

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

SYSTÈMES COMPLETS D'IDEMPOTENTS PRIMITIFS ORTHOGONAUX
ET LUNES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
SIMON MALENFANT

7 JANVIER 2022

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais commencer en remerciant Franco Saliola qui m'a guidé tout au long de la rédaction de ce mémoire et ce avec une bonne attitude contagieuse. Tes commentaires et conseils m'ont été d'une grande valeur. C'est même toi qui m'a introduit et poussé vers le sujet de ce mémoire.

Merci aux professeurs et enseignants de mathématiques qui m'ont dirigés vers le point où je me trouve aujourd'hui. J'aimerais souligner le bon support de Christophe Hohlweg dans la rédaction du travail final de son séminaire de l'hiver 2020 à l'UQÀM. J'espère avoir conservé la bonne rédaction des mathématiques que tu m'as apprise là.

Je remercie les étudiants qui m'ont côtoyés tout au long de mon baccalauréat et de ma maîtrise à l'UQÀM pour l'environnement d'entraide qu'ils ont produit.

Je remercie mon défunt grand-père Louis Paradis pour son intérêt dans le futur académique de ses petits-enfants jusqu'à pourvoir aux finances nécessaires à leur aboutissement.

Je remercie ma famille proche pour son soutien et ses encouragements. Je n'oublie pas ma famille élargie en Christ qui m'a soutenu tout autant.

Il serait insensé pour moi de remercier tout ce beau monde sans rendre gloire à celui par qui il existe. C'est pourquoi je remercie Christ-Jésus. Je ne serais pas là où j'en suis sans tes glorieuses bénédictions dans ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I ALGÈBRES DE TITS ET DE BIRKHOFF	5
1.1 Arrangement d'hyperplans	6
1.1.1 Algèbre de Tits	12
1.1.2 Algèbre de Birkhoff	14
1.2 Algèbre d'incidence	15
1.2.1 Fonctions de Möbius et zeta	18
1.2.2 Q -base	20
1.3 Support d'une face	25
1.4 Relèvement d'idempotents	28
1.4.1 Radical de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$	30
1.5 Familles eulériennes d'un arrangement	36
1.5.1 Q' -base	43
CHAPITRE II ALGÈBRE D'INCIDENCE DE LUNES	51
2.1 Lunes	52
2.1.1 Algèbre d'incidence de lunes	55
2.2 Construction de Q' -bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$	58
2.2.1 Fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives	60
2.2.2 Fonctions zeta non commutatives et sections homogènes du support	66
2.2.3 Bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ associées à une fonction de Möbius non commutative	70

2.2.4	Construction de fonctions de Möbius et zeta à partir de bases	73
2.2.5	Expression d'éléments d'une Q' -base et d'idempotents euleriens	78
CHAPITRE III MATROÏDES ORIENTÉS ET ENSEMBLE DE VECTEURS SIGNES LOCALEMENT INVERSIBLES		87
3.1	Matroïde orienté	88
3.1.1	Algèbre d'un matroïde orienté	94
3.2	Lunes d'un matroïde orienté	96
3.2.1	Algèbre d'incidence de \mathcal{V} et systèmes complets d'idempotents primitifs de $\mathbb{K}\mathcal{V}$	100
3.3	Ensemble de vecteurs signes localement inversibles	102
3.3.1	Lunes d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles	108
CONCLUSION		113
APPENDICE A DÉMONSTRATIONS		117
A.1	Démonstrations de résultats de la section 2.2.3	117
A.2	Démonstrations de résultats de la section 2.2.4	119
A.3	Démonstrations d'un résultat de la section 2.2.5	121
APPENDICE B LISTE DES NOTATIONS		123
RÉFÉRENCES		125

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Arrangement d'hyperplan en deux dimensions	6
1.2 Arrangement d'hyperplan en trois dimensions	7
1.3 Les sections de V définies par un hyperplan H_i	8
1.4 Les faces de l'arrangement \mathcal{D}	11
1.5 L'interprétation géométrique de la multiplication de deux faces . .	12
1.6 Diagramme de Hasse du <i>poset</i> $\Lambda[\mathcal{D}]$	17
2.1 Quelques lunes de \mathcal{D}	53
2.2 Une fonction d'incidence pour $\Sigma[\mathcal{D}]$ constante sur $\Delta[\mathcal{D}]$	58
2.3 Les valeurs des fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{D})$	61
2.4 Forme matricielle de $\alpha \in I_L(\mathcal{D})$	65
2.5 Forme matricielle de $\zeta_u \in I_L(\mathcal{D})$	83
2.6 Forme matricielle de $\mu_u \in I_L(\mathcal{D})$	84
3.1 L'axiome (M4) dans l'arrangement \mathcal{D}	90
3.2 Le graphe (A, B)	91
3.3 Face inverse dans un arrangement d'hyperplan non central	105
3.4 Hyperplans d'un arrangement d'hyperplans non central formant un arrangement d'hyperplans central	106
3.5 Ensemble M_L d'une lune L d'un arrangement d'hyperplan non central	109

RÉSUMÉ

Le monoïde des faces d'un arrangement d'hyperplans \mathcal{A} a des sous-ensembles particuliers appelés lunes qui sont définis à partir de deux faces de \mathcal{A} . L'objectif de ce mémoire est d'expliciter la construction de systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre des faces de \mathcal{A} à partir des lunes de \mathcal{A} .

Dans un premier temps, on s'intéresse à la structure de l'algèbre des intersections de \mathcal{A} . Le support est un morphisme d'algèbre qui lie l'algèbre des faces de \mathcal{A} avec l'algèbre des intersections de \mathcal{A} . Il permet de relever les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre des faces de \mathcal{A} à partir de l'unique système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre des intersections de \mathcal{A} . La construction de Saliola donne explicitement tous ces relèvements à partir des sections homogènes du support.

Dans un deuxième temps, on étudie les lunes de \mathcal{A} . Les lunes induisent une sous-algèbre de l'algèbre d'incidence des faces de \mathcal{A} . Dans cette sous-algèbre se trouvent les fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives. Les fonctions de Möbius non commutatives correspondent à certaines bases de l'algèbre des faces de \mathcal{A} . Les sections homogènes du support correspondent aux fonctions zeta non commutatives. De ceci, on obtient une façon d'exprimer tout système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre des faces de \mathcal{A} à partir d'une fonction de Möbius non commutative et d'une fonction zeta non commutative.

Dans un troisième temps, on montre que les résultats pour l'algèbre des faces d'un arrangement d'hyperplans se généralisent aux algèbres construites à partir d'un matroïde orienté. Aussi, on propose une définition de lune dans un ensemble de vecteurs signes localement inversibles.

Mots clés : Arrangement d'hyperplans, système complet d'idempotents primitifs orthogonaux, construction de Saliola, lune, fonction de Möbius non commutative, fonction zeta non commutative, matroïde orienté.

INTRODUCTION

L'origine de l'étude d'arrangement d'hyperplans est nébuleuse, à tel point que Pierre Cartier mentionne qu'on ne peut identifier un «père» à ce domaine des mathématiques (Cartier, 1981). Un des premiers résultats notables provenant de l'étude des arrangements d'hyperplans est dû à Thomas Zaslavsky. En 1975, il donne une formule pour le nombre de régions du complément d'un arrangement d'hyperplans (Zaslavsky, 1975). Ce résultat ne s'appuie que sur la structure des intersections des hyperplans de l'arrangement et a une application en homologie donnée par Peter Orlik et Louis Solomon (Orlik et Solomon, 1980). Par la suite, plusieurs se sont intéressés aux arrangement d'hyperplans comme Richard Stanley (Stanley, 2007), Paul H. Edelman (Edelman, 1984), Anders Björner, Günter Ziegler (Björner *et al.*, 1990) et Michel Jambu (Jambu, 1988).

Par ailleurs, Jacques Tits définit la projection d'une chambre sur une autre dans un complexe de Coxeter en 1974 (Tits, 2009). C'est cette projection qui sera appliquée aux faces d'un arrangement d'hyperplans, c'est-à-dire aux régions délimitées par les hyperplans de l'arrangement. Dans un article de 1999, Patrick Bidigare, Philip Hanlon et Daniel Rockmore utilisent cette projection dans un arrangement d'hyperplans central pour généraliser un résultat sur les valeurs propres d'une bibliothèque de Tsetlin (Bidigare *et al.*, 1999). C'est Kenneth Brown et Persi Diaconis qui, la même année, démontrent que la projection d'une face sur une autre donne à l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans une structure de bande régulière à gauche et généralisent le travail de Bidigare, Hanlon et Rockmore aux bandes régulières à gauche (Brown, 2000).

En particulier, pour un arrangement d'hyperplans central \mathcal{A} , l'ensemble des faces de \mathcal{A} muni du produit donné par la projection définie par Tits est un monoïde appelé monoïde de Tits de \mathcal{A} . L'ensemble des combinaisons linéaires du monoïde de Tits sur un corps est appelé algèbre de Tits de \mathcal{A} . Ce mémoire étudie la construction des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} . À cette fin, les deux premiers chapitres présentent une construction de ces systèmes chacun. Le troisième chapitre, quant à lui, généralise ces constructions.

Le premier chapitre commence en présentant l'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} et le morphisme support qui va de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} vers l'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} . L'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} est construite à partir des intersections d'hyperplans de \mathcal{A} et l'étude de l'algèbre d'incidence de ces intersections révèle que l'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} n'a qu'un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux. Le support permet de relever les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} à partir de cet unique système. C'est la construction Saliola qui donne explicitement tous ces relèvements et donc le premier chapitre s'attardera aussi sur cette construction. Cette construction fait correspondre chaque système complet d'idempotents primitifs orthogonaux à une section homogène du support.

Le deuxième chapitre introduit la notion de lune d'un arrangement d'hyperplans et s'intéresse à l'algèbre d'incidence des faces de \mathcal{A} . Les lunes sont des ensembles de faces de \mathcal{A} particuliers qui induisent une sous-algèbre de l'algèbre d'incidence des faces de \mathcal{A} où l'on trouve les fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives. Il sera montré au deuxième chapitre que les fonctions de Möbius non commutatives correspondent à certaines bases de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} et que les fonctions zeta non commutatives correspondent aux sections homogènes du support. La fin du chapitre montre comment la construction Saliola peut

être reformulée à l'aide de fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives.

Le troisième chapitre est plus court et commence en généralisant les constructions de systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} aux algèbres construites à partir de matroïdes orientés. Ensuite, le chapitre introduit la notion d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles qui généralise l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans qu'il soit central ou non. La définition de lune donnée au chapitre 2 est généralisée aux ensembles de vecteurs signes localement inversibles à la fin du chapitre.

L'appendice A contient les preuves lourdes et techniques de quelques résultats du chapitre 2 pour alléger la lecture.

Le contenu des deux premiers chapitres de ce mémoire s'appuie grandement sur les notions présentées dans l'excellent livre *Topics in hyperplane arrangements* de Marcelo Aguiar et Swapneel Mahajan (Aguiar et Mahajan, 2017), surtout sur les chapitres 1, 3, 9, 11 et 15. Les résultats possiblement nouveaux sont tous présentés au troisième chapitre de ce mémoire.

CHAPITRE I

ALGÈBRES DE TITS ET DE BIRKHOFF

Le but de ce chapitre est d'étudier la structure de l'algèbre de Tits via ses systèmes complets d'idempotents orthogonaux. C'est par la construction de Saliola que tous ces systèmes sont donnés. À cette fin, ce chapitre commence par définir un arrangement d'hyperplans \mathcal{A} et ces faces. Ensuite, il présente le produit de faces qui permet la construction de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ l'algèbre de Tits de \mathcal{A} . La première section se termine par l'étude de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ l'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} qui est construite à partir des intersections d'hyperplans de \mathcal{A} . La structure de cette algèbre est liée à l'algèbre d'incidence des intersections d'hyperplans dont la fonction de Möbius donne une construction explicite de l'unique système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$. Ceci est le sujet de la deuxième section. Les deux sections qui suivent présentent les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ comme relèvements du système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ par le morphisme support. La dernière section expose la construction de Saliola qui donne explicitement ces relèvements. Cette construction donne aussi certaines bases particulières de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ qui seront utiles au chapitre 2.

1.1 Arrangement d'hyperplans

Soit un espace vectoriel réel V de dimension $n \in \mathbb{N}$, on considère les sous-espaces affines de dimension $n - 1$ appelés *hyperplans*. Pour un ensemble fini I , la famille $\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$ où H_i est un hyperplan de V pour tout $i \in I$ est un *arrangement d'hyperplans* de V . L'arrangement \mathcal{A} sera toujours la famille $\{H_i\}_{i \in I}$ dans la suite du texte.

Exemple. Pour $V = \mathbb{R}^2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$), les droites $H_x, H_y, H_{-x/3-y+1}$ et H_{-x-y+3} d'équations $x = 0, y = 0, -x/3 - y + 1 = 0$ et $-x - y + 3 = 0$ respectivement sont des hyperplans qui forment un arrangement d'hyperplans (voir figure 1.1).

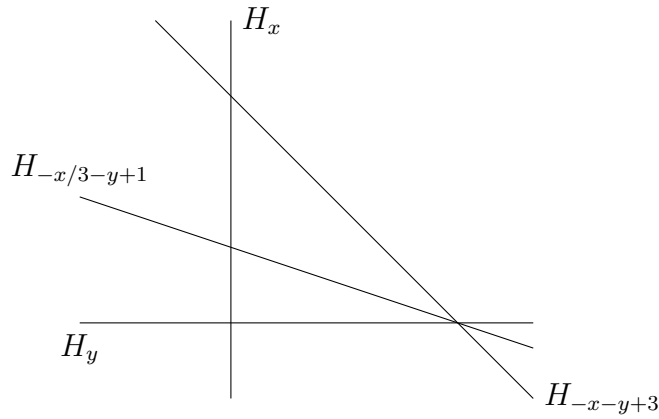


Figure 1.1 Arrangement d'hyperplan en deux dimensions: les hyperplans sont des droites.

Exemple. Pour $V = \mathbb{R}^3$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$), les plans H_x, H_y et H_z d'équations $x = 0, y = 0$ et $z = 0$ respectivement sont des hyperplans qui forment un arrangement d'hyperplans (voir figure 1.2).

Dans cet exemple, les trois hyperplans ont une intersection non vide qui est le singleton $\{(0, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 . On dit que cet arrangement est *central*. Un arrange-

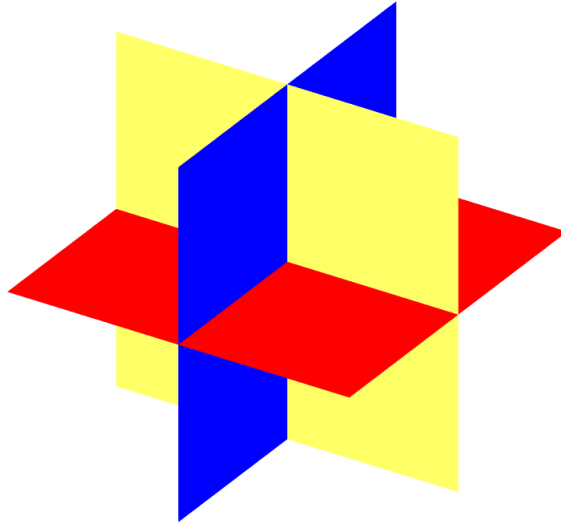


Figure 1.2 Arrangement d'hyperplan en trois dimensions: les hyperplans sont des plans. Les couleurs rouge, jaune et bleu distinguent les plans d'équations $z = 0, y = 0$ et $x = 0$.

ment $\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$ est central si $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$. On se limitera aux arrangements d'hyperplans centraux dans les chapitres 1 et 2, donc il sera toujours admis que \mathcal{A} est central dans ces chapitres. On supposera aussi que $0 \in V$ est toujours contenu dans l'intersection des hyperplans de \mathcal{A} sans perte de généralité. Par ce fait, les hyperplans de \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels de V . On supposera aussi que \mathcal{A} est non-vide.

Les hyperplans H_i de \mathcal{A} délimitent des sections de V appelés *faces*. En effet, on définit trois sections de V à l'aide de H_i : un demi-espace fermé d'un côté de H_i qui sera noté H_i^+ , un autre demi-espace fermé de l'autre côté de H_i qui sera noté H_i^- et l'hyperplan lui-même qui sera noté H_i^0 (voir figure 1.3). L'attribution des signes $+$ et $-$ aux demi-espaces fermés de V délimités par H_i est quelconque, mais cette attribution ne change pas. Les faces sont obtenues en considérant une seule de ces sections pour chaque hyperplan de \mathcal{A} .

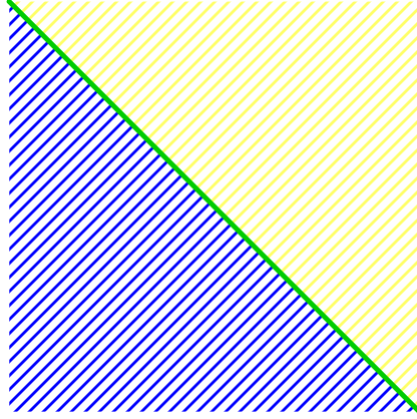


Figure 1.3 Les sections de V définies par un hyperplan H_i : les sections hachurées en jaune et bleu sont H_i^+ et H_i^- respectivement. Ces deux parties de V contiennent aussi la ligne verte qui est H_i^0 , car ces parties sont des demi-plans fermés.

Définition 1.1.1. Soit $\Sigma[\mathcal{A}]$ l'ensemble des faces de \mathcal{A} . Pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ il existe un $\epsilon_i(F) \in \{-, 0, +\}$ pour chaque $i \in I$ tel que

$$F = \bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}.$$

De plus, il faut que l'intérieur relatif de F soit à l'intérieur de $H_i^{\epsilon_i(F)}$ si $\epsilon_i(F) \neq 0$. Le vecteur $(\epsilon_i(F))_{i \in I}$ est le vecteur signe de F . On appelle la face

$$\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} H_i^0$$

la *face centrale*.

Notons que cette définition d'une face dépend du choix des signes donnés au demi-plans fermés délimités par les hyperplans de \mathcal{A} . Il n'est pas difficile de voir que deux faces F et G de \mathcal{A} sont la même si et seulement si $\epsilon_i(F) = \epsilon_i(G)$ pour tout $i \in I$, donc le vecteur signe de F est unique. Soit un vecteur signe $(\epsilon_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire que $\epsilon_i \in \{-, 0, +\}$ pour tout $i \in I$, rien n'assure qu'il définisse une face en

attribuant chaque ϵ_i à H_i . La multiplication de deux signes est commutative et ce fait de la manière suivante:

$$0 = +0 = -0 = 00, \quad + = ++ = --, \quad - = +-.$$

Il est connu (Aguiar et Mahajan, 2017) que si $(\epsilon_i)_{i \in I}$ définit une face, alors $(-\epsilon_i)_{i \in I}$ aussi.

Proposition 1.1.1. *Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$,*

$$\widehat{F} = \bigcap_{i \in I} H_i^{-\epsilon_i(F)}$$

est une face de \mathcal{A} appelée face inverse de F .

Démonstration. (ébauche) Il suffit de remarquer que $\widehat{F} = \{-v \in V \mid v \in F\}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. En effet, ceci indique que si l'intérieur relatif de F est dans $H_i^{\epsilon_i(F)}$, alors l'intérieur relatif de \widehat{F} est dans $H_i^{-\epsilon_i(F)}$. Aussi, si $F \subseteq H_i^0$, alors $\widehat{F} \subseteq H_i^0$, car H_i^0 est un espace vectoriel. ■

L'ensemble $\Sigma[\mathcal{A}]$ possède une structure d'ensemble partiellement ordonné (ou *poset* en abrégé de l'anglais) qui provient de l'inclusion ensembliste. Autrement dit, soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$F \subseteq G \Leftrightarrow F \leq G.$$

Cette relation d'ordre a aussi une définition en terme des $\epsilon_i(F)$ et $\epsilon_i(G)$. En effet, si $\epsilon_i(F) \in \{0, \epsilon_i(G)\}$ pour tout $i \in I$, alors $F \subseteq G$, c'est-à-dire $F \leq G$. S'il existe $i' \in I$ tel que $\epsilon_{i'}(F)$ est non nul et différent de $\epsilon_{i'}(G)$, alors l'intérieur relatif de F n'est pas inclus dans $H_{i'}^{\epsilon_{i'}(G)}$. Ainsi, $F \not\subseteq H_{i'}^{\epsilon_{i'}(G)}$, donc $F \not\subseteq G$, c'est-à-dire $F \not\leq G$. Ceci donne que

$$\left(\epsilon_i(F) \in \{0, \epsilon_i(G)\} \forall i \in I \right) \Leftrightarrow F \leq G. \quad (1.1)$$

Cette équivalence implique que \mathcal{O} est l'unique élément minimal de $\Sigma[\mathcal{A}]$. En considérant l'identification des éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$ par leur vecteur signe, il sera

montré que $\Sigma[\mathcal{A}]$ est un matroïde orienté au chapitre 3. Ceci implique que $\Sigma[\mathcal{A}]$ est un *poset* gradué. Puisque ce mémoire ne se veut pas une étude approfondie des matroïdes orientés, on mentionne qu'il est démontré dans (Bjorner *et al.*, 1999) qu'un matroïde orienté est gradué au théorème 4.1.14.

Remarque. Les faces ont une définition équivalente au sens combinatoire qui considère les demi-espaces ouverts à la place des demi-espaces fermés. Soit B_i^+ l'intérieur de H_i^+ , B_i^- l'intérieur de H_i^- et $B_i^0 = H_i^0$ l'intérieur relatif de H_i^0 pour l'arrangement \mathcal{A} . Les ensembles B_i^+ et B_i^- sont les demi-espaces ouverts définis par H_i . Soit $\Sigma[\mathcal{A}]'$ l'ensemble des faces de \mathcal{A} dont tout élément $F' \in \Sigma[\mathcal{A}]'$ a un vecteur signe $(\epsilon_i(F'))_{i \in I}$ tel que

$$F' = \bigcap_{i \in I} B_i^{\epsilon_i(F')}$$

et $F' \neq \emptyset$. Les deux définitions des faces de \mathcal{A} sont équivalentes, car l'application $b : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ qui envoie un ensemble sur son intérieur relatif donne une bijection entre les éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]'$ et les éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$. En effet, b commute avec l'intersection, donc on a

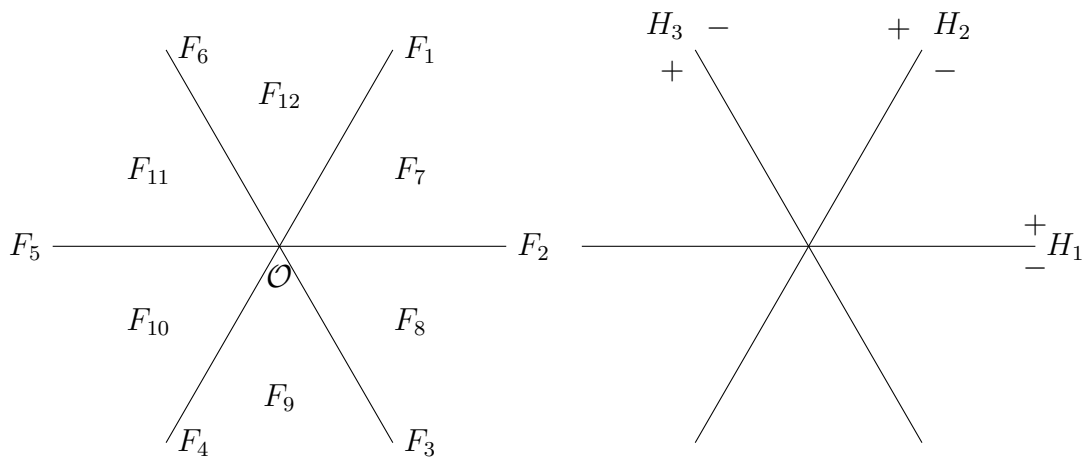
$$b\left(\bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}\right) = \bigcap_{i \in I} b\left(H_i^{\epsilon_i(F)}\right) = \bigcap_{i \in I} B_i^{\epsilon_i(F)}$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Puisque F contient la face centrale, l'intersection des $B_i^{\epsilon_i(F)}$ est non vide, donc c'est un élément de $\Sigma[\mathcal{A}]'$. Si l'intérieur relatif de $\bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}$ n'est pas dans $B_j^{\epsilon_j(F')}$ pour un $j \in I$ tel que $\epsilon_j(F') \neq 0$, alors $\bigcap_{i \in I} B_i^{\epsilon_i(F')} \not\subset B_j^{\epsilon_j(F')} \not\subset \bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}$. Ainsi, $\bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}$ est un élément de $\Sigma[\mathcal{A}]$. En fait, $b(F) = F'$ si et seulement si $\epsilon_i(F) = \epsilon_i(F')$ pour tout $i \in I$. Notons que les faces d'un arrangement d'hyperplans définies par les demi-espaces ouverts sont disjointes, car B_i^0, B_i^+ et B_i^- sont disjointes. Ainsi, la relation d'ordre de $\Sigma[\mathcal{A}]$ est modifiée: pour $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$F \leq G \Leftrightarrow F \subseteq \overline{G}$$

où \overline{G} est la fermeture de la face G .

Exemple. Pour $V = \mathbb{R}^2$, les droites H_1, H_2 et H_3 d'équations $y = 0, y = \sqrt{3}x$ et $y = -\sqrt{3}x$ respectivement forment un arrangement d'hyperplan \mathcal{D} à 13 faces: l'intersection \mathcal{O} des trois droites est une face, les 6 demi-droites partant de \mathcal{O} dans H_1, H_2 ou H_3 sont des faces et les 6 espaces entre les droites H_1, H_2 et H_3 sont des faces (voir figure 1.4). Notons que $H_1^+ \cap H_2^+ \cap H_3^+ = \mathcal{O}$, mais que $(+, +, +)$ n'est pas le vecteur signe de \mathcal{O} , car l'intérieur relatif de \mathcal{O} n'est pas contenu dans l'intérieur de H_1^+, H_2^+ ou H_3^+ .



$$\mathcal{O} = H_1^0 \cap H_2^0 \cap H_3^0 \quad F_7 = H_1^+ \cap H_2^- \cap H_3^- \quad F_1 = H_1^+ \cap H_2^0 \cap H_3^-$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} \leq F_1 \leq F_7$$

Figure 1.4 Les faces de l'arrangement \mathcal{D} : à gauche: les faces F numérotés de 7 à 12 sont les espaces entre les droites et les faces F numérotés de 1 à 6 sont les demi-droites partant de \mathcal{O} . À droite: un choix de signes pour les demi-plans fermés délimités par H_1, H_2 et H_3 . En bas: l'écriture de quelques faces et leur ordre.

1.1.1 Algèbre de Tits

L'ensemble $\Sigma[\mathcal{A}]$ possède une structure de monoïde. En effet, soit $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, considérons le produit FG de deux faces suivant :

$$FG = \bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(FG)} \quad \text{où} \quad \epsilon_i(FG) = \begin{cases} \epsilon_i(F) & \text{si } \epsilon_i(F) \neq 0 \\ \epsilon_i(G) & \text{si } \epsilon_i(F) = 0 \end{cases} .$$

Cette multiplication est bien définie. La preuve de ceci est donnée dans (Bidigare, 1998) à la proposition 2.3.1. Elle repose sur des considérations topologiques et la définition des faces selon les demi-espaces ouverts. De plus, Bidigare donne l'interprétation géométrique suivante du produit de faces à la proposition 2.3.2 de (Bidigare, 1998) : à partir d'un point de l'intérieur relatif de F , on se déplace vers un point de l'intérieur relatif de G . La face où on arrive après un déplacement infinitésimal est la face FG (voir figure 1.5). Bidigare attribue cette interprétation à Andreas Blass.

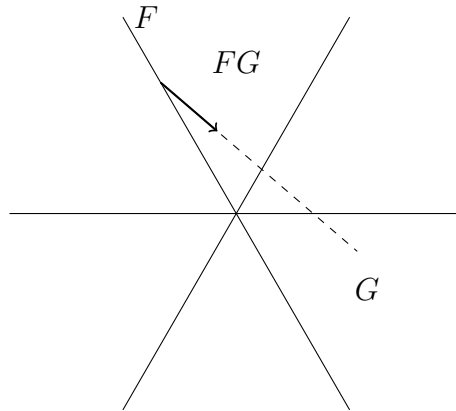


Figure 1.5 L'interprétation géométrique de la multiplication de deux faces.

Il est facile de démontrer que le produit de deux faces est associatif, non commutatif et la face centrale \mathcal{O} est un élément neutre pour cette multiplication. Puisque ce produit provient de la projection d'une chambre sur une autre dans un complexe

de Coxeter définie par Tits (Tits, 2009), on appelle le monoïde ainsi créé *monoïde de Tits* de \mathcal{A} . Soit un corps \mathbb{K} , l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$ à coefficients dans \mathbb{K} forment une algèbre nommée *algèbre de Tits* de \mathcal{A} qui sera notée $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Par ailleurs, il est bien connu (Aguiar et Mahajan, 2017) que la relation d'ordre de $\Sigma[\mathcal{A}]$ est liée à son produit.

