

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

STRUCTURE DE CRISTAL SUR LES TABLEAUX DOMINO ET PRODUIT
DE TABLEAUX

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

FLORENCE MAAS-GARIÉPY

JANVIER 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Rebecca Patrias pour m'avoir accompagné lors de mon second stage d'initiation à la recherche et pour m'avoir fait découvrir la combinatoire derrière les fonctions symétriques et la théorie de la représentation, et tout particulièrement les tableaux domino.

Merci énormément à Franco Saliola pour ton soutien inconditionnel, tes encouragements constants, ton enthousiasme, ta bonne humeur et ton rire communicatif. Tu es le meilleur directeur qu'on puisse souhaiter.

Merci à Jake Levinson pour ton intérêt pour mon sujet de recherche et pour les échanges de courriels sur les mystères des cristaux.

Merci à toute la magnifique gang du LaCIM, sans qui ces deux années de maîtrise n'auraient pas été aussi plaisantes et profitables. Merci à Pauline pour ton soutien, ton écoute attentive, et évidemment pour ton sourire et ton rire tonitruant et contagieux. Merci à Nadia pour toutes ces activités partagées, pour tes encouragements et pour ton aide par rapport au fonctionnement des ordinateurs : terminal, git, LaTeX, bibTeX, sage, etc. Tu as bien réussi à me convaincre que je voulais faire un doctorat ! Merci à Mélodie pour tous les trucs et conseils sur l'utilisation de LaTeX et bibTeX. Merci à Véronique pour les rires partagés et les séances d'escalade, de danse et de karaoké. Merci à Stéphanie pour ta bonne humeur et ton auto-dérision, et simplement ta présence rafraîchissante et humaine qui a fait du LaCIM un endroit où il faisait bon d'être. Merci à Herman pour avoir relu toutes mes lettres de motivation et autres, pour tes conseils sur l'utilisation de LaTeX, pour tes templates de beamer avec animations de chouettes et surtout

pour ta présence réconfortante et ton sens de l'humour. Merci à Rox-Anne pour ta présence pétillante, ton enthousiasme et ton engagement au sein de l'exécutif de l'AECSM. Merci à Antoine d'avoir partagé ma condition de stagiaire d'été. Nous n'avons pas été grillés à la broche et nous aurons été diplômés avec succès.

Merci à tous les autres que j'ai eu l'occasion de côtoyer au quotidien ces dernières années : Nancy, Carole, Emine, Aram, Nathan, Guillaume, Ben, Charlotte, Vincent. Je vous remercie d'avoir fait de mon expérience à l'UQAM une expérience inoubliable.

Merci à Nathan pour tes encouragements, ta présence à mes côtés tout au long de mes études et ta compréhension. Ton soutien m'a été précieux.

Merci à mes parents, Kees et Christiane, et à ma soeur, Anaïs, pour votre soutien et votre amour inconditionnel. Je suis très chanceuse de vous avoir.

Merci à mes ami(e)s qui m'ont accompagnée et soutenue à leur façon à travers ce processus : Simina, Julie-Anne, Camilla, Cécile, Anaïs, Raph, Sara, Nancy, J.-C. Ma vie serait bien fade sans vous.

Merci aux membres du jury d'évaluation pour leur lecture attentive et leurs suggestions d'améliorations : Christophe Reutenauer, Franco Saliola et Hugh Thomas.

Je tiens finalement à remercier le FRQNT, le CRSNG et la Fondation de l'UQAM pour leur soutien financier.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I NOTIONS PRÉALABLES DE COMBINATOIRE	5
1.1 Partages et tableaux de Young	5
1.1.1 Partages et diagrammes	6
1.1.2 Tableaux de Young	7
1.1.3 Diagonales et mots de lecture	9
1.2 Fonctions symétriques	11
1.2.1 Groupe symétrique et fonctions symétriques	11
1.2.2 Passage des tableaux aux fonctions symétriques, et inversement	13
1.2.3 Fonctions de Schur	13
CHAPITRE II NOTIONS PRÉALABLES DE THÉORIE DE LA RE- PRÉSENTATION DU GROUPE SYMÉTRIQUE	17
2.1 Rappels de la théorie de la représentation	18
2.1.1 Représentations	18
2.1.2 Caractère d'une représentation	19
2.2 Liens entre les partages, les fonctions de Schur et les caractères	20
2.3 Produit de fonctions de Schur et théorie de la représentation	22
CHAPITRE III ALGORITHMES SUR LES TABLEAUX DE YOUNG .	25
3.1 Règle de Littlewood-Richardson	25
3.2 RSK et relations de Knuth	26
3.2.1 Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth	26

3.2.2	Relations de Knuth	28
3.3	Jeu de taquin	29
3.4	Tableaux perforés et échanges de tableaux	32
3.4.1	Extension de partage et de tableaux	33
3.4.2	Mouvements de glisse et paires perforées	34
3.4.3	Échange de tableaux	36
3.5	Calcul des coefficients de Littlewood-Richardson	39
3.5.1	Tableaux de Yamanouchi	40
3.5.2	Propriétés des mots et des tableaux de Yamanouchi	42
3.6	Monoïde plaxique et produit de tableaux	44
3.6.1	Le monoïde plaxique	44
3.6.2	Produit de tableaux	45
	CHAPITRE IV ALGORITHMES SUR LES TABLEAUX DOMINO . . .	49
4.1	Tableaux domino	49
4.1.1	2-noyau et 2-quotient	50
4.1.2	Tableaux domino	52
4.1.3	Diagonales et mots de lecture	53
4.1.4	Tableaux domino de Yamanouchi	54
4.2	Règle de Littlewood-Richardson et tableaux domino	55
4.2.1	Algorithme de couplage	57
4.2.2	Règle de Littlewood-Richardson et tableaux domino	59
4.2.3	Spin et division du carré en sa partie symétrique et anti-symétrique	60
4.3	Algorithme d'échange sur les tableaux domino	64
4.3.1	Algorithme d'échange	65
4.3.2	Familles d'échange	67
	CHAPITRE V CRISTAUX	73
5.1	Définition générale	74

5.2	Cristaux de mots	75
5.3	Cristaux de tableaux	77
5.3.1	Pourquoi s'intéresser particulièrement aux cristaux de tableaux?	79
5.3.2	Morphismes de cristaux	81
5.3.3	Cristaux de tableaux et théorie de la représentation	82
5.3.4	Cristaux de tableaux et ordre de lecture	83
5.4	Opérateurs de cristaux et jeu de taquin	85
5.4.1	Dominance, anti-dominance et opérateurs de cristaux	86
5.4.2	Commutation des glisses de jeu de taquin et des opérateurs de cristaux	87
5.5	Produit de cristaux	94
5.5.1	Produit tensoriel et tableaux en tant que produit de cases	94
5.5.2	Produit tensoriel de cristaux et le monoïde plaxique	96
5.5.3	Produit tensoriel de cristaux de tableaux et produit de tableaux	98
CHAPITRE VI CRISTAUX SUR LES TABLEAUX DOMINO		103
6.1	Bijection de Carré-Leclerc	104
6.1.1	Bijection de Robinson	104
6.1.2	Algorithme de Carré-Leclerc	105
6.1.3	Opérateurs de cristaux pour les tableaux domino	114
6.1.4	Bijection de Carré-Leclerc	117
6.2	Proposition de van Leeuwen	118
6.2.1	Projection de van Leeuwen	119
6.2.2	Résultats de van Leeuwen	122
6.3	Structure de cristal sur les tableaux domino	124
6.3.1	Produit tensoriel de tableaux et produit de tableaux	125
6.3.2	Produit tensoriel, tableaux domino et projection	127
6.3.3	Structure de cristal sur les tableaux domino	135

6.4 Liens avec le monoïde plaxique	136
CONCLUSION	141
ANNEXE A SÉQUENCE DE BORDURE ET TABLEAUX DE RUBANS	145
A.1 Séquence de bordure	145
A.2 Retirer un crochet à partir des séquences de bordure	147
A.3 Tableaux de rubans	148
A.3.1 r -noyau	148
A.3.2 r -quotient	152
A.3.3 Tableaux de rubans	153
A.4 Généralisation de l'algorithme de couplage	155
A.5 Tableaux de rubans et théorie de la représentation	156
ANNEXE B JEU DE TAQUIN SUR LES TABLEAUX DE RUBAN . .	159
B.1 Permutations affines et action sur Par	159
B.2 Action sur les tableaux de r -rubans standards	161
B.3 Chaînes de rubans ouvertes et déplacement de chaînes	166
RÉFÉRENCES	171

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Table des caractères du groupe symétrique S_3	21

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Diagramme de Young associé à $\lambda = (5, 3, 3, 1)$	7
1.2 Tableau de Young semi-standard	8
1.3 Tableau de Young standard	8
1.4 Tableau de Young gauche	9
1.5 Tableau de Young avec ses diagonales	9
1.6 Tableau de Young	11
3.1 Insertion RSK du mot 24132	28
3.2 Coin intérieur (bleu) et coin extérieur (rouge) de $(5, 3, 2, 2, 2)/(2, 1, 1)$	30
3.3 Glisse de jeu de taquin	31
3.4 Rectification du tableau T de la figure 3.3	31
3.5 λ/μ (en rouge) étend μ/ν (en blanc)	33
3.6 Le tableau T étend le tableau S	34
3.7 Tableaux perforés S et T	35
3.8 Paire perforée $S \cup T$	35
3.9 Paire perforée $S \cup T$ où T étend S	37
3.10 Algorithme d'échange appliqué à la paire perforée $S \cup T$	37
3.11 Tableau de Yamanouchi de mot de lecture de colonne 132211231211	41
3.12 Tableau de Yamanouchi de mot de lecture de ligne 132211231211	41
3.13 1_λ pour $\lambda = (5, 3, 2)$	43
3.14 Produit $T * T'$ des tableaux T et T'	46

3.15	Produit des tableaux pour le calcul de $s_{(2,1)}(x_1, x_2)s_{(2,1)}(x_1, x_2)$. . .	47
4.1	Obtention du 2-noyau du partage λ	50
4.2	Pavage par des dominos	52
4.3	Tableau domino	52
4.4	Tableau domino avec ses diagonales D_{2k}	54
4.5	Tableaux domino de Yamanouchi de forme 4433/31	55
4.6	Γ appliqué au couple de tableaux $(t_1, t_2) = (t_1^{(4)}, t_2^{(4)})$	58
4.7	Γ^{-1} appliqué au tableau domino T	59
4.8	Tableaux de Yamanouchi de forme $\nu/(2, 1)$ et de poids $(2, 1)$. . .	64
4.9	Tableaux domino de Yamanouchi de forme $(4, 4, 2, 2)$	64
4.10	Algorithme d'échange appliqué au tableau domino D	66
4.11	Famille d'échange de tableaux	68
4.12	Famille d'échange de tableaux associée au tableau domino D . . .	71
4.13	Échanges dans la famille d'échange de tableaux	71
5.1	Cristal sur les lettres dans [5]	74
5.2	Cristal des mots de longueur 2 sur [4]	76
5.3	Cristal de tableaux correspondant aux mots à deux lettres sur $[n]$	78
5.4	Commutation des glisses de jeu de taquin et des opérateurs de cristaux	92
5.5	Cristal produit $B(1) \otimes B(2)$	99
5.6	Isomorphismes des produits de tableaux	100
6.1	Pseudo-tableau	106
6.2	Pseudo-tableau canonique	106
6.3	Calcul des indices des lettres du mot $w = 321341233$	107

6.4	Une composante connexe du cristal de tableaux domino de forme $(4, 4, 2)$ et d'entrée maximale 4. Les opérateurs de cristaux sont ceux décrits à la section 6.1.3. Les tableaux domino encadrés par une boîte rouge sont ceux calculés par l'algorithme de Carré et Leclerc à l'exemple 6.1.6.	116
6.5	Cristal de tableaux de forme (311) et d'entrée maximale 4, correspond au cristal de tableaux domino de la figure 6.4 pour la projection $\pi(D)$. Le tableau encadré inférieur est la tableau t calculé à l'exemple 6.1.6.	121
6.6	Composante connexe de $B(2) \otimes B(2, 1)$ correspondant au cristal de la figure 6.5 sous l'application $*$	126
6.7	Domino correspondant à (t_1, t_2) sous l'algorithme de couplage	128
6.8	Effet de s_0 ou déplacement des dominos vers l'extérieur	129
6.9	Effet respectif de $s_0 \circ s_1 \circ s_0$ et $s_0 \cdot s_1 \cdot s_0$, deux façons de déplacer les dominos vers l'extérieur : déplacement des chaînes ouvertes uniquement et déplacement de toutes les chaînes non-interdites.	132
6.10	Glisses de chaînes non-interdites (vers l'extérieur) à partir de D	134
6.11	Glisses de chaînes ouvertes (vers l'intérieur) à partir de \hat{D}	134
6.12	Effet d'un opérateur de cristal dans un cristal de produits tensoriels de tableaux, et dans un cristal de tableaux domino	135
6.13	Transition entre les définitions de tableaux domino	136
A.1	Bordure	146
A.2	Retrait du crochet h	148
A.3	Séquence de bordure et retrait de 3-rubans	152
A.4	Tableau standard de 3-rubans	153
A.5	Type d'un ruban selon la case traversée par une diagonale D_{rk}	154
B.1	Effet de s_i sur la bordure d'un partage λ	160
B.2	Effet de s_i sur la case non-fixe du milieu d'un ruban	163

B.3	Cases fixes (rouge) et cases déterminantes (orange) en fonction de la position $pos(\xi)$ d'un domino ξ	163
B.4	Effet de s_2 sur le partage λ/μ	164
B.5	Tableau de 4-rubans standard de forme λ/μ	165
B.6	Effet de s_2 sur les cases non-fixes de milieu de ruban	165
B.7	Effet de s_2 sur l'ensemble des cases non-fixes	166
B.8	Tableau de 4-ruban résultant de l'effet de s_2	167

RÉSUMÉ

Ce mémoire étudie le produit de deux fonctions de Schur, fonctions symétriques par excellence. On s'intéresse en particulier au développement de ce produit dans la base des fonctions de Schur, qui a une signification en théorie de la représentation du groupe linéaire GL_n . L'approche exploitée ici est combinatoire : nous ramènerons systématiquement l'étude des fonctions de Schur à l'étude des tableaux de Young et des manipulations sur ceux-ci.

Nous étudierons deux méthodes combinatoires pour décrire ce produit : la règle de Littlewood-Richardson et le monoïde plaxique de Schützenberger et Lascoux. Cette deuxième méthode décrit une structure de monoïde non-commutatif sur les tableaux de Young. La troisième méthode qui nous intéressera, due à Carré et Leclerc, définit le produit de deux fonctions de Schur en terme de tableaux domino : un tableau domino est alors décrit comme un produit de deux tableaux de Young.

Notre approche sera d'étudier ce produit du point de vue de la théorie des cristaux. Celle-ci donne un cadre et une structure pour vérifier la bonne définition des produits de tableaux. Nous chercherons particulièrement à démontrer l'existence d'une structure de cristal sur les tableaux domino. Nous nous baserons sur des résultats de Carré, Leclerc et van Leeuwen. Nous confirmerons l'existence d'une telle structure. Toutefois, nous devons faire des ajustements à la définition des tableaux domino comme produit de tableaux afin que la structure de cristal sur les tableaux domino soit compatible avec celle sur les produits de cristaux de tableaux.

Mots clefs : Combinatoire, tableaux de Young, tableaux domino, fonctions de Schur, produit de fonctions de Schur, règle de Littlewood-Richardson, monoïde plaxique, théorie des cristaux

INTRODUCTION

Les fonctions symétriques sont très souvent étudiées en combinatoire, tout particulièrement les fonctions symétriques appelées fonctions de Schur. Elles ont des connections avec la théorie de la représentation de certains groupes, comme S_n et GL_n . Elles permettent également de décrire la cohomologie de certaines variétés.

Schur a montré, en 1901, que les représentations irréductibles du groupe symétrique sont en bijection avec la base fondamentale des fonctions symétriques. Cette base prend alors le nom de fonctions de Schur. Il devient alors commun d'étudier systématiquement des fonctions symétriques pour résoudre des problèmes de théorie de la représentation, principalement sous l'influence de Littlewood.

Le point de vue combinatoire des fonctions symétriques qui commence à apparaître fait entrer en scène des concepts importants : les partages et les tableaux de Young. Plusieurs généralisations des tableaux apparaissent, comme les tableaux de rubans dont font partie les tableaux domino.

En 1934, la règle développée par Littlewood et Richardson suggère l'existence une structure algébrique sur les tableaux. L'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth, développé successivement par ces trois mathématiciens entre la fin des années 1930 et le début des années 1970, établit finalement une structure de monoïde non-commutatif sur l'ensemble des tableaux.

Lascoux et Schützenberger explicitent cette structure de monoïde dans (Lascoux et Schützenberger, 1981), et la nomment monoïde plaxique. Cette structure permet alors de mettre en relation les résultats et algorithmes déjà connus sur les tableaux.

Voir (Lascoux et Schützenberger, 1981) pour un historique plus détaillé des résultats ayant mené au développement de cette théorie.

Dans les années 1990, un nouvel outil émerge de la théorie de la représentation : la théorie des cristaux, développée par Kashiwara pour répondre à des questions de représentation d'algèbres de Lie. D'un point de vue combinatoire, les cristaux permettent de donner une structure à un ensemble d'objets. Par exemple, pour un ensemble de tableaux, un tableau est lié à un autre s'ils sont de même forme et diffèrent en une seule entrée de plus ou moins 1. Cette structure est particulièrement intéressante, puisqu'elle permet de mettre en relation de façon surprenante les différents résultats et algorithmes déjà connus sur les tableaux. En particulier, la décomposition d'un cristal en ses composantes connexes est lié à la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire au produit de deux fonctions de Schur. Nous adopterons un point de vue combinatoire basé sur les partages et les tableaux, dont nous ferons un rappel au chapitre 1. Ce produit a, entre autres, une signification du point de vue de la théorie de la représentation, comme nous verrons au chapitre 2. Nous verrons plusieurs méthodes combinatoires pour décrire le produit de deux fonctions de Schur en tant que produit de tableaux au chapitre 3. Nous y aborderons entre autres la règle de Littlewood-Richardson et le monoïde plaxique. La méthode qui nous intéressera toutefois le plus introduit un objet combinatoire particulier : les tableaux domino. Ceux-ci ont des similitudes avec les tableaux de Young, et peuvent décrire ce produit de deux tableaux, comme nous verrons au chapitre 4.

Il est également possible de décrire un produit de tableaux dans le cadre de la théorie des cristaux, comme nous verrons au chapitre 5. Nous nous intéresserons à savoir si une structure de cristal existe sur les tableaux domino et si, de plus,

cette structure est compatible avec le produit de tableaux au sens de la théorie des cristaux. C'est ce que nous étudierons au chapitre 6.

Nous étudierons particulièrement dans ce chapitre un algorithme de Carré et Leclerc apparu dans (Carré et Leclerc, 1995), et un article de van Leeuwen, (van Leeuwen, 2000). Nous verrons que l'algorithme de Carré-Leclerc donne une forêt couvrante pour le graphe de cristal sur les tableaux dominos. Autrement dit, pour un tableau domino, il donne un chemin de ce tableau domino jusqu'à la racine du cristal connexe contenant ce tableau domino. Les travaux de van Leeuwen, pour leur part, font une étude plus approfondie de la structure même de graphe de cristal. Ceci fait alors ressortir certaines de ses particularités.

Pour comprendre certaines des subtilités des interactions entre les opérations que nous étudierons au chapitre 6, nous utiliserons une sorte de jeu de taquin sur les tableaux domino. Celui-ci sera introduit plus généralement pour les tableaux de r -rubans à l'annexe B.

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉALABLES DE COMBINATOIRE

Nous allons tout d'abord procéder dans ce chapitre à quelques rappels sur les partages, tableaux, fonctions symétriques et fonctions de Schur. Un lecteur familier avec ces notions peut aisément passer directement au chapitre suivant. Nous nous baserons sur les sections 7.1 à 7.12 de (Stanley, 1999), nous vous invitons à consulter cet ouvrage pour davantage de détails.

1.1 Partages et tableaux de Young

Les partages et les tableaux de Young sont des objets combinatoires centraux à l'étude qui est ici proposée. Certaines fonctions symétriques, telles les fonctions de Schur, peuvent être décrites comme une somme formelle sur des remplissages de tableaux, dont la forme fixe est un partage; c'est ce que nous verrons dans cette section. Les tableaux domino que nous souhaitons étudier au chapitre 4 ont également une forme globale donnée par un partage. Finalement, les cristaux, que nous verrons au chapitre 5, peuvent également être décrits sur des tableaux et en terme de partages. Bref, les partages sont un peu partout.

1.1.1 Partages et diagrammes

Soit $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ pour $\lambda_i \in \mathbb{N}$. On dit que λ est un *partage de n* si

1. $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ et
2. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$.

Exemple 1.1.1. 1. $\lambda = (2, 1, 1)$ est un partage de 4.

2. $\lambda = (6, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1, 1)$ est un partage de 26.

3. $\lambda = (3, 4, 2, 2, 1)$ n'est PAS un partage.

Notons $Par(n)$ l'ensemble des partages de n , et Par , l'ensemble des partages.

Pour deux partages, on veut déterminer si le premier est « inclus » dans le second.

On appelle cet ordre l'*ordre d'inclusion*. Soit $\mu, \lambda \in Par$, on dit que $\mu \subseteq \lambda$ si $\mu_i \leq \lambda_i \forall i \geq 1$.

À chaque partage, on peut associer un diagramme qui nous donne une représentation visuelle du partage. La notion d'inclusion est alors très naturelle.

Soit $\lambda \in Par(n)$. Le *diagramme de Young* associé à λ est un tableau composé de n cellules vides, justifiés à gauche et ordonnées de façon à ce que la $i^{\text{ème}}$ ligne contienne λ_i cellules.

Exemple 1.1.2. Soit $\lambda = (5, 3, 3, 1)$. La figure 1.1 représente le diagramme de Young associé à λ .

Un partage μ est alors inclus dans un partage λ si son diagramme est inclus entièrement dans le diagramme de λ .

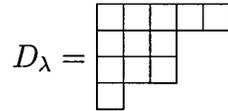


Figure 1.1 Diagramme de Young associé à $\lambda = (5, 3, 3, 1)$

Soit μ, λ , deux partages tels que $\mu \subseteq \lambda$. Le *diagramme de Young gauche* de forme λ/μ est le diagramme de forme λ , dont les cases du diagramme de forme μ ont été enlevées.

Remarquons que la notation utilisée pour les tableaux et les diagrammes est la notation anglaise; les lignes sont notées de haut en bas, alors qu'en notation française, elles le sont de bas en haut. Nous portons ces différences de notations à l'attention du lecteur, car elles sont toutes deux employées dans les références.

1.1.2 Tableaux de Young

Un tableau vide est un objet mathématique bien triste, nous allons donc le remplir de la façon suivante.

Soit $\lambda \in \text{Par}$, un *tableau de Young semi-standard* de forme λ est un remplissage du diagramme de Young associé à λ par des entiers positifs de façon à ce que :

- Les lignes sont faiblement croissantes de gauche à droite.
- Les colonnes sont strictement croissantes de haut en bas.

Exemple 1.1.3. Soit $\lambda = (4, 2, 1, 1)$. La figure 1.2 montre un tableau de Young semi-standard de forme λ .

Remarquons qu'il y a une infinité de tableaux de Young de forme λ si on ne fixe pas d'entrée maximale. Ainsi, nous fixerons généralement une entrée maximale n . On dira *tableaux* pour parler de tableaux de Young semi-standards par la suite.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.2 Tableau de Young semi-standard

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.3 Tableau de Young standard

Nous allons maintenant introduire un peu de vocabulaire associé aux tableaux.

Un *tableau standard* T est tel que ses cellules sont remplies par $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, où n est la taille de T .

Exemple 1.1.4. La figure 1.3 représente un tableau standard T associé au partage $(4, 2)$. La taille de T est 6, T est donc rempli par $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un *tableau gauche* de forme λ/μ est un remplissage du diagramme gauche de forme λ/μ avec les mêmes règles de remplissage : lignes faiblement croissantes et colonnes strictement croissantes.

Un tableau dont la forme est un partage est un *tableau droit*, en opposition aux tableaux dont la forme est gauche.

Exemple 1.1.5. Le tableau illustré à la figure 1.4 est un tableau gauche de forme $(5, 3, 3, 2, 1)/(3, 2, 2, 1)$.

On dit que le *poids* d'un tableau T est le vecteur $wt(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, où $\alpha_i \in \mathbb{N}$ indique le nombre d'entrées i dans T . Le poids d'un tableau sera utilisé à la fois pour les fonctions symétriques et les cristaux. Remarquons que, dans la littérature, on emploie aussi souvent le terme *évaluation* pour parler du poids d'un tableau.

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 13 & 14 \\ & & & 11 & \\ & & & 12 & \\ & & 9 & & \\ & 5 & & & \end{array}$$

Figure 1.4 Tableau de Young gauche

Exemple 1.1.6. Le tableau T illustré à la figure 1.2 est de forme $(4, 2, 1, 1)$ et de poids $wt(T) = (1, 3, 1, 2, 1, 0, \dots)$.

1.1.3 Diagonales et mots de lecture

Pour un tableau de Young, chacune de ses cellules est traversée par une unique diagonale D_k d'équation $y = -x + k$, pour $k \in \mathbb{Z}$. La diagonale principale d'un tableau est la diagonale D_0 , qui coupe l'origine.

Exemple 1.1.7. La figure 1.5 représente un tableau avec ses diagonales.

$$T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & & \end{array}$$

Figure 1.5 Tableau de Young avec ses diagonales

L'importance cruciale des diagonales d'un tableau a été soulignée initialement par Stanton et White dans (Stanton et White, 1985). Les diagonales jouent également un rôle très important pour les tableaux domino et de rubans, comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

Un *mot* est une séquence finie d'entiers où sont permises les répétitions. Si tous les entiers de $[k]$ apparaissent une et une seule fois dans un mot, alors on dit que ce mot est une *permutation de k* . Une *lettre* est un entier dans la séquence d'entiers formant un mot. Généralement, nous nous limiterons à un *alphabet fini* $[n]$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, qui indique les lettres pouvant entrer dans la composition de mots.

Nous noterons qu'un *mot* est de la forme $w = w_1 w_2 \dots w_k$, où $w_i \in [n]$.

On dit que la *longueur d'un mot w* est le nombre de lettres dans w . Le *poids d'un mot w* , tout comme pour les tableaux, est donné par $wt(w) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, où α_i donne le nombre de lettres i dans w .

Soit T un tableau de Young, il y a plusieurs façons de lire les entrées de T de façon à former un mot. Voici celles que nous allons utiliser.

Le *mot de lecture de ligne* de T , est la séquence d'entrées obtenue en lisant les lignes de T de gauche à droite, en partant de la ligne du bas et en progressant vers le haut. Le *mot de lecture de colonne* de T , est la séquence d'entrées obtenue en lisant les colonnes de T de bas en haut, en parcourant les colonnes de gauche à droite. Le *mot de lecture diagonale* de T , est la séquences d'entrées lues en parcourant les diagonales de T de haut en bas, en commençant par la diagonale la plus à gauche, et en séparant le contenu de chaque diagonale par « / ». Ce sont les trois ordres de lectures le plus souvent présentés dans la littérature. On dit que ce sont des *ordres de lecture valides*, car ils parcourent les entrées du tableau du sud-ouest vers le nord-est. Nous noterons $w(T)$ le mot de lecture de T pour un certain ordre de lecture (valide).

Exemple 1.1.8. *Considérons le tableau T de la figure 1.6. Le mot de lecture de ligne de T est 545523341112334, alors que son mot de lecture de colonne est 542153153142334. Son mot de lecture diagonale est 5/4/25/135/13/14/2/3/3/4.*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & & & \\ \hline 5 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.6 Tableau de Young

Remarquons que ces trois types de lecture permettent de retrouver le tableau d'origine, lorsqu'on connaît l'ordre de lecture. En effet, pour un ordre de lecture fixé, un tableau droit est uniquement défini par son mot de lecture en raison des règles sur la croissance des lignes et des colonnes. Notons de plus que ceci s'applique uniquement aux tableaux droits. En effet, le mot de lecture de ligne, par exemple, n'est pas modifié si on décale la première ligne d'une ou de plusieurs cases dans un tableau gauche.

1.2 Fonctions symétriques

Maintenant que nous avons défini les partages et les tableaux, nous pouvons décrire l'ensemble des fonctions symétriques, ainsi qu'une de ses bases les plus connues, donnée par les fonctions de Schur.

1.2.1 Groupe symétrique et fonctions symétriques

Les fonctions symétriques ont un sens en terme de S_n , *le groupe symétrique* pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on peut voir comme l'ensemble des permutations de $[n]$. Une *permutation de $[n]$* est une fonction de $[n]$ vers $[n]$. Nous utiliserons la *notation cyclique*. Par exemple, la permutation $\sigma = (1253)(4)$ envoie 1 sur 2, 2 sur 5, 5 sur 3, 3 sur 1 et 4 sur lui-même. On note alors $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 5$, etc.

Tel que mentionné précédemment, il est également possible d'écrire une permu-

tation sous forme de mot, où la $i^{\text{ème}}$ lettre indique sur quel élément est envoyé la lettre i . Par exemple, $(1253)(4)$ correspond au mot 25143. Alors une permutation de n peut être vue comme un ordre sur les lettres de 1 à n .

Les permutations peuvent aussi être exprimées en terme de *transpositions* $(i, i+1)$, pour $i \in [n-1]$, telles que $(i, i+1)$ échange i et $i+1$, et laisse inchangées toutes les autres valeurs. Les transpositions engendrent le groupe symétrique. Dans notre exemple, $(1253)(4)$ peut être exprimé comme $(12)(34)(45)(34)(23)$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, un jeu de variables pour $n \in \mathbb{N}$. Une fonction symétrique est un polynôme, ou une série formelle, tel que permuter n'importe quel ensemble de ses variables redonne toujours le même polynôme. Formellement, une fonction symétrique $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est telle que pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemple 1.2.1. $f(x, y, z) = x + y + z + x^2y + y^2x + x^2z + y^2z + z^2x + z^2y + x^3y^3z^3$ est une fonction symétrique, puisque permuter ses variables redonne toujours le même polynôme.

Contre-exemple 1.2.2. $g(x, y) = x + x^2 + y^2 + xy + x^2y^3$ n'est pas une fonction symétrique. Il faudrait rajouter les termes suivants : y et x^3y^2 .

En général, quand on parle de fonctions symétriques, x est un jeu de variables « infini ». C'est-à-dire que $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ et $f(x)$ est une « série formelle ». On suppose alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la permutation de n'importe quelles n variables redonne toujours $f(x)$.

Exemple 1.2.3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$,

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 3x_i^4 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in \mathbb{N}}} x_i^2 x_j^5 \text{ est une fonction symétrique.}$$

On note Sym l'ensemble des fonctions symétriques.

1.2.2 Passage des tableaux aux fonctions symétriques, et inversement

Pour pouvoir utiliser des tableaux pour décrire des polynômes, nous allons exploiter le poids des tableaux, que nous avons vu précédemment.

Soit T un tableau de forme $\lambda \in \text{Par}$, et son poids $wt(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Si $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, alors on note $x^T = x^{wt(T)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots$.

Exemple 1.2.4. Pour $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}$, $x^T = x_1^1 x_2^3 x_4^2$.

En particulier, on peut associer un monôme à un tableau (parfois plusieurs tableaux correspondent au même monôme), et un polynôme à un ensemble de tableaux. En fait, dans un polynôme symétrique, un monôme de poids α sera présent autant de fois qu'il y a de tableaux de poids α d'une certaine forme.

Nous allons donc pouvoir décrire les fonctions symétriques en terme de partages et de tableaux. Nous décrirons ici la base formée par les fonctions de Schur, mais il est également possible de décrire d'autres bases de Sym en terme de partages et de tableaux.

1.2.3 Fonctions de Schur

Une des bases de Sym les plus intéressantes au point de vue combinatoire est donnée par les fonctions de Schur. En effet, elles sont entièrement définissables combinatoirement, et elles ont de fortes connections avec la théorie de la représentation du groupe symétrique S_n , et de GL_n , comme nous le verrons au prochain chapitre. Il y a également des connections plus géométriques avec les fonctions de Schur, comme avec la cohomologie de certaines variétés. Voir (Fulton, 1997) pour plus de détails. Voir (Stanley, 1999) pour les preuves des propositions de cette section.

Soit λ un partage, et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. La *fonction de Schur associée* à λ est définie par :

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T$$

où T couvre l'ensemble des tableaux semi-standards de Young de forme λ et d'entrée maximale n .

Lorsque $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, on note $s_\lambda(x)$ par s_λ .

Exemple 1.2.5. *Considérons les tableaux de forme $(2, 1)$ et d'entrée maximale 3.*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Puisque la plus grande entrée dans nos tableaux est 3, alors les termes de notre fonction de Schur $s_{(2,1)}$ seront composés des variables x_1, x_2 et x_3 . On a alors l'équation suivante pour $s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)$.

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

Théorème 1.2.6. *Pour tout partage λ , la fonction de Schur associée à λ , s_λ , est une fonction symétrique.*

La preuve que nous allons présenter de la symétrie des fonctions de Schur est plutôt élégante et exploite uniquement la définition combinatoire des fonctions de Schur. Elle provient de (van Leeuwen, 2001) et se base sur l'*involution de Bender-Knuth*, initialement apparue dans (Bender et Knuth, 1972). Nous la décrivons dans la preuve. Cette involution a été utilisée par Stembridge, dans (Stembridge, 2002), pour faire la preuve de la règle de Littlewood-Richardson. Nous verrons cette règle à la section 3.1.

Preuve. *Pour montrer qu'une fonction de Schur sur n variables $s_\lambda(n)$ est symétrique, il suffit de montrer que pour tout $i < n$, le fait d'échanger les variables x_i et x_{i+1} ne modifie pas la fonction de Schur, puisque toute permutation est décomposable en transpositions $(i, i+1)$. Nous allons donc construire une involution sur l'ensemble des tableaux semi-standards $SSYT(\lambda, n)$ qui échange les composantes α_i et α_{i+1} du poids α d'un tableau.*

Toutes les entrées autres que i et $i+1$ sont inchangées, ainsi que les entrées i et $i+1$ dans les colonnes qui comptent ces deux entrées.

On a alors que les entrées i et $i+1$ restantes sur une même ligne sont adjacentes. Une séquence de r fois i et s fois $i+1$ peut alors être transformée en une séquence de s fois i et r fois $i+1$, puisqu'il n'y a aucun conflit possible avec la ligne supérieure ou inférieure. Cette transformation peut alors être appliquée à chaque ligne indépendamment l'une des autres, forme une involution et a l'effet escompté sur le poids du tableau.

Théorème 1.2.7. *Les fonctions de Schur s_λ avec $\lambda \in \text{Par}(n)$ forment une base de Sym^n , l'ensemble des fonctions symétriques homogènes de degré n , et donc l'ensemble*

$$\{s_\lambda \mid \lambda \in \text{Par}\}$$

forme une base de Sym .

Entre autres, l'objet de ce mémoire est d'étudier le produit de deux fonctions de Schur. Nous verrons plusieurs façons de voir un tel produit dans les prochains chapitres.

CHAPITRE II

NOTIONS PRÉALABLES DE THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION DU GROUPE SYMÉTRIQUE

La théorie de la représentation est une branche des mathématiques qui étudie les groupes et tente de les caractériser par des représentations et les caractères associés. Les caractères irréductibles, en particulier, renferment beaucoup d'informations sur un groupe. Ils sont utilisés entre autres en cristallographie et en chimie pour identifier les cristaux et molécules à partir de leurs groupes de réflexions, et aussi dans la théorie des quantas en physique.

L'objectif premier de la théorie de la représentation est souvent de déterminer la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles. Nous nous pencherons sur le problème équivalent, mais nettement plus accessible, de déterminer la décomposition du caractère associé en caractères irréductibles. Nous nous concentrerons ici sur les représentations du groupe symétrique S_n et, par extension, de GL_n , le groupe général linéaire pour n . Notons que la théorie présentée ici est celle sur les complexes, soit un corps de caractéristique zéro.

Nous allons commencer par des rappels généraux sur la théorie de la représentation, puis nous verrons comment elle est reliée aux fonctions symétriques, aux fonctions de Schur et aux tableaux. Ces notions ne sont pas essentielles à la compréhension de la suite, mais permettent de mieux comprendre les motivations

sous-jacentes. Un lecteur familier avec ces notions peut donc aisément passer directement au chapitre suivant. Nous verrons au chapitre 5 un lien entre les représentations de GL_n et les cristaux de tableaux. À moins d'indications contraires, ce chapitre se base sur les chapitres 1 et 2 de (Sagan, 2001).

2.1 Rappels de la théorie de la représentation

2.1.1 Représentations

Une *représentation* φ de G est un morphisme de groupe $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ pour V un espace vectoriel. Pour une base fixée de V , on a donc une matrice inversible $M(g)$ décrivant l'action de $\varphi(g)$ sur cette base, pour chaque $g \in G$.

Puisque φ est un morphisme, on doit avoir

1. $\varphi(1_G) = Id_V$ où 1_G est l'unité de G et $Id_V(v) = v$ pour tout $v \in V$.
2. $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, pour tout $g, h \in G$.

On peut voir V comme un G -module lorsqu'on le munit de l'action $g \cdot v = \varphi(g)(v)$. Pareillement, tout G -module peut être vu comme une représentation de G . C'est l'approche que nous privilégions ici.

Théorème 2.1.1 (Théorème de Maschke). *Si V est un sous-module de U pour l'action de G , alors il existe un sous-module W de U également stable pour l'action de G tel que $U \simeq V \oplus W$.*

Un *module irréductible* W est tel qu'il ne peut être décomposé en sous-modules stables pour l'action de G autres que lui-même et $\{0\}$. On s'intéresse alors à déterminer une décomposition en sous-modules irréductibles.

2.1.2 Caractère d'une représentation

À chaque représentation φ de G , on peut associer un *caractère* $\chi_\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$, défini par $\chi_\varphi(g) = \text{tr}(M(g))$. Si V est un G -module pour une action de G définie par $g \cdot v = \varphi(g) \cdot v$, on note alors $\chi_\varphi = \chi_V$.

On dit que χ_V est un *caractère irréductible* si et seulement si V est irréductible.

Les caractères ont la propriété d'encoder énormément d'information sur les représentations associées, et sont nettement plus pratiques à manipuler. Ils sont donc notre outil principal pour comprendre les représentations. Les propriétés suivantes des caractères découlent de la définition de représentation et de caractère.

Proposition 2.1.2 (Propriétés des caractères).

1. $\chi_V(1_G) = \dim(V)$.
2. $\chi_V = \chi_W$ si et seulement si $V \simeq W$ en tant que G -modules.
3. Si $g, h \in G$ sont conjugués, alors $\chi_V(g) = \chi_V(h)$. Ainsi χ_V est stable sur les classes de conjugaison de G .
4. Si $V \simeq U \oplus W$, alors $\chi_V = \chi_U + \chi_W$.

On peut définir un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur les caractères tel que les caractères irréductibles sont orthonormaux. En particulier, si ϕ est un caractère et ψ , un caractère irréductible, alors $\langle \phi, \psi \rangle$ est la multiplicité de ψ dans ϕ . On a alors les résultats suivants.

