UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPLICATION DE LA SIMULATION EXPLICITE PONDÉRÉE DU MODÈLE 3/2 À LA TARIFICATION D'OPTIONS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

IRO RENÉ KOUARFATE

OCTOBRE 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Dieu pour ses merveilles dans la vie de ma famille. Je remercie mon feu père et ma mère pour leur amour, leurs sacrifices, leurs conseils et leur soutien inconditionnel à chaque instant de ma vie. Mes remerciements vont ensuite à l'endroit de ma directrice de recherche, la professeure Anne Mackay du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal sans qui je ne pouvais finir cette formation. En effet, ses nombreux soutiens financiers, moral et académiques ont été d'une importance sans pareil dans mon parcours. De plus, ses judicieux conseils, sa disponibilité, sa patience et ses nombreuses révisions ont permis à compléter ce mémoire.

Par ailleurs, je mentionne ici le soutien administratif et informatique du personnel du département de mathématiques et du décanat de la faculté des sciences de l'Université du Québec à Montréal. J'adresse mes remerciements particulièrement à madame Isabella Couture, madame Gisèle Legault et madame Magali Barré pour leur sens de l'écoute, leurs services et leur disponibilité. Je désire aussi remercier le corps professoral en actuariat du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal pour leurs enseignements.
Enfin, je remercie mes frères et soeurs, neuveux et nièces, beaux-frères et belles-soeurs et plus particulièrement Béré Benjamin Kouarfaté qui a cru en moi et m'a donné l'opportunité de poursuivre mes études à Montréal. Un grand merci aux étudiants du laboratoire des cycles supérieurs en mathématiques pour avoir rendu agréable mes journées au laboratoire. A tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont contribué à l'aboutissement de ma formation, je vous dis merci.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES v
LISTE DES TABLEAUX vi
RÉSUMÉ vii
INTRODUCTION 1
CHAPITRE I MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE 4
1.1 Notions de base en calcul stochastique 5
1.2 Notions de base en mathématique financière 14
1.2.1 Tarification d'options dans un marché sans arbitrage 14
1.2.2 Estimateur Monte Carlo 19
1.2.3 Modèles à volatilité stochastique 20
1.2.4 Le modèle de Heston 24
1.2.5 Le modèle 3/2 26
1.3 Pourquoi le modèle 3/2 ? 29
1.3.1 Limitations du modèle de Heston 30
1.3.2 Motivation du modèle 3/2 31
1.3.3 Conditions imposées par le modèle 3/2 32
CHAPITRE II ÉTUDE COMPARATIVE DE QUELQUES ALGORITHMES DE SIMULATION DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE . 34
2.1 Modèle de Heston 35
2.1.1 Dynamique du log-rendement du modèle 36
2.1.2 Méthodes de simulation 36
2.1.3 Résultats numériques 40
2.2 Modèle 3/2 43
2.2.1 Dynamique du modèle 43

2.2.2 Méthodes de simulation du modèle de 3/2 44
2.2.3 Résultats numériques 49
CHAPITRE III SOLUTIONS EXPLICITES FAIBLES DES MODÈLES DE HESTON ET 3/2 52
3.1 Simulation du modèle de Heston basée sur la solution faible explicite 53
3.1.1 Solution explicite faible 53
3.1.2 Méthode de simulation explicite pondérée du modèle de Heston 57
3.2 Simulation du modèle 3/2 basée sur la solution faible explicite 58
3.2.1 Existence d'une solution explicite faible du modèle 3/2 59
3.2.2 Solution explicite faible du modèle 3/2 60
3.2.3 Dérivation de la dynamique du modèle avec arrêt 67
3.2.4 Méthode de simulation explicite pondérée du modèle 3/2 . . . 79
3.2.5 Application de l'algorithme à la tarification 83
CHAPITRE IV RÉSULTATS NUMÉRIQUES 84
4.1 Présentation des résultats 86
4.2 Analyse comparative des méthodes 90
CONCLUSION 102
ANNEXE A PREUVE DU THÉORÈME 1 104
RÉFÉRENCES 108

LISTE DES FIGURES

Figure Page

4.1 Évolution de RMSE en fonction du nombre de simulations avec $PS2$ (en bas) et $PS4$ (en haut) 94

4.2 Évolution de RMSE en fonction du nombre de simulations avec $PS3$ (en bas) et $PS5$ (en haut) 95

4.3 Distribution de RMSE pour 100000 simulations avec $PS2$ (en bas) et $PS4$ (en haut) 96

4.4 Distribution de RMSE pour 100000 simulations avec $PS3$ (en bas) et $PS5$ (en haut) 97

LISTE DES TABLEAUX

Tableau Page

2.1 MSE lorsque la condition de Feller est vérifiée 41

2.2 MSE lorsque la condition de Feller n'est pas vérifiée 42

2.3 Paramètres obtenus par Drimus (2012) 50

2.4 MSE dans les modèles de Heston et 3/2 51

4.1 Ensembles de paramètres 86

4.2 Erreur quadratique moyenne relative avec $PS1$, $PS2$ et $PS3$ . . . 87

4.3 Efficacité avec $PS2$ et $PS3$ 89

4.4 Prix exacts des options d'achat européennes avec $PS2$, $PS3$, $PS4$ et $PS5$ 91

4.5 Erreurs quadratiques moyennes relatives avec $PS2$ et $PS4$ ($\times 10^{-4}$) 92

4.6 Erreurs quadratiques moyennes relatives avec $PS3$ et $PS5$ ($\times 10^{-4}$) 93

4.7 Efficacité avec $PS3$ 99

4.8 Efficacité avec $PS2$ 100

RÉSUMÉ

La simulation explicite pondérée, développée par Kouritzin (2018) pour le modèle de Heston, est une technique de simulation Monte Carlo basée sur la solution explicite faible des équations différentielles stochastiques (EDS) du modèle. La solution explicite faible du modèle de Heston repose d'une part sur le fait que le processus de Cox-Ingersoll-Ross peut s'exprimer sous la forme d'une somme des carrés des processus de Ornstein-Uhlenbeck et d'autre part sur la solution exacte de Broadie et Kaya (2006) du processus de l'actif sous-jacent. Nous montrons que le modèle 3/2 admet une solution explicite faible en se basant sur les principaux résultats obtenus par Kouritzin (2018) dans le cas du modèle de Heston vu le lien entre ces deux modèles. En effet, le modèle 3/2 est un modèle à volatilité stochastique non affine dont le processus inverse de la variance est un processus de Cox-Ingersoll-Ross et le processus de l'actif sous-jacent est identique à celui du modèle de Heston. Ce modèle peu connu, reproduit pourtant mieux les marchés financiers. Nous développons donc un algorithme de simulation explicite pondérée pour ce modèle. Nous appliquons l'algorithme à la tarification des options européennes. Il est démontré que la précision de l'algorithme de simulation pondérée du modèle 3/2 est meilleure lorsque le nombre de processus de Ornstein-Uhlenbeck à simuler est élevé, mais couteux en temps de calcul.

Mots clés : Volatilité stochastique, équations différentielles stochastiques, processus de Ornstein-Uhlenbeck, processus de Cox-Ingersoll-Ross, modèle de Heston, modèle 3/2, solution faible explicite (locale), simulation Monte Carlo, technique de réduction de variance, échantillonnage par importance, simulation explicite pondérée, précision et efficacité d'un algorithme de simulation.

INTRODUCTION

La tarification des produits dérivés est un sujet très important en finance quantitative. Ce sujet s'est développé avec l'introduction du modèle de Black-Scholes en 1973 (Black et Scholes, 1973). En finance, les modèles sont souvent définis par des équations différentielles stochastiques et décrivent le comportement des actifs financiers. Ils permettent donc aux acteurs de la finance de faire une meilleure projection des prix des actifs financiers afin d'estimer le prix théorique des produits dérivés. Dans cette logique, le modèle de Black-Scholes a connu un grand succès car non seulement il est facile à implémenter mais il admet aussi des formules fermées pour les prix de plusieurs produits dérivés.
Malgré le succès du modèle de Black-Scholes, Merton (1976) remarque très vite que les prix réels des options transigées dans les marchés financiers sont différents des prix prédits avec le modèle de Black-Scholes. Ceci s'explique par le fait que le modèle de Black-Scholes repose sur les hypothèses irréalistes comme par exemple la complétude du marché et l'absence de coûts de transactions dans les marchés financiers. De plus, d'autres hypothèses de ce modèle telles que la volatilité constante et la normalité des log-rendements font que le modèle n'est pas adapté aux marchés.

Vu les limites du modèle de Black-Scholes, Stein et Stein (1991) ont introduit les modèles à volatilité stochastique. Ces modèles sont définis par un processus stochastique à deux dimensions dont la première décrit le comportement de l'actif sous-jacent et la seconde décrit le comportement de la volatilité. Dans la même optique, Heston (1993) a introduit le modèle à volatilité stochastique affine dont

la variance est décrite par un processus de Cox-Ingersoll-Ross (Cox *et al.*, 1985). Ce modèle est devenu le modèle à volatilité stochastique le plus populaire car il a été développé en tenant compte des problèmes du modèle de Black-Scholes et il admet des solutions analytiques pour les prix des options européennes (Gatheral, 2006). Malgré les atouts du modèle de Heston, Bakshi *et al.* (1997) montrent que le modèle ne reproduit pas bien le marché entre autres car la volatilité peut prendre des valeurs très proches de zéro sous la mesure neutre au risque. Ils favorisent alors le modèle 3/2.
Le modèle 3/2 est un cas particulier du modèle introduit par Bakshi *et al.* (1997). C'est un modèle à volatilité stochastique non affine dont le processus de variance inverse est un processus de Cox-Ingersoll-Ross. Le modèle 3/2 a été développé non seulement en tenant compte des problèmes du modèle de Black-Scholes, mais aussi ceux du modèle de Heston. De plus le modèle admet des solutions analytiques pour les prix des options européennes. Enfin, Drimus (2012) montre que le modèle 3/2 reproduit mieux plusieurs marchés financiers. La section 1.3 de ce mémoire détaille la revue de littérature et les motivations de ce modèle.

De nombreux produits dérivés n'admettent pas de solutions analytiques dans les modèles à volatilité stochastique et même dans les modèles les plus simples. C'est le cas par exemple des options exotiques. Ainsi, la simulation Monte Carlo reste souvent une alternative pour évaluer les produits dérivés. La simulation de Monte Carlo du modèle de Heston est basée sur la discrétisation des équations différentielles stochastiques (EDS) ou sur la «méthode exacte» de Broadie et Kaya (2006) et ses variantes. Kouritzin (2018) relève quelques difficultés de ces méthodes de simulation dans le cas du modèle de Heston. Il montre alors qu'il existe une solution explicite faible du modèle de Heston et utilise cette solution pour développer un algorithme de simulation du prix des actifs financiers dans le

modèle de Heston. Kouritzin et MacKay (2020) utilisent cette solution explicite faible et appliquent un algorithme d'échantillonnage séquentiel pour la réduction de variance des estimateurs. Dans ce travail, nous montrons que le modèle 3/2 admet une solution explicite faible et nous utilisons cette solution pour développer un algorithme de simulation du modèle 3/2. Nous appliquons l'algorithme à la tarification des options européennes.

Ledit mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux concepts liés à la tarification des produits dérivés sous la mesure neutre au risque dans les modèles à volatilité stochastique et présente les solutions analytiques des prix des options européennes dans les modèles de Heston et 3/2. Ensuite, dans le second chapitre, nous parlons des méthodes de simulation basées sur la discrétisation des EDS et quelques variantes de la méthode de Broadie et Kaya (2006). Dans le troisième chapitre nous montrons que le modèle 3/2 admet une solution explicite faible et déterminons cette solution. Nous utilisons la solution pour développer l'algorithme de simulation explicite pondérée. Enfin, dans le chapitre 4, nous présentons et analysons les résultats numériques obtenus en appliquant l'algorithme de simulation explicite pondérée à la tarification d'options européennes.

CHAPITRE I

MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

L'objectif de ce mémoire est d'adapter les résultats existant pour le modèle de Heston au modèle 3/2 dans le but de le simuler de façon efficace. Ainsi, dans ce chapitre, nous définissons les concepts liés à la théorie d'évaluation sous la mesure neutre au risque. Ensuite, nous définissons les modèles à volatilité stochastique particulièrement les modèles de Heston et 3/2. Nous parlons aussi des formules fermées des prix des options européennes dans les deux modèles. Ces formules sont implémentées dans les chapitres 2 et 4. Les prix obtenus constituent les prix de références dans l'analyse comparative de la précision des différents algorithmes de simulation qui sont développés tout au long de ce mémoire. Nous organisons alors le chapitre comme suit. Dans la première section, nous définissons les notions de base du calcul stochastique. La deuxième section de ce chapitre se concentre sur les notions de base en mathématiques financières. Nous abordons précisément la tarification dans un marché sans arbitrage, la définition des modèles de Heston et 3/2 puis nous donnons les formules fermées des prix des options européennes dans ces deux modèles. Enfin, les motivations du modèle 3/2 sont abordées dans la dernière section du chapitre.

1.1 Notions de base en calcul stochastique

Tout au long de ce mémoire, $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable. Cet espace probabilisable peut être complété soit par la mesure de probabilité physique $\mathbb{P}$ ou par une mesure neutre au risque dénotée $\mathbb{Q}$. On note aussi par $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ pour une filtration. Ainsi nous parlerons souvent des espaces de probabilité filtrés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$.

On note par $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des fonctions définies de Ω dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable. C'est-à-dire que $\mathcal{L}^2$ est défini par rapport à $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ est } \mathcal{F} \text{ mesurable et } \int_\Omega f^2(w)\mathbb{P}(dw) < \infty \right\}.$$

Les modèles en finance sont souvent décrits par les équations différentielles stochastique (EDS). Contrairement aux équations différentielles ordinaires dont les solutions sont des fonctions déterministes, les solutions des EDS si elles existent sont des processus stochastiques. Nous définissons dans ce qui suit un processus stochastique et un équation différentielle stochastique (EDS).