Proposition 1.1.2. *Soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a*

$$FG = G \Leftrightarrow F \leq G.$$

Démonstration. Notons que pour un certain $i \in I$, $\epsilon_i(FG)$ est $\epsilon_i(F)$ si ce dernier est non nul ou $\epsilon_i(G)$ dans le cas contraire. Ainsi, $FG = G$ est équivalent à ce que $\epsilon_i(F) \in \{0, \epsilon_i(G)\}$. Par (1.1), on a l'équivalence voulue. ■

La proposition suivante vise à mettre en évidence les propriétés classiques (Aguiar et Mahajan, 2017) du produit et de la relation d'ordre dans $\Sigma[\mathcal{A}]$ qui seront utilisées dans le reste du texte.

Proposition 1.1.3. *Soient $F, G, H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq G$, on a*

$$FF = F, \tag{1.2}$$

$$GF = G, \tag{1.3}$$

$$FHF = FH, \tag{1.4}$$

$$F \leq FH. \tag{1.5}$$

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $\epsilon_i(FF) = \epsilon_i(F)$ si ce dernier est nul ou non, donc on a (1.2). Aussi, pour tout $i \in I$, on a que $\epsilon_i(GF) = \epsilon_i(G)$ si ce dernier est non nul, sinon $\epsilon_i(GF) = \epsilon_i(F)$. Puisque $F \leq G$, $\epsilon_i(F) \in \{0, \epsilon_i(G)\}$ par (1.1), donc $\epsilon_i(F)$ est nul si $\epsilon_i(G)$ est nul. Ainsi, $\epsilon_i(GF) = \epsilon_i(G)$ quand $\epsilon_i(G)$ est nul aussi, donc on a (1.3). Par (1.2), $FFH = FH$, donc $F \leq FH$ par la proposition 1.1.2.

Ceci donne (1.5). L'équation (1.3) indique que $FHF = FH$, car on a l'inégalité (1.5), donc on a (1.4). ■

Une bande régulière à gauche est un semi-groupe qui respectent les égalités (1.2) et (1.4), donc $\Sigma[\mathcal{A}]$ est une bande régulière à gauche. Puisque le produit de faces est basé sur les vecteurs signes des faces, ce produit s'applique à tout matroïde orienté. De ce fait, les matroïdes orientés sont des bandes régulières à gauche en particulier.

1.1.2 Algèbre de Birkhoff

Soit $\Lambda[\mathcal{A}]$ l'ensemble des intersections des hyperplans de \mathcal{A} avec V ajouté (V est considéré comme étant l'intersection d'aucun hyperplan de \mathcal{A}). L'inclusion induit une relation d'ordre partielle sur $\Lambda[\mathcal{A}]$ faisant de lui un *poset*, c'est-à-dire que pour tous $X, Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$, on a

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \leq Y.$$

Plus encore, $\Lambda[\mathcal{A}]$ sous cette relation d'ordre partielle est un treillis, c'est-à-dire que les opérations

$$\vee : \Lambda[\mathcal{A}] \times \Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \Lambda[\mathcal{A}] \quad \text{et} \quad \wedge : \Lambda[\mathcal{A}] \times \Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \Lambda[\mathcal{A}]$$

sont bien définies. L'intersection de tous les hyperplans U de \mathcal{A} est non vide, car \mathcal{A} est central. Ainsi, U est le plus petit élément et V est le plus grand élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$. Pour la démonstration de ces résultats, voir (Stanley, 2007), la proposition 2.3 en particulier. Stanley ordonne $\Lambda[\mathcal{A}]$ par inclusion inverse, donc les plus petits et plus grands éléments sont inversés comme les applications \vee et \wedge . Il n'est pas compliqué de voir que les applications \vee et \wedge ont les interprétations géométriques suivantes :

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad \text{et} \quad X \vee Y = \bigcap_{i \in I'} H_i \quad \text{tel que} \quad I' = \{i \in I \mid X \cup Y \subseteq H_i\}.$$

Le treillis $\Lambda[\mathcal{A}]$ est gradué et le rang de X est donné par $\dim(X) - \dim(U)$. Une preuve de ceci se trouve à la proposition 1.1 de (Stanley, 2007) qui stipule que le rang de X est $\dim(V) - \dim(X)$ lorsque $\Lambda[\mathcal{A}]$ est ordonné par inclusion inverse, donc le rang de U est $\dim(V) - \dim(U)$ dans ce cas. Il suffit de soustraire le rang de X à celui de U dans $\Lambda[\mathcal{A}]$ ordonné par inclusion inverse pour avoir le rang dans $\Lambda[\mathcal{A}]$ ordonné par inclusion usuelle.

L'élément U constitue un élément neutre pour l'opération \vee . De plus, \vee est associative et commutative. Ainsi, $(\Lambda[\mathcal{A}], \vee)$ est un monoïde commutatif. En fait, il découle directement de la définition d'un treillis que tout treillis fini induit un monoïde de cette façon. Le monoïde $(\Lambda[\mathcal{A}], \vee)$ est appelé *monoïde de Birkhoff* de \mathcal{A} et l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\Lambda[\mathcal{A}]$ à coefficients dans \mathbb{K} forment une algèbre nommée *algèbre de Birkhoff* de \mathcal{A} qui sera notée $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$. Ce monoïde et cette algèbre portent le nom de Garrett Birkhoff qui a popularisé l'étude de *posets* et de treillis, en particulier, par son livre *Lattice theory* (Birkhoff, 1940).

1.2 Algèbre d'incidence

L'algèbre de Birkhoff est une algèbre *semi-simple scindée* (de l'anglais *split semi-simple*, voir (Aguilar et Mahajan, 2017) section D.3.1), c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{K} = \mathbb{K}^p$ en tant qu'algèbres. Sa structure est liée à son algèbre d'incidence. Ce fait est expliqué dans cette section dans le contexte plus général des algèbres construites à partir des treillis finis. Considérons un *poset* fini (P, \leq) et un corps \mathbb{K} . Une *fonction d'incidence* de (P, \leq) est une fonction $f : P \times P \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, y) = 0$ si $x \not\leq y$ pour tous $x, y \in P$. Ce type de fonction a une écriture sous forme de matrice de dimension $|P| \times |P|$ où chaque ligne et colonne est indexée par un élément de P . Le coefficient de cette

matrice à la ligne x et la colonne y est $f(x, y)$ pour une fonction d'incidence f . Si ces index sont arrangés selon l'ordre de (P, \leq) , on obtient une matrice triangulaire supérieure.

Exemple. Considérons l'arrangement \mathcal{D} de la figure 1.4. Soient $U = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ l'élément minimal de $\Lambda[\mathcal{D}]$ et $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour $X, Y \in \Lambda[\mathcal{D}]$, on a $f(X, Y) = 0$ si $X \not\leq Y$ et

$$\begin{array}{ll} f(U, U) = 1, & f(U, H_1) = 2, \\ f(U, H_2) = 3, & f(U, H_3) = 4, \\ f(U, \mathbb{R}^2) = 5, & f(H_1, H_1) = 6, \\ f(H_1, \mathbb{R}^2) = 7, & f(H_2, H_2) = 8, \\ f(H_2, \mathbb{R}^2) = 9, & f(H_3, H_3) = 10, \\ f(H_3, \mathbb{R}^2) = 11, & f(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = 12. \end{array}$$

La fonction f est complètement définie par ces égalités, car on a considéré tous les intervalles du *poset* $\Lambda[\mathcal{D}]$ (voir le diagramme de Hasse du *poset* $\Lambda[\mathcal{D}]$ à la figure 1.6). La fonction f est donnée par la matrice suivante:

$$\begin{array}{c} U \quad H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad \mathbb{R}^2 \\ U \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ H_1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 7 \\ H_2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ H_3 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ \mathbb{R}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Par exemple, on a

$$f(U, H_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.$$

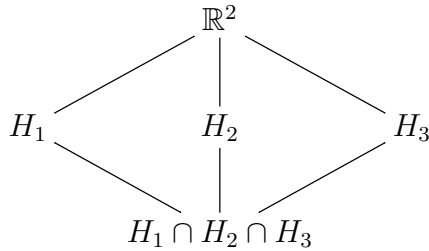


Figure 1.6 Diagramme de Hasse du *poset* $\Lambda[\mathcal{D}]$.

Selon cette écriture d'une fonction d'incidence, l'addition de fonctions usuelle correspond à l'addition de matrices et la multiplication d'une fonction par un scalaire usuelle correspond à la multiplication d'une matrice par un scalaire. Il n'est pas difficile de montrer que les fonctions d'incidence avec l'addition de fonctions usuelle et la multiplication par un scalaire usuelle forment un espace vectoriel qui est isomorphe à un sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de dimension $|P| \times |P|$. Avec la multiplication de matrices, on définit la multiplication de deux fonctions d'incidence. Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux matrices triangulaires supérieures $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j, \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j, \leq n}$, la multiplication matricielle donne

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i, j, \leq n} = \left(\sum_{k=i}^j a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i, j, \leq n}$$

parce que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $i > j$. Ainsi, la multiplication de fonctions d'incidence

f et g de (P, \leq) est de la forme suivante:

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

Notons que si $x \not\leq y$, le membre de droite de l'égalité est nul, donc fg est une fonction d'incidence. La fonction d'incidence δ_P de (P, \leq) tel que

$$\delta_P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'élément neutre de cette multiplication, car son écriture matricielle est la matrice identité. Puisque la multiplication matricielle est associative, la multiplication de fonctions d'incidence l'est aussi.

Définition 1.2.1. *L'algèbre d'incidence* $I(P)$ de (P, \leq) est l'espace vectoriel des fonctions d'incidence de (P, \leq) avec le produit défini ci-haut.

Exemple. Les ensembles $\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\Lambda[\mathcal{A}]$ sont des *poset* finis. Ainsi, ils admettent des algèbres d'incidence ($I(\Sigma[\mathcal{A}])$ et $I(\Lambda[\mathcal{A}])$ respectivement).

1.2.1 Fonctions de Möbius et zeta

Deux fonctions qui nous seront utiles sont la fonction de Möbius $\mu \in I(P)$ et la fonction zeta $\zeta \in I(P)$.

Définition 1.2.2. Les fonctions $\mu, \zeta \in I(P)$ sont telles que

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons que la définition de μ est récursive et que l'inverse à gauche et à droite de ζ est μ . En fait, la définition de la fonction de Möbius provient du fait que c'est l'inverse à gauche de ζ (voir (Stanley, 2011) aux sections 3.6 et 3.7).

Remarque. À partir de la définition 1.2.2, pour tous $x, y \in P$ tels que $x \neq y$, on a

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0.$$

De plus, μ est aussi l'inverse à droite de ζ (proposition 3.6.2 de (Stanley, 2011)). Ainsi, si $x \neq y$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_P(x, y) = (\zeta\mu)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x, z)\mu(z, y) \\ &\Rightarrow \mu(x, y) = - \sum_{x < z \leq y} \mu(z, y). \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. Soient (P, \leq) un poset fini et $f, g : P \rightarrow A$ où A est une algèbre avec ensemble de scalaires \mathbb{K} , on a

$$g(x) = \sum_{x \leq y} \zeta(x, y)f(y) = \sum_{x \leq y} f(y)$$

pour tout $x \in P$ si et seulement si

$$f(x) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y)g(y)$$

pour tout $x \in P$.

Démonstration. Les fonctions allant de P vers A forment un espace vectoriel avec l'ensemble de scalaires \mathbb{K} . $I(P)$ agit à gauche sur cet espace vectoriel de fonctions par

$$(\alpha f)(x) = \sum_{x \leq y} \alpha(x, y)f(y)$$

où $f : P \rightarrow A$ et $\alpha \in I(P)$. En effet, soient $g : P \rightarrow A$, $\beta \in I(P)$ et $a \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha(af + g))(x) &= \sum_{x \leq y} \alpha(x, y)(af + g)(y) \\ &= a \sum_{x \leq y} \alpha(x, y)f(y) + \sum_{x \leq y} \alpha(x, y)g(y) \end{aligned}$$

$$= a(\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$

et

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta f))(x) &= \sum_{x \leq y} \alpha(x, y) \sum_{y \leq z} \beta(y, z) f(z) \\ &= \sum_{x \leq y \leq z} \alpha(x, y) \beta(y, z) f(z) \\ &= \sum_{x \leq z} \left(\sum_{x \leq y \leq z} \alpha(x, y) \beta(y, z) \right) f(z) \\ &= ((\alpha\beta)f)(x). \end{aligned}$$

Puisque μ est l'inverse de ζ , on a $f = \mu g$ si et seulement si $\zeta f = g$. ■

Remarque. Ce type d'argument est souvent appelé *formule d'inversion de Möbius*. La proposition 3.7.2 de (Stanley, 2011) porte ce nom et donne un résultat analogue à la proposition ci-haut dans un contexte différent.

1.2.2 Q -base

Comme $\Lambda[\mathcal{A}]$, tout treillis fini admet une structure de monoïde avec l'opération \vee . Ainsi, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments d'un treillis fini (T, \leq) à coefficients dans \mathbb{K} avec la linéarisation de l'opération \vee forment une algèbre notée $A(T, \mathbb{K})$. Cette algèbre est toujours isomorphe à $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}$. Pour voir cet isomorphisme, on considère les éléments

$$Q_x = \sum_{x \leq y} \mu(x, y) y$$

de $A(T, \mathbb{K})$ pour tout $x \in T$ où $\mu \in I(T)$. En considérant Q_x comme l'image de x d'une fonction $Q : T \rightarrow A(T, \mathbb{K})$, on applique la proposition 1.2.1 pour avoir

$$x = \sum_{x \leq y} Q_y. \tag{1.6}$$

Puisque $A(T, \mathbb{K})$ est généré par T et que tout élément de T a une expression en termes d'éléments de $\{Q_t\}_{t \in T}$, cette algèbre est aussi générée par $\{Q_t\}_{t \in T}$. On a que $|\{Q_t\}_{t \in T}| \geq |T|$, car T est une base de $A(T, \mathbb{K})$. Puisque $|\{Q_t\}_{t \in T}| \leq |T|$ par définition, $|\{Q_t\}_{t \in T}| = |T|$, donc $\{Q_t\}_{t \in T}$ est une base de $A(T, \mathbb{K})$.

Théorème 1.2.1. *Soit $\mathbb{K}_t \cong \mathbb{K}$ comme corps pour tout $t \in T$ et $1_t \in \mathbb{K}_t$ l'élément neutre pour la multiplication dans \mathbb{K}_t . L'application linéaire*

$$q : A(T, \mathbb{K}) \rightarrow \bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}_t$$

telle que $q(Q_t) = 1_t$ est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. Notons que $1_t \in \bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}_t$ pour tout $t \in T$. Puisque $\{1_t\}_{t \in T}$ est une base de $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}_t$, q est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Notons que

$$1_x 1_z = \begin{cases} 1_x & \text{si } x = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $x, z \in T$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} q(x)q(z) &= q\left(\sum_{x \leq y} Q_y\right) q\left(\sum_{z \leq t} Q_t\right) \\ &= \left(\sum_{x \leq y} 1_y\right) \left(\sum_{z \leq t} 1_t\right) \\ &= \sum_{x \vee z \leq y} 1_y \\ &= q\left(\sum_{x \vee z \leq y} Q_y\right) \\ &= q(x \vee z). \end{aligned}$$

Puisque T est une base de $A(T, \mathbb{K})$, ceci fait de q un isomorphisme d'algèbres. ■

Définition 1.2.3. Soit un treillis T . L'ensemble $\{Q_t\}_{t \in T}$ où

$$Q_t = \sum_{t \leq s} \mu(t, s) s$$

est la Q -base de $A(T, \mathbb{K})$.

L'isomorphisme du théorème 1.2.1 assure que la Q -base est constituée d'*idempotents orthogonaux*, c'est-à-dire que

$$Q_x \vee Q_x = Q_x \quad \text{et} \quad Q_x \vee Q_z = \begin{cases} Q_x & \text{si } x = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $x, z \in T$. Ceci avec (1.6) implique le résultat suivant:

$$x \vee Q_z = \sum_{x \leq y} Q_y \vee Q_z = \begin{cases} Q_z & \text{si } x \leq z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

pour tous $x, z \in T$. De plus, la somme de ces idempotents orthogonaux est l'élément neutre pour la multiplication. En effet, l'isomorphisme du théorème 1.2.1 fait correspondre les éléments neutres pour la multiplication dans $A(T, \mathbb{K})$ et $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}_t$, or $\sum_{t \in T} 1_t$ est l'élément neutre pour la multiplication dans $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{K}_t$. Puisque les éléments de la Q -base sont orthogonaux entre eux et qu'ils somment à l'élément neutre pour la multiplication, on a la décomposition de $A(T, \mathbb{K})$ en sous-modules suivante (voir (Assem *et al.*, 2006) à la section 1.4) :

$$A(T, \mathbb{K}) = \bigoplus_{t \in T} Q_t A(T, \mathbb{K})$$

On dit d'un idempotent qu'il est *primitif* s'il ne s'exprime pas comme la somme d'idempotents orthogonaux entre eux et non nuls. Tout élément de la Q -base est primitif. En effet, s'il existe $x \in T$ tel que Q_x s'exprime comme la somme $Q'_x + Q''_x$ d'idempotents orthogonaux entre eux, alors $Q_x A(T, \mathbb{K})$ serait décomposable en $Q'_x A(T, \mathbb{K}) \oplus Q''_x A(T, \mathbb{K})$. Cependant, ceci indique que

$$A(T, \mathbb{K}) = \left(\bigoplus_{t \in T \setminus \{x\}} Q_t A(T, \mathbb{K}) \right) \oplus Q'_x A(T, \mathbb{K}) \oplus Q''_x A(T, \mathbb{K}),$$

donc que $A(T, \mathbb{K})$ possède une base ayant au moins $|T| + 1$ éléments $\frac{1}{2}$. Ceci implique aussi que la décomposition de $A(T, \mathbb{K})$ donnée par la Q -base est constituée

de modules indécomposables. Lorsqu'une famille d'idempotents primitifs orthogonaux somme à l'élément neutre pour la multiplication, on dit que cette famille est un *système complet d'idempotents primitifs orthogonaux*. Plus généralement, un tel système décompose l'algèbre dans laquelle il est contenu en modules indécomposables. De ce fait, la construction de systèmes complets d'idempotents orthogonaux d'une algèbre informe sur sa structure.

Le fait que $A(T, \mathbb{K})$ est semi-simple scindée indique qu'elle n'a qu'un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux. En effet, soit un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux $\{Q_{t'}\}_{t' \in T'}$ de $A(T, \mathbb{K})$, la discussion ci-haut s'applique pour avoir la décomposition de $A(T, \mathbb{K})$ en modules indécomposables suivante:

$$A(T, \mathbb{K}) = \bigoplus_{t' \in T'} Q_{t'} A(T, \mathbb{K}).$$

Un fait connu sur les algèbres semi-simples scindées, donné au théorème 4.10 de (Assem *et al.*, 2006), assure que $|T| = |T'|$ et qu'il existe une bijection σ de T vers T' telle que $Q_t A(T, \mathbb{K}) \cong Q'_{\sigma(t)} A(T, \mathbb{K})$ pour tout $t \in T$ en tant que $A(T, \mathbb{K})$ -modules. Soit p_t l'isomorphisme en question de $Q_t A(T, \mathbb{K})$ vers $Q'_{\sigma(t)} A(T, \mathbb{K})$, il existe un unique $a_t \in A(T, \mathbb{K})$ pour chaque $t \in T$ tel qu'on a

$$Q'_{\sigma(t)} = p_t(Q_t a_t) = Q_t p_t(a_t).$$

Puisque les éléments d'un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux somment à $1_{A(T, \mathbb{K})}$ l'élément neutre pour la multiplication dans $A(T, \mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} 1_{A(T, \mathbb{K})} &= \sum_{t \in T} Q'_{\sigma(t)} \\ &= \sum_{t \in T} Q_t p_t(a_t) \\ &= \sum_{t \in T} Q_t + \sum_{t \in T} Q_t (p_t(a_t) - 1) \\ &= 1_{A(T, \mathbb{K})} + \sum_{t \in T} Q_t (p_t(a_t) - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{t \in T} Q_t(p_t(a_t) - 1).$$

Puisque les Q_t sont linéairement indépendants, $p_t(a_t) = 1$ pour tout $t \in T$, donc $Q'_{\sigma(T)} = Q_t$ pour tout $t \in T$.

Exemple. Puisque $\Lambda[\mathcal{A}]$ est un treillis pour tout arrangement \mathcal{A} , l'algèbre de Birkhoff de tout arrangement d'hyperplans admet une Q -base. Cependant, $\Sigma[\mathcal{A}]$ n'est pas nécessairement un treillis et n'admet donc pas forcément une telle base.

Exemple. Voici quelques valeurs pour la fonction de Möbius allant de $\Lambda[\mathcal{D}]$ vers \mathbb{R} ($U = H_1 \cap H_2 \cap H_3$):

$$\begin{aligned} \mu(U, H_1) &= -1, & \mu(H_1, \mathbb{R}^2) &= -1, \\ \mu(U, H_2) &= -1, & \mu(H_2, \mathbb{R}^2) &= -1, \\ \mu(U, H_3) &= -1, & \mu(H_3, \mathbb{R}^2) &= -1, \\ \mu(U, \mathbb{R}^2) &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, la Q -base de $\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}]$ est $\{Q_{\mathbb{R}^2}, Q_{H_1}, Q_{H_2}, Q_{H_3}, Q_U\}$ telle que

$$\begin{aligned} Q_{H_1} &= H_1 - \mathbb{R}^2, & Q_{\mathbb{R}^2} &= \mathbb{R}^2, \\ Q_{H_2} &= H_2 - \mathbb{R}^2, & Q_U &= U - H_1 - H_2 - H_3 + 2\mathbb{R}^2, \\ Q_{H_3} &= H_3 - \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Par le théorème 1.2.1, on a l'isomorphisme d'algèbres suivant :

$$\mathbb{R}^5 \cong \mathbb{R}Q_{\mathbb{R}^2} \oplus \mathbb{R}Q_{H_1} \oplus \mathbb{R}Q_{H_2} \oplus \mathbb{R}Q_{H_3} \oplus \mathbb{R}Q_U = \mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}].$$

Finalement, on a aussi la décomposition en modules indécomposables suivante :

$$\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}] \cong Q_{\mathbb{R}^2}\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}] \oplus Q_{H_1}\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}] \oplus Q_{H_2}\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}] \oplus Q_{H_3}\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}] \oplus Q_U\mathbb{R}\Lambda[\mathcal{D}].$$

1.3 Support d'une face

Chaque élément de $\Sigma[\mathcal{A}]$ est contenu dans un élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$. En effet, toute face est dans $V \in \Lambda[\mathcal{A}]$. On appelle *support* de $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ le plus petit $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tel que $F \subseteq X$. Ceci induit une application $s : \Sigma[\mathcal{A}] \rightarrow \Lambda[\mathcal{A}]$ qu'on appelle aussi support par abus de langage. Il est montré dans (Brown, 2000) (sections A.3, A.4, B.1 et B.2) que cette application est surjective et préserve l'ordre. Dans cet article, Brown montre que la notion de support présentée ici se généralise aux bandes régulières à gauche en plus.

Exemple. Dans la figure 1.4, $s(\mathcal{O}) = H_1 \cap H_2 \cap H_3$, $s(F_1) = H_2$ et $s(F_7) = V$. Comme $\mathcal{O} \leq F_1 \leq F_7$, on a $s(\mathcal{O}) \leq s(F_1) \leq s(F_7)$.

Le support s'étend à $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ de la façon suivante: soient $a_F \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$s \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F F \right) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F s(F) \in \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}].$$

Il découle de ceci que $s : \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}] \rightarrow \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ est une application linéaire surjective. De plus, pour $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a $s(FG) = s(F) \vee s(G)$ (voir (Brown, 2000) aux sections A.3, A.4, B.1 et B.2 de l'annexe). Ainsi, le support est un morphisme d'algèbres. Rappelons-nous de la définition d'une face $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ (définition 1.1.1): il existe un unique $\epsilon_i \in \{-, 0, +\}$ pour tout $i \in I$ tels que

$$F = \bigcap_{i \in I} H_i^{\epsilon_i(F)}.$$

En particulier, $F \subseteq H_j$ pour tout $j \in I$ tels que $\epsilon_j(F) = 0$, donc $s(F) \subseteq H_j$. La proposition suivante indique que le support d'une face est complètement défini par ces ϵ_j .

Proposition 1.3.1. *Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ ($\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$), on a*

$$s(F) = \bigcap_{i \in I_F} H_i \quad \text{où} \quad I_F = \{i \in I \mid \epsilon_i(F) = 0\}.$$

Démonstration. Par la définition de F , $F \subseteq H_i$ pour tout $i \in I_F$, donc $F \subseteq \bigcap_{i \in I_F} H_i$ (si $I_F = \emptyset$, on considère que l'intersection est V). Ainsi, $s(F) \subseteq \bigcap_{i \in I_F} H_i$. Si $s(F) \subsetneq \bigcap_{i \in I_F} H_i$, alors il existe $j \in I \setminus I_F$ tel que $s(F) \subseteq H_j$, car $s(F) \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Ceci implique que $F \subseteq H_j$, donc $\epsilon_j(F) = 0$, or $j \notin I_F$ ζ . ■

La proposition 1.1.1 définit $\widehat{F} \in \Sigma[\mathcal{A}]$ la face inverse de F .

Corollaire 1.3.1. *Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, $s(\widehat{F}) = s(F)$.*

Démonstration. En suivant les notations de la proposition 1.3.1, on a que $I_F = I_{\widehat{F}}$, donc que $s(\widehat{F}) = s(F)$. ■

Sachant ceci, on arrive à la proposition suivante qui indique qu'on sait par le produit de deux faces si elles ont le même support.

Proposition 1.3.2. *Soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, $GF = G$ si et seulement si $s(F) \leq s(G)$.*

Démonstration. Supposons que $GF = G$. Puisque s est un morphisme d'algèbres, on a

$$s(G) = s(GF) = s(G) \vee s(F) \quad \Rightarrow \quad s(F) \leq s(G).$$

Maintenant, supposons que $s(F) \leq s(G)$. Soit les ensembles

$$I_F = \{i \in I \mid \epsilon_i(F) = 0\} \quad \text{et} \quad I_G = \{i \in I \mid \epsilon_i(G) = 0\}.$$

Par la proposition 1.3.1, on a

$$\bigcap_{i \in I_F} H_i = s(F) \subseteq s(G) = \bigcap_{i \in I_G} H_i.$$

Ainsi, pour $j \in I_G$, on a $F \subseteq s(F) \subseteq H_j$, donc $\epsilon_j(F) = 0$. De ce fait, $j \in I_F$, donc $I_G \subseteq I_F$. Par la définition du produit de faces, on a

$$\epsilon_i(GF) = \begin{cases} \epsilon_i(G) & \text{si } i \notin I_G \\ \epsilon_i(F) & \text{si } i \in I_G \end{cases} = \begin{cases} \epsilon_i(G) & \text{si } i \notin I_G \\ 0 & \text{si } i \in I_G \end{cases} = \epsilon_i(G)$$

pour tout $i \in I$. Ainsi, $GF = G$. ■

Notons que ce résultat donne que, pour tous $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, ($FG = F$ et $GF = G$) est équivalent à $s(F) = s(G)$.

Rappelons-nous que $\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\Lambda[\mathcal{A}]$ sont gradués. La proposition 1.3.1 permet aussi de donner le rang d'un élément de $\Sigma[\mathcal{A}]$ par le rang de son support. Cette observation provient de l'étude des matroïdes orientés. En effet, la proposition 1.3.1 donne que la fonction z de la proposition 4.1.13 de (Bjorner *et al.*, 1999) est la généralisation du support aux matroïdes orientés. De plus, cette dernière proposition mentionne que le support préserve les relations de couverture.

Proposition 1.3.3. *Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, le rang de F dans $\Sigma[\mathcal{A}]$ a la même valeur que le rang de $s(F)$ dans $\Lambda[\mathcal{A}]$. En particulier, le rang de $\Sigma[\mathcal{A}]$ est le même que le rang de $\Lambda[\mathcal{A}]$.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ le rang de F . Il existe une chaîne de $\Sigma[\mathcal{A}]$ de la forme

$$\mathcal{O} < F_1 < F_2 < \dots < F_{k-1} < F$$

où chaque face couvre la précédente. Puisque le support préserve les relations de couverture, chaque intersection de la chaîne

$$s(\mathcal{O}) < s(F_1) < s(F_2) < \dots < s(F_{k-1}) < s(F)$$

de $\Lambda[\mathcal{A}]$ recouvre l'intersection précédente. Puisque $\Lambda[\mathcal{A}]$ est gradué, $s(F)$ est de rang k . Puisque le support est surjectif, il existe $F_V \in \Sigma[\mathcal{A}]$ pour laquelle $s(F_V) = V$. La face F_V est maximale. En effet, s'il existe une face F' qui couvre F_V , alors $s(F') > V$, car le support respecte les relations de couverture $\not\leq$. La valeur du rang de F_V est la même que celle du rang de V par ce qui précède. S'il existe une face maximale F' qui soit de rang plus élevé que F_V , alors $s(F')$ est

de rang plus élevé que V , car F' et $s(F')$ ont le même rang. Cependant, V est le seul élément maximal dans $\Lambda[\mathcal{A}] \not\prec$. Ainsi, F_V est de rang maximal dans $\Sigma[\mathcal{A}]$. Puisque F_V et V sont maximaux, $\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\Lambda[\mathcal{A}]$ ont le même rang. ■

1.4 Relèvement d'idempotents

Puisque le support est un morphisme d'algèbres surjectif, $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]/\ker(s) \cong \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ par le premier théorème d'isomorphisme et $\ker(s)$ est un idéal de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Si $\ker(s)$ est un idéal nilpotent de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ pourra être relevée en un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. En effet, le lemme suivant donne qu'un tel relèvement existe pour toute algèbre.

