d'entendre dans une classe en langue première. À titre d'exemple, à deux reprises dans les extraits 3 et 5, l'enseignante utilise sans vraiment les différencier les expressions « morceaux égaux » et « morceaux égals ». On pourrait poser comme hypothèse comme le mot « égals » sera mieux compris car il est prononcé comme le nom du symbole d'égalité et que c'est pour cette raison que l'enseignante se permet une erreur d'accord.

Il importe quand même de garder en tête que notre recherche n'est pas une recherche comparative. Ainsi, bien que les enjeux mentionnés dans la présente sous-section nous semblent liés au contexte d'apprentissage des mathématiques dans une langue de scolarisation en cours d'apprentissage, nous n'avons pas les données nécessaires pour affirmer que ce ne sont pas aussi des enjeux qui sont présents dans les classes de mathématique en langue première. Ainsi, notre travail consiste davantage à souligner que les éléments que nous avons relevés sont présents dans la classe de francisation que nous avons visitée, mais nous ne sommes pas en mesure d'affirmer s'il s'agit ou non d'éléments qui sont caractéristiques des classes de francisation.

Nous sommes tout de même en mesure de remarquer que le contexte de francisation ne semble pas avoir une influence majeure sur la nature des activités mathématiques que nous avons observées. Est-ce parce que, comme le suggéraient Poirier (1997), la séquence de tâches proposées est particulièrement appropriée dans ce contexte? Il n'est possible pour nous de tirer une conclusion à cet effet.

6.5 L’appréhension du concept de fraction : quelques cas d’élèves

Vers la fin de la séance qui a été documentée, les tâches qui sont présentées aux élèves traitent des fractions de façon plus directe que ne le faisait le pliage. Dans l’ordre, on demande aux élèves de placer les bandes en ordre croissant de longueur des sections, de nommer les sections en langage fractionnaire, de comparer des fractions deux à deux, puis de trouver une fraction équivalente à une fraction donnée en langage symbolique. C’est à travers la réalisation de ces différentes tâches qu’il nous sera possible de mieux connaître la compréhension du concept de fractions de certains élèves à la suite de la séquence de pliage de bandes de papier. Nous présenterons ici des observations sur deux élèves. Nous avons choisi ces deux apprenants car ce sont ceux qui ont davantage participé lors de la réalisation des tâches en question, et donc ce sont sur eux que nous détenons des données à interpréter.

6.5.1 Le cas de Roméo

Lors des pliages en deux, en trois et en cinq, Roméo avait mobilisé avec aise les modes d’APP attendus, c’est-à-dire qu’il avait procédé en superposant approximativement les parties afin d’obtenir le bon nombre d’étages, puis en ajustant les extrémités avant d’appuyer pour compléter le pliage. Ces façons de faire, rappelons-le, s’appuie sur une interprétation partie/tout de la fraction : il s’agit de considérer la bande comme une unité qu’on souhaite partager en sections égales. Nous constatons donc que déjà, dès les premiers pliages, Roméo est familier avec le principe du partitionnement exhaustif et que l’interprétation partie/tout lui est facilement accessible. Nous jugeons donc cela cohérent lorsque ce même élève est en mesure, vers la fin de la séance, d’utiliser correctement des représentations semi-concrètes des fractions. En effet, lorsqu’on procède à la comparaison de fraction, Roméo suggère par lui-même d’illustrer les deux fractions en jeu par des dessins de rectangles (tâche M, extrait 35). Notons que les deux rectangles, qui représentent l’unité, ont bel et bien la même longueur, et que les parties que l'élève dessine sont égales et recouvrent l'unité. Roméo démontre ainsi une compréhension partie/tout de la fraction qui s'inscrit dans celle qui est valorisée dans la communauté mathématique.