Définition 1.1.1 (Processus stochastique)**.**
Sur $(\Omega, \mathcal{F})$, un ensemble de variables aléatoires $\{Y_t, t \in I\}$ où I est l'ensemble des indices est appelé processus stochastique. L'ensemble I représente souvent le temps et peut être fini ou infini. Le processus stochastique est à temps continue si I est un intervalle. Puisqu'une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ alors, un processus stochastique est une fonction

$$\begin{aligned} Y : I \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, w) &\to Y(t, w) = Y_t(w). \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 (Équation différentielle stochastique (EDS)).
Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$*, une équation différentielle stochastique (EDS) conduite par un mouvement brownien est définie par*

$$\begin{cases} dX_t &= \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

où W *est un mouvement brownien adapté à la filtration* $\mathbb{F}$*,* μ *et* σ *sont des fonctions Borel-mesurables.*

La fonction μ est appelée coefficient de dérive et la fonction σ est appelée coefficient de diffusion ou volatilité du processus. Il faut noter que si une solution X existe, alors X est un processus de diffusion et (1.1) est appelée dynamique du processus X.

Exemple 1.1.1. *Black et Scholes (1973) modélisent le prix d'un actif financier par un processus* S *dont la dynamique est définie par l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dS_t &= \mu\ dt + \sigma\ dW_t \\ S_0 &= s_0, \end{cases}$$

où les coefficients de dérive μ *et de diffusion* σ *du processus* S *sont des constantes réelles et* s_0 *est une constante réelle strictement positive. Ce modèle est connu sous le nom du modèle de Black-Scholes.*

Avant de présenter la formule d'Itô qui est utilisée dans tout le mémoire, nous rappelons ce qu'est un processus d'Itô et sa variation quadratique.

Définition 1.1.3 (Processus d'Itô (Definition 4.4.3 de Shreve (2004))).
Soit $\{W_t,\ t \leq 0\}$ *un mouvement brownien adapté à la filtration* $\mathbb{F}$*. Un processus*

d'Itô est un processus stochastique X de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u \, dW_u + \int_0^t \mu_u du \tag{1.2}$$

où X_0 est une constante réelle, μ et σ sont des processus stochastiques adaptés à la filtration $\mathcal{F}$.

Sous la forme différentielle, (1.2) s'écrit :

$$dX_t = \sigma_t \, dW_t + \mu_t \, dt, \tag{1.3}$$

avec X_0 la valeur initiale du processus.

On définit ensuite la variation quadratique d'un processus d'Itô et la covariation quadratique de deux processus d'Itô.

Définition 1.1.4 (Variation quadratique et covariation quadratique (Lemme 4.4.4 de Shreve (2004))).

Soient X et Y deux processus de diffusion définis par les dynamiques

$$\begin{cases} dX_t &= \mu_1(t, X_t)\, dt + \sigma_1(t, X_t) \; dW_t^{(1)} \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dY_t &= \mu_2(t, Y_t)\, dt + \sigma_2(t, Y_t) \; dW_t^{(2)} \\ Y_0 &= y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ sont deux mouvements browniens.

On appelle variation quadratique de X, le processus noté $\langle X \rangle$ et défini par

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_1^2(u, X_u) \; du.$$

La covariation quadratique de X et Y, noté $\langle X, Y \rangle$ est définie par

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(u, X_u) \; \sigma_2(u, Y_u) \; d\left\langle W^1, W^2 \right\rangle_u .$$

Remarque 1.1.1. *Si $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ sont deux mouvements browniens corrélés de coefficient de corrélation ρ, alors la covariation quadratique de $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ est*

$$\left\langle W^1, W^2 \right\rangle_t = \int_0^t \rho_u \, du.$$

Enfin, la formule d'Itô est énoncée dans le lemme suivant.

Lemme 1.1.1 (Formule d'Itô (Théorème 4.4.6 de Shreve (2004))).
Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$, un processus d'Itô défini par (1.2), et soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que les dérivées partielles $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ et $f_{xx}(t,x)$ sont continues. Alors pour tout $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(T, X_T) = f(0, X_0) &+ \int_0^T f_t(t, X_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \, dX_t \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \, d\left\langle X \right\rangle_t . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Remarque 1.1.2. *Sous la forme différentielle, on a :*

$$\begin{aligned} df(t, X_t) = &\left(f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2 \right) \, dt \\ &+ f_x(t, X_t)\sigma_t \, dW_t. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La méthode de simulation développée par Kouritzin (2018) pour le modèle de Heston est basée sur les solutions explicite des EDS de ce modèle. Vu que nous adaptons cette méthode au modèle 3/2, nous donnons dans le théorème suivant les conditions d'existence et l'unicité des solutions des EDS. Ce théorème est basé sur le Théorème 2.5 de Karatzas et Shreve (1991).

Théorème 1.1.1 (Théorème d'Itô : Conditions d'existence et d'unicité des solutions des EDS (Théorème 2.5 de Karatzas et Shreve (1991))).
Soit $T > 0$, supposons qu'il existe $K > 0$ telle que pour tous nombres réels x, y et pour tout $t \in [0, T]$, on a

1. $\mid \mu(t,x) - \mu(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq K \mid x - y \mid$
2. $\mid \mu(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leq K(1 + \mid x \mid^2)$.

Alors il existe un unique processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ continue adapté, borné dans $\mathcal{L}^2$ et qui satisfait (1.1).

Si une équation différentielle stochastique admet une solution, cette solution peut être forte ou faible. Il est alors nécessaire de définir ces deux notions. Nous référons les définitions suivantes aux sections 5.2 et 5.3 de Karatzas et Shreve (1991).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t, \tag{1.6}$$

où $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.5 (Solution forte d'une EDS)**.**

On dit que (1.6) admet une solution forte s'il existe un processus stochastique X sur le même espace de probabilité filtré que le mouvement brownien W et qui satisfait

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_u)\ du + \int_0^t \sigma(X_u)\ dW_u.$$

Définition 1.1.6 (Solution faible d'une EDS)**.**

On dit que (1.6) admet une solution faible, si nous pouvons construire un espace de probabilité filtré $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \left\{\tilde{\mathcal{F}}_t : t \geq 0\right\}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$, deux processus stochastiques $\left\{\tilde{W}_t : t \geq 0\right\}$ et $\left\{\tilde{X}_t : t \geq 0\right\}$ sur cet espace de probabilité filtré tel que $\tilde{W}$ soit un mouvement brownien et $\tilde{X}_t$ satisfait

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \mu(\tilde{X}_u)\ du + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_u)\ d\tilde{W}_u.$$

Le processus de variance dans le modèle de Heston est le processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Ce processus est défini dans ce qui suit.

Définition 1.1.7 (Processus de Cox-Ingersoll-Ross).
Le processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus stochastique défini par l'EDS suivante :*

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}\ dW_t, \tag{1.7}$$

où a*,* b *et* σ *sont des constantes réelles et* W *est un mouvement brownien.* a *est appelé la vitesse de retour à la moyenne et* b *est la moyenne à long terme.*

Le processus de CIR est encore appelé processus racine carré (*square root process* en anglais). On peut montrer que sous les hypothèses du modèle, l'EDS (1.7) admet une solution unique positive. Cette solution est reliée à la loi de khi-deux-non-centrée. Enfin, si la valeur initiale du processus X_0 est strictement positive, sous la condition supplémentaire

$$2ab \geq \sigma^2,$$

la solution de l'EDS (1.7) est strictement positive. Cette condition est connue sous le nom de condition de Feller (Proposition 3 de Bégin *et al.* (2015)).

Dans la solution du modèle de Heston proposée par Kouritzin (2018), le processus de variance est défini comme la somme des carrés des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous parlons brièvement de ce processus dans ce paragraphe.

Définition 1.1.8 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck).
Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus stochastique défini par l'EDS suivante :*

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\ dW_t, \tag{1.8}$$

où a, b et σ sont des constantes réelles et W est un mouvement brownien. a est appelé la vitesse de retour à la moyenne et b est la moyenne à long terme.

En appliquant la formule d'Itô à la transformation $X_t^* = e^{at}X_t$, on obtient que pour tout $s < t$,

$$X_t = e^{-a(t-s)}X_s + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \int_s^t \sigma e^{-a(t-u)}\, dW_u. \tag{1.9}$$

Ainsi, $X_t \mid X_s$ suit une loi normale de moyenne

$$e^{-a(t-s)}X_s + b(1 - e^{-a(t-s)})$$

et de variance

$$\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}).$$

De plus, d'après (1.8), on déduit que la variation quadratique du processus est $\langle X \rangle_t = \sigma^2 t$.

Nous abordons dans ce paragraphe, les notions liées au changement de mesure et au Théorème de Girsanov car nous utilisons ces notions dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Définition 1.1.9 (Martingale)**.**
Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, un processus stochastique X est une martingale si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes :

- *X est adapté à la filtration $\mathbb{F}$;*
- *$\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$;*
- *$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$ pour tous t, s avec $s < t$.*

La dernière condition appelée condition martingale implique que $\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_0\right] = X_0$ où X_0 est la valeur initiale du processus X. De plus, pour $s > 0$, si $\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} M_t^s\right] < \infty$, alors M est une L^s-martingale.

Théorème 1.1.2 (Changement de mesure (Théorème 1.6.1, Shreve (2004))). *Soient l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *et* Z *une variable aléatoire strictement positive presque sûrement avec* $\mathbb{E}[Z] = 1$. *Pour tout* $A \in \mathcal{F}$, *on définit*

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(w) \mathrm{d}\mathbb{P}(w). \tag{1.10}$$

Alors $\tilde{\mathbb{P}}$ *est une mesure de probabilité. Par conséquent, si* X *est une variable aléatoire strictement positive alors*

$$\tilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ], \tag{1.11}$$

où $\tilde{\mathbb{E}}$ *est l'espérance sous la mesure* $\tilde{\mathbb{P}}$. *De plus si* Z *est strictement positive presque sûrement, nous avons pour toute variable aléatoire* Y *strictement positive presque sûrement*

$$\mathbb{E}[Y] = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{Y}{Z}\right].$$

Nous définissons la notion de mesures de probabilité équivalentes.

Définition 1.1.10 (Mesures équivalentes (Définition 1.6.3, Shreve (2004))). *Soient* Ω *un ensemble non vide et* $\mathcal{F}$ *une tribu sur* Ω. *Deux mesures de probabilités* $\mathbb{P}$ *et* $\tilde{\mathbb{P}}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *sont équivalentes si*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0.$$

Avant d'énoncer le théorème de Radon-Nikodym, nous définissons d'abord la dérivée de Radon-Nikodym.

Définition 1.1.11 (Dérivée de Radon-Nikodym (Définition 1.6.5, Shreve (2004))). *Soient l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\tilde{\mathbb{P}}$ *une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *et* Z *une variable aléatoire strictement positive presque sûrement vérifiant (1.10). Alors* Z *est la dérivée de Radon-Nikodym de* $\tilde{\mathbb{P}}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *et on écrit*

$$Z = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}.$$

Nous énonçons maintenant le théorème de Radon-Nikodym.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Radon-Nikodym (Théorème 1.6.7, Shreve (2004))).
Soient $\mathbb{P}$ et $\tilde{\mathbb{P}}$ deux mesures de probabilités équivalentes définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors il existe une variable aléatoire Z strictement positive presque sûrement tel que $\mathbb{E}[Z] = 1$ et

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(w)\mathrm{d}\mathbb{P}(w), \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}.$$

Dans ce paragraphe, nous définissons le processus de dérivée de Radon-Nikodym afin d'énoncer le théorème de Girsanov. Nous considérons alors dans ce paragraphe, l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et fixons $T > 0$. La définition suivante est basée sur la section 5.2 de Shreve (2004)

Définition 1.1.12 (Processus de Radon-Nikodym (Section 5.2 de Shreve (2004))).
Soient Z une variable aléatoire strictement positive presque sûrement vérifiant $\mathbb{E}[Z] = 1$ et définissons $\tilde{\mathbb{P}}$ par (1.10). Le processus de dérivée de Radon-Nikodym est défini par

$$Z_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

On peut montrer que le processus de Radon-Nikodym est une martingale sur $[0, T]$. Nous énonçons les deux lemmes suivants avant d'énoncer le théorème de Girsanov.

Lemme 1.1.2 (Lemme 5.2.1 de Shreve (2004))).
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq t \leq T$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_t -$ mesurable. Alors

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \mathbb{E}[YZ_t],$$

où $\tilde{\mathbb{E}}$ est l'espérance sous la mesure $\tilde{\mathbb{P}}$.

Lemme 1.1.3 (Lemme 5.2.2 Shreve (2004))**.**
Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t \leq T$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_t -$ mesurable. Alors

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[Y|\mathcal{F}_s\right] = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}\left[YZ_t|\mathcal{F}_s\right].$$

Enfin, nous énonçons le théorème de Girsanov.

Théorème 1.1.4 (Théorème de Girsanov (Théorème 5.2.3 Shreve (2004)))**.**
Soit $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Soit $\{\Theta_t, 0 \leq t \leq T\}$ un processus adapté à la filtration $\mathbb{F}$. Définissons

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Theta_u \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 \mathrm{d}u\right\},$$
$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_u \mathrm{d}u,$$

et supposons que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \Theta_u^2 Z_u \mathrm{d}u\right] < \infty.$$

En posant $Z = Z_T$, alors $\mathbb{E}\left[Z\right] = 1$ et sous la mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ définie par (1.10), le processus $\tilde{W}$ est un mouvement brownien.

1.2 Notions de base en mathématique financière

Dans cette section, nous définissons les concepts de la mathématique financière liés à la théorie d'évaluation sous la mesure neutre au risque.