Lemme 1.4.1. *Soient une algèbre A et un idéal nilpotent N de A . Considérons la projection canonique $\rho : A \twoheadrightarrow A/N$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et une famille d'idempotents orthogonaux $\{e_1, \dots, e_p\}$ de A/N , il existe une famille d'idempotents orthogonaux $\{f_1, \dots, f_p\}$ de A telle que $\rho(f_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. De plus, si e_i est primitif, alors f_i est primitif. Aussi, si $e_1 + \dots + e_p$ est l'élément neutre pour la multiplication dans A/N , alors $f_1 + \dots + f_p$ est l'élément neutre pour la multiplication dans A .*

Ce résultat est démontré dans (Aguiar et Mahajan, 2017) au travers des lemmes D.28 et D.29.

Remarque. Soient N un idéal nilpotent d'une algèbre A et $p \in \mathbb{N}^*$. Les démonstrations des lemmes D.28 et D.29 de (Aguiar et Mahajan, 2017) donnent la construction suivante d'un relèvement d'un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux $\{e_1, \dots, e_p\}$ de A/N par la projection canonique $\rho : A \twoheadrightarrow A/N$. Les lemmes D.28 et D.29 de (Aguiar et Mahajan, 2017) assurent que ce relèvement est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux. Considérons

ici la construction de $\{f_1, \dots, f_p\} \subseteq A$ ce relèvement. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de N et $a_i \in A$ tel que $\rho(a_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$f_1 = (1 - (1 - a_1)^k)^k.$$

Pour voir que ceci est un idempotent, il suffit de montrer que $a_1 - a_1^2 \in N$, montrer que $a_1^k(1 - a_1)^k$ divise $f_1(1 - f_1)$ et développer f_1 à l'aide du binôme de Newton. Soit $b_j = f_1 + \dots + f_{j-1}$ et $c_j = (1 - (1 - a_j)^k)^k$ pour $j \in \{2, \dots, p\}$, on a

$$f_j = (1 - b_j)(1 - c_j b_j)^{-1} c_j (1 - c_j b_j).$$

Il est plus facile de montrer que f_j est un idempotent pour tout $j \in \{2, \dots, p\}$ quand on le considère sous la forme

$$f_j = (1 - b_j)(1 - c_j b_j)^{-1} c_j (1 - b_j).$$

On appelle le plus grand idéal nilpotent d'une algèbre A le *radical* et sera noté $\text{rad}(A)$. Si le quotient d'une algèbre par son radical est une algèbre semi-simple scindée, on dit que cette algèbre est *élémentaire*. Si A est élémentaire, les sections de la projection canonique $\rho : A \rightarrow A/\text{rad}(A)$ induisent tous les systèmes complets d'idempotents primitif orthogonaux de A à partir de l'unique système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $A/\text{rad}(A)$.

Théorème 1.4.1. *Soit une algèbre élémentaire A , l'ensemble des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux et l'ensemble des sections d'algèbres (sections qui sont aussi des morphismes d'algèbres) de la projection canonique $\rho : A \rightarrow A/\text{rad}(A)$ sont en bijection de la manière suivante. Soient η une section d'algèbres de ρ et $\{e_1, \dots, e_p\}$ le système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $A/\text{rad}(A)$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Le système complet d'idempotents primitifs orthogonaux correspondant à η est $\{\eta(e_1), \dots, \eta(e_p)\}$.*

Ceci est le théorème D.32 se trouvant dans (Aguiar et Mahajan, 2017) et il est démontré dans cette ouvrage. Aussi, tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux d'une algèbre élémentaire sont conjugués.

Proposition 1.4.1. *Soient une algèbre élémentaire A et la projection canonique $\rho : A \rightarrow A/\text{rad}(A)$. Soient deux systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux $\{e_1, \dots, e_p\}$ et $\{f_1, \dots, f_p\}$ de A où $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\rho(e_j) = \rho(f_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$. Il existe un élément inversible $a \in A$ tel que $ae_ja^{-1} = f_j$ pour tout j .*

Cette proposition est un cas particulier des lemmes D.26 et D.27 de (Aguiar et Mahajan, 2017).

1.4.1 Radical de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$

Il se trouve que $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est élémentaire. En effet, nous montrerons que $\ker(s) = \text{rad}(\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}])$ dans cette sous-section. Soit $\mathcal{N} \in \ker(s)$, pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, il existe $a_F \in \mathbb{K}$ tel que

$$\mathcal{N} = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F F \quad \text{et} \quad 0 = s(\mathcal{N}) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F s(F) = \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F X.$$

Puisque $\Lambda[\mathcal{A}]$ est une base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$, pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, on a

$$\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F = 0.$$

Définition 1.4.1. Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ non nul et $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Si on a

$$\mathcal{M} = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=Y} b_F F \quad \text{où} \quad b_F \in \mathbb{K},$$

\mathcal{M} est *homogène* de support Y .

Notons que tout élément non nul de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est décomposable en au plus $|\Lambda[\mathcal{A}]|$ éléments homogènes comme \mathcal{M} ci-haut. C'est par l'analyse suivante des éléments homogènes de $\ker(s)$ qu'on aura que $\ker(s)$ est nilpotent. Ici, le fait critique est que tout élément de $\ker(s)$ est la somme d'éléments homogènes de $\ker(s)$.

Pour un élément homogène $\mathcal{N} \in \ker(s)$ de support X , $X \neq U$ (où U est le plus petit élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$). En effet, la seule face de support U est la face centrale \mathcal{O} . Ceci est évident du fait que \mathcal{O} et U sont les éléments minimaux de $\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\Lambda[\mathcal{A}]$ respectivement et que le support respecte les relations de couverture. Maintenant, si \mathcal{N} était de support U , alors il existerait $a_{\mathcal{O}} \in \mathbb{K}$ tel que $\mathcal{N} = a_{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ et $a_{\mathcal{O}} = 0$, donc \mathcal{N} serait nul. Cependant, un élément homogène de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est non nul $\not\perp$.

Lemme 1.4.2. *Soit $\mathcal{N} \in \ker(s)$ homogène de support $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ ou nul, on a $G\mathcal{N} = 0$ pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(G) \geq X$. Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ homogène de support $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ ou nul, $\mathcal{M}\mathcal{N}$ est homogène de support $Y \vee X$ ou nul. En particulier, si $Y \geq X$, $\mathcal{M}\mathcal{N}$ est nul.*

Démonstration. Le résultat est direct si \mathcal{N} ou \mathcal{M} est nul. Dans le cas contraire, par la proposition 1.3.2, on a $GF = G$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(F) = X \leq s(G)$. Il existe $a_F \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ si $s(F) = X$ tel que

$$\mathcal{N} = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F$$

Ainsi, on a

$$G\mathcal{N} = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F GF = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F G.$$

Puisque $\mathcal{N} \in \ker(s)$, $G\mathcal{N} = 0$. Il existe $b_H \in \mathbb{K}$ pour tout $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ de support Y tel que

$$\mathcal{M} = \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(H)=Y} b_H H.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{MN} &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(H)=Y} b_H H \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F \\ &= \sum_{F, H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X, s(H)=Y} b_H a_F HF. \end{aligned}$$

Du fait que $s(HF) = s(H) \vee s(F) = Y \vee X$, si \mathcal{MN} est non nul, il est homogène de support $Y \vee X$. Si $Y \geq X$, alors $s(H) \geq s(F)$, donc $HF = H$ par la proposition 1.3.2. Dans ce cas, puisque $\mathcal{N} \in \ker(s)$, on a

$$\mathcal{MN} = \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(H)=Y} b_H \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F H = \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(H)=Y} b_H(0)H = 0. \quad \blacksquare$$

Rappelons-nous que le rang de $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ est $\dim(X) - \dim(U)$. L'espace vectoriel ambiant V est le plus grand élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$, donc son rang est aussi le rang de $\Lambda[\mathcal{A}]$. Notons que le rang du support d'un élément homogène de $\ker(s)$ est au moins 1, car U est le seul élément de rang 0 de $\Lambda[\mathcal{A}]$. Sachant tout ceci, on montre que $\ker(s)$ est nilpotent.

Lemme 1.4.3. *Le produit de $\dim(V) - \dim(U) + 1$ éléments homogènes de $\ker(s)$ est nul.*

Démonstration. Soient $k = \dim(V) - \dim(U) + 1$ et $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k \in \ker(s)$ homogènes de support $X_1, \dots, X_k \in \Lambda[\mathcal{A}]$ respectivement. On a

$$X_1 \leq X_1 \vee X_2 \leq \dots \leq X_1 \vee \dots \vee X_k.$$

S'il existe $j \in \{2, \dots, k\}$ tel que $X_1 \vee \dots \vee X_{j-1} = X_1 \vee \dots \vee X_j$, alors $X_j \leq X_1 \vee \dots \vee X_{j-1}$. Par le lemme 1.4.2, $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_{j-1}$ est homogène de support $X_1 \vee \dots \vee X_{j-1}$ ou nul. Encore par ce lemme, $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_j$ est nul, car le support de \mathcal{N}_j est plus petit ou égal au support de $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_{j-1}$. Ainsi, $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_k$ est nul. Maintenant, supposons qu'on ait

$$X_1 < X_1 \vee X_2 < \dots < X_1 \vee \dots \vee X_k.$$

Puisque que le rang du support d'un élément homogène de $\ker(s)$ est au moins 1, le rang de $X_1 \vee \dots \vee X_k$ est au moins k . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \dim(X_1 \vee \dots \vee X_k) - \dim(U) &\geq k \\ &= \dim(V) - \dim(U) + 1 \\ &> \dim(V) - \dim(U). \end{aligned}$$

Cependant, $\dim(V) - \dim(U)$ est le rang de V le plus grand élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$, donc le rang de $X_1 \vee \dots \vee X_k$ est plus petit ou égal à celui de V $\not\leq$. \blacksquare

Lemme 1.4.4. *Il existe un produit de $\dim(V) - \dim(U)$ éléments de $\ker(s)$ qui soit non nul.*

Démonstration. Soit $k = \dim(V) - \dim(U) + 1$. Par la proposition 1.3.3, le rang d'une face va de 0 à $\dim(V) - \dim(U)$. Considérons la chaîne de $\Sigma[\mathcal{A}]$

$$\mathcal{O} < F_1 < F_2 \dots < F_{k-1}$$

où chaque face recouvre la précédente. La proposition 1.1.1 définit la face inverse \widehat{F} qui est de même support que $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ par le corollaire 1.3.1. Soit $m \in \{2, \dots, k-1\}$, par la proposition 1.1.2 et le fait que le support est un morphisme d'algèbres, on a

$$\begin{aligned} s(F_{m-1}\widehat{F}_m) &= s(F_{m-1}) \vee s(\widehat{F}_m) \\ &= s(F_{m-1}) \vee s(F_m) \\ &= s(F_{m-1}F_m) \\ &= s(F_m). \end{aligned}$$

Ainsi, $F_1 - \widehat{F}_1$ et $F_m - F_{m-1}\widehat{F}_m$ sont des éléments homogènes de support $s(F_1)$ et $s(F_m)$ respectivement. La somme des coefficients des faces de ces éléments est

0, donc ils sont des éléments de $\ker(s)$. Pour chaque $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_F : \{0, 1\} &\rightarrow \{F, \widehat{F}\} . \\ 0 &\mapsto F \\ 1 &\mapsto \widehat{F} \end{aligned}$$

Soit B l'ensemble des suites de $\{0, 1\}$ de longueur $k - 1$, on a

$$\begin{aligned} &(F_1 - \widehat{F}_1)(F_2 - F_1\widehat{F}_2)(F_3 - F_2\widehat{F}_3)\dots(F_{k-1} - F_{k-2}\widehat{F}_{k-1}) \\ &= (F_1F_2 - F_1F_1\widehat{F}_2 - \widehat{F}_1F_1F_2 + \widehat{F}_1\widehat{F}_2)(F_3 - F_2\widehat{F}_3)\dots(F_{k-1} - F_{k-2}\widehat{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} \in B} (-1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} \lambda_{F_1}(a_1) \lambda_{F_2}(a_2) \dots \lambda_{F_{k-1}}(a_{k-1}). \end{aligned}$$

Cette somme est un élément de $\ker(s)$, car $\ker(s)$ est un idéal. Le terme de cette somme associé à $\{0, 0, \dots, 0\} \in B$ est F_{k-1} par la proposition 1.1.2. Montrons que ce terme n'est pas annulé dans la somme. Puisque $F_{m-1} < F_m$, par (1.1), il existe $i' \in I$ ($\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$) tel que $\epsilon_{i'}(F_{m-1}) = 0$ et $\epsilon_{i'}(F_m) \neq 0$, donc

$$\epsilon_{i'}(F_{m-1}F_m) = \epsilon_{i'}(F_m) \neq \epsilon_{i'}(\widehat{F}_m) = \epsilon_{i'}(F_{m-1}\widehat{F}_m).$$

Cependant, $\epsilon_{i'}(F_{k-1}) = \epsilon_{i'}(F_m)$, car $F_m \leq F_{k-1}$, donc $\epsilon_{i'}(F_{k-1}) \neq \epsilon_{i'}(\widehat{F}_m)$. Étendons ce principe. Soit $\{b_1, \dots, b_{k-1}\} \in B$ tel qu'au moins un des éléments de la suite soit 1. Prenons $m' \in \{1, \dots, k-1\}$ tel que $b_{m'} = 1$ et $b_{m''} = 0$ si $m'' < m'$ pour $m'' \in \{1, \dots, k-1\}$. Il existe $i'' \in I$ tel que $\epsilon_{i''}(\widehat{F}_{m'}) \neq \epsilon_{i''}(F_{k-1})$ et $\epsilon_{i''}(F_{m''}) = 0$ pour tout $m'' < m'$. De ceci découle que

$$\epsilon_{i''}(\lambda_{F_1}(b_1) \lambda_{F_2}(b_2) \dots \lambda_{F_{k-1}}(b_{k-1})) = \epsilon_{i''}(F_{m'-1}\widehat{F}_{m'}) = \epsilon_{i''}(\widehat{F}_{m'}) \neq \epsilon_{i''}(F_{k-1}).$$

Ainsi, les termes de la somme ci-haut associé à une suite de B comportant un 1 ne sont pas $\pm F_{k-1}$, donc cette somme est non nulle. ■

Théorème 1.4.2. *Le noyau de s est un idéal nilpotent d'indice de nilpotence $\dim(V) - \dim(U) + 1$.*

Démonstration. Un produit d'éléments de $\ker(s)$ dont l'un des facteurs est 0 est nul. Considérons donc les produits qui n'ont pas de facteur nul. Soit $k = \dim(V) - \dim(U) + 1$. Puisque tout élément de $\ker(s)$ est une somme d'éléments homogènes de $\ker(s)$, un produit de k éléments de $\ker(s)$ est une somme de produits de k éléments homogènes de $\ker(s)$. Le lemme 1.4.3 donne que tous ces produits sont nuls, donc leur somme l'est aussi. Le lemme 1.4.4 donne qu'il existe un produit de $k - 1$ éléments de $\ker(s)$ qui soit non nul. ■

Ceci permet seulement de conclure que $\ker(s)$ est nilpotent, mais il n'est pas encore clair que ce soit $\text{rad}(\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}])$. Cependant, on sait que $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]/\ker(s) \cong \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ et le théorème 1.2.1 donne que $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}] \cong \mathbb{K}^{|\Lambda[\mathcal{A}]|}$. Puisque \mathbb{K} n'a pas de diviseur de 0 $\in \mathbb{K}$ non nul, alors 0 $\in \mathbb{K}^{|\Lambda[\mathcal{A}]|}$ est le seul élément nilpotent de $\mathbb{K}^{|\Lambda[\mathcal{A}]|}$, donc $\text{rad}(\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]) = \{0\}$. En fait, ceci montre que toute algèbre semi-simple scindée a un radical nul. Ceci permet l'observation suivante.

Proposition 1.4.2. *Soit un idéal nilpotent N d'une algèbre A tel que A/N est semi-simple scindée. Dans ce cas, $N = \text{rad}(A)$.*

Démonstration. Puisque N est nilpotent, $N \subseteq \text{rad}(A)$. Soient ρ la projection canonique de A vers A/N et $a \in \text{rad}(A)$. Puisque a est nilpotent, $\rho(a)$ l'est aussi. Le fait que A/N est semi-simple scindée donne que son seul élément nilpotent est N . Ceci indique que $a + N = \rho(a) = N$, donc $a \in N$. Ainsi, $\text{rad}(A) \subseteq N$, donc $\text{rad}(A) = N$. ■

Tout ceci montre qu'on obtient tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ en considérant toutes les sections d'algèbres du support et la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$. Une observation utile des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est qu'ils sont tous induits à partir d'un seul de ces systèmes par la proposition 1.4.1.

1.5 Familles eulériennes d'un arrangement

Pour construire les sections d'algèbres du support, on considère d'abord les sections *homogènes* du support. La construction suivante est appelée la construction de Saliola et prend son origine dans cet article: (Saliola, 2009) écrit par Franco Saliola. Elle est étendue dans les sections 11.1 à 11.3 de (Aguiar et Mahajan, 2017).

Définition 1.5.1. Soit $u : \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ une application linéaire qui soit aussi une section du support. Pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, s'il existe $a_F \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que

$$u(X) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F,$$

on dit que u est une section homogène du support.

Une section homogène du support n'est pas forcément un morphisme d'algèbres. Notons que, pour toute section homogène du support et tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, on a

$$X = s(u(X)) = \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F \right) X.$$

Ainsi, les coefficients des faces dans l'expression de $u(X)$ doivent respecter

$$\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F = 1 \tag{1.8}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. C'est à partir de ces sections que la construction de Saliola donne une famille d'idempotents orthogonaux définie comme suit par Aguiar et Mahajan dans la section 11.2 de (Aguiar et Mahajan, 2017).

Définition 1.5.2. Les *familles eulériennes* de \mathcal{A} sont les familles d'idempotents orthogonaux $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} \subseteq \Sigma[\mathcal{A}]$ de la forme

$$E_X = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F) \geq X} b_F^X F$$

où $b_F^X \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ de support au moins X tel qu'il existe $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ de support X pour lequel $b_G^X \neq 0$. On dit que E_X est un *idempotent eulerien*.

Rappelons-nous que $V \in \Lambda[\mathcal{A}]$ est le plus grand élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$. À partir d'une section homogène du support u , posons $E_V = u(V)$. C'est un idempotent (une démonstration de ceci se trouve au lemme 1.5.4). Par récurrence, on construit le reste de $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$, une famille eulerienne de \mathcal{A} , de la façon suivante :

$$E_X = u(X) - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(Y)E_Y \quad \forall X \in \Lambda[\mathcal{A}], X \neq V.$$

De plus, u est déduite de la famille $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$. En effet, il existe $b_F^X \in \mathbb{K}$ pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(F) \geq X$ pour lequel on a

$$E_X = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F) \geq X} b_F^X F$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. On prend les termes de cette somme dont les faces sont de support minimum pour déduire $u(X)$, c'est-à-dire que

$$u(X) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F) = X} b_F^X F.$$

On dit alors que u est associée à $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ et cette construction démontre qu'il y a une bijection entre les sections homogènes du support et les familles euleriennes de \mathcal{A} . Tout ceci est démontré dans (Aguiar et Mahajan, 2017) à la section 11.2. Un exemple de la construction de Saliola est fait à la page 41. Notons que la construction de Saliola ne s'appuie que sur l'existence du support, donc est généralisable à toute bande régulière à gauche. Le lemme 11.12 de la section 11.2 de (Aguiar et Mahajan, 2017) donne aussi le fait suivant: pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et un idempotent eulerien E_X , on a

$$FE_X = 0 \text{ si } s(F) \not\geq X. \quad (1.9)$$

Ce résultat est démontré dans (Aguiar et Mahajan, 2017). Les familles euleriennes de \mathcal{A} sont liées à la Q -base de $\Lambda[\mathcal{A}]$.

Proposition 1.5.1. *Soit $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} et $\{Q_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ la Q -base de $\Lambda[\mathcal{A}]$, on a que $s(E_X) = Q_X$ pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$.*

Démonstration. Soit u la section homogène du support associée à $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$. La construction de Saliola donne que $E_V = u(V)$, donc $s(E_V) = V = Q_V$ par la définition 1.2.3. Soit $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tel que $X \neq V$, supposons que $s(E_Y) = Q_Y$ pour tout $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tel que $X < Y$. L'équation (1.6) donne que

$$X - Q_X = \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} Q_Y.$$

Ainsi, par la construction de Saliola, le fait que le support est un morphisme d'algèbres et que u est une section du support, on a

$$\begin{aligned} s(E_X) &= s \left(u(X) - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(X)E_Y \right) \\ &= s(u(X)) - s(u(X)) \vee \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} s(E_Y) \\ &= X - X \vee \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} Q_Y \\ &= X - X \vee (X - Q_X) \\ &= X \vee Q_X. \end{aligned}$$

Par (1.7), on a que $s(E_X) = Q_X$. Par récurrence, on a le résultat voulu. \blacksquare

Lemme 1.5.1. *L'application linéaire $v : \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle que $v(Q_X) = E_X$ où $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ est une famille eulerienne de \mathcal{A} est une section d'algèbre du support. De plus, toutes les familles euleriennes de \mathcal{A} sont des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$, il existe $a_X, b_X \in \mathbb{K}$ pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tels que

$$\mathcal{X} = \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X Q_X \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} b_X Q_X,$$

car la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ est une base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$. Ainsi, du fait que les familles eulériennes de \mathcal{A} et la Q -base de $\Lambda[\mathcal{A}]$ sont constituées d'idempotents orthogonaux, on a

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{X})v(\mathcal{Y}) &= v\left(\sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X Q_X\right) v\left(\sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} b_X Q_X\right) \\
&= \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X E_X \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} b_X E_X \\
&= \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X b_X E_X \\
&= \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X b_X v(Q_X) \\
&= v\left(\sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X b_X Q_X\right) \\
&= v\left(\sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} a_X Q_X \vee \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} b_X Q_X\right) \\
&= v(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}).
\end{aligned}$$

De ce fait, v est un morphisme d'algèbre. La Q -base assure aussi que v est une section du support, car $s(v(Q_X)) = Q_X$ par la proposition 1.5.1. Il a été montré à la section 1.4 que $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est une algèbre élémentaire et que son quotient par son radical est $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$. Par le théorème 1.4.1, $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux. ■

Bien plus encore, tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ sont des familles eulériennes, or cette observation demande un peu plus de travail.

Lemme 1.5.2. *La conjugaison d'une famille eulérienne de \mathcal{A} par un élément inversible de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est une famille eulérienne de \mathcal{A} .*

Démonstration. Soient un élément inversible $\mathcal{N} \in \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} . Du fait qu'une famille eulerienne de \mathcal{A} est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux, sa conjugaison par \mathcal{N} le sera aussi par la proposition 1.4.1. Ainsi, $\{\mathcal{N}E_X\mathcal{N}^{-1}\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ est une famille d'idempotents orthogonaux. Puisque le support est un morphisme d'algèbre, on a

$$\begin{aligned} s(\mathcal{N}E_X\mathcal{N}^{-1}) &= s(\mathcal{N}) \vee s(E_X) \vee s(\mathcal{N}^{-1}) \\ &= s(\mathcal{N}) \vee s(\mathcal{N})^{-1} \vee s(E_X) \\ &= Q_X \end{aligned}$$

par la proposition 1.5.1. Par la définition 1.2.3, on sait que Q_X a une terme en X non nul. Il existe $c_F^X \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel qu'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}E_X\mathcal{N}^{-1} &= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} c_F^X F \\ \Rightarrow Q_X &= s(\mathcal{N}E_X\mathcal{N}^{-1}) \\ &= s\left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} c_F^X F\right) \\ &= \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}]} \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=Y} c_F^X Y. \end{aligned}$$

Ainsi, au moins un des c_F^X tel que $s(F) = X$ doit être non nul. Notons que, soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a que $s(FG) = s(F) \vee s(G)$, donc $s(F), s(G) \leq s(FG)$. De ceci découle que l'expression de $\mathcal{N}E_X\mathcal{N}^{-1}$ ne fait intervenir que des faces de support supérieur à X , car toutes les faces dans l'expression de E_X ont un support plus grand ou égal à X . ■

Théorème 1.5.1. *Les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ sont les familles euleriennes de \mathcal{A} .*

Démonstration. Le lemme 1.5.1 donne que toutes les familles euleriennes de \mathcal{A} sont des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Ainsi,

on obtient tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux par conjugaison d'une famille eulerienne de \mathcal{A} par la proposition 1.4.1. Par le lemme 1.5.2, tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux sont des familles euleriennes de \mathcal{A} . ■

Ce résultat permet aussi de définir n'importe quelle section d'algèbre du support à partir d'une section homogène du support. En effet, par le lemme 1.5.1, le théorème 1.5.1 et le théorème 1.4.1, toutes les sections d'algèbres du support $v : \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ sont les applications linéaires telles que $v(Q_X) = E_X$ pour $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} . La construction de Saliola donne que toute famille eulerienne de \mathcal{A} est induite par une unique section homogène du support. Ceci donne une bijection entre les sections homogènes du support et les sections d'algèbres du support.

Exemple. Rappelons-nous que l'arrangement \mathcal{D} a 13 faces et 3 hyperplans qui seront notées comme à la figure 1.4. Pour cet arrangement, le plus petit élément de $\Lambda[\mathcal{D}]$ est $U = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Prenons la section homogène du support u suivante:

$$\begin{aligned}
 u : \mathbb{K}\Lambda[\mathcal{D}] &\rightarrow \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{D}] \\
 U &\mapsto \mathcal{O} \\
 H_1 &\mapsto \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{2}F_5 \\
 H_2 &\mapsto 2F_4 - F_1 \\
 H_3 &\mapsto F_3 \\
 \mathbb{R}^2 &\mapsto F_7 + F_9 - F_{11}
 \end{aligned}$$

La construction de Saliola donne les idempotents euleriens suivants:

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbb{R}^2} &= F_7 + F_9 - F_{11} \\
 E_{H_1} &= \frac{1}{2}(F_2 + F_5 - F_8 - F_{10}) \\
 E_{H_2} &= 2F_4 - F_1 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12}
 \end{aligned}$$

$$E_{H_3} = F_3 - F_8$$

$$E_U = \mathcal{O} + F_1 - \frac{1}{2}F_2 - F_3 - 2F_4 - \frac{1}{2}F_5 - 3F_7 + \frac{3}{2}F_8 + 3F_9 - \frac{3}{2}F_{10} + F_{11} + F_{12}$$

Ces éléments sont des idempotents et sont orthogonaux entre-eux. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} E_{H_2}E_{H_3} &= (2F_4 - F_1 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12})(F_3 - F_8) \\ &= 2F_9 - F_7 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12} - 2F_9 + F_7 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{H_2}^2 &= (2F_4 - F_1 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12})(2F_4 - F_1 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - \\ &\quad F_{12}) \\ &= 4F_4 - 2F_4 - 8F_9 + 4F_{10} + 4F_7 - 2F_{12} - 2F_1 + F_1 + 4F_9 - 2F_{10} - 2F_7 + \\ &\quad F_{12} + F_9(2 - 1 - 1 - 4 + 2 + 2 - 1) + F_{10}(2 - 1 - 1 - 4 + 2 + 2 - 1) + \\ &\quad F_7(2 - 1 - 1 - 4 + 2 + 2 - 1) + F_{12}(2 - 1 - 1 - 4 + 2 + 2 - 1) \\ &= 2F_4 - F_1 - 4F_9 + 2F_{10} + 2F_7 - F_{12} \\ &= E_{H_2}. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la somme de ces idempotents est \mathcal{O} . Leur image par le support donne la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{D}]$. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} s(E_U) &= s(\mathcal{O} + F_1 - \frac{1}{2}F_2 - F_3 - 2F_4 - \frac{1}{2}F_5 - 3F_7 + \frac{3}{2}F_8 + 3F_9 - \frac{3}{2}F_{10} + F_{11} \\ &\quad + F_{12}) \\ &= U + H_2 - \frac{1}{2}H_1 - H_3 - 2H_2 - \frac{1}{2}H_1 - 3\mathbb{R}^2 + \frac{3}{2}\mathbb{R}^2 + 3\mathbb{R}^2 - \frac{3}{2}\mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2 \\ &\quad + \mathbb{R}^2 \\ &= U - H_1 - H_2 - H_3 + 2\mathbb{R}^2 \\ &= Q_U. \end{aligned}$$

Il a été mentionné que la construction de Saliola se généralise aux bandes régulières à gauche, mais rien n'indique que la construction de Saliola donne les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux d'une algèbre d'une bande régulière à gauche. En effet, rien n'oblige une bande régulière à gauche ou son algèbre à avoir un élément neutre pour la multiplication. Ainsi, le terme « complet » dans « système complet d'idempotents primitifs orthogonaux » n'a pas forcément de sens dans l'algèbre d'une bande régulière à gauche. Tout de même, il est démontré dans (Goulet-Ouellet, 2018) à la section 2.2.4 que les familles euleriennes sont toutes des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux au sens où ils somment à un élément neutre à droite pour la multiplication. Cependant, il est possible que la construction de Saliola ne donne pas tous ces systèmes dans ce cas.