Rappelons-nous que Roméo a toutefois eu davantage de difficultés à mobiliser le mode d'APP attendu pour le pliage en neuf (tâche CG), tel que documenté dans les sous-sections précédentes. La relation multiplicative entre les étapes du pliage et la coordination entre les façons d'agir, de parler et de penser à ce sujet a représenté un enjeu pour lui. Après l'intervention de la chercheuse, toutefois, l'élève est en mesure de réussir cette coordination et d'exhiber le mode d'APP attendu (CG1), et va même jusqu'à guider une autre élève et tenter de l'amener à aussi comprendre la relation multiplicative. Cette dernière constitue un élément important pour réussir les pliages, mais est surtout un terreau fertile pour le raisonnement multiplicatif dans un travail plus explicite sur les fractions. Notamment, l'idée de plier à nouveau une bande en deux pour en doubler le nombre de sections se transfère lors de la recherche de fractions équivalentes : si je double le numérateur et le dénominateur, alors la fraction représentée est la même. Nous remarquons que, justement, Roméo semble avoir bien appréhendé cette idée lorsqu'il trouve rapidement une fraction équivalente à $\frac{2}{5}$, et qu'il va même jusqu'à expliquer à Sylvie comment procéder (tâche L, extrait 40).

6.5.2 Le cas de Marc

Marc a fait preuve dès les trois premières tâches de pliage d'une bonne compréhension de la relation multiplicative entre les étapes du pliage et le nombre de parties obtenues. Ainsi, il a réussi du premier coup en mettant de l'avant les modes d'APP attendus les pliages en deux (tâche CA), en quatre (tâche CB) et en huit parties égales (tâche CE). Pour le pliage en neuf parties égales (tâche CG), Marc n'a pas procédé de la façon attendue mais a offert des verbalisations qui laissaient entendre qu'il comprenait que c'était ce qui était souhaité.

Quand vient le temps de comparer des fractions (tâche K), Marc fournit les réponses attendues. S’il est possible que les premières réponses s’appuient sur une comparaison visuelle de la longueur des parties des bandes pliées, ce n’est pas le cas lorsque la chercheuse lui demande ce qu’il arriverait avec une hypothétique bande pliée en mille morceaux et qu’il répond que les morceaux serait « *Plus, plus, plus, plus, plus* petit! » (extrait 29). Son utilisation répétée du mot « plus » nous informe qu’il est conscient que si le nombre de morceaux est très grand, la grandeur des morceaux sera très petite. Il s’agit ici d’une compréhension du sens partie/tout de la fraction cohérente avec ce qui est valorisé dans la communauté mathématique. En bref, Marc fait preuve d’une bonne compréhension de la relation entre la partie et le tout, et ce, de façon assez constante tout au long de la séance. Toutefois, il n’est pas clair pour nous si la séquence de tâches de pliage a été un facteur aidant pour qu’il développe encore plus en profondeur sa compréhension de cette relation ou bien si cette compréhension était déjà présente et se manifestait dans sa réussite des tâches de pliage.

6.6 Rôles multiples joués par le langage verbal

À travers les différentes analyses que nous avons présentées dans les sous-sections précédentes, nous remarquons que le langage verbal semble jouer plusieurs rôles simultanément. Premièrement, l’expression orale est utilisée à des fins de communication : l’enseignante utilise ses mots pour présenter des façons de faire, pour expliciter les manières d’agir qu’elle considère comme attendues. Les élèves aussi utilisent le langage verbal pour tenter de décrire leurs actions, mais vont parfois devoir prendre appui sur du langage non verbal pour exprimer leurs idées. Deuxièmement, les verbalisations offertes par l’enseignante, mais aussi par la chercheuse et parfois par les autres élèves, servent de modèles de manières de parler attendues. Enfin, en même temps, le langage verbal permet d’établir un lien entre les façons d’agir et les façons de penser. En d’autres mots, c’est avec les mots qu’un individu va tenter de donner aux autres un accès au « pourquoi » derrière ses actions. Il est possible de bien observer ces multiples rôles du langage dans l'extrait 22. Sylvie explique sa procédure pour le pliage en six, et l'enseignante reformule pour décrire les manières d'agir attendues, en plus d'offrir une verbalisation modèle et d'expliciter le lien entre les manipulations et le raisonnement multiplicatif concernant la relation entre les étapes du pliage.

CONCLUSION

Nous présenterons dans ce chapitre un retour sur la problématique, le cadre théorique, les questions de recherche ainsi que les limites de notre recherche et des pistes pour des recherches futures.

Dans le chapitre de la problématique, nous avons présenté différentes recherches s'intéressant au lien entre le langage et les mathématiques, d'abord en contexte de langue première, puis en contexte de langue seconde. Cela nous a permis de constater qu'il serait pertinent de s'intéresser à documenter les expériences mathématiques vécues par les élèves des classes de francisation au Québec.