1.2.1 Tarification d'options dans un marché sans arbitrage

On se restreint au cas où les actifs transigés sur le marché sont modélisés par des processus diffusifs en temps continu.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Considérons le modèle de marché en temps continu constitué de N actifs risqués dont les processus de prix sont S_1, S_2,..., S_N et d'un actif sans risque dont le processus de prix est S_0.
Supposons que S_1, S_2,...,S_N sont des processus de diffusions définis pour $i = 1, 2, ..., N$ par

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(\mu_i(t, S_i(t))\ dt + \sigma_i(t, S_i(t))\ dW_i(t)\right),$$

où μ_i, σ_i sont des fonctions de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec σ_i différent de 0 presque sûrement pour tout t et où $W = (W_1, W_2, ..., W_N)$ est un vecteur de mouvements browniens. Les fonctions μ_i et σ_i sont respectivement les coefficients de dérive et de diffusion des processus S_i pour $i = 1, 2, .., N$.
Supposons aussi que S_0 est défini par $dS_0(t) = S_0(t)r(t)\ dt$ où $r(t)$ est le taux de rendement sans risque et fixons $T \in \mathbb{R}$ comme l'échéance du marché. Nous supposons par la suite que $r(t) = r,\ \forall\ t \leq T$.
Soit $h(t) = [h_0(t), h_1(t), h_2(t), ..., h_N(t)]$ où h_i représente le nombre de parts de l'actif i dans le portefeuille et posons $h_s(t) = [h_1(t), h_2(t), ..., h_N(t)]$ de sorte que $h(t) = [h_0(t), h_s(t)]$. Une stratégie d'investissement ou portefeuille est un processus $\{h(t); t > 0\}$ adapté à la filtration. Pour une stratégie h, la valeur du portefeuille $V(t, h)$ est définie par

$$V(t, h) = \sum_{i=0}^{N} h_i(t) S_i(t).$$

Définition 1.2.1 (Stratégies admissibles (Définition 10.2, Björk (2009))).
Un processus adapté $h_s = [h_1, h_2, ..., h_N]$ est admissible s'il existe un nombre réel positif α tel que

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(u) dS_i(u) \geq -\alpha,\ \textit{pour tout } t \in [0, T]\,. \tag{1.12}$$

Le processus $h(t) = [h_0(t), h_s(t)]$ est appelé portefeuille admissible si le processus

h_s est admissible. Nous définissons maintenant la notion de portefeuille autofinancé.

Définition 1.2.2 (Portefeuille autofinancé (Définition 10.2, Björk (2009))). *Soit $V(0,h)$ la valeur initiale d'un portefeuille. Un portefeuille admissible $h = [h_0, h_1, h_2, ..., h_N]$ est dit autofinancé s'il satisfait*

$$V(t,h) = h_0(t)S_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(u)dS_i(u), \tag{1.13}$$

c'est-à-dire si

$$dV(t,h) = h_0(t)dS_0(t) + \sum_{i=1}^{N} h_i(t)dS_i(t).$$

En général la dynamique d'un portefeuille (sans la condition d'autofinancement) est

$$dV(t,h) = \sum_{i=0}^{N} \left(h_i(t)dS_i(t) + S_i(t)dh_i(t)\right). \tag{1.14}$$

Remarque 1.2.1. *Le portefeuille autofinancé interdit d'encaisser le profit ou d'injecter de l'argent dans le portefeuille.*

Le lemme suivant énonce les conditions d'existence d'un portefeuille autofinancé

Lemme 1.2.1 (Existence de portefeuille autofinancé (Lemme 10.3, Björk (2009))).

Pour tout processus adapté h_s satisfaisant la condition d'admissibilité (1.12) et pour tout nombre réel x, il existe un unique processus adapté h_0 tel que

- *Le portefeuille h défini par $h = [h_0, h_s]$ est autofinancé,*
- *La valeur du portefeuille autofinancé est donné par*

$$V(t,h) = x + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(u)dS_i(u). \tag{1.15}$$

Nous pouvons maintenant définir la notion de mesure martingale.

Définition 1.2.3 (Mesure martingale (Définition 10.4, Björk (2009))).
Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ est appelée une mesure martingale (locale) équivalente si elle satisfait les propriétés suivantes

- *$\mathbb{Q}$ est équivalente à la mesure objective $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$,*
- *Les processus de prix actualisés S_0, S_1, S_2,...,S_N sont des martingales (locales) sous la mesure $\mathbb{Q}$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$.*

Avant d'énoncer le premier théorème fondamental de la théorie l'évaluation sous la mesure martingale, il est nécessaire de comprendre la notion d'arbitrage.

Définition 1.2.4 (Arbitrage (Définition 10.2, Björk (2009))).
Une stratégie autofinancée h est un arbitrage si $V(0, h) = 0$, $\mathbb{P}(V(T, h) \geq 0) = 1$ et $\mathbb{P}(V(T, h) > 0) > 0$.

En d'autres termes, on dit qu'il y a possibilité d'arbitrage si à partir d'un investissement nul, il y a possibilité de gagner de l'argent sans aucun risque.

Théorème 1.2.1 (Premier théorème fondamental (Théorème 10.5, Björk (2009))).
Un modèle de marché est essentiellement sans arbitrage si et seulement si il existe une mesure martingale (locale) $\mathbb{Q}$.

Remarque 1.2.2. *Il faut noter qu'il peut exister une infinité de mesures martingales (locales) équivalentes. Ces mesures martingales (locales) équivalentes sont aussi appelées les mesures neutre au risque. Le coefficient de dérive des processus de prix des actifs risqués sous ces mesures est égal au taux de rendement sans risque r. Dans la pratique, pour choisir la mesure neutre au risque sous laquelle on va tarifer les produits dérivés, on tient compte des prix des options transigées dans le marché pour compléter le marché (se couvrir du risque de volatilité). La mesure de probabilité qui est donc identifiée est celle qui est utilisée pour la tarification des autres produits dérivés.*

Dans la suite de ce mémoire, nous supposons que le modèle de marché est sans arbitrage et nous considérons l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}$ est une mesure neutre au risque.
Le lemme suivant, conséquence du Théorème 1.2.1, révèle l'importance de ce théorème. Cette conséquence est basée sur la section 10.2.1 de Björk (2009).

Lemme 1.2.2 (Conséquence du théorème 1.2.1)**.**
Dans un marché sans arbitrage, si le processus h est borné dans $\mathcal{L}^2$, alors le processus de valeur actualisée du portefeuille $\{V(t,h); t \geq 0\}$ est une martingale (locale) sous la mesure $\mathbb{Q}$. Ainsi, la valeur initiale du portefeuille est donné par

$$V(0,h) = e^{-rt}\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[V(t,h)\right], \textit{pour tout } t \in [0,T]\,. \tag{1.16}$$

Il faut noter que le lemme 1.2.2 est fondamental dans la théorie de l'évaluation sous la mesure neutre au risque.

Vu que nous tarifions des options, il s'avère nécessaire de définir la notion d'options. Nous appelons actif sous-jacent tout actif de base transigé sur les marchés financiers dont la valeur future est incertaine. C'est le cas par exemple d'un actif risqué S, dont la valeur S_t au temps $t \geq 0$ est modélisée par un processus stochastique. À partir des actifs sous-jacent, on construit d'autres actifs financiers appelés produits dérivés.

Définition 1.2.5 (Droit conditionnel ou produit dérivé)**.**
Un produit dérivé est un actif financier dont le paiement à la maturité dépend de la valeur d'un actif sous-jacent ou de la réalisation d'un événement quelconque sous-jacent. En termes mathématiques, un droit conditionnel est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable.

Si C_t est le prix d'un droit conditionnel au temps t, alors $\{C_t; t \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Exemple 1.2.1 (Option d'achat européenne)**.**
Une option d'achat européenne d'échéance T et de prix d'exercice K est un contrat qui donne à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter à l'échéance T un actif sous-jacent à un prix K fixé d'avance. Si S_T est la valeur de l'actif sous-jacent à l'échéance T, alors la valeur au temps T de l'option d'achat européenne est

$$C_T = (S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{1.17}$$

D'après le lemme (1.2.2), la valeur au temps $t = 0$ de l'option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice K est

$$C_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right].$$

Dans les modèles à volatilité stochastique, beaucoup de produits dérivés n'ont pas de solutions analytiques car il est souvent difficile de calculer l'espérance mathématique. On fait alors recours à la simulation Monte Carlo. Dans ce qui suit, nous parlons de l'estimateur Monte Carlo.

1.2.2 Estimateur Monte Carlo

Cette section fait référence à la section 1.1 de Ameur (2019).
On considère un système caractérisé par d variables d'entrées X_1, X_2,..., X_d, d'une fonction de transformation $\mathcal{P}$ et d'une variable de sortie Y telle que
$Y = \mathcal{P}(X_1, X_2, ..., X_d)$. Ce système est dit stochastique si les variables d'entrées et la variable de sortie sont aléatoires. Dans un système stochastique, on suppose que la fonction de densité jointe des variables d'entrées ainsi que la fonction de transformation sont connues. Par contre, la fonction de densité de la variable de sortie est souvent inconnue. On définit les paramètres de performance d'un système stochastique comme étant les caractéristiques de la distribution de la variable

de sortie Y. Par exemple l'espérance de Y, l'écart type de Y et les quantiles de Y sont des paramètres de performance.
L'objectif dans un système stochastique est l'estimation des paramètres de performance bien que ces derniers n'admettent pas souvent de formules fermées. La simulation Monte Carlo permet d'estimer les paramètres de performance d'un système stochastique. Le principe de la simulation Monte Carlo consiste à produire (simuler) un échantillon aléatoire de la variable de sortie Y et ensuite d'estimer les paramètres de la population par leur contreparties dans l'échantillon.
Supposons que l'on sait simuler la variable Y et que le paramètre de performance à estimer est $\mu_Y = \mathbb{E}\left[h(Y)\right]$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\mathbb{E}\left[h(Y)\right] < \infty$. L'estimateur Monte Carlo $\hat{\mu}_Y$ de μ_Y est donné par

$$\mu_Y \approx \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(Y_i\right), \tag{1.18}$$

où $Y_i = \mathcal{P}\left(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, ..., X_d^{(i)}\right)$ pour $i = 1, 2, .., N$ avec N la taille de l'échantillon simulé.

Remarque 1.2.3 (Section 1.1 de Ameur (2019))**.**
La convergence des estimateurs Monte Carlo vers leur cibles est justifié par la loi des grands nombres et par le théorème central limite.

Pour plus de détails sur la loi des grands nombres et le théorème central limite, se référer aux Sections 22 et 27 de Billingsley (2008).

1.2.3 Modèles à volatilité stochastique

1.2.3.1 Qu'est-ce que la volatilité stochastique ?

La volatilité mesure l'amplitude des variations du cours d'un actif, à la hausse comme à la baisse sur le marché pendant un temps donné. Ces variations ont

tendance à rester stables et connaissent des fluctuations moins brusques dans certains marchés à certaines périodes. Pour certains actifs financiers, on remarque des changements de prix extrêmement rapides et un volume de transactions élevé. Au vu de cela, il est commode de modéliser la volatilité comme un processus aléatoire. Pour démontrer l'utilité de la modélisation stochastique de la volatilité, Gatheral (2006) effectue les tests de normalité sur les log-rendements journaliers de l'indice SPX. L'auteur rejette l'hypothèse de la normalité des données et conclut donc que la volatilité n'est pas constante. De plus, l'auteur montre que les options avec différents prix d'exercice et maturité ont des paramètres de volatilité différents dans le modèle de Black-Scholes, c'est-à-dire qu'il observe ce qu'on appelle « le sourire de la volatilité» (Gatheral, 2006). Enfin Wilmott (2013) fait les estimations sur plusieurs périodes de temps de la volatilité de l'indice Dow Jones en utilisant des moyennes pondérées des variations quotidiennes de l'indice. Il remarque non seulement que la volatilité n'est ni constante, ni prévisible mais aussi que chaque estimation donne une valeur différente.

La volatilité est souvent calculée sur la base de l'écart-type standard des rendements historiques (volatilité historique), ou en mesurant les mouvements de cours d'un produit dérivé par rapport aux mouvements de son indice sous-jacent en utilisant le modèle de Black-Scholes (volatilité implicite). Il existe d'autres types de volatilités à savoir la volatilité locale (ou conditionnelle) et la volatilité instantanée. Cette dernière est celle qui est modélisée par plusieurs modèles de volatilité stochastique.

Enfin, la volatilité peut être une mesure du risque de marché. En effet, plus le prix de l'actif est volatile, plus l'investisseur peut beaucoup gagner ou beaucoup perdre. Son investissement est donc risqué. Ainsi, un investisseur qui décide d'investir dans un tel marché demande d'être rémunéré pour le risque qu'il prend. Ce rendement additionnel est alors appelé prime de risque de marché.

1.2.3.2 Présentation des modèles à volatilité stochastique

Une analyse approfondie des hypothèses du modèle de Black-Scholes a ouvert un domaine de recherche pour des modèles plus complexes et plus performants qui décrivent de manière plus réaliste l'évolution des marchés financiers. Contrairement aux modèles à volatilité constante, les modèles à volatilité stochastique supposent que la volatilité est aussi un processus stochastique. Ainsi, un modèle à volatilité stochastique est défini par un processus stochastique à deux dimensions. La première dimension décrit la dynamique de l'actif sous-jacent et la seconde dimension décrit la dynamique de la volatilité.

Soient l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ le processus de l'actif sous-jacent et $\{V_t\}_{t\in[0,T]}$ le processus de variance. Un modèle à volatilité stochastique est caractérisé par la dérive de l'actif sous-jacent $r - \delta$, la volatilité de la variance η, des fonctions mesurables α, β et deux mouvements browniens corrélés Z, W de coefficient de corrélation ρ. De façon générale, sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, la dynamique d'un modèle à volatilité stochastique est définie comme suit :

$$\begin{cases} dS_t &= (r-\delta)\, S_t\, dt + \sqrt{V_t} S_t\, dZ_t \\ dV_t &= \alpha(S_t, V_t, t)dt + \beta(S_t, V_t, t)\sqrt{V_t}\, dW_t \end{cases} \tag{1.19}$$

avec $r \geq 0$ le taux de rendement sans risque, $\delta \geq 0$ est le taux de dividende, $\rho \in [-1, 1]$, $\langle dZ, dW \rangle_t = \rho\, dt$ et

$$\alpha, \beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times [0, T] \to \mathbb{R}.$$

1.2.3.3 Formule analytique des modèles pour le prix d'une option européenne

L'approche neutre au risque pour la tarification des options utilisant le théorème de Feynman-Kac (Karatzas et Shreve, 1991) nécessite la fonction de densité neutre au risque du prix de l'actif sous-jacent à T. Cette fonction n'est pas toujours

facile à obtenir, mais sa fonction caractéristique existe toujours. La fonction de densité est souvent obtenue par la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique ; d'où l'utilisation de la technique de transformée de Fourier dans la tarification des options européennes dans les modèles à volatilité stochastique. Cette technique est utilisée dans Heston (1993) pour la dérivation du prix des options européennes dans le modèle de Heston, présenté plus tard dans ce chapitre. Dans la même logique, Carr et Madan (1999) ont introduit la technique dite de transformée de Fourier rapide pour les modèles dont la fonction caractéristique du processus neutre au risque du prix de l'actif sous-jacent est connu sous forme fermée. L'extension de cette méthode se trouve aussi dans Lewis (2000). Enfin, dans l'approche neutre au risque, Lewis (2001) applique la transformée de Fourier inverse à la fonction caractéristique du log-prix standardisé à maturité afin de déterminer le prix d'une option d'achat européenne dans les modèles à volatilité stochastique. Notre objectif dans ce travail n'est pas de dériver cette formule, mais d'utiliser le résultat.