1.5.1 Q' -base

Les familles euleriennes de \mathcal{A} donnent tous les idempotents primitifs de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.

Proposition 1.5.2. *Soit $e \in \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ un idempotent, les trois énoncés suivants sont équivalents:*

1. e est primitif.
2. Il existe un idempotent eulerien E tel que $e = E$.
3. $s(e)$ est un élément de la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$.

La démonstration complète est faite dans (Aguiar et Mahajan, 2017) au lemme 11.27 et dépend de résultats généraux sur les idempotents primitifs. Les familles euleriennes de \mathcal{A} ne sont pas des bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ contrairement à la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$, or on construit une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ à partir d'une famille eulerienne de \mathcal{A} .

Définition 1.5.3. Une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est une famille $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle qu'il existe $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} pour laquelle $Q'_F = FE_{s(F)}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Dans ce cas, on dit que $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est induite par $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$.

Franco Saliola a montré dans (Saliola, 2009) à la proposition 5.4 qu'une Q' -base est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ dans une situation plus restreinte. Ce fait est étendu à toutes les Q' -bases au lemme 11.29 de (Aguiar et Mahajan, 2017). La proposition 1.5.2 indique qu'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est constituée d'idempotents primitifs, car on a

$$s(Q'_F) = s(FE_{s(F)}) = s(F) \vee s(E_{s(F)}) = s(F) \vee Q_{s(F)} = Q_{s(F)}$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ peu importe la Q' -base $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ induite par la famille eulerienne $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ de \mathcal{A} . Ceci découle du fait que le support est un morphisme d'algèbre et (1.7). La définition 1.2.3 indique qu'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ n'est pas une Q -base, car $\Sigma[\mathcal{A}]$ n'est pas forcément un treillis, mais il sera démontré au chapitre 2 qu'elle est liée à l'algèbre d'incidence de $\Sigma[\mathcal{A}]$. Plus encore, il sera montré que les Q' -base correspondent à des fonctions cruciales de cette algèbre d'incidence dans le prochain chapitre. Le produit d'un élément d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ avec une face a une forme qui rappelle une Q -base.

Lemme 1.5.3. Soit $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$FQ'_G = \begin{cases} Q'_{FG} & \text{si } GF = G \\ 0 & \text{si } GF \neq G \end{cases}$$

pour tout Q'_G élément d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Soit $E_{s(G)}$ un idempotent eulerien qui induit Q'_G , on a $FQ'_G = FGE_{s(G)}$. Si $GF = G$, alors on a

$$s(FG) = s(F) \vee s(G) = s(G) \vee s(F) = s(GF) = s(G),$$

car le support est un morphisme d'algèbre. Ainsi, $FGE_{s(G)} = Q'_{FG}$. Si $GF \neq G$, alors $GF > G$ par (1.5), donc on a

$$s(FG) = s(F) \vee s(G) = s(G) \vee s(F) = s(GF) > s(G),$$

car le support est un morphisme d'algèbre qui préserve l'ordre. Par (1.9), $FGE_{s(G)} = 0$. ■

À partir d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on retrouve la famille eulerienne de \mathcal{A} qui l'induit de la manière suivante.

Proposition 1.5.3. *Soient $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} , u sa section homogène du support associée. Soit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ la Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ induite par $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$, on a*

$$E_X = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F Q'_F \quad \text{où} \quad u(X) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$.

Ce résultat repose sur les observations suivantes qui portent sur les sections homogènes du support et leur famille eulerienne de \mathcal{A} associée.

Lemme 1.5.4. *Soit u une section homogène du support, $u(X)^2 = u(X)$.*

Démonstration. Il existe $a_F \in \mathbb{K}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que

$$u(X) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Ainsi, par la proposition 1.3.2 et (1.8), on a

$$u(X)^2 = \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F \right) \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(G)=X} a_G G \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(G)=X} a_G FG \\
&= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(G)=X} a_G \right) F \\
&= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F \\
&= u(X)
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. ■

Lemme 1.5.5. *Soient u une section homogène du support et $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ sa famille eulérienne de \mathcal{A} associée, $u(X)E_X = E_X$ pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$.*

Démonstration. Par la construction de Saliola et le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}
u(X)E_X &= u(X) \left(u(X) - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(X)E_Y \right) \\
&= u(X) - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(X)E_Y \\
&= E_X
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. ■

Démonstration de la proposition 1.5.3. Par le lemme précédent et la définition d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F Q'_F &= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F E_{s(F)} \\
&= \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F \right) E_X \\
&= u(X)E_X
\end{aligned}$$

$$= E_X$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. ■

On dira qu'une Q' -base $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est associée à une section homogène du support u si la famille eulerienne de \mathcal{A} associée à u induit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$.

Exemple. Considérons la famille eulerienne de \mathcal{D} de l'exemple de la page 41 et la notation des faces de l'arrangement \mathcal{D} donnée à la figure 1.4. À partir de $\{E_U, E_{H_1}, E_{H_2}, E_{H_3}, E_{\mathbb{R}^2}\}$ une famille de eulerienne de \mathcal{D} , on obtient la Q' -base constituée des éléments suivants:

$$\begin{aligned} Q'_O &= \mathcal{O}E_U = E_U \\ &= \mathcal{O} + F_1 - \frac{1}{2}F_2 - F_3 - 2F_4 - \frac{1}{2}F_5 - 3F_7 + \frac{3}{2}F_8 + 3F_9 - \frac{3}{2}F_{10} + F_{11} + F_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} Q'_{F_1} = F_1 E_{H_2} = F_1 - 2F_7 + F_{12} & Q'_{F_7} = F_7 E_{\mathbb{R}^2} = F_7 \\ Q'_{F_2} = F_2 E_{H_1} = F_2 - F_8 & Q'_{F_8} = F_8 E_{\mathbb{R}^2} = F_8 \\ Q'_{F_3} = F_3 E_{H_3} = F_3 - F_8 & Q'_{F_9} = F_9 E_{\mathbb{R}^2} = F_9 \\ Q'_{F_4} = F_4 E_{H_2} = F_4 - 2F_9 + F_{10} & Q'_{F_{10}} = F_{10} E_{\mathbb{R}^2} = F_{10} \\ Q'_{F_5} = F_5 E_{H_1} = F_5 - F_{10} & Q'_{F_{11}} = F_{11} E_{\mathbb{R}^2} = F_{11} \\ Q'_{F_6} = F_6 E_{H_3} = F_6 - F_{12} & Q'_{F_{12}} = F_{12} E_{\mathbb{R}^2} = F_{12} \end{array}$$

Cette Q' -base respecte le lemme 1.5.3. Par exemple, on a $F_9 F_2 = F_9$ et $F_5 F_6 = F_{11} \neq F_5$ et donc que

$$\begin{aligned} F_2 Q'_{F_9} &= F_8 & \text{et} & & F_6 Q'_{F_5} &= F_{11} - F_{11} \\ &= Q'_{F_8} & & & &= 0. \\ &= Q'_{F_2 F_9} & & & & \end{aligned}$$

Cette Q' -base respecte aussi la proposition 1.5.3. Par exemple, on a $u(H_2) = 2F_4 - F_1$ et

$$\begin{aligned} 2Q'_{F_4} - Q'_{F_1} &= 2F_4 - 4F_9 + 2F_{10} - F_1 + 2F_7 - F_{12} \\ &= E_{H_2}. \end{aligned}$$

La proposition 1.5.3 indique que si on trouve les Q' -bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ et les sections homogènes du support associées aux familles eulériennes de \mathcal{A} , on aura trouvé les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Cette méthode semble être inutilement plus compliquée, car on sait déjà construire les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux à partir des sections homogènes du support. Cependant, c'est ici que le lien entre les familles eulériennes de \mathcal{A} et l'algèbre d'incidence de $\Sigma[\mathcal{A}]$ se trouve et c'est sur quoi portera le deuxième chapitre. La proposition suivante sera utile pour le prochain chapitre.

Lemme 1.5.6. *Soient $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulérienne de \mathcal{A} , u sa section homogène du support associée. Soit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ la Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ induite par $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$, on a*

$$\mathcal{O} = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F Q'_F \quad \text{où} \quad u(X) = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F F$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Puisque $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, il somme à \mathcal{O} . Par la proposition 1.5.3, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} E_X \\ &= \sum_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]} \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_F Q'_F \right) \\ &= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F Q'_F \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Pour finir, notons que la Q' -base se généralise naturellement à une algèbre d'une bande régulière à gauche (voir (Goulet-Ouellet, 2018), proposition 2.26).

CHAPITRE II

ALGÈBRE D'INCIDENCE DE LUNES

Le système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ est construit à l'aide de la fonction de Möbius de l'algèbre d'incidence de $\Lambda[\mathcal{A}]$, or les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ ont été construits à l'aide de la construction de Saliola au chapitre précédent. Dans ce nouveau chapitre, l'objectif est de donner la construction des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ à l'aide de l'algèbre d'incidence de $\Sigma[\mathcal{A}]$. Au lieu de la fonction de Möbius de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$, la construction des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ se fait à l'aide de certains éléments de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$: les fonctions de Möbius non commutatives et les fonctions zeta non commutatives. Ces fonctions seront étudiées à la deuxième section de ce chapitre. Afin de construire les fonctions de Möbius non commutatives et les fonctions zeta non commutatives, la notion de lune d'un arrangement d'hyperplans sera introduite. En effet, les fonctions de Möbius non commutatives et les fonctions zeta non commutatives résident dans une sous-algèbre de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$. Cette sous-algèbre est l'algèbre d'incidence de lunes qui sera présentée à la première section. Celle-ci commence par donner la notion de lune qui sera nécessaire à la construction de l'algèbre d'incidence de lunes. Une lune est un élément d'un certain quotient d'une bande régulière à gauche et c'est cette notion qui est appliquée à $\Sigma[\mathcal{A}]$ qui est une bande régulière à gauche.

2.1 Lunes

Définition 2.1.1. Une *lune* d'un arrangement d'hyperplans \mathcal{A} est définie par $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq G$ de la manière suivante:

$$\ell(F, G) = \{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FH = G, s(H) = s(G)\}.$$

L'ensemble des lunes d'un arrangement d'hyperplans \mathcal{A} sera noté $\Delta[\mathcal{A}]$. On dit que (F, G) est un couple de faces *imbriquées*.

Exemple. Pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, $\ell(F, F) = \{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F) = s(G)\}$ par la proposition 1.3.2. Géométriquement, l'union de tous les éléments de $\ell(F, F)$ est $s(F)$, car tout point d'un élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$ est dans une face dont il est le support. Ceci montre que $\Delta[\mathcal{A}]$ possède des éléments facilement identifiables aux éléments de $\Lambda[\mathcal{A}]$. Aussi, $\ell(\mathcal{O}, F) = \{F\}$, car $\mathcal{O}H = H$ pour tout $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Ainsi, $\Delta[\mathcal{A}]$ a des éléments facilement identifiables aux éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$. La figure 2.1 montre visuellement ces deux faits dans \mathcal{D} en plus de la lune $\ell(F_1, F_7)$.

Pour un couple de faces imbriquées (F, G) de \mathcal{A} , $\ell(F, G)$ est toujours non vide, car elle contient G par la proposition 1.1.2. Notons qu'une même lune peut être définie par plusieurs couples de faces imbriquées différents.

Exemple. Considérons encore \mathcal{D} . Selon les notations introduites à la figure 1.4, on a

$$\ell(F_1, F_7) = \{F_7, F_8, F_9\} = \ell(F_4, F_9).$$

La figure 2.1 montre cette lune en rouge.

Biens que les lunes soient des ensembles de faces, ils ont la notion de support qui suit.

Définition 2.1.2. Le *support* de $L \in \Delta[\mathcal{A}]$ est le plus petit élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$ contenant tous les éléments de L noté $S(L)$.

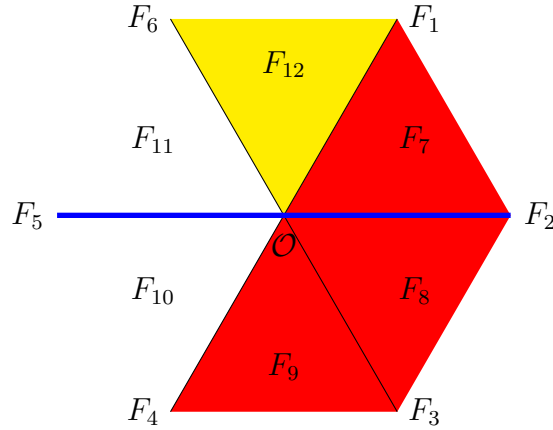


Figure 2.1 Quelques lunes de \mathcal{D} : la lune $\ell(F_1, F_7)$ est l'ensemble des faces de support \mathbb{R}^2 dans la zone en rouge. La lune $\ell(\mathcal{O}, F_{12})$ est le singleton $\{F_{12}\}$ en jaune. La lune $\ell(F_2, F_2)$ est l'ensemble des faces dont le support est l'hyperplan en bleu.

Puisque tous les éléments d'une lune ont le même support, le support d'une lune est aussi le support d'un de ses éléments. Lorsque $L \in \Delta[\mathcal{A}]$ est défini par un couple de faces imbriquées (F, G) , le support de L est donc $s(G)$, c'est-à-dire que $S(\ell(F, G)) = s(G)$. En plus, du support, une lune a la notion de *base* suivante.

Définition 2.1.3. La base de $L \in \Delta[\mathcal{A}]$ est le plus grand élément de $\Lambda[\mathcal{A}]$ étant contenu par l'union de tous les éléments de L . La base de L est notée $B(L)$.

La base d'une lune est utilisée pour choisir un représentant d'une lune parmi les couples de faces imbriquées qui la définissent.

Proposition 2.1.1. Soient $L \in \Delta[\mathcal{A}]$ et $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $s(F) = B(L)$. Il existe un unique $G \in L$ tel que $F \leq G$ et $L = \ell(F, G)$. De plus, pour $H, K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $L = \ell(H, K)$, alors $B(L) = B(\ell(H, K)) = s(H)$.

Ceci est un résultat compris dans les proposition 3.5 et proposition 3.12 de (Aguiar

et Mahajan, 2017). Il est à noter que la définition d'une lune est géométrique dans cette référence, donc la preuve de ces résultats repose sur la géométrie d'une lune dans un arrangement d'hyperplans. Tout de même, la définition 2.1.1 vient de la notion de lune combinatoire (*combinatorial lune* en anglais) donnée par Aguiar et Mahajan et ils montrent que les deux notions de lune sont équivalentes. Au chapitre 3, il sera montré que la proposition 2.1.1 s'étend aux matroïdes orientés grâce à leurs propriétés algébriques. Puisque $\Sigma[\mathcal{A}]$ est un matroïde orienté (rappelons-nous que ceci sera démontré au chapitre 3), les propriétés algébriques de $\Sigma[\mathcal{A}]$ sont suffisantes pour obtenir la proposition 2.1.1, donc ce résultat ne dépend pas nécessairement des propriétés géométriques d'un arrangement d'hyperplans.

Corollaire 2.1.1. *Soient $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ et $X, Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tels que $s(F) = X$ et $X \leq Y$. L'ensemble $\Delta[\mathcal{A}]_X^Y = \{\ell(F, G) \in \Delta[\mathcal{A}] \mid G \in \Sigma[\mathcal{A}], F \leq G, s(G) = Y\}$ est l'ensemble de toutes les lunes de base X et de support Y de \mathcal{A} .*

Démonstration. D'une part, la discussion qui suit la définition 2.1.2 et la proposition 2.1.1 assurent que toute lune de base X et de support Y s'exprime à partir d'un couple de faces imbriquées (F, G) . Ainsi, toute lune de base X et de support Y est dans $\Delta[\mathcal{A}]_X^Y$. D'autre part, tout élément de $\Delta[\mathcal{A}]_X^Y$ est de base X par la proposition 2.1.1 et de support Y par la discussion qui suit la définition 2.1.2. ■

Prenons (F, G) et (H, K) deux couples de faces imbriquées de \mathcal{A} tels que $\ell(F, G) = \ell(H, K)$. Par la définition 2.1.1, on a que $FK = G$ et $HG = K$, car $K \in \ell(F, G)$ et $G \in \ell(H, K)$. De plus, $s(F) = B(\ell(F, G)) = B(\ell(H, K)) = s(H)$ par la proposition 2.1.1. Par la proposition 1.3.2, ceci est équivalent à $(FH = F$ et $HF = H)$. Plus encore, ces conditions régissent tous les cas où deux couples de faces imbriquées définissent la même lune, c'est-à-dire que l'ensemble des faces

imbriquées sous la relation d'équivalence

$$(F, G) \sim (H, K) \Leftrightarrow FH = F, HF = H, FK = G, HG = K \quad (2.1)$$

est en bijection avec $\Delta[\mathcal{A}]$ (voir (Aguiar et Mahajan, 2017) aux sections 3.2.1 et 3.2.2). Dans un ouvrage précédent, Aguiar et Mahajan définissent une lune avec la relation (2.1) dans le contexte des bandes régulières à gauche (voir (Aguiar et Mahajan, 2006)). Ainsi, la relation (2.1) sera le point d'ancrage pour généraliser les résultats de ce chapitre aux matroïdes orientés dans le chapitre suivant. Ce faisant, le fait que (2.1) donne une bijection entre les couples de faces imbriqués de \mathcal{A} et $\Delta[\mathcal{A}]$ est démontrée dans le prochain chapitre dans un contexte plus large.

2.1.1 Algèbre d'incidence de lunes

Notons qu'une fonction de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$ est possiblement non nulle sur les couples de faces imbriquées, mais toujours nulle sur tout autre couple de faces. Considérons les fonctions $f \in I(\Sigma[\mathcal{A}])$ constante sur $\Delta[\mathcal{A}]$, c'est-à-dire que $f(F, G) = f(H, K)$ pour tous $F, G, H, K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq G, H \leq K$ et $(F, G) \sim (H, K)$ au sens de (2.1). Ces fonctions ont la particularité de pouvoir être vues comme étant de $\Delta[\mathcal{A}]$ vers \mathbb{K} . Montrons que ces fonctions forment une sous-algèbre de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$.

Proposition 2.1.2. *L'ensemble des fonctions de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$ constantes sur $\Delta[\mathcal{A}]$ est une sous-algèbre de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$.*

Démonstration. Soit $f, g \in I(\Sigma[\mathcal{A}])$ deux fonctions constantes sur $\Delta[\mathcal{A}]$ et $a \in \mathbb{K}$, il n'est pas difficile de se rendre compte que $af + g$ est constante sur $\Delta[\mathcal{A}]$. Il reste à montrer que fg est constante sur $\Delta[\mathcal{A}]$, or ceci nécessite les observations suivantes sur les couples de faces imbriquées. Notons que pour deux couples de faces imbriquées (F, G) et (H, K) équivalents au sens de (2.1) et $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F \leq E \leq G$, on a que $(F, E) \sim (H, HE)$, car $FHE = FE = E$ par la proposition

1.1.2 et (2.1). De plus, $(E, G) \sim (HE, K)$, car on a ce qui suit:

$$\begin{aligned}
EHE &= EH \quad \text{par (1.4)} \\
&= EFH \quad \text{par (1.3) et } F \leq E \\
&= EF \quad \text{par } FH = H \text{ du fait que } (F, G) \sim (H, K) \\
&= E \quad \text{par (1.3) et } F \leq E, \\
HEE &= HE \quad \text{par (1.2),} \\
EK &= EFK \quad \text{par et (1.3) et } F \leq E \\
&= EG \quad \text{par } FK = G \text{ du fait que } (F, G) \sim (H, K) \\
&= G \quad \text{par la proposition 1.1.2 et } E \leq G, \\
HEG &= HG \quad \text{par la proposition 1.1.2 et } E \leq G \\
&= K \quad \text{par } HG = K \text{ du fait que } (F, G) \sim (H, K).
\end{aligned}$$

Additionnellement, soient $[F, G], [H, K] \subseteq \Sigma[\mathcal{A}]$ les intervalles allant de F à G et H à K respectivement, le produit à gauche par H donne une fonction de $[F, G]$ vers $[H, K]$. En effet, on a que $E \in [F, G]$ et $H \leq HE$ par (1.5). De plus, $HG = K$ du fait que $(F, G) \sim (H, K)$ et $EK = G$ par les calculs ci-haut, donc $HEK = HG = K$. Par la proposition 1.1.2, ceci implique que $HE \leq K$. Symétriquement, en échangeant F et H de places et G et K de places, on a que la multiplication à gauche par F donne une fonction de $[H, K]$ vers $[F, G]$. Soit $D \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $H \leq D \leq K$, remarquons que

$$HFD = HD = D \quad \text{et} \quad FHE = FE = E$$

par le fait que $FH = F$, $HF = F$ et la proposition 1.1.2. Ainsi, la multiplication à gauche par H est une bijection de $[F, G]$ vers $[H, K]$. Sachant tout ceci, on a le résultat suivant:

$$(fg)(F, G) = \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq E \leq G} f(F, E)g(E, G)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq E \leq G} f(H, HE)g(HE, K) \\
&= \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D \leq K} f(H, D)g(D, K) \\
&= (fg)(H, K). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 2.1.4. L'algèbre d'incidence de lunes de \mathcal{A} , notée $I_L(\mathcal{A})$ est la sous-algèbre de $I(\Sigma[\mathcal{A}])$ constituée des éléments constants sur $\Delta[\mathcal{A}]$.

Une fonction d'incidence f de $\Sigma[\mathcal{A}]$ constante sur $\Delta[\mathcal{A}]$ a une valeur par lune de \mathcal{A} qui est $f(F, G)$ pour la lune $\ell(F, G)$. Par abus de langage, pour $L = \ell(F, G)$, on notera cette valeur $f(L)$ comme si f était une fonction de $\Delta[\mathcal{A}]$ vers \mathbb{K} .

Remarque. L'algèbre d'incidence de lunes de \mathcal{A} n'est pas l'algèbre d'incidence de $\Delta[\mathcal{A}]$. En effet, ceci n'a pas de sens sans une relation d'ordre partielle sur $\Delta[\mathcal{A}]$. Cependant, $\Delta[\mathcal{A}]$ est l'ensemble des morphismes de la catégorie des lunes de \mathcal{A} définie dans (Aguiar et Mahajan, 2017) à la section 4.4. Les objets de cette catégorie sont les intersections d'hyperplans de \mathcal{A} . Les morphismes allant de $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ vers $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ sont les lunes de base X et de support Y . L'algèbre de cette catégorie est l'algèbre d'incidence de lunes. Ce résultat est mentionné dans la section 15.2.5 de (Aguiar et Mahajan, 2017) avec plus de détails.

Exemple. Considérons l'arrangement \mathcal{D} de la figure 1.4. La fonction $f \in I(\Sigma[\mathcal{D}])$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) décrite par la matrice de la figure 2.2 est dans $I_L(\mathcal{D})$. En effet, \mathcal{D} a 23 lunes: la face centrale constitue la lune $\{\mathcal{O}\} = \ell(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ et reçoit la valeur 1 par f . Les 12 autres faces constituent chacune une lune de la forme $\{F_j\} = \ell(\mathcal{O}, F_j)$ où $j \in \{1, 2, \dots, 12\}$ et reçoivent les valeurs de 2 à 13 par f . Six autres lunes sont de la forme $\ell(F_n, F_m)$ où $n \in \{1, \dots, 6\}$, $m \in \{7, \dots, 12\}$ et $F_n \leq F_m$. Un exemple des ces lunes est $\ell(F_1, F_7)$ (voir figure 2.1). Elles sont toutes constituées de trois faces adjacentes parmi F_7, F_8, \dots, F_{12} et reçoivent les valeurs de 14 à 19 par f . Chaque

lune de la forme $\ell(F_n, F_n)$ est constituée des deux demi-droites d'un hyperplan de \mathcal{D} c'est-à-dire les deux faces de support $s(F_n)$. Ces lunes reçoivent les valeurs de 20 à 22 par f . L'ensemble $\{F_7, F_8, \dots, F_{12}\}$ est la lune $\ell(F_m, F_m)$ et reçoit la valeur 23 par f .

\mathcal{O}	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	
\mathcal{O}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_1	0	20	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	15
F_2	0	0	21	0	0	0	0	16	17	0	0	0	0
F_3	0	0	0	22	0	0	0	0	18	19	0	0	0
F_4	0	0	0	0	20	0	0	0	0	14	15	0	0
F_5	0	0	0	0	0	21	0	0	0	0	17	16	0
F_6	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	19	18
F_7	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0	0	0	0
F_8	0	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0	0	0
F_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0	0
F_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0
F_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	0
F_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23

Figure 2.2 Une fonction d'incidence pour $\Sigma[\mathcal{D}]$ constante sur $\Delta[\mathcal{D}]$: Cette matrice définit une fonction d'incidence f pour $\Sigma[\mathcal{D}]$ constante sur $\Delta[\mathcal{D}]$.

2.2 Construction de Q' -bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$

Considérons l'application suivante:

$$\begin{array}{ccc} \phi: I_L(\mathcal{A}) & \rightarrow & I(\Lambda[\mathcal{A}]) \quad \text{telle que} \quad g(X, Y) = \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y} f(L) \\ f & \mapsto & g \end{array}$$

pour tous $X, Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tels que $X \leq Y$. Cette application est surjective. En effet, pour tous $X, Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ tel que $X \leq Y$, le corollaire 2.1.1 et la surjectivité du support garantissent qu'il existe $L_{(X,Y)} \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y$. Soit $g \in I(\Lambda[\mathcal{A}])$, la fonction $g' \in I_L(\mathcal{A})$ telle que $g'(L_{(X,Y)}) = g(X, Y)$ et qui est nulle pour toutes les autres lunes de $\Delta[\mathcal{A}]_X^Y$ est une pré-image de g par ϕ . La proposition 15.5 de (Aguiar et Mahajan, 2017) montre que ϕ est même un morphisme d'algèbres. Aussi, soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(F) = X$ et $f \in I_L(\mathcal{A})$, par le corollaire 2.1.1, on a que

$$s \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G, s(G)=Y} f(F, G)G \right) = \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y} f(L)Y = \phi(f)(X, Y)Y.$$

Sachant ceci, notons que pour $\mu' \in I_L(\mathcal{A})$ tel que $\phi(\mu') = \mu$ où μ est la fonction de Möbius de $\Lambda[\mathcal{A}]$, on a que

$$\begin{aligned} s \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G} \mu'(F, G)G \right) &= \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X \leq Y} \left(\sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y} \mu'(L) \right) Y \\ &= \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X \leq Y} \phi(\mu')(X, Y)Y \\ &= \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X \leq Y} \mu(X, Y)Y \\ &= Q_X \end{aligned}$$

où Q_X est l'élément de la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ indexé par X . En prenant une face de support X pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et une pré-image μ' de μ par ϕ , on obtient une pré-image de la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ par le support. Bien entendu, rien n'assure que cette pré-image de la Q -base soit un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. La proposition 1.5.2 nous permet seulement de conclure que c'est une famille d'idempotents primitifs. Cependant, nous étudierons les cas où

$$\left\{ \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G} \mu'(F, G)G \right\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$$

est une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Ainsi, par ϕ , on pourra relever la fonction de Möbius de $\Lambda[\mathcal{A}]$ pour construire une base d'idempotents primitifs de $\Sigma[\mathcal{A}]$.

2.2.1 Fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives

Pour faire le pont entre les fonctions de Möbius et zeta de $\Lambda[\mathcal{A}]$ et une base d'idempotents primitifs de $\Sigma[\mathcal{A}]$, on passe par les *fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives*.

Définition 2.2.1. Une fonction zeta non commutative $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ est de la forme

$$\zeta_{nc}(E, E) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta_{nc}(H, G) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G, s(K)=s(G)} \zeta_{nc}(F, K)$$

pour tous $F, G, H, E \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq H \leq G$.

Rappelons-nous qu'une lune de \mathcal{A} est un ensemble de faces de \mathcal{A} . Notons que les K dans la somme ci-haut sont toutes les faces de la lune $\ell(H, G)$ plus grands ou égales à F . Si $F = \mathcal{O}$, alors la somme est sur toutes les faces de $\ell(H, G)$.

Définition 2.2.2. Une fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ est de la forme

$$\mu_{nc}(E, E) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G} \mu_{nc}(F, K) = 0$$

pour tous $F, G, H, E \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F < H \leq G$.

Ici la sommation n'est pas seulement sur les éléments de la lune $\ell(H, G)$ plus grands ou égaux à F , mais aussi sur certains éléments qui leur sont plus petits.

Exemple. Considérons l'arrangement \mathcal{D} illustré à la figure 1.4. Pour toute fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{D})$, on a

$$\mu_{nc}(\mathcal{O}, F_2) + \mu_{nc}(\mathcal{O}, F_3) + \mu_{nc}(\mathcal{O}, F_7) + \mu_{nc}(\mathcal{O}, F_8) + \mu_{nc}(\mathcal{O}, F_9) = 0.$$

Les éléments de toutes les lunes impliqués dans cette somme sont contenus dans les éléments de la lune $\ell(F_1, F_7) = \{F_7, F_8, F_9\}$. Pour toute fonction zeta non commutative $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{D})$, on a

$$\zeta_{nc}(F_1, F_7) = \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F_7) + \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F_8) + \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F_9)$$

Ces deux faits sont montrés visuellement à la figure 2.3 et se déduisent des définitions 2.2.1 et 2.2.2 en remplaçant H par F_1 et G par F_7 au sein de ces définitions.