Proposition 2.1.3. Si $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} m_i V_i$, où $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et où les V_i sont des sous-modules irréductibles stables sous l'action de G , et deux à deux non-isomorphes, alors

1. $\chi_V = \sum_{i=1}^k m_i \chi_{V_i}$ où les χ_{V_i} sont irréductibles.
2. $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = m_i$ est la multiplicité du module V_i dans V .

2.2 Liens entre les partages, les fonctions de Schur et les caractères

Il est possible de montrer que le nombre de caractères irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G . On a alors le résultat suivant dans le cas du groupe symétrique S_n .

Proposition 2.2.1. *Les représentations irréductibles de S_n sont en bijection avec les partages de n . On peut ainsi associer à chaque représentation irréductible de S_n (et son caractère), un partage de n .*

Remarquons que les partages de n décrivent les types cycliques de S_n , qui donnent les classes de conjugaisons de S_n . Par l'énoncé précédent, le nombre de partages de n est donc exactement le nombre de caractères irréductibles de S_n , et le nombre de représentations irréductibles de S_n . La preuve formelle de la proposition précédente passe par la construction des *modules de Specht*, que nous ne verrons pas ici.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \text{Par}(n)$, il y a exactement une représentation (ou caractère) irréductible de S_n qui est associée à λ .

Notons le caractère irréductible indexé par λ par χ^λ . Nous avons vu que les classes de conjugaisons du groupe symétrique sont indexées par les partages ρ de n qui décrivent le type cyclique des permutations. Par exemple, la permutation $(371)(68)(245)(9) \in S_9$ est de type cyclique $(3, 3, 2, 1) = (3^2, 2^1, 1^1)$, de même que $(1)(23)(456)(789)$, ces deux permutations sont donc dans la même classe de conjugaison. Un caractère de S_9 prendra alors la même valeur sur ces deux permutations, puisque les caractères sont stables sur les classes de conjugaison. Pour un caractère χ^λ de S_n , on peut alors noter par χ_ρ^λ la valeur qu'il prend sur la classe de conjugaison de type cyclique $\rho = (k^{r_k}, \dots, 2^{r_2}, 1^{r_1}) \in \text{Par}(n)$.

Tableau 2.1 Table des caractères du groupe symétrique S_3

Caractères irréductibles	Classes de conjugaison et type cyclique associé		
	$(a)(b)(c) = (1, 1, 1)$	$(ab)(c) = (2, 1)$	$(abc) = (3)$
$\chi^{(3)}$	1	1	1
$\chi^{(1,1,1)}$	1	-1	1
$\chi^{(2,1)}$	2	0	-1

Ces valeurs peuvent alors être notées dans un tableau de caractères, tel qu'illustré à la figure 2.1.

Nous avons vu que les fonctions de Schur sont également indexées par les partages de n . Ces fonctions ont la particularité d'avoir plusieurs définitions indépendantes dans des branches mathématiques pourtant a priori distinctes. La première définition que nous avons vue est entièrement combinatoire et celle que nous verrons ici provient de la théorie de la représentation du groupe symétrique.

Soit $p_k = \sum_i x_i^k$. La fonction de Schur de forme λ vérifie

$$s_\lambda = \sum_{\rho \vdash n} \chi_\rho^\lambda \prod_k \frac{p_k^{r_k}}{r_k! k^{r_k}}.$$

La fonction de Schur s_λ encode donc les valeurs que prend χ^λ sur chacune des classes de conjugaison indexée par son type cyclique ρ . Ainsi, les fonctions de Schur encodent exactement les caractères irréductibles des groupes symétriques !

Voyons maintenant le lien entre la définition combinatoire des fonctions de Schur et la théorie de la représentation.

Une *représentation pour GL_n* est de la forme suivante.

$$\begin{aligned}\varphi : GL_n &\rightarrow GL_m \\ M &\mapsto M'.\end{aligned}$$

On dit qu'une représentation φ de GL_n est polynomiale si toutes les entrées de la matrice $M' = \varphi(M)$ sont des polynômes en les entrées de M . En fait, il est possible de montrer que si x_1, x_2, \dots, x_n sont les valeurs propres de M dans sa forme de Jordan, alors le caractère de φ est un polynôme symétrique en exactement x_1, x_2, \dots, x_n .

Les fonctions de Schur sont alors les caractères irréductibles de GL_n .

Tout cela justifie bien qu'on s'y intéresse. En particulier, le produit de ces polynômes ayant potentiellement un nombre infini de variables a un intérêt particulier en théorie de la représentation, comme nous le verrons à la section suivante.

2.3 Produit de fonctions de Schur et théorie de la représentation

On peut s'intéresser au *produit tensoriel* de G -modules. Pour deux G -modules V et W , $V \otimes W$ est un G -module lorsque muni de la multiplication suivante.

$$g(v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w) \quad \forall g \in G, v \in V, w \in W$$

Le caractère (produit) de ce G -module est alors $\chi_V \cdot \chi_W$, où χ_V et χ_W sont respectivement les caractères de V et de W .

En particulier, on s'intéresse au cas où $V = W$, soit $V \otimes V$, de caractère χ_V^2 . Ce G -module a la particularité d'être décomposable en deux sous-modules. Ceux-ci sont en somme directe et sont respectivement dits symétrique, noté $S^2(V \otimes V)$, et anti-symétrique, noté $\Lambda^2(V \otimes V)$. Autrement dit, $V \otimes V = S^2(V \otimes V) \oplus \Lambda^2(V \otimes V)$.

Définissons $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ tel que $\tau(v \otimes w) = (w \otimes v)$. On peut définir $S^2(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V | \tau(x) = x\}$ et $\Lambda^2(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V | \tau(x) = -x\}$, d'où leur attribution de la caractéristique symétrique et anti-symétrique.

Notons par χ_S le caractère de $S_2(V \otimes V)$ et χ_Λ le caractère de $\Lambda_2(V \otimes V)$. Alors $\chi_V^2 = \chi_S + \chi_\Lambda$. Il peut être utile de distinguer ainsi entre la *partie symétrique et anti-symétrique du carré d'un caractère*, puisque cela permet potentiellement de déterminer de nouveaux caractères irréductibles.

On peut s'intéresser en particulier au produit de deux fonctions de Schur. Puisqu'elles sont des caractères, alors leur produit en est également un. Ce produit n'est toutefois pas nécessairement irréductible. L'expression de ce produit dans la bases des fonctions de Schur donne alors le développement de ce caractère produit en caractères irréductibles. Nous verrons quelques méthodes pour exprimer le produit de deux fonctions de Schur aux sections 3.1, 3.6.2 et 6.1.2. Tel que vu précédemment, il sera intéressant de considérer, parmi la décomposition d'un tel carré en fonctions de Schur, lesquelles participent à sa partie symétrique et anti-symétrique. La méthode que nous verrons à la section 6.1.2 nous permettra en particulier de faire cette distinction.

CHAPITRE III

ALGORITHMES SUR LES TABLEAUX DE YOUNG

À moins d'indications contraires, ce chapitre se base sur le chapitre 3 de (Sagan, 2001). Les sections 7.11 à 7.14 de (Stanley, 1999), de même que l'annexe 1 de (Stanley, 1999), sont de très bonnes ressources pour une étude plus approfondie des sujets présentés ici.

3.1 Règle de Littlewood-Richardson

Le chapitre précédent motive l'intérêt de mieux comprendre le produit de deux fonctions de Schur, et tout particulièrement son développement dans la base des fonctions de Schur. La règle de Littlewood-Richardson décrit exactement ce développement. L'équation 3.1 illustre cette règle.

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}, \quad (3.1)$$

où les $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson.

Ce type de multiplications a des applications, entre autres, en théorie de la représentation, tel que vu au chapitre précédent, mais également en algèbre et en géométrie.

En particulier, on a que

$$c_{\lambda, \mu}^{\nu} = \langle s_{\lambda} s_{\mu}, s_{\nu} \rangle = \langle s_{\nu/\lambda}, s_{\mu} \rangle = \langle s_{\nu/\mu}, s_{\lambda} \rangle.$$

L'histoire de la règle de Littlewood-Richardson est assez rocambolesque, pleine de rebondissements, de revirement de situations et de découvertes. Voir l'Appendice 1 de (Stanley, 1999) et la section 4 de (van Leeuwen, 2001) pour une description détaillée de cette histoire. En particulier, près de 40 ans se sont écoulés entre l'énoncé du théorème par Littlewood et Richardson dans les années 1930, sans preuve, suivie peu de temps après d'une première preuve assez boiteuse et incomplète de Robinson, et les premières preuves complètes de l'énoncé, réalisées dans les années 1970.

Il y a donc un nombre impressionnant de preuves de la règle de Littlewood-Richardson, qui utilisent des algorithmes développés essentiellement pour réaliser cette preuve. Certains d'entre eux sont devenus aujourd'hui très importants en combinatoire, comme l'algorithme de RSK et le jeu de taquin. Nous allons décrire ces algorithmes, puis nous verrons différentes méthodes pour calculer les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$.

3.2 RSK et relations de Knuth

3.2.1 Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth

L'*algorithme de Robinson-Schensted-Knuth*, ou *RSK* pour les intimes, est une bijection combinatoire bien connue entre les mots sur l'alphabet $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ et les paires données par un tableau de Young semi-standard P et un tableau de Young standard Q ayant tous deux la même forme. Cet algorithme consiste en un processus d'insertion d'un mot pour obtenir un tableau de Young semi-standard, soit le premier tableau de la paire évoquée ci-haut. Le second tableau enregistre

alors l'ordre dans lequel les nouvelles cellules sont créées dans le premier tableau, et est donc standard. C'est pourquoi on nomme généralement ces deux tableaux, respectivement, le *tableau d'insertion* et le *tableau d'enregistrement* du mot inséré. L'algorithme d'insertion est décrit en détails à la section 7.11 de (Stanley, 1999), ainsi qu'au chapitre 4 de (Fulton, 1997).

Nous nous contenterons ici de donner une brève description de cet algorithme, ainsi qu'un exemple explicite.

Soit un mot $w = w_1w_2 \dots w_n$. À chaque étape i du processus, l'objectif est d'insérer la $i^{\text{ème}}$ lettre du mot w dans le tableau de Young semi-standard obtenu à la fin de l'étape précédente, de manière à obtenir un tableau de Young semi-standard $P(i)$, appelé le tableau d'insertion pour l'étape i . La première étape consiste à insérer la première lettre dans le tableau vide \emptyset .

La $i^{\text{ème}}$ lettre est insérée à la fin de la première ligne de $P(i-1)$ seulement si elle est plus grande ou égale à toutes les entrées de cette ligne. Autrement, elle déloge la plus petite entrée ℓ de cette première ligne qui est plus grande qu'elle. Cette entrée ℓ est ensuite insérée dans la deuxième ligne. Cette étape se termine lorsque toutes les procédures de délogement sont terminées.

Le second tableau enregistre la position de la nouvelle cellule ajoutée à $P(i)$ par une cellule de position correspondante et d'entrée i . Le tableau obtenu est appelé le tableau d'enregistrement de cette étape, noté $Q(i)$. Par définition, il est standard et de même forme que $P(i)$.

L'algorithme se termine lorsque toutes les lettres du mot ont été insérées. Les tableaux d'insertion et d'enregistrement du mot sont alors ceux obtenus à la toute dernière étape de l'algorithme. Si w est composé de n lettres, alors $P(n) = P$ est le tableau d'insertion de w , et $Q(n) = Q$ est le tableau d'enregistrement de w .

Exemple 3.2.1. Soit $w = 24132$ le mot à insérer. Cette insertion est vue étape par étape à la figure 3.1 et donne la paire de tableaux $(P, Q) = (P(5), Q(5))$.

$$\begin{array}{l}
 \text{Étape 1 : } \emptyset \leftarrow 2 \quad P(1) = \boxed{2} \quad Q(1) = \boxed{1} \\
 \\
 \text{Étape 2 : } \boxed{2} \leftarrow 4 \quad P(2) = \boxed{2 \ 4} \quad Q(2) = \boxed{1 \ 2} \\
 \\
 \text{Étape 3 : } \boxed{2 \ 4} \leftarrow 1 \quad P(3) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad Q(3) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \text{Étape 4 : } \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \leftarrow 3 \quad P(4) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad Q(4) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \text{Étape 5 : } \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \leftarrow 2 \quad P(5) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad Q(5) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Figure 3.1 Insertion RSK du mot 24132

Remarquons que, si un tableau T a comme mot de lecture w pour un ordre de lecture fixé, alors le tableau d'insertion de w par l'algorithme de RSK sera précisément T .

Remarquons également qu'il est relativement commun que deux mots aient le même tableau d'insertion. Par exemple, 132 et 312 ont le même tableau d'insertion. On peut alors se demander quelles conditions sont nécessaires pour que deux mots aient le même tableau d'insertion.

3.2.2 Relations de Knuth

On appelle les classes de mots ayant les mêmes tableaux d'insertions les *classes d'équivalence de Knuth*. Elles ont été décrites dans (Knuth, 1970).

Il est possible de montrer que les classes d'équivalence de Knuth sont stables sous les *relations de Knuth* :

- $acb \simeq_K cab$, où $a < b < c$,
- $bac \simeq_K bca$, où $a < b < c$.

Autrement dit, si deux mots sont dans la même classe d'équivalence, alors il existe une séquence finie de relations de Knuth qui les lient.

Remarquons que 132 et 312 sont Knuth-équivalents par la première relation de Knuth, ce qui explique qu'ils aient le même tableau d'insertion.

Les classes d'équivalence de Knuth sont très importantes, entre autres parce qu'elles prennent part dans une des preuves de la règle de Littlewood-Richardson. Les relations de Knuth définissent également le *monoïde plaxique* introduit par Schützenberger et Lascoux dans (Lascoux et Schützenberger, 1981) que nous verrons plus en détail à la section 3.6. Ce monoïde a été décrit par Schützenberger comme un des monoïdes fondamentaux de l'algèbre ! Ce monoïde est celui des mots sur un alphabet totalement ordonné et quotienté par les relations de Knuth. En particulier, les éléments du monoïde plaxique peuvent être vus comme des tableaux de Young, comme nous verrons plus loin.

3.3 Jeu de taquin

Une autre preuve de la règle de Littlewood-Richardson exploite le *jeu de taquin*. Cet algorithme bien connu permet, entre autres, de déplacer les cases d'un tableau gauche pour le rendre droit. Cet algorithme est également lié aux relations de Knuth, et a été initialement développé par Schützenberger dans (Schützenberger, 1977). Nous adopterons le terme « glisse de jeu de taquin » pour parler de mouvement de glissement de Schützenberger, afin de les distinguer des autres types de glisses que nous verrons, mouvements d'échange et glisses de rubans.

Pour pouvoir décrire ces glisses de jeu de taquin, nous devons tout d'abord introduire certaines notions préalables.

Soit λ/μ une forme gauche. Si b est une case de μ telle que $\lambda/(\mu/b)$ est une forme gauche, alors on dit que b est un *coin intérieur* de λ/μ .

Similairement, si b une case non contenue dans λ et telle que $\lambda \cup b$ est un partage, alors $(\lambda \cup b)/\mu$ est une forme gauche et on dit que b est un *coin extérieur* de λ/μ .

Exemple 3.3.1. *Un coin intérieur et un coin extérieur de $(5, 3, 2, 2, 2)/(2, 1, 1)$ sont respectivement indiqués en bleu et en rouge.*

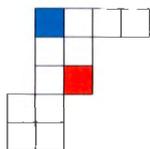


Figure 3.2 Coin intérieur (bleu) et coin extérieur (rouge) de $(5, 3, 2, 2, 2)/(2, 1, 1)$

Soit T un tableau et b un coin intérieur de T (de la forme de T). Une *glisse de jeu de taquin* en b consiste à déplacer la case vide b à travers T , en l'interchangeant successivement avec les cases voisines vers le sud-est selon les règles suivantes jusqu'à ce que la case b n'ait plus de voisins au sud-est :

1. Si b a un unique voisin au sud-est, alors on échange b avec ce voisin.
2. Sinon, b a deux voisins au sud-est, u et u' .
 Si $u < u'$, alors on échange b avec u .
 Si $u = u'$, alors on échange b avec la case au sud.

Une glisse de jeu de taquin déplace un tableau vers l'intérieur, soit vers le nord-ouest. On dit aussi que c'est une *glisse de jeu de taquin intérieure*. Quand on peut passer d'un tableau T à un tableau T' par un certain nombre de glisses de jeu de taquin intérieures, on note $T \triangleright T'$.

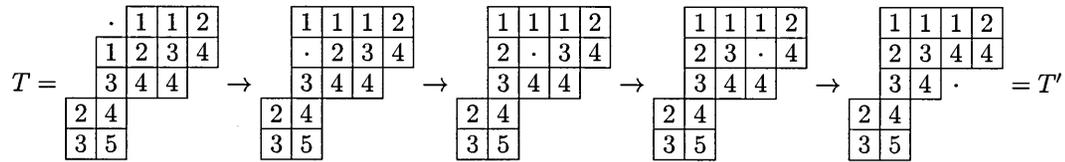
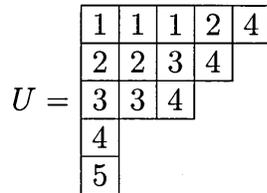


Figure 3.3 Glisse de jeu de taquin

Figure 3.4 Rectification du tableau T de la figure 3.3

Si on poursuit les glisses de jeu de taquin intérieures jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de coin intérieur, la forme du tableau est droite. On appelle ce tableau droit U une *rectification de T* . Nous verrons que cette rectification est unique à la proposition 3.3.4.

Exemple 3.3.2. La figure 3.3 représente une glisse de jeu de taquin intérieure appliquée au tableau T en la case située à la première ligne et deuxième colonne. La figure 3.4 représente une rectification de T .

Soit T un tableau et b un coin extérieur de T . Une *glisse de jeu de taquin extérieure* en b , consiste à déplacer la case b à travers U en l'interchangeant successivement avec les cases voisines vers le nord-ouest, jusqu'à ce qu'elle n'ait plus de voisins au nord-ouest.

Quand on peut passer d'un tableau T à un tableau T' par un certain nombre de glisses de jeu de taquin extérieures, on note $T \triangleleft T'$.

Deux tableaux sont *équivalents pour le jeu de taquin* si une suite de glisses de jeu de taquin (intérieures ou extérieures) permet de passer de l'un à l'autre.

Proposition 3.3.3. (*Schützenberger, 1977*) *Soit deux tableaux gauches T et T' . On a T et T' sont équivalents pour le jeu de taquin si et seulement si leurs mots de lecture sont Knuth-équivalents.*

Voir la section 3.9 de (Sagan, 2001) ou la section 2.1 de (Fulton, 1997). Nous verrons à la section 5.5.2 qu'en fait, pour un tableau fixé, ses mots de lectures pour l'ordre de lecture de ligne et de colonne sont Knuth-équivalents. Cela signifie entre autres qu'on peut prendre n'importe quel ordre de lecture valide dans la proposition précédente. Reiner et Shimozono ont particulièrement étudié ce genre de questions dans (Reiner et Shimozono, 1995).

Proposition 3.3.4. (*Schützenberger, 1977*), (*Haiman, 1992*) *Soit T un tableau de forme gauche. La rectification de T est unique et ne dépend pas de l'ordre dans lequel les glisses de jeu de taquin sont effectuées.*

Preuve. *Supposons qu'une série de glisses de jeu de taquin envoie T sur le tableau droit U et qu'une autre série de glisses envoie T sur U' . Soit $\text{mot}(U)$, $\text{mot}(U')$ les mots de lecture respectifs de U et U' pour un ordre de lecture fixé. On a que $\text{mot}(U) \simeq_K \text{mot}(U')$, puisqu'on peut obtenir l'un de l'autre par des glisses de jeu de taquin. Puisque les mots Knuth-équivalents ont le même tableau d'insertion et que les tableaux droits sont égaux à l'insertion de leur mot de lecture, alors on a que $U = P(\text{mot}(U)) = P(\text{mot}(U')) = U'$.*

Le lien entre les équivalences de Knuth et les glisses de jeu de taquin sera, entre autres, utile à la section 6.3.

3.4 Tableaux perforés et échanges de tableaux

Les paires perforées et les mouvements de glisse généralisent l'algorithme de jeu de taquin et ont été développés principalement par Benkart et Sottile dans (Benkart

et Sottile, 1996). Cette section se base sur cet article. La notion d'échange de tableaux sera particulièrement utile à la section 4.3.

3.4.1 Extension de partage et de tableaux

Pour pouvoir parler d'échange de tableaux, on a besoin tout d'abord de la notion d'extension d'un partage.

Si $\nu \subseteq \mu \subseteq \lambda$, alors on dit que λ/μ étend μ/ν . On peut alors considérer également leur *union* λ/ν .

Exemple 3.4.1. Soit $\lambda = (5, 3, 3, 2, 2)$, $\mu = (3, 2, 2, 1)$ et $\nu = (2, 1, 1)$. On a bien que $\nu \subseteq \mu \subseteq \lambda$. À la figure 3.5, λ/μ est représenté en rouge, μ/ν en blanc, λ/μ étend μ/ν et leur union λ/ν est formée des cases rouges et blanches.

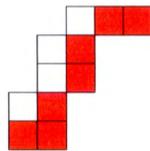
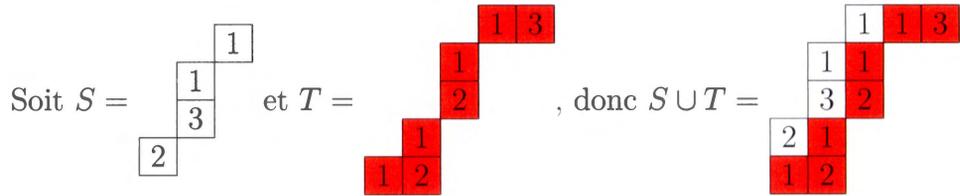


Figure 3.5 λ/μ (en rouge) étend μ/ν (en blanc)

Soit deux tableaux semi-standard S et T de forme respective μ/ν et λ/μ , alors on dit que T étend S . $S \cup T$ est le tableau obtenu de S et T par leur union, de forme λ/ν .

Exemple 3.4.2. Soit S de forme μ/ν et T de forme λ/μ pour $\lambda = (5, 3, 3, 2, 2)$, $\mu = (3, 2, 2, 1)$ et $\nu = (2, 1, 1)$, comme dans l'exemple précédent. T étend S , et le tableau $S \cup T$ représenté à la figure 3.6 est de forme λ/ν . Remarquons que $S \cup T$ n'est pas nécessairement un tableau semi-standard, et qu'on garde trace des cases appartenant à chaque tableau initial.

Figure 3.6 Le tableau T étend le tableau S

3.4.2 Mouvements de glisse et paires perforées

Les mouvements de glisse sur les paires perforées généralisent les glisses de jeu de taquin et permettent de faire passer un tableau à travers un autre de manière à échanger leurs positions relatives.

Soit T un tableau et b un coin intérieur de T . Une *glisse de contraction de T dans b* consiste à déplacer la case b à travers T , en l'interchangeant successivement avec les cases voisines vers le sud-est, selon les mêmes règles que pour le jeu de taquin, jusqu'à ce que la case b n'ait plus de voisins au sud-est. Soit c un coin extérieur de T . Une *glisse d'extension de T dans c* , inversement, consiste à déplacer la case c à travers T en l'interchangeant successivement avec les cases voisines vers le nord-ouest, jusqu'à ce que la case c n'ait plus de voisins au nord-ouest.

Une glisse de contraction correspond donc exactement à une suite de mouvements du jeu de taquin sur les cases vides à l'intérieur de la forme du tableau, et une glisse d'extension, au mouvement inverse.

Soit γ une forme gauche. Un *tableau perforé U* de forme γ est le remplissage de certaines cases de γ par des entiers positifs de la façon suivante :

- Soit u, u' les entrées respectives de deux cases non-vides de U . Si la case contenant u est au nord-ouest de celle contenant u' , alors $u \leq u'$.
- Les entrées d'une colonne sont distinctes.

Autrement dit, lorsqu'on considère les cases non-vides, les lignes sont faiblement croissantes de gauche à droite et les colonnes sont strictement croissantes de haut en bas.

Soit S, T deux tableaux perforés de forme gauche γ . Si, ensemble, ils remplissent intégralement γ sans répétition de cases, alors on dit que S et T forment une *paire perforée*. On note cette paire $S \cup T$.

Remarquons que $S \cup T$ n'est pas nécessairement un tableau semi-standard, et qu'on garde trace des cases appartenant à chaque tableau.

Exemple 3.4.3. Soit S et T , les deux tableaux perforés de forme gauche $\gamma = (6, 6, 5, 2)/(3, 1)$, représentés à la figure 3.7. Ils forment la paire perforée de forme γ représentée à la figure 3.8.

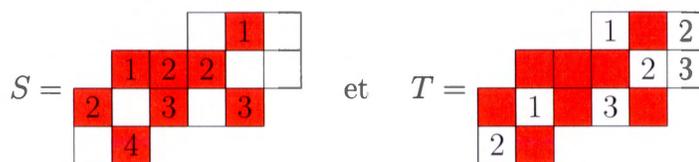


Figure 3.7 Tableaux perforés S et T

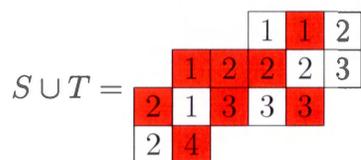


Figure 3.8 Paire perforée $S \cup T$

3.4.3 Échange de tableaux

Les mouvements de glisse d'extension et de contraction sont parfaitement compatibles avec les tableaux perforés et les paires perforées. Soit $s \in S$ et $t \in T$ deux voisins dans $S \cup T$, leur échange produit un *mouvement d'échange* si ce mouvement étend S et contracte T . En particulier, le résultat doit être une paire perforée.

Une paire perforée $S \cup T$ est *complètement échangé* si aucune paire $(s, t) \in S \times T$ ne peut être échangée.

On dit alors que S est *complètement étendu*, car toutes les glisses d'extension possibles ont été effectuées, et T est *complètement contracté*, car toutes les glisses de contraction possibles ont été réalisées. On peut alors décrire un algorithme qui décrit l'échange entre deux tableaux, où l'un étend l'autre. On obtient alors une paire de tableaux complètement échangée où la position relative des deux tableaux est inversée.

Algorithme 3.4.4. Algorithme d'échange

- *Entrée* : deux tableaux gauches S, T tels que T étend S
- *Sortie* : paire perforée complètement échangée S', T'

Tant que la paire perforée S', T' obtenue de S, T n'est pas complètement échangée,

1. *Déterminer \hat{S}' l'ensemble de cases de S' pouvant être échangées avec une case de T' . Soit $s \in \hat{S}'$ la case contenant l'entrée maximale de \hat{S}' la plus au nord-ouest. Autrement dit, si plusieurs cases contiennent la valeur maximale pour \hat{S}' , alors on prend celle la plus au nord-ouest.*
2. *Échanger s avec le voisin dans T selon les règles du mouvement d'échange.*

Remarquons que S' est simplement utilisé comme un ensemble d'instructions donnant l'ordre dans lequel les glisses de contractions commencent dans T' . Nous verrons que l'ordre des mouvements d'échange n'est pas important.

Exemple 3.4.5. Appliquons l'algorithme d'échange à la paire perforée $S \cup T$ représentée à la figure 3.9, où S, T sont des tableaux semi-standard et T étend S . La figure 3.10 représente les étapes de l'algorithme d'échange pour passer des paires perforées $S \cup T$ à $T' \cup S'$, où S' étend T' . Les éléments en gras sont ceux échangés pour passer à la paire perforée suivante.

$$S \cup T = \begin{array}{cccc} & & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 1 & \\ 2 & 2 & 3 & 3 & & \\ 2 & & & & & \end{array}$$

Figure 3.9 Paire perforée $S \cup T$ où T étend S

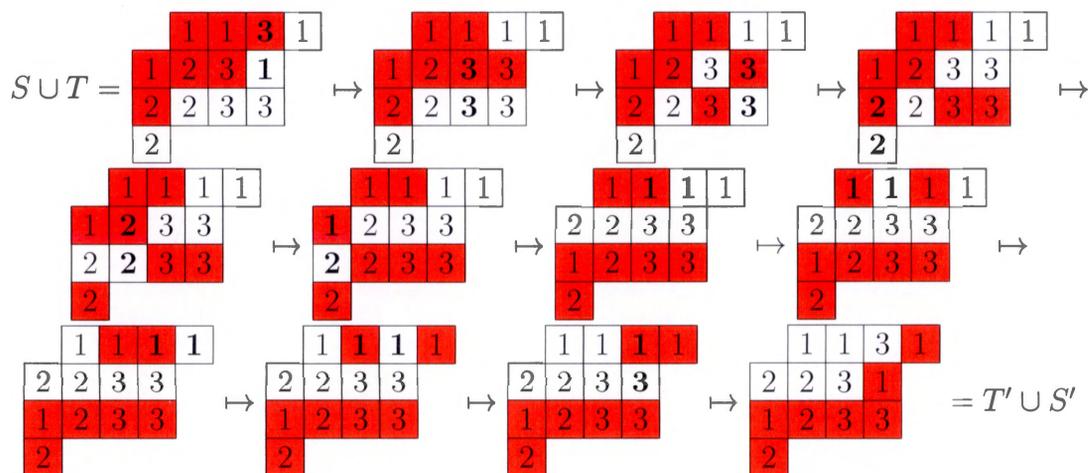


Figure 3.10 Algorithme d'échange appliqué à la paire perforée $S \cup T$

Une glisse de jeu de taquin appliquée à un tableau de forme λ/μ peut être décrite en terme d'échange de tableaux : on échange une case du tableau vide de forme μ avec le tableau de forme λ/μ . L'algorithme d'échange généralise donc bien le jeu de taquin.

Nous pouvons maintenant décrire certaines propriétés des échanges de tableaux.

Théorème 3.4.6. *Soit S, T deux tableaux semi-standards tels que T étend S . L'échange $(S, T) \mapsto (T', S')$, noté $X(S, T) = (T', S')$ possède les propriétés suivantes :*

1. T' et S' sont des tableaux de Young semi-standards et S' étend T' .
2. $T' \cup S'$ a la même forme que $S \cup T$.
3. S et S' ont le même poids, de même que T et T' .
4. T' et S' sont ne dépendent pas de la séquence d'échanges utilisée par l'algorithme d'échange. Autrement dit, effectuer des mouvements d'échanges jusqu'à ce que S et T soient complètement échangés donnera T' et S' peu importe la séquence d'échanges utilisés.
5. S et S' sont respectivement Knuth-équivalents. De même pour T et T' .
6. $X(T', S') = (S, T)$.
7. Si $T = U \cup V$ est une décomposition de T en deux tableaux où V étend U , alors on peut échanger S avec T en deux étapes, en échangeant d'abord S avec U , puis avec V . On a alors que si $X(S, U) = (U', S')$ et $X(S', V) = (V', S'')$, alors $X(S, U \cup V) = (U' \cup V', S'')$. On a un résultat correspondant si S admet une décomposition.

Voir (Benkart et Sottile, 1996) pour la preuve de ces propriétés.

Certaines paires de tableaux semi-standards (S, T) formant une paire perforée ont la propriété particulière d'être envoyées sur elles-mêmes par l'algorithme d'échange. Autrement dit, pour ces paires de tableaux, $X(S, T) = (S, T)$. En particulier, S et T ont alors le même poids. On dit alors que la paire (S, T) est *auto-commutante*. Nous verrons que ces paires de tableaux ont un rôle particulier en lien avec les tableaux domino à la section 4.3.

3.5 Calcul des coefficients de Littlewood-Richardson

Rappelons que la règle de Littlewood-Richardson est donnée par l'équation suivante.

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c'_{\lambda,\mu} s_\nu, \quad (3.2)$$

où les $c'_{\lambda,\mu}$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson.

Plusieurs méthodes existent pour calculer les $c'_{\lambda,\mu}$ de l'équation et pour décrire combinatoirement le produit de deux fonctions de Schur. Nous en verrons trois. L'intérêt d'avoir plusieurs méthodes pour ce calcul est entre autres que chacune offre des avantages par rapport aux autres, en offrant une meilleure compréhension de la mécanique du produit ou en permettant un calcul des $c'_{\lambda,\mu}$ plus efficace. Remarquons qu'il demeure peu facile de calculer la valeur des $c'_{\lambda,\mu}$.

La première méthode, que nous verrons dans cette section, a été développée par Littlewood et Richardson dans (Littlewood et Richardson, 1934) et correspond à calculer le nombre de tableaux de Yamanouchi de forme ν/λ et de remplissage μ .

La deuxième méthode, que nous verrons à la section suivante, correspond à une sorte de produit de tableaux développé par Lascoux et Schützenberger dans (Lascoux et Schützenberger, 1981). Ce produit utilise le jeu de taquin et généralise l'algorithme de RSK, vu comme le produit d'un tableau et d'une case comprenant l'entrée à insérer. Cette méthode permet une autre vision du produit de deux fonctions de Schur.

La troisième méthode, que nous verrons à la section 4.2, établit un couplage de tableaux de Young en un tableau domino et peut être également généralisée au produit de plusieurs fonctions de Schur à l'aide des tableaux de ruban. Cette généralisation est décrite à l'annexe A.

Nous pouvons maintenant décrire la règle de Littlewood-Richardson, qui fait intervenir les tableaux de Littlewood-Richardson, plus souvent connus sous le nom de tableaux de Yamanouchi.

3.5.1 Tableaux de Yamanouchi

Un *mot de Yamanouchi* est un mot $w = w_1 w_2 \dots w_k$ tel que le poids de tout suffixe (facteur à droite) $w_j w_{j+1} \dots w_k$ de w est un partage. Autrement dit, pour tout suffixe, le nombre de 1 est plus grand que le nombre de 2, qui est plus grand que le nombre de 3, etc.

On parle également parfois de *mots de treillis* ou *permutations de treillis*, respectivement « lattice word » et « lattice permutation » en anglais.

Exemple 3.5.1. *132211231211 est un mot de Yamanouchi. En effet, le poids de ses suffixes est respectivement (1), (2), (2, 1), (3, 1), (3, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 2, 1), (5, 2, 1), (5, 3, 1), (5, 4, 1), (5, 4, 2), (6, 4, 2).*

Un *tableau de Yamanouchi* est un tableau dont le mot de lecture de colonne est un mot de Yamanouchi. On dit parfois aussi *tableaux de Littlewood-Richardson*.

Proposition 3.5.2. *Le mot associé à un tableau dépend de l'ordre de lecture choisi. Toutefois, si un tableau est de Yamanouchi pour un ordre de lecture, alors il l'est également pour tout autre ordre de lecture valide (décrits à la section 1.1.3)*

Cette proposition est un corollaire direct de la proposition 5.3.11 que nous verrons plus loin. À notre connaissance, elle n'a pas été énoncé ailleurs dans la littérature.

Exemple 3.5.3. *Un tableau de Yamanouchi correspondant au mot de Yamanouchi 132211231211 pour l'ordre de lecture des colonnes est illustré à la figure 3.11.*

Si l'ordre de lecture choisi est plutôt celui des lignes, alors on obtient un tableau illustré à la figure 3.12.

						1	1
					1	2	
		1	1	2	3		
	2	2					
1	3						

Figure 3.11 Tableau de Yamanouchi de mot de lecture de colonne 132211231211

						1	1
					1	2	
		1	1	2	3		
	2	2					
1	3						

Figure 3.12 Tableau de Yamanouchi de mot de lecture de ligne 132211231211

Proposition 3.5.4. *Les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ sont donnés par le nombre de tableaux de Yamanouchi de forme ν/λ et de poids μ .*

Remarquons qu'il n'est pas facile de calculer le nombre de tableaux de Yamanouchi d'une certaine forme et d'un certain remplissage sans en faire l'énumération.

Certaines valeurs de $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ ne sont toutefois pas trop compliquées à calculer. En particulier, la règle de Pieri détermine le cas des bandes verticales et horizontales. D'autres règles donnent également les valeurs pour d'autres partages ayant une forme particulière.

Proposition 3.5.5. $c_{\lambda,\mu}^{\nu} = 0$ si $\lambda \not\subseteq \nu$.

Proposition 3.5.6. $c_{\lambda,\mu}^{\nu} = c_{\mu,\lambda}^{\nu}$

Proposition 3.5.7.

$$c_{\lambda, (k)}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu/\lambda \text{ est une bande horizontale de longueur } k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où une bande horizontale est un ensemble de cases tel qu'aucunes sont situées dans la même colonne.

Proposition 3.5.8.

$$c_{\lambda, (1^k)}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu/\lambda \text{ est une bande verticale de longueur } k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où une bande verticale est un ensemble de cases tel qu'aucunes ne sont situées dans la même ligne.

3.5.2 Propriétés des mots et des tableaux de Yamanouchi

Nous allons voir ici quelques propriétés des mots et tableaux de Yamanouchi qui seront particulièrement utiles au chapitre 5.

Remarquons que pour tout partage $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ le mot $k^{\lambda_k} \dots 2^{\lambda_2} 1^{\lambda_1}$ est un mot de Yamanouchi qui correspond pour la lecture de ligne à l'unique tableau de forme λ et de poids λ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est remplie par λ_i entrées i .

Notons un tel tableau 1_{λ} .

Exemple 3.5.9. Pour $\lambda = (5, 3, 2)$, le tableau 1_{λ} est illustré à la figure 3.13. Le mot de Yamanouchi associé est 3322211111.

Proposition 3.5.10. (Knuth, 1970) L'ensemble des mots de Yamanouchi est stable sous les relations de Knuth. En conséquent, l'ensemble des tableaux de Yamanouchi est stable sous les glisses de jeu de taquin.

$$1_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 3.13 1_λ pour $\lambda = (5, 3, 2)$

Ceci nous permet d'affirmer la proposition suivante.

Proposition 3.5.11. *La rectification d'un tableau de Yamanouchi gauche de poids λ est 1_λ . Et inversement, si la rectification d'un tableau gauche est 1_λ , alors ce tableau est un tableau de Yamanouchi de poids λ .*

Preuve. *Soit T un tableau de Yamanouchi. Puisque les glisses de jeu de taquin ne modifient pas les entrées du tableau T , alors la rectification U de T contient exactement λ_i entrées i . Puisque U doit être un tableau de Yamanouchi par la proposition précédente, alors la dernière entrée de la première ligne du tableau doit être un 1, et donc toutes les entrées de la première ligne doivent être des 1. La dernière entrée de la seconde ligne doit être un 2, puisque U est un tableau de Yamanouchi, et donc toutes les entrées de la seconde ligne doivent être des 2. Par récurrence, $U = 1_\lambda$.*

Soit maintenant un tableau gauche S dont la rectification est 1_λ . 1_λ est de Yamanouchi, et les tableaux de Yamanouchi sont stables sous les glisses de jeu de taquin, donc S est de Yamanouchi. De plus, les glisses de jeu de taquin ne modifient pas les entrées du tableau, donc les poids de S et de 1_λ coïncident. D'où $wt(S) = wt(1_\lambda) = \lambda$.

On a donc que $c_{\lambda,\mu}^\nu$ compte le nombre de tableaux de forme ν/λ qui sont équivalents à 1_μ pour les glisses de jeu de taquin.

3.6 Monoïde plaxique et produit de tableaux

3.6.1 Le monoïde plaxique

Tel qu'énoncé précédemment, le *monoïde plaxique* introduit par Schützenberger et Lascoux dans (Lascoux et Schützenberger, 1981) est le monoïde des mots sur un alphabet totalement ordonné (nous considérons ici l'alphabet $[n]$) et quotienté par les relations de Knuth. Celui-ci donne une autre interprétation des coefficients de Littlewood-Richardson.