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ et considérons une option d'achat européenne de maturité T, de prix d'exercice $K \geq 0$. Le payoff C_T de cette option à la maturité est donné par (1.17). Lewis (2001) montre que dans le modèle défini par (1.19), le prix de cette option au temps $t = 0$ est donné par :

$$C\left(S_0, K, T\right) = S_0 e^{-\delta T} - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}(r+\delta)T}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Re\left[e^{iuk}\phi_T\left(u - \frac{i}{2}\right)\right]}{u^2 + \frac{1}{4}} du, \quad (1.20)$$

avec r le taux sans risque, δ le taux de dividende, S_0 la valeur initiale du sous-jacent, $k = \log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \delta)\, T$ et ϕ_T la fonction caractéristique du log-prix standardisé à maturité. Cette fonction caractéristique dépend du modèle à volatilité stochastique considéré.

Remarque 1.2.4. *Dans Carr et Sun (2007), le processus du log-prix standardisé X est défini par $X_t = \log\left(\frac{F_t}{F_0}\right)$ où F est le processus neutre au risque pour le*

prix à terme du sous-jacent. La dynamique du processus F est obtenue en posant $r - \delta = 0$ dans (1.19).

Le prix d'une option de vente européenne (*Put* en anglais) peut-être obtenue par la relation de parité *Call-Put* définie par

$$C_0^{Call} + Ke^{-rT} = C_0^{Put} + S_0 e^{-\delta T}.$$

Dans la suite, on pose $\delta = 0$.

1.2.4 Le modèle de Heston

Le modèle de Heston est le modèle à volatilité stochastique le plus populaire (Heston, 1993). Il est alors le modèle de base des modèles à volatilité stochastique. On ne saurait étudier les modèles à volatilité stochastique sans parler de ce modèle. Dans cette section nous présentons brièvement le modèle de Heston.

1.2.4.1 Présentation du modèle sous la mesure $\mathbb{Q}$

Nous présentons directement le modèle sous la mesure neutre au risque car c'est la seule qui est nécessaire pour la tarification. Ainsi, sous une mesure neutre au risque choisie pour la tarification, dénotée $\mathbb{Q}$, le modèle de Heston est défini par la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \, dZ_t \\ dV_t &= \lambda \left(\bar{V} - V_t\right) dt + \eta \sqrt{V_t} \, dW_t \end{cases} \tag{1.21}$$

avec $\langle dZ, dW \rangle_t = \rho \, dt$, r le taux sans risque et (S_0, V_0) les valeurs initiales des deux processus. r, S_0, V_0, $\bar{V}$ et λ sont des nombres réels positifs, $\eta \neq 0$ et $\rho \in [-1, 1]$. L'actif sous-jacent S_t est un processus de diffusion de coefficient de dérive rS_t et de coefficient de diffusion $\sqrt{V_t} S_t$.

La variance V_t suit la dynamique du processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dont le coefficient λ est la vitesse de retour à la moyenne, $\bar{V}$ est la moyenne à long terme et η est la volatilité de la variance. Il faut noter que le modèle admet une unique solution dont on parlera dans le chapitre 3.

1.2.4.2 Formule analytique pour le prix d'une option européenne

Nous donnons ici la formule analytique de Heston pour le prix d'une option européenne.

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ et considérons une option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice $K \geq 0$. Le payoff C_T de cette option à la maturité est donné par (1.17). Heston (1993) montre que dans le modèle de Heston défini par la dynamique (1.21), le prix C_t de cette option au temps $t < T$ est fonction de la durée restante $\tau = T - t$, du prix d'exercice K, de la valeur au temps t de l'actif sous-jacent S_t et de la valeur au temps t de la variance V_t c'est-à-dire

$$C_t = C(x, V_t, \tau) = K \left\{ e^x P_1(x, V_t, \tau) - P_0(x, V_t, \tau) \right\}, \tag{1.22}$$

avec $x = \log\left(\frac{S_t}{K}\right)$ et pour $j \in \{0, 1\}$,

$$P_j(x, V_t, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left\{ \frac{\exp\left\{C_j(u, \tau) + D_j(u, \tau) V_t + iux\right\}}{iu} \right\} du, \tag{1.23}$$

où $\Re$ est la partie réelle d'un nombre complexe, i le nombre imaginaire pur et

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{u^2}{2} - \frac{iu}{2} + iju, \\
\beta &= \lambda - \rho\eta j - \rho\eta iu, \\
\gamma &= \frac{\eta^2}{2}, \\
d &= \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \text{ tel que } \Im(d) \geq 0,
\end{aligned}$$

avec $\Im(d)$ la partie immaginaire du nombre complexe d,

$$\begin{aligned}
r_{\pm} &= \frac{\beta \pm d}{\eta^2}, \\
g &= \frac{r_-}{r_+}, \\
D_j(u,\tau) &= r_- \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}}, \\
C_j(u,\tau) &= \lambda \left\{ r_-\tau - \frac{2}{\eta^2} \log\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

1.2.5 Le modèle 3/2

Le modèle 3/2 est un modèle à volatilité stochastique non affine ayant la propriété de retour à la moyenne. Le modèle de Heston et le modèle 3/2 sont des cas particuliers du modèle introduit par Bakshi *et al.* (1997) dont la dynamique du processus de variance est donnée par :

$$dV_t = \left(\alpha_0 + \alpha_1 V_t + \alpha_2 V_t^2 + \alpha_3 V_t^{-1}\right) dt + \beta_1 V_t^{\beta_2}\, dW_t, \tag{1.24}$$

où α_0, α_1, α_2, α_3 sont des nombres réels et β_1, β_2 des nombres réels strictement positifs.

1.2.5.1 Présentation du modèle sous la mesure $\mathbb{Q}$

Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, la dynamique du modèle 3/2 est donnée par

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \, dZ_t \\ dV_t &= \kappa V_t(\bar{V} - V_t)dt + \eta V_t^{\frac{3}{2}} \, dW_t \end{cases} \tag{1.25}$$

avec $S_0 > 0$, $V_0 > 0$ des valeurs initiales des deux processus. r est le taux de rendement moyen sans risque, Z et W sont deux mouvements browniens standards corrélés de coefficient de corrélation $\rho \in [-1, 1]$. κ, $\bar{V}$ et η sont des nombres réels strictement positifs.

Remarque 1.2.5. *En identifiant la dynamique du processus de variance V définie dans (1.25) à celle définie dans (1.24), on constate que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \kappa\bar{V}$, $\alpha_2 = -\kappa$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = \eta$, et $\beta_2 = \dfrac{3}{2}$. C'est de cette dernière égalité que vient la spécification 3/2 donnée au modèle.*

En utilisant la décomposition de Cholesky, on a $dZ_t = \rho \, dW_t + \sqrt{1-\rho^2} \, dB_t$ où W et B sont deux mouvements browniens standards indépendants. Ainsi (1.25) devient :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho \, dW_t + \sqrt{1-\rho^2} \, dB_t\right) \\ dV_t &= \kappa V_t(\bar{V} - V_t)dt + \eta V_t^{\frac{3}{2}} \, dW_t. \end{cases} \tag{1.26}$$

Le processus de la variance peut s'écrire sous forme d'un produit du processus racine carré et de V_t comme suit :

$$dV_t = V_t \left\{ \kappa(\bar{V} - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t} \, dW_t \right\}.$$

Aussi, en posant $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$ et en appliquant le lemme d'Itô au processus U_t, on obtient la dynamique suivante :

$$dU_t = \kappa\bar{V} \left(\frac{\kappa + \eta^2}{\kappa\bar{V}} - U_t \right) dt - \eta\sqrt{U_t} \, dW_t. \tag{1.27}$$

Cette dynamique est celle d'un processus CIR. Ainsi le processus $\{U_t\}_{t>0}$ est un processus CIR $\left(\kappa\bar{V}, \frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}}, -\eta\right)$ c'est-à-dire que la vitesse de retour à la moyenne est $\kappa\bar{V}$, la moyenne à long terme est $\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}}$ et la volatilité de la variance est $-\eta$. De ce qui précède, nous pouvons réécrire la dynamique du modèle 3/2 comme suit :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{U_t^{-1}} S_t \left(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t\right) \\ dU_t &= \kappa\bar{V}\left(\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}} - U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t}\, dW_t. \end{cases} \tag{1.28}$$

1.2.5.2 Formule analytique pour le prix d'une option européenne

À partir de la formule (1.20), pour obtenir le prix de l'option d'achat européenne dans le modèle 3/2, il est alors nécessaire de déterminer ϕ_T, la fonction caractéristique du log-prix standardisé à la maturité. Dans Lewis (2000) la fonction caractéristique du processus de variance dans le modèle 3/2 est donnée. De plus, dans Carr et Sun (2007) (théorème 3), conditionnellement à X_t et V_t, la transformée de Fourier-Laplace conjointe de X_T et de $\langle X\rangle_T - \langle X\rangle_t$ est connue sous forme fermée. À partir du théorème 3 de Carr et Sun (2007), on obtient la transformée de Fourier du log-prix standardisé à la maturité X_T en posant $s = 0$ et $t = 0$. Enfin, la fonction caractéristique du log-prix standardisé à maturité est donnée par

$$\phi_T(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX_T}\right] = e^{iuX_0}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{2}{\eta^2 y(0,V_0)}\right)^{\alpha} M\left(\alpha,\gamma,-\frac{2}{\eta^2 y(0,V_0)}\right) \tag{1.29}$$

où

$$
\begin{aligned}
y(0,V_0) &= \frac{V_0\left(e^{\kappa\bar{V}T}-1\right)}{\kappa\bar{V}},\\
\alpha &= -\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\eta^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\eta^2}\right)^2+\frac{2q}{\eta^2}},\\
\gamma &= 2\left(\alpha+1-\frac{p}{\eta^2}\right),\\
p &= -\kappa+i\eta\rho u,\\
q &= \frac{iu}{2}+\frac{u^2}{2},
\end{aligned}
$$

avec i le nombre complexe imaginaire pur et $M(\alpha,\gamma,z)$ la fonction confluente hypergéométrique définie par :

$$
M(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\ z^n}{(\gamma)_n\ n!},
$$

où

$$
\begin{aligned}
(\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1),\\
(\gamma)_n &= \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+n-1).
\end{aligned}
$$

En conclusion, la valeur au temps $t=0$ d'une option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice K dans le modèle 3/2 est donnée par (1.20) avec ϕ_T défini par (1.29).

1.3 Pourquoi le modèle 3/2 ?

Dans la littérature, les applications du modèle 3/2 sont nombreuses. En effet, Ahn et Gao (1999) utilisent le modèle pour la modélisation de taux d'intérêt à court terme. Lewis (2000) donne les détails sur le modèle en ce qui concerne les options sur les actions. Ensuite, Carr et Sun (2007) utilisent le modèle 3/2 pour tarifer les swaps de variance. Drimus (2012) l'utilise pour la tarification des

options sur la variance réalisée. De plus Koleva (2012) applique la transformation de Fourier rapide (FFT) au modèle 3/2 pour la tarification des options. Enfin, nous rappelons que le modèle 3/2 est le modèle d'intérêt du mémoire, pour lequel nous développons des algorithmes de simulations. Quels sont alors les motivations du modèle 3/2 ? Nous essayerons d'apporter une réponse à cette question à travers la littérature. Mais avant, il est important de donner quelques limitations du modèle de Heston vu le lien entre les deux modèles.

1.3.1 Limitations du modèle de Heston

L'équation différentielle stochastique du processus de variance dans le modèle de Heston admet une unique solution forte positive (Karatzas et Shreve (1991), ch 5). Le processus de variance prend donc des valeurs positives c'est-à-dire $V_t \geq 0$ pour tout t. De plus le processus prend des valeurs strictement positives si et seulement si la condition de Feller est respectée (Karatzas et Shreve (1991), ch 5). Par contre, dans la discrétisation, le processus de variance peut prendre des valeurs négatives (Bégin *et al.*, 2015). Aussi, sous la mesure neutre au risque, plusieurs calibrations du modèle de Heston au prix du marché font que la variance V_t prend des valeurs très près de zéro (Bakshi *et al.*, 1997). Ainsi, les trajectoires de la variance instantanée dans le modèle de Heston sont décalées vers zéro (Drimus, 2012).

Vue ces limitations, le modèle 3/2 est une alternative intéressante. Dans la section suivante, nous en parlerons d'avantage.

1.3.2 Motivation du modèle 3/2

D'après (1.24), la dynamique du modèle introduit par Bakshi *et al.* (1997) sous la mesure physique $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\begin{cases} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t \\ dV_t &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 V_t + \alpha_2 V_t^2 + \alpha_3 V_t^{-1}\right) dt + \beta_1 V_t^{\beta_2} dW_t. \end{cases} \tag{1.30}$$

avec $S_0 > 0$ et $V_0 > 0$ les valeurs initiales des deux processus. α_0, α_1, α_2,α_3 sont des nombres réels, β_1 , β_2 des nombres réels strictement positifs et $\mu > 0$.

Bakshi *et al.* (1997) ont effectué une étude économétrique basée sur le carré de l'indice VIX comme approximation de la variance dans le modèle défini par (1.30). Cette étude leur a permis de découvrir que $\beta_2 = 1.3$. Ils rejettent alors l'hypothèse que $\beta_2 \leq 1$. Le fait que $\beta_2 = 1.3$ a motivé la spécification 3/2 c'est-à-dire $\beta_2 = \dfrac{3}{2}$. De plus, les auteurs ont mis en évidence que, dans la spécification de la dérive, le terme $\alpha_2 V_t^2$ était plus significatif que le terme $\alpha_1 V_t$, ce qui concorde encore avec le cadre 3/2.