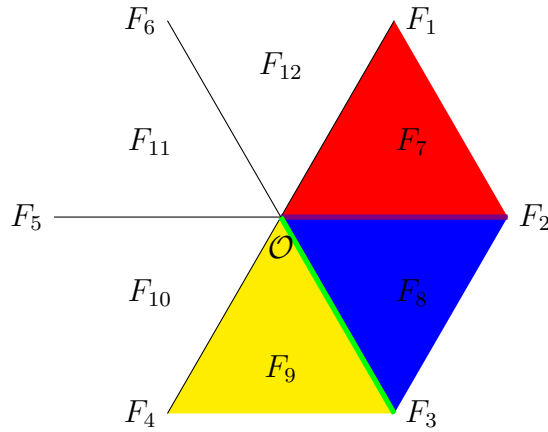


Figure 2.3 Les valeurs de fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{D})$: $\zeta_{nc}(F_1, F_7)$ est la somme des valeurs attribuées par ζ_{nc} aux lunes en rouge, bleu et jaune. La somme des valeurs attribuées par μ_{nc} aux lunes en rouge, violet, bleu, vert et jaune est 0.

Théorème 2.2.1. *Pour toute fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ et zeta non commutative $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$, on a*

$$\phi(\mu_{nc}) = \mu \quad \text{et} \quad \phi(\zeta_{nc}) = \zeta$$

où μ et ζ sont les fonctions de Möbius et zeta de $I(\Lambda[\mathcal{A}])$ respectivement.

Démonstration. Soient $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $s(F) = X$. Soit $L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^X$, par la proposition 2.1.1, il existe un unique $F' \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F \leq F'$, $s(F') = X$ et $L = \ell(F, F')$. Puisque $s(F') = s(F)$, par la proposition 1.3.2, on a que $FF' = F$, donc $F' = F$ par la proposition 1.1.2. Ainsi, le corollaire 2.1.1 assure qu'on a

$$\begin{aligned}\phi(\zeta_{nc})(X, X) &= \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^X} \zeta_{nc}(L) = \zeta_{nc}(F, F) = 1, \\ \phi(\mu_{nc})(X, X) &= \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^X} \mu_{nc}(L) = \mu_{nc}(F, F) = 1.\end{aligned}$$

Considérons les cas où $X < V$. Soient $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et $G' \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $X < Y$, $s(G') = Y$. Soit $G = FG'$, $F \leq G$ par (1.5) et on a

$$s(G) = s(FG') = s(F) \vee s(G') = X \vee Y = Y,$$

car le support est un morphisme d'algèbres. De plus, $F \neq G$, sinon on aurait $X = Y$ en prenant le support de F et G . Par le corollaire 2.1.1, chaque lune de base X et de support Y peut être exprimée de manière unique par $\ell(F, K)$ où $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F \leq K$ et $s(K) = Y$. Par la proposition 1.3.2, $GK = G$, car $s(K) = s(G)$. Pour ζ_{nc} , on a

$$\begin{aligned}\phi(\zeta_{nc})(X, Y) &= \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y} \zeta_{nc}(L) \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, GK=G, s(K)=s(G)} \zeta_{nc}(F, K) \\ &= \zeta_{nc}(G, G) = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi(\zeta_{nc}) = \zeta$. Dans le cas de μ_{nc} , on obtient plutôt

$$\begin{aligned}\phi(\mu_{nc})(X, Y) &= \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Y} \mu_{nc}(L) \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, s(K)=s(G)} \mu_{nc}(F, K)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq D, s(D) \leq s(G)} \mu_{nc}(F, D) \\
&\quad - \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq E, s(E) < s(G)} \mu_{nc}(F, E).
\end{aligned}$$

Montrons que la somme en D est nulle. Soit $C \in \Sigma[\mathcal{A}]$, si $GC = G$, alors $s(C) \leq s(G)$ par la proposition 1.3.2. Aussi, si $s(C) \leq s(G)$, on a que

$$s(GC) = s(G) \vee s(C) = s(G).$$

Par la proposition 1.3.2, on a que $GGC = G$, donc $GC = G$ par (1.2). Ainsi, on a que

$$\sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq D, s(D) \leq s(G)} \mu_{nc}(F, D) = \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq D, GD=G} \mu_{nc}(F, D) = 0.$$

Dans la somme en E de $\phi(\mu_{nc})(X, Y)$, $s(F) \leq s(E)$, car le support préserve l'ordre, donc $X \leq s(E) < Y$. En groupant les valeurs de μ_{nc} pour les lunes de même support et à l'aide du corollaire 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\phi(\mu_{nc})(X, Y) &= - \sum_{X \leq Z < Y} \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq E, s(E)=Z} \mu_{nc}(F, E) \\
&= - \sum_{X \leq Z < Y} \sum_{L \in \Delta[\mathcal{A}]_X^Z} \mu_{nc}(L) \\
&= - \sum_{X \leq Z < Y} \phi(\mu_{nc})(X, Z).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi(\mu_{nc})$ suit la même construction récursive que μ . Plus tôt, on a montré que $\phi(\mu_{nc})(X, X) = \mu(X, X)$ pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Par récurrence, $\phi(\mu_{nc}) = \mu$. \blacksquare

Cependant, ce ne sont pas toutes les pré-images de μ et ζ de $I(\Lambda[\mathcal{A}])$ par ϕ qui soient des fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives respectivement.

Exemple. La figure 2.4 donne la fonction $\alpha \in I_L(\mathcal{D})$ sous forme matricielle pour laquelle $\phi(\alpha) = \zeta$. En effet, α a la même « forme » que la fonction f décrite à la figure 2.2 et ceci indique que α est belle et bien constante sur $\Delta[\mathcal{D}]$. Considérons les éléments de $\Lambda[\mathcal{D}]$ donnés à la figure 1.6 et la notation pour les éléments de $\Sigma[\mathcal{D}]$ donnée à la figure 1.4. Soit U l'élément minimal de $\Lambda[\mathcal{D}]$, on a

$$\phi(\alpha)(U, U) = \alpha(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = 1,$$

$$\phi(\alpha)(U, H_1) = \alpha(\mathcal{O}, F_2) + \alpha(\mathcal{O}, F_5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(U, H_2) = \alpha(\mathcal{O}, F_1) + \alpha(\mathcal{O}, F_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(U, H_3) = \alpha(\mathcal{O}, F_3) + \alpha(\mathcal{O}, F_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(U, \mathbb{R}^2) = \sum_{i=7}^{12} \alpha(\mathcal{O}, F_i) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_1, H_1) = \alpha(F_2, F_2) = \alpha(F_5, F_5) = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_1, \mathbb{R}^2) = \alpha(F_2, F_7) + \alpha(F_2, F_8) = \alpha(F_5, F_{10}) + \alpha(F_5, F_{11}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_2, H_2) = \alpha(F_1, F_4) = \alpha(F_1, F_4) = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_2, \mathbb{R}^2) = \alpha(F_1, F_7) + \alpha(F_1, F_{12}) = \alpha(F_4, F_9) + \alpha(F_4, F_{10}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_3, H_3) = \alpha(F_3, F_3) = \alpha(F_6, F_6) = 1,$$

$$\phi(\alpha)(H_3, \mathbb{R}^2) = \alpha(F_3, F_8) + \alpha(F_3, F_9) = \alpha(F_6, F_{11}) + \alpha(F_6, F_{12}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\phi(\alpha)(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \alpha(F_i, F_i) = 1, \quad \forall i \in \{7, \dots, 12\}.$$

La fonction α n'est pas une fonction zeta non commutative:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \Sigma[A] \mid \mathcal{O} \leq K, F_1 K = F_7, s(K) = s(F_7)} \alpha(\mathcal{O}, K) &= \alpha(\mathcal{O}, F_7) + \alpha(\mathcal{O}, F_8) + \alpha(\mathcal{O}, F_9) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4} \\ &\neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \alpha(F_1, F_7)$$

Si on avait plutôt $\alpha(\mathcal{O}, F_i) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \{7, 8, \dots, 12\}$, α serait alors une fonction zeta non commutative.

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{O} \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad F_{11} \quad F_{12} \\
 \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Figure 2.4 Forme matricielle de $\alpha \in I_L(\mathcal{D})$

La définition 1.2.3 et l'équation (1.6) permettent les deux équations suivantes liant les éléments de la Q -base de $\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$ et les éléments de $\Lambda[\mathcal{A}]$ qui forment aussi une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Soit $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, μ la fonction de Möbius de $\Lambda[\mathcal{A}]$ et ζ la fonction zeta de $\Lambda[\mathcal{A}]$, on a

$$Q_X = \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X \leq Y} \mu(X, Y) Y \quad \text{et} \quad X = \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X \leq Y} \zeta(X, Y) Q_Y.$$

Les fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{A})$ lient une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ avec les éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$ de manière analogue. Ceci est exploré dans le reste de ce chapitre. À cette fin, les trois prochaines sous-sections présentent les liens entre les fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives et certaines bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. La première considère le lien qu'une fonction zeta non commutative donne entre une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ et l'ensemble $\Sigma[\mathcal{A}]$. La deuxième considère les bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ construites à partir d'une fonction de Möbius non commutative. La troisième étudie les couples de bases qui interagissent comme $\Sigma[\mathcal{A}]$ avec une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ au sens du lemme 1.5.3.

2.2.2 Fonctions zeta non commutatives et sections homogènes du support

Le lien entre une fonction zeta non commutative et une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est tiré de l'équivalence entre les sections homogènes du support et les fonctions zeta non commutatives.

Lemme 2.2.1. *1. Soit u une section homogène du support. Pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, il existe $a_K \in \mathbb{K}$ pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que*

$$u(X) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} a_K K.$$

La fonction $\zeta' \in I(\Sigma[\mathcal{A}])$ telle que

$$\zeta'(F, G) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FK=G, s(K)=s(G)} a_K$$

pour tout $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq G$ est une fonction zeta non commutative.

2. Soit $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative, l'application linéaire

$u' : \Lambda[\mathcal{A}] \rightarrow \Sigma[\mathcal{A}]$ telle que

$$u'(X) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K)K$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, où \mathcal{O} est la face centrale, est une section homogène du support.

3. On a $\zeta_{nc} = \zeta'$ si et seulement si $u = u'$. Dans ce cas, on dira que ζ_{nc} et u sont associées.

Démonstration. 1. Soient $F_1, G_1, F_2, G_2 \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F_1 \leq G_1$, $F_2 \leq G_2$ et $(F_1, G_1) \sim (F_2, G_2)$. Puisque $\ell(F_1, G_1) = \ell(F_2, G_2)$, par la définition 2.1.1, on a

$$\begin{aligned} \zeta'(F_1, G_1) &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F_1 K = G_1, s(K)=s(G_1)} a_K \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid K \in \ell(F_1, G_1)} a_K \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid K \in \ell(F_2, G_2)} a_K \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F_2 K = G_2, s(K)=s(G_2)} a_K \\ &= \zeta'(F_2, G_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\zeta' \in I_L(\mathcal{A})$. Aussi, soient $F, H, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq H \leq G$, par (1.8) et la proposition 1.3.2, on a

$$\zeta'(F, F) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FK=F, s(K)=s(F)} a_K = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=s(F)} a_K = 1.$$

De plus, par (1.3) on a

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G, s(K)=s(G)} \zeta'(F, K) \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G, s(K)=s(G)} \left(\sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FE=K, s(E)=s(K)} a_E \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid HFE=G, s(E)=s(G)} a_E \\
&= \sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid HE=G, s(E)=s(G)} a_E \\
&= \zeta'(H, G).
\end{aligned}$$

Ces faits indiquent que ζ' est une fonction zeta non commutative.

2. Soit $F_X \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(F_X) = X$. Par la proposition 1.3.2 et la définition 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
s(u'(X)) &= s \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K)K \right) \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=s(F_X)} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K)s(K) \\
&= \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid \mathcal{O} \leq K, F_X K = F_X, s(K)=s(F_X)} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K) \right) X \\
&= \zeta_{nc}(F_X, F_X)X \\
&= X
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Par linéarité, u' est une section du support. De plus, $u'(X)$ est une combinaison linéaire de faces de support X pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Ainsi, u' est une section homogène du support.

3. Supposons que $\zeta_{nc} = \zeta'$, on a

$$\begin{aligned}
u'(X) &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} \zeta'(\mathcal{O}, K)K \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} \left(\sum_{E \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid \mathcal{O}E=K, s(E)=s(K)} a_E \right) K \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} a_K K \\
&= u(X)
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, donc $u = u'$. Maintenant, supposons que $u = u'$, donc que $a_K = \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K)$ pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Par la définition 2.2.1, on a

$$\zeta'(F, G) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid \mathcal{O} \leq K, FK=G, s(K)=s(G)} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, K) = \zeta_{nc}(F, G)$$

pour tous $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq G$, donc $\zeta_{nc} = \zeta'$. \blacksquare

Puisqu'il correspond une seule Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ à chaque section homogène du support, on arrive au résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *Soient u une section homogène du support et $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ la Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ qui lui est associée. Considérons $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ la fonction zeta non commutative associée à u , on a*

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) Q'_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Dans ce cas, on dit que $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est associée à ζ_{nc} .

Démonstration. Considérons $a_K \in \mathbb{K}$ pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que

$$u(X) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} a_K K$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Soient $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ et $\mathcal{O} \in \Sigma[\mathcal{A}]$ la face centrale, par les lemmes 1.5.3 et 1.5.6, on a

$$\begin{aligned} F &= F\mathcal{O} \\ &= F \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_H Q'_H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid HF=H} a_H Q'_{FH} \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]} \left(\sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid HF=H, FH=K} a_H \right) Q'_K. \end{aligned}$$

Montrons que la somme en H est $\zeta_{nc}(F, K)$. Soit $C, D \in \Sigma[\mathcal{A}]$, si $CF = C$ et $FC = D$, le fait que le support est une morphisme d'algèbres qui préserve l'ordre indique que

$$s(C) = s(CF) = s(C) \vee s(F) = s(FC) = s(D).$$

Maintenant, si $s(C) = s(D)$ et $FC = D$, alors on a

$$s(F) \leq s(F) \vee s(C) = s(FC) = s(D) = s(C).$$

Par la proposition 1.3.2, on a que $CF = C$. Ainsi, par le lemme 2.2.1, on a

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]} \left(\sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FH=K, s(H)=s(K)} a_D \right) Q'_K = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) Q'_K.$$

En effet, si $FH = K$, alors $F \leq K$ par (1.5). Si $F \leq K$, alors $FK = K$ par la proposition 1.1.2, donc la somme entre parenthèses a au moins un terme. ■

Nous avons donc qu'il correspond une unique fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ à chaque Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ et vice-versa.

2.2.3 Bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ associées à une fonction de Möbius non commutative

Avec une fonction de Möbius, on construit une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ dont le produit de ses éléments avec les éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$ suis la même règle que le produit mentionné au lemme 1.5.3, c'est-à-dire le produit des éléments de $\Sigma[\mathcal{A}]$ avec les éléments d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.

Lemme 2.2.2. *Soit $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative, l'ensemble $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]} \subset \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ tel que*

$$R_G = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K) K$$

est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. On dit que la base $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est associée à μ_{nc} .

En fait, la base associée à une fonction de Möbius non commutative est une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Ceci sera montré à la section 2.2.5.

Lemme 2.2.3. *Soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $GF = G$, $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ l'ensemble des faces plus grandes ou égales à G et $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$ l'ensemble des faces plus grandes ou égales à FG . La multiplication à gauche par FG est une bijection de $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ vers $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$.*

La preuve de ces deux résultats est donnée dans l'appendice A.

Lemme 2.2.4. *Soit $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative, les éléments de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ la base associée à μ_{nc} , on a*

$$FR_G = \begin{cases} R_{FG} & \text{si } GF = G \\ 0 & \text{si } GF \neq G \end{cases}$$

pour tous $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Dans le cas où $GF = G$, par (1.2), on a $GFG = G$ et $FGG = FG$. Aussi, notons que, pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $G \leq K$, par (1.2) et la proposition 1.1.2, on a

$$GFGK = GGK = GK = K.$$

Tout ceci donne que $(G, K) \sim (FG, FGK)$. Puisque μ_{nc} est constante sur $\Delta[\mathcal{A}]$, par la proposition 1.1.2, on a

$$FR_G = F \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(FG, FGK)FGK.$$

Par le lemme 2.2.3, on a

$$FR_G = \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid FG \leq D} \mu_{nc}(FG, D)D = R_{FG}.$$

Dans le cas où $GF \neq G$, on a $GF > G$ par (1.5), donc

$$\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K, GFK=C} \mu_{nc}(G, K) = 0$$

pour tout $C \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $GF \leq C$ par la définition 2.2.2. Notons que FG et GF ont le même support, car le support est un morphisme d'algèbres, donc $(FG)(GF) = FG$ par la proposition 1.3.2. Par la proposition 1.1.2, on a

$$\begin{aligned} FR_G &= F \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K \\ &= FG \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K \\ &= (FG)(GF) \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K \\ &= FG \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)GFK \\ &= FG \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}]} \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K, GFK=H} \mu_{nc}(G, K) \right) H \\ &= FG \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}]} (0)H \\ &= 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Sachant tout ceci, on n'a pas encore que

$$\left\{ \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G} \mu_{nc}(F, G)G \right\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$$

soit une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ pour toute fonction de Möbius non commutative μ_{nc} .

2.2.4 Construction de fonctions de Möbius et zeta à partir de bases

Considérons deux bases $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telles que

$$A_F A_G = A_{FG} \quad \text{et} \quad A_F B_G = \begin{cases} B_{FG} & \text{si } GF = G \\ 0 & \text{si } GF \neq G \end{cases} \quad (2.2)$$

pour tout $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Exemple. Soit $\{R_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une base associée à une fonction de Möbius non commutative. On a que $A_F = F$ et $B_F = R_F$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ respecte (2.2) par les lemmes 2.2.2 et 2.2.4. Soit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. On a que $A_F = F$ et $B_F = Q'_F$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ respecte aussi (2.2) par le lemme 1.5.3.

Notons que A_F a une expression dans la base $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et B_F a une expression dans la base $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$. Ce qui est remarquable est que ces expressions sont données par des fonctions d'incidences de $\Sigma[\mathcal{A}]$ constantes sur $\Delta[\mathcal{A}]$ sous deux conditions qui seront définies dans le texte qui suit. En effet, soit $a_F^K, b_F^K \in \mathbb{K}$ pour tout $F, K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que

$$A_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]} b_F^K B_K \quad \text{et} \quad B_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]} a_F^K A_K.$$

Si $a_F^K = b_F^K = 0$ lorsque $F \not\leq K$, l'expression de A_F ne comporte que des éléments de $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ indexés par des faces supérieures ou égales à F . Pareillement, l'expression de B_F ne comporte que des éléments de $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ indexés par des faces supérieures ou égales à F . Dans ce cas, considérons $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $s(H) = s(F)$. Les équations de (2.2) et la proposition 1.3.2 permettent les faits suivants:

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} b_H^D B_D &= A_H & \text{et} & & \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} a_H^D A_D &= B_H \\ &= A_{HF} & & & &= B_{HF} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_H A_F &= A_H B_F \\
&= A_H \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} b_F^K B_K &= A_H \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} a_F^K A_K \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, KH=K} b_F^K B_{HK} &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} a_F^K A_{HK}.
\end{aligned}$$

Dans la somme de gauche, on a $F \leq K$, donc $s(F) \leq s(K)$, car le support préserve l'ordre. La proposition 1.3.2 donne donc que $KH = K$, donc cette condition est superflue. Par la proposition 1.3.2, on a aussi que $FH = F$ et $HF = H$. Soit $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq C}$ l'ensemble des faces supérieures ou égales à $C \in \Sigma[\mathcal{A}]$, le lemme 2.2.3 indique que $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq H}$ et $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq F}$ sont en bijection par multiplication à gauche par H . Ainsi, pour $D \in \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq H}$ il existe un unique $K_D \in \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq F}$ tel que $HK_D = D$. Ceci indique que

$$FD = FHK_D = FK_D = K_D$$

par les propositions 1.1.2 et 1.3.2, donc $(F, K_D) \sim (H, D)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} b_H^D B_D &= \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} b_F^{K_D} B_D, \\
\sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} a_H^D A_D &= \sum_{D \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq D} a_F^{K_D} A_D.
\end{aligned}$$

Puisque $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ sont des bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on a $a_H^D = a_F^{K_D}$ et $b_H^D = b_F^{K_D}$. Puisque F et H sont deux faces arbitraires de $\Sigma[\mathcal{A}]$ de même support, on a que $a_F^K = a_H^D$ et $b_F^K = b_H^D$ pour tous $K, D \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq K$, $H \leq D$ et $(F, K) \sim (H, D)$. Ainsi, soient $f, g \in I(\Sigma[\mathcal{A}])$ tels que $f(F, K) = a_F^K$ et $g(F, K) = b_F^K$, les fonctions f et g sont constantes sur $\Delta[\mathcal{A}]$, c'est-à-dire que $f, g \in I_L(\mathcal{A})$. Les deux lemmes suivants donnent les cas particuliers où f et g sont des fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives respectivement.

Lemme 2.2.5. *Soit $\zeta' \in I_L(\mathcal{A})$ telle que $\zeta'(E, E) = 1$ pour tout $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$. La fonction ζ' est une fonction zeta non commutative s'il existe des bases $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$*

et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ respectant (2.2) pour lesquels on a

$$A_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta'(F, K) B_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Lemme 2.2.6. Soit $\mu' \in I_L(\mathcal{A})$ telle que $\mu'(E, E) = 1$ pour tout $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$. La fonction μ' est une fonction de Möbius non commutative s'il existe des bases $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ respectant (2.2) pour lesquels on a

$$B_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu'(F, K) A_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Les lemmes 2.2.5 et 2.2.6 sont démontrés dans l'appendice A et donnent qu'il existe $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative et $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative tels que

$$\begin{aligned} A_F &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) B_K \\ B_F &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) A_K \end{aligned}$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ sous deux conditions:

1. B_F et A_F apparaissent avec un coefficient 1 dans l'expression de A_F et B_F respectivement. Ceci est déduit du fait qu'on suppose que $\mu_{nc}(E, E) = \zeta_{nc}(E, E) = 1$ pour tout $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$ aux lemmes 2.2.5 et 2.2.6.
2. Les expressions de B_F et A_F ne comportent que les éléments de $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ indexés par des faces plus grandes ou égales à F respectivement.

Remarque. Il est montré à la section 11.5.5 de (Aguiar et Mahajan, 2017) que les Q' -bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ sont les bases $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ de la forme

$$B_F = F + \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F < K} b_K^F K$$

où $b_K^F \in \mathbb{K}$ pour tous $F, K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F < K$ et qui respectent l'équation suivante pour tout $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$:

$$FB_G = \begin{cases} B_{FG} & \text{si } GF = G \\ 0 & \text{si } GF \neq G \end{cases}.$$

Lemme 2.2.7. *Soit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, il existe $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative telle que*

$$Q'_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Il existe $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ une famille eulerienne de \mathcal{A} telle que $Q'_F = FE_{s(F)}$ pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Soit $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$, par la définition 1.5.2, on sait que l'expression de E_X ne comporte que des faces de support au moins X . Soit u la section homogène du support associée à $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$, la construction de Saliola assure qu'on a

$$E_X = u(X) - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(X) E_Y.$$

Par la définition 1.5.1, on sait que les faces apparaissant dans l'expression de $u(X)$ sont toutes de support X . Soient $G, H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $s(G) < s(H)$, on a

$$s(G) < s(G) \vee s(H) = s(GH),$$

car le support est un morphisme d'algèbres. Ainsi, on a que les faces apparaissant dans

$$\sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid X < Y} u(X) E_Y$$

sont toutes de support supérieur à X . Soit $a_K \in \mathbb{K}$ pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que

$$u(X) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=X} a_K K,$$

par la proposition 1.3.2 et (1.8), on a

$$\begin{aligned} Q'_F &= F E_{s(F)} \\ &= F \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=s(F)} a_K K - \sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid s(F) < Y} u(s(F)) E_Y \right) \\ &= \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(K)=s(F)} a_K \right) F - F \left(\sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid s(F) < Y} u(s(F)) E_Y \right) \\ &= F - F \left(\sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid s(F) < Y} u(s(F)) E_Y \right) \end{aligned}$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Puisque toutes les faces apparaissant dans la somme

$$F \left(\sum_{Y \in \Lambda[\mathcal{A}] \mid s(F) < Y} u(s(F)) E_Y \right)$$

sont de support supérieur à $s(F)$, aucune de ces faces n'est F , donc F apparaît dans l'expression de Q'_F avec un coefficient 1. Aussi, ceci montre que l'expression de Q'_F ne comporte que des faces supérieures ou égales à F . Ainsi, le lemme 2.2.6 donne le résultat voulu. \blacksquare

Lemme 2.2.8. *Soit $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ la base associée à une fonction de Möbius non commutative, il existe $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative telle que*

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) R_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, supposons que F soit maximal dans $\Sigma[\mathcal{A}]$, on a que $R_F = F$. Maintenant, supposons que F ne soit pas maximal dans $\Sigma[\mathcal{A}]$ et

que tout $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F < H$ ait une expression dans la base $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de la forme $H = R_H + \Omega_H$ où Ω_H est une combinaison linéaire d'éléments de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ indexés par des faces supérieures à H . Il existe une fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ telle que

$$\begin{aligned} R_F &= F + \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F < K} \mu_{nc}(F, K)K \\ \Rightarrow F &= R_F - \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F < K} \mu_{nc}(F, K)K \\ F &= R_F - \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F < K} \mu_{nc}(F, K)(R_K + \Omega_K) \end{aligned}$$

Par récurrence, R_F apparaît avec coefficient 1 dans l'expression de F et les autres éléments de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ apparaissant dans l'expression de F sont tous indexés par des faces strictement plus grandes que F . Ainsi, le lemme 2.2.5 donne le résultat voulu. ■

2.2.5 Expression d'éléments d'une Q' -base et d'idempotents euleriens

Le résultat suivant montre qu'il y a une correspondance entre les fonctions zeta non commutatives et les fonctions de Möbius non commutatives de $I_L(\mathcal{A})$.

Théorème 2.2.2. *L'inverse à gauche et à droite d'une fonction de Möbius non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ est une fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ et vice-versa. Aussi, l'inverse à gauche et à droite d'une fonction de Möbius ou zeta non commutative coïncident.*

Démonstration. Soit $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative, il existe $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle que

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K)Q'_K \quad (i)$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ par la proposition 2.2.1. Par le lemme 2.2.7, il existe $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative telle que

$$Q'_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K)K \quad (ii)$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} F &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid K \leq H} \mu_{nc}(K, H)H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K \leq H} \zeta_{nc}(F, K) \mu_{nc}(K, H) \right) H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} (\zeta_{nc} \mu_{nc})(F, H)H \end{aligned}$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. De plus, on a

$$\begin{aligned} Q'_F &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid K \leq H} \zeta_{nc}(K, H)Q'_H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K \leq H} \mu_{nc}(F, K) \zeta_{nc}(K, H) \right) Q'_H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} (\mu_{nc} \zeta_{nc})(F, H)Q'_H \end{aligned}$$

Puisque $\Sigma[\mathcal{A}]$ et $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ sont des bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$(\zeta_{nc} \mu_{nc})(F, H) = (\mu_{nc} \zeta_{nc})(F, H) = \begin{cases} 1 & \text{si } F = H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $F, H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $F \leq H$. Ainsi, $\zeta_{nc} \mu_{nc} = \mu_{nc} \zeta_{nc} = \delta_{\Sigma[\mathcal{A}]}$, donc $\zeta_{nc}^{-1} = \mu_{nc}$ (μ_{nc} est l'inverse multiplicatif de ζ_{nc} à gauche et à droite). Soit $\mu'_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative, considérons la base $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle que

$$R_G = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu'_{nc}(G, K)K$$

pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Le lemme 2.2.8 indique qu'il existe $\zeta'_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative telle que

$$G = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \zeta'_{nc}(G, K) R_K$$

pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$. En insérant une des deux dernières équations dans l'autre et vice-versa comme il a été fait avec les équations (i) et (ii), on a que $\mu'_{nc} \zeta'_{nc} = \zeta'_{nc} \mu'_{nc} = \delta_{\Sigma[\mathcal{A}]}$, donc que $\mu'^{-1}_{nc} = \zeta'_{nc}$. ■

La proposition 2.2.1 donne que qu'il correspond une unique Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ à chaque fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ et on fait correspondre une de ces fonctions à une fonction de Möbius non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ par le théorème 2.2.2. Ainsi, on fait correspondre une unique Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ à chaque fonction de Möbius non commutative de $I_L(\mathcal{A})$ de la façon suivante.