Pour ce faire, nous avons utilisé le cadre théorique des modes d'agir-parler-penser, tel que développé par Bulf, Mathé et Mithalal (2014), que nous présentons dans le chapitre 2.

Retour sur les questions de recherche

Rappelons notre question de recherche : *Quelles sont les dynamiques intra-personnelles et interpersonnelles des modes d'agir-parler-penser qui se manifestent lors de l'apprentissage de contenus mathématiques liés aux fractions dans un contexte de francisation chez des élèves du secondaire, au Québec?*

Pour y répondre, nous avons proposé à une enseignante de francisation au secondaire une séquence de tâches inspirée de Poirier (1997). Dans l'action, l'enseignante a apporté certains ajustements à la séquence initiale, mais s'en est quand même inspiré.

Ainsi, dans la séance que nous avons observée et analysée, l'enseignante présentait d'abord aux élèves plusieurs tâches de pliage de bandes de papier, avant de leur demander de placer ces bandes en ordre croissant selon la longueur des morceaux, puis de leur demander de comparer des fractions unitaires et non-unitaires et de trouver des fractions équivalentes.

L'intention derrière les tâches de pliage des bandes de papier était double. D'abord, elle servait à familiariser les élèves avec certaines façons de penser pertinentes dans le contexte du travail avec les fractions – plus particulièrement celles en lien avec le raisonnement multiplicatif et avec le partitionnement exhaustif du tout en parties égales. Ensuite, ces mêmes bandes de papier était utilisées plus tard dans la séquence comme représentations concrètes des fractions : elles constituaient donc du matériel de manipulation avec lequel les élèves étaient déjà confortables.

Les modes d'agir-parler-penser (modes d'APP) qui ont été mis de l'avant par l'enseignante et par chaque élève ont été décrits dans le chapitre 4. Tel que discuté dans le chapitre 6, certains thèmes se dégagent.

D'abord, on constate que les élèves ne mobilisent pas toujours d'eux-mêmes les modes d'APP reliés à la validation des pliages, et qu'ils accordent souvent une plus grande importance au nombre de parties obtenues qu'à l'égalité de celles-ci ou à la conservation du tout.

Ensuite, on dégage plusieurs types d'interaction entre les modes d'agir-parler-penser de l'enseignante et ceux des élèves. Il s'agit en un sens des rôles que prend l'enseignante dans la classe en ce qui a trait aux modes d'APP. Premièrement, l'enseignante s'assurent de la validité des pliages en mettant de l'avant ou en invitant les élèves à mettre de l'avant les modes d'APP reliés à la vérification par comptage du nombre de parties et à la vérification visuelle de l'égalité de la longueur des morceaux.

Deuxièmement, l'enseignante intervient parfois en tentant d'identifier le mode d'APP qu'exhibe l'élève ou le groupe d'élèves puis en essayant de partir de là pour guider l'élève vers un mode d'APP qui est considéré comme souhaitable pour la tâche en question. Troisièmement, il arrive aussi que l'enseignante reconnaisse qu'un élève mobilise déjà le mode d'APP attendu et exploite cette situation pour essayer de guider les autres élèves de la classe vers ce même mode d'APP. Enfin, quatrièmement, l'enseignante va parfois se placer en position de modèle et présenter aux élèves les modes d'APP qui sont considérés comme souhaitables de façon plus explicite et dirigée.

Un autre thème que nous avons dégagé concerne les enjeux de coordination des modes d'APP. Nous avons pu observer des difficultés des élèves à cet égard. Il est arrivé qu'un élève ait du mal à mettre en œuvre les manières d'agir cohérentes avec ses manières de parler. Il est aussi arrivé que des élèves mobilisent les modes d'APP associés à la relation multiplicative dans un contexte de pliage pour un nombre pair de parties égales, mais n'arrivent pas à le faire d'eux-mêmes lorsque le nombre de parties désirées est impair. Outre ces difficultés de coordination, nous avons aussi relevé des réussites de coordination des modes d'APP dans la progression des tâches : les manières d'agir mises en œuvre plus tôt dans la séquence alimentent plus tard les manières de parler.