Ensuite, Carr et Sun (2007) en résumant les travaux antérieurs sur la puissance de V_t dans la dérive du processus de la variance, aboutissent à la conclusion qu'un modèle à structure non affine fournit des résultats qui sont non seulement cohérents avec les données du monde réel dans certains cas, mais qui sont aussi plus précis que le processus CIR. Ils rejettent alors l'hypothèse que $\beta_2 = \dfrac{1}{2}$ (spécification racine carré).

Dans la même logique, Bakshi *et al.* (1997) et Drimus (2012) indiquent que dans la simulation (par la discrétisation des EDS), les trajectoires de la variance instantanée dans le modèle de Heston peuvent aller en dessous de zéro, mais ce problème est résolu en imposant $V_t = 0$ lorsque $V_t < 0$ et en utilisant la propriété de retour à la moyenne. Ce qui permet d'obtenir une simulation des trajectoires dans le

modèle de Heston. Drimus (2012) indique que la volatilité modélisée par la dynamique 3/2 permet des variations plus importantes par rapport à la moyenne à long terme. Cela s'explique par la puissance de V_t dans le coefficient de diffusion et dans la vitesse de retour à la moyenne. Ces différences entre les trajectoires de la variance des deux modèles favorisent le modèle 3/2 en raison de sa capacité à capter des écarts plus importants pour la variance.
Enfin, tout comme le modèle de Heston, le modèle 3/2 est structuré en tenant compte des problèmes du modèle de Black-Scholes. En effet, d'après (1.21) et (1.25), la vitesse de retour à la moyenne donnée par λ dans le modèle de Heston et par κV_t dans le modèle 3/2, intègre l'effet de regroupement de la volatilité. La volatilité de la variance η dans le modèle de Heston et ηV_t dans le modèle de 3/2 impose que les log-rendements ne sont plus normalement distribués. La valeur (souvent négative) du paramètre de corrélation ρ capture l'effet de levier.

Remarque 1.3.1. *On appelle "effet de levier" le phénomène selon lequel des rendements élevés sur le prix de l'actif sont habituellement observés simultanément à des taux de volatilité faibles. De façon inverse, des rendements faibles, voire négatifs, sont souvent observés en même temps que des niveaux de volatilité élevés.*

Dans les modèles à volatilité stochastique, ce phénomène se traduit souvent par une corrélation négative entre le mouvement brownien de l'EDS du prix de l'actif et celui de l'EDS de la volatilité.

1.3.3 Conditions imposées par le modèle 3/2

La vitesse de retour à la moyenne dans le modèle 3/2 est donnée par κV_t. Puisque le processus de variance $\{V_t\}_{t\geq 0}$ du modèle 3/2 est positif, alors κV_t doit être positif et donc $\kappa \geq 0$.
Le processus inverse de la variance $\left\{U_t = \dfrac{1}{V_t}\right\}_{t\geq 0}$ avec $V_t > 0$ dans le modèle

3/2 est un processus CIR $\left(\kappa\bar{V}, \frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}}, -\eta\right)$, alors la condition de Feller pour le processus U_t est donnée par

$$2\kappa\bar{V}\left(\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}}\right) \geq \eta^2.$$

Cette condition est équivalente à $\kappa \geq -\frac{\eta^2}{2}$. Vu que $\kappa \geq 0$ alors la condition de Feller est respectée pour le processus U_t. Ainsi, $\mathbb{P}(U_t > 0) = 1$. Par conséquent, le processus $\{V_t\}_{t\geq 0}$ ne va pas tendre vers infini.

CHAPITRE II

ÉTUDE COMPARATIVE DE QUELQUES ALGORITHMES DE SIMULATION DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

En finance, les équations différentielles stochastiques peuvent être utilisées pour décrire le comportement des actifs sous-jacents ainsi que celui des paramètres de certains modèles financiers. Ainsi, la tarification des produits financiers requiert la résolution de ces équations différentielles stochastiques.

Outre le modèle de Black-Scholes-Merton, qui a des solutions analytiques pour plusieurs droits contingents, il n'existe pas de solution analytique pour beaucoup de produits dérivés dans le cadre des modèles à volatilité stochastique. Pour le modèle de Heston il existe une solution quasi-analytique pour les options d'achat et de vente européennes, ce qui n'est pas le cas par exemple des options exotiques. De plus, les options avec payoffs plus compliqués (options exotiques) sont plus difficile à tarifer sous forme fermée, même dans les modèles simples. Ainsi, pour tarifer les produits dérivés, la technique de simulation Monte Carlo reste souvent la seule alternative.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de simulation du modèle de Heston. Ces méthodes de simulation sont basées soit sur la discrétisation des équations différentielles stochastiques (EDS)(Euler et Milstein), soit sur la «méthode exacte» de Broadie et Kaya (2006). Bien que l'algorithme de Broadie-Kaya soit sans biais par construction, sa complexité et son manque de vitesse limitent sou-

vent son utilisation pratique (Andersen, 2008). Heureusement, il existe plusieurs variantes de cette méthode qui sont plus pratiques, beaucoup plus rapides et presqu'aussi précises. Parmi ces variantes de la méthode exacte de Broadie et Kaya, on peut citer l'approximation exponentielle quadratique (QE) de Andersen (2008), le schéma de Van Haastrecht et Pelsser's, le schéma d'approximation Gamma de Bégin *et al.* (2015). Bégin *et al.* (2015) discutent de ces méthodes de simulation du modèle de Heston. Pour plus de détails sur ces méthodes, le lecteur peut se référer à cet article.

Dans ce travail, nous appliquerons certaines de ces méthodes au modèle 3/2. Puisque notre but est la tarification des produits dérivés, nous utilisons la simulation sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$. Ainsi, dans tout ce qui suit, nous utiliserons la dynamique des modèles sous la mesure neutre au risque. Dans la première section de ce chapitre, nous appliquons les méthodes de Milstein et de l'approximation quadratique (QE) de Andersen pour simuler le processus de lactif sous-jacent dans le modèle de Heston afin de tarifer les options. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous adaptons les algorithmes de Milstein et de QE au modèle 3/2.

2.1 Modèle de Heston

Avant de passer au modèle 3/2, il est important de discuter de l'implémentation de quelques algorithmes de simulation dans le cadre du modèle de Heston. En effet, les algorithmes de simulation du modèle 3/2 sont basés sur ceux du modèle de Heston.

2.1.1 Dynamique du log-rendement du modèle

Soit $S = \{S(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de l'actif sous-jacent et $V = \{V(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de variance.
Sous la mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, le modèle de Heston est défini par

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t} dB_t \end{cases} \tag{2.1}$$

où S_0, V_0 sont des conditions initiales déterministes de l'équation différentielle stochastique et $\langle dZ, dB\rangle_t = \rho\, dt$ avec $\rho \in [-1, 1]$. r est le taux de rendement sans risque et κ, θ, η sont des nombres réels positifs.
Pour simplifier les calculs, il est pratique d'appliquer une transformation au processus S. Nous utilisons aussi la décomposition de Cholesky et nous posons
$Z_t = \rho\, dB_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t$ où B et W sont deux mouvements browniens standards indépendants.
Soit alors $X = \log(S)$ le processus du log-rendement. En appliquant le lemme d'Itô aux équations du système (2.1), nous obtenons la dynamique sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ du processus de log-rendement X dans le modèle de Heston. Ce processus est défini par

$$\begin{cases} dX_t &= (r - \frac{1}{2}V_t)dt + \sqrt{V_t}\left(\rho\, dB_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t\right) \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t}\, dB_t \end{cases} \tag{2.2}$$

où $X = \log(S)$, X_0 et V_0 sont des conditions initiales déterministes de EDS.

2.1.2 Méthodes de simulation

Nous présentons les algorithmes de Milstein et de l'approximation exponentielle quadratique d'Andersen (QE).

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{0, h, 2h, ..., (m-1)h, T\}$ une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$ de pas uniforme $h = \dfrac{T}{m}$, où m est le nombre de pas de temps. Dans la suite, nous notons $\hat{X}$ et $\hat{V}$, les approximations en temps discret respectives des processus X et V.

Le schéma de Milstein est basé sur une approximation linéaire de l'équation différentielle stochastique du processus de l'actif sous-jacent et sur une approximation de second ordre de l'équation différentielle stochastique du processus de variance. D'après l'algorithme 3.3 de Bégin *et al.* (2015), l'algorithme de Milstein appliqué aux processus X et V est donné par

$$\begin{cases} \hat{X}(hi) & = & \hat{X}(h(i-1)) + \left[r - \dfrac{1}{2} f(\hat{V}(h(i-1)))\right] h \\ & & +\sqrt{f(\hat{V}(h(i-1)))}\ \left(\rho\ Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\ Z_1\right)\sqrt{h} \\ \hat{V}(hi) & = & \hat{V}(h(i-1)) + \kappa\left[\theta - f(\hat{V}(h(i-1)))\right] h + \dfrac{\eta^2}{4}\left(Z_2^2 - 1\right) h \\ & & +\eta\sqrt{f(\hat{V}(h(i-1)))}\ Z_2\sqrt{h}. \end{cases} \tag{2.3}$$

pour $i = 1, 2, ..., m$; où $f(x) = \max(0, x)$ et Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi normale centrée réduite.

Avant de parler de l'approximation quadratique de Andersen qui est une variante de la méthode exacte de Broadie et Kaya (2006), il est important de résumer d'abord cette dernière. En effet, la méthode exacte de Broadie et Kaya (2006) pour le modèle de Heston est basée sur la discrétisation de la solution explicite du processus de l'actif sous-jacent. Cette solution est définie au temps t pour le processus de log-rendement $X = \log(S)$ conditionnellement à $\left\{X_s, V_s, V_t, \int_s^t V_u du\right\}$

avec $s < t$. Ainsi, on a

$$X_t = X_s + \left(r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right)(t-s) + \frac{\rho}{\eta}(V_t - V_s) + \left(\frac{\kappa\rho}{\eta} - \frac{1}{2}\right)\int_s^t V_u\, du + \sqrt{1-\rho^2}\int_s^t \sqrt{V_u}\, dW_u. \tag{2.4}$$

Ensuite, pour $s < t$, la variance conditionnelle $V_t|V_s$ dans le modèle de Heston est distribuée suivant la loi de khi carrée non centrée (voir Proposition 1 de Andersen (2008)). Broadie et Kaya (2006) simulent alors la variance conditionnelle $V_t|V_s$ à partir de cette distribution. De plus, sachant V_s et V_t, les auteurs dérivent la fonction caractéristique de la variance intégrée $\int_s^t V_u\, du$. Ils appliquent la transformée de Fourier inverse à cette fonction caractéristique pour déterminer la distribution de la variance intégrée dans la Proposition 6 de Bégin *et al.* (2015). Ainsi, conditionnellement à V_s et V_t, ils simulent la variance intégrée en inversant numériquement cette distribution. Enfin, conditionnellement à la variance intégrée, $\int_s^t \sqrt{V_u}\, dW_u$ suit une loi normale centrée de variance $\int_s^t V_u\, du$. Pour plus de détails sur la méthode exacte de Broadie et Kaya (2006), le lecteur peut se référer à Bégin *et al.* (2015).

L'approximation exponentielle quadratique de Andersen est une approximation basée sur les techniques d'appariement des moments. Elle permet d'accélérer la méthode de Broadie et Kaya (2006) car cette dernière est lente. En effet, dans la méthode exacte de Broadie et Kaya (2006), l'inversion numérique de la distribution de la variance intégrée est coûteuse en temps, cela rend alors la méthode lente (Andersen, 2008). L'approximation exponentielle quadratique de Andersen se résume en deux étapes. La première étape est basée sur le fait qu'une variable aléatoire khi carré non centré avec un paramètre de non-centralité modéré ou élevé peut être bien représentée par le carré d'une variable aléatoire gaussienne (Andersen, 2008). Ainsi, pour $i = 1, 2, ..., m$, sachant $V(h(i-1))$, $V(hi)$ peut s'écrire

sous la forme

$$V(hi) \mid V(h(i-1)) = a(b+Z_v)^2, \text{ pour } i = 1, 2, ..., m,$$

où a et b sont déterminées par la technique d'appariement des moments et Z_v suit la loi normale centrée réduite.

La deuxième étape de la méthode est basée sur la discrétisation de la solution exacte du processus $X = \log(S)$. En effet, d'après la solution exacte de X (2.4), sachant $V(h(i-1))$, $V(hi)$ et $X(h(i-1))$, on a

$$\begin{aligned} X(hi) = X(h(i-1)) &+ \left(r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right)h + \frac{\rho}{\eta}\left(V(hi) - V(h(i-1))\right) \\ &+ \left(\frac{\kappa\rho}{\eta} - \frac{1}{2}\right)\int_{h(i-1)}^{hi} V(u)du + \sqrt{1-\rho^2}\int_{h(i-1)}^{hi}\sqrt{V(u)}dW(u), \quad (2.5) \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, ..., m$.