Proposition 3.6.1. *Chaque élément du monoïde plaxique est bijectivement associé à un unique tableau de Young droit.*

Preuve. *Un élément du monoïde plaxique est une classe d'équivalence des mots sous les relations de Knuth. Soit un mot w , le représentant d'une telle classe. On peut trouver un tableau T dont le mot de lecture est w , pour un ordre de lecture fixé. On peut alors déterminer le tableau droit U qui est la rectification de T , de même poids et de mot de lecture w' . Par les propositions précédentes sur les relations de Knuth et les glisses de jeu de taquin, on a que $T \triangleright U$ et $w \simeq_K w'$.*

Donc w et w' font donc partie de la même classe d'équivalence et correspondent au même élément dans le monoïde plaxique. De plus, tout mot de cette classe est Knuth-équivalent à w' .

Nous avons vu que les classes d'équivalences pour les relations de Knuth correspondent aux classes de mots qui sont envoyés sur le même tableau par l'algorithme de RSK. Nous avons également vu que le tableau d'insertion par l'algorithme de RSK du mot de lecture d'un tableau droit (pour un ordre de lecture fixé) redonne ce tableau. Ainsi, le tableau d'insertion par RSK de w' est U et tous les mots faisant partie de la classe d'équivalence de w et w' seront envoyés sur U .

3.6.2 Produit de tableaux

On peut décrire un produit de tableaux à partir des propriétés du monoïde plaxique.

Soit deux mots w et w' sur $[n]$, qui correspondent respectivement aux tableaux T et T' selon l'ordre de lecture de ligne. La concaténation des mots w et w' correspond au *produit de tableaux* $T * T'$ où les deux tableaux sont joints en une seule forme gauche telle qu'aucune ligne (et aucune colonne) compte à la fois une case de T et de T' , T étant placé au sud-ouest de T' . Si T et T' sont respectivement de formes λ et μ , alors on note la forme de $T * T'$ par $\lambda * \mu$. Remarquons que cette définition tient pour tout ordre de lecture valide.

On a alors que $ww' \simeq_K w''$, où w'' est le mot de lecture de la rectification $U \triangleleft (T * T')$.

Remarquons que tout produit de tableau $T_1 * T_2$ possède une rectification, qui correspond à la classe du monoïde plaxique de son mot de lecture $w(T_1)w(T_2)$, mais que chaque tableau rectifié peut correspondre à plus d'un produit $T_1 * T_2$.

Exemple 3.6.2. Soit $w = 2121342312$ et $w' = 312211$, les mots de lecture respectifs des tableaux T et T' dont le produit est illustré à la figure 3.14. On a donc que $ww' = 2121342312312211 \simeq_K 4333222222111111$.

*Remarquons que le produit $T * T'$ est un tableau de Yamanouchi, et que ww' est un mot de Yamanouchi. Or si w' est un mot de Yamanouchi, w ne l'est pas! Cela s'explique par le fait que w est $(3, 2, 1)$ -Yamanouchi, c'est-à-dire qu'il a la propriété de devenir de Yamanouchi si on le concatène à un mot de Yamanouchi de poids $(3, 2, 1)$. Nous n'entrerons pas davantage dans les détails de ce cas de figure, mais il est important de noter qu'il existe.*

Remarquons que la concaténation de deux mots de Yamanouchi sera toujours un mot de Yamanouchi, par définition.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & & 1 & 2 \\
 & & 2 & 3 \\
 & 1 & 3 & 4 \\
 1 & 2 & & \\
 2 & & &
 \end{array} \\
 T =
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & 1 \\
 1 & 2 & 2 \\
 3 & &
 \end{array} \\
 T' =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & 3 & & \\
 & & 1 & 2 & & & \\
 & 1 & 2 & & & & \\
 1 & 2 & & & & & \\
 2 & & & & & &
 \end{array} \\
 T * T' =
 \end{array}
 \triangleright
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 3 & 3 & 3 & & & \\
 4 & & & & &
 \end{array} \\
 = U.
 \end{array}$$

Figure 3.14 Produit $T * T'$ des tableaux T et T'

Ce type de produit de tableaux a été initialement développé par Schensted dans (Schensted, 1961), puisque l'algorithme d'insertion de RSK correspond à une récurrence de ce type de produit, où on ajoute une seule lettre à la fois au mot concerné, et donc où on fait le produit d'une seule case à la fois avec le tableau correspondant. L'algorithme n'utilise toutefois pas du tout les glisses de jeu de taquin, mais décrit directement l'unique tableau droit correspondant au mot obtenu, du point de vue du monoïde plaxique.

Lascoux et Schützenberger décrivent par contre explicitement ce type de produit et son effet dans le monoïde plaxique dans (Lascoux et Schützenberger, 1981).

On a alors que le produit de deux tableaux T_1, T_2 correspond en terme de RSK à l'insertion du mot de lecture de T_2 dans T_1 . Ce produit peut également être utilisé pour calculer le produit de deux fonctions de Schur.

Exemple 3.6.3. Pour $n = 2$, le produit des tableaux composant

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2) s_{(2,1)}(x_1, x_2)$$

est donné par les produits illustrés à la figure 3.15. Si on considère la forme des tableaux, on a que

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2)s_{(2,1)}(x_1, x_2) = s_{(4,2)}(x_1, x_2) + s_{(3,3)}(x_1, x_2).$$

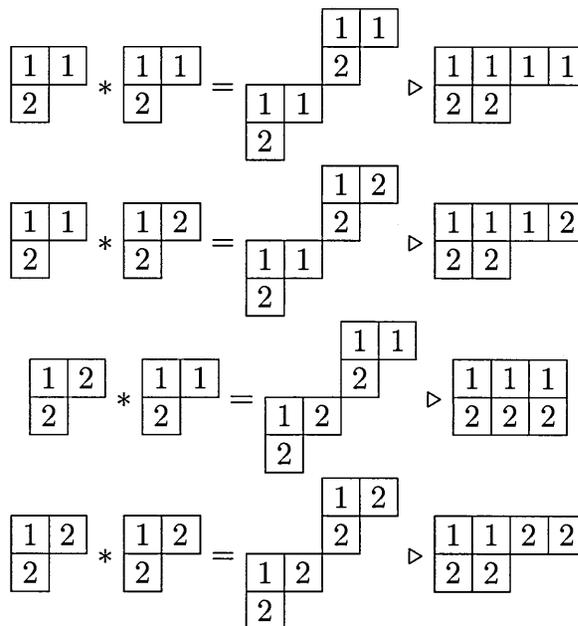


Figure 3.15 Produit des tableaux pour le calcul de $s_{(2,1)}(x_1, x_2)s_{(2,1)}(x_1, x_2)$

Remarquons que, bien qu'élégante du point de vue théorique, cette technique demande de faire une énumération exhaustive de tous les tableaux en cause et d'en faire le produit explicitement. Entre autre, dans l'exemple précédent, la description du produit ne donne pas le même résultat pour deux ou trois variables, en particulier parce qu'il y a bien plus de tableaux possibles pour trois variables que pour deux. De plus, bien que le produit de deux tableaux de Yamanouchi donne nécessairement un tableau de Yamanouchi par définition, on a également certains cas où, tel que vu dans l'exemple 3.6.2, le produit d'un mot avec un mot de Yamanouchi peut produire un mot de Yamanouchi sous certaines conditions. Il n'est donc pas évident de calculer les coefficients de Littlewood-Richardson à

l'aide de cette méthode. Cette méthode a malgré tout l'avantage de permettre assez facilement de calculer la classe de la concaténation de deux mots dans le monoïde plaxique et de donner une vision différente de la mécanique du produit de deux fonctions de Schur. Nous verrons un autre avantage de cette technique à la section 6.3, où elle permettra de mieux comprendre des manipulations sur les tableaux domino.

CHAPITRE IV

ALGORITHMES SUR LES TABLEAUX DOMINO

Les tableaux domino seront utilisés pour définir une troisième méthode permettant de calculer les coefficients de Littlewood-Richardson et de décrire le produit de deux fonctions de Schur. Cette méthode a l'avantage de donner la décomposition du carré d'une fonction de Schur en parties symétrique et antisymétrique, tel que décrit à la section 2.3.

Nous commencerons tout d'abord par définir les tableaux domino, qui formeront notre sujet d'étude principal par la suite. Nous décrirons ensuite deux algorithmes qui permettent respectivement de comprendre le produit de deux fonctions de Schur en terme de tableaux domino, et de mieux comprendre la structure même des tableaux domino.

4.1 Tableaux domino

Commençons par définir les objets avec lesquels nous allons travailler, les tableaux domino. Cette section se base majoritairement sur (Carré et Leclerc, 1995) et (Chemli, 2016). Nous utilisons également la généralisation décrite par van Leeuwen pour les tableaux de r -rubans dans (van Leeuwen, 1999) pour démontrer certains résultats. Voir les sections A.1 et A.3 pour davantage de détails sur cette généralisation.

4.1.1 2-noyau et 2-quotient

Un *domino* est un rectangle 2×1 ou 1×2 .

Soit $\lambda \in \text{Par}(n)$, le 2-noyau de λ est obtenu en enlevant successivement au diagramme de λ un domino tel qu'il n'y a aucune case au sud-est de ce domino.

Le diagramme restant lorsqu'il n'est plus possible d'enlever de tels dominos correspond au 2-noyau de λ .

Proposition 4.1.1. *Le 2-noyau demeure le même peu importe l'ordre dans lequel les dominos sont enlevés.*

Cette proposition est énoncée sans preuve dans (Carré et Leclerc, 1995). L'annexe A décrit une méthode alternative pour calculer le 2-noyau qui ne dépend pas d'un pavage particulier. Cela prouve l'énoncé précédent. Cette méthode alternative a été décrite par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999).

Exemple 4.1.2. *Soit $\lambda = (5, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$. La figure 4.1 montre l'obtention du 2-noyau de λ en retirant un à un des dominos éligibles. Le domino retiré à chaque étape est indiqué en rouge. Le 2-noyau obtenu est alors $(3, 2, 1)$.*

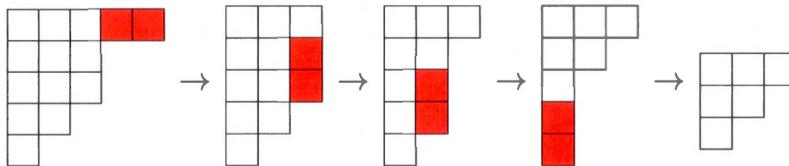


Figure 4.1 Obtention du 2-noyau du partage λ

Proposition 4.1.3. *Les 2-noyaux sont les partages en escalier $(k, k-1, \dots, 2, 1)$.*

Voir la section 2.3 de (van Leeuwen, 1999) pour la preuve.

Soit $\lambda \in \text{Par}(n)$, le 2-quotient de λ est une paire de partages (μ, ν) obtenue de la façon suivante :

1. $L := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) + (k-1, k-2, \dots, 0) = (\lambda_1 + k-1, \lambda_2 + k-2, \dots, \lambda_k)$.
2. M est obtenu à partir de L en remplaçant, successivement à partir de la droite, les entiers pairs par 0, 2, 4, ... et les entiers impairs par 1, 3, 5, ...
3. On soustrait les composantes paires de L par les composantes paires de M et on divise par deux pour obtenir μ .
4. On soustrait les composantes impaires de L par les composantes impaires de M et on divise par deux pour obtenir ν .

Exemple 4.1.4. Soit $\lambda = (4, 2, 2, 1, 1, 1)$. Le nombre de parts de λ est $k = 6$.

1. $L = (4, 2, 2, 1, 1, 1) + (5, 4, 3, 2, 1, 0) = (9, 6, 5, 3, 2, 1)$
2. $M = (7, 2, 5, 3, 0, 1)$
3. $\mu = \frac{1}{2}((6, 2) - (2, 0)) = \frac{1}{2}(4, 2) = (2, 1)$
4. $\nu = \frac{1}{2}((9, 5, 3, 1) - (7, 5, 3, 1)) = \frac{1}{2}(2, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$

Le 2-quotient de λ est donc $((2, 1), (1))$.

Proposition 4.1.5. Soit (μ, ν) une paire ordonnée de partages, il existe un unique partage λ de taille $2|\mu| + 2|\nu|$ qui a (μ, ν) comme 2-quotient.

Si $\mu = \nu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$, alors $\lambda = (2\mu_1, 2\mu_1, \dots, 2\mu_\ell, 2\mu_\ell)$. De même, si $\lambda = 2\gamma = (2\gamma_1, 2\gamma_2, \dots, 2\gamma_{2n})$, alors $\mu = (\gamma_1, \gamma_3, \dots)$ et $\nu = (\gamma_2, \gamma_4, \dots)$.

Nous verrons mieux pourquoi nous avons ces cas particuliers à l'annexe A, où nous généralisons la notion de 2-quotients aux tableaux de r -rubans. La méthode qui y est illustrée met en lumière la mécanique derrière le calcul de 2-quotient qui peut sembler, a priori, un peu arbitraire.

4.1.2 Tableaux domino

Si $\lambda \in Par$ a comme 2-noyau γ , alors on peut paver λ/γ par des dominos. On dit alors que λ/γ est *pavable*.

Un *tableau domino de forme λ/γ* est un pavage de λ/γ par des dominos, où les dominos sont remplis par des entiers positifs, de façon à ce que :

- Les lignes sont faiblement croissantes de gauche à droite.
- Les colonnes sont strictement croissantes de haut en bas.

Le *poids d'un tableau domino T* est $wt(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, où α_i compte le nombre d'entrées i dans T .

Exemple 4.1.6. Soit $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. λ est pavable et a donc comme 2-noyau $\gamma = (0)$. La figure 4.2 représente un pavage de λ . La figure 4.3 est un tableau domino de forme λ et de poids $(2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

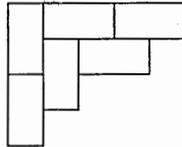


Figure 4.2 Pavage par des dominos

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 5 \\ \hline 1 & & \\ \hline & 3 & 6 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 4.3 Tableau domino

4.1.3 Diagonales et mots de lecture

Chaque domino d'un tableau domino est traversé par une unique diagonale D_{2k} , pour $k \in \mathbb{Z}$ et où D_{2k} est la droite d'équation $y = -x + 2k$. Nous dirons donc que les diagonales d'un tableau domino sont les diagonales paires. La diagonale principale d'un tableau est, tout comme pour les tableaux de Young, la diagonale D_0 qui coupe l'origine.

De même, il est possible de décrire plusieurs ordres de lecture pour lire les entrées d'un tableau domino. On appelle *mot de lecture de ligne* d'un tableau domino la séquence des entiers lus de gauche à droite le long des lignes, en parcourant les lignes de bas en haut. On appelle *mot de lecture de colonne* d'un tableau domino la séquence des entiers lus de bas en haut dans les colonnes, en parcourant les colonnes de gauche à droite. Remarquons que, contrairement au cas des tableaux de Young, on peut parcourir un domino plus d'une fois pour ces deux ordres de lecture. En conséquent, on comptabilisera uniquement la première fois qu'un domino est parcouru.

Finalement, on appelle *mot de lecture diagonale* d'un tableau domino la séquence des entiers lus sur les diagonales de haut en bas, de la diagonale la plus à gauche à celle la plus à droite, autrement dit en ordre croissant des indices des diagonales. Les entrées des diagonales distinctes sont séparées par un « / ». Dans ce cas, chaque domino est parcouru une seule fois.

Tout comme pour les tableaux de Young, on notera le mot de lecture d'un tableau domino par $w(T)$.

Exemple 4.1.7. Soit le tableau domino T de l'exemple précédent, illustré à la figure 4.4 avec ses diagonales D_{2k} . Ses mots de lecture de ligne et de colonne sont respectivement 231615 et 213165. Sa lecture diagonale donne 2/1, 3/1, 6/5.

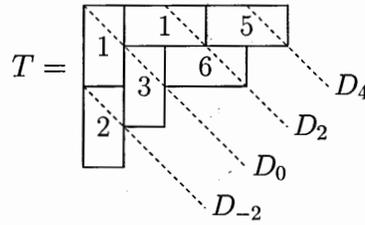


Figure 4.4 Tableau domino avec ses diagonales D_{2k}

Remarquons qu'en fonction de la coupe d'un domino par une diagonale D_{2k} , on peut distinguer deux types de dominos :

1. Type 1 : dominos dont la petite partie coupée par la diagonale pointe vers le haut.



2. Type 2 : dominos dont la petite partie coupée par la diagonale pointe vers le bas.



Notons que dans (Stanton et White, 1985), on utilise plutôt le terme *couleur* pour distinguer les types de dominos, alors que dans (van Leeuwen, 2000), on utilise le terme *position modulo 2*. Nous verrons l'utilité d'une telle notation à l'annexe A.

4.1.4 Tableaux domino de Yamanouchi

Tout comme pour les tableaux de Young, on peut décrire les tableaux ayant la propriété d'être de Yamanouchi. Un *tableau domino de Yamanouchi* est un tableau domino dont le mot de lecture par colonne est un mot de Yamanouchi. Remarquons qu'alors le mot de lecture par ligne donne également un mot de Yamanouchi ainsi que le mot de lecture diagonale, tout comme dans le cas des tableaux ordinaires. Ce résultat découle de la proposition 3.1.4 de (van Leeuwen, 2000).

Exemple 4.1.8. La figure 4.5 énumère tous les tableaux domino de Yamanouchi de forme $\lambda/\mu = (4, 4, 3, 3)/(3, 1)$, ainsi que leurs mots de Yamanouchi associés pour la lecture de colonne.

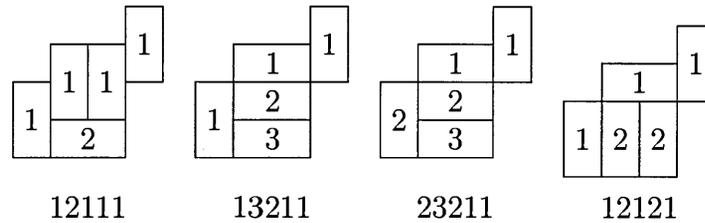


Figure 4.5 Tableaux domino de Yamanouchi de forme 4433/31

Remarquons que, tout comme pour les tableaux, il est possible de décrire un algorithme comparable au jeu de taquin sur les dominos que nous présenterons à l'annexe B. Celui-ci aura un rôle à jouer au chapitre 6. Il est également possible de décrire un algorithme d'insertion de dominos similaire à l'algorithme de RSK. Voir (Lam, 2004) pour plus de détails.

4.2 Règle de Littlewood-Richardson et tableaux domino

En théorie de la représentation, tel que vu à la section 2.3, une technique utilisée pour trouver les caractères irréductibles d'un groupe est, entre autres, de calculer le carré tensoriel d'un caractère irréductible déjà connu et d'en déterminer la partie symétrique et anti-symétrique. Ces caractères symétriques et anti-symétriques peuvent en effet compter dans leur décomposition des caractères irréductibles encore inconnus. Voir le chapitre 19 de (James et Liebeck, 2001).

Nous avons vu également à la section 3.1 que la règle de Littlewood-Richardson décrit le développement du produit de deux fonctions de Schur dans la base des fonctions de Schur. On devrait donc pouvoir déterminer à partir de cette règle

les parts qui contribuent respectivement à la partie symétrique et anti-symétrique d'un carré $s_\lambda s_\lambda$. Or, la formulation que nous avons vu de la règle de Littlewood-Richardson ne le permet pas. Il faut alors utiliser une autre méthode, comme les règles de pléthysmes.

La troisième méthode que nous allons voir dans cette section permettra de remédier à la situation. Cette façon de décrire le produit de deux fonctions de Schur $s_\mu s_\nu$ utilise un algorithme bijectif qui couple des paires de tableaux de formes respectives μ et ν et des tableaux domino dont la forme a comme 2-quotient (μ, ν) .

Nous verrons à la section 4.2.3 que les tableaux domino possèdent une statistique supplémentaire que les tableaux ordinaires n'ont pas, soit le nombre de dominos horizontaux (ou verticaux). C'est précisément cette statistique qui nous permettra, dans le cas d'un carré, de discriminer quels tableaux domino participent à la partie symétrique ou la partie anti-symétrique du carré.

L'algorithme qui nous intéresse a été décrit initialement par Stanton et White dans (Stanton et White, 1985), mais a été décrit plus explicitement par Carré et Leclerc dans (Carré et Leclerc, 1995). Il a par la suite été repris par plusieurs, dont Chemli dans (Chemli, 2016).

En particulier, cet algorithme nous donnera le théorème suivant, où on note qu'une paire de tableaux t_1 et t_2 sont de forme (μ, ν) si t_1 et t_2 sont respectivement de forme μ et ν .

Théorème 4.2.1. *(Carré et Leclerc, 1995), (Stanton et White, 1985) Soit λ , un partage pavable ayant (μ, ν) comme 2-quotient. L'ensemble des tableaux domino de forme λ et l'ensemble des paires de tableaux de Young de forme (μ, ν) sont en bijection.*

4.2.1 Algorithme de couplage

Voyons maintenant l'algorithme Γ permettant de passer d'une paire de tableaux de Young au tableau domino associé, et l'algorithme inverse Γ^{-1} . Nous y référerons par *algorithme de couplage* en référence au fait qu'il couple un tableau domino avec la paire de tableaux associée.

L'algorithme Γ consiste à construire de façon récursive le tableau domino de forme λ , qui est associé à la paire de tableaux de Young (t_1, t_2) de forme (μ, ν) , où (μ, ν) est le 2-quotient de λ . À tout moment dans l'algorithme, on a une paire de tableaux de Young $(t_1^{(i)}, t_2^{(i)})$, de forme $(\mu^{(i)}, \nu^{(i)})$, et le tableau domino $T^{(i)}$ associé à cette paire, de forme $\lambda^{(i)}$. On pose $\mu^{(0)} = \nu^{(0)} = \lambda^{(0)} = \emptyset$. L'algorithme s'arrête lorsque $(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) = (t_1, t_2)$. Le tableau domino associé à (t_1, t_2) est alors $T^{(i)}$. Notons qu'on utilise la notion de type de domino vue à la section 4.1.3 dans cette construction.

Décrivons la $i^{\text{ème}}$ étape de cet algorithme.

Soit u_i , la plus petite valeur de (t_1, t_2) n'apparaissant pas dans $(t_1^{(i-1)}, t_2^{(i-1)})$. On ajoute alors à $(t_1^{(i-1)}, t_2^{(i-1)})$ toutes les cellules de (t_1, t_2) contenant u_i , en préservant leurs positions. On obtient la nouvelle paire de tableau $(t_1^{(i)}, t_2^{(i)})$ de forme $(\mu^{(i)}, \nu^{(i)})$.

Pour construire le tableau domino $T^{(i)}$ de forme $\lambda^{(i)}$, on suit la procédure suivante, en parcourant les diagonales de gauche à droite.

Pour toute cellule de $t_1^{(i)}$ (resp. $t_2^{(i)}$) contenant u_i et positionnée sur la diagonale D_k , on ajoute à $T^{(i-1)}$ un domino de type 1 (resp. type 2) ayant comme étiquette u_i et positionné sur la diagonale correspondante D_{2k} . On obtient alors le tableau domino associé $T^{(i)}$, de forme $\lambda^{(i)}$.

La figure 4.6 illustre l'application de l'algorithme à la paire de tableaux de Young

$$(t_1, t_2) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \right).$$

$$(1) \quad (t_1^{(1)}, t_2^{(1)}) = (\emptyset, \boxed{1}) \rightarrow \boxed{1} = T^{(1)}$$

$$(2) \quad (t_1^{(2)}, t_2^{(2)}) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} 2 = T^{(2)}$$

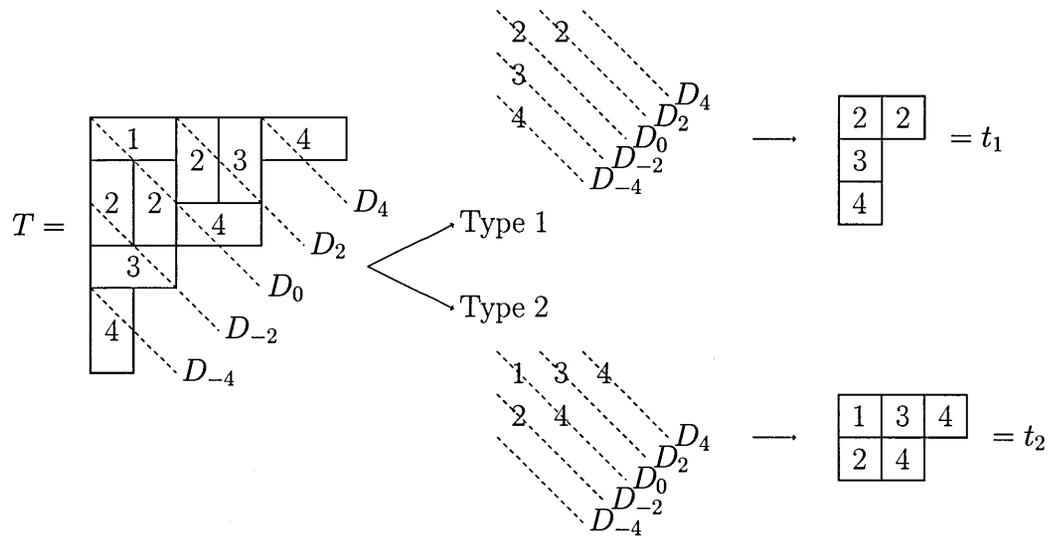
$$(3) \quad (t_1^{(3)}, t_2^{(3)}) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline & & 3 \\ \hline \end{array} 2 \ 3 = T^{(3)}$$

$$(4) \quad (t_1^{(4)}, t_2^{(4)}) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 3 \\ \hline & & & 4 \\ \hline & & 3 & \\ \hline & & & 4 \\ \hline \end{array} = T^{(4)} = T$$

Figure 4.6 Γ appliqué au couple de tableaux $(t_1, t_2) = (t_1^{(4)}, t_2^{(4)})$

L'algorithme inverse, Γ^{-1} , consiste à considérer, pour un tableau domino T , la lecture diagonale des étiquettes des dominos de type 1 uniquement (resp. de type 2 uniquement). Cette lecture diagonale correspond alors à la lecture diagonale du tableau de Young associé t_1 (resp. t_2).

La figure 4.7 illustre un exemple de l'application de l'algorithme inverse au tableau domino T . On remarque dans cet exemple qu'on a retrouvé la paire de tableaux (t_1, t_2) de l'exemple précédent. Le lecteur peut vérifier entre autres que le 2-quotient de $(6, 4, 4, 2, 1, 1)$, la forme de T , est bien $((2, 1, 1), (3, 2))$, la forme de (t_1, t_2) .

Figure 4.7 Γ^{-1} appliqué au tableau domino T

4.2.2 Règle de Littlewood-Richardson et tableaux domino

Le théorème 4.2.1 se traduit dans le langage des fonctions symétriques de la façon suivante :

Théorème 4.2.2. *Corollaire 3.2.3, (van Leeuwen, 1999) Soit λ ayant comme 2-quotient (μ, ν) . Alors*

$$s_\mu s_\nu = \sum_T x^T$$

où T parcourt l'ensemble des tableaux domino de forme λ .

Preuve. *Chaque terme du produit $s_\mu s_\nu$ est représenté par une paire de tableaux de Young semi-standards de forme (μ, ν) . Le théorème 4.2.1 nous dit que ces paires sont en bijection avec les tableaux domino de forme λ , et que le tableau domino associé à une paire (t_1, t_2) a le même ensemble d'entrées que (t_1, t_2) .*

Cette bijection se généralise au cas des tableaux de r -rubans. Les tableaux domino sont des tableaux de 2-rubans, l'algorithme vu précédemment est donc un cas

particulier de cette généralisation. Celle-ci exploite en particulier la notion de séquence de bordure, qui permet de définir un jeu de taquin sur les tableaux de domino et les tableaux de ruban. Voir les annexes A et B pour plus de détails.

Le théorème 4.2.2 peut également être exprimé en terme de tableaux domino de Yamanouchi de façon à établir un parallèle avec la formulation de la règle initiale de Littlewood-Richardson.

Proposition 4.2.3 (Corollaire 4.4 (Carré et Leclerc, 1995)).

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} |Yam_2(\gamma, \nu)| s_\nu$$

où γ est le partage de 2-quotient (λ, μ) et $Yam_2(\gamma, \nu)$ est l'ensemble des tableaux domino de Yamanouchi de forme γ et remplissage ν .

Nous verrons à la section 6.1.2 un autre algorithme qui donne la preuve que le nombre de tableaux domino de Yamanouchi de forme γ et de poids ν ayant un 2-quotient (λ, μ) est exactement $c'_{\lambda, \mu}$.

4.2.3 Spin et division du carré en sa partie symétrique et anti-symétrique

Nous verrons dans cette section comment une statistique sur les tableaux domino permet de comprendre la discrimination du carré d'une fonction de Schur en sa partie symétrique et celle anti-symétrique. Cette statistique est le spin.

Le *spin* d'un tableau domino D est donné par $\frac{1}{2}(\# \text{ dominos horizontaux de } D)$. Remarquons qu'en général, le spin est un demi-entier, et qu'il est souvent décrit dans la littérature en terme des dominos verticaux plutôt que horizontaux. Nous expliquerons plus loin la justification de notre choix de définition.

Proposition 4.2.4. *La parité du nombre de dominos horizontaux d'un tableau domino dépend uniquement de sa forme λ/μ .*

Exemple 4.2.5. *Pour les tableaux domino illustrés à la figure 4.5, on a respectivement 1, 3, 3 et 1 dominos horizontaux, donc on obtient respectivement les spins $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.*

Dans le cas d'un carré $s_\lambda s_\lambda$, les tableaux domino obtenus ont comme forme $(2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_k, 2\lambda_k)$, tel que remarqué à la section 4.1.1. On peut voir ces tableaux comme composés de $|\lambda|$ boîtes 2×2 . En conséquence, dans ce cas, il y a un nombre pair de dominos horizontaux (et de dominos verticaux) et le spin est toujours un nombre entier.

En particulier, pour un tel tableau domino D , $spin(D) \in \{|\lambda|, |\lambda| - 1, \dots, 1, 0\}$, où $spin(D) = |\lambda|$ implique que le diagramme est rempli exclusivement de dominos horizontaux, et $spin(D) = 0$ implique que le diagramme est rempli exclusivement de dominos verticaux.

Notons la partie symétrique d'un carré $s_\lambda s_\lambda$ par $S^2(s_\lambda)$, et nommons sa partie anti-symétrique, par $\Lambda^2(s_\lambda)$. Notons que ces notations ne sont pas arbitraires, puisqu'elles correspondent aux notions de pléthysme décrites dans (Carré et Leclerc, 1995). Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 4.2.6 (Corollaire 5.4, (Carré et Leclerc, 1995)). *Soit le carré $s_\lambda s_\lambda$.*

Alors
$$S^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \alpha_{\lambda\nu} s_\nu \text{ et } \Lambda^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \beta_{\lambda\nu} s_\nu$$

où $\alpha_{\lambda\nu}$ est le nombre de tableaux domino de Yamanouchi de forme $(2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_k, 2\lambda_k)$, de poids ν et dont le spin est pair, et $\beta_{\lambda\nu}$ est le nombre de ceux ayant les mêmes propriétés, mais dont le spin est impair.

Autrement dit, les tableaux domino de Yamanouchi dont la forme a comme 2-quotient (λ, λ) et ayant un spin pair contribuent à la partie symétrique du carré $s_\lambda s_\lambda$, alors que ceux ayant un spin impair contribuent à la partie anti-symétrique du carré.

Remarquons que, dans le cas d'un carré, on a

$$\frac{1}{2}\#(\text{ dominos horizontaux de } D) \equiv |\lambda| - \frac{1}{2}\#(\text{ dominos verticaux de } D).$$

Ce fait inusité est particulièrement important en considérant que, dans la littérature, le spin est régulièrement défini comme $\frac{1}{2}\#(\text{dominos verticaux})$. Nous noterons cette définition le v -spin. En particulier, dans (Carré et Leclerc, 1995), la notion de spin est définie en terme des dominos verticaux, alors que la majorité des exemples comptent le nombre de dominos horizontaux, et leur corollaire 5.4 utilise uniquement la statistique du nombre de dominos horizontaux. Or, la parité respective du spin, lorsqu'on considère le nombre de dominos horizontaux ou verticaux, dépend de la parité de $|\lambda|$. Entre autre, dans l'exemple suivant, la moitié du nombre de dominos horizontaux et la moitié du nombre de dominos verticaux n'ont pas la même parité. Nous encourageons donc le lecteur à faire preuve de prudence en utilisant des résultats de Carré et Leclerc qui font intervenir le spin.

Entre autre, la proposition 4.2.6 deviendrait la suivante :

Proposition 4.2.7 (version v -spin de la Proposition 4.2.6). *Soit le carré $s_\lambda s_\lambda$.*

— Si $|\lambda| \equiv_2 0$, alors

$$S^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \alpha_{\lambda\nu} s_\nu \text{ et } \Lambda^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \beta_{\lambda\nu} s_\nu$$

où $\alpha_{\lambda\nu}$ est le nombre de tableaux domino de Yamanouchi de forme $(2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_k, 2\lambda_k)$, de poids ν et dont le v -spin est pair, et $\beta_{\lambda\nu}$ est le nombre de ceux dont le v -spin est impair.

— Si $|\lambda| \equiv_2 1$, alors

$$S^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \alpha_{\lambda\nu} s_\nu \text{ et } \Lambda^2(s_\lambda) = \sum_{\nu} \beta_{\lambda\nu} s_\nu$$

où $\alpha_{\lambda\nu}$ est le nombre de tableaux domino de Yamanouchi de forme $(2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_k, 2\lambda_k)$, de poids ν et dont le v -spin est impair, et $\beta_{\lambda\nu}$ est le nombre de ceux dont le v -spin est pair.

Voyons un exemple illustrant les différences entre la règle que nous venons d'énoncer et celle de Littlewood-Richardson que nous avons vue à la section précédente.

Exemple 4.2.8. *Dans le cas du carré $s_{(2,1)}s_{(2,1)}$, les tableaux de Yamanouchi de forme $\nu/(2,1)$ et de poids $(2,1)$ sont illustrés à la figure 4.8. On a alors que $s_{(2,1)}s_{2,1} = s_{(4,2)} + s_{(4,1,1)} + s_{(3,3)} + 2s_{(3,2,1)} + s_{(3,1,1,1)} + s_{(2,2,2)} + s_{(2,2,1,1)}$, où la forme globale ν des tableaux de Yamanouchi donne les fonctions de Schur apparaissant dans le carré.*

Il est possible de montrer la partie symétrique, $S^2(s_{(2,1)})$, et celle anti-symétrique, $\Lambda^2(s_{(2,1)})$, sont données respectivement par

$$\begin{cases} S^2(s_{(2,1)}) &= s_{(4,2)} + s_{(3,2,1)} + s_{(3,1,1,1)} + s_{(2,2,2)} \\ \Lambda^2(s_{(2,1)}) &= s_{(4,1,1)} + s_{(3,3)} + s_{(3,2,1)} + s_{(2,2,1,1)} \end{cases}$$

Il n'est toutefois pas possible de déterminer directement S^2 et Λ^2 à partir de la règle de Littlewood-Richardson énumérant les tableaux de Yamanouchi.

Considérons maintenant celle énumérant les tableaux domino de Yamanouchi. Nous avons vu que le partage ayant comme 2-quotient $((2,1), (2,1))$ est exactement $(2 \cdot 2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (4, 4, 2, 2)$. Les tableaux domino de Yamanouchi de forme $(4, 4, 2, 2)$ sont illustrés à la figure 4.9. Puisque la forme ne change pas, c'est plutôt le poids des tableaux domino qui détermine les fonctions de Schur apparaissant dans le carré. On voit facilement qu'on obtient la même décomposition pour le carré $s_{(2,1)}s_{(2,1)}$. Ces tableaux ont respectivement 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4 et 6 dominos horizontaux, et ont donc un spin donné respectivement par 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2 et 3. Ainsi les premier, cinquième, sixième et septième tableaux participent à la partie symétrique, alors que les deuxième, troisième, quatrième et huitième tableaux participent à la partie anti-symétrique. On obtient la même séparation en partie symétrique que celle déterminée auparavant.

Remarquons que si on considère la parité de la moitié du nombre de dominos verticaux, on obtient alors que les tableaux de v -spin impair participent à la partie symétrique, et ceux de v -spin pair, à la partie anti-symétrique. Cela s'explique par le fait que $|\lambda| = |(2, 1)| = 3 \equiv_2 1$.

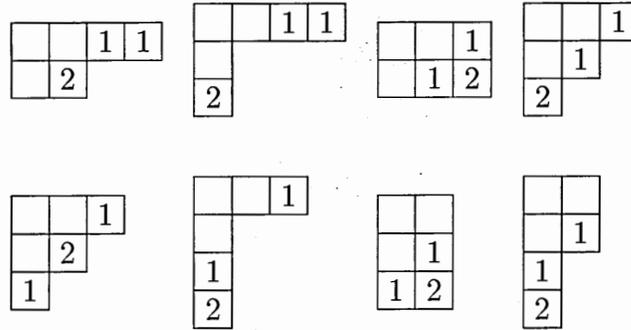


Figure 4.8 Tableaux de Yamanouchi de forme $\nu/(2, 1)$ et de poids $(2, 1)$

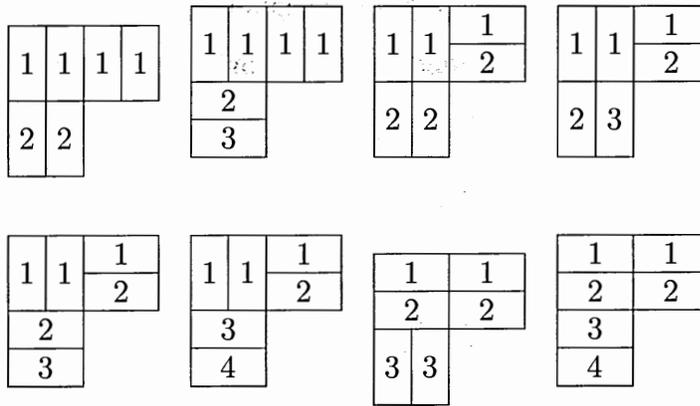


Figure 4.9 Tableaux domino de Yamanouchi de forme $(4, 4, 2, 2)$

4.3 Algorithme d'échange sur les tableaux domino

Nous allons décrire ici un autre algorithme sur les tableaux domino qui sera utile au chapitre 6. Celui-ci exploite l'algorithme d'échange décrit à la section 3.4. Nous dirons donc qu'il s'agit d'un algorithme d'échange sur les tableaux domino.

4.3.1 Algorithme d'échange

L'algorithme que nous verrons dans cette section a été développé par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 2000). Il prend un tableau domino comme entrée et sort un couple de tableaux de Young, tout comme l'algorithme inverse précédent. Toutefois, la paire de tableaux obtenue ici sera une paire de tableaux auto-commutante. Nous verrons pourquoi à la section 4.3.2.