Concernant le contexte de langue seconde, nous avons noté une culture locale à la communauté discursive de la classe qui se manifeste notamment dans une grande importance accordée à la gestuelle ainsi que dans une grande tolérance par rapport aux erreurs de vocabulaire ou à la syntaxe particulière. Nous avons aussi remarqué que l'enseignant adapte elle-même ses stratégies de communication, comme en utilisant beaucoup de gestes, de même que des reformulations et des répétitions.

En ce qui a trait à l'activité mathématique et aux apprentissages des élèves concernant la fraction, nous observons par le biais de deux cas d'élèves que la séquence utilisée est un terreau fertile pour développer la compréhension du sens partie/tout de la fraction.

Plus précisément, l'attention portée aux critères de validité du pliage peut être transférée pour s'assurer que ces mêmes critères soient respectés dans d'autres représentations, comme les représentations semi-concrètes faites par les élèves. De plus, le raisonnement multiplicatif exploité pour les pliages peut permettre de comprendre le raisonnement multiplicatif utilisé dans la recherche de fractions équivalentes. Finalement, les manipulations et les nombreux partitionnements peuvent faciliter la réflexion sur la relation entre la partie et le tout, de même que sur la relation entre le nombre de parties et la longueur des parties.

Enfin, concernant le langage, nous remarquons que le langage verbal joue un triple rôle : décrire les manières d'agir, modéliser les manières de parler et établir un lien entre les manières d'agir et de penser.

Apports de notre recherche

Notre recherche permet de voir comment le cadre théorique et analytique des modes d'agir-parler-penser peut être utilisé dans le contexte où la langue de scolarisation n'est pas la langue première des apprenants. Il s'agit en quelque sorte d'une application de plus pour ce cadre.

Elle nous a aussi permis de constater que la tâche de pliage de bandes de papier suggérée par Poirier (1997), bien qu'elle soit motivante pour les élèves et permette jusqu'à un certain point de mettre en évidence certaines structures multiplicatives, n'est pas intrinsèquement une tâche liée à la notion de fraction. Les risques de glissement vers une tâche centrée sur autre chose que les fractions – soit la procédure de pliage en elle-même, ou même des structures multiplicatives sur les nombres entiers – sont non négligeables.

Malheureusement, même si nous avons observé des phénomènes langagiers cohérents avec les idées de communauté discursive disciplinaire scolaire de Jaubert, Rebière et Bernié (2012) et avec les défis des interactions pédagogiques relevés par Bouchard et Cortier (2005, 2006), nous ne sommes pas en mesure de conclure que la nature des mathématiques vécues par les élèves de la classe de francisation est différente de celle des mathématiques dans la classe régulière. Cela nous aurait permis d'abonder dans le même sens que Million-Fauré (2011).

Il importe quand même de garder en tête que notre recherche n'est pas une recherche comparative. Ainsi, bien que les enjeux mentionnés dans la présente sous-section nous semblent liés au contexte d'apprentissage des mathématiques dans une langue de scolarisation en cours d'apprentissage, nous n'avons pas les données nécessaires pour affirmer que ce ne sont pas aussi des enjeux qui sont présents dans les classes de mathématique en langue première. Ainsi, notre travail consiste davantage à souligner que les éléments que nous avons relevés sont présents dans la classe de francisation que nous avons visitée, mais nous ne sommes pas en mesure d'affirmer s'il s'agit ou non d'éléments qui sont caractéristiques des classes de francisation.

Limites de notre recherche

Ce dernier point, concernant l'impossibilité pour nous de conclure sur la nature des expériences mathématiques que nous tentons de documenter, constitue en quelque sorte une limite de notre recherche. En effet, il n'est pas vraiment possible de formuler des conclusions quant aux particularités du contexte de scolarisation en langue seconde, notamment puisque nous n'avons pas analysé ou observé une séance similaire dans une classe de langue première.

Il est aussi difficile de bien cerner l'évolution de l'appréhension du concept de la fraction chez tous les élèves, en raison de certains choix méthodologiques. Il était important pour nous d'avoir une vue d'ensemble et d'être témoins des échanges entre les élèves. Pour cette raison, nous avons procédé à une collecte de données en filmant l'ensemble de la classe et des petits groupes pendant la séance. Avec du recul, nous jugeons qu'il aurait aussi été bénéfique de porter notre attention sur les individus. À cet effet, nous croyons que des entrevues après la séance auraient pu être pertinentes.