De plus, l'algorithme utilise une approximation de l'intégrale par rapport au temps dans (2.5). Ensuite, puisque W est indépendant de V, alors sachant $\int_{h(i-1)}^{hi} V(u)du$ et $V(h(i-1))$, l'intégrale d'Itô

$$\int_{h(i-1)}^{hi}\sqrt{V(u)}dW(u)$$

suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $\int_{h(i-1)}^{hi} V(u)du$. Enfin, Andersen (2008)), obtient que

$$\begin{aligned} \hat{X}(hi) \approx \hat{X}(h(i-1)) &+ rh + K_0 + K_1\hat{V}(h(i-1)) + K_2\hat{V}(hi) \\ &+ \sqrt{K_3\left[\hat{V}(h(i-1)) + \hat{V}(hi)\right]}Z_x, \quad (2.6) \end{aligned}$$

où Z_x suit une loi normale centrée réduite et

$$\begin{aligned} K_0 &= -\frac{\rho\kappa\theta}{\eta}h, \\ K_1 &= \frac{h}{2}\left(\frac{\kappa\rho}{\eta} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\rho}{\eta}, \\ K_2 &= \frac{h}{2}\left(\frac{\kappa\rho}{\eta} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\rho}{\eta}, \\ K_3 &= \frac{h}{2}\left(1-\rho^2\right). \end{aligned}$$

L'algorithme de l'approximation quadratique de Andersen pour le modèle de Heston est donné dans la section 3.6 (Algorithm 3.6) de Bégin *et al.* (2015)

2.1.3 Résultats numériques

Nous calculons le prix de l'option d'achat européenne en utilisant les algorithmes décrits ci-dessus. Pour étudier la précision de chaque schéma de simulation, nous comparons les résultats de chaque schéma de simulation à la solution analytique d'une option d'achat européenne dans le modèle de Heston. Nous avons donc implémenté la solution analytique (1.22) ainsi que les deux schémas de simulation en utilisant la librairie Rcpp de `R`. Il faut noter que l'intégrale dans la formule analytique du modèle de Heston est calculée en utilisant la fonction `integrate` de `R`. Nous nous intéressons à l'erreur quadratique moyenne (MSE) donnée par la formule suivante :

$$MSE = \mathbb{E}\left[\left(\hat{C} - C\right)^2\right]$$

où $\hat{C}$ est l'approximation du prix de l'option d'achat européenne obtenue par simulation c'est-à-dire que $\hat{C}$ est calculé à partir de N simulations par la formule

$$\hat{C} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\max\left(S_T^{(i)} - K, 0\right)\right] \tag{2.7}$$

et C est la valeur au temps $t = 0$ de l'option d'achat européenne. Cette valeur est obtenue en posant $t = 0$ dans la solution analytique du modèle de Heston pour le prix d'une option d'achat européenne donnée par (1.22). Pour calculer l'erreur quadratique moyenne (MSE), nous calculons J approximations du prix de l'option $\hat{C}_j,\ j \in \{1, 2, ..., J\}$ avec l'algorithme choisi. Ensuite, nous approximons l'erreur quadratique moyenne (MSE) par la formule suivante

$$MSE = \mathbb{E}\left[\left(\hat{C} - C\right)^2\right] \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \left(\hat{C}_j - C\right)^2, \tag{2.8}$$

où chaque $\hat{C}_j,\ j = 1, 2, ..., J$ est calculé par la formule (2.7).

Considérons le modèle de Heston dont les paramètres sont définis dans la table 1 de Heston (1993). On a $\kappa = 2$, $\eta = 0.1$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.5$, $r = 0.0$, $q = 0.0$, $V_0 = 0.01$ et $S_0 = 100$. Avec ces paramètres, la condition de Feller est vérifiée car $2\kappa\theta > \eta^2$. Le prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice $K = 100$ et de maturité $T = 0.5$ calculé avec la formule analytique (1.22) dans ce modèle est $C = 2.7375$.

Le tableau (2.1) montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne (MSE) en fonction du nombre N de simulations pour un pas de temps $h = \dfrac{1}{50}$ et en calculant $J = 20$ approximations du prix de l'option. La première colonne des tableaux (2.1) et (2.2) présente le nombre de simulations. La deuxième et troisième colonnes présentent les erreurs quadratiques moyennes (MSE) correspondantes à chaque nombre de simulations respectivement dans les schémas de Milstein et de l'approximation quadratique de Andersen (QE).

Tableau (2.1) MSE lorsque la condition de Feller est vérifiée

Nombre de simulations	MSE de Milstein	MSE de QE
1000	0.02697	0.01927
5000	0.00617	0.00482
10000	0.00542	0.00478
50000	0.00246	0.00206
100000	0.00218	0.00174
500000	0.00162	0.00157

Prenons maintenant l'ensemble de paramètres du cas 1 de la table 1 de Bégin *et al.* (2015). Ces paramètres sont donnés par $\kappa = 0.5$, $\eta = 1$, $\theta = 0.04$, $\rho = -0.9$, $r = 0$,

$q = 0$, $V_0 = 0.04$, $S_0 = 100$, $K = 100$ et $T = 10$. On a $2\kappa\theta < \eta$, la condition de Feller n'est donc pas vérifiée. Le prix exact de l'option d'achat européenne selon la formule analytique (1.22) est $C = 13.0277$. L'évolution de l'erreur quadratique moyenne (MSE) en fonction du nombre N de simulations pour un pas de temps $h = \dfrac{1}{50}$ et en calculant $J = 20$ approximations du prix de l'option est donnée dans le tableau (2.2).

Tableau (2.2) MSE lorsque la condition de Feller n'est pas vérifiée

Nombre de simulations	MSE de Milstein	MSE de QE
1000	0.2809	0.1503
5000	0.1193	0.0574
10000	0.0961	0.0173
50000	0.0797	0.0099
100000	0.0801	0.0042
500000	0.0797	0.0046

Nous remarquons que dans le tableau (2.1), les deux schémas de simulation produisent de bon résultats. Par contre dans le tableau (2.2), le schéma d'approximation exponentielle quadratique de Anderson (QE) a une bonne précision tandis que le schéma de Milstein est moins précis. Cela est dû à la condition de Feller. En effet, Bégin *et al.* (2015) montrent que lorsque la condition de Feller est vérifiée ou lorsque $4\kappa\theta \geq \eta^2$, les deux schémas produisent de bon résultats et dans le cas contraire, la méthode de Milstein peut être moins précise. Nous parlons des temps de calcul des méthodes dans le chapitre 4.

2.2 Modèle 3/2

Dans cette section nous présentons quelques méthodes de simulation du modèle 3/2.

2.2.1 Dynamique du modèle

Soit $S = \{S(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de l'actif sous-jacent et $V = \{V(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de variance. Sous la mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, le modèle 3/2 est défini par :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t\right) \\ dV_t &= \kappa V_t \left(\bar{V} - V_t\right) dt + \eta V_t^{3/2} dW_t \end{cases} \tag{2.9}$$

avec Z et W deux mouvements browniens standards indépendants. S_0, V_0 sont des conditions initiales déterministes de l'équation différentielle stochastique et r est le taux sans risque.

Considérons le processus $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$. En appliquant la formule d'Itô au processus U_t, on obtient que :

$$dU_t = \kappa\bar{V}\left(\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}} - U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t} dW_t. \tag{2.10}$$

Donc pour $V_t > 0$, U_t est un processus de Cox-Ingerson-Ross avec les paramètres suivants :

- $\kappa\bar{V}$ est la vitesse de retour à la moyenne.
- $\dfrac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}}$ est la moyenne à long terme.
- $-\eta$ est la volatilité de la volatilité.

Ainsi le modèle 3/2 défini par (2.9), peut s'écrire en fonction du nouveau processus de Cox-Ingersoll-Ross U.

Par suite, en posant $X_t = \log(S_t)$ et $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$, on obtient la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= \left(r - \dfrac{1}{2U_t}\right) dt + U_t^{-\frac{1}{2}} \left(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dZ_t\right) \\ dU_t &= \kappa\bar{V}\left(\dfrac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}} - U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t}\, dW_t. \end{cases} \tag{2.11}$$

Dans la suite nous simulons le modèle 3/2 à partir de la dynamique (2.11).

Remarque 2.2.1. *Puisque $\kappa > 0$, alors $\kappa + \eta^2 > \eta^2$ et le processus U vérifie la condition de Feller.*

2.2.2 Méthodes de simulation du modèle de 3/2

Comme pour le modèle de Heston, nous présentons les algorithmes de Milstein et de l'approximation exponentielle quadratique de Andersen (QE). En s'inspirant du modèle de Heston, nous avons adapté ces algorithmes au modèle 3/2.
Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{0, h, 2h, ..., T\}$ une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$ de pas uniforme $h = \dfrac{T}{m}$, où m est le nombre de pas de temps. Dans la suite, nous notons $\hat{X}$ et $\hat{U}$, les approximations en temps discret respectifs des processus X et U.
Soient r le taux sans risque, $\hat{X}_0 = \log(S_0)$ et $\hat{U}_0 = \dfrac{1}{V_0}$ avec $S_0 > 0$ la valeur initiale du processus de l'actif sous-jacent S et $V_0 > 0$ la valeur initiale du processus de variance V. Supposons que κ, $\bar{V}$, η et V_0 les paramètres du processus de variance V dans le modèle 3/2 et prenons h le pas de temps uniforme. La simulation du modèle 3/2 par le schéma de Milstein se fait à partir de l'Algorithme 1

Algorithm 1 Algorithme de Milstein pour le modèle 3/2

1: **procedure** MILSTEIN SIM(X_0, V_0, κ, $\bar{V}$, η, h)

2: Simuler $\hat{X}(hi)$ sachant $\hat{U}(h(i-1))$ et $\hat{X}(h(i-1))$ comme suit

$$\hat{X}(hi) = \hat{X}(h(i-1)) + \left[r - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{\hat{U}(h(i-1))}\right)\right] h + \sqrt{f\left(\frac{1}{\hat{U}(h(i-1))}\right)} \left(\rho\, Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_1\right) \sqrt{h}.$$

3: Sachant $\hat{U}(h(i-1))$, simuler $\hat{U}(hi)$ défini par

$$\hat{U}(hi) = \hat{U}(h(i-1)) + \kappa\bar{V}\left[\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}} - f\left(\hat{U}(h(i-1))\right)\right] h - \eta\sqrt{f\left(\hat{U}(h(i-1))\right)}\, Z_2\sqrt{h} + \frac{\eta^2}{4}\left(Z_2^2 - 1\right) h,$$

pour $i = 1, 2, ..., m$ où m est le nombre de pas de temps, $f(x) = \max(0, x)$ et Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi normale centrée réduite.

4: **end procedure**

Le schéma de l'approximation exponentielle quadratique de Andersen du modèle 3/2 est basé sur la simulation exacte du processus du log-rendement de l'actif sous-jacent $X = \log(S)$. Nous adaptons l'algorithme de l'approximation exponentielle quadratique (QE) de Andersen à la simulation exacte du modèle 3/2 dans Baldeaux (2012).

Considérons le modèle 3/2 défini par la dynamique (2.11) avec $X_t = \log(S_t)$ et

$U_t = \dfrac{1}{V_t}$, où $V_t > 0$. On a pour $i = 0, 2, ..., m-1$,

$$X\left(h\left(i+1\right)\right) = X\left(hi\right) + rh - \frac{1}{2}\int_{hi}^{h(i+1)} U_s^{-1} ds + \rho \int_{hi}^{h(i+1)} U_s^{-\frac{1}{2}} dW_s$$
$$+ \sqrt{1-\rho^2}\int_{hi}^{h(i+1)} U_s^{-\frac{1}{2}}\, dZ_s. \tag{2.12}$$

Puisque

$$dU_t = \kappa\bar{V}\left(\frac{\kappa+\eta^2}{\kappa\bar{V}} - U_t\right)dt - \eta\sqrt{U_t}dW_t$$

alors on a

$$dU_t = \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\bar{V}U_t\right)dt - \eta\sqrt{U_t}dW_t.$$

De plus le processus U prend des valeurs strictement positives car c'est un processus de Cox-Ingersoll-Ross vérifiant la condition de Feller. Le processus $\log\left(U\right)$ est alors bien défini. Appliquons donc le lemme d'Itô au processus $\log\left(U\right)$. Nous suivons la démarche de Baldeaux (2012).

Posons $f(x) = \log\left(x\right)$. On a $f^{'}\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$ et $f^{''}\left(x\right) = -\dfrac{1}{x^2}$. D'après le lemme d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned}
d\log\left(U_t\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(U_t\right)dU_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(U_t\right)d\left\langle U,U\right\rangle_t. \\
&= \frac{1}{U_t}dU_t - \frac{1}{2U_t^2}d\left\langle U,U\right\rangle_t. \\
&= \frac{1}{U_t}dU_t - \frac{1}{2U_t^2}\eta^2 U_t dt. \\
&= \frac{1}{U_t}\left(dU_t - \frac{1}{2}\eta^2 dt\right). \\
&= \frac{1}{U_t}\left(\left(\kappa+\eta^2-\kappa\bar{V}U_t\right)dt - \eta\sqrt{U_t}dW_t - \frac{1}{2}\eta^2 dt\right). \\
&= \left(\frac{\kappa+\frac{\eta^2}{2}}{U_t} - \kappa\bar{V}\right)dt - \eta\left(\sqrt{U_t}\right)^{-1}dW_t.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\log\left(U\left(h\left(i+1\right)\right)\right) = \log\left(U\left(hi\right)\right) + \left(\kappa + \frac{\eta^2}{2}\right)\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds - \kappa\bar{V}h$$
$$- \eta\int_{hi}^{h(i+1)} \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dW_s. \tag{2.13}$$

De (2.13), on en déduit que

$$\int_{hi}^{h(i+1)} \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dW_s = \frac{1}{\eta}\Bigg[\log\left(\frac{U\left(hi\right)}{U\left(h\left(i+1\right)\right)}\right)$$
$$+ \left(\kappa + \frac{\eta^2}{2}\right)\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds - \kappa\bar{V}h\Bigg]. \tag{2.14}$$

En remplaçant (2.14) dans (2.12), on obtient

$$X\left(h\left(i+1\right)\right) = X\left(hi\right) + rh - \frac{1}{2}\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds + \sqrt{1-\rho^2}\int_{hi}^{h(i+1)} \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dZ_s$$
$$+ \frac{\rho}{\eta}\left[\log\left(\frac{U\left(hi\right)}{U\left(h\left(i+1\right)\right)}\right) + \left(\kappa + \frac{\eta^2}{2}\right)\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds - \kappa\bar{V}h\right].$$

C'est-à-dire que

$$X\left(h(i+1)\right) = X\left(hi\right) + \left(r - \frac{\rho\kappa\bar{V}}{\eta}\right)h + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds$$
$$- \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{U(h(i+1))}{U(hi)}\right) + \sqrt{1-\rho^2}\int_{hi}^{h(i+1)} \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dZ_s. \tag{2.15}$$

Dans (2.15), remplaçons l'intégrale par rapport au temps par l'approximation suivante :

$$\int_{hi}^{h(i+1)} \left(U_s\right)^{-1} ds \cong h\frac{\left(U(h(i+1))\right)^{-1} + \left(U(hi)\right)^{-1}}{2}.$$