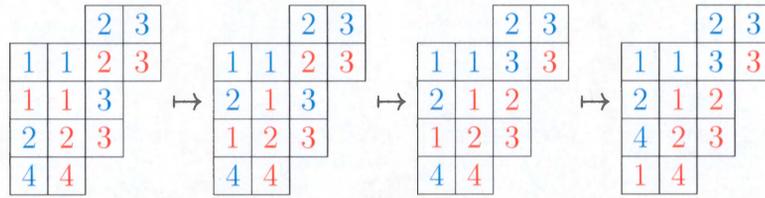
Algorithme 4.3.1. Soit π_1 , l'application décrite par l'algorithme suivant.

- Entrée : Tableau domino semi-standard D de forme gauche γ
- Sortie : Paire de tableaux semi-standards (S, T) , telle que T étend S et la forme de $S \cup T$ est γ .

1. Remplir chaque domino de D par deux copies de son entrée : une copie bleue dans sa cellule nord-ouest, et une copie rouge dans sa cellule sud-est.
2. Considérer S' le tableau perforé de forme γ rempli des entrées bleues, et T' le tableau perforé de forme γ rempli des entrées rouges.
3. Effectuer des mouvements d'échanges entre les entrées de S' et T' jusqu'à ce que S' soit complètement contracté, et T' , complètement étendu.
4. Toutes les entrées bleues sont alors au nord-ouest, et toutes les entrées rouges, au sud-est. La paire de tableaux semi-standard (S, T) obtenue est une paire perforée telle que T étend S .

Exemple 4.3.2. Appliquons l'algorithme précédent au tableau domino D . Toutes les étapes sont illustrées à la figure 4.10.

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & 2 & 3 & \\ \hline & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 4.10 Algorithme d'échange appliqué au tableau domino D

Donc

$$\pi_1 \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline 2 & & 3 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array} \right)$$

Proposition 4.3.3. (van Leeuwen, 2000) π_1 est une bijection de l'ensemble des tableaux domino semi-standards vers l'ensemble des paires de tableaux semi-standards auto-commutantes qui préserve à la fois la forme et le poids.

Preuve. Il suffit de décrire l'algorithme inverse qui permet, à partir d'une paire auto-commutante, de retrouver le tableau domino associé. Soit (U, V) une telle paire. Les deux tableaux forment une paire perforée où V étend U . De plus, puisque la paire est auto-commutante, le poids de chaque tableau est le même. Notons les entrées de U en bleu, et les entrées de V en rouge.

On cherche à obtenir une paire perforée telle que chaque i rouge est au sud-est d'un i bleu, en y étant adjacent. On dit alors qu'ils sont pariés. Cette configuration donne un tableau domino dont le positionnement des entrées est valide en raison des règles de mouvements d'échange.

Tant que les entrées bleues ne sont pas pariées, on échange la plus grande entrée bleue non pariée avec la plus petite entrée rouge non pariée adjacente. Ceci revient à faire les mouvements d'échanges inverses à ceux appliqués par π_1 . On obtient alors une paire perforée où les i rouges et bleus sont pariés, ce qui nous donne

un pavage de la forme de la paire perforée, ainsi que son remplissage. La section suivante explique pourquoi on retrouve un tableau domino de cette façon.

La paire perforée (U, V) est de même forme que le tableau domino correspondant, puisque les mouvements d'échange ne modifient pas la forme globale. Ainsi, π_1 préserve la forme.

Puisque (U, V) est une paire auto-commutante, alors le poids de chaque tableau est le même, tel que mentionné précédemment. Ce poids est aussi celui du tableau domino correspondant en raison de la définition de π_1 . Ainsi, π_1 préserve le poids.

4.3.2 Familles d'échange

La bijection π_1 qui établit un lien entre les tableaux domino et les échanges de tableaux peut être mieux comprise en terme de famille d'échange de tableaux. Dans (van Leeuwen, 2001), van Leeuwen utilise cette notion provenant de la théorie de diagramme de croissance pour étudier les paires auto-commutantes.

Une *famille de partages* est un ensemble de partages ordonnés dans une matrice, de la forme $(\lambda^{[i,j]})_{i \in I, j \in J}$, pour $I = \{i \in \mathbb{N} | k \leq i \leq \ell\}$ et $J = \{j \in \mathbb{N} | m \leq j \leq n\}$.

Une *famille d'échange de tableaux sur $I \times J$* est une famille de partage telle que chaque ligne $\lambda^{[i,m]}, \dots, \lambda^{[i,n]}$ et chaque colonne $\lambda^{[k,j]}, \dots, \lambda^{[\ell,j]}$ décrit un tableau de Young gauche standard, et $\lambda^{[i,j+1]} \neq \lambda^{[i+1,j]}$ chaque fois que $\lambda^{[i+1,j+1]} / \lambda^{[i,j]}$ n'est pas un domino.

Exemple 4.3.4. La figure 4.11 illustre une famille d'échange de tableaux sur $[4] \times [4]$. En terme d'ordre d'ajout des cellules, la première ligne correspond au

tableau standard $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ et la quatrième colonne, au tableau gauche standard $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$.

Puisque $\lambda^{[2,3]} = \lambda^{[1,4]}$, alors $\lambda^{[2,4]} / \lambda^{[1,3]} = (2, 2) / (2)$ est un domino. Au contraire, $\lambda^{[2,2]} \neq \lambda^{[1,3]}$, alors $\lambda^{[2,3]} / \lambda^{[1,2]} = (2, 1) / (1)$ n'est pas un domino.

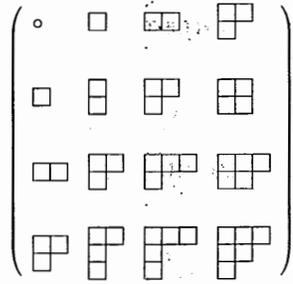


Figure 4.11 Famille d'échange de tableaux

Remarquons que si $\lambda^{[i,j]}$, $\lambda^{[i,j+1]}$, $\lambda^{[i+1,j+1]}$ ou $\lambda^{[i,j]}$, $\lambda^{[i+1,j]}$, $\lambda^{[i+1,j+1]}$ est un tableau standard de taille 2, alors il y a une unique valeur pour le partage restant pour lequel on obtient une famille d'échange de tableaux sur $\{i, i+1\} \times \{j, j+1\}$.

En effet, si $\lambda^{[i+1,j+1]}/\lambda^{[i,j]}$ est un domino, alors nécessairement $\lambda^{[i,j+1]} = \lambda^{[i+1,j]}$. Et si $\lambda^{[i+1,j+1]}/\lambda^{[i,j]}$ n'est pas un domino, alors il y a une unique autre façon d'ajouter une case à $\lambda^{[i,j]}$ pour obtenir le partage restant.

Finalement, on a que si les valeurs $\lambda^{[i,j]}$ sont données, pour les indices $[i, j]$, pour un chemin de $[k, m]$ à $[\ell, n]$, alors il y a une unique façon d'étendre ces valeurs à une famille d'échange de tableaux.

Décrivons maintenant les échanges de tableaux en terme de famille d'échange.

Proposition 4.3.5. *Soit S, T deux tableaux gauches standards tels que T étend S . La paire de tableaux gauches standards $(T', S') = X(S, T)$ est définie par l'existence d'une famille d'échange de tableaux $(\lambda^{[i,j]})_{k \leq i \leq \ell, m \leq j \leq n}$ telle que :*

- $S = (\lambda^{[k,m]}, \dots, \lambda^{[\ell,m]})$ est donné par la première colonne,
- $T = (\lambda^{[\ell,m]}, \dots, \lambda^{[\ell,n]})$ est donné par la dernière ligne,
- $T' = (\lambda^{[k,m]}, \dots, \lambda^{[k,n]})$ est donné par la première ligne,
- $S' = (\lambda^{[k,n]}, \dots, \lambda^{[\ell,n]})$ est donné par la dernière colonne.

Notons par $A = \{ a_k < a_{k+1} < \dots < a_\ell \}$ les entrées de S et par $B = \{ b_m < b_{m+1} < \dots < b_{n-1} \}$ les entrées de T . On associe les a_i aux pas verticaux dans la famille d'échange de tableaux, et les b_j , aux pas horizontaux. Alors tout chemin de $[k, m]$ à $[\ell, n]$ correspond à un mélange des entrées A et B .

Changer un chemin en un endroit consiste à échanger un a_i et un b_j dans le mélange des entrées A et B . Si les cases étiquetées par a_i et b_j sont adjacentes dans le tableau représentant le chemin précédent, alors leurs entrées sont échangées. Autrement, les entrées demeurent les mêmes.

Cette définition correspond à celle donnée par Benkart, Sottile et Stroomer dans (Benkart et Sottile, 1996) et vue à la section 3.4.

Par exemple, le chemin qui consiste en $n - m$ pas verticaux suivis de $\ell - k$ pas horizontaux donne $a_k a_{k+1} \dots a_\ell b_m b_{m+1} \dots b_{n-1}$. Ce chemin correspond à la paire perforée (S, T) . Le chemin qui consiste en $\ell - k$ pas horizontaux suivis de $n - m$ pas verticaux donne $b_m b_{m+1} \dots b_{n-1} a_k a_{k+1} \dots a_\ell$ et correspond à la paire perforée (T', S') .

Échanger deux tableaux consiste donc à modifier progressivement le premier chemin pour obtenir le second, ou inversement.

Notons que ce ne sont alors pas tous les modifications du chemin qui induisent un mouvement d'échange au sens de Benkart et Sottile, puisqu'un mouvement d'échange se produit uniquement lorsque les cases concernées sont adjacentes. Nous verrons un exemple de cette méthode à l'exemple 4.3.6.

Remarquons également que cette façon de faire se généralise aux tableaux semi-standards par la standardisation, où les entrées égales sont ordonnées du sud-ouest vers le nord-est. En conservant le poids initial de chaque tableaux, il est alors possible de dé-standardiser chacun des tableaux après l'échange.

Nous pouvons maintenant établir le lien entre les tableaux domino et les paires de tableaux auto-commutantes.

Dans le cas d'une paire de tableaux auto-commutante (S, T) , donc telle que $X(S, T) = (S, T)$, la famille d'échange de tableaux associée est symétrique. Une telle symétrie apparaît si et seulement si la sous-famille diagonale $D = (\lambda^{[i,i]})_{i \in I}$ décrit un tableau domino gauche standard. Ainsi, chaque tableau domino décrit uniquement une telle famille et la paire auto-commutante associée.

En particulier, le chemin en escalier dans la famille d'échange de tableaux, alternant un pas horizontal et un pas vertical, donne exactement le pavage et remplissage du tableau domino. Chaque entrée bleue (correspondant à un pas horizontal) sera pariée avec une entrée rouge de même valeur (correspondant à un pas vertical), au sens de la preuve de la proposition 4.3.3.

Ainsi, à partir d'une paire de tableaux auto-commutante (S, T) , échanger les entrées jusqu'à ce que toutes soient pariées, tel que décrit dans la preuve de la proposition 4.3.3, correspond à modifier le chemin décrivant la paire perforée (S, T) pour obtenir le chemin en escalier décrivant le tableau domino associé. Ainsi, on obtiendra toujours bien un tableau domino en procédant de cette façon.

Exemple 4.3.6. *La figure 4.12 illustre la famille d'échange de tableaux correspondant au tableau domino D . La paire auto-commutante associée est $\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline & 4 \\ \hline \end{array} \right)$, qui se retrouve respectivement à la première colonne et dernière ligne, et première ligne et dernière colonne de la famille d'échange de tableaux. Les échanges permettant de passer de la paire auto-commutante au tableau domino associé sont illustrés à la figure 4.13. Ils sont donnés par différents chemins, entre le chemin initial décrivant (S, T) et celui en escalier.*

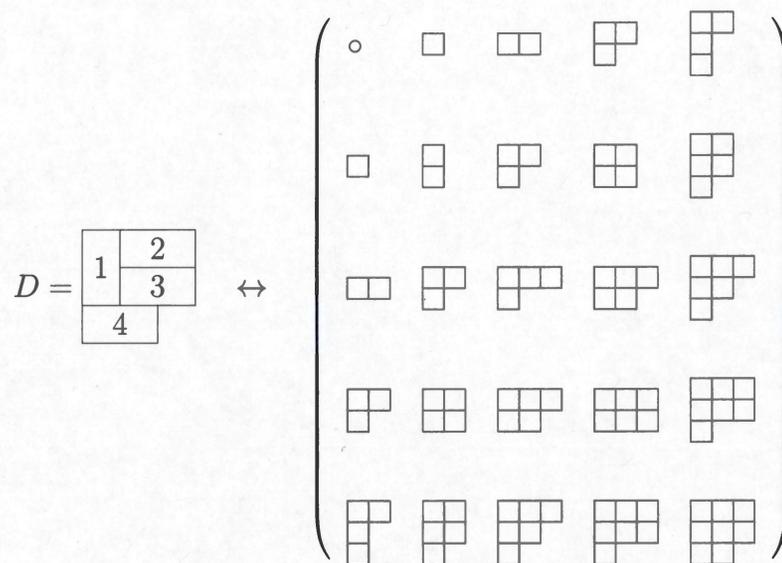


Figure 4.12 Famille d'échange de tableaux associée au tableau domino D

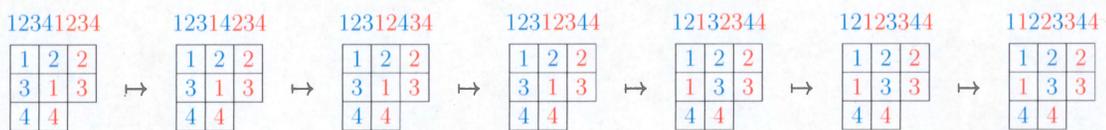


Figure 4.13 Échanges dans la famille d'échange de tableaux

CHAPITRE V

CRISTAUX

La théorie des cristaux permet d'établir une structure sur des objets combinatoires, comme les mots, les tableaux, les graphes et ainsi dégager des résultats en théorie de la représentation, en algèbre, etc. Cette nouvelle théorie puise ses sources dans des problèmes de théorie de la représentation, il n'est donc pas étonnant que les résultats dans cette branche des mathématiques soient particulièrement nombreux.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à décrire les cristaux dits de *type* A_n . Du point de vue de la théorie de la représentation, ces cristaux correspondent aux représentations du groupe GL_n , comme nous verrons à la section 5.3.3. Nous nous intéresserons particulièrement aux cristaux de tableaux.

Nous adopterons dans ce chapitre une vision combinatoire des cristaux. L'article (Shimozono, 2005) est une très bonne introduction en la matière, et demeure assez accessible. Le livre (Bump et Schilling, 2017) est beaucoup plus détaillé et complet, mais peut être assez difficile d'accès en raison de l'approche plus géométrique et par le point de vue de la théorie de la représentation et les groupes de Coxeter. Il s'agit toutefois de la ressource la plus complète pour la théorie des cristaux. Ce chapitre s'inspire principalement de ces deux sources.

5.1 Définition générale

De manière simplifiée, un *crystal* est un graphe orienté dont les sommets sont des objets combinatoires et les arêtes orientées sont étiquetées par i , pour $i \in [n - 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Exemple 5.1.1. *Le graphe de cristal illustré à la figure 5.1 est celui sur les lettres dans l'alphabet [5].*

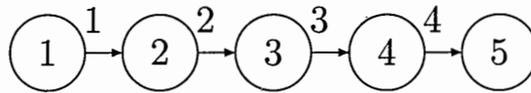


Figure 5.1 Cristal sur les lettres dans [5]

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, un *crystal* (pour GL_n) est un ensemble de sommets B plus un élément distingué 0 , muni de :

— deux fonctions « inverses » $e_i, f_i : B \cup \{0\} \mapsto B \cup \{0\}$, pour tout $i \in [n - 1]$, telles que :

1. $x \xrightarrow{i} y \iff f_i(x) = y \iff e_i(y) = x$.
2. $f_i(0) = 0$ et $e_i(0) = 0$.
3. $f_i(x) = 0$ si aucune arête étiquetée i sort de x ,
 $e_i(x) = 0$ si aucune arête étiquetée i entre en x .
4. $f_i(e_i(x)) = x$ si $e_i(x) \neq 0$,
 $e_i(f_i(x)) = x$ si $f_i(x) \neq 0$.

— une fonction de poids $wt : B \cup \{0\} \mapsto \mathbb{Z}^n$ telle que :

si $a_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ avec le 1 à la $i^{\text{ème}}$ position, alors $wt(e_i(x)) = wt(x) + a_i$ quand $e_i(x) \neq 0$, et $wt(f_i(x)) = wt(x) - a_i$ quand $f_i(x) \neq 0$.

Le *graphe d'un cristal* est simplement sa représentation sous la forme d'un graphe orienté, où les sommets sont les objets combinatoires voulus, et les arêtes orientées sont étiquetées par i si on passe d'un objet X à un objet X' en appliquant f_i à X , et inversement, on passe de X' à X en appliquant e_i à X' .

Pour la suite, nous ne ferons pas de distinction entre un cristal et son graphe.

5.2 Cristaux de mots

La figure 5.1 représente le cristal sur les lettres dans [5], probablement le type de cristal le plus simple à représenter.

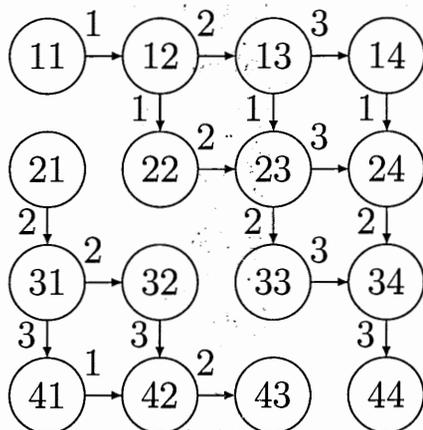
On peut généraliser ce type de cristal aux *cristaux de mots* sur $[n]$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Dans un cristal sur les mots, une *arête étiquetée par i entre deux mots w et w'* indique qu'on remplace un certain i par un $i + 1$ dans w pour obtenir w' . Cela correspond alors à l'effet de la fonction f_i sur w .

Évidemment, il arrive qu'un mot compte plus d'une lettre i , nous verrons donc plus loin la règle de parenthésage permettant de déterminer quelle lettre sera affectée.

Le *poids d'un sommet w* , $wt(w) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, indique qu'il y a α_i lettres i dans le mot w . On remarque qu'alors changer un i pour un $i+1$ dans w pour obtenir w' a l'effet souhaité sur le poids, soit de retirer $a_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ au poids de w pour obtenir celui de w' .

Exemple 5.2.1. *La figure 5.2 illustre le cristal sur les mots de longueur 2 sur l'alphabet [4].*

Figure 5.2 Cristal des mots de longueur 2 sur $[4]$

Il est intéressant d'observer qu'on obtient ici deux composantes connexes dans notre cristal : une première composante comportant 10 sommets et où la première lettre est inférieure ou égale à la seconde, et une seconde composante comportant 6 sommets et où la première lettre est supérieure à la seconde. Ceci trouvera un sens lorsque nous verrons les cristaux de tableaux.

Dans un graphe de cristal sur les mots, il est probable qu'un mot compte plusieurs lettres i , tout comme dans l'exemple 5.2.1. Il faut donc décrire une technique pour identifier quelle lettre i est affectée par f_i , et quelle lettre $i + 1$ est affectée par e_i . Cette technique est appelée la *règle de parenthésage* et fonctionne comme suit.

Soit w un mot comprenant une ou plusieurs lettres i et $i + 1$, pour i fixé. On inscrit sous chaque lettre i du mot une parenthèse fermée $)$, et sous chaque lettre $i + 1$ du mot, une parenthèse ouverte $($. Toutes les parenthèses couplées $()$ sont éliminées, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une succession de parenthèses non-couplées $)^\phi(\psi$.

On a alors que f_i change le i non-couplé le plus à droite en un $i + 1$ et e_i change le $i + 1$ non-couplé le plus à gauche en un i . Cette règle de parenthésage permet de déterminer uniquement l'effet de e_i et f_i sur un mot w , pour tout $i \in [n - 1]$.

Exemple 5.2.2. Soit $w = 124331232124223123$, un mot sur l'alphabet [4]. On veut déterminer l'effet de f_2 sur w , qu'on illustrera ci-dessous. La deuxième ligne illustre le parenthésage associé à chaque i et $i + 1$, la troisième, l'élimination des parenthèses couplées. La quatrième ligne identifie finalement les parenthèses non-couplées visées par f_i et e_i .

$$124331232124223123 \quad (5.1)$$

$$) (() ())) () (\quad (5.2)$$

$$) (() ())) () (\quad (5.3)$$

$$) \quad) \underline{) \quad (} \quad (5.4)$$

Donc

$$f_2(124331232124223123) = 124331232124233123$$

$$e_2(124331232124223123) = 124331232124223122.$$

5.3 Cristaux de tableaux

Un *cristal de tableaux*, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est donné par :

- B = ensemble fini de tableaux de Young dont les entrées sont dans $[n]$.
- 0 le sommet auxiliaire.
- $wt(T)$ = le poids de T pour $T \in B$.
- $e_i, f_i(T)$ = effet de e_i, f_i (pour les mots) sur le mot de lecture de T , pour $T \in B \cup \{0\}$ et $i \in [n - 1]$.

Exemple 5.3.1. La figure 5.3 représente le cristal de tableaux correspondant au cristal des mots à deux lettres sur l'alphabet [4]. Remarquons que les deux cristaux sont isomorphes. Entre autres, chaque composante connexe regroupe les tableaux d'une certaine forme, en l'occurrence les tableaux de forme (2) et (1, 1).

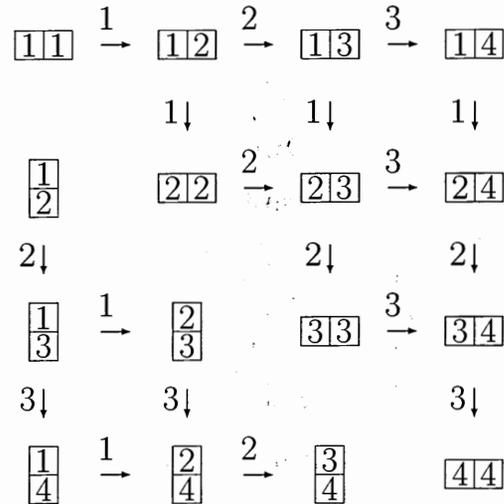


Figure 5.3 Cristal de tableaux correspondant aux mots à deux lettres sur $[n]$

Proposition 5.3.2. (Bump et Schilling, 2017) *Les cristaux sur les mots sont isomorphes aux cristaux sur les tableaux.*

Preuve. À chaque tableau, on peut associer uniquement un mot de lecture (pour un ordre de lecture fixé). Par la définition des cristaux de tableaux, l'effet des opérateurs de cristaux sur le mot comme sur le tableau sera le même. Les cristaux associés seront donc isomorphes.

À chaque mot, on peut associer plus d'un tableau (gauche) ayant ce mot comme mot de lecture, même pour un ordre de lecture fixé. Par exemple, si on choisit l'ordre de lecture de lignes, alors déplacer une ligne d'un certain nombre de cases vers la droite ou la gauche ne modifie pas le mot de lecture, et donnera un tableau de Young valide dans la mesure où les colonnes demeurent croissantes et que la forme globale demeure un partage. Nous obtiendrons alors plusieurs cristaux de tableaux distincts, mais isomorphes. En effet, l'action des opérateurs de cristaux ne modifie pas la forme des tableaux, et dépend uniquement du mot de lecture.

Dans l'exemple 5.3.1, nous avons remarqué que les composantes connexes de notre cristal correspondent à des cristaux de tableaux ayant une forme fixée $\lambda \in Par$. Ces cristaux ont un rôle particulier que nous verrons par la suite. Nous noterons $B(\lambda)$ le cristal de tous les tableaux de forme λ dont les entrées sont dans $[n]$.

Ce graphe de cristal est connexe et a un unique sommet source de poids λ . Il s'agit précisément de l'unique tableau de forme et de remplissage λ vu à la section 3.5.2 et noté 1_λ . Nous avons remarqué en particulier que ce tableau est toujours un tableau de Yamanouchi.

5.3.1 Pourquoi s'intéresser particulièrement aux cristaux de tableaux ?

Il se trouve que pour n'importe quel cristal, on peut associer bijectivement chacune de ses composantes connexes à un cristal de tableaux. Ainsi, l'étude des cristaux de tableaux est centrale à l'étude des cristaux en général.

Pour pouvoir arriver à ce résultat, nous devons tout d'abord introduire les notions de vecteur de plus grand poids et de morphisme de cristaux.

Nous avons remarqué que lorsqu'on se déplace le long des arêtes, dans un sens ou dans un autre, les poids changent par plus ou moins $a_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$. L'ordre lexicographique donne donc un ordre total sur les poids.

En particulier, lorsqu'on se déplace le long des arêtes dans le sens de leur orientation, le poids diminue au sens de l'ordre lexicographique. Les opérateurs e_i et f_i sont en conséquent régulièrement nommés respectivement *opérateurs augmentant* et *opérateurs descendant*. Les sommets ayant les plus grands poids sont donc les sources du cristal, soit les sommets x tels que $e_i(x) = 0$ pour tout i .

On nomme ces sommets les *vecteurs de plus grand poids*.

Proposition 5.3.3. *Soit un cristal dont l'effet des opérateurs de cristaux est défini par la règle de parenthésage. Le poids d'un vecteur de plus grand poids de ce cristal est un partage.*

Preuve. *Soit x un vecteur dont le poids n'est pas un partage. Si on note $wt(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors il existe un j tel que $x_{j+1} \geq x_j$.*

Puisque l'effet des e_i est décrit par la règle de parenthésage, alors $x_{j+1} \geq x_j$ indique qu'il y a davantage de $j + 1$ que de j dans le mot associé à x . Les parenthèses ouvrantes associées aux $j + 1$ ne peuvent donc toutes être couplées. Il est donc possible de changer un $j + 1$ en un j par e_j selon la règle de parenthésage. Donc on n'a pas $e_i(x) = 0 \forall i$, et x n'est pas un vecteur de plus grand poids.

On a également le résultat suivant pour les cristaux de mots.

Proposition 5.3.4 ((Shimozono, 2005), Proposition 2.61). *Un mot est un vecteur de plus grand poids si et seulement si c'est un mot de Yamanouchi.*

(Shimozono, 2005) donne une preuve détaillée de cette proposition. En particulier, on a que les vecteurs de plus grand poids des cristaux de tableaux sont précisément les tableaux de Yamanouchi.

Ce sont ces deux cas qui nous intéresseront le plus. Il est toutefois possible de donner une proposition plus générale en introduisant la notion de dominance. Un poids est *dominant*, s'il est un vecteur d'entiers faiblement décroissants. En particulier, si $wt(x) \in \mathbb{Z}_{\geq}$ est dominant, alors $wt(x)$ est un partage.

Proposition 5.3.5. *Le poids d'un vecteur de plus grand poids est dominant.*

La preuve de cette proposition exploite, entre autres, la théorie de la représentation du groupe symétrique et l'action du groupe de Weyl sur les poids. Nous référons le lecteur à l'Appendice A de (Bump et Schilling, 2017) pour la preuve.

5.3.2 Morphismes de cristaux

Nous avons vu que les cristaux de mots sont isomorphes aux cristaux de tableaux. Nous devons donc expliquer ce que nous entendons par morphisme de cristaux.

Un *morphisme de cristaux* $\phi : B \rightarrow B'$ est une application qui préserve les arêtes orientées et les poids des sommets des cristaux.

Notons par $\mathbb{Y}(B)$ les vecteurs de plus grand poids du cristal B , et par $\mathbb{Y}(B, \lambda)$ les vecteurs de plus grand poids de B , de poids $\lambda \in \text{Par}$. On a alors les résultats suivants qui découlent directement de la définition de morphisme de cristaux.

Proposition 5.3.6 (Isomorphismes pour les composantes connexes). *Un morphisme de cristaux $\psi : B \rightarrow B'$ qui envoie $x \in B$ sur $x' \in B'$ se restreint à un isomorphisme sur leurs composantes connexes respectives.*

Proposition 5.3.7. *Pour tout $\lambda \in \text{Par}$, tout morphisme de cristaux $\phi : B \rightarrow B'$ envoie $\mathbb{Y}(B, \lambda)$ sur $\mathbb{Y}(B', \lambda)$.*

Le théorème suivant illustre le rôle important des cristaux de tableaux $B(\lambda)$. Voir le chapitre 13 de (Bump et Schilling, 2017) pour la preuve de ce théorème. Elle est loin d'être triviale, et découle de la théorie de la représentation et utilise la notion de *cristaux de Demazure*.

Théorème 5.3.8. *Pour tout cristal connexe B , il existe un unique $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$ tel que $B \simeq B(\lambda)$. Cet isomorphisme est unique.*

On a alors le résultat suivant.

Proposition 5.3.9. *Tout graphe de cristal connexe B a un unique vecteur de plus grand poids. Si son poids est λ , alors $B \simeq B(\lambda)$.*

Preuve. Soit B un cristal connexe. Par le théorème 5.3.8, il existe un isomorphisme $\phi : B \rightarrow B(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$. $B(\lambda)$ a comme unique vecteur de plus grand poids 1_λ , de poids $\lambda \in \text{Par}(n)$. Ainsi, $\phi^{-1}(1_\lambda)$ est l'unique vecteur de plus grand poids de B , et doit avoir un poids λ , puisque les morphismes de cristaux préservent les poids.

Ainsi, on peut décomposer tout graphe de cristal en ses composantes connexes, à isomorphisme près.

Corollaire 5.3.10. Soit B un cristal. Pour chaque composante connexe C de B , on a le poids λ de son vecteur de plus grand poids et l'isomorphisme de composante connexe $P : C \rightarrow B(\lambda)$.

Alors on a un isomorphisme

$$B \simeq \bigoplus_{\lambda \in \text{Par}} B(\lambda) \times \mathbb{Y}(B, \lambda)$$

$$b \mapsto (P(b), Y(b)),$$

où, pour $b \in B$ dans C ,

- $P(b)$ est l'élément de $B(\lambda)$ correspondant à b donnant sa position dans C .
- $Y(b)$ est le vecteur de plus grand poids de C .

5.3.3 Cristaux de tableaux et théorie de la représentation

La théorie des cristaux provient originellement de la théorie de la représentation. Un de ses objectifs est d'étudier la décomposition des représentations en représentations irréductibles, tel que vu au chapitre 2. Les bijections que nous venons de voir sur les cristaux permettent entre autres cette réalisation par l'étude des représentations irréductibles de GL_n .

Rappelons que les caractères des représentations de GL_n sont des fonctions symétriques et que les caractères irréductibles de GL_n sont les fonctions de Schur.

Rappelons que la fonction de Schur associée à un partage λ est définie par

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T,$$

où T couvre l'ensemble des tableaux de Young semi-standard de forme λ .

On peut associer s_λ au cristal $B(\lambda)$, car tous les tableaux associés à s_λ s'y trouvent. Rappelons que pour un caractère de GL_n , qui est une fonction symétrique, on peut associer un ensemble de tableaux correspondant aux monômes du polynôme. On obtient un cristal en établissant une structure de cristal sur ces tableaux. La décomposition de ce cristal en ses composantes connexes donne alors la décomposition du caractère en caractères irréductibles, soit en fonctions de Schur !

5.3.4 Cristaux de tableaux et ordre de lecture

Nous avons introduit dans les chapitres précédents plus d'un ordre de lecture. On peut donc se demander si l'effet d'un opérateur de cristaux c appliqué à un tableau dépend de l'ordre de lecture employé. Notons par \leq_r un ordre de lecture fixé qui peut donc être l'ordre de lecture de ligne, l'ordre de lecture de colonne, l'ordre de lecture diagonale ou tout autre ordre de lecture valide, c'est-à-dire qui parcourt les entrées du sud-ouest vers le nord-est. Notons alors par $w_r(T)$ le mot de lecture du tableau T pour l'ordre de lecture \leq_r . On a alors la proposition suivante.

Proposition 5.3.11 ((van Leeuwen, 2001), Proposition 3.2.1). *Soit un tableau T de forme gauche γ , d'entrée maximale n , et c un opérateur de cristaux e_i ou f_i pour $i \in [n - 1]$.*

Pour tout ordre de lecture valide \leq_r , le tableau $c(T, \leq_r)$ est défini si et seulement si $c(w_r(T))$ est défini. De plus, cette condition et, s'il existe, le tableau résultant $c(T, \leq_r)$, ne dépendent pas de l'ordre de lecture choisi \leq_r .

Preuve. *Commençons par réduire le tableau T à son expression la plus simple.*

Tout d'abord, nous pouvons effectuer une première réduction en retirant de T toutes les entrées inférieures à i ou supérieures à $i + 1$. En effet, e_i et f_i agissent uniquement sur les entrées i et $i + 1$.

La seconde réduction qu'il est possible d'effectuer est de retirer de T tous les rectangles maximaux qui consistent de deux lignes de cases qui ne peuvent être étendus à droite ou à gauche. Remarquons que les colonnes ont au plus deux lignes puisque T contient maintenant que des entrées i et $i + 1$.

Ces rectangles sont donc du type suivant, où les entrées i et $i + 1$ sont respectivement remplacées par 0 et 1 :

0	0	0	...	0
1	1	1	...	1

Les entrées d'un tel rectangle forment un sous-mot de $w_r(T)$ dont toutes les entrées i et $i + 1$ sont couplées en terme de la règle de parenthésage, et ce, peu importe l'ordre de lecture \leq_r utilisé.

En effet, les mots de lecture de ligne, de colonne et diagonale sont respectivement $(i+1)(i+1)\dots(i+1)ii\dots i$; $(i+1)i(i+1)i\dots(i+1)i$; et $(i+1)i(i+1)i\dots(i+1)i$.

Quand toutes les réductions de ce type ont été effectuées, alors T est réduit à un tableau ayant au plus une case par colonne. Peu importe l'ordre de lecture \leq_r choisi, $w_r(T)$ liste alors les entrées de gauche à droite.

Si $c(w_r(T))$ est défini, alors par la définition des opérateurs de cristaux sur les mots, la case variable dont l'entrée est modifiée par c n'a pas de voisin à gauche d'entrée $i + 1$, ni de voisin à droite d'entrée i .

Alors la modification de l'entrée de la case variable respecte la faible croissance des lignes. De plus, il n'est pas possible qu'une telle entrée voisine ait été supprimée au

cours de la seconde étape de réduction, car alors la case variable aurait également été dans une colonne comportant deux cases, et aurait également été supprimée.

Enfin, il ne peut y avoir eu de i ou de $i + 1$ dans la même colonne que la case variable, et donc la modification de l'entrée de la case variable respecte la croissance stricte des colonnes.

Remarquons que cette proposition nous fournit une preuve du fait qu'un tableau qui est de Yamanouchi pour un ordre de lecture valide l'est également pour tout autre ordre valide. En effet, nous avons vu qu'un mot de Yamanouchi y est tel que $e_i(y) = 0$ pour tout $i \in [n - 1]$.

5.4 Opérateurs de cristaux et jeu de taquin

Nous avons énoncé dans les sections précédentes uniquement des résultats sur les cristaux de tableaux droits. Or, on peut également décrire de même façon des cristaux sur les tableaux gauches, mais alors un même mot peut correspondre à plusieurs tableaux gauches, même avec un ordre de lecture fixé. Nous verrons dans cette section qu'en fait, les cristaux de tableaux gauches sont isomorphes aux cristaux de tableaux droits obtenus par la rectification des tableaux gauches concernés. Cela s'explique par la commutation des opérateurs de cristaux et des glisses de jeu de taquin. Van Leeuwen en présente une preuve dans (van Leeuwen, 2001). Ce fait sera central à la preuve du chapitre 6 qui établit une structure de cristal sur les tableaux domino.

Nous allons détailler la preuve de cette commutation donnée par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 2001). Pour cela nous devons tout d'abord introduire les notions de dominance et anti-dominance sur les mots, que van Leeuwen utilise pour décrire les opérateurs de cristaux.

Remarquons que van Leeuwen utilise plusieurs conventions qui sont à contre-courant de celles utilisées dans la littérature. Les procédures, résultats et preuves sont donc modifiés ici en conséquent.

Entre autres, les ordres de lecture proposés par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 2001) sont exactement contraires aux ordres généralement utilisés. Il suggère de lire les tableaux de droite à gauche le long des lignes, en commençant par la ligne du haut, pour la lecture de ligne, et de haut en bas le long des colonnes en commençant par la colonne la plus à droite.

Ces deux ordres de lecture correspondent très exactement à ceux définis précédemment, à la condition de lire les mots obtenus dans l'ordre inverse, c'est-à-dire de droite à gauche. En particulier, van Leeuwen définit les mots de Yamanouchi comme des mots de Yamanouchi gauches (lecture de gauche à droite), alors que ceux que nous définissons à la section 3.1 sont les mots de Yamanouchi droits (lecture de droite à gauche). De même, les opérateurs de cristaux (nommés opérateurs coplactiques dans (van Leeuwen, 2001)) sont définis inversement aux normes de la littérature. Nous n'utiliserons donc pas ces notations particulières ici, mais nous invitons le lecteur à la prudence en consultant les articles de van Leeuwen.

5.4.1 Dominance, anti-dominance et opérateurs de cristaux

Un mot w est dit *dominant pour i* si tout suffixe v de w satisfait $wt(v)_i \geq wt(v)_{i+1}$. En terme de parenthésage, cela correspond à dire que les parenthèses non-couplées sont de la forme $)^r$.

Au contraire, un mot w est dit *anti-dominant pour i* si tout préfixe u de w satisfait $wt(u)_i \leq wt(u)_{i+1}$. En terme de parenthésage, cela correspond à dire que les parenthèses non-couplées sont de la forme $(^r$.

Un mot est dit *neutre pour i* s'il est à la fois dominant et anti-dominant pour i . En terme de parenthésage, cela correspond à dire que toutes les parenthèses sont couplées.

Retirer un sous-mot neutre pour i d'un mot w n'affecte pas la dominance, l'anti-dominance ou la neutralité de w pour i . Un mot qui ne contient aucun sous-mot neutre sera alors de la forme $)^s(r$ en terme de couplage.

Un mot de Yamanouchi est alors un mot qui est simultanément dominant pour tout $i \in [n - 1]$, ce qui correspond à dire que le poids de tous ses suffixes est un partage.

Van Leeuwen décrit les opérations de cristaux en terme de dominance et d'anti-dominance des mots. Les opérateurs de cristaux font alors la transition entre les mots $w = uiv$ et $w' = u(i + 1)v$, où u est dominant pour i et v est anti-dominant pour i .

Proposition 5.4.1. *L'expression $e_i(w)$ est définie à moins que w soit dominant pour i et $f_i(w)$ est défini à moins que w soit anti-dominant pour i .*

On a alors que si on applique e_i autant de fois que possible à un mot w sur $[n]$, alors w devient dominant pour i . Plus généralement, une séquence maximale de e_i , pour des i non fixés, doit terminer et produit un mot de Yamanouchi.

5.4.2 Commutation des glisses de jeu de taquin et des opérateurs de cristaux

Le théorème principal de l'article (van Leeuwen, 2001) est en fait celui de la commutation des glisses de jeu de taquin et des opérateurs de cristaux. Celui-ci est décrit en terme d'échange de tableaux, mais rappelons que le jeu de taquin est simplement un cas de la procédure d'échange de tableaux où on échange un tableau T avec un tableau S comportant une seule case. L'énoncé est le suivant.

Proposition 5.4.2. *Pour tout $i \in [n - 1]$, les opérateurs de cristaux e_i et f_i sur les tableaux commutent avec les glisses de jeu de taquin de la façon suivante.*

Si S est un tableau gauche de forme μ/ν , T est un tableau gauche de forme λ/μ et $X(S, T) = (T', S')$, alors $e_i(T)$ est défini si et seulement si $e_i(T')$ l'est, et alors $X(S, e_i(T)) = (e_i(T'), S')$.