De plus, nous n'avons pas porté attention au potentiel lien entre la langue première des élèves et la dynamique de leurs modes d'APP. Plus encore, certains échanges qui ont lieu entre des élèves qui partageaient une langue première n'ont pas été analysés. Nous sommes conscients qu'il est possible que ces échanges aient été un terreau fertile pour l'interdépendance des modes d'APP, ou pour des verbalisations différentes de la part des étudiantes que celles qu'ils étaient en mesure de faire en langue seconde ou étrangère.

Pistes de recherche futures

Nous avons analysé dans ce mémoire seulement une séance en classe, et la séquence se conclut avec une tâche de recherche de fractions équivalentes. Nous jugeons qu'il serait très intéressant de poursuivre le travail d'analyse en utilisant le même cadre théorique et la même séquence initiale, mais cette fois en continuant plus loin le travail sur les fractions avec les élèves. Entre autres, il serait intéressant de demander aux élèves de faire des opérations sur les fractions et de les exposer à des fractions impropres.

Il serait aussi intéressant, à notre avis, d'accorder une plus grande importance à la langue première des sujets, en particulier d'analyser les échanges qui ont eu lieu entre les élèves qui partageaient la même langue maternelle.

Une autre avenue qu'il serait pertinent d'explorer concerne le niveau de connaissance de la langue de scolarisation. On constate que le niveau de français des participants à notre étude était suffisant pour entretenir des conversations. On peut se demander si la place du contexte de francisation aurait été plus grande si les élèves étaient plus débutants en français.

ANNEXE A

SÉQUENCE DE TÄCHES ENVOYÉE À L'ENSEIGNANTE

<u>Déroulement suggéré pour la tâche de bandes de papier</u>

1. Remettre des bandes de papier à tous les élèves
2. En plénière : demander aux élèves de plier une bande de papier en deux parties égales. Discuter sur ce que représente chacune des deux parties (*La demie de la bande*).
3. Demander aux élèves de plier une bande de papier pour obtenir :
   - Quatre parties égales
   - Huit parties égales
   - Trois parties égales
   - Six parties égales
   - Cinq parties égales
   - Neuf parties égales

À chaque fois, discuter avec les élèves sur comment on peut y arriver et sur ce que représente chacune des parties. Écrire les mots de vocabulaire correspondants sur la bande (demie, tiers, quart, etc.).

4. Sans qu'ils procèdent au pliage en soi, demander aux élèves s'il serait possible (et comment ils procèderaient pour y arriver le cas échéant) de plier une bande en 12 parties égales.
5. Demander aux élèves de placer les bandes en ordre croissant de grandeur des parties. Discuter:
   a. Peux-tu trouver une “règle” qui nous aide à faire ce classement sans même regarder les bandes?

b. Si les bandes étaient toutes deux fois plus grandes, l'ordre serait-il le même?

c. Si certaines bandes étaient plus grandes et d'autres plus petites, est-ce qu'on arriverait au même classement? Le classement serait-il valide? Pourquoi?

RÉFÉRENCES

Abedi, J., & Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applied Measurement in Education*, *14*(3), 219-234.

Barrera-Curin, R., Bulf, C., et Venant, F. (2016). Didactique, sémantique et métaphores: analyse de langages en classe de géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *21,* 39-78. Récupéré de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02511761

Barwell, R. (2005). Working on arithmetic word problems when English is an additional language. *British Educational Research Journal*, *31*(3), 329-348. DOI: **https://doi.org/10.1080/01411920500082177**

Barwell, R. (2015). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(3), 331-345. DOI : https://doi.org/10.1007/s10649-015-9641-z

Barwell, R. (2016) Une perspective bakhtinienne des interactions en salle de classe de mathématiques. Dans *La diversité des mathématiques: dimensions sociopolitiques, culturelles et historiques de la discipline en classe : Actes de colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p.37-45), Ottawa, Canada.

Barwell, R. (2018). From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 155-168. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.007

Behr M., Harel, G., Post, T. et Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. Dans D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 296-333. NY: Macmillan Publishing.

Bouchard, R., & Cortier, C. (2005). Français de scolarisation et mathématiques (comme exemple de culture scolaire-disciplinaire). Dans *Actes du Colloque APLIC*, Paris, Cédérom.