On définit alors l'approximation suivante

$$\hat{X}\left(h\left(i+1\right)\right) = \hat{X}\left(hi\right) + ah + d\sqrt{\frac{h}{2}\left(\left(\hat{U}\left(h\left(i+1\right)\right)\right)^{-1} + \left(\hat{U}\left(hi\right)\right)^{-1}\right)}\, Z$$
$$- c\log\left(\frac{\hat{U}\left(h\left(i+1\right)\right)}{\hat{U}\left(hi\right)}\right) + \frac{bh}{2}\left(\left(\hat{U}\left(hi\right)\right)^{-1} + \left(\hat{U}\left(h\left(i+1\right)\right)\right)^{-1}\right), \tag{2.16}$$

où Z suit une loi normale centrée réduite et

$$\begin{aligned}
a &= r - \frac{\rho\kappa\bar{V}}{\eta}, \\
b &= \frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}, \\
c &= \frac{\rho}{\eta}, \\
d &= \sqrt{1-\rho^2}.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, nous donnons l'algorithme de l'approximation quadratique exponentielle de Andersen (QE) pour le modèle 3/2.
Soient κ, $\bar{V}$, η et V_0 les paramètres du processus de variance V dans le modèle 3/2. Soient r le taux sans risque, $X_0 = \log(S_0)$ où S_0 est la valeur initiale du processus S et prenons h le pas de temps uniforme. Algorithme 2 est défini par

Algorithm 2 Algorithme QE pour le modèle 3/2

1: **procedure** QESIM(X_0, V_0, κ, $\bar{V}$, η, h)

2: Déterminer les paramètres du processus inverse de la variance U du modèle 3/2 définis par

$$\begin{aligned}
\kappa_U &= \kappa\bar{V}, \\
\theta_U &= \frac{\kappa + \eta^2}{\kappa\bar{V}}, \\
\sigma_U &= -\eta, \\
U_0 &= \frac{1}{V_0}.
\end{aligned}$$

3: Simuler $\hat{U}\left(h\left(i+1\right)\right)$ sachant $\hat{U}\left(hi\right)$, pour $i = 0, 1, ..., m-1$ en suivant les étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme (3.6) de Bégin *et al.* (2015) pour le modèle de Heston avec les paramètres κ_U, θ_U, σ_U et U_0.

4: Simuler $\hat{X}\left(h\left(i+1\right)\right)$ sachant $\hat{X}\left(hi\right)$, $\hat{U}\left(hi\right)$ et $\hat{U}\left(h\left(i+1\right)\right)$ à partir de (2.16).

5: **end procedure**

Il faut noter que l'algorithme 2 est nouveau car il a été développé pour la première fois dans ce mémoire. Il n'apparait donc nulle part dans la littérature.

2.2.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous utilisons les paramètres du modèle 3/2 obtenus par Drimus (2012). En effet, Drimus (2012) a calibré les paramètres des modèles de Heston et 3/2 à partir des prix de plusieurs options sur l'indice S&P500. Il a alors obtenu le tableau suivant décrivant le lien entre les paramètres du modèle de Heston et ceux du modèle 3/2.

Tableau (2.3) Paramètres obtenus par Drimus (2012)

	κ	θ	ϵ	v_0	ρ
Modèle de Heston	3.8	0.3095^2	0.9288	0.2556^2	-0.7829
Modèle 3/2	22.84	0.4669^2	8.56	0.2450^2	-0.99

Nous considérons l'option d'achat européenne de maturité $T = 0.5$ (en année) de valeur initiale $S_0 = 100$ et de prix d'exercice $K = 100$ et nous prenons le taux sans risque $r = 0$. Avec les paramètres du tableau (2.3), le prix de cette option dans le modèle de Heston obtenu par la formule analytique (1.22) est de $C = 7.2473$.

Dans le modèle 3/2, l'intégrale dans la formule analytique (1.20) du prix d'une option d'achat européenne est approximée numériquement avec la méthode des trapèzes. Nous rappelons que l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des trapèzes est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx h\frac{f(a)+f(b)}{2} + h\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)$$

$$\text{où } h = \frac{b-a}{N}.$$

Bien que la borne supérieure de l'intégrale dans (1.20) soit infinie, nous avons tronqué l'intégrale à la valeur 100 car l'intégrante est presque nulle à partir de cette valeur. Nous approximons alors l'intégrale avec une borne supérieure $b = 100$ et un pas de discrétisation $h = 0.001$. Ainsi, nous obtenons que le prix de l'option précédente dans le modèle 3/2 avec les paramètres du tableau (2.3) est $C' = 7.3864$ d'après les formules (1.20) et (1.29).

Nous comparons ces prix à ceux que nous obtenons par les deux schémas de simulations (Milstein et l'approximation exponentielle quadratique d'Andersen).

Nous utilisons l'erreur quadratique moyenne définie par (2.8), où $\hat{C}$ est le prix simulé de l'option dans le modèle 3/2 et C est remplacé par C'. Les résultats consignés dans le tableau (2.4) sont obtenus par (2.8) pour un pas de temps $h = \dfrac{1}{50}$ et en calculant $J = 20$ approximations du prix de l'option.

Tableau (2.4) MSE dans les modèles de Heston et 3/2

Nombre de	Modèle de Heston		Modèle 3/2	
simulations	MSE de Milstein	MSE de QE	MSE de Milstein	MSE de QE
5000	0.0348	0.0212	0.0248	**0.0178**
10000	0.0292	0.0207	0.0104	**0.0064**
50000	0.0139	0.0155	0.0036	**0.0026**
100000	0.0114	0.0119	0.0012	**0.0007**
500000	0.0093	0.0010	0.0007	**0.0002**

Nous remarquons que l'erreur quadratique décroit en fonction du nombre de simulations. Nous voyons aussi que le schéma de l'approximation exponentielle quadratique de Andersen est plus précis que le schéma de Milstein. Enfin, nous remarquons que les deux schémas de simulations produisent les résultats plus précis dans le modèle 3/2 que dans le modèle de Heston. Cela s'explique par le fait que les valeurs prises par la volatilité dans le modèle 3/2 ne sont pas proches de zéro, ce qui n'est pas le cas dans le modèle de Heston. Le modèle 3/2 vient alors résoudre le problème de la volatilité qui approche ou frappe zéro dans le modèle de Heston. Comme nous l'avons indiqué dans le modèle de Heston, ici aussi, l'analyse du temps de calcul est faite dans le chapitre 4.

CHAPITRE III

SOLUTIONS EXPLICITES FAIBLES DES MODÈLES DE HESTON ET 3/2

Dans le chapitre précédent, nous avons parlé de certaines techniques de simulations et nous avons implémenté quelques algorithmes de simulation des modèles de Heston et 3/2. Dans Kouritzin (2018), l'auteur énumère quelques difficultés de ces techniques de simulation. Il s'agit de :

- La difficulté d'évaluer les produits dérivés dépendant à de nombreux points dans le temps de la trajectoire de l'actif sous-jacent car l'algorithme devient trop lent et n'est pas efficace ;
- La gestion de la volatilité qui approche ou frappe zéro.

Il propose une nouvelle alternative pour la simulation du modèle de Heston. Il considère alors la possibilité que la solution de l'équation différentielle stochastique du modèle de Heston soit une fonction du temps et de l'intégrale stochastique gaussienne.

Malheureusement, d'après le théorème 1 de Kouritzin et Rémillard (2019), l'équation différentielle stochastique de Heston n'admet pas de solution forte. Néanmoins, il en ressort de la remarque (1.1) de Athreya *et al.* (2002) ainsi que de Rogers et Williams (1987), l'existence d'une solution faible explicite du modèle de Heston. L'alternative proposée par Kouritzin (2018) repose alors sur une solution explicite faible à l'EDS de Heston.

Dans les sections suivantes, nous présentons la méthode de simulation du modèle

de Heston basée sur une solution explicite faible de l'équation différentielle stochastique de ce modèle selon Kouritzin (2018). Nous appliquons la même méthode pour simuler le modèle 3/2, vu le lien entre ces deux modèles.

3.1 Simulation du modèle de Heston basée sur la solution faible explicite

Nous rappelons ici la dynamique du modèle de Heston sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$.
Soit $S = \{S(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de l'actif sous-jacent et $V = \{V(t)\,; t \geq 0\}$ le processus de variance. Le modèle de Heston est défini par :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\right) \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t} dW_t \end{cases} \tag{3.1}$$

avec S_0 et V_0 des conditions initiales déterministes de EDS, B et W deux mouvements browniens standards indépendants.
Sous cette dynamique, Kouritzin (2018) définit la condition **(C)** pour que le modèle de Heston ait une solution explicite faible. Cette condition s'exprime comme suit :
Condition (C) : Il existe un entier naturel non nul n tel que $\kappa\theta = \dfrac{n\eta^2}{4}$.

3.1.1 Solution explicite faible

Le théorème 1 de Kouritzin (2018) établit une solution explicite faible du modèle de Heston. Ce théorème s'énonce comme suit

Théorème 3.1.1. *Kouritzin (2018)*
*Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n telle que la condition **(C)** soit vérifiée avec ce n et soient $W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}, B$ des mouvements browniens standards indépendants. Le modèle de Heston (3.1) a une solution explicite faible*

définie par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t V_s^{\frac{1}{2}} dB_s + \left[r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right] t \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{1}{2}\right]\int_0^t V_s ds + \frac{\rho}{\eta}\left(V_t - V_0\right)\right) \tag{3.2}$$

$$V_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2 \tag{3.3}$$

où S_0, V_0 sont des constantes réelles strictement positives, $\left\{Y_t^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ sont des processus Ornstein-Uhlenbeck (voir Définition 1.1.8) définis par

$$Y_t^{(i)} = \frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}(t-u)} dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa}{2}t} Y_0^{(i)} \quad \textit{avec} \tag{3.4}$$

$$Y_0^{(i)} = \sqrt{V_0/n} \quad \textit{pour } i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \textit{et}$$

$$W_t = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t Y_u^{(i)}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} \tag{3.5}$$

est un mouvement brownien.

La preuve de ce théorème se trouve en annexe de l'article de Kouritzin (2018). Néanmoins, nous prouvons aussi ce théorème en annexe A de ce document.

Il faut noter que la solution donnée par le théorème 1 est valide lorsque la condition **(C)** est vérifiée. Néanmoins, peu importe les paramètres du modèle de Heston, on peut toujours choisir un modèle dont les paramètres sont proches de ceux du vrai modèle et qui vérifie la condition **(C)**. Kouritzin (2018) appelle ce modèle «modèle le plus proche». Dans cette logique, Kouritzin (2018) définit le

modèle le plus proche vérifiant la condition **(C)** comme suit

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r^{'}\hat{S}_t dt + \sqrt{\hat{V}_t}\hat{S}_t\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right) \\ d\hat{V}_t &= \kappa^{'}(\theta - \hat{V}_t)dt + \eta\sqrt{\hat{V}_t}dW_t \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\begin{cases} n &= \left\lfloor \dfrac{4\kappa\theta}{\eta^2} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor \vee 1, \\ \kappa^{'} &= \dfrac{n\eta^2}{4\theta}, \\ r^{'} &= r + \dfrac{\rho}{\eta}\left(\kappa^{'}\theta - \kappa\theta\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Ainsi, définir le modèle le plus proche revient à déterminer n, $\kappa^{'}$ et $r^{'}$. En changeant les paramètres du modèle de départ, les processus (mouvements browniens) de ce modèle sont modifiés. Il est alors nécessaire de définir une nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sous laquelle les processus modifiés garderont leur nature. Il est donc nécessaire de déterminer la dérivée de Radon-Nikodym reliant la mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$ et celle fabriquée $\hat{\mathbb{P}}$. Par suite, Kouritzin (2018) montre que sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, le modèle de Heston (3.1) ne vérifiant pas la condition **(C)** admet une solution explicite faible aussi longtemps que la volatilité est supérieure à une valeur critique ϵ proche de zéro .

Kouritzin (2018) détermine alors une solution explicite faible du modèle le plus proche vérifiant la condition **(C)** puis utilise la dérivée de Radon-Nikodym pour déduire la solution explicite du vrai modèle lorsque la condition **(C)** n'est pas vérifiée. Le théorème suivant donne alors une solution explicite faible du modèle général de Heston (3.1).

Théorème 3.1.2. *Kouritzin (2018)*

Soient $\epsilon \in (0,1)$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et V_0, S_0 deux nombres réels strictement positifs avec $V_0 > \epsilon$.

Soient $\left\{W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}, B\right\}$ des mouvements browniens standards et indépendants sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ où n est défini dans le système (3.7).

Soient aussi

$$\hat{S}_t = S_0 \exp\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \hat{V}_s^{\frac{1}{2}} dB_s + \left[r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right] t \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \hat{V}_s ds + \frac{\rho}{\eta}\left(\hat{V}_t - V_0\right)\right), \tag{3.8}$$

$$\hat{V}_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2, \quad \eta_\epsilon = \inf\left\{t : \hat{V}_t < \epsilon\right\} \quad et \tag{3.9}$$

$$\hat{L}_t = \exp\left\{\frac{\kappa\theta - \kappa'\theta}{\eta^2}\left[\ln\left(\frac{\hat{V}_t}{V_0}\right) + \int_0^t \left(\frac{\eta^2 - \kappa\theta - \kappa'\theta}{2\hat{V}_s} + \kappa\right) ds\right]\right\} \tag{3.10}$$

où $Y_t^{(i)} = \frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}(t-u)} dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa}{2}t} Y_0^{(i)}$ *avec* $Y_0^{(i)} = \sqrt{V_0/n}$ *pour* $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. *Ensuite définissons,*

$$W_t = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t Y_u^{(i)}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} + \int_0^{t\wedge\eta_\epsilon} \frac{\kappa\theta - \kappa'\theta}{\eta\sqrt{\hat{V}_s}} ds \tag{3.11}$$

et $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A \hat{L}_{T\wedge\eta_\epsilon}\right],\ \forall A \in \mathcal{F}_T$.