Le même résultat est valide si e_i est remplacé par f_i dans le paragraphe précédent.

Preuve. *Posons $T = U \cup V \cup W$, où U est le sous-tableau de T contenant les entrées inférieures à i , V les entrées i et $i + 1$, et W , les entrées supérieures à $i + 1$. Ces trois tableaux forment un triplet perforé de tableaux de Young gauche. De plus, l'effet de e_i s'appliquera uniquement dans V .*

Par la partie 7 du théorème 3.4.6, on a que $X(S, T) = X(S, U \cup V \cup W) = (U' \cup V' \cup W', S')$, on peut donc se restreindre au cas où T a uniquement des entrées dans $\{i, i + 1\}$.

Pour simplifier l'écriture dans les diagrammes, nous y remplacerons pour la suite i par 0 et $i + 1$ par 1. Puisque le tableau S n'a pas d'importance ici, on peut supposer que $|\mu/\nu| = 1$, et donc que S compte une seule case. On a alors qu'une glisse de jeu de taquin à considérer. De plus, nous pouvons considérer uniquement e_i , puisque pour deux tableaux T_0 et T_1 , $T_0 = e_i(T_1)$ si et seulement si $f_i(T_0) = T_1$. Finalement, nous pouvons utiliser n'importe quel ordre de lecture valide par la section précédente, mais nous considérerons ici l'ordre de lecture de colonne.

Durant une glisse de jeu de taquin $T \triangleright T'$, la seule différence entre le mot de lecture de T , $w(T)$, et celui de T' , $w(T')$, est due à une transition du genre

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array},$$

110 101 010 100

qui consiste à échanger cette lettre avec un mot $(i + 1)i$ qui est neutre pour i . Il n'y a donc pas d'effet sur la dominance ou l'anti-dominance pour i d'un sous-mot contenant l'échange.

En particulier, on a que $w(T')$ est dominant pour i si et seulement si $w(T)$ l'est, et donc que $e_i(T')$ est défini si et seulement si $e_i(T)$ l'est. Nous supposons pour la suite que $e_i(T)$ est défini.

Soit v la case variable pour l'application de e_i à T , et v' celle pour l'application de e_i à T' . Nous allons montrer qu'on peut trouver v' à partir de v en évaluant, pour chaque tableau perforé intermédiaire \tilde{T} entre T et T' , la case d'entrée $(i + 1)$ affectée par e_i . Nous noterons cette case v . Elle sera marquée en gras dans les diagrammes pour la suite. Essentiellement, on se déplace avec cette case si elle se déplace, et on sélectionne la case à sa droite si une entrée i est déplacée dans sa colonne, puisqu'alors ce $(i + 1)$ devient couplé.

On a alors deux cas possible, selon si le chemin de glisses de jeu de taquin appliquées à T (l'ensemble de cases déplacées) est le même que celui appliqué à $e_i(T)$, ou non.

Cas 1 : Les chemins sont les mêmes, donc v fait le même mouvement pendant les deux glisses de jeu de taquin, où v a comme entrée $(i + 1)$ dans T , et i dans $e_i(T)$.

Soit cette case n'est pas déplacée dans les deux tableaux, soit on a un des deux mouvements suivants pour les deux tableaux.

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{+1} & \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{+0} & \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right) \text{ ou } \left(\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \mathbf{i} & b \\ \hline \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \mathbf{0} & b \\ \hline \end{array} \right)$$

$T \qquad e_i(T) \qquad T \qquad e_i(T)$

Il faut donc que v soit l'unique entrée $(i + 1)$ (respectivement i) de sa colonne avant et après la glisse, car sinon la glisse n'est pas légale.

Donc on ne change pas la dominance des mots pour i , et la case v' affectée par e_i dans T' est donnée par la position finale de v . Dans ce cas, on a bien que e_i et \triangleright commutent.

Cas 2 : Les chemins des deux glisses diffèrent dans T et $e_i(T)$, et ce changement doit être causé par le changement de l'entrée de la case v .

En particulier, il faut que v apparaisse dans exactement un des chemins. Puisqu'une glisse de jeu de taquin sélectionne toujours la plus petite entrée candidate, v doit donc être dans le chemin de glisse dans $e_i(T)$, où son entrée est i , mais pas dans T , où son entrée est $i + 1$.

Tout d'abord, montrons que le mouvement de v dans $e_i(T)$ ne peut pas être vers la gauche. Autrement dit, que les mouvements suivants ne sont pas possibles.

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \vdots & 1 \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \vdots & 0 \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right)$$

$T \qquad \qquad e_i(T)$

Supposons qu'un tel mouvement se produit. Par les règles du jeu de taquin, nous avons que l'entrée a déplacée en T est supérieure à i et inférieure ou égale à $i + 1$. On a donc que $a = i + 1$. Puisque le chemin ne peut pas affecter la case au-dessus de v , alors on ne peut déplacer un i dans sa colonne, et $v = v'$, la case affectée par e_i dans T' . Ceci est une contradiction, puisqu'alors $e_i(T')$ a $(i + 1)i$ sur une ligne. On ne peut donc avoir un tel mouvement.

On doit donc avoir le mouvement suivant.

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \vdots & a \\ \hline 1 & b \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \vdots & a \\ \hline 0 & b \\ \hline \end{array} \right)$$

$T \qquad \qquad e_i(T)$

Il faut donc que l'entrée a déplacée en T soit supérieure ou égale à i et inférieure à $(i + 1)$. On a donc $a = i$ et $b = (i + 1)$ par les règles sur les lignes et les colonnes.

On a donc le mouvement suivant.

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \right)$$

$$T \qquad \qquad e_i(T)$$

Remarquons que, dans T' , la case v' sur laquelle agit e_i est celle à droite de v , puisqu'on insère un i dans sa colonne.

Soit R le sous-tableau de T des colonnes à droite de v . On doit avoir que $w(R)$ est anti-dominant pour i par définition de v . En particulier, puisque R est anti-dominant pour i , sous chaque entrée i , il doit y avoir une entrée $(i + 1)$. Il doit donc y avoir une transition finale du type suivant, où le $\mathbf{1}$ après cette glisse est la case v' affectée par e_i dans T' .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \triangleright \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \\ \hline \end{array}$$

Cette partie de la glisse dans T est alors du type suivant :

$$T \supseteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \triangleright \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \\ \hline \end{array} \subseteq T'.$$

La partie de la glisse correspondante dans $e_i(T)$ est alors du type suivant :

$$e_i(T) \supseteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \triangleright \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \triangleright \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \\ \hline \end{array} \subseteq e_i(T').$$

Remarquons qu'à la seconde étape, la case vide ne peut être échangée avec une case vers le sud, car son entrée doit être supérieure à 1 !

On a donc bien que e_i commute avec les glisses de jeu de taquin \triangleright .

La figure 5.4 illustre la commutation des glisses de jeu de taquin et les opérateurs de cristaux. Sur chaque ligne, les transitions sont obtenues de droite à gauche par des glisses de jeu de taquin. Dans chaque colonne, les transitions sont données de haut en bas par l'application successive des opérateurs de cristaux suivants :

$$f_2, f_3, f_4, f_4 \quad ; \quad f_2, f_3, f_2, f_3 \quad ; \quad f_1, f_2, f_1, f_2 \quad ; \quad f_1, f_0, f_0 \quad .$$

Les flèches verticales représentent un chemin le long des arêtes orientées dans les cristaux respectifs. Par exemple, les flèches entre la première ligne et la seconde indiquent qu'on suit un chemin entre le tableau de la première ligne et celui de la seconde dans les cristaux respectifs, le long d'arêtes orientées étiquetées par 2,3,4, puis 4. Ainsi, le poids des deux tableaux diffère de $-(a_2 + a_3 + a_4 + a_4)$. Les cases affectées par les opérateurs de cristaux appliqués sont en gras.

Le diagramme résultant est commutatif, alors on y observe bien la commutation des opérateurs de cristaux et des glisses de jeu de taquin.

Corollaire 5.4.3. *Les cristaux de tableaux de Young gauche sont isomorphes au cristal des tableaux obtenus par leur rectification.*

Corollaire 5.4.4. *L'ensemble des tableaux semi-standards de forme χ dont la rectification est 1_λ est égal à l'ensemble des tableaux de Yamanouchi de forme χ et de remplissage λ .*

Preuve. *Pour un tableau semi-standard L de forme χ , il y a un unique tableau semi-standard droit P de forme λ tel que $L \triangleright P$. On a que P est un tableau de Yamanouchi si et seulement si $P = 1_\lambda$. On a également que les tableaux de forme χ qui sont des vecteurs de plus haut poids sont exactement les tableaux de Yamanouchi de forme χ . Puisque $wt(L) = wt(P) = \lambda$, alors on a le résultat voulu.*

Cela correspond à dire que les tableaux de Yamanouchi de remplissage λ sont simplement obtenus de 1_λ par des glisses de jeu de taquin extérieures. Entre autre, cela confirme que les mots de Yamanouchi sont stables sous les relations de Knuth.

Corollaire 5.4.5. *Les glisses de jeu de taquin intérieures et les fonctions e_i commutent sur l'ensemble des tableaux gauches semi-standards. Les formes normales de ces deux systèmes sont respectivement les tableaux de Young semi-standards et les tableaux de Yamanouchi.*

Les deux formes normales d'un tableau gauche T déterminent uniquement T .

La forme normale pour les e_i donne le vecteur de plus haut poids de la composante de T , alors que la forme normale pour les glisses de jeu de taquin donne la position de l'élément correspondant dans la composante des tableaux rectifiés. L'isomorphisme qui en découle est exactement celui de Littlewood-Richardson que nous verrons à la section 6.1.2.

Nous avons vu à la section 3.6 que dans le monoïde plaxique, les glisses de jeu de taquin sur les tableaux correspondent aux relations de Knuth, et donnent les classes du monoïde plaxique. La commutation entre les glisses de taquin et les opérateurs de cristaux implique en particulier la commutation entre les opérateurs de cristaux et les relations de Knuth sur les mots. On a donc qu'une classe de mots dans le monoïde plaxique est envoyée sur une autre par un opérateur de cristaux. On obtient donc une structure de cristal sur les éléments du monoïde plaxique, ce qui restreint l'étude des cristaux sur les mots. Nous y reviendrons à la section 5.5.2.

5.5 Produit de cristaux

Au chapitres 3 et 4, nous avons étudié le produit de tableaux pour expliquer le produit de deux fonctions de Schur. On peut se demander comment cela se transpose en terme de cristaux. Ce sera le produit tensoriel de cristaux. Nous utiliserons ce parallèle entre produit de tableaux et produit de cristaux dans notre preuve de la structure de cristal sur les tableaux domino à la section 6.3.

5.5.1 Produit tensoriel et tableaux en tant que produit de cases

Le produit tensoriel de deux cristaux B et C , $B \otimes C$, est le cristal dont les sommets sont de forme $b \otimes c$ pour $b \in B$ et $c \in C$. Sa fonction de poids est définie par $wt(b \otimes c) = wt_B(b) + wt_C(c)$, pour wt_B, wt_C les fonctions de poids de B et C respectivement.

Les fonctions e_i, f_i sont plus difficiles à décrire dans le cas général, nous nous contenterons d'en donner la définition dans le cas des mots et des tableaux. Voir la section 2.3.4 de (Shimozono, 2005) pour la définition explicite de ces fonctions. Remarquons également qu'il n'est pas évident que le produit tensoriel $B \otimes C$ est un cristal. Voir (Bump et Schilling, 2017) pour la preuve.

Décrivons maintenant les fonctions e_i et f_i dans le cas des mots et des tableaux.

Dans le cas de mots, pour deux mots b, c , l'effet de e_i et f_i sur $b \otimes c$ correspond à l'effet de e_i et f_i sur la concaténation de b et c .

Dans le cas des tableaux, pour deux tableaux b, c , l'effet de e_i et f_i sur $b \otimes c$ correspond à l'effet de e_i et f_i sur la concaténation des mots de lecture de b et c . Il est important de noter que l'ordre de la concaténation a une importance.

Remarquons que les cristaux de tableaux à une case correspondent exactement aux cristaux sur les lettres, alors ce sont des cristaux avec les mêmes fonctions poids et fonctions e_i et f_i . Mais nous nous intéressons rarement à des tableaux comportant une seule case!

On peut obtenir un tableau en accolant plusieurs cases afin de former des lignes, puis en joignant ces lignes entre elles. Cela correspond à concaténer les lettres correspondant aux entrées de chaque cases pour former le mot de lecture de ligne. De même façon, construire un tableau de façon similaire, mais en considérant les colonnes, correspond à concaténer les lettres correspondant aux entrées de chaque cases pour obtenir le mot de lecture de colonne.

Concaténer les cases en lignes ou en colonnes ne donne pas le même tableau, ni les mêmes mots de lecture. Toutefois, les cristaux obtenus seront isomorphes! Voir le chapitre 6 de (Bump et Schilling, 2017) pour la preuve.

On peut ainsi construire les tableaux par la concaténation de leurs cases dans l'ordre du mot de lecture, et les cristaux de tableaux par le produit de cristaux de tableaux à une case. Par exemple, un tableau composé de six cases sera dans une composante connexe isomorphe à une des composantes connexes de

$$B(1) \otimes B(1) \otimes B(1) \otimes B(1) \otimes B(1) \otimes B(1).$$

Exemple 5.5.1. Le tableau

1	2	2	4
2	4	4	
5			

 correspond à

$$\boxed{5} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \in B(1)^{\otimes 8}$$

pour l'ordre de lecture de lignes, et à

$$\boxed{5} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \in B(1)^{\otimes 8}$$

pour l'ordre de lecture de colonnes.

5.5.2 Produit tensoriel de cristaux et le monoïde plaxique

Cette section se base sur le chapitre 8 de (Bump et Schilling, 2017). On montre que les opérateurs de cristaux agissent sur les classes du monoïde plaxique. En particulier, on peut en déduire que les mots de lecture d'un tableau, obtenus pour l'ordre de lecture de lignes ou de colonnes, sont plaxiquement équivalents. Nous verrons également un théorème qui établit un lien très fort entre les cristaux de tableaux et l'algorithme d'insertion RSK.

Dans le chapitre 8 de (Bump et Schilling, 2017), on définit en particulier l'équivalence plaxique de la façon suivante. Soit deux cristaux C_1, C_2 de même type de Cartan (ici A_n), et soit $x_i \in C_i$. Soit C'_i la composante connexe de C_i contenant x_i . Si C'_1 est isomorphe à C'_2 , et si cet (unique) isomorphisme envoie x_1 sur x_2 , alors x_1 et x_2 sont *plaxiquement équivalents*, noté $x_1 \equiv x_2$. Notons que cette définition est bien plus générale que celle vue précédemment.

Par une propriété du produit tensoriel, on a que si $x_1 \equiv x_2$ et $y_1 \equiv y_2$, alors $x_1 \otimes y_1 \equiv x_2 \otimes y_2$. Ainsi,

Proposition 5.5.2. *L'équivalence plaxique donne une structure de monoïde sur les classes d'éléments de cristaux qui est fermé sous le produit tensoriel.*

En particulier, la restrictions aux cristaux de GL_n que nous étudions ici est précisément le monoïde plaxique décrit précédemment. En effet, le chapitre 8 de (Bump et Schilling, 2017) fait la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 5.5.3. *soit $x, y \in B(1)^{\otimes k}$. Les mots de lecture de x et y sont Knuth-équivalents si et seulement si x et y sont plaxiquement équivalents.*

En particulier, pour un tableau fixé comptant k cases, on peut le décomposer comme un élément de $B(1)^{\otimes k}$ par son mot de lecture de ligne, ou de colonnes, tel que vu précédemment. Nous avons vu qu'alors les cristaux obtenus sont isomorphes. Ainsi, les éléments correspondant respectivement aux mots de lectures de ligne et de colonne sont plaxiquement équivalents et les mots de lectures sont Knuth-équivalents. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 5.5.4. *Pour un tableau de Young fixé, les mots de lectures donnés par l'ordre de lecture de ligne et de colonnes sont Knuth-équivalents.*

De plus, on a un lien fort avec l'algorithme d'insertion de RSK donné par le théorème suivant :

Théorème 5.5.5. *Le cristal $B(1)^{\otimes k}$ se décompose en une union disjointe de cristaux, chacun isomorphe à un $b(\lambda)$ pour λ un partage de k de longueur inférieure ou égale à n (n fixé). Soit $x \in B(1)^{\otimes k}$, et $(P(x), Q(x))$ la paire de tableaux de même forme λ obtenue par l'insertion du mot x par RSK.*

1. On a que $x \equiv P(x)$,
2. x se situe dans un sous-cristal isomorphe à $B(\lambda)$,
3. $P(x) = P(y)$ si et seulement si x et y sont plaxiquement équivalents, et
4. $Q(x) = Q(y)$ si et seulement si x et y se situent dans le même sous-cristal connexe.

5.5.3 Produit tensoriel de cristaux de tableaux et produit de tableaux

Voyons quelques applications aux cristaux vus précédemment. Tel que mentionné à la section précédente, le produit tensoriel de mots correspond à leur concaténation. Par exemple, le produit \otimes des lettres sur $[3]$ est isomorphe au cristal des mots de deux lettres sur $[3]$.

On peut alors extrapoler ce résultat aux tableaux. À quoi correspond le produit \otimes de deux tableaux, et de deux cristaux de tableaux ? Par la remarque précédente sur les mots, on a que le produit \otimes de deux tableaux sera isomorphe au produit $*$ défini à la section 3.6.2.

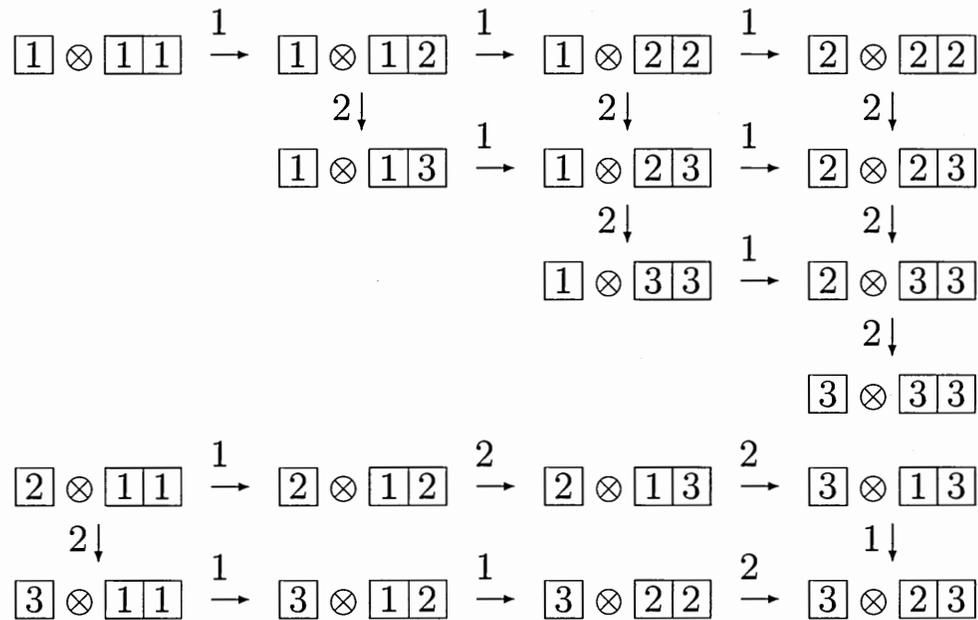
En effet, on a vu que l'effet d'un opérateur de cristaux c sur $t_1 \otimes t_2$ est celui sur la concaténation de leurs mots de lecture respectifs, soit $w(t_1)w(t_2)$. Or $w(t_1)w(t_2) = w(t_1 * t_2)$. Puisque les opérateurs de cristaux commutent avec les glisses de jeu de taquin, cela s'applique alors également à la rectification de $t_1 * t_2$!

On a alors que

$$B(\lambda) \otimes B(\mu) \simeq B(\lambda * \mu)$$

$$t_1 \otimes t_2 \mapsto t_1 * t_2.$$

Exemple 5.5.6. La figure 5.5 illustre le cristal produit $B(1) \otimes B(2)$, pour $n = 3$. On obtient un cristal dont les deux composantes connexes sont respectivement isomorphes à $B(3)$ et $B(2, 1)$.

Figure 5.5 Cristal produit $B(1) \otimes B(2)$

En associant les composantes connexes $B(1)$, $B(2)$, $B(2,1)$ et $B(3)$ à leurs fonctions de Schur respectives

$$s_{(1)}(x_1, x_2, x_3), s_{(2)}(x_1, x_2, x_3), s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3), \text{ et } s_{(3)}(x_1, x_2, x_3),$$

on peut en déduire que

$$s_{(1)}(x_1, x_2, x_3)s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) + s_{(3)}(x_1, x_2, x_3).$$

La figure 5.6 illustre quant à elle l'isomorphisme de produits de tableaux énoncé ci-haut, pour chaque élément de $B(1) \otimes B(2)$.

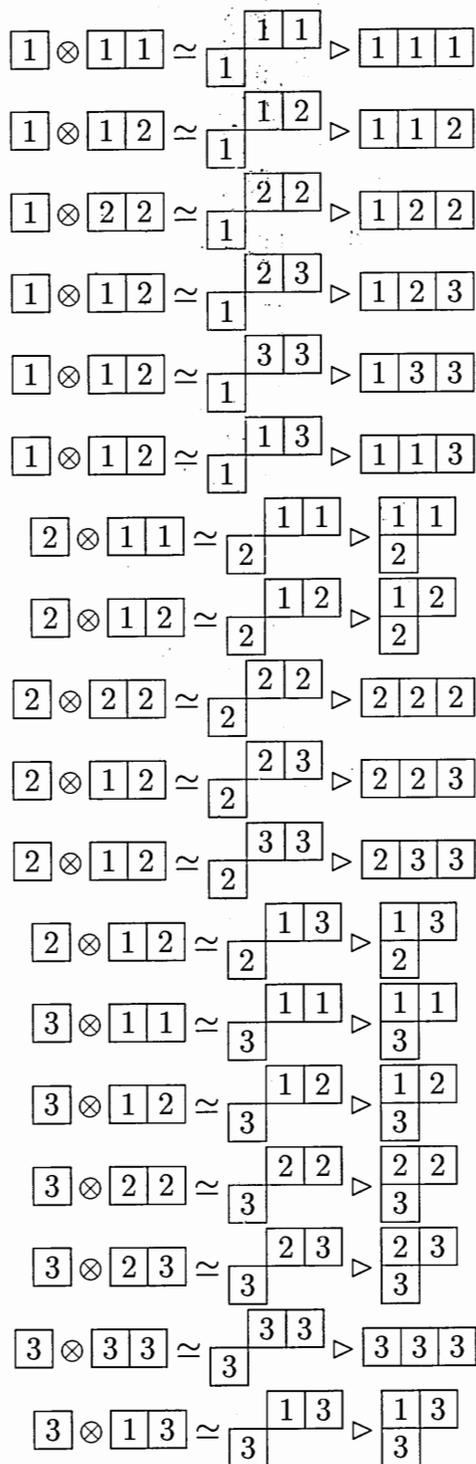


Figure 5.6 Isomorphismes des produits de tableaux

On peut se demander si le produit \otimes de deux tableaux correspond également au tableau domino obtenu de ces deux tableaux. On a vu qu'il existe une bijection entre les paires de tableaux et les tableaux domino, mais il faut se convaincre que cet isomorphisme est un morphisme de cristaux, c'est-à-dire qu'il respecte les opérateurs de cristaux e_i et f_i , et que l'ensemble des composantes connexes sont en bijection, pas juste leurs éléments!

C'est ce que nous étudierons au prochain chapitre.

CHAPITRE VI

CRISTAUX SUR LES TABLEAUX DOMINO

Carré et Leclerc proposent dans (Carré et Leclerc, 1995) un algorithme sur les tableaux domino. Cet algorithme donne une bijection entre les tableaux domino et les paires formées d'un tableau domino de Yamanouchi et un tableau de Young semi-standard. Si on suppose qu'il existe une structure de cristal sur les tableaux domino, cette bijection donne alors le vecteur de plus grand poids de la composante connexe du tableau domino donné, de poids λ , ainsi que le tableau de Young correspondant à sa position dans $B(\lambda)$. Le fait que cette bijection existe n'implique toutefois pas qu'il existe une structure de cristal sur les tableaux domino. On a plutôt que, si une telle structure existait, il serait alors naturel que cette bijection existe. Il semble pourtant y avoir un certain consensus dans la communauté mathématique comme quoi cet article et cette bijection donnent une justification suffisante de l'existence d'une structure de cristal sur les tableaux domino. Ce chapitre vient donc fournir des arguments pour une preuve plus étoffée et explicite de l'existence d'une telle structure sur les tableaux domino. Nous nous baserons pour ce faire sur des résultats de Carré, Leclerc et van Leeuwen. Nous étudierons en particulier la compatibilité de cette structure de cristal sur les tableaux domino avec le produit de tableaux décrit précédemment, et le produit de cristaux de tableaux.

Nous commencerons par décrire la bijection proposée par Carré et Leclerc dans (Carré et Leclerc, 1995). Nous verrons ensuite un algorithme donné par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 2000) pour décrire la projection sur la seconde composante de la bijection de Carré-Leclerc. Celle-ci est énoncée en terme d'échanges de tableaux. Nous verrons par la suite certains résultats démontrés par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 2000), qui permettent de montrer l'existence d'une structure de cristal sur l'ensemble des tableaux domino. Nous verrons à la section suivante que cette structure de cristal n'est pas tout à fait compatible avec le produit de cristaux de tableaux, mais peut le devenir sous certaines manipulations. Finalement, nous établirons des liens avec le monoïde plaxique de Schützenberger et Lascoux de (Lascoux et Schützenberger, 1981).

6.1 Bijection de Carré-Leclerc

Carré et Leclerc décrivent un algorithme dans (Carré et Leclerc, 1995) pour obtenir la bijection que nous nommerons *bijection de Carré-Leclerc*. Nous décrivons cet algorithme en détail dans cette section. La bijection de Carré-Leclerc généralise une bijection de Robinson, énoncée dans (Robinson, 1938), et utilisée pour démontrer la règle de Littlewood-Richardson. Voyons cette bijection.

6.1.1 Bijection de Robinson

Van Leeuwen décrit dans (van Leeuwen, 2000) la plus ancienne version de la bijection de Robinson-Schensted-Knuth, donnée dans (Robinson, 1938). Elle envoie un tableau gauche semi-standard T de forme λ/μ et de poids ν sur une paire (L, P) où L est un tableau de Littlewood-Richardson, c'est-à-dire un tableau de Yamanouchi, de forme λ/μ et de poids γ , et P est un tableau semi-standard de forme γ et de poids ν .

Notons que γ est un partage puisque le poids d'un mot de Yamanouchi est, par définition, un partage.

Autrement dit, si on note $SSYT(\lambda/\mu, \nu)$ l'ensemble des tableaux semi-standards de forme λ/μ et de poids ν , et $Yam(\lambda/\mu, \gamma)$ l'ensemble des tableaux de Yamanouchi de forme λ/μ et de poids γ , alors on a la bijection suivante :

$$SSYT(\lambda/\mu, \nu) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{\gamma \in Par} Yam(\lambda/\mu, \gamma) \times SSYT(\gamma, \nu).$$

Cette bijection peut être décrite en terme d'opérateurs de cristaux. À partir d'un tableau de Young T , on applique des opérateurs remontant (e_i pour $i \in \mathbb{N}$) jusqu'à ce que le tableau obtenu L soit un tableau de Yamanouchi. Simultanément, on construit un tableau de Young P pour enregistrer la séquence des transformations, soit les i tels que e_i est appliqué. Nous verrons comment ce tableau enregistre la séquence de transformations dans la prochaine section.

Évidemment, ce n'est pas ainsi qu'a été initialement définie cette bijection, mais cela y correspond. La preuve donnée dans (Macdonald, 2015) aux pages 143 à 147, est sans mention de cristaux. Voyons la bijection de Carré et Leclerc.

6.1.2 Algorithme de Carré-Leclerc

Carré et Leclerc ont généralisé cette bijection pour décrire une bijection qui envoie un tableau domino D sur une paire (Y, P) , où Y est un tableau domino de Yamanouchi et P est un tableau de Young semi-standard.

Commençons par décrire l'algorithme qui transforme progressivement un tableau domino en un tableau de Yamanouchi, ainsi que l'algorithme qui construit simultanément un pseudo-tableau qui enregistre la séquence des transformations. Nous décrirons par la suite plus formellement l'effet d'un opérateur de cristaux f_i ou e_i sur un tableau domino.

Nous aurons besoin des notions de pseudo-tableau, de pseudo-tableau canonique et d'indice pour une lettre dans un mot.

Un *pseudo-tableau* est une généralisation d'un tableau de Young dont la forme est une séquence d'entiers non-négatifs (nommée *composition*), et tel que les lignes et les colonnes sont faiblement croissantes respectivement de gauche à droite et de haut en bas.

Exemple 6.1.1. La figure 6.1 est un pseudo-tableau de forme $(3, 2, 0, 3, 4, 0, 2)$ et de poids $(3, 4, 5, 2)$.

1	1	3	
1	2		
2	2	3	
2	3	3	4
3	4		

Figure 6.1 Pseudo-tableau

Le *tableau canonique* associé à une composition $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ est le pseudo-tableau de forme et de poids K , dont la $i^{\text{ème}}$ ligne compte k_i entrées i , à la manière du tableau 1_λ .

Exemple 6.1.2. La figure 6.2 est un pseudo-tableau canonique associé à $K = (2, 4, 0, 2, 1)$.

1	1		
2	2	2	2
4	4		
5			

Figure 6.2 Pseudo-tableau canonique

Finalement, nous avons besoin de la notion d'indice d'une lettre dans un mot. Elle permet d'identifier la lettre i remplacée par un $i - 1$ à chaque étape de l'algorithme, tout comme la règle de parenthésage détermine l'application d'un opérateur e_i .

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_r$ un mot sur $[n]$. L'indice associé à la lettre w_j est donné par :

$$\text{indice}(w_j) = (\#w_j \text{ dans } w_j \dots w_{r-1} w_r) - (\#(w_j - 1) \text{ dans } w_j \dots w_{r-1} w_r).$$

Remarquons que les indices ne sont alors pas définis pour les lettres 1. On note alors leur indice par X . On peut également associer à une lettre w_j son i -indice :

$$i\text{-indice}(w_j) = (\#i \text{ dans } w_j \dots w_r) - (\#(i - 1) \text{ dans } w_j \dots w_r).$$

Pour une lettre w_j de valeur i , l'indice et le i -indice de w_j coïncident. Le i -indice compte les parenthèses ouvrantes non-couplées pour i à droite d'une lettre.

Exemple 6.1.3. Soit $w = 321341233$. Les indices associés aux lettres de w sont donnés à la figure 6.3.

lettre	3	2	1	3	4	1	2	3	3
indice	2	0	X	2	-1	X	1	2	1

Figure 6.3 Calcul des indices des lettres du mot $w = 321341233$

Proposition 6.1.4. Un mot est de Yamanouchi si et seulement si les indices de toutes ses lettres sont inférieures ou égales à 0.

Preuve. En effet, si un mot est de Yamanouchi, alors tous ses suffixes comportent au moins autant de $i - 1$ que de i . Ainsi, l'indice d'une lettre dont la valeur est i doit être inférieure ou égale à zéro.

Par le même raisonnement, le fait que les indices de toutes les lettres d'un mot w soient inférieures ou égales à zéro implique que w est un mot de Yamanouchi.

Nous pouvons maintenant énoncer l'algorithme 7.1 de (Carré et Leclerc, 1995).

Algorithme 6.1.5. (Carré et Leclerc, 1995), algorithme 7.1

— *Entrée :*

— $Y := T$ un tableau domino de forme λ/μ et de poids K

— $t :=$ le pseudo-tableau canonique associé à K

— $w :=$ le mot de lecture de colonne de Y

— *Sortie :*

— $Y :=$ un tableau domino de Yamanouchi de forme λ/μ et de poids γ

— $t :=$ tableau de Young de forme γ et de poids K

— $w :=$ le mot de lecture de colonne de Y (mot de Yamanouchi)

Tant que Y n'est pas un tableau de Yamanouchi, appliquer les étapes suivantes :

1. Calculer les indices des lettres de w . Parmi les lettres ayant un indice positif, sélectionner la lettre w_j dans w ayant la plus petite valeur i . S'il y a plusieurs lettres de valeur i et d'indice positif, sélectionner, parmi celles ayant un indice maximal, celle qui est la plus à droite.
2. Dans Y , changer l'entrée du domino correspondant à w_j par $i - 1$.
3. Dans t , prendre la case la plus à droite dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de t et la déplacer à la fin de la $(i - 1)^{\text{ème}}$ ligne. Posons $t :=$ le pseudo-tableau ainsi obtenu.
4. Si Y n'est plus un tableau domino, alors on doit avoir la présence d'un des sous-tableaux suivants, où $i' = i - 1$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' \\ \hline i & i' \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline i' & \\ \hline \end{array}$$

5. Tant que Y n'est pas un tableau domino, appliquer les transformations R_1 et R_2 suivantes :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' \\ \hline i & i' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline i' & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_2} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline i' & i \\ \hline \end{array}$$

6. Posons $w :=$ le mot de lecture de Y .

Exemple 6.1.6. Voyons l'application de l'algorithme, étape par étape, et comparons avec les tableaux domino à la figure 6.4. Nous débutons avec le tableau domino Y , le pseudo-tableau t , le mot de lecture de colonne de Y w et d'indices énumérés ci-dessous.

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \\ \text{indices : } 1 \ X \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

1. La plus petite lettre d'indice positif est le 2, et c'est le seul 2 dans le mot. On change donc l'entrée 2 associée dans Y par un 1, et on déplace la dernière case de la 2^{ème} ligne de t à la fin de sa 1^{ère} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|} \hline 1 \ 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 4 \ 1 \ 3 \ 1 \ 4 \\ \text{indices : } 1 \ X \ 1 \ X \ 1 \end{array}$$

Noter que Y est un tableau domino.

2. La plus petite lettre d'indice positif est le 3, et c'est le seul. On change donc l'entrée 3 associée par un 2 et on déplace la dernière case de la 3^{ème} ligne de t à la fin de sa 2^{ème} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|} \hline 1 \ 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 4 \\ \text{indices : } 2 \ X \ 0 \ X \ 1 \end{array}$$

3. La plus petite lettre d'indice positif est le 4, et il y en a deux. On choisit celui qui a le plus grand indice (d'indice 2). On change donc l'entrée 4 associée par un 3 et on déplace la dernière case de la 4^{ème} ligne de t à la fin de sa 3^{ème} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|} \hline 1 \ 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 3 \ 1 \ 2 \ 1 \ 4 \\ \text{indices : } 0 \ X \ 0 \ X \ 1 \end{array}$$

4. La plus petite lettre d'indice positif est le 4, et c'est le seul. On change donc l'entrée 4 associée par un 3 et on déplace la dernière case de la 4^{ème} ligne de t à la fin de sa 3^{ème} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \text{indices : } 0 \quad X \quad 0 \quad X \quad 1 \end{array}$$

5. La plus petite lettre d'indice positif est le 3, et il y en a un seul d'indice positif. On change donc l'entrée 3 associée par un 2 et on déplace la dernière case de la 3^{ème} ligne de t à la fin de sa 2^{ème} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \text{indices : } -1 \quad X \quad 1 \quad X \quad 1 \end{array}$$

6. La plus petite lettre d'indice positif est le 2, et il y en a deux d'indice maximal 1. On choisit donc celui qui est le plus à droite. On change l'entrée 2 associée par un 1 et on déplace la dernière case de la 2^{ème} ligne de t à la fin de sa 1^{ème} ligne. On obtient :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ \text{indices : } 0 \quad X \quad -1 \quad X \quad X \end{array}$$

Comme Y n'est pas un tableau domino, on applique R_2 à Y (et à w) :

$$Y := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad t := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} w : \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \text{indices : } 0 \quad X \quad X \quad 0 \quad X \end{array}$$

Notons que Y est un tableau domino et w est un mot de Yamanouchi.

Nous verrons à la figure 6.4 l'effet de chaque étape sur le cristal de tableaux domino associé. Les tableaux domino encadrés sont ceux calculés dans cet exemple.

Remarquons que l'algorithme préserve la forme du tableau, ainsi que son spin. La première remarque est particulièrement importante du point de vue de la théorie

des cristaux, puisque les tableaux dans une composante connexe sont tous de la même forme. La seconde remarque est particulièrement importante du point de vue de la théorie de la représentation. Voir la section 4.2.3.

Regardons maintenant l'algorithme du point de vue de la théorie des cristaux.

Le calcul des indices correspond à calculer en simultanément les i -indices, pour toutes les lettres de w . Le fait qu'une lettre i ait un indice nul ou négatif implique qu'il n'est pas possible d'appliquer e_{i-1} à cette lettre. Le fait que la première étape de l'algorithme modifie la plus petite lettre dont l'indice est positif implique alors que le plus petit e_i possible est appliqué à chaque étape. Cela permet de déterminer quel e_i est appliqué, puisqu'il pourrait y en avoir plusieurs à chaque étape.

Parmi les lettres de valeur i , le choix de sélectionner celle ayant le plus grand indice et, si plusieurs lettres ont le même indice maximal, celle la plus à droite, permet de sélectionner la parenthèse non-couplée la plus à gauche à laquelle s'applique alors l'opérateur de cristaux e_i , dans le mot de lecture.

Remarquons que les transformations de type R_1 ne changent pas les positions relatives des lettres i et $i - 1$ dans w . Les transformations de type R_2 , pour leur part, modifient w : une lettre $(i - 1)$ est échangée avec un sous-mot $i(i - 1)$ qui est neutre pour i . La i -dominance de w n'est donc pas modifiée par l'application de R_2 .

Ainsi, la procédure pour déterminer quel i est changé en $i - 1$ dans l'algorithme correspond à déterminer le plus petit e_{i-1} qu'il est possible d'appliquer à w .

Remarquons finalement que le pseudo-tableau enregistre la séquence des e_i qui sont appliqués, et en conséquent les f_i à appliquer pour revenir à l'état initial.

En effet, une entrée $r > i$ dans la $i^{\text{ème}}$ ligne indique que $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{r-1}$ devront

être appliqués. L'algorithme inverse, que nous verrons par la suite, décrit exactement dans quel ordre les opérateurs sont alors appliqués.

Dans l'exemple précédent, le tableau t finalement obtenu nous indique qu'on devra appliquer un f_1 pour le 2 de la première ligne, des f_1, f_2, f_3 pour le 4 de la première ligne, un f_2 pour le 3 de la deuxième ligne, et un f_3 pour le 4 de la troisième ligne. Ces transformations sont alors appliquées dans l'ordre suivant selon l'algorithme inverse : $f_1, f_2, f_3, f_3, f_2, f_1$.

Nous pouvons maintenant décrire l'algorithme inverse, qui nous donne la bijection. Sa description s'inspire grandement de la preuve pour l'algorithme inverse pour les tableaux de Young qui se retrouve dans (Macdonald, 2015), aux pages 143 à 147.

Algorithme 6.1.7 (Algorithme inverse).