Bouchard, R., et Cortier, C. (2006). L’intégration scolaire des enfants étrangers: du français de scolarisation à la compétence scolaire (l’exemple de l’histoire/géographie). *Bulletin VALS-ASLA*, *83*(1), 107-120. Récupéré de https://doc.rero.ch/record/17539/files/Bouchard_-_L_int_gration_scolaire_des_enfants_VALS-ASLA_83-1_2006.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Bulf, C., Mathé, A. C., & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, *54*(1), 29-48. Récupéré de https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1035

Coquin, D., et Camos, V. (2006). Décimaux et fractions. Dans P. Barrouillet, et V. Camos (Dir.), *La cognition mathématique chez l'enfant* (p. 145-154). Marseille : Solal Éditeurs.

Chartrand, S. G., et Paret, M. C. (1995). Langues maternelle, étrangère, seconde: une didactique unifiée. Dans J.-L. Chiss, J. David et Y. Reuter (dir.), *Didactique du français.* Paris : Nathan. Récupéré de http://www.mariechristineparet.ca/wp-content/uploads/2012/10/ST-CLOUD-L1-L2.pdf

Clarkson, P. C. (1991). 20 Mathematics in a multilingual society. *Language in mathematical education: Research and practice*, 237.

Comité de gestion de la taxe scolaire de l'île de Montréal (CGTSIM) (2020). *Portrait socioculturel des élèves inscrits dans les écoles publiques de l'ile de Montréal*. Montréal : Comité de gestion de la taxe scolaire de l'île de Montréal. Récupéré de https://cgtsim.qc.ca/wp-content/uploads/2021/06/PORTRAIT_SOCIOCULTUREL2019-11-08B_V2020-07-02.pdf

Cordier-Gauthier, C. (1995). Le français langue seconde au Canada. *Tréma*, *7*, 27-37. DOI : 10.4000/trema.2175

Cuq J.-P. (1995). Le FLS : un concept en question. *Tréma*. *7.* 3-11. DOI : 10.4000/trema.2153

Ghailane, O. (2015). *Les connaissances sur les fractions d'élèves de troisième cycle du primaire* (Mémoire de maîtrise), Université du Québec à Montréal. Récupéré de https://archipel.uqam.ca/8125/1/M13921.pdf

Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction* (Thèse de doctorat). Université du Québec à Montréal. Récupéré de https://archipel.uqam.ca/10649/1/D3115.pdf

Houle, V., et Giroux, J. (2019). Interprétations de la fraction et enseignement/apprentissage des fractions équivalentes au primaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *19*(3), 321-333.

Houle, V., Venant, F.., et Barrera-Curin, R.I. (2020). Évolution et inter-influence des modes d'agir, parler et penser les fractions dans deux problèmes multiplicatifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *25*, 121-150.

Jaubert, M., Rebière, M., et Bernié, J. P. (2012). Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs: l'hypothèse énonciative. *Forum lecture suisse. Littératie dans la recherche et la pratique*. Récupéré de https://www.forumlecture.ch/sysModules/obxLeseforum/Artikel/476/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Kaput, J. J. (1991). Notation and representations as mediators of constructive processes. Dans E. von Glasersfeld (dir.), *Constructivism in mathematics education* (p. 53–74). Dordrecht: Kluwer.

Kieren, T. (1999). Language Use in Embodied Action and Interaction in Knowing Fractions. Dans *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (21e edition), Mexique. Récupéré de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466385.pdf

Ledent, J., Aman, C., Garnett, B., Murdoch, J., Walters, D., & McAndrew, M. (2013). Academic performance and educational pathways of young allophones: A comparative multivariate analysis of Montreal, Toronto, and Vancouver. *Canadian Studies in Population*, *40*(1-2), 35-56. Récupéré de https://journals.library.ualberta.ca/csp/index.php/csp/article/view/19631

Martiniello, M. (2008). Language and the performance of English-language learners in math word problems. *Harvard Educational Review*, *78*(2), 333-368.