Théorème 2.2.3. *Toute base associée à une fonction de Möbius non commutative est une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Aussi, soit $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, il existe $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative telle que*

$$Q'_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Soit $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative, le théorème 2.2.2 donne que μ_{nc}^{-1} est une fonction zeta non commutative. La proposition 2.2.1 indique qu'il existe une unique Q' -base $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle que

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}^{-1}(F, K) Q'_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Soit $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq F} \mu_{nc}(H, F) F$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq F} \mu_{nc}(H, F) \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}^{-1}(F, K) Q'_K \right) \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq K} \left(\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq F \leq K} \mu_{nc}(H, F) \mu_{nc}^{-1}(F, K) \right) Q'_K \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq K} (\mu_{nc} \mu_{nc}^{-1})(H, K) Q'_K \\
&= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq K} \delta_{\Sigma[\mathcal{A}]}(H, K) Q'_K \\
&= Q'_H.
\end{aligned}$$

Soit $\{R'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. Par la proposition 2.2.1, il existe $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction zeta non commutative telle que

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) R'_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Par une démarche analogue à ce qui a été fait plus haut, on a

$$\sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq F} \zeta_{nc}^{-1}(H, F) F = R'_H.$$

Par le théorème 2.2.2, ζ_{nc}^{-1} est une fonction de Möbius non commutative. ■

Corollaire 2.2.1. *Soient $\mu_{nc}, \zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ des fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives respectivement telles que $\mu_{nc}^{-1} = \zeta_{nc}$. Les fonctions μ_{nc} et ζ_{nc} sont associées à la même Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.*

La preuve de ce corollaire est dans l'appendice A. La proposition 1.5.3 indique la manière d'exprimer un idempotent eulerien à partir d'une section homogène du support et sa Q' -base associée. Les résultats de ce chapitre permettent de traduire cette expression d'un idempotent eulerien en terme de fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives et cela de façon unique.

Théorème 2.2.4. Soient $\{E_X\}_{X \in \Lambda[\mathcal{A}]}$ famille eulérienne de \mathcal{A} et u sa section homogène du support associée. Considérons $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ la fonction zeta non commutative associée à u et $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ la fonction de Möbius non commutative telle que $\zeta_{nc}^{-1} = \mu_{nc}$, on a

$$E_X = \sum_{F, G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X, F \leq G} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F) \mu_{nc}(F, G) G$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Par la proposition 1.5.3 et le lemme 2.2.1, il existe $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ telle qu'on a

$$E_X = \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F) Q'_F$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. Par le corollaire 2.2.1, on a

$$Q'_F = \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G} \mu_{nc}(F, G) G$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E_X &= \sum_{F \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F) \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq G} \mu_{nc}(F, G) G \right) \\ &= \sum_{F, G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid s(F)=X, F \leq G} \zeta_{nc}(\mathcal{O}, F) \mu_{nc}(F, G) G \end{aligned}$$

pour tout $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$. ■

Puisque les sections homogènes du support correspondent aux fonctions zeta non commutatives et que les familles eulériennes de \mathcal{A} correspondent aux sections homogènes du support, ce théorème démontre qu'on obtient toutes les familles eulériennes de \mathcal{A} à partir des fonctions zeta non commutatives. Cependant, cette fois, la construction d'une famille eulérienne n'est pas récursive.

Exemple. Considérons la notation des éléments de $\Lambda[\mathcal{D}]$ et de $\Sigma[\mathcal{D}]$ donnée aux figures 1.4 et 1.6 et la section homogène du support u de l'exemple à la page 41. Considérons $\zeta_u \in I_L(\mathcal{D})$ la fonction zeta non commutative associée à u . La figure 2.5 donne la forme matricielle de ζ_u . La fonction $\mu_u \in I_L(\mathcal{D})$ donnée à la figure

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{O} \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad F_{11} \quad F_{12} \\
 \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
 \mathcal{O} & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 F_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 F_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 F_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 F_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 F_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 F_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 F_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Figure 2.5 Forme matricielle de $\zeta_u \in I_L(\mathcal{D})$

2.6 est l'inverse de ζ_u . Soit U l'élément minimal de $\Lambda[\mathcal{D}]$, par le théorème 2.2.4, on a

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbb{R}^2} &= \zeta_u(\mathcal{O}, F_7)\mu_u(F_7, F_7)F_7 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_8)\mu_u(F_8, F_8)F_8 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_9)\mu_u(F_9, F_9)F_9 \\
 &\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_{10})\mu_u(F_{10}, F_{10})F_{10} + \zeta_u(\mathcal{O}, F_{11})\mu_u(F_{11}, F_{11})F_{11} \\
 &\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_{12})\mu_u(F_{12}, F_{12})F_{12} \\
 &= F_7 + F_9 - F_{11},
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{O} \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad F_{11} \quad F_{12} \\
\mathcal{O} \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right)
\end{array}$$

Figure 2.6 Forme matricielle de $\mu_u \in I_L(\mathcal{D})$

$$\begin{aligned}
E_{H_1} &= \zeta_u(\mathcal{O}, F_2)\mu_u(F_2, F_2)F_2 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_2)\mu_u(F_2, F_7)F_7 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_2)\mu_u(F_2, F_8)F_8 \\
&\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_5)\mu_u(F_5, F_5)F_5 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_5)\mu_u(F_5, F_{10})F_{10} \\
&\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_5)\mu_u(F_5, F_{11})F_{11} \\
&= \frac{1}{2}F_2 - \frac{1}{2}F_8 + \frac{1}{2}F_5 - \frac{1}{2}F_{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{H_2} &= \zeta_u(\mathcal{O}, F_1)\mu_u(F_1, F_1)F_1 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_1)\mu_u(F_1, F_7)F_7 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_1)\mu_u(F_1, F_{12})F_{12} \\
&\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_4)\mu_u(F_4, F_4)F_4 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_4)\mu_u(F_4, F_{10})F_{10} \\
&\quad + \zeta_u(\mathcal{O}, F_4)\mu_u(F_4, F_9)F_9 \\
&= -F_1 + 2F_7 - F_{12} + 2F_4 + 2F_{10} - 4F_9,
\end{aligned}$$

$$E_{H_3} = \zeta_u(\mathcal{O}, F_3)\mu_u(F_3, F_3)F_3 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_3)\mu_u(F_3, F_8)F_8 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_3)\mu_u(F_3, F_9)F_9$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta_u(\mathcal{O}, F_6)\mu_u(F_6, F_6)F_6 + \zeta_u(\mathcal{O}, F_6)\mu_u(F_6, F_{11})F_{11} \\
& + \zeta_u(\mathcal{O}, F_6)\mu_u(F_6, F_{12})F_{12} \\
& = F_3 - F_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_U & = \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mathcal{O} + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_1)F_1 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_2)F_2 \\
& + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_3)F_3 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_4)F_4 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_5)F_5 \\
& + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_6)F_6 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_7)F_7 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_8)F_8 \\
& + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_9)F_9 + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_{10})F_{10} \\
& + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_{11})F_{11} + \zeta_u(\mathcal{O}, \mathcal{O})\mu_u(\mathcal{O}, F_{12})F_{12} \\
& = \mathcal{O} + F_1 - \frac{1}{2}F_2 - F_3 - 2F_4 - \frac{1}{2}F_5 - 3F_7 + \frac{3}{2}F_8 + 3F_9 - \frac{3}{2}F_{10} + F_{11} + F_{12}.
\end{aligned}$$

Ceci forme bel et bien la famille eulerienne de \mathcal{D} construite à l'exemple de la page 41. Le théorème 2.2.3 permet aussi de retrouver la Q' -base de l'exemple à la page 47.

CHAPITRE III

MATROÏDES ORIENTÉS ET ENSEMBLE DE VECTEURS SIGNES LOCALEMENT INVERSIBLES

Au chapitre 1, on a fait la remarque que $\Sigma[\mathcal{A}]$ est une bande régulière à gauche ou un matroïde orienté. Dans ce chapitre, on verra que tous les résultats présentés dans ce mémoire se généralisent naturellement aux matroïdes orientés. En effet, la première section présente ce qu'est un matroïde orienté et généralise les résultats du premier chapitre aux matroïdes orientés. La deuxième section généralise la notion de lune aux matroïdes orientés, puis généralise les résultats du chapitre 2 aux matroïdes orientés. Bien que tous ces résultats s'appliquent aux matroïdes orientés, le support d'une lune d'une bande régulière à gauche n'est pas aussi simple que le support d'une lune d'un matroïde orienté. À cause de ceci, les résultats du deuxième chapitre ne se généralisent pas naturellement à toute bande régulière à gauche. Dans l'optique d'étendre les résultats du deuxième chapitre à plus de bandes régulières à gauche qu'aux matroïdes orientés seulement, la troisième section introduit un nouveau concept : les ensembles de vecteurs signes localement inversibles. La dernière section généralise la notion de lune à ces ensembles ce qui est un résultat nouveau.

3.1 Matroïde orienté

La notion de vecteur signe introduite à la définition 1.1.1 permet d'insérer l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans central $\Sigma[\mathcal{A}]$ dans un contexte plus grand : celui des matroïdes orientés. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $[n]$ l'ensemble des entiers de 1 à n . Considérons $x, y \in \{0, -, +\}^{[n]}$ deux vecteurs signes. Désignons maintenant que pour $i \in [n]$, $\epsilon_i(x)$ est la valeur de la i -ième coordonnée de x . Reprenons la notion de produit de la section 1.1.1, c'est-à-dire que xy est le vecteur signe de $\{0, -, +\}^{[n]}$ tel que

$$\epsilon_i(xy) = \begin{cases} \epsilon_i(x) & \text{si } \epsilon_i(x) \neq 0 \\ \epsilon_i(y) & \text{si } \epsilon_i(x) = 0 \end{cases}.$$

Définition 3.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un matroïde orienté est un ensemble de vecteurs $\mathcal{V} \subseteq \{0, -, +\}^{[n]}$ respectant les axiomes suivants:

- (M1) Soit $\mathbf{0} \in \{0, -, +\}^{[n]}$ le vecteur dont toutes ses coordonnées sont 0, $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$,
- (M2) Si $x \in \mathcal{V}$, alors $-x \in \mathcal{V}$,
- (M3) Si $x, y \in \mathcal{V}$, alors $xy \in \mathcal{V}$,
- (M4) Soient $x, y \in \mathcal{V}$. Pour tout $i \in [n]$ tel que $\epsilon_i(x) = -\epsilon_i(y) \neq 0$, il existe $z \in \mathcal{V}$ tel que $\epsilon_i(z) = 0$ et $\epsilon_j(z) = \epsilon_j(xy) = \epsilon_j(yx)$ pour tout $j \in [n]$ tel que $\epsilon_j(x) = \epsilon_j(y)$, $\epsilon_j(x) = 0$ ou $\epsilon_j(y) = 0$.

Remarque. Il existe plusieurs façons équivalentes d'axiomatiser un matroïde orienté (voir les sections 6.2.1, 6.2.2 et 6.2.3 de (Richter-Gebert et Ziegler, 2017)).

Notons que (M1) et (M3) font d'un matroïde orienté un monoïde. Par abus de langage, on dira qu'un monoïde isomorphe à un matroïde orienté est un matroïde orienté. Ainsi, $\Sigma[\mathcal{A}]$ est un matroïde orienté. En effet, on a que

- $\Sigma[\mathcal{A}]$ respecte (M1) par l'existence de la face centrale.
- $\Sigma[\mathcal{A}]$ respecte (M2), car l'inverse d'une face existe (proposition 1.1.1.).
- $\Sigma[\mathcal{A}]$ respecte (M3), car $\Sigma[\mathcal{A}]$ est stable par le produit de faces.
- $\Sigma[\mathcal{A}]$ respecte (M4). En effet, considérons $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $\epsilon_i(F) = -\epsilon_i(G) \neq 0$ pour un certain $i \in I$ où $\mathcal{A} = \{H_k\}_{k \in I}$. On a que F est d'un côté de l'hyperplan H_i et G est de l'autre côté. Ainsi, un segment allant d'un point de l'intérieur relatif de F à un point de l'intérieur relatif de G devra croiser H_i , donc une face D incluse dans H_i (voir figure 3.1). La définition 1.1.1 garantit que $\epsilon_i(D) = 0$. Montrons que $\epsilon_j(D) = \epsilon_j(FG) = \epsilon_j(GF)$ pour tout $j \in I$ tel que $\epsilon_j(F) = \epsilon_j(G), \epsilon_j(F) = 0$ ou $\epsilon_j(G) = 0$. Si $\epsilon_j(F) = \epsilon_j(G) \neq 0$, F et G sont du même côté de H_j , donc D l'est aussi et $\epsilon_j(D) = \epsilon_j(F) = \epsilon_j(FG) = \epsilon_j(GF)$. Si $\epsilon_j(F)$ ou $\epsilon_j(G)$ est nul, supposons que $\epsilon_j(F) = 0$ sans perte de généralité. Le segment allant d'un point de l'intérieur relatif de F à un point de l'intérieur relatif de G est inclus dans $H_j^{\epsilon_j(G)}$, donc D aussi d'où $\epsilon_j(D) = \epsilon_j(G)$. Notons que dans ce cas, $\epsilon_j(FG) = \epsilon_j(GF) = \epsilon_j(G)$, donc $\epsilon_j(D) = \epsilon_j(FG) = \epsilon_j(GF)$.

Soit $\mathcal{V} \subset \{0, -, +\}^{[n]}$ un matroïde orienté. Comme $\Sigma[\mathcal{A}]$, \mathcal{V} possède la relation d'ordre suivante. Soit $x, y \in \mathcal{V}$, on a

$$(\epsilon_i(x) \in \{0, \epsilon_i(y)\} \forall i \in [n]) \Leftrightarrow x \leq y.$$

Cet ordre provient de l'ordre partiel sur $\{0, -, +\}$ suivant: $+$ et $-$ sont incomparables, $0 < +$ et $0 < -$. L'ordre sur un matroïde orienté est induit par l'ordre sur $\{0, -, +\}$ par produit cartésien. La proposition 1.1.2 s'étend aux matroïdes orientés:

$$xy = y \Leftrightarrow x \leq y$$

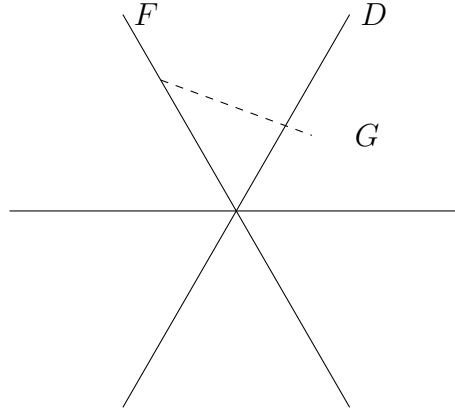


Figure 3.1 L'axiome (M4) dans l'arrangement \mathcal{D} : Le segment pointillé va de l'intérieur relatif de F à l'intérieur relatif de G et croise la face D . Les faces F et G sont de côtés différents de l'hyperplan contenant D .

Les égalités (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) de la proposition 1.1.3 s'étendent aussi aux matroïdes orientés. En effet, les preuves de ces proposition reposent seulement sur la notion de vecteur signe et la définition du produit de faces.

Remarque. Les matroïdes orientés n'apparaissent pas seulement dans les arrangements d'hyperplans. Construisons un matroïde orienté \mathcal{G} à partir du graphe orienté (A, B) à la figure 3.2. Les vecteurs signes de ce matroïde orienté seront des éléments de $\{0, -, +\}^B$, car chaque coordonnée dépendra du signe qu'on associera à une arête. Considérons les cycles minimaux du graphe sans tenir compte de l'orientation. On a

$$\{(1, 2), (2, 1)\}, \{(2, 4), (4, 2)\}, \{(2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \text{ et } \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

comme cycles minimaux. Ensuite, on suit ces cycles dans un sens ou dans l'autre et on note si la direction de chaque arête suit la direction dans laquelle le cycle est parcouru ou non. Si l'arête suit le sens par lequel le cycle est parcouru, on lui attribue le signe $+$. Si l'arête ne suit pas le sens par lequel le cycle est parcouru,

on lui attribue le signe $-$. Si l'arrête ne fait pas partie du cycle, on lui attribue 0. En prenant les arêtes dans l'ordre $(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2)$, on obtient $(0, 0, +, -, +, 0)$ et $(0, 0, -, +, -, 0)$ à partir du cycle $\{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. L'ensemble des vecteurs construit est

$$\mathcal{G}' = \{(+, +, 0, 0, 0, 0), (-, -, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, +, 0, +), (0, 0, 0, -, 0, -), \\ (0, 0, +, 0, +, +), (0, 0, -, 0, -, -), (0, 0, +, -, +, 0), (0, 0, -, +, -, 0)\}.$$

Le matroïde orienté \mathcal{G} est l'ensemble des produits des éléments de \mathcal{G}' avec $\mathbf{0}$ ajouté. C'est bel et bien un matroïde orienté, car \mathcal{G}' respecte les axiomes pour *cocircuits* d'un matroïde orienté (voir la section 6.2.2 de (Richter-Gebert et Ziegler, 2017)).

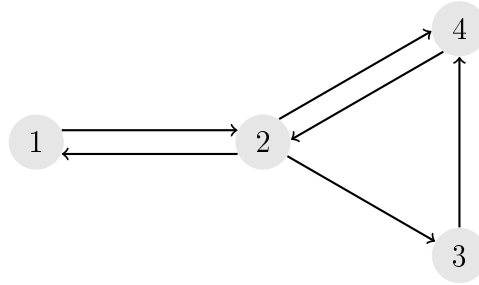


Figure 3.2 Le graphe (A, B) : L'ensemble des sommets est $A = [4]$ et l'ensemble des arêtes est $B = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2)\}$.

Remarque. Ce ne sont pas tous les matroïdes orientés qui sont représentables par un arrangement d'hyperplans (voir la page 32 de (Reiner, 2005)) c'est-à-dire qu'il existe au moins un matroïde orienté dont les vecteurs ne signes ne peuvent pas être associés aux faces d'un arrangement d'hyperplans. Tout matroïde orienté est représentable par un arrangement de pseudosphères (arrangement d'équateurs d'une sphère) (voir la section 6.2.4 de (Richter-Gebert et Ziegler, 2017)).

L'analogie de $\Lambda[\mathcal{A}]$ pour un matroïde orienté n'apparaît pas de façon aussi intuitive que pour un arrangement d'hyperplans, mais est construit à partir du

support.

Définition 3.1.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{V} \subseteq \{0, -, +\}^{[n]}$ un matroïde orienté, la fonction support de \mathcal{V} est

$$\begin{aligned} \text{supp} : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{P}([n]) \\ x &\mapsto \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = 0\} \end{aligned} .$$

Soit $x \in \mathcal{V}$, on dit que $\text{supp}(x)$ est le support de x .

Ceci est une généralisation de la fonction support dans un arrangement d'hyperplan. En effet, pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, l'ensemble I_F de la proposition 1.3.1 est $\text{supp}(F)$. Ainsi, le corollaire 1.3.1 et la proposition 1.3.2 s'étendent à la fonction supp :

$$\text{supp}(x) = \text{supp}(-x) \quad \text{et} \quad yx = y \Leftrightarrow \text{supp}(x) \leq \text{supp}(y)$$

où $\mathcal{P}([n])$ est ordonné par inclusion inverse. L'ensemble $\text{supp}(\mathcal{V})$ possède la relation d'ordre

$$yx = y \Leftrightarrow \text{supp}(x) \leq \text{supp}(y) \Leftrightarrow \text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(x)$$

ce qui fait du support une application qui préserve l'ordre par (1.3). Les ensembles \mathcal{V} et $\text{supp}(\mathcal{V})$ sont des *posets* finis ayant tous deux un élément minimal ($\mathbf{\Theta}$ pour \mathcal{V} et $[n] = s(\mathbf{\Theta})$ pour $\text{supp}(\mathcal{V})$). De plus, $\text{supp}(\mathcal{V})$ a un élément maximal. En effet, \mathcal{V} est fini et stable par produit, donc $\pi \in \mathcal{V}$ un produit de tous les éléments de \mathcal{V} est tel que $\pi x = \pi$ pour tout $x \in \mathcal{V}$ par (1.4). Ainsi, $\text{supp}(\pi)$ est le plus grand élément de $\text{supp}(\mathcal{V})$ ce qui fait de $\text{supp}(\mathcal{V})$ un treillis. Dans ce treillis, le *join* a une forme commode.

Proposition 3.1.1. Soient $X, Y \in \text{supp}(\mathcal{V})$, $X \vee Y = X \cap Y$.

Démonstration. Il existe $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $\text{supp}(x) = X$ et $\text{supp}(y) = Y$. Pour tout $i \in [n]$ tel que $\epsilon_i(x) = \epsilon_i(y) = 0$, on a que $\epsilon_i(xy) = 0$. Soit $j \in [n]$ tel que

$\epsilon_j(xy) = 0$. Si $\epsilon_j(x) \neq 0$, alors $\epsilon_j(xy) = \epsilon_j(x) \neq 0 \not\leq$, donc $\epsilon_j(x) = 0$. Si $\epsilon_j(y) \neq 0$, alors $\epsilon_j(xy) = \epsilon_j(y) \neq 0 \not\leq$, donc $\epsilon_j(y) = 0$. Ainsi, soit $k \in [n]$, $\epsilon_k(xy) = 0$ est équivalent à $\epsilon_k(x) = \epsilon_k(y) = 0$. Ceci donne que

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = 0\} \cap \{i \in [n] \mid \epsilon_i(y) = 0\} \\ &= \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = \epsilon_i(y) = 0\} \\ &= \{i \in [n] \mid \epsilon_i(xy) = 0\} \\ &= \text{supp}(xy). \end{aligned}$$

Ceci indique que $X \cap Y \in \text{supp}(\mathcal{V})$. On a que $X \cap Y \subseteq X, Y$, donc que $X, Y \leq X \cap Y$. Pour $Z \in \text{supp}(\mathcal{V})$ tel que $Z < X \cap Y$, on a que $X \cap Y \subset Z$. Ainsi, il existe $i \in Z$ tel que $i \notin X \cap Y$, donc $i \notin X$ ou $i \notin Y$. Sans perte de généralité, supposons que $i \notin X$. Ceci indique que $Z \not\subseteq X$, donc $X \not\leq Z$. Ainsi, $X \cap Y = X \vee Y$, car tout élément de $\text{supp}(\mathcal{V})$ strictement plus petit que $X \cap Y$ n'est pas un majorant de X et Y . ■

On appelle $\text{supp}(\mathcal{V})$ le *treillis d'intersections* de \mathcal{V} . Comme tout treillis, $\text{supp}(\mathcal{V})$ forme un monoïde dont la loi de composition interne est le *join*. De plus, la proposition 4.1.13 et le théorème 4.1.14 de (Bjorner *et al.*, 1999) indiquent que supp préserve les relations de couverture et que \mathcal{V} et $\text{supp}(\mathcal{V})$ sont gradués. Ainsi, la proposition 1.3.3 est aussi étendue au cas des matroïdes orientés, c'est-à-dire que le rang de x et $\text{supp}(x)$ est le même dans leur *poset* respectifs. Rappelons que Brown montre que cette notion de support se généralise à toute bande régulière à gauche (voir (Brown, 2000) à l'appendice B), or il n'est pas certain qu'une bande régulière ou son support soient gradués, donc la proposition 1.3.3 ne s'applique pas à toute bande régulière à gauche.

3.1.1 Algèbre d'un matroïde orienté

Soit \mathbb{K} un corps, désignons les algèbres des combinaisons linéaires des ensembles \mathcal{V} et $\text{supp}(\mathcal{V})$ par $\mathbb{K}\mathcal{V}$ et $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$ respectivement. C'est $\mathbb{K}\mathcal{V}$ qu'on appelle l'algèbre d'un matroïde orienté et on appelle $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$ l'algèbre du treillis d'intersection de \mathcal{V} . Le support s'étend naturellement à une application linéaire surjective $\text{supp} : \mathbb{K}\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$. Plus encore, cette application est un morphisme d'algèbre (voir (Brown, 2000) aux sections A.3, A.4, B.1 et B.2). Par le premier théorème d'isomorphisme, on a $\mathbb{K}\mathcal{V}/\ker(\text{supp}) \cong \mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$. Notons que $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$ est une algèbre semi-simple scindée, car $\text{supp}(\mathcal{V})$ est un treillis. Ainsi, les notions de la section 1.4 s'appliquent à $\mathbb{K}\mathcal{V}$ et $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$.

Théorème 3.1.1. *Le noyau de supp est un idéal nilpotent de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ dont l'indice de nilpotence est $r(\mathcal{V}) + 1$ où $r(\mathcal{V})$ est le rang de \mathcal{V} . De plus, $\ker(\text{supp}) = \text{rad}(\mathbb{K}\mathcal{V})$ et $\mathbb{K}\mathcal{V}$ est élémentaire.*

Ce résultat n'est pas entièrement vrai dans le cas d'une bande régulière à gauche. En effet, l'indice de nilpotence de $\ker(\text{supp})$ repose sur le fait que \mathcal{V} et $\text{supp}(\mathcal{V})$ sont gradués. On a tout de même que le noyau du support d'une bande régulière à gauche est le radical de son algèbre.

La construction de Saliola s'étend naturellement à l'algèbre d'un matroïde orienté. Soit u une section homogène de supp , c'est-à-dire que u est une application linéaire qui soit aussi une section de supp pour laquelle il existe $\{a_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ où $a_x \in \mathbb{K}$ pour tout $x \in \mathcal{V}$ tel que

$$u(X) = \sum_{x \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X} a_x x$$

pour tout $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$. Considérons l'ensemble $\{E_X^u\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$ dont les éléments

sont construits récursivement de la façon suivante:

$$E_X^u = u(X) - \sum_{Y \in \text{supp}(\mathcal{V}) \mid X < Y} u(X) E_Y^u$$

Théorème 3.1.2. *Un ensemble $E \subseteq \mathbb{K}\mathcal{V}$ est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux si et seulement s'il existe une section homogène u de supp tel que $E = \{E_X^u\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$. On dit que u et E sont associés.*

On définit aussi une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ de la même façon que dans $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, c'est-à-dire qu'une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ est un ensemble $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ tel qu'il existe une section homogène u de supp pour laquelle $Q'_x = x E_{\text{supp}(x)}^u$ pour tout $x \in \mathcal{V}$. On dit que $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ est associée à u et induite par $\{E_X^u\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$. Une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ est constituée d'idempotents pour la même raison qu'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ l'est. Aussi, le lemme 11.29 de (Aguiar et Mahajan, 2017) s'étend naturellement à une algèbre d'un matroïde orienté, donc une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$. Le lemme 1.5.3, la proposition 1.5.3 et le lemme 1.5.6 s'appuient sur les propriétés algébriques des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux, des sections homogènes et la définition d'une Q' -base dans $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, donc ces résultats s'étendent naturellement au contexte d'une algèbre d'un matroïde orienté. En particulier, on a le résultat suivant qui rappelle que deux Q' -bases ne peuvent pas être induites par le même système complet d'idempotents primitifs orthogonaux.

Proposition 3.1.2. *Soient u une section homogène de supp , $\{E_X^u\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$ son système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ associé et $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ sa Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ associée, on a*

$$E_X^u = \sum_{x \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X} a_x Q'_x \quad \text{où} \quad u(X) = \sum_{x \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X} a_x x$$

pour tout $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$.

Notons que la construction de Saliola s'applique aussi dans le cas de bandes régulières à gauche. La section 2.2.4 de (Goulet-Ouellet, 2018) en fait une étude approfondie.

3.2 Lunes d'un matroïde orienté

Soient $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $x \leq y$, on dit que (x, y) est un couple de *vecteurs imbriqués*. À partir d'un tel couple, on définit une lune d'un matroïde orienté comme il a été fait pour un arrangement d'hyperplans:

$$\ell(x, y) = \{z \in \mathcal{V} \mid xz = y, \text{supp}(z) = \text{supp}(y)\}$$

On note l'ensemble des lunes de \mathcal{V} par $\Delta[\mathcal{V}]$. Les notions de support et de base d'une lune dans un arrangement d'hyperplans sont basées sur des arguments géométriques qui ne s'applique pas forcément à une lune d'un matroïde orienté, mais ces notions s'étendent naturellement aux lunes d'un matroïde orienté.

Définition 3.2.1. Soient $L \in \Delta[\mathcal{V}]$ et $z \in L$, le support de L est $S(L) = \text{supp}(z)$.

Ceci est bien défini car tous les éléments d'une lune ont le même support. Notons que cette notion de support d'une lune généralise le support d'une lune d'un arrangement d'hyperplans. Rappelons nous que $\mathcal{V} \subseteq \{0, -, +\}^{[n]}$. Pour $L \in \Delta[\mathcal{V}]$, considérons l'ensemble $B(L) = \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = \epsilon_i(y) \forall x, y \in L\}$. C'est l'ensemble des coordonnées pour lesquels tous les éléments de L ont le même signe. Cet ensemble est un élément de $\text{supp}(\mathcal{V})$.

Définition 3.2.2. La base de $L \in \Delta[\mathcal{V}]$ est $B(L)$.

Cette définition permet les deux résultats suivants.

Proposition 3.2.1. Soient $L \in \Delta[\mathcal{V}]$ et $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $L = \ell(x, y)$, on a que $B(L) = \text{supp}(x)$.