- *Entrée :*
 - $T := Y$ un tableau domino de Yamanouchi de forme λ/μ et de poids γ
 - $t :=$ tableau de Young de forme γ et de poids K
 - $w :=$ le mot de lecture de colonne de Y (mot de Yamanouchi)
- *Sortie :*
 - $T :=$ un tableau domino de forme λ/μ et de poids K
 - $t :=$ le pseudo-tableau canonique associé à K
 - $w :=$ le mot de lecture de colonne de T

Tant que t n'est pas le pseudo-tableau canonique associé à K , appliquer les étapes suivantes :

1. Soit i le plus petit entier tel qu'on obtient t d'un pseudo-tableau t' en déplaçant la dernière case de la $i^{\text{ème}}$ ligne de t' à la fin de sa $(i - 1)^{\text{ème}}$ ligne.
2. Pour chaque lettre w_j de $w = w_1 w_2 \dots w_r$, on calcule le i -indice de w_j . Soit m le maximum des i -indices obtenus.

- Si $m \geq 0$, soit w_p la lettre la plus à gauche telle que son i -indice est m . Alors $w_{p-1} = (i-1)$, et on change le remplissage du domino correspondant en i .
- Si $m < 0$, alors $w_r = (i-1)$, et le remplissage du domino correspondant est changé en i .

3. Si T n'est plus un tableau domino, alors on doit avoir la présence d'un des sous-tableaux suivants, où $i' = i - 1$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline & i \\ \hline \end{array}$$

4. Tant que T n'est pas un tableau domino, appliquer les transformations R'_1 et R'_2 suivantes :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_2} \begin{array}{|c|} \hline i' \\ \hline i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

5. Posons $w :=$ le mot de lecture de T , et $t := t'$.

Établissons maintenant des parallèles entre l'algorithme inverse et la théorie des cristaux.

Puisque le pseudo-tableau enregistre la séquence des e_i appliqués, sélectionner le plus petit i possible revient à appliquer le plus petit f_{i-1} possible.

Le fait que $m < 0$ implique qu'il y a plus de $i - 1$ que de i dans tout suffixe de w . En particulier que $w_r = (i - 1)$. En terme de la règle de parenthésage, cela signifie que les parenthèses non-couplées forment une suite $)^k$. Donc, f_{i-1} s'applique à w_r .

Similairement, si m est nul ou positif, alors les parenthèses non-couplées forment une suite $)^k(\ell$. Puisque toutes les lettres ayant un i -indice m sont à gauche d'un nombre maximal de i et minimal de $(i - 1)$, alors la lettre d'indice m la plus à gauche, w_p , indique la frontière avant la suite $)^k$. Ainsi, la lettre w_{p-1} est de valeur $i - 1$ et correspond à la parenthèse fermée non-couplée la plus à droite.

Ainsi, la procédure pour déterminer quel $i - 1$ est changé en i dans l'algorithme inverse correspond à déterminer le plus petit f_{i-1} qu'on peut appliquer à w .

6.1.3 Opérateurs de cristaux pour les tableaux domino

On peut décrire formellement les opérateurs de cristaux f_i et e_i pour les tableaux domino de la façon suivante.

Soit w le mot de lecture d'un tableau domino T pour un ordre de lecture valide. La règle de parenthésage pour i s'applique sur w : f_i s'applique sur la parenthèse fermée non couplée la plus à droite, et e_i s'applique sur la parenthèse ouverte non couplée la plus à gauche.

À la différence des tableaux, changer l'entrée correspondante dans un tableau domino peut affecter sa validité. Les transformations R_1, R_2 ou R'_1, R'_2 suivantes sont alors appliquées, et une suite de telles transformations permet d'obtenir un tableau domino valide.

R_1, R_2 peuvent être appliquées lorsqu'on calcule l'effet d'un e_i . Le tableau domino de gauche est obtenu en modifiant une entrée i pour une entrée $i - 1 = i'$ ou par l'application d'une transformation précédente.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' & \\ \hline i & i' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline i' & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_2} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline i' & i \\ \hline \end{array}$$

R'_1, R'_2 peuvent être appliquées lorsqu'on calcule l'effet d'un f_i . Le tableau domino de gauche est obtenu en modifiant une entrée $i - 1 = i'$ pour une entrée i , ou par l'application d'une transformation précédente.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline & \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_2} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & \\ \hline i & i \\ \hline \end{array}$$

Les fonctions f_i, e_i décrites ici, ainsi que la fonction de poids donnée par le poids d'un tableau domino, respectent les conditions minimales pour former un cristal. Toutefois, nous voulons également qu'elles répondent aux axiomes dits de Stembridge. En particulier, les cristaux de tableaux sont des cristaux de Stembridge, et le produit tensoriel de deux cristaux de Stembridge est un cristal de Stembridge. Puisque nous souhaitons que la structure de cristal sur les tableaux domino corresponde au produit de tableaux au sens de la théorie des cristaux, alors les opérateurs de cristaux décrits ici devraient, pour ce faire, vérifier les axiomes de Stembridge.

Nous ne discuterons pas en détail de ces axiomes, mais nous référons au chapitre 4 de (Bump et Schilling, 2017) pour plus de détails sur les axiomes et les cristaux de Stembridge. Montrer que les axiomes de Stembridge sont vérifiés par les opérateurs de cristaux que nous avons décrit sur les tableaux domino est une autre méthode pour montrer l'existence d'une structure de cristal sur les tableaux domino.

La figure 6.4 représente le cristal connexe de tableaux domino sous-jacent à l'exemple 6.1.6. Un gros merci à Franco Saliola pour la production de cette image. Le graphe donné à cette figure illustre le chemin parcouru du tableau domino initial de l'exemple pour arriver à la source du cristal, en appliquant l'algorithme de Carré-Leclerc. En termes de théorie des graphes, l'algorithme de Carré-Leclerc donne donc une forêt couvrante pour chaque tableau domino, soit un chemin de ce tableau vers la racine du graphe; autrement dit, le tableau domino de Yamanochi obtenu par la bijection de Carré-Leclerc pour chaque tableau domino de cette composante.

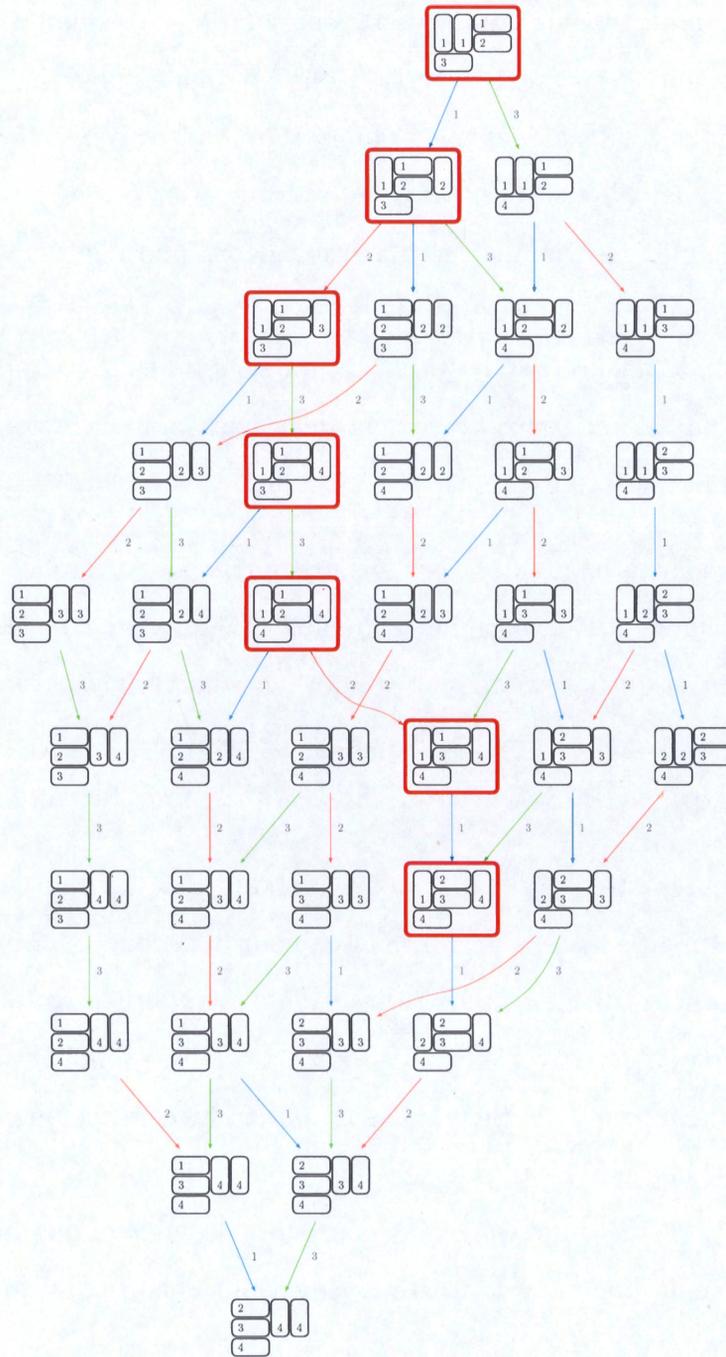


Figure 6.4 Une composante connexe du cristal de tableaux domino de forme $(4, 4, 2)$ et d'entrée maximale 4. Les opérateurs de cristaux sont ceux décrits à la section 6.1.3. Les tableaux domino encadrés par une boîte rouge sont ceux calculés par l'algorithme de Carré et Leclerc à l'exemple 6.1.6.

6.1.4 Bijection de Carré-Leclerc

L'algorithme de la section précédente nous donne la bijection suivante, où on note l'ensemble des tableaux domino de forme λ/μ et de poids ν par $SSDT(\lambda/\mu, \nu)$, et l'ensemble des tableaux domino de Yamanouchi de forme λ/μ et de poids γ par $Yam_2(\lambda/\mu, \gamma)$.

Théorème 6.1.8 (Bijection de Carré-Leclerc). *Soit $\lambda, \mu, \nu \in Par$.*

Il y a une bijection

$$SSDT(\lambda/\mu, \nu) \simeq \bigcup_{\gamma \in Par} Yam_2(\lambda/\mu, \gamma) \times SSYT(\gamma, \nu)$$

$$D \mapsto (Y(D), P(D)),$$

où

- $Y(D)$ est un tableau domino de Yamanouchi de même forme que D , et
- $P(D)$ est un tableau de Young semi-standard de même poids que D .

Carré et Leclerc soulèvent dans (Carré et Leclerc, 1995) l'importance de la projection π sur la seconde composante, qui envoie un tableau domino sur un tableau de Young droit. Ils montrent en particulier que l'ensemble des tableaux domino de Yamanouchi ayant comme poids γ est envoyé par π sur l'ensemble des tableaux de Young de Yamanouchi de forme γ . Leur preuve utilise la notion de pléthysme et ne sera pas présentée ici.

On a également le corollaire suivant.

Théorème 6.1.9. *Soit γ ayant comme 2-quotient (λ, μ) . Alors*

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in Par} |Yam_2(\gamma, \nu)| s_\nu.$$

Preuve. *Par l'algorithme de couplage vu à la section 4.2, on a*

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{D \in SSDT(\gamma)} x^D.$$

Par la bijection de Carré-Leclerc, on a

$$\sum_{D \in \text{SSDT}(\gamma)} x^D = \sum_{\nu \in \text{Par}} \left(|\text{Yam}_2(\gamma, \nu)| \sum_{T \in \text{SSYT}(\nu)} x^T \right) = \sum_{\nu \in \text{Par}} |\text{Yam}_2(\gamma, \nu)| s_\nu.$$

6.2 Proposition de van Leeuwen

Van Leeuwen reprend l'argument de Carré et Leclerc dans (van Leeuwen, 2000) et y apporte des résultats complémentaires qui exploitent davantage le point de vue des cristaux. Il décrit les cristaux et leurs opérateurs dans (van Leeuwen, 2001), mais sous les noms respectifs de graphes coplactiques et d'opérations coplactiques. Il développe sa théorie sans référence à la théorie des cristaux. Il fait toutefois la remarque que les graphes obtenus de sa description sont isomorphes aux graphes de cristaux pour les $U_q(GL_n)$ -modules irréductibles intégrables de Kashiwara, qui sont à la base de la théorie des cristaux ! Il emploie ses conventions propres, souvent à contre-courant des conventions de la littérature. Ses résultats sont donc présentés ici dans les conventions de la littérature.

En particulier, van Leeuwen reproche à la définition des opérateurs de cristaux donné par Carré et Leclerc de n'être pas suffisamment rigoureuse. Ces opérateurs décrits (indirectement) par Carré et Leclerc dans (Carré et Leclerc, 1995) sont ceux décrits explicitement à la section 6.1.3. Ceux-ci se basent sur le mot de lecture, qui n'est pas nécessairement aussi bien défini, selon van Leeuwen, dans le cas des tableaux domino que dans le cas des tableaux. Il donne donc dans (van Leeuwen, 2000) une autre description des opérateurs de cristaux sur les tableaux domino, et montre que sa définition est équivalente à celle de Carré et Leclerc. Les opérateurs de van Leeuwen nous semblent moins intuitifs que ceux donnés par Carré et Leclerc, mais lui permettent d'établir de nouveaux résultats permettant de confirmer l'existence d'une structure de cristal sur les tableaux domino.

6.2.1 Projection de van Leeuwen

Van Leeuwen propose dans (van Leeuwen, 2000) un algorithme pour déterminer la projection sur la deuxième composante de la bijection de Carré et Leclerc. Celui-ci fait intervenir les échanges de tableaux décrits à la section 3.4, qui généralisent le jeu de taquin. Ceci est intéressant puisque cela établit un parallèle avec la bijection de Robinson, que nous avons évoquée au début de ce chapitre :

Proposition 6.2.1 (Bijection de Robinson (van Leeuwen, 2001, corollaire 3.3.4)).

Il existe une bijection

$$SSYT(\chi, n) \rightarrow \bigcup_{\nu \in \text{Par}(|\chi|)} \text{Yam}(\chi, \nu) \times SSYT(\nu, n)$$

$$T \mapsto (R_0(T), R_1(T))$$

où

- $R_0(T)$ est la forme normale de T pour les opérateurs de cristaux e_i , et
- $R_1(T)$ est la forme normale de T pour les glisses de jeu de taquin.

Tel que vu à la section 5.4, la forme normale d'un tableau pour le jeu de taquin est sa rectification. Similairement, pour un tableau T , si on applique des opérateurs de cristaux remontants e_i jusqu'à obtenir un tableau de Yamanouchi, alors ce tableau de Yamanouchi est la forme normale de T pour les opérateurs de cristaux e_i , puisqu'il s'agit de l'unique vecteur de plus grand poids de sa composante connexe. Ces deux formes normales définissent alors uniquement T .

Décrivons la projection de van Leeuwen sur la seconde composante.

Nous avons vu à la section 4.3 qu'il existe une bijection entre l'ensemble des tableaux domino et les paires de tableaux de Young auto-commutantes. Soit D un tableau domino, et $(U, V) = \pi_1(D)$ la paire auto-commutante associée.

Par définition, on a que $V \triangleright U$. Considérons donc la rectification de U , qui est aussi celle de V , et notons-la $\pi(D)$.

L'objectif de cette section sera d'arriver au résultat suivant.

Théorème 6.2.2 ((van Leeuwen, 2000), Théorème 2.1.3). *$\pi(D)$ correspond à la projection de D sur la deuxième composante obtenue pour la bijection de Carré-Leclerc. En particulier, si $wt(D) = \lambda \in Par$, alors D est un tableau de Yamanouchi si et seulement si $\pi(D) = 1_\lambda$, l'unique tableau de forme et poids λ .*

La preuve est assez indirecte, et découle du théorème 6.2.4.

La figure 6.5 représente le cristal de tableaux obtenu en faisant la projection sur la seconde composante de la bijection de Carré-Leclerc pour tous les tableaux domino de la figure 6.4, calculés à partir de l'exemple 6.1.6. Merci énormément à Franco Saliola pour la production de cette image.

Tout d'abord, nous avons la proposition suivante qui s'obtient assez simplement à partir des résultats sur les échanges de tableaux et les paires auto-commutantes que nous avons vus précédemment.

Proposition 6.2.3. *Soit c un opérateur de cristal, et (U, V) une paire de tableaux auto-commutante. On peut appliquer c à U si et seulement si on peut appliquer c à V . Alors $(c(U), c(V))$ est une paire auto-commutante.*

Preuve. *Par définition, on a que $V \triangleright U$. Puisque les opérateurs de cristal commutent avec les glisses de jeu de taquin par le théorème 5.4.2, alors on a qu'on peut appliquer c à U si et seulement si on peut appliquer c à V .*

Montrons maintenant que $(c(U), c(V))$ est une paire auto-commutante. Par la proposition 5.4.2, on a que si $X(S, T) = (T', S')$, alors $e_i(T)$ est défini si et seulement si $e_i(T')$ l'est, et alors $X(S, e_i(T)) = (e_i(T'), S')$, et inversement.

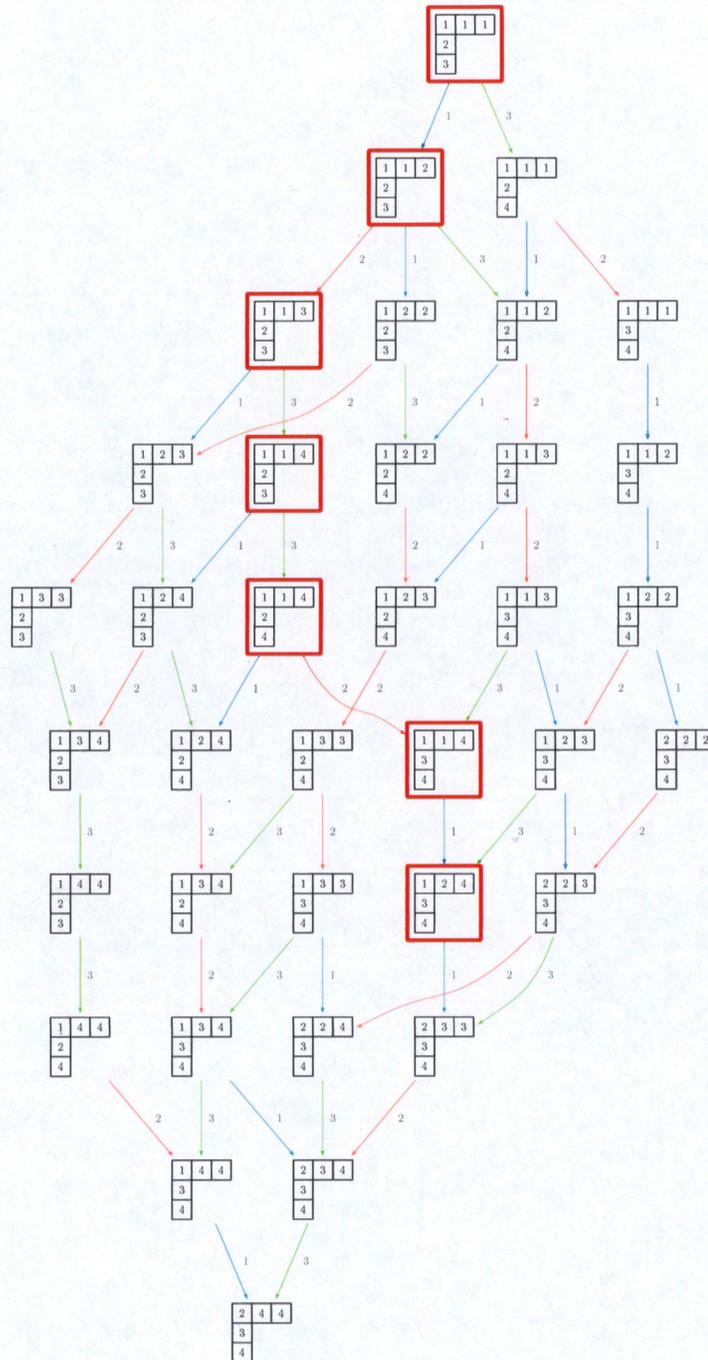


Figure 6.5 Cristal de tableaux de forme (311) et d'entrée maximale 4, correspond au cristal de tableaux domino de la figure 6.4 pour la projection $\pi(D)$. Le tableau encadré inférieur est la tableau t calculé à l'exemple 6.1.6.

Rappelons que pour une paire auto-commutante, $X(S, T) = (S, T)$. Par la proposition 5.4.2, on a alors que $X(S, e_i(T)) = (e_i(S), T)$ et $X(e_i(S), T) = (S, e_i(T))$.

Donc $X(e_i(S), e_i(T)) = (e_i(S), e_i(T))$, et $(e_i(S), e_i(T))$ est bien une paire auto-commutante.

6.2.2 Résultats de van Leeuwen

Van Leeuwen démontre les résultat suivant aux sections 4.2 et 5 de (van Leeuwen, 2000). La preuve du théorème est construite en terme d'augmentation de tableaux domino et de l'effet des opérateurs de cristaux sur ces augmentations. Van Leeuwen montre, entre autres, que ces opérateurs de cristaux ont exactement le même effet que les opérateurs de cristaux décrits par Carré et Leclerc. Pour ne pas alourdir le texte, les preuves sont donc laissées de côté.

Théorème 6.2.4. *Soit c un opérateur de cristal, D un tableau domino semi-standard et $\pi_1(D) = (U, V)$. Alors, c peut être appliqué à U et V si et seulement si c peut être appliqué à D , et alors $\pi_1(c(D)) = (c(U), c(V))$.*

Exemple 6.2.5. *À l'exemple 4.3.2, nous avons calculé que*

$$\pi_1(D) = \pi_1 \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & 2 & 3 & \\ \hline & 4 & & \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array} \right) = (U, V)$$

Les opérateurs de cristaux qui peuvent être appliqués à D , ainsi qu'à U et V , sont e_1, f_1, e_2, f_2, f_3 , trouvés à l'aide de la règle de parenthésage appliquée à chacun des mots de lecture de colonne.

Voyons l'effet de f_1 sur chacun des tableaux, et vérifions qu'alors $\pi_1(f_1(D)) = (f_1(U), f_1(V))$.

$$\begin{aligned}
 f_1(D) &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline & 2 & 3 \\ \hline & 4 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline & 4 & \\ \hline \end{array}, \\
 f_1(U) &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & \\ \hline & 4 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad f_1(V) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'algorithme d'échange π_1 à $f_1(D)$ pour vérifier qu'on retrouve $(f_1(U), f_1(V))$. C'est bien le cas, tel qu'illustré ci-dessous. Nous invitons le lecteur à effectuer les vérifications de même façon pour les autres opérateurs de cristaux.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \ 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \ 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \ 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \ 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \ 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Corollaire 6.2.6. *Un tableau domino semi-standard D tel que $\pi_1(D) = (U, V)$ est de Yamanouchi si et seulement si U et V le sont. Donc la projection $\pi(D) \triangleleft U \triangleleft V$ est de Yamanouchi si et seulement si D l'est.*

Preuve. Ce corollaire découle directement du théorème précédent, de la définition de tableau de Yamanouchi en terme d'opérateurs de cristaux (un tableau tel qu'aucun opérateur remontant e_i ne peut être appliqué) et du fait que les opérateurs commutent avec les glisses de jeu de taquin.

Corollaire 6.2.7. *Soit D un tableau domino et $\pi(D)$ le tableau droit associé. Soit c un opérateur de cristaux. Alors $\pi(c(D)) = c(\pi(D))$.*

Exemple 6.2.8. *Reprenons les tableaux de l'exemple 6.2.5. $\pi(D)$ est la rectification de U et V , donc $\pi(D) =$*

$$\pi(D) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \ 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad f_1(\pi(D)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \ 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

De même, $\pi(f_1(D))$ est la rectification de $f_1(U)$ et $f_1(V)$, puisque $\pi_1(f_1(D)) =$

$$(f_1(U), f_1(V)). \text{ Donc } \pi(f_1(D)) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}.$$

On a alors bien que $f_1(\pi(D)) = \pi(f_1(D))$.

Corollaire 6.2.9. $\pi(D)$ est la projection de D sur la seconde composante dans la bijection de Carré-Leclerc.

Preuve. Comme pour tout tableau droit, la forme normale de $\pi(D)$ pour les e_i est 1_λ tel que λ est la forme de $\pi(D)$.

Nous avons remarqué à la section précédente que les opérateurs pouvant être appliqués correspondent exactement aux déplacements possibles dans un pseudo-tableau.

Ainsi $\pi(D)$ enregistre les opérateurs e_i à appliquer à D pour obtenir un tableau de Yamanouchi, et correspond donc à la seconde composante par définition.

6.3 Structure de cristal sur les tableaux domino

La bijection de Carré-Leclerc décrite à la section 6.1.2 et initialement apparue dans (Carré et Leclerc, 1995) poussait à croire qu'il pourrait y avoir une structure de cristal sur l'ensemble des tableaux domino. Les ajouts apportés par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999), (van Leeuwen, 2000) et (van Leeuwen, 2001), décrits ici au fil du texte et à la section 6.2, nous permettent de conclure qu'il existe bel et bien une structure de cristal sur les tableaux domino. En effet, nous avons la commutation du diagramme suivant, pour un opérateur de cristal c .

$$\begin{array}{ccccc} D & \rightarrow & \pi(D) & & \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ c(D) & \rightarrow & c(\pi(D)) & & \end{array}$$

Nous aimerions avoir un résultat plus fort : que la composante connexe de cristal contenant un tableau domino D obtenu par l'algorithme de couplage de (t_1, t_2) est isomorphe à la composante connexe de cristal contenant $t_1 \otimes t_2$.

6.3.1 Produit tensoriel de tableaux et produit de tableaux

Commençons par rappeler quelques faits sur les produits de tableaux et expliquer pourquoi nous aimerions que les cristaux de tableaux domino y correspondent.

On a vu à la section 5.5.3 une application

$$\begin{array}{ccccccc} B(\lambda) \otimes B(\mu) & \xrightarrow{\sim} & B(\lambda * \mu) & \twoheadrightarrow & B(\nu) \\ t_1 \otimes t_2 & \xrightarrow{\sim} & t_1 * t_2 & \twoheadrightarrow & T, \end{array}$$

où T est la rectification de $t_1 * t_2$, de forme variable $\nu \in \text{Par}(N)$, où $N = |\lambda| + |\mu|$.

Nous avons vu qu'un opérateur de cristal agit sur $t_1 \otimes t_2$ comme sur la concaténation des mots de lecture des deux tableaux. Cette concaténation correspond au mot de lecture de $t_1 * t_2$. Puisque les opérateurs de cristal commutent avec les glisses de jeu de taquin, alors l'effet d'un opérateur de cristaux sur $t_1 \otimes t_2$ est équivalent à celui sur la rectification T de $t_1 * t_2$.

Autrement dit, puisqu'on a $w(t_1 \otimes t_2) = w(t_1)w(t_2) = w(t_1 * t_2) \simeq_K w(T)$, alors $c(t_1 \otimes t_2) \simeq c(t_1 * t_2) \simeq c(T)$ en tant qu'éléments de composantes connexes de cristaux qui sont isomorphes. La composante connexe $B(\nu)$ où apparaît T sera isomorphe à la composante connexe de $B(\lambda) \otimes B(\mu)$ contenant $t_1 \otimes t_2$.

Le partage ν est obtenu explicitement par la forme de la rectification de $t_1 * t_2$. La position de T dans $B(\nu)$ correspond alors à l'emplacement de $t_1 \otimes t_2$ dans sa composante connexe de $B(\lambda) \otimes B(\mu)$.

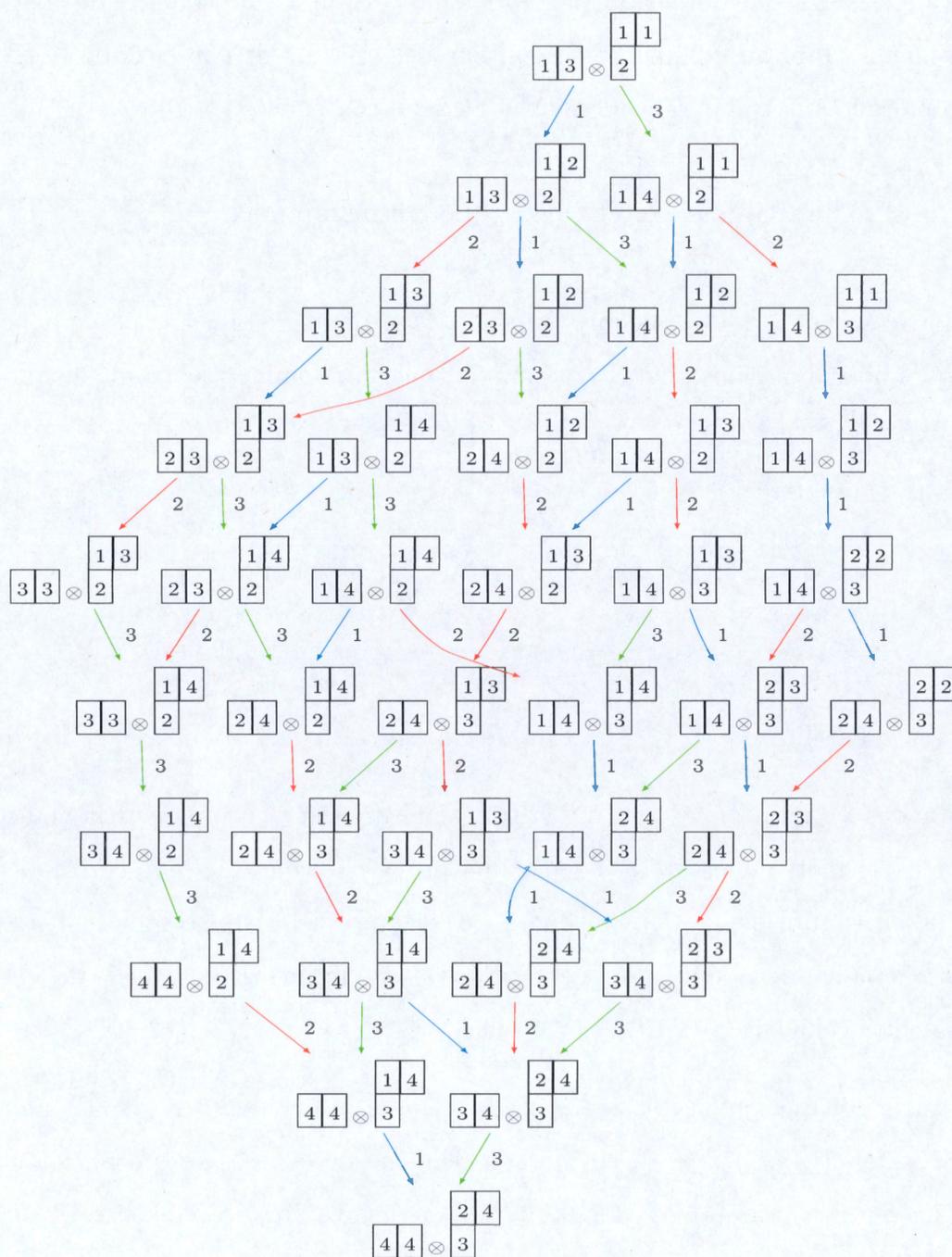


Figure 6.6 Composante connexe de $B(2) \otimes B(2,1)$ correspondant au cristal de la figure 6.5 sous l'application *

Finalement, notons $t_1 \otimes t_2 \xrightarrow{*} T$ l'application qui envoie le produit $t_1 \otimes t_2$ directement sur la rectification de $t_1 * t_2$. Nous avons alors un isomorphisme des composantes connexes de cristal associées.

La figure 6.6 illustre la composante connexe de $B(2) \otimes B(2, 1)$ correspondant au cristal de la figure 6.5 sous l'application $*$.

Nous avons vu à la section 4.2 une bijection entre les paires de tableaux et les tableaux domino, que nous avons nommé algorithme de couplage. Nous aimerions que, pour un tableau domino D obtenu de (t_1, t_2) par l'algorithme de couplage, la composante connexe de cristal dans laquelle se trouve D soit isomorphe à celle dans laquelle se trouve $t_1 \otimes t_2$. La description des tableaux domino en tant que produit de tableaux serait alors compatible avec le produit de cristaux de tableaux. Cela nous permettrait de confirmer qu'utiliser les tableaux domino pour décrire le produit de deux fonctions de Schur est une bonne description de ce produit.

6.3.2 Produit tensoriel, tableaux domino et projection

Nous avons vu à la section 4.3 que les tableaux domino sont en bijection avec les paires de tableaux auto-commutantes, bijection notée par π_1 . Pour $(U, V) = \pi_1(D)$, nous avons noté $\pi(D)$ la rectification $V \triangleright U \triangleright \pi(D)$.

On a vu à la section 6.2 que si c est un opérateur de cristal et $\pi_1(D) = (U, V)$, alors $(c(U), c(V))$ est une paire auto-commutante et $\pi_1(c(D)) = (c(U), c(V))$. En particulier, on a alors que $c(V) \triangleright c(U) \triangleright c(\pi(D)) = \pi(c(D))$.

À la section 6.2, nous avons vu que $\pi(D)$ correspond à la seconde composante de la bijection de Carré-Leclerc décrite à la section 6.1.2, et qu'il y a bien une structure de cristal sur les tableaux domino. Alors la position de $\pi(D)$ dans sa composante connexe correspond à l'emplacement de D dans sa composante connexe.

En particulier, en raison de la bijection entre les paires de tableaux et les tableaux domino, on aimerait que $\pi(D) = T$, où T est la rectification de $t_1 * t_2$ tels que $(t_1, t_2) \simeq D$ selon l'algorithme de couplage.

Or, il se trouve que ce n'est pas toujours le cas! Voyons le plus petit exemple où cela se produit.

Exemple 6.3.1. Soit la paire de tableaux $(t_1, t_2) = (\boxed{1\ 1}, \boxed{2\ 2})$. Le tableau domino obtenu à partir de cette paire de tableaux selon l'algorithme de couplage est celui illustré à la figure 6.7.

La rectification de $t_1 * t_2$ est $\boxed{1\ 1\ 2\ 2}$, alors que le tableau droit $\pi(D)$ obtenu de D par des glisses d'échange de tableau est $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$.

Simplement par le fait de leur forme, ces deux tableaux n'appartiennent pas à la même composante connexe $B(\lambda)$. Encore pire, leur distance par rapport au tableau de Yamanouchi qui est le vecteur de plus grand poids de leur composante n'est pas le même!

En effet, on peut appliquer e_1 deux fois au premier tableau pour obtenir le tableau $\boxed{1\ 1\ 1\ 1}$, qui est la source de sa composante connexe, mais une seule fois au second pour obtenir $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$, qui est la source de sa composante connexe!

1	1 2	2
---	--------	---

Figure 6.7 Domino correspondant à (t_1, t_2) sous l'algorithme de couplage

Nous avons donc que la structure de cristal sur les tableaux domino que nous avons obtenue n'est pas compatible avec le produit de cristaux de tableaux lorsqu'on considère l'algorithme de couplage!

Ce problème provient en fait directement de la définition que nous faisons des tableaux domino comme produit de tableaux ordinaires avec l'algorithme de couplage. Les entrées sont alors « mal » ou « trop » mélangées. Van Leeuwen avait noté cette source de problème dans (van Leeuwen, 2000), bien que sans expliquer ses conséquences. Nous donnerons ici une solution à ce problème. Celle-ci fait intervenir un sorte de jeu de taquin sur les tableaux domino. Les dominos sont déplacés d'une case selon des règles précises, décrites à l'annexe B et « rentrent » les uns dans les autres. Voir cette annexe pour les définitions explicites de ce jeu de taquin décrivant les glisses de rubans et les notations employées dans cette section.

Une chaîne sera alors une suite de dominos déplacés chacun d'une case de manière à ce que le premier domino « rentre » dans le deuxième, qui « rentre » dans le troisième, et ainsi de suite. Une chaîne est dite fermée si elle commence et se termine avec le même domino, ouverte sinon, et interdite si elle est fermée et se compose d'exactly deux dominos de même entrée.

Exemple 6.3.2. Reprenons le tableau domino de l'exemple 6.1.6, donné à la figure 6.8. Cette figure illustre les déplacements de dominos (pour s_0) vers l'extérieur à partir de sa forme droite. Notons qu'il y a une chaîne fermée, composée des dominos 2 et 3, et deux chaînes ouvertes composées respectivement de deux dominos, 1 et 4, et un domino, 4.

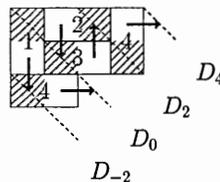


Figure 6.8 Effet de s_0 ou déplacement des dominos vers l'extérieur

Déplacer une chaîne dans un tableau est appelé une glisse de chaîne, et consiste à déplacer tous les dominos qui la composent, simultanément. En terme de jeu de taquin, cela correspond à déplacer l'ensemble des cases affectées par une glisse de jeu de taquin. Remarquons que les chaînes interdites ne sont jamais déplacées, puisque cela produirait un tableau domino non valide. On peut donc décrire deux types de déplacement de chaînes sur les tableaux domino : on peut déplacer uniquement les chaînes qui sont ouvertes, ou déplacer l'ensemble des chaînes non-interdites.

Van Leeuwen remarque dans (van Leeuwen, 1999) que déplacer les chaînes non-interdites vers l'extérieur permet d'obtenir, après un certain nombre d'itérations, un tableau domino ségrégué en deux parties composées respectivement de dominos verticaux et de dominos horizontaux. Voir la partie droite de la figure 6.9 et la figure 6.10.

Cette décomposition permet de retrouver exactement les tableaux t_1, t_2 obtenus de l'algorithme de couplage. Ce résultat s'explique par le fait que, les dominos sont déplacés dans le tableau vers le sud-ouest s'ils sont initialement de type 1, et vers le nord-est s'ils sont initialement de type 2. Puisque les dominos de type 1 proviennent de t_1 sous l'algorithme de couplage, et ceux de type 2, de t_2 , il est naturel qu'on ait ce résultat.

Van Leeuwen a également remarqué que déplacer uniquement les chaînes ouvertes permet d'obtenir un tableau ségrégué qui a la même forme, puisque déplacer des chaînes fermées n'affecte pas la forme globale. Voir la partie gauche de la figure 6.9 et la figure 6.11. Van Leeuwen a également remarqué dans (van Leeuwen, 1999) qu'il est alors impossible de prédire au préalable quels dominos prendront part à chacune des composantes.

Exemple 6.3.3. *Reprenons l'exemple 6.3.2.*

La figure 6.9 illustre les déplacements de chaînes de dominos « pour $s_0s_1s_0$ », pour déplacer les dominos vers l'extérieur jusqu'à ce que le tableau obtenu soit ségrégué.

Nous illustrons les déplacements de chaînes exclusivement ouvertes, notés par $\circ s_i$, à gauche, et les déplacements de chaînes non-interdites, notés par $\cdot s_i$, à droite. À chaque étape, toutes les chaînes qui peuvent être déplacées le sont.

Notons que la forme des tableaux ségrégués obtenus est la même, mais que l'emplacement de chaque domino peut être différent.

La source du problème que nous avons relevé, et illustré à l'exemple 6.3.1, provient du fait que les opérateurs de cristaux sur les tableaux domino commutent uniquement avec les glisses de chaînes ouvertes. Van Leeuwen en fait la preuve à la section 5.2 de (van Leeuwen, 2000). Les chaînes fermées ne commutent pas avec les opérateurs de cristaux. Ainsi la paire de tableaux (t_1, t_2) correspondant au tableau domino ségrégué obtenu des glisses de chaînes non-interdites, correspondant au couple de tableaux obtenus de l'algorithme de couplage, est compatible avec les opérateurs de cristaux uniquement si aucune chaîne fermée apparaît dans le processus de ségrégation.