Millon-Faure, K. (2011). *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe: le cas des élèves migrants* (Thèse de doctorat). Université de Provence, Aix-Marseille I. Récupéré de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00941904/document

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2006a), Chapitre 6. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. Dans

*Programme de formation de l'école québécoise pour le primaire (*p. 121-142). Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-primaire.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2006b), Mathématique. Dans *Programme de formation de l'école québécoise pour le premier cycle du secondaire (*p. 229-264). Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-premier-cycle-secondaire.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2007), Mathématique. Dans *Programme de formation de l'école québécoise pour le deuxième cycle du secondaire*. Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-secondaire-deuxieme-cycle.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2009), Progression des apprentissages au primaire. Mathématiques. Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-primaire_2009.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2014a), Intégration linguistique, scolaire et sociale. Dans *Programme de formation de l'école québécoise pour l'enseignement primaire*. Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PFEQ/francais-ilss.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2014b), Intégration linguistique, scolaire et sociale. Dans *Programme de formation de l'école québécoise pour l'enseignement secondaire*. Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_integration-linguistique-scolaire-sociale-secondaire.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS) (2016), Progression des apprentissages au secondaire. Mathématiques. Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-secondaire_2016.pdf

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS). (2013). *Portrait statistique 2011-2012 des élèves issus de l'immigration.* Récupéré de : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PSG/statistiqu es_info_decisionnelle/14-00280_portrait_stat_eleve_issu_immigration_2011_2012.pdf

Miura, I. T., Okamoto, Y., Vlahovic-Stetic, V., Kim, C. C., et Han, J. H. (1999). Language supports for children's understanding of numerical fractions: Cross-national comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(4), 356-365.

Nunes, T. (1992). Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts. *International Journal of Behavioral Development*, *15*, 433–453.

Office Québécois de la langue française (OQLF) (2019) Synthèse du rapport sur l'évolution de la situation linguistique au Québec. Québec, Canada. Récupéré de https://www.oqlf.gouv.qc.ca/ressources/sociolinguistique/2019/synthese-evolution-situation-linguistique.pdf

Orosco, M. J., Swanson, H. L., O'Connor, R., & Lussier, C. (2013). The effects of dynamic strategic math on English language learners' word problem solving. *The Journal of Special Education*, *47*(2), 96-107.

Poirier, L. (1997). Rôle accordé aux interactions entre pairs dans l'enseignement des mathématiques-une illustration en classe d'accueil. *Éducation et francophonie*, *25*(1). Récupéré de https://revue.acelf.ca/pdf/EF-25-1-070_POIRIER.pdf

Poirier, L. (2007). Teaching mathematics and the Inuit community. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *7*(1), 53-67. DOI: https://doi.org/10.1080/14926150709556720

Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(3), 435-456. Récupéré de https://link.springer.com/article/10.1007%252Fs13394-013-0079-2

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27. Récupéré de https://numerisation.irem.univ-mrs.fr/TO/ITO11007/ITO11007.pdf

Scott, W. R. (1981). Fractions taught by folding paper strips. *The Arithmetic Teacher*, *28*(5), 18-21.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics*, *46*(1), 13-57. Récupéré de https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1062.4591&rep=rep1&type=pdf

Sfard, A. (2012). Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of JN Moschkovich (dir.) (2010) Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 331-339.

Statistique Canada (2011a). *Statut des générations : les enfants nés au Canada de parents immigrants* (99-010-X2011003). Récupéré de https://www12.statcan.gc.ca/nhs-enm/2011/as-sa/99-010-x/99-010-x2011003_2-fra.pdf

Statistique Canada (2011b). *Annuaire du Canada. Chapitre 18.* (11-402-X). Récupéré de https://www150.statcan.gc.ca/n1/fr/pub/11-402-x/2011000/pdf/languages-langues-fra.pdf?st=4PSVIQma

Statistique Canada (2017). *Dictionnaire. Recensement de la population 2016. Langue Maternelle.* Récupéré de https://www12.statcan.gc.ca/census-recensement/2016/ref/dict/pop095-fra.cfm

Tardif-Couture, R. (2016) *Résolution de problèmes en mathématiques chez les élèves allophones du primaire* (Mémoire de maîtrise). Université Laval, Québec. Récupéré de https://corpus.ulaval.ca/jspui/bitstream/20.500.11794/27352/1/33101.pdf

Verdelhan-Bourgade, M. (2002). *Le français de scolarisation: Pour une didactique réaliste.* Paris : Presses universitaires de France.

Vigner, G. (2009). Le français langue seconde, comment apprendre le français aux élèves nouvellement arrivés. Paris, France: Hachette Éducation