Démonstration. Considérons $-x \in \mathcal{V}$, on a que $x(-x)y = xy = y$, car $\text{supp}(x) = \text{supp}(-x)$ et $x \leq y$. Du fait que supp est un morphisme d'algèbre qui préserve l'ordre, on a que

$$\begin{aligned} \text{supp}(x(-x)y) &= \text{supp}(x) \vee \text{supp}(-x) \vee \text{supp}(y) \\ &= \text{supp}(x) \vee \text{supp}(x) \vee \text{supp}(y) \\ &= \text{supp}(y), \end{aligned}$$

donc que $(-x)y \in L$. Puisque $x \leq y$, $\epsilon_i(x) \in \{0, \epsilon_i(y)\}$ pour tout $i \in [n]$. Pour $j \in B(L)$, si $\epsilon_j(x) = \epsilon_j(y) \neq 0$, c'est-à-dire que $j \in B(L) \setminus \text{supp}(x)$, on a que $\epsilon_j(-x) = -\epsilon_j(x) = -\epsilon_j(y) \neq 0$, donc que $\epsilon_j((-x)y) = -\epsilon_j(y)$. Cependant, $\epsilon_j((-x)y) = \epsilon_j(y)$ par définition de $B(L)$. Puisque $\epsilon_j(y) \neq 0$, on a une contradiction. Ainsi, $\epsilon_j(x) = 0$, donc $B(L) \subseteq \text{supp}(x)$. Supposons qu'il existe $k \in \text{supp}(x) \setminus B(L)$, on a que $\epsilon_k(x) = 0$ et il existe $z \in L$ tel que $\epsilon_k(z) \neq \epsilon_k(y)$. Notons que $\text{supp}(z) = \text{supp}(y)$, donc si $\epsilon_k(z) = 0$, alors $\epsilon_k(y) = 0$ aussi $\not\downarrow$. On a donc que $\epsilon_k(z) = -\epsilon_k(y) \neq 0$. Puisque $xz = y$, on a

$$\epsilon_k(y) = \epsilon_k(xz) = \epsilon_k(z) = -\epsilon_k(y) \neq 0 \not\downarrow.$$

Ainsi, $B(L) = \text{supp}(x)$. ■

Corollaire 3.2.1. *Soient $x, y, z, t \in \mathcal{V}$ tels que $x \leq y, z \leq t$ et $\ell(x, y) = \ell(z, t)$, on a $\text{supp}(x) = \text{supp}(z)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.2.1, on a

$$\text{supp}(x) = B(\ell(x, y)) = B(\ell(z, t)) = \text{supp}(z). \quad \blacksquare$$

La proposition 3.2.1 et le corollaire 3.2.1 montrent que cette notion de base d'une lune d'un matroïde orienté généralise la notion de base d'une lune d'un arrangement d'hyperplans.

Proposition 3.2.2. *Soient $L \in \Delta[\mathcal{V}]$ et $x \in \mathcal{V}$ tels que $\text{supp}(x) = B(L)$. Il existe un unique $y \in \mathcal{V}$ tel que $x \leq y$, $\text{supp}(y) = S(L)$ et $L = \ell(x, y)$.*

Démonstration. Il existe $z, t \in \mathcal{V}$ tels que $z \leq t$ et $L = \ell(z, t)$. Puisque $\text{supp}(x) = B(L)$, la proposition 3.2.1 assure que $\text{supp}(x) = \text{supp}(z)$. Posons $y = xt \in \mathcal{V}$. On a que

$$\text{supp}(y) = \text{supp}(xt) = \text{supp}(x) \vee \text{supp}(t) = \text{supp}(z) \vee \text{supp}(t) = \text{supp}(t),$$

car supp est un morphisme d'algèbres qui préserve l'ordre. Puisque $t \in L$, $\text{supp}(y) = S(L)$. Notons que $x \leq y$ par (1.5). Considérons $\ell(x, y)$. Puisque $\text{supp}(x) = \text{supp}(z)$, on a que $xz = x$ et $zx = z$. Soit $a \in L$, $\text{supp}(a) = \text{supp}(t) = \text{supp}(y)$ et on a

$$za = t \Rightarrow xza = xt \Rightarrow xa = y.$$

Ainsi $a \in \ell(x, y)$ et $L \subseteq \ell(x, y)$. Soit $b \in \ell(x, y)$, $\text{supp}(b) = \text{supp}(y) = \text{supp}(t)$ et on a

$$xb = y \Rightarrow zxb = zxt \Rightarrow zb = zt \Rightarrow zb = t.$$

De ce fait, $b \in L$ et $\ell(x, y) \subseteq L$, donc $L = \ell(x, y)$. Soit $c \in \mathcal{V}$ tel que $x \leq c$ et $\ell(x, c) = L$. Puisque $\ell(x, y) = L$ et $c \in L$, $xc = y$. Du fait que $x \leq c$, on a que $c = y$. ■

Prenons $x, y, z, t \in \mathcal{V}$ tels que $x \leq y$, $z \leq t$ et $\ell(x, y) = \ell(z, t)$. Le corollaire 3.2.1 assure que $\text{supp}(x) = \text{supp}(z)$, donc que $xz = x$ et $zx = z$. Puisque y et t sont des éléments de $\ell(x, y) = \ell(z, t)$, on a que $xt = y$ et que $zy = t$. En tout, on a que

$$\ell(x, y) = \ell(z, t) \Rightarrow xz = x, \quad zx = z, \quad xt = y, \quad zy = t$$

Maintenant, reprenons $x, y, z, t \in \mathcal{V}$ tels que $x \leq y$, $z \leq t$, mais supposons seulement les égalités du côté droit de l'implication. On démontrera que $\ell(x, y) =$

$\ell(z, t)$. En effet, on a

$$yt = xtt = xt = y,$$

$$ty = zyy = zy = t.$$

Ainsi, $\text{supp}(y) = \text{supp}(t)$. Soit $a \in \ell(x, y)$, on a que $\text{supp}(a) = \text{supp}(y) = \text{supp}(t)$.

Aussi, on a

$$xa = y \Rightarrow zxa = zy \Rightarrow za = t.$$

Ceci donne que $a \in \ell(z, t)$, donc que $\ell(x, y) \subseteq \ell(z, t)$. Par symétrie, $\ell(z, t) \subseteq \ell(x, y)$. Ainsi, $\ell(x, y) = \ell(z, t)$, donc on a

$$\ell(x, y) = \ell(z, t) \Leftrightarrow xz = x, zx = z, xt = y, zy = t.$$

À cause de ceci, on étend la relation (2.1) sur les couples de faces imbriquées aux couples de vecteurs imbriqués comme suit:

$$(x, y) \sim (z, t) \Leftrightarrow xz = x, zx = z, xt = y, zy = t$$

Ainsi, le corollaire 2.1.1 s'étend aux matroïdes orientés.

Corollaire 3.2.2. *Soient $x \in \mathcal{V}$ et $X, Y \in \text{supp}(\mathcal{V})$ tels que $\text{supp} = X$ et $X \leq Y$. L'ensemble $\Delta[\mathcal{V}]_X^Y = \{\ell(x, y) \in \Delta[\mathcal{V}] \mid y \in \mathcal{V}, x \leq y, \text{supp}(y) = Y\}$ est l'ensemble de toutes les lunes de base X et de support Y de \mathcal{V} .*

Considérons une bande régulière à gauche \mathcal{B} . C'est la relation (2.1) qui définit la notion de lune dans \mathcal{B} , mais il n'est pas toujours vrai que $B(\ell(x, y)) = \text{supp}(x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{B}$ tels que $x \leq y$. Pour une justification de ce fait et plus de détails sur les lunes d'une bande régulière à gauche, voir la section 2.3 de (Aguiar et Mahajan, 2006).

3.2.1 Algèbre d'incidence de \mathcal{V} et systèmes complets d'idempotents primitifs de $\mathbb{K}\mathcal{V}$

Considérons $I(\mathcal{V})$ l'algèbre d'incidence de \mathcal{V} . Comme pour $I(\Sigma[\mathcal{A}])$, un élément f de $I(\mathcal{V})$ est constant sur les lunes si $f(x, y) = f(z, t)$ pour tous x, y, z, t tels que $x \leq y$, $z \leq t$ et $(x, y) \sim (z, t)$. Pour les mêmes raisons que $I_L(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $I(\mathcal{A})$, l'ensemble des éléments constants sur les lunes de $I(\mathcal{V})$ forment $I_L(\mathcal{V})$ une sous-algèbre de $I(\mathcal{V})$. On appelle $I_L(\mathcal{V})$ l'algèbre d'incidence de lunes de \mathcal{V} . Ainsi, on a la notion de fonction de Möbius et zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{V})$.

Définition 3.2.3. Une fonction zeta non commutative $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ est de la forme

$$\zeta_{nc}(a, a) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta_{nc}(x, y) = \sum_{z \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid z \leq t, xt=y, \text{supp}(t)=\text{supp}(y)} \zeta_{nc}(z, t)$$

pour tous $a, x, y, z \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $z \leq x \leq y$.

Définition 3.2.4. Une fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ est de la forme

$$\mu_{nc}(a, a) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{t \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid z \leq t, xt=y} \mu_{nc}(z, t) = 0$$

pour tous $a, x, y, z \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $z < x \leq y$.

Les résultats sur les fonctions de Möbius et zeta de $I_L(\mathcal{A})$ s'étendent naturellement aux fonction de Möbius et zeta de $I_L(\mathcal{V})$. Ainsi, il correspond une unique fonction zeta non commutative à toute section homogène de supp et vice-versa.

Proposition 3.2.3. *Pour toute section homogène u de supp , la fonction*

$$\zeta'(x, y) = \sum_{z \in \mathcal{V} \mid xz=y, \text{supp}(z)=\text{supp}(y)} a_z \quad \text{où} \quad u(X) = \sum_{x \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X} a_x x$$

pour tous $x, y \in \mathcal{V}$ et $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$ est une fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{V})$. Pour toute fonction zeta non commutative $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$, l'application linéaire $u' : \text{supp}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$ telle que

$$u'(X) = \sum_{x \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X} \zeta_{nc}(\mathbf{0}, x)x$$

pour tout $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$ est une section homogène de supp . En particulier, $\zeta_{nc} = \zeta'$ si et seulement si $u = u'$. Dans ce cas, on dira que ζ_{nc} et u sont associées.

On dit qu'une fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{V})$ et une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ sont associées si elles sont toutes deux associées à une même section homogène de supp .

Proposition 3.2.4. Soient $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ et $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ sa Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ associée, on a

$$x = \sum_{y \in \mathcal{V} \mid x \leq y} \zeta_{nc}(x, y)Q'_y$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$.

Théorème 3.2.1. L'inverse à gauche et à droite d'une fonction de Möbius non commutative de $I_L(\mathcal{V})$ est une fonction zeta non commutative de $I_L(\mathcal{V})$ et vice-versa. Aussi, l'inverse à gauche et à droite d'une fonction de Möbius non commutative ou zeta non commutative coïncident.

Ceci donne que, dans $I_L(\mathcal{V})$, il ne correspond qu'une seule fonction zeta non commutative à toute fonction de Möbius non commutative et vice-versa. On dit qu'une fonction de Möbius non commutative $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ et une Q' -base $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ sont associées si μ_{nc}^{-1} est associée à la même section homogène de supp que $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$.

Proposition 3.2.5. *Soient $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ et $\{Q'_x\}_{x \in \mathcal{V}}$ sa Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ associée, on a*

$$Q'_x = \sum_{y \in \mathcal{V} \mid x \leq y} \mu_{nc}(x, y)y$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$.

Ainsi, il ne correspond qu'une seule fonction de Möbius non commutative de $I_L(\mathcal{V})$ à chaque Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ et vice-versa. Tous ces faits permettent d'exprimer les systèmes complets d'idempotents primitifs de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ à partir des fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{V})$ comme dans $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.

Théorème 3.2.2. *Soit $\{E_X\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$ un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\mathcal{V}$. Soit $\zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ la fonction zeta non commutative associée à la même section homogène du support que $\{E_X\}_{X \in \text{supp}(\mathcal{V})}$. Soit $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{V})$ la fonction de Möbius non commutative telle que $\mu_{nc}^{-1} = \zeta_{nc}$, on a*

$$E_X = \sum_{x, y \in \mathcal{V} \mid \text{supp}(x)=X, x \leq y} \zeta_{nc}(\mathbf{0}, x)\mu_{nc}(x, y)y$$

pour tout $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$.

3.3 Ensemble de vecteurs signes localement inversibles

Les axiomes (M2) et (M3) sont les faits essentiels qui ont permis de donner la base d'une lune d'un matroïde orienté afin de généraliser les résultats du chapitre 2 aux matroïdes orientés. Cette section explore les ensembles de vecteurs signes fermés par produit de vecteurs signes qui ont une caractéristique ressemblant à (M2). Soit $\mathcal{Z} \subseteq \{0, -, +\}^{[n]}$ un ensemble qui ne soit pas forcément un matroïde orienté, mais qui soit stable par produit de vecteurs signes. Notons que \mathcal{Z} a la même relation d'ordre qu'un matroïde orienté. Posons que pour tout élément

minimal \perp de \mathcal{Z} et $\mathcal{Z}_{\geq \perp} = \{x \in \mathcal{Z} \mid \perp \leq x\}$, la fonction

$$\text{inv}_{\perp} : \mathcal{Z}_{\geq \perp} \rightarrow \mathcal{Z}_{\geq \perp} \quad \text{telle que} \quad \begin{array}{l} \epsilon_i(\hat{x}_{\perp}) = \begin{cases} -\epsilon_i(x) & \text{si } \epsilon_i(\perp) = 0 \\ \epsilon_i(x) & \text{sinon} \end{cases} \\ x \mapsto \hat{x}_{\perp} \end{array} \quad \forall i \in [n]$$

est bien définie. On appelle un tel ensemble de vecteurs signes un *ensemble de vecteurs signes localement inversibles*. Pour $x \in \mathcal{Z}$, on dit que \hat{x}_{\perp} est le *vecteur inverse* de x par rapport à \perp . Franco Saliola fait remarquer que $\hat{x}_{\perp} = \perp(-x)$ dans $\{0, -, +\}^{[n]}$.

L'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans est un ensemble de vecteurs signes localement inversibles. En effet, on sait que l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans central est un matroïde orienté en particulier. Un matroïde orienté n'a qu'un seul élément minimal: \mathfrak{O} . La proposition 1.1.1. garantit que la fonction $\text{inv}_{\mathfrak{O}}$ est bien définie, car $\widehat{F}_{\mathfrak{O}} = \widehat{F}$ pour toute face F de l'arrangement d'hyperplan. De plus, un matroïde orienté est stable par produit. Ceci indique aussi qu'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles est une bande régulière à gauche. La définition d'une face et le produit de faces d'un arrangement d'hyperplans central s'étendent naturellement à tout arrangement d'hyperplans qu'il soit central ou non. Ainsi, l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans quelconque est fermé par produit. En plus, la relation d'ordre sur les faces d'un arrangement d'hyperplans central s'étend aussi dans le cas non central. Ces notions donne que l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans quelconque est un ensemble de vecteurs signes localement inversibles. Effectivement, considérons un arrangement d'hyperplan quelconque $\mathcal{A}' = \{H_i\}_{i \in I}$ et \perp un élément minimal de \mathcal{A}' . Soit F une face de \mathcal{A}' plus grande que \perp , on a lui associe le vecteur de $\{0, -, +\}^I$ tel que

- $\epsilon_i(F) = 0$ si $F \subseteq H_i$,
- $\epsilon_i(F) = +$ si l'intérieur relatif de F est inclus dans H_i^+ ,

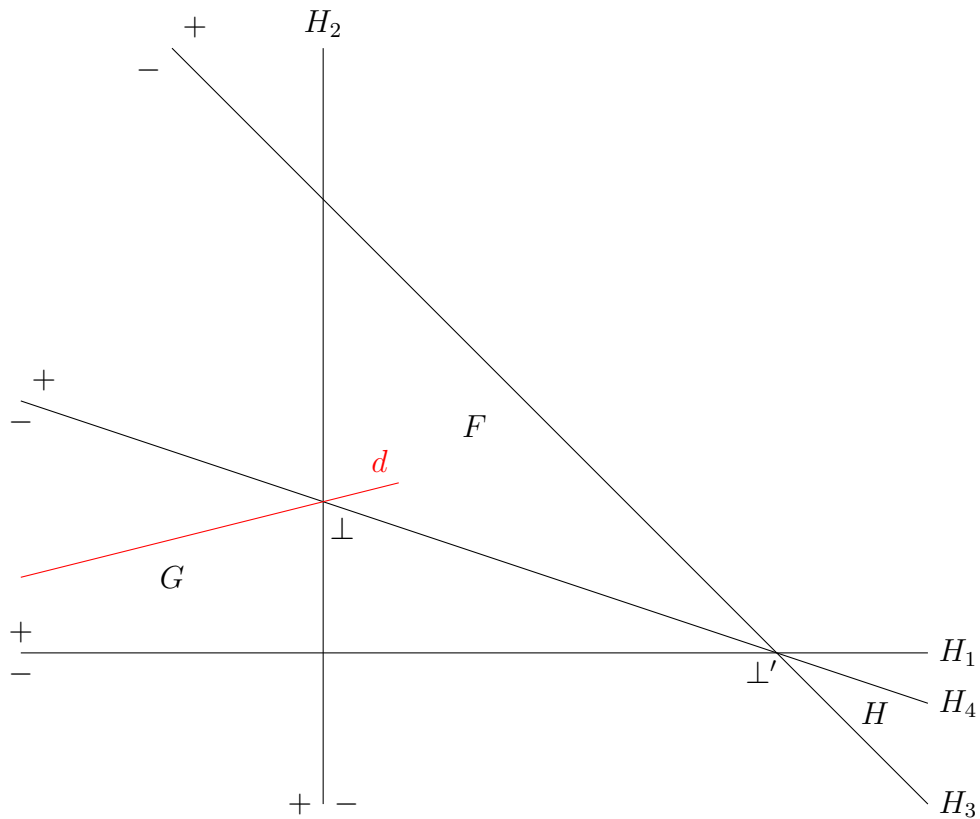
- $\epsilon_i(F) = -$ si l'intérieur relatif de F est inclus dans H_i^- .

Soit la demi-droite d partant d'un point p de intérieur relatif de F et passant par un point q de l'intérieur relatif de \perp . Considérons la première et plus petite face G traversée par d du côté opposé de q par rapport p (voir figure 3.3).

Montrons que $G = \widehat{F}_\perp$. Puisque d croise tout hyperplan H_j pour j tel que $\epsilon_j(\perp) = 0$ en q , on a que $\epsilon_j(G) = -\epsilon_j(F)$. En effet, si $\epsilon_j(F) \neq 0$, alors F est d'un côté de H_j et G est de l'autre côté. Si $\epsilon_j(F) = 0$, alors $p \in H_j$ et d passe par deux points de H_j . Ainsi, $G \subseteq H_j$, car G doit être la plus petite face premièrement traversée par d , donc $\epsilon_j(G) = 0 = -\epsilon_j(F)$. Ceci montre que $\epsilon_j(G) = -\epsilon_j(F)$ pour tout $j \in I$ tel que $\epsilon_j(\perp) = 0$. Soit $k \in I$ tel que $\epsilon_k(\perp) \neq 0$, on a que $\epsilon_k(F) = \epsilon_k(\perp)$ par définition de la relation d'ordre sur les faces. De ce fait p est un point de l'intérieur relatif de $H_k^{\epsilon_k(\perp)}$, donc d est incluse dans l'intérieur relatif du demi-espace $H_k^{\epsilon_k(\perp)}$. Puisque d traverse G , G a un point dans l'intérieur relatif de $H_k^{\epsilon_k(\perp)}$, donc un point intérieur dans l'intérieur relatif de $H_k^{\epsilon_k(\perp)}$. Ainsi, $\epsilon_k(G) = \epsilon_k(\perp) = \epsilon_k(F)$ du fait que G est une intersection d'hyperplans et de demi-espaces. Notons qu'on a montré au passage que $\epsilon_i(\perp) \in \{0, \epsilon_i(G)\}$ pour tout $i \in I$, donc que $\perp \leq G$. C'est pourquoi $G = \widehat{F}_\perp$, donc inv_\perp est bien définie. On dit que \widehat{F}_\perp est la face inverse de F par rapport à \perp . L'inspiration pour le terme « ensemble de vecteurs signes localement inversibles » vient du fait que les hyperplans intersectés par une assez petite région autour d'une face minimale d'un arrangement d'hyperplans non central forment un arrangement d'hyperplans central (voir figure 3.4) où la notion de face inverse existe.

La notion de fonction support s'étend comme suit à un ensemble de vecteurs signes localement inversibles \mathcal{Z} .

Définition 3.3.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{Z} \subseteq \{0, -, +\}^{[n]}$ un ensemble de vecteurs



$$F \leftrightarrow (+, -, -, +), \quad G \leftrightarrow (+, +, -, -), \quad H \leftrightarrow (-, -, +, -),$$

$$\perp \leftrightarrow (+, 0, -, 0), \quad \perp' \leftrightarrow (0, -, 0, 0).$$

$$\text{inv}_{\perp}(+, -, -, +) = (+, +, -, -), \quad \text{inv}_{\perp'}(+, -, -, +) = (-, -, +, -).$$

Figure 3.3 Face inverse dans un arrangement d'hyperplan non central: en haut : l'arrangement d'hyperplans illustré est le même qu'à la figure 1.1 et les hyperplans sont identifiés par H_1, H_2, H_3 et H_4 . La face G est la face inverse de F par rapport à \perp . La demi-droite d est utilisée pour déterminer la face inverse de F par rapport à \perp . La face H est la face inverse de F par rapport à \perp' . En bas : les vecteurs signes de quelques faces et quelques calculs d'inverses.

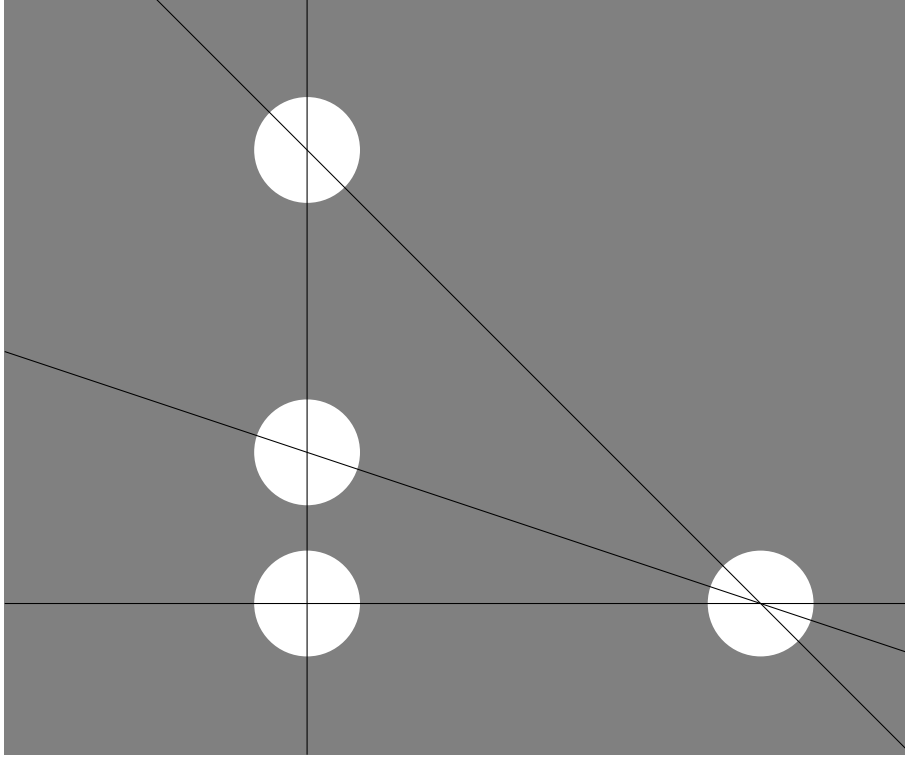


Figure 3.4 Hyperplans d'un arrangement d'hyperplans non central formant un arrangement d'hyperplans central: les régions en blanc autour des faces minimales de cet arrangement d'hyperplan non central intersectent chacune une partie des hyperplans de l'arrangement. Dans chaque cas, l'ensemble des hyperplans intersectés par la région en blanc forment un arrangement d'hyperplans central.

signes inversible, la fonction support de \mathcal{Z} est

$$\begin{aligned} \text{supp} : \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{P}([n]) \\ x &\mapsto \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = 0\} \end{aligned} .$$

Soit $x \in \mathcal{Z}$, on dit que $\text{supp}(x)$ est le support de x .

Lorsque Brown définit la notion de support pour n'importe quelle bande régulière à gauche dans (Brown, 2000) aux sections B.1 et B.2, il montre que $\text{supp}(\mathcal{Z})$

est un semi-treillis (avec élément maximal). Il est facile de déduire que $\text{supp}(\mathcal{Z})$ est partiellement ordonné par inclusion inverse comme $\text{supp}(\mathcal{V})$. Brown montre aussi que supp préserve l'ordre et que $\text{supp}(xy) = \text{supp}(x) \vee \text{supp}(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{Z}$. De plus, la proposition 3.1.1 s'étend immédiatement à un ensemble de vecteurs signes localement inversibles pour qu'on ait $X \vee Y = X \cap Y$ pour tous $X, Y \in \text{supp}(\mathcal{Z})$. Puisque $\text{supp}(\mathcal{Z})$ est un semi-treillis avec élément maximal, le *join* est bien défini pour toute paire d'éléments de $\text{supp}(\mathcal{Z})$. Ainsi, $\text{supp}(\mathcal{Z})$ est un semi-groupe avec le *join* comme opération binaire.

Considérons $\mathbb{K}\mathcal{Z}$ et $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{Z})$ les ensembles des combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{Z} et $\text{supp}(\mathcal{Z})$ respectivement sur le corps \mathbb{K} . L'ensemble $\mathbb{K}\mathcal{Z}$ est une algèbre non forcément unitaire. Cependant, puisque le *join* est bien défini dans $\text{supp}(\mathcal{Z})$, les notions de la section 1.2 s'appliquent à $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{Z})$, donc c'est une algèbre possédant un unique système complet d'idempotents primitifs orthogonaux. Ces idempotents somment à un élément neutre pour la multiplication, donc $\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{Z})$ est une algèbre unitaire. Notons que supp s'étend linéairement à un morphisme d'algèbre sur $\mathbb{K}\mathcal{Z}$. Ainsi, la construction de Saliola a un sens pour $\mathbb{K}\mathcal{Z}$ et produit un système complet d'idempotents orthogonaux de \mathcal{Z} pour chaque section homogène de supp ; on entend par complet que la somme des éléments du système complet est un élément neutre à droite pour la multiplication. En effet, \mathcal{Z} n'a pas forcément un élément neutre pour la multiplication, mais Herman Goulet-Ouellet montre que la construction de Saliola donne un système d'idempotents primitifs orthogonaux qui somme à un élément neutre à droite pour la multiplication (voir (Goulet-Ouellet, 2018), proposition 2.22).

Remarque. Toutes les bandes régulières à gauche dont leur algèbre est unitaire ont été trouvées par Stuart Margolis, Franco Saliola et Benjamin Steinberg ((Margolis *et al.*, 2015), théorème 4.15).

3.3.1 Lunes d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles

Avec (x, y) un couple de vecteurs imbriqués de \mathcal{Z} , on définit la lune $\ell(x, y)$ de \mathcal{Z} comme dans un matroïde orienté. L'ensemble des lunes de \mathcal{Z} sera noté $\Delta[\mathcal{Z}]$. La notion de support d'une lune de \mathcal{Z} est la même que pour une lune d'un matroïde orienté, mais la notion de base a une modification. Soit $L \in \Delta[\mathcal{Z}]$, considérons M_L l'ensemble des éléments minimaux \perp de \mathcal{Z} tels que $\perp z \in L$ si et seulement si $z \in L$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$ tel que $\text{supp}(z) = S(L)$. Une illustration de cet ensemble se trouve à la figure 3.5. Notons qu'il existe un élément $z_\perp \in L$ tel que $\perp \leq z_\perp$ pour chaque $\perp \in M_L$. En effet, si $\perp \in M_L$ n'a pas de tel élément, $\perp z \notin L$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$, car $\perp \leq \perp z$ par (1.5). La définition de M_L indique donc que L est vide, or une lune n'est jamais vide $\frac{1}{2}$. À l'aide de M_L , on définit

$$B'(L) = \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = \epsilon_i(y) \forall x, y \in L \text{ et } \exists \perp \in M_L \text{ tel que } \epsilon_i(\perp) = 0\}.$$

C'est $B'(L)$ qui sera pris comme base de L .