Une situation problématique apparaît dès qu'une chaîne fermée et non-interdite se trouve dans le processus de ségrégation. Si elle est déplacée, alors les dominos concernés poursuivent leur chemin chacun dans leur cohorte de dominos se dirigeant soit vers le nord-est, soit vers le sud-ouest.

Si elle n'est pas déplacée, les dominos qui la composent demeurent immobiles pour une étape. Lorsqu'ils reprennent leur marche à l'étape suivante, ils le font dans la direction opposée à leur mouvement initial. Les entrées présentes dans la chaîne fermée sont ainsi « échangées » de tableaux associés par l'algorithme de couplage.

Déplacement des chaînes ouvertes uniquement

Déplacement des chaînes non-interdites

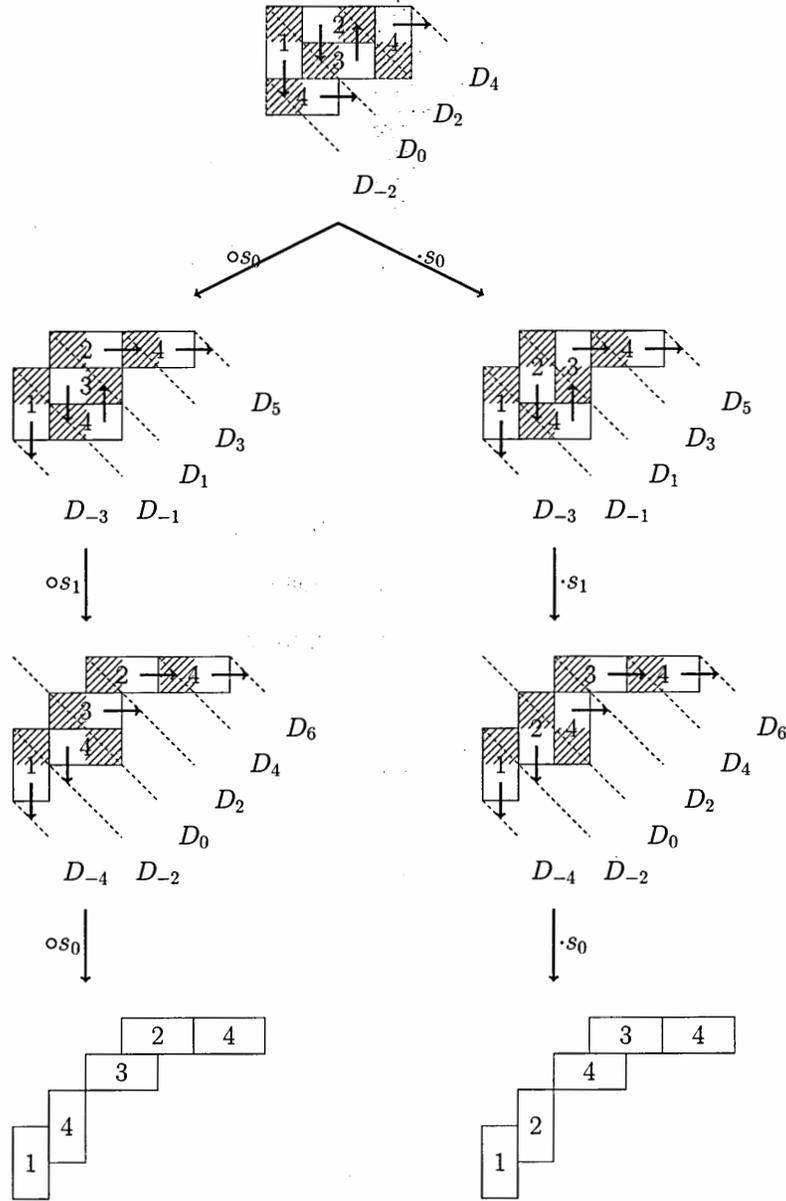


Figure 6.9 Effet respectif de $s_0 \circ s_1 \circ s_0$ et $s_0 \cdot s_1 \cdot s_0$, deux façons de déplacer les dominos vers l'extérieur : déplacement des chaînes ouvertes uniquement et déplacement de toutes les chaînes non-interdites.

Si seules les chaînes ouvertes sont déplacées, les deux tableaux obtenus après la ségrégation ne correspondent pas aux tableaux t_1 et t_2 de l'algorithme de couplage, mais plutôt à deux autres tableaux t'_1 et t'_2 . La rectification de $t'_1 * t'_2$ est $\pi(D)$. L'effet d'un opérateur de cristal c sur $t'_1 \otimes t'_2$ est alors le même que l'application de c sur $\pi(D)$, en raison de la commutation des opérateurs de cristaux et des glisses de jeu de taquin vue à la section 5.4.

Dans l'exemple 6.3.3, les deux tableaux ségrégués correspondent respectivement aux produits de tableaux $\boxed{1|4} \otimes \boxed{\begin{smallmatrix} 2|4 \\ 3 \end{smallmatrix}}$ et $\boxed{1|2} \otimes \boxed{\begin{smallmatrix} 3|4 \\ 4 \end{smallmatrix}}$. La rectification du premier produit de tableaux donne $\pi(D)$ calculé à l'exemple 6.1.6, alors que le second produit de tableaux correspond exactement à la paire de tableaux insérés par l'algorithme de couplage pour obtenir le tableau domino initial.

Une façon de contourner le problème est alors de modifier la description de tableau domino en tant que produit de tableaux. Voici la définition que nous proposons.

Soit (t_1, t_2) une paire de tableaux de Young de forme (λ, μ) . Nous souhaitons y faire correspondre un tableau domino de forme γ de 2-quotient (λ, μ) .

Soit $n = \lambda_1 + (\mu^t)_1$, où $(\mu^t)_1$ est donné par le nombre de cases de la première colonne de μ . Posons $c \in \mathbb{N}$ tel que $2c \leq n$.

Soit $k = 2c$, et $\gamma_c = (k, k-1, \dots, 2, 1)$ la partition en escalier associée à c . Ce 2-noyau permettra, dans notre construction, d'obtenir un tableau domino ségrégué.

Construisons le tableau domino ségrégué \hat{D} de 2-noyau γ_c à partir de t_1 et t_2 de la façon suivante : des dominos verticaux d'entrées correspondantes aux cases de t_1 sont insérées à partir du coin sud-ouest de γ_c de façon à respecter les positions relatives des cases dans t_1 . De même, des dominos horizontaux d'entrées correspondantes à celles de t_2 sont insérées à partir du coin nord-est de γ_c de façon à respecter les positions relatives des cases dans t_2 .

Des glisses de chaînes ouvertes sont effectuées jusqu'à ce que le tableau obtenu soit droit et de forme ayant un 2-quotient (λ, μ) . Notons par D' ce tableau domino.

Il est alors distinct de celui obtenu par l'algorithme de couplage, mais sera tel qu'il respecte le produit des tableaux t_1, t_2 en terme de cristaux.

Exemple 6.3.4. Reprenons l'exemple 6.3.1. Si nous appliquons des glisses de chaînes non-interdites sur le tableau domino D de la figure 6.7, on obtient le tableau domino ségrégué \hat{D} illustré à la figure 6.10.

Ce tableau ségrégué correspond au couple de tableaux $(t_1, t_2) = (\boxed{1 \ 1}, \boxed{2 \ 2})$, qui est bien celui inséré par l'algorithme de couplage.

Si on applique maintenant des glisses de chaînes ouvertes uniquement pour obtenir à nouveau un tableau droit, on obtient le tableau D' illustré à la figure 6.11.

Le tableau domino obtenu à cette étape correspond à celui obtenu de notre définition. On a alors que $\pi(D')$ est égal à $\boxed{1 \ 1 \ 2 \ 2}$, qui est exactement la rectification de $t_1 * t_2$!

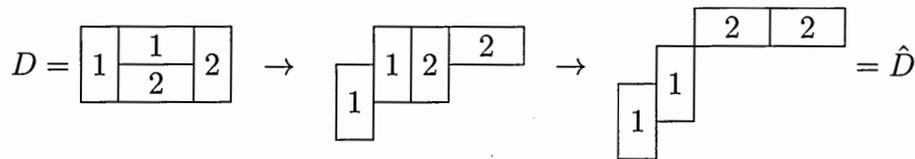


Figure 6.10 Glisses de chaînes non-interdites (vers l'extérieur) à partir de D

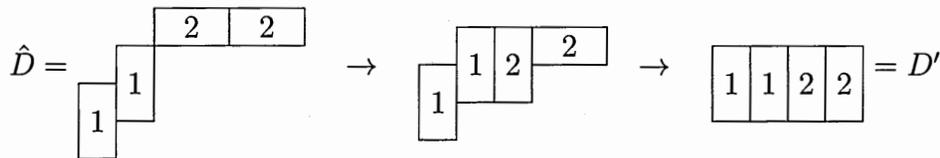


Figure 6.11 Glisses de chaînes ouvertes (vers l'intérieur) à partir de \hat{D}

6.3.3 Structure de cristal sur les tableaux domino

Notons le tableau domino D' obtenu de glisses de chaînes ouvertes à partir d'un tableau ségrégué \hat{D} correspondant à la paire (t_1, t_2) , et G la bijection entre (t_1, t_2) et le tableau domino D' ainsi obtenu.

$$\begin{array}{ccc}
 t_1 \otimes t_2 & \xrightarrow{c} & c(t_1 \otimes t_2) \\
 \downarrow * & \circlearrowleft & \downarrow * \\
 T & \xrightarrow{c} & c(T) \\
 \uparrow \pi & \circlearrowleft & \uparrow \pi \\
 D' & \xrightarrow{c} & c(D')
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \curvearrowleft G \\
 \\
 \\
 \\
 \curvearrowright G
 \end{array}$$

Figure 6.12 Effet d'un opérateur de cristal dans un cristal de produits tensoriels de tableaux, et dans un cristal de tableaux domino

On a alors que le diagramme 6.12 est commutatif, et qu'il y a une structure de cristal sur les tableaux domino qui respecte le produit de cristaux de tableaux. En fait, notre bijection G nous donne un tableau domino toujours défini en terme de produit de tableau, mais qui respecte cette fois le produit de cristaux de tableaux, et conséquemment le produit de tableaux.

La ligne centrale de la figure nous permet de bien comprendre l'effet d'un opérateur de cristal sur la composante isomorphe $B(\lambda)$.

Remarquons qu'il n'est pas trop difficile de passer d'une définition à l'autre, tel que noté à la figure 6.13. Dans cette figure, D est le tableau domino obtenu par l'algorithme de couplage, $\hat{D} \simeq (t_1, t_2)$ est le tableau ségrégué correspondant à la paire de tableaux insérée par l'algorithme de couplage, D' est le tableau domino obtenu par notre bijection de la section précédente, et $\hat{D}' \simeq (t'_1, t'_2)$ est le tableau ségrégué correspondant à la paire de tableaux dont le produit $*$ est $\pi(D)$. On a que $t_1 \otimes t_2 \simeq D'$ et $t'_1 \otimes t'_2 \simeq D$ en terme de produit de cristaux.

La notion de spin d'un tableau peut être retrouvée, mais est moins directe. En effet, le spin n'est pas préservé par les glisses de chaînes, bien qu'il soit possible de décrire exactement l'effet du déplacement d'une chaîne sur celui-ci. Voir (van Leeuwen, 1999) pour plus de détails sur l'effet des glisses de chaînes sur le spin.

Pour obtenir le spin d'un tableau D' , il faut effectuer des glisses de chaînes ouvertes vers l'extérieur jusqu'à ce que le tableau soit ségrégué, puis des glisses de chaînes non-interdites vers l'intérieur pour obtenir un tableau domino droit D de même forme. Ce tableau domino est celui qui aurait été obtenu de l'algorithme de couplage et sur lequel se lit le spin. Puisque le spin est modifié par les déplacements de chaînes, sa parité n'est pas nécessairement préservée de D à D' .

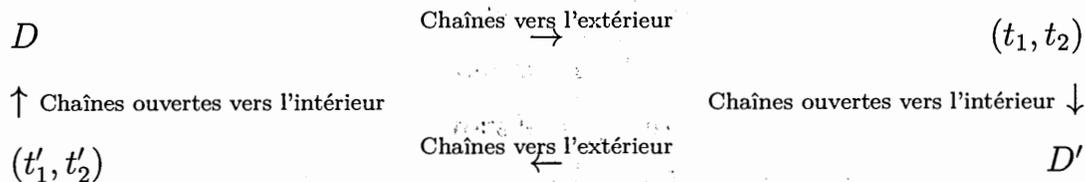


Figure 6.13 Transition entre les définitions de tableaux domino

6.4 Liens avec le monoïde plaxique

Nous allons décrire ici la structure de monoïde qu'il est possible d'établir sur les tableaux domino, similairement à la structure de monoïde plaxique sur les tableaux. Cette section se base sur la section 6 de (Carré et Leclerc, 1995).

Nous avons vu à la section 3.6 que le monoïde plaxique est défini par le quotient du monoïde libre sur un alphabet, totalement ordonné, par les relations de Knuth. Nous avons vu que les tableaux de Young correspondent à ses éléments. Les glisses de jeu de taquin correspondent alors aux relations de Knuth, et les classes du monoïde plaxique correspondent à tous les tableaux ayant une même rectification. Cette rectification est alors donnée par l'insertion RSK de leur mot de lecture.

Considérons alors le produit direct de deux monoïdes plaxiques sur deux alphabets strictement ordonnés A et B , $M_{plaxique}(A) \times M_{plaxique}(B)$. Ce monoïde peut être décrit directement par le quotient du monoïde libre engendré par $A \cup B$ par les relations de Knuth sur chacun des alphabets, ainsi que la commutation entre les lettres des deux alphabets.

Autrement dit, quotienté par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_j^A a_i^A a_k^A &\simeq a_j^A a_k^A a_i^A & a_j^B a_i^B a_k^B &\simeq a_j^B a_k^B a_i^B && \text{pour } i < j < k \\
a_i^A a_k^A a_j^A &\simeq a_k^A a_i^A a_j^A & a_i^B a_k^B a_j^B &\simeq a_k^B a_i^B a_j^B && \text{pour } i < j < k \\
a_j^A a_j^A a_i^A &\simeq a_j^A a_i^A a_j^A & a_j^B a_j^B a_i^B &\simeq a_j^B a_i^B a_j^B && \text{pour } i < j \\
a_j^A a_i^A a_i^A &\simeq a_i^A a_j^A a_j^A & a_j^B a_i^B a_i^B &\simeq a_i^B a_j^B a_j^B && \text{pour } i < j \\
&& a_i^A a_j^B &\simeq a_j^B a_i^A && \text{pour tout } i, j
\end{aligned}$$

Ce monoïde est appelé le *monoïde super plaxique*, et sera noté $MS_{plaxique}$. L'algorithme de couplage nous donne que les tableaux domino peuvent être interprétés comme les éléments de ce monoïde.

Par exemple, le tableau domino T de la figure 4.7 peut être associé au mot $a_4^A a_3^A a_2^A a_1^A a_4^B a_3^B a_2^B a_1^B a_4^B a_3^B a_2^B a_1^B \simeq a_4^A a_3^A a_2^B a_1^B a_2^A a_4^B a_2^A a_3^B a_4^B$ du monoïde super plaxique, où la première partie est la concaténation des mots de lecture (pour l'ordre de lecture de colonne) des deux tableaux t_1, t_2 associés à T , et la seconde partie est le mot de lecture (pour l'ordre de lecture de colonne) du tableau domino T . Notons que les exposants correspondent aux tableaux dont proviennent les entrées. Dans le cas des tableaux t_1, t_2 , on associe l'exposant A aux entrées de t_1 , et l'exposant B à celles de t_2 . Dans le cas du tableau domino, on associe l'exposant A aux entrées des dominos de type 1, et l'exposant B à celles des dominos de type 2. En vertu de l'algorithme de couplage, en effet, les entrées remplissant des dominos de type 1 proviennent de t_1 , et celles remplissant des dominos de type 2, de t_2 .

Cette façon de faire nécessite de préserver la composition du tableau domino à partir de l'algorithme de couplage ; on garde trace des deux tableaux d'origine par les types de dominos. On ne peut déterminer l'effet d'un opérateur de cristal sur ce mot globalement, puisque cela nécessite d'avoir un unique alphabet.

On peut alors utiliser un alphabet unique, mais signé. Par exemple, l'alphabet signé $\mathbb{N}^{sign} = \{\dots, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 1, 2, 3, \dots\}$. On peut alors oublier le signe pour appliquer les opérateurs de cristaux.

On a toutefois un autre problème. Si le pavage reste inchangé après l'application d'un opérateur de cristaux, alors cela correspond à l'appliquer à un des deux tableaux correspondants pour l'algorithme de couplage. Toutefois, lorsque l'application d'un opérateur de cristaux est suivi d'une transformation R_1, R_2, R'_1 ou R'_2 , le pavage est modifié : des entrées peuvent être échangées de tableaux associés. Remarquons que ces transformations sont issues de remplissages illégaux.

Nous avons vu que R_1 provoque le changement suivant, où $i' := i - 1$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' & \\ \hline i & i' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array}$$

En terme de mots signés, on a alors la transformation

$$(i)(i')(\bar{i}') \mapsto (i)(\bar{i}')(i'),$$

qui ne modifie pas les entrées associées aux tableaux pour l'algorithme de couplage.

R_2 , pour sa part, provoque le changement suivant :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline i' & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_2} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array}$$

En terme de mots signés, on a alors la transformation

$$(\bar{i})(i)(i') \mapsto (\bar{i})(i')(\bar{i}),$$

qui échange les entrées i et $i' := i - 1$ de tableaux associés.

R'_1 , pour sa part, provoque le changement suivant :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_1} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & \\ \hline & i \\ \hline \end{array}$$

En terme de mots signés, on a la même transformation que pour R_2 , soit

$$(\bar{i})(i)(i') \mapsto (\bar{i})(i')(i),$$

qui échange également les entrées i et $i := i - 1$ de tableaux associés.

Finalement, R'_2 provoque le changement suivant :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i' & i \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R'_2} \begin{array}{|c|c|} \hline i' & \\ \hline i & i \\ \hline \end{array}$$

En terme de mots signés, on a alors la transformation

$$(i)(i')(i) \mapsto (i)(i')(\bar{i}),$$

qui échange également deux entrées i et $i' := i - 1$ de tableaux associés.

On pourrait alors ajouter aux relations énumérées pour le monoïde super plaxique les suivantes, pour tout i :

$$\begin{aligned} a_i^B a_{i-1}^B a_{i-1}^A &\simeq a_i^B a_{i-1}^A a_{i-1}^B & a_i^A a_{i-1}^A a_{i-1}^B &\simeq a_i^A a_{i-1}^B a_{i-1}^A \\ a_i^A a_i^B a_{i-1}^A &\simeq a_i^A a_{i-1}^B a_i^A & a_i^B a_i^A a_{i-1}^B &\simeq a_i^B a_{i-1}^A a_i^B \\ a_i^B a_{i-1}^A a_i^B &\simeq a_i^B a_{i-1}^B a_i^A & a_i^A a_{i-1}^B a_i^A &\simeq a_i^A a_{i-1}^A a_i^B \end{aligned}$$

Il serait intéressant de mieux comprendre la différence entre la structure de monoïde donnée par l'algorithme de couplage, et celle reliée à notre définition des tableaux domino en tant que produit de tableaux.

Finalement, Carré et Leclerc remarquent dans (Carré et Leclerc, 1995) que la définition combinatoire des fonctions de Schur comme une somme de tableaux de même forme engendre dans la \mathbb{Z} -algèbre du monoïde plaxique, $\mathbb{Z}(M_{\text{plaxique}})$, une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques sur x , $Sym(x)$.

Si on considère la \mathbb{Z} -algèbre du monoïde super plaxique, $\mathbb{Z}(SM_{\text{plaxique}})$, on retrouve des éléments remarquables, Σ_λ , la somme des tableaux domino de forme λ .

Carré et Leclerc montrent dans (Carré et Leclerc, 1995) que les éléments Σ_λ génèrent une sous-algèbre commutative du monoïde super plaxique qui est isomorphe au produit tensoriel de deux copies de l'algèbre des fonctions symétriques sur x , $Sym(x) \otimes Sym(x)$. La preuve qu'ils en font utilise la notion de pléthysme.

On voit donc ici que l'isomorphisme entre le produit tensoriel de deux cristaux de tableaux et les cristaux de tableaux domino est naturel.

Dans le monoïde que nous avons décrit en ajoutant des relations au monoïde super plaxique, les tableaux domino sont toujours décrits en terme de produit de tableaux, mais au sens de la théorie des cristaux.

De plus, le jeu de taquin décrit par les glisses de chaînes ouvertes dans les tableaux domino décrit par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999), et présenté à l'annexe B, permet d'interpréter les tableaux domino gauches comme des éléments de ce monoïde.

Le fait que les opérateurs de cristal commutent avec les glisses de jeu de taquin pour les tableaux et les glisses de chaînes ouvertes pour les tableaux domino montre que les opérateurs de cristal agissent sur les classes (ou éléments) du monoïde plaxique (respectivement le monoïde décrit précédemment), et que les cristaux de tableaux (resp. de tableaux domino) gauches sont isomorphes à ceux de tableaux (resp. de tableaux domino) droits avec l'équivalence de chaque élément avec l'élément droit de sa classe.

CONCLUSION

Nous avons étudié plusieurs approches combinatoires pour comprendre le produit de deux fonctions de Schur. Pour ce faire, nous nous sommes rapportés systématiquement à l'étude des tableaux et des manipulations sur ceux-ci. C'est pourquoi nous avons introduit de nombreux algorithmes sur les tableaux au chapitre 3. Nous avons ensuite introduit les tableaux domino pour décrire le produit de deux fonctions de Schur en tant que produit de tableaux au chapitre 4.

Nous avons particulièrement vu au cours de ce mémoire deux structures sur les tableaux : la structure du monoïde plaxique au chapitre 3 et la structure de cristal au chapitre 5. Nous avons cherché à comprendre si de telles structures étaient également présentes pour les tableaux domino au chapitre 6 ; nous avons vu que c'est le cas. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à savoir si la structure de cristal sur les tableaux domino était compatible avec la définition des tableaux domino comme produit de tableaux, au sens de la théorie des cristaux. Nous avons conclu que cette structure de cristal peut y être compatible, mais qu'il faut alors faire des modifications à la définition des tableaux domino comme produit de tableaux. Ces modifications font intervenir les glisses de chaînes fermées et ouvertes décrites décrites ici dans l'annexe B. Alors la structure de cristal pour les tableaux domino correspond au produit de cristaux des tableaux correspondants.

Nous avons vu toutefois que cette méthode, bien que réalisable, nous fait perdre certaines propriétés de notre première construction des tableaux domino en tant que produit de tableaux. En particulier, nous perdons l'accès rapide à la statistique du spin d'un tableau domino.

Il serait donc intéressant d'avoir une meilleure compréhension des tableaux domino en tant qu'objets combinatoires. Par exemple, il existe une formule pour compter le nombre de tableaux standards d'une certaine forme, la formule des crochets. Il serait intéressant de voir s'il est possible de généraliser cette formule aux tableaux domino. Il serait également intéressant de savoir calculer le nombre de pavages possibles pour un tableau d'une forme donnée. Cela aurait entre autres des applications en théorie de la représentation; voir la section A.5. Il serait intéressant de voir si d'autres résultats classiques peuvent également être généralisés aux tableaux domino.

Tel que noté à la section 6.4, il serait intéressant de mieux comprendre les distinctions entre le monoïde super plaxique et la structure de monoïde obtenue de notre définition des tableaux domino comme produit de tableaux.

Il existe également d'autres objets combinatoires que les tableaux domino permettant de comprendre le produit de deux fonctions de Schur. Il serait intéressant de voir s'il est possible d'établir une structure de cristal également sur ces objets. En particulier, les fonctions de Schur font partie de la famille plus grande des polynômes de Schubert. De nombreux essais ont été réalisés pour développer des objets combinatoires permettant entre autres de comprendre leur produit. Puisque les fonctions de Schur s'expriment combinatoirement comme une somme sur des tableaux, une définition similaire devrait s'appliquer aux polynômes de Schubert, pour une généralisation de tableaux. C'est une question beaucoup plus générale. Le fait de comprendre le produit de deux fonctions de Schubert permettrait, en particulier, de comprendre le produit de deux fonctions de Schur, mais également le produit d'un polynôme de Schubert et d'une fonction de Schur, etc. Il serait intéressant de tenter de voir s'il existe une définition combinatoire des polynômes de Schubert qui puisse être liée au monoïde plaxique ou une généralisation de celui-ci, ou sur laquelle il pourrait être possible d'établir une structure de cristal.

Une approche similaire à celle trouvée ici pourrait alors permettre de comprendre un tel produit, et de s'assurer ainsi de sa validité.

Il serait finalement intéressant d'établir une seconde preuve de l'existence d'une structure de cristal sur les tableaux domino à l'aide des axiomes de Stembridge, tel que mentionné brièvement à la section 6.1.3.

ANNEXE A

SÉQUENCE DE BORDURE ET TABLEAUX DE RUBANS

L'algorithme de couplage décrit à la section 4.2 a été initialement développé dans (Stanton et White, 1985) pour les tableaux de rubans. Cet algorithme généralisé a été repris par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999), avec une approche différente. Il utilise les notions de séquence de bordure et redéfinit les notions de r -noyau et r -quotient pour $r \in \mathbb{N}$. C'est ce que nous verrons ici. Cette méthode a entre autres la particularité d'être similaire à la définition combinatoire des polynômes LLT, décrits par Lascoux, Leclerc et Thibon dans (Lascoux *et al.*, 1996) comme q -analogues de produit de fonctions de Schur.

A.1 Séquence de bordure

Pour un partage gauche γ , on peut y associer une *séquence de bordure* : une séquence doublement infinie de 0 et de 1 qui encodent la bordure extérieure de γ .

Un pas horizontal est encodé par un 0, un pas vertical par un 1. Ces 0 et 1 forment les *bits* de la séquence. La bordure est « lue » de gauche à droite, et on indique par une barre | l'endroit où la bordure de γ croise la diagonale principale D_0 du diagramme.

Par exemple, le partage vide \emptyset est encodé par ...1111|0000....

On peut également effectuer des translations du rang : pour un entier i , on a une *translation vers la gauche* donnée par $t_i(f) = f'$, où $f'(n) = f(n - i)$. Autrement dit, on déplace la marque $|$ de i positions vers la gauche. On obtient des classes d'équivalences pour ces translations. Celles-ci sont données par la relation d'équivalence $f \sim f'$ s'il existe un i tel que $f' = t_i(f)$.

Proposition A.1.2. *Pour tout $f \in FD$, il existe un unique $j \in \mathbb{Z}$ tel que $d(t_j(f)) = 0$. Alors il existe un unique partage λ tel que $t_j(f) = \delta(\lambda)$. On dit que $\lambda = \delta^{-1}(f)$.*

Les séquences de bordures des partages forment donc un ensemble de représentants des classes d'équivalence de FD pour les translations.

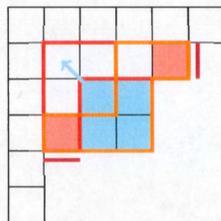
A.2 Retirer un crochet à partir des séquences de bordure

Cette section n'est pas essentielle à la compréhension des sections subséquentes. Elle permet toutefois de mieux comprendre le fonctionnement des retraits de rubans extérieurs qui apparaissent dans le calcul du r -noyau.

Soit un crochet h de longueur r . Les segments de la bordure de λ qui touchent ce crochet sont des bits 0 et 1 de $\delta(\lambda)$ ayant comme rang $k = j - \lambda_j^t$ et $\ell = \lambda_i - i - 1$, pour $i, j \in \mathbb{N}$. Alors $\ell - k = |h| = r$, la longueur du crochet h .

Si on retire ce crochet h , la partie du diagramme qui est au sud-est du crochet est déplacée vers le nord-ouest, ce qui correspond à échanger les deux bits correspondant aux extrémités du crochet. Ceci correspond à retirer un *ruban extérieur* de longueur $|h| = r$ dont les extrémités coïncident avec celles du crochet.

Ceci est illustré à la figure A.2.

Figure A.2 Retrait du crochet h

Le crochet retiré est tracé en rouge, avec ses extrémités pleines. Les bits associés sont indiqués en mauve. Une flèche bleue indique le déplacement de la partie du diagramme qui est au sud-est du crochet retiré. Finalement, le ruban extérieur correspondant est indiqué en orange.

On peut généraliser cette notion de crochet à FD , où un crochet de longueur r sera un couple $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $k < \ell$, $f(k) = 0$, $f(\ell) = 1$ et $k - \ell = r$. Pour retirer un crochet, il suffit alors d'échanger les bits en position k et ℓ . Autrement dit, $f'(k) = 1$, $f'(\ell) = 0$ et $f'(i) = f(i) \quad \forall i \notin \{k, \ell\}$. Alors $d(f') = d(f)$.

A.3 Tableaux de rubans

Pour pouvoir décrire les tableaux de rubans à partir des séquences de bordure, il faut décrire le r -noyau et r -quotient d'un partage gauche, pour $r \in \mathbb{N}$, tout comme nous avons fait pour les tableaux domino.

A.3.1 r -noyau

À partir d'un partage λ , et pour r fixé, nous allons décrire une méthode pour retirer subséquemment tous les rubans de longueur r possibles en utilisant la séquence de bordure. Ceci nous permettra d'obtenir le r -noyau de λ .

Tel que vu à la section précédente, retirer un ruban extérieur de longueur r correspond à retirer un crochet de longueur r dont les extrémités coïncident avec celles du ruban. En terme de séquence de bordure, ceci se fait en échangeant deux bits 0 et 1 dont les rangs respectifs diffèrent de r .

Si on découpe un $f \in FD$ en r sous-séquences selon la valeur des rangs modulo r , alors le fait de retirer un ruban extérieur de longueur r agit sur une seule de ces sous-séquences : on y échange deux bits adjacents. Soit donc l'application $S_r : FD \rightarrow FD^r$ telle que $S_r(f) = (c_{0,r}, c_{1,r}, \dots, c_{r-1,r},)$ où $c_{i,r}$ donne les bits de rang i modulo r . Explicitement, $c_{i,r}(n) = f(nr + i)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On peut considérer un treillis (FD, \leq_r) , où $f' \leq_r f$ si f' est obtenu de f en retirant un crochet, ou de façon équivalente, un ruban extérieur, de longueur r . On a alors que l'application S_r décrite précédemment est telle que

$$S_r : (FD, \leq_r) \xrightarrow{\sim} (FD, \leq_1)^r.$$

Elle va nous permettre d'agir simultanément sur toutes les sous-séquences, et de retirer simultanément tous les r -rubans extérieurs.

De même façon, on peut décrire les treillis (Par, \leq_r) , les treillis sur les partages tel que $\mu \leq_r \lambda$, pour μ, λ des partages, si μ peut être obtenu de λ en retirant des r -rubans. En particulier, $(Par, \leq_1) = (Par, \subseteq)$ est le treillis de Young.

Remarquons que $(Par, \subseteq) \xrightarrow{\delta} (FD, \leq_1)$ est une injection, où \emptyset est minimal pour la relation \subseteq . Ainsi, les translations $t_d(\delta_0)$ sont minimales pour la relation \leq_1 , puisqu'elles correspondent à δ_0 sous l'injection. On a également que, pour tout $f \in FD$, si $d = d(f)$, alors $t_d(\delta_0) \leq_1 f$.

On a alors

$$(Par, \leq_r) \xrightarrow{\delta} (FD, \leq_r) \xrightarrow{S_r} (FD, \leq_1)^r \xrightarrow{d^r} (\mathbb{Z}, \leq)^r.$$

Les composantes connexes de (FD, \leq_r) sont alors les fibres de $d^r \circ S_r$.

Si $(d_0, d_1, \dots, d_{r-1}) \in \mathbb{Z}^r$, alors l'élément minimal correspondant dans (FD, \leq_r) est $S_r^{-1}(t_{d_0}(\delta_0), t_{d_1}(\delta_0), \dots, t_{d_{r-1}}(\delta_0))$. Cet élément minimal correspond à celui obtenu après avoir retiré un nombre maximal de r -rubans extérieurs, et nous donnera le r -noyau.

Voici donc les étapes pour obtenir le r -noyau d'un partage λ :

1. On calcule $\delta(\lambda)$, la séquence de bordure de λ .
2. On sépare la séquence en r sous-séquences en fonction des rangs modulo r ,
 $S_r(\delta(\lambda)) = (c_{0,r}, c_{1,r}, \dots, c_{r-1,r})$.
3. On calcule $d^r(\delta(\lambda)) = (d(c_{0,r}), d(c_{1,r}), \dots, d(c_{r-1,r}))$. Autrement dit, pour chaque $c_{i,r}$, on calcule le nombre donné par le nombre de bits 1 à droite de « | » moins le nombre de bits 0 à gauche de « | ».
4. Pour chaque $d_i = d(c_{i,r})$, on calcule la translation de d_i appliqué à δ_0 . On obtient alors $(t_{d_0}(\delta_0), t_{d_1}(\delta_0), \dots, t_{d_{r-1}}(\delta_0))$, minimal dans $(FD, \leq_1)^r$.
5. On calcule la séquence $X = S_r^{-1}(t_{d_0}(\delta_0), t_{d_1}(\delta_0), \dots, t_{d_{r-1}}(\delta_0))$ obtenue à partir des r sous-séquences.
6. $\delta^{-1}(X) = \gamma$ est alors le r -noyau de λ .

Voyons un exemple.

Exemple A.3.1. Soit $\lambda = (8, 6, 5, 5, 4, 3, 1)$, dont la bordure est illustrée en rouge à la figure A.3. Nous voulons retirer tous les rubans de longueur 3.

Étape 1 : On a que $\delta(\lambda) = \dots 1110100101|01101001000 \dots$

Étape 2 : On a donc

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc}
 \text{Rang} & \dots & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 \delta(\lambda) & = & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
 c_{0,3}(\lambda) & = & \dots & & & 1 & & & 1 & & & | & 0 & & 0 & & 0 & & & & & \dots \\
 c_{1,3}(\lambda) & = & \dots & 1 & & & 0 & & & 0 & & | & 1 & & & 1 & & & 1 & & & \dots \\
 c_{2,3}(\lambda) & = & \dots & & 0 & & & 0 & & & 1 & | & & 1 & & & 0 & & & 0 & & \dots
 \end{array}$$

et $c_{0,3}(\lambda) = \dots 11|000\dots$, $c_{1,3}(\lambda) = \dots 100|1110\dots$, $c_{2,3}(\lambda) = \dots 1001|100\dots$

Étape 3 : On calcule que $d^3 = (d_0, d_1, d_2) = (0, 1, -1)$.

Étape 4 : $t_0(\delta_0) = \delta_0$, $t_1(\delta_0) = \dots 111|1000\dots$ et $t_{-1}(\delta_0) = \dots 110|000\dots$

Étape 5 : À partir de ces trois sous-séquences, on calcule X .

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc}
 \text{Rang} & \dots & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 t_0(\delta_0) & = & \dots & & & 1 & & & 1 & & & | & 0 & & 0 & & 0 & & & & & \dots \\
 t_1(\delta_0) & = & \dots & 1 & & & 1 & & & 1 & & | & 1 & & & 0 & & & 0 & & & \dots \\
 t_{-1}(\delta_0) & = & \dots & & 1 & & & 1 & & & 0 & | & & 0 & & & 0 & & & 0 & & \dots \\
 \delta(\gamma) & = & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
 \end{array}$$

Étape 6 : Puisque $X = \dots 1110|0100\dots$, alors $\delta^{-1}(X) = \gamma = (2)$ est le 3-noyau de λ . Remarquons qu'il faut parfois déplacer « | » pour obtenir un partage.

On a donc obtenu le même résultat qu'en retirant successivement des dominos de longueur 3 de λ .

Cette méthode est, certes, bien plus complexe et longue que de simplement retirer successivement à la main les rubans extérieurs de λ , mais elle comporte de nombreux avantages. Elle est programmable, elle démontre que le r -noyau ne dépend pas des pavages possibles, et elle permet surtout de calculer le r -quotient de manière très élégante, comme nous verrons à la section suivante.

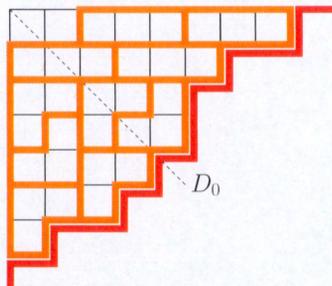


Figure A.3 Séquence de bordure et retrait de 3-rubans

A.3.2 r -quotient

À partir des données calculées à la section précédente, on peut obtenir directement et assez facilement le r -quotient d'un partage λ . Le $i^{\text{ème}}$ partage du r -quotient de λ est donné par $\delta^{-1}(c_{i,r})$, soit le partage associé à la $i^{\text{ème}}$ sous-séquence de λ .

Exemple A.3.2. Reprenons les données de l'exemple précédent.

On a que pour $\lambda = (8, 6, 5, 5, 4, 3, 1)$, $\delta(\lambda) = \dots 1110100101|01101001000 \dots$. On a alors les 3 sous-séquences suivantes.

$$c_{0,3}(\lambda) = \dots 11|000 \dots, c_{1,3}(\lambda) = \dots 100|1110 \dots, c_{2,3}(\lambda) = \dots 1001|100 \dots$$

Alors $\lambda^{(0)} = \emptyset$, $\lambda^{(1)} = (2, 2, 2)$ et $\lambda^{(2)} = (2, 2)$, les partages associés respectivement aux séquences de bordures données par $c_{0,3}(\lambda)$, $c_{1,3}(\lambda)$ et $c_{2,3}(\lambda)$. Donc le 3-quotient de λ est $(\emptyset, (2, 2, 2), (2, 2))$.

L'isomorphisme de treillis sur les partages, et les r -tuples $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)})$ est donnée par

$$(Par, \leq_r) \simeq \bigcup_{\gamma \in N_r} (Par, \subseteq)^\gamma,$$

où N_r est l'ensemble des r -noyaux. Le passage d'un côté à l'autre est donné par

$$\begin{array}{ccccccc} (Par, \leq_r) & \xrightarrow{\delta} & (FD, \leq_r) & \xrightarrow{S_r} & (FD, \leq_1)^r & \xrightarrow{(\delta^{-1})^r} & (Par, \leq_1)^r = (Par, \subseteq)^r \\ \lambda & \mapsto & \delta(\lambda) & \mapsto & (c_{0,r}, \dots, c_{r-1,r}) & \mapsto & (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(r-1)}). \end{array}$$

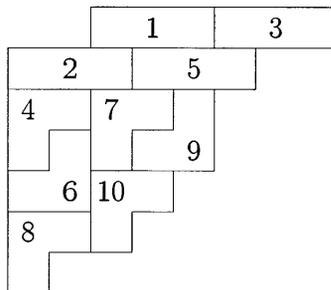


Figure A.4 Tableau standard de 3-rubans

A.3.3 Tableaux de rubans

Nous pouvons maintenant décrire les tableaux de rubans qui généralisent les tableaux de Young. Notons que les tableaux domino sont des tableaux de 2-rubans.

À partir d'un r -noyau γ , on peut construire un *diagramme de r -rubans* en ajoutant progressivement des r -rubans de façon à ce que la forme du diagramme demeure un partage. On obtient alors une chaîne saturée dans (Par, \leq_r) donnée par

$$\gamma = \lambda^0 <_r \lambda^1 <_r \lambda^2 <_r \dots <_r \lambda^k = \lambda.$$

Les r -rubans sont alors les diagrammes gauches λ^{i+1}/λ^i , pour $0 \leq i \leq k-1$.

Soit un ensemble totalement ordonné A de k éléments. Un *tableau standard de r -rubans* de forme λ , de r -noyau γ et d'évaluation A est le remplissage des rubans de la chaîne saturée $\gamma = \lambda^0 <_r \lambda^1 <_r \lambda^2 <_r \dots <_r \lambda^k = \lambda$ par les éléments de A , en respectant les ordres respectifs.

Exemple A.3.3. Soit $\lambda = (8, 6, 5, 5, 4, 3, 1)$, $r = 3$, $\gamma = (2)$ et $A = [10]$. La figure A.4 illustre un tableau de 3-rubans standard de forme λ , de 3-quotient γ et de remplissage A .

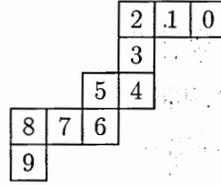


Figure A.5 Type d'un ruban selon la case traversée par une diagonale D_{rk}

On note $Rub(S)$, l'ensemble des rubans d'un tableau de r -ruban S . Soit $\xi \in Rub(S)$. La position de ξ est la diagonale la plus à droite qui croise ξ . La valeur modulo r de la position de ξ donne son type, au sens de la section 4.1.3.

En effet, une autre façon de déterminer le type d'un ruban est de considérer les diagonales D_{rk} où $k \in \mathbb{Z}$. Chaque ruban est coupé par une unique telle diagonale, en une unique case. Si la case de ξ la plus au nord-est est nommée la *tête du ruban* ξ , alors la distance de la case coupée par D_{rk} dans ξ par rapport à sa tête donne le type du ruban ξ . La case de ξ la plus au sud-ouest est alors la *queue du ruban* ξ . Par exemple, les ruban de type 0 sont ceux dont une diagonale D_{rk} coupe la tête, celles coupées à la queue par une telle diagonale sont de type $r - 1$.

Les entrées dans chaque case du ruban illustré à la figure A.5 donnent le type qu'aurait ce ruban si cette case était traversée par une diagonale D_{rk} .

Remarquons qu'on peut alors appliquer la bijection de Carré-Leclerc en utilisant cette définition du type et des diagonales D_{rk} , pour $k \in \mathbb{Z}$. C'est précisément la bijection qui avait été proposée par White et Stanton dans (Stanton et White, 1985). Remarquons également qu'ici on parle de type 0 et 1 pour les dominos, qui correspondent respectivement aux types 1 et 2 dans le reste du mémoire.

Un *tableau semi-standard de r -rubans* est défini de la même façon qu'un tableau standard de r -rubans, à l'exception que l'ensemble ordonné A des entrées permet des répétitions. Les rubans ayant des entrées égales doivent alors avoir des posi-

tions distinctes et être ordonnées par position croissante. Ainsi, le tableau peut être standardisé pour obtenir un tableau de r -rubans standard valide. Notons par $Tab_r(\lambda/\mu)$ l'ensemble des tableaux de r -rubans semi-standard de forme λ/μ .

A.4 Généralisation de l'algorithme de couplage

Voyons maintenant la généralisation de la bijection proposée par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999). On a la proposition suivante pour les tableaux standards.

Proposition A.4.1 ((van Leeuwen, 1999), proposition 3.1.2). *Soit $r > 0$, deux partages λ, μ tels que $\mu \leq_r \lambda$, et un ensemble totalement ordonné A de cardinalité $|\lambda/\mu|$. Notons l'entrée d'un ruban $\xi \in Rub(S)$ par $S(\xi)$.*

Soit $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)})$ et $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r-1)})$ les r -quotients respectifs de λ et μ , et soit $d^r(S_r(\delta(\lambda))) = d^r(S_r(\delta(\mu))) = (d_0, d_1, \dots, d_{r-1})$.

Il y a une bijection entre l'ensemble des tableaux standards de r -rubans de forme λ/μ et d'entrées A , et l'ensemble des r -tuples $(S_0, S_1, \dots, S_{r-1})$ de tableaux standards, où S_i a comme forme $\lambda^{(i)}/\mu^{(i)}$, les ensembles des entrées des S_i sont mutuellement disjoints et leur union est A .

Finalement, si x est une case de $\lambda^{(i)}/\mu^{(i)}$, alors $S_i(x) = S(\xi)$ pour $\xi \in Rub(S)$, où $pos(\xi) = r(pos(x) + d_i) + i$.

Pour les tableaux semi-standard, la proposition est légèrement plus complexe.

Proposition A.4.2 ((van Leeuwen, 1999), proposition 3.2.2). *Soit $r > 0$ et deux partages λ, μ tels que $\mu \leq_r \lambda$. Soit $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)})$ et $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r-1)})$ les r -quotients respectifs de λ et μ .*

Il y a une bijection entre l'ensemble des tableaux de r -rubans semi-standard T de forme λ/μ , et l'ensemble des r -tuples $(T_0, T_1, \dots, T_{r-1})$ de tableaux ordinaires

semi-standards, où les T_i ont comme forme $\lambda^{(i)}/\mu^{(i)}$, et $\sum_{i=0}^{r-1} wt(T_i) = wt(T)$.

Si S est la standardisation de T telle que $T(\xi) = f(S(\xi))$ pour une application faiblement monotone f , et S correspond sous la bijection précédente au r -tuple $(S_0, S_1, \dots, S_{r-1})$, alors $T_i(x) = f(S_i(x))$, $\forall x \in \lambda^{(i)}/\mu^{(i)}$.

On a alors le corollaire suivant qui décrit le produit de r fonctions de Schur.

Corollaire A.4.3. Soit $r > 0$ et deux partages λ, μ tels que $\mu \leq_r \lambda$.

Soit $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)})$ et $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r-1)})$ les r -quotients respectifs de λ et μ , et soit A un sous-ensemble fini de \mathbb{N} .

$$\sum_{T \in Tab_r(\lambda/\mu, A)} x^{wt(T)} = \prod_{i=0}^{r-1} s_{\lambda^{(i)}/\mu^{(i)}}(x_A),$$

où $s_{\lambda/\mu}(x_A)$ est la fonction de Schur associée à λ/μ , en les variables $\{x_i | i \in A\}$.

Ainsi, les tableaux de r -rubans permettent de calculer le produit de r fonctions de Schur.

A.5 Tableaux de rubans et théorie de la représentation

D'où est venue l'intérêt de décrire les fonctions de Schur, ou leur produit, en terme de tableaux de rubans? Pourquoi Stanton et White ont-ils originellement décidé d'étudier les tableaux de rubans?

Cela vient encore une fois de la théorie de la représentation, où une règle combinatoire permet de déterminer les valeurs que prennent un caractère irréductible de S_n à l'aide de tableaux de rubans. Remarquons qu'ici des rubans de différentes longueurs peuvent apparaître dans un même tableau.

Nous avons vu au chapitre 2 que les fonctions de Schur encodent les valeurs que prennent les caractères irréductibles χ_λ du groupe symétrique S_n .

En effet, nous avons vu que pour $p_k = \sum_i x_i^k$, la fonction de Schur de forme λ est définie par

$$s_\lambda = \sum_{\rho \vdash n} \chi_\rho^\lambda \prod_k \frac{p_k^{r_k}}{r_k! k^{r_k}},$$

où $\rho = (\ell^{r_\ell}, \dots, k^{r_k}, \dots, 2^{r_2}, 1^{r_1}) \in \text{Par}(n)$ décrit de type cyclique de la classe de conjugaison à laquelle on applique χ^λ et où r_k est le nombre de parts k dans ρ .

Il existe une règle combinatoire pour calculer ces χ_ρ^λ : la *règle de Murnaghan-Nakayama*. Elle énonce que

$$\chi_\rho^\lambda = \sum_{T \in TR(\lambda, \rho)} (-1)^{ht(T)}.$$

Dans cette formule, $TR(\lambda, \rho)$ est l'ensemble des tableaux de rubans de forme λ et de poids ρ . Dans chaque tableau de ce type, il y a un unique ruban d'entrée i et de longueur ρ_i , pour chaque i .

La *hauteur d'un ruban* $ht(r)$ est donnée par le nombre de ligne qu'il touche, moins 1. La *hauteur d'un tableau* $ht(T)$ est alors la somme des hauteurs de ses rubans.

Exemple A.5.1. Soit $\lambda = (2, 1)$. On peut retrouver les valeurs obtenues à la figure 2.1 en prenant respectivement $\rho = (3)$, $\rho = (2, 1)$, $\rho = (1, 1, 1)$.

Pour $\rho = (3)$, il y a un seul tableau de un ruban d'entrée 1 et de longueur 3 : . Son poids est bien (3) , puisque trois cases 1×1 sont « remplies » par 1. C'est en ce sens que le poids est calculé ici. Le ruban, tout comme le tableau, a alors comme hauteur $ht(T) = 1$. Ainsi,

$$\chi_{(3)}^{(2,1)} = (-1)^1 = -1.$$

Pour $\rho = (2, 1)$, il y a deux tableaux de rubans possible. Il s'agit de $T_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ et $T_2 = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$, de hauteur respective $ht(T_1) = 0 + 0 = 0$ et $ht(T_2) = 1 + 0 = 1$. Ainsi,

$$\chi_{(2,1)}^{(2,1)} = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0.$$

Pour $\rho = (1, 1, 1)$, il y a deux tableaux de rubans possible, qui correspondent exactement aux tableaux standards de forme $(2, 1)$, $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$. Ils ont comme hauteur respective $ht(T) = 0$. Ainsi,

$$\chi_{(1,1,1)}^{(2,1)} = (-1)^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2.$$

Les tableaux de r -rubans sont alors, entre autres, un cas particulier des tableaux de rubans pour le type cyclique (r^k) .

Voir la section 7.17 de (Stanley, 1999) pour plus de détails sur la règle de Murnaghan-Nakayama.

ANNEXE B

JEU DE TAQUIN SUR LES TABLEAUX DE RUBAN

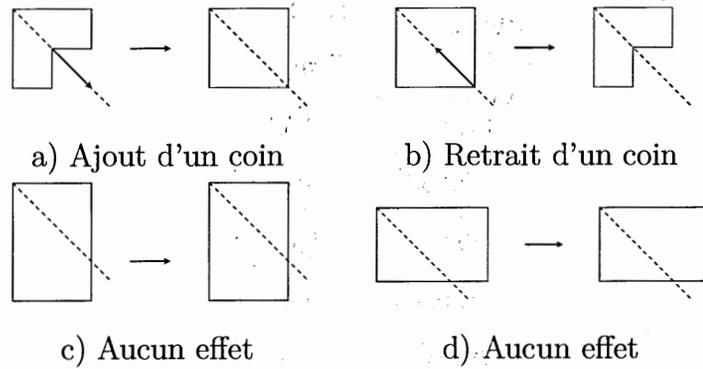
Cette annexe décrit une sorte de jeu de taquin pour les tableaux de r -rubans, qui se base sur les notions de séquence de bordure, de FD , de r -noyau, de r -quotient et de r -rubans vus à l'annexe A. Il s'agit de déplacer les rubans vers l'intérieur (ou l'extérieur), d'une manière qui rappelle le jeu de taquin. Ces déplacements seront en fait provoqués par l'action de permutations affines. Nous avons conservé le terme jeu de taquin, puisque c'est en ces termes qu'en parle van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1999). Cette annexe se base sur la section 4 de cet article.

B.1 Permutations affines et action sur Par

Nous allons considérer \tilde{S}_n le groupe de permutations ω de \mathbb{Z} qui vérifient $\omega(i+n) = \omega(i) + n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{i=1}^n \omega(i) = \binom{n+1}{2}$. Ce groupe est isomorphe au groupe de Coxeter affine de type \tilde{A}_{n-1} , de description par générateurs et relations

$$\left\langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i^2 = 1_{\tilde{S}_n} \quad \forall i, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad \forall j \neq i \pm 1, \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \forall j \neq i \pm 1 \quad (\text{si } n \neq 2) \end{array} \right\rangle.$$

Remarquons que l'action de \tilde{S}_n sur \mathbb{Z} induit une action sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, s_i agit sur FD en interchangeant les bits en position i et $i-1$ modulo n et en fixant les autres bits.

Figure B.1 Effet de s_i sur la bordure d'un partage λ

Rappelons que les partages correspondent à des éléments de FD lorsque identifiés à leur séquences de bordure, vues à l'annexe A. Nous étudierons donc l'effet des $s_i \in \tilde{S}_n$ sur les partages de manière combinatoire.

L'effet de s_i sur un partage λ peut être compris graphiquement en terme d'intersection des diagonales $i \pm kn$, pour $k \in \mathbb{Z}$, et de la bordure de λ . Si une telle diagonale traverse un cocoin de la bordure de λ , alors un coin est rajouté (figure B.1 a)). Si elle traverse un coin de la bordure de λ , alors celui-ci est retiré pour obtenir un cocoin (figure B.1 b)). Si une telle diagonale ne croise, ni un coin, ni un cocoin, et donc les bits adjacents de la séquence de bordure de λ en position i et $i - 1$ modulo n sont identiques, alors l'effet est nul (figure B.1 c) et d)).

On notera par $s_i(\lambda)$ la forme obtenue en faisant les modifications indiquées pour chaque intersection d'une diagonale $i \pm kn$, pour $k \in \mathbb{Z}$, avec la bordure de λ . L'effet de s_i sur une forme gauche λ/μ sera donné par $s_i(\lambda)/s_i(\mu)$. Voir la figure B.4 pour un exemple complet.

Tout $\sigma \in \tilde{S}_n$ peut s'écrire comme la composition de s_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Un tel σ peut être vu comme agissant à la fois sur $\{1, 2, \dots, n-1\}$, par l'action induite sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et sur un partage, par son effet sur sa séquence de bordure.

La proposition suivante décrit alors l'effet de $\sigma \in \tilde{S}_n$ sur le r -noyau et le r -quotient d'un partage.

Proposition B.1.1. *Soit λ de r -noyau γ et de r -quotient $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)})$. Alors pour tout $\sigma \in \tilde{S}_r$, $\sigma(\lambda)$ a un r -noyau $\sigma(\gamma)$ et un r -quotient donné par $(\lambda^{\sigma(0)}, \lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(r-1)})$.*

B.2 Action sur les tableaux de r -rubans standards

On définit maintenant l'action de $\sigma \in \tilde{S}_n$ sur un tableau standard. Rappelons qu'un tableau standard peut être vu comme une chaîne saturée de partages dans le treillis de Young. Autrement dit, il est construit en ajoutant une case à la fois, de manière à conserver une forme de partage, et la case ajoutée à la $i^{\text{ème}}$ étape est remplie par i . La forme obtenue à la $i^{\text{ème}}$ étape est alors λ_i . Une autre façon équivalente de trouver les λ_i de la proposition suivante est de considérer la forme du sous-tableau contenant les entrées inférieures ou égales à i . Lorsqu'un tableau standard est gauche de forme λ/μ , alors il suffit de commencer la construction avec μ (sans remplissage) et d'y ajouter des cases tel que décrit ci-haut.

Proposition B.2.1. *Si S est un tableau standard de r -rubans de forme λ/μ obtenu par la chaîne saturée $\mu = \lambda_0 <_r \lambda_1 <_r \dots <_r \lambda_k = \lambda$, alors pour $\sigma \in \tilde{S}_r$, $\sigma(S)$ est de forme $\sigma(\lambda)/\sigma(\mu)$ et est défini le tableau correspondant à la chaîne saturée*

$$\sigma(\mu) = \sigma(\lambda_0) <_r \sigma(\lambda_1) <_r \dots <_r \sigma(\lambda_k) = \sigma(\lambda).$$

Si S est envoyé sur le r -tuple $(S_0, S_1, \dots, S_{r-1})$ par la bijection généralisée de la section A.4, alors $\sigma(S)$ est envoyé sur le r -tuple $(S_{\sigma(0)}, S_{\sigma(1)}, \dots, S_{\sigma(r-1)})$.

Remarquons que dans le cas des tableaux domino, où $r = 2$, la parité du nombre de transpositions s_0, s_1 apparaissant dans σ indique si la paire ordonnée de tableaux de 2-quotient $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ est préservée ou inversée.

Remarquons également que dans le cas de tableaux de r -rubans semi-standard, il suffit de considérer l'ordre d'ajout des rubans où les entrées sont classées en ordre faiblement croissant et, pour les entrées égales, en ordre croissant de position.

Cette méthode est faisable dans le cas de petits tableaux, mais plutôt rébarbative dans le cas de tableaux ayant un plus grand nombre de r -rubans. Nous allons donc décrire graphiquement l'effet d'une transposition s_i sur un tableau de r -rubans, comme nous l'avons fait pour l'effet d'une transposition s_i sur un partage.

Similairement, nous allons considérer et tracer uniquement les diagonales d'indice $i + kr$, où $k \in \mathbb{Z}$. La case de chaque ruban qui est coupée par une telle diagonale est appelée la *case non-fixe pour s_i* . Les autres cases du ruban sont fixe.

Si la case non-fixe pour s_i est située au milieu du ruban, autrement dit partout sauf aux extrémités du ruban, alors il y a que deux cas que nous décrirons ici. Les différents cas sont illustrés à la figure B.2. Les cases non-fixes y sont hachurées, et les nouvelles cases du ruban sont marquées en pointillé.

Si la case non-fixe est située dans un segment droit du ruban, alors il n'y a pas d'effet (figure B.2 a) et b)). Si la case non-fixe est située dans un coude, alors elle est déplacée le long de l'anti-diagonale qui la traverse (vers le nord-est, figure B.2 c), ou vers le sud-ouest, figure B.2 d)).

Si la case non-fixe est située à une des extrémités du ruban, alors c'est plus compliqué. La case non-fixe sera supprimée, et une nouvelle case sera ajoutée à l'autre extrémité du ruban. Nous allons considérer deux types de cases spéciales : la *case fixe de fin de ruban*, à l'extrémité opposée à la case non-fixe et que nous abrégons à case fixe, et la *case déterminante*. Le rôle de la case déterminante sera, comme son nom l'indique, de déterminer comment la nouvelle case sera ajoutée.

La case déterminante d'un ruban ξ est choisie de la façon suivante :

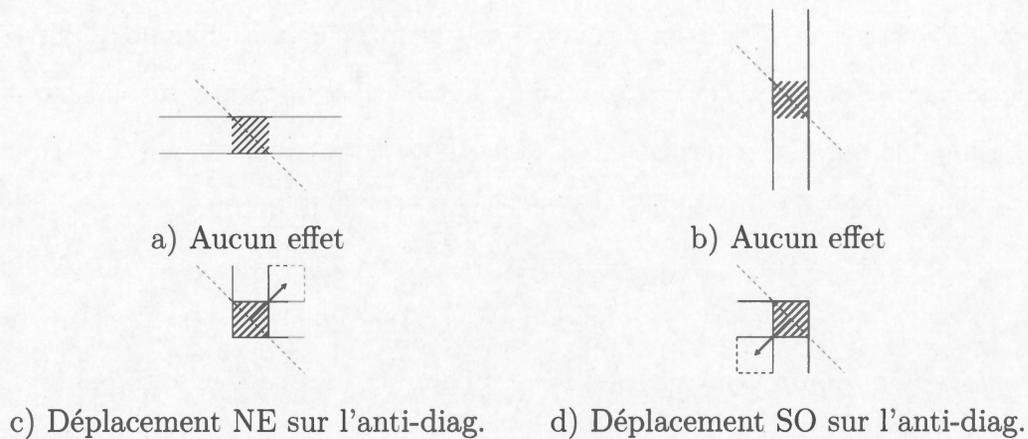


Figure B.2 Effet de s_i sur la case non-fixe du milieu d'un ruban

Si $pos(\xi) = i - 1$ modulo r , autrement dit la case fixe est la tête du ruban, alors la case déterminante est au nord-est de celle-ci, et on souhaite ajouter une case au nord ou à l'est de la case fixe. Si $pos(\xi) = i$ modulo r , autrement dit la case fixe est la queue du ruban, alors la case déterminante est au sud-ouest de celle-ci, et on souhaite ajouter une case au sud ou à l'ouest de la case fixe.

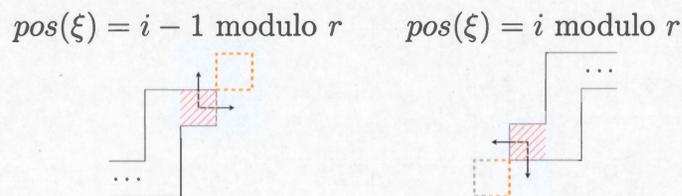


Figure B.3 Cases fixes (rouge) et cases déterminantes (orange) en fonction de la position $pos(\xi)$ d'un domino ξ

Les déplacements possibles des rubans sont identifiés uns à un. On identifie l'entrée minimale telle que tous les rubans ayant cette entrée n'ont pas tous été déplacés, et on déplace les rubans de même entrée selon leur position croissante, c'est-à-dire du sud-ouest au nord-est. Soit i l'entrée minimale des rubans n'ayant pas été déplacés, et ξ le ruban non déplacé d'entrée i et de position minimale.

On considère la forme du sous-tableau de r -rubans formé par les dominos d'entrées inférieures à i , et de ceux d'entrée égale mais de position inférieure (au sud-ouest). On considère la bordure extérieure de ce sous-tableau, qui a une forme de partage. La case déterminante a un unique côté qui fait partie de la bordure de ce tableau. S'il s'agit du côté vertical, alors on ajoute respectivement une case au nord de la case fixe, ou au sud, selon le type de la case déterminante. S'il s'agit du côté horizontal, alors on ajoute respectivement une case à l'est de la case fixe, ou à l'ouest.

Voyons un exemple pour clarifier tout cela.

Exemple B.2.2. Pour cet exemple, nous utilisons $r = 4$ et $i = 2$. Soit $\lambda = (6, 6, 6, 5, 4, 4, 3, 1)$ et son 4-noyau $\gamma = (2, 2)$. L'effet de s_2 sur λ/γ est illustré à la figure B.4. La forme obtenue est celle du tableau de la figure B.8. Les bordures intérieure et extérieure finales sont indiquées en orange. Appliquer s_2 une seconde fois nous permet de revenir à l'état initial.

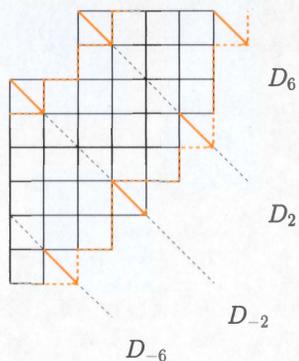
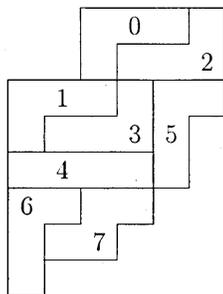
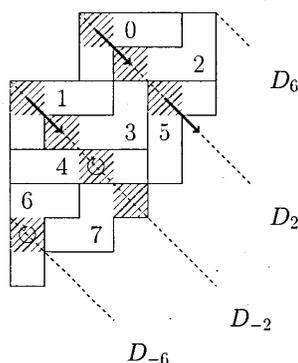


Figure B.4 Effet de s_2 sur le partage λ/μ

La figure B.5 montre un tableau de 4-rubans standard de forme λ/γ . La figure B.6 indique, pour ce même tableau, les diagonales d'indice 2 modulo 4, les cases non-fixes et l'effet de s_2 sur les cases non-fixes de milieu de ruban.

Figure B.5 Tableau de 4-rubans standard de forme λ/μ Figure B.6 Effet de s_2 sur les cases non-fixes de milieu de ruban

Étudions maintenant l'effet de s_2 sur les cases non-fixes situées aux extrémités de rubans. La figure B.7 montre l'effet de s_2 sur l'ensemble des cases non-fixes des rubans, et en particulier sur les cases non-fixes aux extrémités de rubans. Nous décortiquerons cet effet ci-dessous. Les cases fixes y sont indiquées en rose, et les cases déterminantes, en orange.

Considérons le ruban d'entrée 2. Sa case non-fixe est à la queue du ruban, sa case fixe est donc à la tête du ruban, en position (1,6), à la première ligne et sixième colonne. On veut ajouter une case au ruban, soit au nord, soit à l'est de la case fixe. La case déterminante du ruban est au nord-est de la case fixe, en position (0,7). Elle est à l'extérieur de la forme λ/μ . On ajoute donc une case à l'est de la case fixe pour préserver une forme de partage.

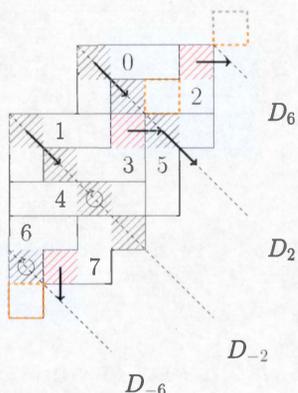


Figure B.7 Effet de s_2 sur l'ensemble des cases non-fixes

Considérons le ruban d'entrée 3. Sa case non-fixe est à la queue du ruban, sa case fixe est donc à la tête du ruban, en position (3,4). La case déterminante du ruban est au nord-est de la case fixe, en position (2,5). Elle est à l'intérieur du ruban d'entrée 2, qui est une entrée inférieure à 3. Le côté horizontal de la case déterminante est sur la bordure du sous-tableau des entrées inférieures ou égales à 3. On ajoute donc une case à l'est de la case fixe.

Considérons le ruban d'entrée 7. Sa case non-fixe est à la tête du ruban, sa case fixe est donc à la queue du ruban, en position (7,2). La case déterminante du ruban est au sud-ouest de la case fixe, en position (8,1). Elle est à l'intérieur du ruban d'entrée 6, qui est une entrée inférieure à 7. Le côté vertical de la case déterminante est sur la bordure du sous-tableau des entrées inférieures ou égales à 7. On ajoute donc une case au sud de la case fixe.

Le tableau de 4-ruban obtenu est illustré à la figure B.8.

B.3 Chaînes de rubans ouvertes et déplacement de chaînes

Le déplacement des rubans affectés par $s_i \in \tilde{S}_n$ peut être compris en terme de chaînes.

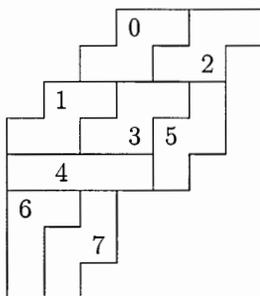


Figure B.8 Tableau de 4-ruban résultant de l'effet de s_2

Une *chaîne de rubans* pour s_i est une succession minimale de rubans qui interagissent ensemble sous s_i dans un tableau de r -rubans S . Les rubans sont ordonnés de façon à ce que le premier « entre » dans le second, le second « entre » dans le troisième, et ainsi de suite. Autrement dit, $s_i(\xi_1)$ a une case en commun avec ξ_2 , etc. On dit alors que ξ_{j+1} est le successeur de ξ_j dans sa chaîne dans S pour s_i .

Exemple B.3.1. Dans l'exemple B.2.2, les chaînes, indiquée par l'ensemble des entrées impliquées, sont exactement $\{0, 2\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{7\}$.

On appelle *chaînes fermées* celles qui ont leur début et leur fin dans un même ruban, et qui forment ainsi un cycle. Par exemple, la figure 6.8 comporte une chaîne fermée composée de deux dominos, les dominos d'entrées 2 et 3.

On appelle *chaînes ouvertes* celles qui ont leur début et leur fin dans des rubans différents et qui ne forment donc pas de cycle. Par exemple, toutes les chaînes non triviales de la figure B.7 sont ouvertes.

Dans le cas de tableaux de r -rubans semi-standard, on dit qu'on a une *chaîne interdite* si elle comprend exactement deux rubans de même entrée.

On peut alors comprendre l'effet de $s_i \in \tilde{S}_r$ sur un tableau de r -rubans en terme de déplacement de chaînes.

Proposition B.3.2. *Il y a une action de \tilde{S}_r sur l'ensemble des tableaux de r -rubans semi-standards, préservant le poids des tableaux.*

Soit T un tableau semi-standard de r -rubans et $s_i \in \tilde{S}_r$, soit $s_i(T)$ le tableau de r -rubans obtenu en déplaçant toutes les chaînes de T pour s_i , sauf les chaînes interdites.

Pour $\sigma \in \tilde{S}_r$, si T correspond au r -quotient (T_0, \dots, T_{r-1}) par la bijection sur λ/μ , alors $\sigma(T)$ correspond au r -quotient $(T_{\sigma(0)}, \dots, T_{\sigma(r-1)})$ par la bijection sur $\sigma(\lambda)/\sigma(\mu)$.

On peut également décrire une deuxième action de \tilde{S}_r sur un tableau T , que nous noterons $\tilde{S}_r \circ T$. Cette action consiste à déplacer des chaînes ouvertes uniquement.

Remarquons que la forme de $s_i \circ T$ est la même que celle de $s_i(T)$, puisque déplacer des chaînes fermées ne modifie pas la forme extérieure de ces chaînes.

Considérons maintenant quelques propriétés spécifiques aux tableaux domino. Certaines de ces propriétés sont utilisées à la section 6.3 et servent à expliquer les problèmes qui y sont rencontrés.

Proposition B.3.3.

1. $s_0, s_1 \in \tilde{S}_2$ n'ont pas de points fixes, la case non-fixe est toujours aux extrémités, et un domino ne peut rester fixe.

En conséquent, il n'y a pas de chaîne triviale. De plus, les chaînes fermées comptent un nombre pair de dominos.

2. La forme d'un domino avant et après le déplacement de sa chaîne ne sont pas liées.

3. Si $\sigma \in \tilde{S}_2$, alors σ a une unique expression qui est un produit de s_0, s_1 où ils alternent.

4. Si $\sigma(T)$ est déterminé en appliquant successivement ses générateurs, et qu'on suit le progrès d'un domino ξ , alors sa position soit augmente à chaque étape, soit diminue à chaque étape, en fonction de la parité initiale de sa position.

Autrement dit, les dominos sont divisés en deux cohortes se déplaçant en directions opposées, selon leurs parités initiales. Éventuellement, les deux groupes de dominos se dépassent, si la longueur de σ est suffisamment grande, et le tableau est divisé en deux parties en lien direct avec la paire de tableaux de Young (t_1, t_2) associée à T . On dit alors que le tableau est ségrégué.

5. Dans le cas de $\sigma \circ T$, le tableau deviendra également ségrégué si la longueur de σ est assez grande, mais il n'est pas possible de déterminer initialement quels dominos se retrouveront dans chaque partie du tableau ségrégué. En effet, un domino qui fait partie d'une chaîne fermée s'arrête pour une étape, puis repart dans la direction opposée au tour suivant.

Remarquons qu'il est possible de décrire la notion de spin pour les tableaux de r -rubans, et qu'il est possible de déterminer la variation de spin suite au déplacement d'une chaîne de rubans. Voir (van Leeuwen, 1999) pour plus de détails.



RÉFÉRENCES

- Bender, E. A. et Knuth, D. E. (1972). Enumeration of plane partitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13(1), 40 – 54.
- Benkart, G. et Sottile, F. (1996). Tableau switching : algorithms and applications. *J. Combin. Theory Ser. A*, 76(1), 11–43.
- Bump, D. et Schilling, A. (2017). *Crystal bases*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.
- Carré, C. et Leclerc, B. (1995). Splitting the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts. *J. Algebraic Combin.*, 4(3), 201–231.
- Chemli, Z. (2016). Shifted domino tableaux. ArXiv :1603.04706.
- Fulton, W. (1997). *Young tableaux : With applications to representation theory and geometry*, volume 35 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Haiman, M. D. (1992). Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor. *Discrete Math.*, 99(1-3), 79–113.
- James, G. et Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press.
- Knuth, D. E. (1970). Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 34(3), 709–727.
- Lam, T. (2004). Growth diagrams, domino insertion and sign-imbalance. *J. Combin. Theory Ser. A*, 107(1), 87–115.
- Lascoux, A., Leclerc, B. et Thibon, J.-Y. (1996). Ribbon tableaux, Hall-Littlewood functions, quantum affine algebras and unipotent varieties. *Journal of Mathematical Physics*, 38.
- Lascoux, A. et Schützenberger, M.-P. (1981). Le monoïde plaxique. *Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples, 1978)*, Rome, CNR, (109), 129–156.

- Littlewood, D. E. et Richardson, A. R. (1934). Group characters and algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 233, 99–141.
- Macdonald, I. G. (2015). *Symmetric functions and Hall polynomials* (second éd.). Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- Reiner, V. et Shimozono, M. (1995). Plactification. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 4, 331–351.
- Robinson, G. d. B. (1938). On the representations of the symmetric group. *American Journal of Mathematics*, 60(3), 745–760.
- Sagan, B. E. (2001). *The symmetric group : Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions* (second éd.), volume 203 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Schensted, C. (1961). Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13, 179–191.
- Schützenberger, M.-P. (1977). La correspondance de Robinson. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)* 59–113.
- Shimozono, M. (2005). Crystals for dummies. Pour le workshop "Generalized Kostka Polynomials" tenu à la American Institute of Mathematics (Palo Alto, California) et organisé par Anne Schilling et Monica Vazirani.
- Stanley, R. P. (1999). *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Stanton, D. W. et White, D. E. (1985). A Schensted algorithm for rim hook tableaux. *J. Combin. Theory Ser. A*, 40, 211–247.
- Stembridge, J. (2002). A concise proof of the Littlewood-Richardson rule. *Electr. J. Comb.*, 9. <http://dx.doi.org/10.37236/1666>
- van Leeuwen, M. A. A. (1999). Edge sequence, ribbon tableaux, and an action of affine permutations. *European J. of Combin.*, 20(2), 179–195.
- van Leeuwen, M. A. A. (2000). Some bijective correspondences involving domino tableaux. *Electron. J. Combin.*, 7, Research Paper 35, 25.
- van Leeuwen, M. A. A. (2001). The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics. In *Interaction of combinatorics and representation theory*, volume 11 de *MSJ Mem.* 95–145. Math. Soc. Japan, Tokyo.

INDEX DES DÉFINITIONS

- 1_λ , 42
- 2-noyau de λ , 50
- 2-quotient de λ , 51
- $B(\lambda)$, 79
- G -module, 18
- GL_n , 17, 82
- Par , l'ensemble des partages, 6
- $Par(n)$ l'ensemble des partages de n ,
6
- $Rub(S)$, l'ensemble des rubans d'un
tableau de r -ruban S , 154
- $S \cup T$, 33
- $SSYT(\lambda/\mu, \nu)$ l'ensemble des
tableaux semi-standards de
forme λ/μ et de poids ν , 105
- $S^2(V \otimes V)$, 22
- $S^2(s_\lambda)$, 61
- S_n , le groupe symétrique, 11
- $Yam(\lambda/\mu, \gamma)$ l'ensemble des
tableaux de Yamanouchi de
forme λ/μ et de poids γ , 105
- $\Lambda^2(V \otimes V)$, 22
- $\Lambda^2(s_\lambda)$, 61
- $\mathbb{Y}(B)$, 81
- $\mathbb{Y}(B, \lambda)$, 81
- $\mu \subseteq \lambda$, 6
- i -indice, 107
- r -rubans, 153
- équivalents pour le jeu de taquin, 31
- étend, 33
- algorithme de couplage, 57
- algorithme de
Robinson-Schensted-Knuth,
ou RSK, 26
- alphabet, 10
- anti-dominant pour i , 86
- arête étiquetée par i entre deux
mots, 75
- auto-commutante, 38
- bijection de Carré-Leclerc, 104
- bits, 145
- caractère $\chi_\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$, 19
- caractère irréductible, 19

- case déterminante, 162
- case fixe de fin de ruban, 162
- case non-fixe pour s_i , 162
- chaîne de rubans pour s_i , 167
- chaîne interdite, 167
- chaînes fermées, 167
- chaînes ouvertes, 167
- classes d'équivalence de Knuth, 28
- coin extérieur, 30
- coin intérieur, 30
- complètement échangé, 36
- complètement étendu, 36
- complètement contracté, 36
- composition, 106
- couleur, 54
- cristal, 74
- cristal (pour GL_n), 74
- cristal de tableaux, 77
- cristaux de Demazure, 81
- cristaux de mots, 75

- diagonale D_k , 9
- diagramme de r -rubans, 153
- diagramme de Young, 6
- diagramme de Young gauche, 7
- dominant, 80
- dominant pour i , 86
- domino, 50

- ensemble des fonctions symétriques, 12
- et al., 145
- famille d'échange de tableaux, 67
- famille de partages, 67
- fonction de Schur associée à λ , 14
- fonction symétrique, 12
- glisse d'extension de T dans c , 34
- glisse de contraction de T dans b , 34
- glisse de jeu de taquin, 30
- glisse de jeu de taquin extérieure, 31
- glisse de jeu de taquin intérieure, 30
- graphe d'un cristal, 75
- hauteur d'un ruban $ht(r)$, 157
- hauteur d'un tableau $ht(T)$, 157
- involution de Bender-Knuth, 14
- jeu de taquin, 29
- jeu de variables, 12

- L'indice associé à la lettre w_j , 107
- lettre, 10
- longueur d'un mot w , 10

- module irréductible, 18
- modules de Specht, 20
- monoïde plaxique, 29, 44
- monoïde super plaxique, 137

- morphisme de cristaux $\phi : B \rightarrow B'$,
81
- mot, 10
- mot de lecture de colonne, 10, 53
- mot de lecture de ligne, 10, 53
- mot de lecture diagonale, 10, 53
- mot de Yamanouchi, 40
- mots de treillis, 40
- mouvement d'échange, 36
- neutre pour i , 87
- notation cyclique, 11
- opérateurs augmentant, 79
- opérateurs descendant, 79
- ordre d'inclusion, 6
- ordres de lecture valides, 10
- paire perforée, 35
- partage de n , 6
- partie symétrique et anti-symétrique
du carré d'un caractère, 23
- pavable, 52
- permutation de $[n]$, 11
- permutation de k , 10
- permutations de treillis, 40
- plaxiquement équivalents, 96
- poids d'un mot w , 10
- poids d'un sommet w , 75
- poids d'un tableau, 8
- poids d'un tableau domino T , 52
- position de ξ , 154
- position modulo 2, 54
- produit de tableaux $T * T'$, 45
- produit tensoriel, 22
- pseudo-tableau, 106
- queue du ruban ξ , 154
- règle de Murnaghan-Nakayama, 157
- règle de parenthésage, 76
- rectification de T , 31
- relations de Knuth, 29
- représentation φ de G , 18
- représentation pour GL_n , 22
- ruban extérieur, 147
- ségrégué, 169
- séquence de bordure, 145
- spin, 60
- tête du ruban ξ , 154
- tableau canonique, 106
- tableau d'enregistrement, 27
- tableau d'insertion, 27
- tableau de Yamanouchi, 40
- tableau de Young semi-standard, 7
- tableau domino de forme λ/γ , 52
- tableau domino de Yamanouchi, 54
- tableau droit, 8

- tableau gauche de forme λ/μ , 8
- tableau perforé, 34
- tableau semi-standard de r -rubans,
154
- tableau standard, 8
- tableau standard de r -rubans, 153
- tableaux, 7
- tableaux de Littlewood-Richardson,
40
- translation vers la gauche, 147
- transpositions $(i, i + 1)$, 12
- type A_n , 73
- union, 33
- v-spin, 62
- vecteurs de plus grand poids, 79