Lemme 3.3.1. *Soient $L \in \Delta[\mathcal{Z}]$ et $x, y \in \mathcal{Z}$ tels que $L = \ell(x, y)$, on a que $\text{supp}(x) \subseteq B'(L)$.*

Démonstration. Soit $i \in \text{supp}(x)$, c'est-à-dire que $\epsilon_i(x) = 0$. Soit $\perp \in \mathcal{Z}$ un élément minimal tel que $\perp \leq x$. Soit $z \in \mathcal{Z}$ tel que $\text{supp}(z) = S(L)$, supposons que $\perp z \in L$, on a $xz = x\perp z = y$ par (1.3). Puisque $S(L) = \text{supp}(y)$, on a que $\text{supp}(z) = \text{supp}(y)$. Ceci indique que $z \in L$. Maintenant, supposons que $z \in L$, on a $x\perp z = xz = y$ par (1.3). Puisque le support est un morphisme d'algèbre qui préserve l'ordre et que $\perp \leq y$, on a

$$\begin{aligned} \text{supp}(\perp z) &= \text{supp}(\perp) \vee \text{supp}(z) \\ &= \text{supp}(\perp) \vee \text{supp}(y) \\ &= \text{supp}(y) \end{aligned}$$

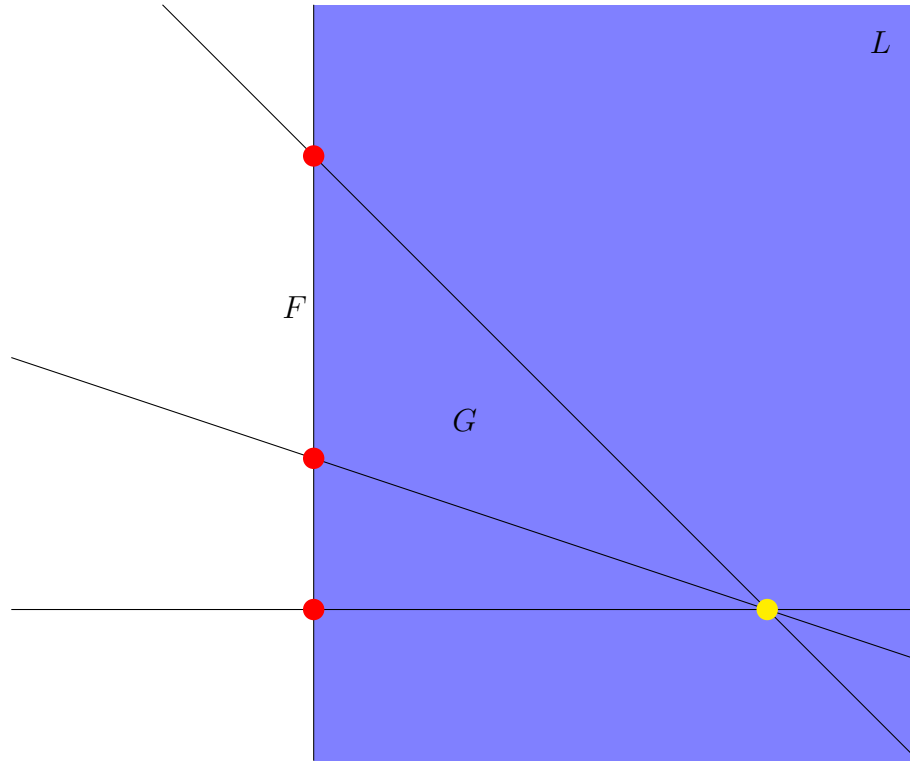


Figure 3.5 Ensemble M_L d'une lune L d'un arrangement d'hyperplan non central: les points rouges désignent les éléments de M_L où $L = \ell(F, G)$. Le point jaune désigne un élément minimal de \mathcal{Z} plus petit qu'au moins un élément de L , mais ne faisant pas partie de M_L . La lune L est l'ensemble des faces de dimension 2 dans la zone en bleu.

Ceci assure que $\perp z \in L$, donc que $\perp \in M_L$. De plus, $\epsilon_i(\perp) \in \{0, \epsilon_i(x)\} = \{0\}$, car $\perp \leq x$. Ainsi, $\epsilon_i(\perp) = 0$. Pour tout $t \in L$, $xt = y$, donc $\epsilon_i(xt) = \epsilon_i(y)$. Puisque $\epsilon_i(x) = 0$, $\epsilon_i(xt) = \epsilon_i(t)$, donc $\epsilon_i(t) = \epsilon_i(y)$. Ainsi, pour tous $y_1, y_2 \in L$, $\epsilon_i(y_1) = \epsilon_i(y) = \epsilon_i(y_2)$, donc $i \in B'(L)$ ce qui indique que $\text{supp}(x) \subseteq B'(L)$. ■

Lemme 3.3.2. Soient $x, y \in \mathcal{Z}$ tels que $x \leq y$ et $\perp \in M_{\ell(x, y)}$, on a que $(\perp x, \perp y)$ est un couple de vecteurs imbriqués et $\ell(\perp x, \perp y) = \ell(x, y)$.

Démonstration. Puisque $\perp x \perp y = \perp xy = \perp y$ par (1.4), on a que $\perp x \leq \perp y$, donc $(\perp x, \perp y)$ est un couple de vecteurs imbriqués. Montrons que $\ell(\perp x, \perp y) \subseteq \ell(x, y)$. Soit $i \in [n]$. Puisque $x \leq y$, alors $\epsilon_i(x) \in \{0, \epsilon_i(y)\}$. Ceci assure que si $\epsilon_i(x) \neq 0$, alors $\epsilon_i(x \perp y) = \epsilon_i(y)$. Si $\epsilon_i(x) = 0$, alors $i \in \text{supp}(x)$, donc $i \in B'(\ell(x, y))$ par le lemme 3.3.1. Par définition de $M_{\ell(x, y)}$, il existe $z_{\perp} \in \ell(x, y)$ tel que $\perp \leq z_{\perp}$, donc que $\epsilon_i(\perp) \in \{0, \epsilon_i(z_{\perp})\}$. Par définition de $B'(L)$, $\epsilon_i(z_{\perp}) = \epsilon_i(y)$, donc $\epsilon_i(\perp) \in \{0, \epsilon_i(y)\}$. Ainsi, on a que $\epsilon_i(x \perp y) = \epsilon_i(y)$. Tout ceci montre que $x \perp y = y$. Additionnellement, soit $j \in [n]$ tel que $\epsilon_j(y) = 0$, on a que $\epsilon_j(x) = 0$, car $x \leq y$. Dans ce cas, on a montré que $\epsilon_j(\perp) \in \{0, \epsilon_j(y)\}$, donc $\epsilon_j(\perp) = \epsilon_j(y)$. Ainsi, $\epsilon_k(y \perp) = \epsilon_k(y)$ pour tout $k \in [n]$, donc $y \perp = y$. Ceci montre que $y \perp y = y$ et on a que $\perp yy = \perp y$, donc que $\text{supp}(\perp y) = \text{supp}(y)$. Maintenant, soit $a \in \ell(\perp x, \perp y)$, on a que $\text{supp}(a) = \text{supp}(\perp y) = \text{supp}(y)$, donc que

$$\text{supp}(\perp a) = \text{supp}(\perp) \vee \text{supp}(a) = \text{supp}(\perp) \vee \text{supp}(y) = \text{supp}(y),$$

car le support est un morphisme d'algèbre qui préserve l'ordre. De plus, $\perp xa = \perp y$, donc $x \perp xa = x \perp y$. Un résultat plus haut et (1.4) donne que $x \perp a = y$, donc que $\perp a \in \ell(x, y)$. Par définition de $M_{\ell(x, y)}$, $a \in \ell(x, y)$, donc $\ell(\perp x, \perp y) \subseteq \ell(x, y)$. Montrons que $\ell(x, y) \subseteq \ell(\perp x, \perp y)$. Soit $b \in \ell(x, y)$, on a que $\text{supp}(b) = \text{supp}(y) = \text{supp}(\perp y)$. De plus, $xb = y$, donc que $\perp xb = \perp y$. Ainsi, $b \in \ell(\perp x, \perp y)$. On a donc que $\ell(\perp x, \perp y) = \ell(x, y)$. ■

Ces lemmes permettent de définir la base d'une lune L de \mathcal{Z} par $B'(L)$ ce qui généralise la notion de base d'une lune d'un matroïde orienté. Il nous sera utile de noter que $\text{supp}(z) = \text{supp}(\hat{z}_{\perp})$ pour tout $z, \perp \in \mathcal{Z}$ tels que \perp est minimal et $\perp \leq z$. En effet, il est facile de remarquer que $\epsilon_i(\hat{z}_{\perp}) = 0$ si et seulement si $\epsilon_i(z) = 0$ pour tout $i \in [n]$ à partir de la définition de la fonction inv_{\perp} .

Proposition 3.3.1. *Soient $L \in \Delta[\mathcal{Z}]$ et $x, y \in \mathcal{Z}$ tels que $L = \ell(x, y)$, on a que $\text{supp}(x) = B'(L)$.*

Démonstration. Si $B'(L) = \emptyset$, alors $B'(L) \subseteq \text{supp}(x)$. Dans le cas contraire, supposons qu'il existe $i \in B'(L) \setminus \text{supp}(x)$, donc il existe $\perp \in M_L$ tel que $\epsilon_i(\perp) = 0$. Le lemme 3.3.2 donne que $L = \ell(\perp x, \perp y)$. Notons que $\perp \leq \perp x$ et considérons $(\widehat{\perp x})_{\perp}$, on a que $\perp x (\widehat{\perp x})_{\perp} \perp y = \perp x \perp y = \perp y$, car $\text{supp}(\perp x) = \text{supp}((\widehat{\perp x})_{\perp})$ et $\perp x \leq \perp y$. Du fait que le support est un morphisme d'algèbres qui préserve l'ordre, on a que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\perp x (\widehat{\perp x})_{\perp} \perp y) &= \text{supp}(\perp x) \vee \text{supp}((\widehat{\perp x})_{\perp}) \vee \text{supp}(\perp y) \\ &= \text{supp}(\perp x) \vee \text{supp}(\perp x) \vee \text{supp}(\perp y) \\ &= \text{supp}(\perp y), \end{aligned}$$

donc que $(\widehat{\perp x})_{\perp} \perp y \in L$. Puisque $\perp x \leq \perp y$, $\epsilon_j(\perp x) \in \{0, \epsilon_j(\perp y)\}$ pour tout $j \in [n]$. Du fait que $i \notin \text{supp}(x)$ et que $\epsilon_i(\perp) = 0$, on a que $\epsilon_i(\perp x) = \epsilon_i(\perp y) \neq 0$. Ainsi, on a que $\epsilon_i((\widehat{\perp x})_{\perp}) = -\epsilon_i(\perp x) = -\epsilon_i(\perp y) \neq 0$, car $\epsilon_i(\perp) = 0$. Ceci assure que $\epsilon_i((\widehat{\perp x})_{\perp} \perp y) = -\epsilon_i(\perp y)$. Cependant, $\epsilon_i((\widehat{\perp x})_{\perp}) = \epsilon_i(\perp y)$ par définition de $B'(L)$. Puisque $\epsilon_i(\perp y) \neq 0$, on a une contradiction. Ainsi, $B'(L) \setminus \text{supp}(x) = \emptyset$, donc $B'(L) \subseteq \text{supp}(x)$. Par le lemme 3.3.1, on a que $\text{supp}(x) = B'(L)$. ■

Définition 3.3.2. La base de $L \in \Delta[\mathcal{Z}]$ est $B'(L) = \{i \in [n] \mid \epsilon_i(x) = \epsilon_i(y) \forall x, y \in L \text{ et } \exists \perp \in M_L \text{ tel que } \epsilon_i(\perp) = 0\}$.

Cette notion de base généralise la notion de base d'une lune L d'un matroïde orienté \mathcal{V} , car un matroïde orienté n'a qu'un seul élément minimum \ominus et il appartient à M_L . En effet, $\ominus z = z$ pour tout $z \in \mathcal{V}$, donc $\ominus z \in L$ si et seulement si $z \in L$. La proposition 3.3.1 assure que le corollaire 3.2.1, la proposition 3.2.2 et le corollaire 3.2.2 se généralisent naturellement aux ensembles de vecteurs signes localement inversibles. En particulier, la généralisation du corollaire 3.2.1 garantit que

$$\ell(x, y) = \ell(z, t) \Leftrightarrow xz = x, \quad zx = z, \quad xt = y, \quad zy = t$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{Z}$ tels que $x \leq y$ et $z \leq t$. Ainsi, la relation (2.1) se généralise aux ensembles de vecteurs signes localement inversibles aussi.

CONCLUSION

Ce mémoire a présenté le lien entre les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits d'un arrangement d'hyperplans \mathcal{A} . Premièrement, on s'est attardé à l'algèbre de Birkhoff de \mathcal{A} d'un arrangement d'hyperplans et au support qui lie cette algèbre avec l'algèbre de Tits de \mathcal{A} . On en a déduit le radical de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} et relevé tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de cette algèbre à l'aide de la méthode Saliola. Deuxièmement, la notion de lune d'un arrangement d'hyperplans a été présentée. À l'aide des lunes de \mathcal{A} , on trouve les fonctions de Möbius non commutatives et les fonctions zeta non commutatives de l'algèbre d'incidence des faces de \mathcal{A} . Ces fonctions définissent tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} . Troisièmement, les résultats sur les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} ont été généralisés à toutes les algèbres construites à partir d'un matroïde orienté. Aussi, l'introduction des ensembles de vecteurs signes localement inversibles a permis d'étendre la notion de lune à plus de bandes régulières à gauche que les matroïdes orientés seulement.

Bien sûr, il reste plusieurs questions ouvertes sur et autour du sujet de ce mémoire :

- La construction de Saliola s'applique à toute bande régulière à gauche, or les notions sur les algèbres données à la section 1.4 ne s'appliquent pas forcément à l'algèbre d'une bande régulière à gauche, car celle-ci n'a pas nécessairement d'élément neutre pour la multiplication (l'algèbre n'est pas

unitaire). Puisque ces résultats indiquent que la méthode Saliola donne tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} , il n'est pas assuré que cette méthode donne tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre d'une bande régulière à gauche. Ceci est le cas pour une algèbre construite à partir d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles. Ainsi, la méthode Saliola donne-t-elle tous les systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux d'une algèbre d'une bande régulière à gauche? Puisque ces systèmes donnent toutes les décompositions en facteurs directs de l'algèbre de Tits de \mathcal{A} , on peut aussi se demander si la construction de Saliola donne toutes les décompositions en facteurs directs indécomposables de l'algèbre d'une bande régulière à gauche.

- Il n'est pas clair que la construction de systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux de \mathcal{A} par les fonctions de Möbius non commutatives et zeta non commutatives est généralisable à une algèbre construite à partir d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles. En effet, le lemme 2.2.1, qui donne le lien entre les fonctions zeta non commutatives de $I_L(\mathcal{A})$ et les sections homogènes du support, suppose l'existence d'un élément minimal de $\Sigma[\mathcal{A}]$ à son deuxième point. Puisqu'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles n'a pas forcément d'élément minimal, le deuxième point du lemme 2.2.1 ne s'étend pas directement à toute algèbre construite à partir d'un ensemble de vecteurs signes localement inversible. Tout de même, le premier point de ce lemme s'applique. Ainsi, le deuxième point du lemme 2.2.1 peut-il être généralisé aux algèbres construites à partir d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles? Si oui, comment ce résultat est-il généralisé?
- La relation (2.1) définie les lunes d'une bande régulière à gauche \mathcal{B} . Cepen-

dant, rien n'assure que $(x, y) \sim (z, t)$ si $\ell(x, y) = \ell(z, t)$ pour tout $x, y, z, t \in \mathcal{B}$ tels que $x \leq y$ et $z \leq t$. Plus précisément, il n'est pas certain que $\text{supp}(x) = \text{supp}(z)$. Ainsi, il est naturel de se demander pour quelles bandes régulières à gauche $\ell(x, y) = \ell(z, t)$ implique que $(x, y) \sim (z, t)$.

- Ce mémoire n'explore pas l'impact de l'axiome (M4) d'un matroïde orienté sur la structure de son algèbre. Cet axiome est nécessaire pour montrer qu'un matroïde orienté est un *poset* gradué (voir (Bjorner *et al.*, 1999) au théorème 4.1.14). Puisque cet axiome est absent d'un ensemble de vecteurs signes localement inversibles, on peut se demander ce que cela change.

APPENDICE A

DÉMONSTRATIONS

A.1 Démonstrations de résultats de la section 2.2.3

Lemme A.1.1 (lemme 2.2.2). *Soit $\mu_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ une fonction de Möbius non commutative, l'ensemble $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]} \subset \mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ tel que*

$$R_G = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K$$

est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$. On dit que la base $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est associée à μ_{nc} .

Démonstration. Puisque $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ comporte $|\Sigma[\mathcal{A}]|$ éléments et que la dimension de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ est aussi $|\Sigma[\mathcal{A}]|$, il suffit de montrer que les éléments de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ sont linéairement indépendants. Soient $r_G \in \mathbb{K}$ pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que

$$0 = \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]} r_G R_G.$$

Par la définition de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et la définition 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]} r_G \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} \mu_{nc}(G, K)K \right) \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]} \left(\sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} r_G \mu_{nc}(G, K) \right) K. \end{aligned}$$

Puisque $\Sigma[\mathcal{A}]$ est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$0 = \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq K} r_G \mu_{nc}(G, K)$$

pour tout $K \in \Sigma[\mathcal{A}]$. En particulier, la définition 2.2.2 indique que

$$0 = \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq \mathcal{O}} r_G \mu_{nc}(G, \mathcal{O}) = r_{\mathcal{O}} \mu_{nc}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = r_{\mathcal{O}}.$$

Soit r le rang de $\Sigma[\mathcal{A}]$, supposons que $r_G = 0$ si le rang de G est inférieur à $m \in \{1, \dots, r\}$. Soit H une face de rang m , par la définition 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G \leq H} r_G \mu_{nc}(G, H) \\ &= r_H \mu_{nc}(H, H) + \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G < H} r_G \mu_{nc}(G, H) \\ &= r_H + \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid G < H} (0) \mu_{nc}(G, H) \\ &= r_H. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, on a que $r_G = 0$ pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$, donc les éléments de $\{R_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ sont linéairement indépendants. \blacksquare

Lemme A.1.2 (lemme 2.2.3). *Soient $F, G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tels que $GF = G$, $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ l'ensemble des faces plus grandes ou égales à G et $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$ l'ensemble des faces plus grandes ou égales à FG . La multiplication à gauche par FG est une bijection de $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ vers $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$.*

Démonstration. Considérons les applications

$$\begin{aligned} \alpha : \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G} &\rightarrow \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG} & \text{et} & \quad \beta : \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG} &\rightarrow \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G} . \\ C_1 &\mapsto FGC_1 & & & C_2 &\mapsto GC_2 \end{aligned}$$

C'est la proposition 1.1.2 qui garantit qu'on a les bons ensembles d'arrivé pour α et β . Soient $C_1 \in \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ et $C_2 \in \Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$, par la proposition 1.1.2 et (1.2), on a

$$\beta(\alpha(C_1)) = \beta(FGC_1) = GFGC_1 = GGC_1 = C_1,$$

$$\alpha(\beta(C_2)) = \alpha(GC_2) = FGGC_2 = FGC_2 = C_2.$$

Ainsi, $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq G}$ et $\Sigma[\mathcal{A}]_{\geq FG}$ sont en bijection par la multiplication à gauche par FG . ■

A.2 Démonstrations de résultats de la section 2.2.4

Lemme A.2.1 (lemme 2.2.5). *Soit $\zeta' \in I_L(\mathcal{A})$ telle que $\zeta'(E, E) = 1$ pour tout $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$. La fonction ζ' est une fonction zeta non commutative s'il existe des bases $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ respectant (2.2) pour lesquels on a*

$$A_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta'(F, K) B_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Soit $F, H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F \leq H$. D'une part, (1.3) et (2.2) donnent que

$$\begin{aligned} A_H &= A_{HF} \\ &= A_H A_F \\ &= A_H \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta'(F, K) B_K \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, KH=K} \zeta'(F, K) B_{HK} \end{aligned}$$

Montrons que la condition $KH = K$ dans la somme est équivalente à $s(HK) = s(K)$. Pour $C \in \Sigma[\mathcal{A}]$, supposons que $CH = C$, alors on a

$$s(HC) = s(H) \vee s(C) = s(CH) = s(C).$$

Maintenant, supposons que $s(CH) = s(C)$, alors $s(C) \vee s(H) = s(C)$, donc $s(H) \leq s(C)$. Par la proposition 1.3.2, on a que $CH = C$. Ainsi, on a

$$A_H = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, s(HK)=s(K)} \zeta'(F, K) B_{HK}.$$

D'autre part, on a

$$A_H = \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid H \leq G} \zeta'(H, G) B_G.$$

Puisque $\{B_K\}_{K \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $H \leq G$, on a

$$\zeta'(H, G) = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G, s(G)=s(K)} \zeta'(F, K).$$

Ainsi, ζ' est une fonction zeta non commutative. ■

Lemme A.2.2 (lemme 2.2.6). *Soit $\mu' \in I_L(\mathcal{A})$ telle que $\mu'(E, E) = 1$ pour tout $E \in \Sigma[\mathcal{A}]$. La fonction μ' est une fonction de Möbius non commutative s'il existe des bases $\{A_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ et $\{B_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ respectant (2.2) pour lesquels on a*

$$B_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu'(F, K) A_K$$

pour tout $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$.

Démonstration. Considérons les cas où $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$ n'est pas un élément maximal de $\Sigma[\mathcal{A}]$. Soit $H \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $F < H$, on a $FH = H \neq F$ par la proposition 1.1.2. Ainsi, par (2.2), on a

$$\begin{aligned} 0 &= A_H B_F \\ &= A_H \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu'(F, K) A_K \\ &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu'(F, K) A_{HK} \\ &= \sum_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]} \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G} \mu'(F, K) \right) A_G. \end{aligned}$$

La somme entre parenthèses aura au moins un terme si $H \leq G$. En effet, si $K = G$, on a bien que $F \leq K$ et $HK = G$ par la proposition 1.1.2. Puisque

$\{A_G\}_{G \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ est une base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$, on a

$$0 = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K, HK=G} \mu'(F, K)$$

pour tout $G \in \Sigma[\mathcal{A}]$ tel que $H \leq G$. Ainsi, μ' est une fonction de Möbius non commutative. ■

A.3 Démonstrations d'un résultat de la section 2.2.5

Corollaire A.3.1 (corollaire 2.2.1). *Soient $\mu_{nc}, \zeta_{nc} \in I_L(\mathcal{A})$ des fonctions de Möbius et zeta non commutatives respectivement telles que $\mu_{nc}^{-1} = \zeta_{nc}$. Les fonctions μ_{nc} et ζ_{nc} sont associées à la même Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$.*

Démonstration. Soient $\{Q'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}, \{R'_F\}_{F \in \Sigma[\mathcal{A}]}$ deux Q' -bases de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$ associées à ζ_{nc} et μ_{nc} respectivement. Soit $F \in \Sigma[\mathcal{A}]$, par la proposition 2.2.1, on a

$$F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \zeta_{nc}(F, K) Q'_K.$$

Par le théorème 2.2.3, on a

$$R'_F = \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) K.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} R'_F &= \sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K} \mu_{nc}(F, K) \left(\sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid K \leq H} \zeta_{nc}(K, H) Q'_H \right) \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} \left(\sum_{K \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq K \leq H} \mu_{nc}(F, K) \zeta_{nc}(K, H) \right) Q'_H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} (\mu_{nc} \zeta_{nc})(F, H) Q'_H \\ &= \sum_{H \in \Sigma[\mathcal{A}] \mid F \leq H} \delta_{\Sigma[\mathcal{A}]}(F, H) Q'_H \\ &= Q'_F \end{aligned} \quad \blacksquare$$

APPENDICE B

LISTE DES NOTATIONS

Chapitre 1

\mathcal{A}	Arrangement d'hyperplan $\{H_i\}_{i \in I}$
$\Sigma[\mathcal{A}]$	Ensemble des faces de \mathcal{A}
\mathcal{O}	Face centrale de \mathcal{A}
\mathcal{D}	Arrangement d'hyperplans de \mathbb{R}^2 constitué des droites d'équations $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ et $y = -\sqrt{3}x$
$\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$	Algèbre de Tits de \mathcal{A}
$\Lambda[\mathcal{A}]$	Ensemble des intersections de \mathcal{A}
$\mathbb{K}\Lambda[\mathcal{A}]$	Algèbre de Birkhoff de \mathcal{A}
$I(P)$	Algèbre d'incidence du <i>poset</i> P
δ_P	L'élément neutre pour la multiplication dans $I(P)$
μ	Fonction de Möbius
ζ	Fonction zeta
$A(T, \mathbb{K})$	Algèbre construite à partir du treillis T avec ensemble de scalaires \mathbb{K}
Q_X	Élément de la Q -base de $\Lambda[\mathcal{A}]$ construit à partir de $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$
E_X	Élément de d'une famille eulerienne de \mathcal{A} indexé par $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$
Q'_F	Élément d'une Q' -base de $\mathbb{K}\Sigma[\mathcal{A}]$

Chapitre 2

$\Delta[\mathcal{A}]$	Ensemble des lunes de \mathcal{A}
$\Delta[\mathcal{A}]_X^Y$	Ensemble des lunes de \mathcal{A} de base $X \in \Lambda[\mathcal{A}]$ et de support $Y \in \Lambda[\mathcal{A}]$
$I_L(\mathcal{A})$	Algèbre d'incidence de lunes de \mathcal{A}
μ_{nc}	Fonction de Möbius non commutative
ζ_{nc}	Fonction zeta non commutative

Chapitre 3

\mathcal{V}	Matroïde orienté contenu dans $\{0, -, +\}^{[n]}$
$\mathbf{0}$	Vecteur nul dans \mathcal{V}
supp	Fonction support de \mathcal{V}
supp(\mathcal{V})	Treillis d'intersections de \mathcal{V}
$\mathbb{K}\mathcal{V}$	Algèbre de \mathcal{V}
$\mathbb{K}\text{supp}(\mathcal{V})$	Algèbre du treillis d'intersections de \mathcal{V}
E_X^u	Élément du système complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\mathbb{K}\mathcal{V}$ associé à une section homogène u de $\text{supp}(\mathcal{V})$ et indexé par $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$
Q'_x	Élément d'une Q' -base de $\mathbb{K}\mathcal{V}$
$\Delta[\mathcal{V}]$	Ensemble des lunes de \mathcal{V}
$\Delta[\mathcal{V}]_X^Y$	Ensemble des lunes de \mathcal{V} de base $X \in \text{supp}(\mathcal{V})$ et de support $Y \in \text{supp}(\mathcal{V})$
$I_L(\mathcal{V})$	Algèbre d'incidence de lunes de \mathcal{V}
\mathcal{Z}	Ensemble de vecteurs signes localement inversibles contenu dans $\{0, -, +\}^{[n]}$
$\Delta[\mathcal{Z}]$	Ensemble des lunes de \mathcal{Z}

RÉFÉRENCES

- Aguiar, M. et Mahajan, S. (2006). *Coxeter groups and Hopf algebras*, volume 23. American Mathematical Soc.
- Aguiar, M. et Mahajan, S. (2017). *Topics in hyperplane arrangements*, volume 226. American Mathematical Soc.
- Assem, I., Simson, D. et Skowronski, A. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press.
- Bidigare, P., Hanlon, P., Rockmore, D. et al. (1999). A combinatorial description of the spectrum for the tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements. *Duke Mathematical Journal*, 99(1), 135–174.
- Bidigare, T. P. (1998). *Hyperplane arrangement face algebras and their associated Markov chains*. (Thèse de doctorat). University of Michigan.
- Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*, volume 25. American Mathematical Soc.
- Björner, A., Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N. et Ziegler, G. M. (1999). *Oriented matroids*. Numéro 46. Cambridge University Press.
- Björner, A., Edelman, P. H. et Ziegler, G. M. (1990). Hyperplane arrangements with a lattice of regions. *Discrete & computational geometry*, 5(3), 263–288.
- Brown, K. S. (2000). Semigroups, rings, and Markov chains. *Journal of Theoretical Probability*, 13(3), 871–938.
- Cartier, P. (1981). Les arrangements d’hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire. In *Séminaire Bourbaki : vol. 1980/81, exposés 561-578*, numéro 23 de Séminaire Bourbaki. Springer-Verlag. talk:561
- Edelman, P. H. (1984). A partial order on the regions of \mathbf{R}^n dissected by hyperplanes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 283(2), 617–631.

- Goulet-Ouellet, H. (2018). *Les bandes régulières à gauche et leurs algèbres*. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.
- Jambu, M. (1988). Arrangements d'hyperplans. i. les groupes de réflexions. *Ann. Sci. Math. Québec*, 12, 73–99.
- Margolis, S., Saliola, F. et Steinberg, B. (2015). Cell complexes, poset topology and the representation theory of algebras arising in algebraic combinatorics and discrete geometry. *arXiv preprint arXiv:1508.05446*.
- Orlik, P. et Solomon, L. (1980). Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Inventiones mathematicae*, 56(2), 167–189.
- Reiner, V. (2005). Lectures on matroids and oriented matroids. *Lecture Notes for ACE Summer School in Geometric Combinatorics*.
- Richter-Gebert, J. et Ziegler, G. M. (2017). *6: Oriented matroids*. Chapman and Hall/CRC.
- Saliola, F. V. (2009). The face semigroup algebra of a hyperplane arrangement. *Canadian Journal of Mathematics*, 61(4), 904–929.
- Stanley, R. P. (2007). *An introduction to hyperplane arrangements, Geometric combinatorics*, (p. 389–496). Numéro 13 de IAS/Park City Mathematics Series. American Mathematical Society, Providence, RI
- Stanley, R. P. (2011). *Enumerative Combinatorics* (deuxième éd.), volume 1.
- Tits, J. (2009). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, volume 386. Springer.
- Zaslavsky, T. (1975). Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1(154).