Alors, η_ϵ *est un temps d'arrêt et* $\hat{L}_{T\wedge\eta_\epsilon}$ *est une densité de Radon-Nikodym donc une* L^s*-martingale (voir Définition 1.1.9) par rapport à la mesure* $\mathbb{Q}$ *pour tout* $s > 0$. *De plus* (B, W) *sont des mouvements browniens standards indépendants sur* $[0, T]$ *sous* $\hat{\mathbb{P}}$. *D'où la dynamique sous* $\hat{\mathbb{P}}$ *du modèle le plus proche du modèle général de Heston est donnée par les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r\hat{S}_t dt + \sqrt{\hat{V}_t}\hat{S}\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\right) \\ d\hat{V}_t &= \kappa(\theta - \hat{V})dt + \eta\sqrt{\hat{V}_t} dW_t \end{cases} \quad si \quad t \leq \eta_\epsilon \quad et \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r'\hat{S}_t dt + \sqrt{\hat{V}_t}\hat{S}_t\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\right) \\ d\hat{V}_t &= \kappa'(\theta - \hat{V}_t)dt + \eta\sqrt{\hat{V}_t} dW_t. \end{cases} \quad si \quad t \geq \eta_\epsilon \tag{3.13}$$

où κ' *et* r' *sont définis dans le système (3.7).*

Il faut remarquer que sous la mesure de probabilité fabriquée $\hat{\mathbb{P}}$, $\left(\hat{S}_t, \hat{V}_t\right)$ vérifie (3.1) du modèle général de Heston jusqu'à η_ϵ. Pour la preuve de ce théorème, le lecteur peut se référer à l'annexe de l'article de Kouritzin (2018).

3.1.2 Méthode de simulation explicite pondérée du modèle de Heston

L'idée générale de la méthode est de simuler d'abord le modèle le plus «proche» vérifiant la condition **(C)** en utilisant la solution explicite, puis de simuler le processus L, densité de Radon-Nikodym. Enfin, on simule le vrai modèle en utilisant les valeurs du processus L comme les poids de pondération, d'où le nom de simulation pondérée et explicite.

Afin de simplifier les expressions (3.8) et (3.10), nous définissons les constantes suivantes :

$$\tilde{a} = \sqrt{1-\rho^2}, \qquad \tilde{b} = r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta},$$
$$\tilde{c} = \frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{1}{2}, \qquad \tilde{d} = \frac{\rho}{\eta},$$
$$\tilde{e} = \frac{\kappa\theta - \kappa^{'}\theta}{\eta^2} \text{ et} \qquad \tilde{f} = \tilde{e}\frac{\eta^2 - \kappa\theta - \kappa^{'}\theta}{2}.$$

Ainsi, conditionnellement à $\hat{S}_{t-1}$ et $\hat{L}_{t-1}$, les équations (3.8) et (3.10) peuvent s'écrire comme suit :

$$\hat{S}_t = \hat{S}_{t-1} \exp\left(\tilde{a}\int_{t-1}^{t} \hat{V}_s dB_s + \tilde{b} + \tilde{c}\int_{t-1}^{t} \hat{V}_s ds + \tilde{d}\left(\hat{V}_t - \hat{V}_{t-1}\right)\right) \tag{3.14}$$

$$\hat{L}_t = \hat{L}_{t-1} \exp\left\{\tilde{e}\left(\ln(\frac{\hat{V}_t}{\hat{V}_{t-1}}) + \kappa\right) + \tilde{f}\int_{t-1}^{t} \frac{1}{\hat{V}_s} ds\right\}. \tag{3.15}$$

La dynamique du processus de variance $\hat{V}$ dépend du mouvement brownien W. Or les mouvements browniens B et W sont indépendants. Donc le processus de variance $\hat{V}$ est indépendant du mouvement brownien B. Ainsi $\int_{t-1}^{t} \tilde{a}\hat{V}_s dB_s$ est une intégrale de Wiener. Par conséquent, sachant $\hat{V}$, cette intégrale est une réalisation

de la loi normale de moyenne nulle et de variance $\tilde{a}^2 \int_{t-1}^{t} \hat{V}_s ds$. La deuxième intégrale de (3.14) est une intégrale par rapport au temps. D'où conditionnellement à $\hat{S}_{t-1}$ et $\{\hat{V}_s, s \in [t-1, t]\}$, $\hat{S}_t$ peut être simulé à partir d'une loi normale.
De plus dans (3.15), l'intégrale $\int_{t-1}^{t} \hat{V}_s^{-1} ds$ est une intégrale par rapport au temps. Donc, sachant $\hat{L}_{t-1}$ et $\{\hat{V}_s, s \in [t-1, t]\}$, $\hat{L}_t$ défini par (3.15) peut être approximé par une fonction déterministe. En effet, pour le calcul des intégrales par rapport au temps, on utilise les approximations numériques. Il existe plusieurs méthodes d'approximations numériques parmi lesquelles on peut citer l'approximation trapézoïdale et les approximations de Simpson's. Dans le cas de notre travail, nous utiliserons l'approximation de Simpson $\dfrac{1}{3}$ qui est définie pour $M > 0$ par

$$\int_{t-1}^{t} \hat{V}_s ds \simeq \frac{1}{3M} \left\{ \hat{V}_{t-1} + \hat{V}_t + 2 \sum_{l=1}^{\frac{M}{2}-1} \hat{V}_{t-\frac{2l}{M}} + 4 \sum_{l=1}^{\frac{M}{2}} \hat{V}_{t-\frac{2l-1}{M}} \right\}.$$

L'algorithme de simulation pondérée du modèle de Heston est donné dans la section 3.3 de Kouritzin et MacKay (2020).

3.2 Simulation du modèle 3/2 basée sur la solution faible explicite

Dans cette section, nous adaptons les résultats de Kouritzin (2018) sur le modèle de Heston au modèle 3/2. Les résultats de cette section sur le modèle 3/2 sont donc nouveaux et n'apparaissent pas dans la litérature.
Nous présentons d'abord la solution explicite faible du modèle de 3/2 puis nous simulons ledit modèle à partir de la solution faible explicite. Avant de donner la solution explicite faible du modèle 3/2, il est nécessaire de justifier l'existence de cette solution.

3.2.1 Existence d'une solution explicite faible du modèle 3/2

Sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$, considérons la dynamique du modèle 3/2 suivante :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t \right) \\ dV_t &= \kappa V_t (\theta - V_t) dt + \eta V_t^{3/2} dW_t \end{cases} \tag{3.16}$$

avec S_0, V_0 des conditions initiales déterministes de l'équation différentielle stochastique (EDS), B et W deux mouvements browniens standards indépendants. D'après le théorème 1 de Kouritzin et Remillard (2000), une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation stochastique différentielle d'Itô

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

ait une solution forte avec aussi une représentation explicite locale (pour certains coefficients de dérive), est que les colonnes de la matrice des coefficients de diffusion σ_j satisfont à la condition de crochet de Lie. Pour plus de détails sur la notion de crochet de Lie, le lecteur peut se référer à Lafontaine (2012). Dans le contexte de l'équation (3.16), la condition de crochet de Lie est donnée par l'égalité suivante : $(\nabla \sigma_i)\, \sigma_j = (\nabla \sigma_j)\, \sigma_i$, $\forall\ i, j$ où ∇ est l'opérateur vectoriel différentiel défini ici par $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial s}, \dfrac{\partial}{\partial v} \right)$ où la variable s représente l'actif sous-jacent et la variable v représente la variance.

Puisque dans le modèle 3/2, la matrice des coefficients de diffusion est donnée par

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} s v^{1/2} & \rho s v^{1/2} \\ 0 & \eta v^{3/2} \end{pmatrix},$$

alors

$$(\nabla \sigma_1)\, \sigma_2 = \begin{pmatrix} s v \rho \sqrt{1-\rho^2} + \dfrac{\eta s v \sqrt{1-\rho^2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} s v \rho \sqrt{1-\rho^2} \\ 0 \end{pmatrix} = (\nabla \sigma_2)\, \sigma_1.$$

Ainsi, la condition de crochet de Lie n'est pas vérifiée dans le cas du modèle 3/2. On devrait s'attendre à ce résultat vue la relation qui existe entre les modèles de

Heston et 3/2.

Aussi on sait qu'à partir de la dynamique du modèle 3/2 définie par (3.16), en posant $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$ et en appliquant la formule d'Itô, on obtient que U est un processus de Cox-Ingerson-Ross dont les paramètres sont définis dans la section 2.2.1. Ainsi, s'il existe un entier naturel non nul n tel que $\kappa + \eta^2 = \dfrac{n\eta^2}{4}$, alors le processus U admet une solution faible explicite. Cette condition est équivalente à $\kappa = \dfrac{\eta^2\,(n-4)}{4}$. De plus, puisque $\kappa > 0$, alors il faut que n soit supérieur ou égal à 5. Par conséquent, la condition $(\mathbf{C}')$ pour que le modèle 3/2 ait une solution explicite faible s'énonce comme suit :

Condition $(\mathbf{C}')$: Il existe un nombre entier naturel n supérieur ou égal 5 tel que $\kappa = \dfrac{\eta^2(n-4)}{4}$.

3.2.2 Solution explicite faible du modèle 3/2

Considérons la dynamique du modèle 3/2 donnée par l'équation (3.16). Le processus $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$ du modèle 3/2 peut s'écrire sous forme du processus de Cox-Ingersoll-Ross. Ainsi, (3.16) est équivalente à la dynamique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dS_t & = & S_t\left(rdt + \sqrt{\dfrac{1}{U_t}}\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right)\right) \\ dU_t & = & \kappa\theta\left(\dfrac{\kappa+\eta^2}{\kappa\theta} - U_t\right)dt - \eta\sqrt{U_t}dW_t \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Posons $X_t = \log(S_t)$. D'après (2.11), la dynamique du processus X est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX_t & = & \left(r - \dfrac{1}{2U_t}\right)dt + \sqrt{\dfrac{1}{U_t}}\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right) \\ dU_t & = & \kappa\theta\left(\dfrac{\kappa+\eta^2}{\kappa\theta} - U_t\right)dt - \eta\sqrt{U_t}dW_t. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Donc en utilisant un raisonnement similaire que pour obtenir (2.15), on obtient que :

$$X_t = X_0 + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t (U_s)^{-1}\,ds$$
$$- \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right) + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dB_s. \tag{3.19}$$

De ce qui précède, en s'inspirant des théorèmes de la section précédente, on établit une solution explicite faible au modèle 3/2.

Théorème 3.2.1. *Supposons qu'il existe un entier naturel $n \in \{5, 6, 7, ...\}$ tel que la condition $(\boldsymbol{C}')$ soit vérifiée avec ce n. Soient $W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}, B$ des mouvements browniens standards indépendants sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ et ϵ un nombre réel strictement positif. Soient S_0 et U_0 des constantes réelles strictement positives. Le modèle 3/2 défini par le système (3.17) a une solution explicite faible définie par :*

$$S_t = S_0 \exp\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{U_s^{-1}}dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t\right.$$
$$\left. + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right)\right) \tag{3.20}$$

$$U_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2 \tag{3.21}$$

avec $\tau_\epsilon = \inf\{t : U_t < \epsilon\}$ où pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}t}Y_0^{(i)}, \quad Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n} \tag{3.22}$$

sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck et sous la mesure $\mathbb{Q}$,

$$W_t = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t Y_u^{(i)}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} \tag{3.23}$$

est un mouvement brownien.

Démonstration. La preuve sera faite en deux parties.

1. Montrons que W est un mouvement brownien sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$
   Dans cette partie de la preuve, nous justifions d'abord l'existence du processus W. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(Y_t^{(i)})^2\right] &= \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \int_0^t e^{-\kappa\theta(t-u)}du + e^{-\kappa\theta t}\left(Y_0^{(i)}\right)^2 \\ &= \frac{\eta^2}{4\kappa\theta}\left(1-e^{-\kappa\theta t}\right) + e^{-\kappa\theta t}\left(Y_0^{(i)}\right)^2.\end{aligned}$$

   Pour tout t, $\mathbb{E}\left[(Y_t^{(i)})^2\right]$ est finie, donc les processus $\left\{Y_t^{(i)}\right\}_{i=1}^n$ sont de carré intégrable.
   De plus, pour tout $t \leq T$, $\sum_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2 > 0$ *p.s.* Ainsi, les processus $\left(Y_t^{(i)}\right)^2 / \sum_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2$, pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sont bornés car
   $0 \leq \dfrac{(Y_t^{(i)})^2}{\sum\limits_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2} \leq 1$. Il s'en suit donc que pour chaque $i \in \{1, 2, .., n\}$ et pour $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{Q}\left[\int_0^t \left(Y_u^{(i)}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^n \left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-1} du < \infty\right] = 1.$$

   Ainsi, pour chaque i, l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \left(Y_u^{(i)}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^n \left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)}$$

   définit une martingale locale. Par conséquent, le processus W est une martingale locale (car W est une somme de martingales locales).

Enfin,

$$\begin{aligned}
\langle W\rangle_t &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \left(Y_u^{(i)}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n}\left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-1} du \\
&= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_u^{(i)}\right)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-1} du \\
&= \int_0^t du \\
&= t.
\end{aligned}$$

Ainsi d'après le Théorème de Caractérisation de Lévy (Karatzas et Shreve, 1991) W est un mouvement brownien standard sur $[0,T]$ sous la mesure $\mathbb{Q}$.

2. Nous montrons qu'en appliquant la formule d'Itô aux équations (3.20) et (3.21), on obtient la dynamique du modèle 3/2 donnée par le système (3.17).

   Posons
   $U_t = f\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)},\right)$ avec
   $f\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^2.$
   On a :
   $\dfrac{\partial f}{\partial t}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right) = 0$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right) = 2Y_t^{(i)} \quad \text{pour} \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right) = 0 \text{ si } \ i \neq j$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right) = 2.$
   Rappelons aussi que pour tout $i = 1, 2, 3, ..., n$,

$$dY_t^{(i)} = -\frac{\kappa\theta}{2}Y_t^{(i)}dt - \frac{\eta}{2}dW_t^{(i)}.$$

   On a donc

$d\left\langle Y^{(i)}, Y^{(j)}\right\rangle_t = 0$ si $i \neq j$ par indépendance des $W^{(i)}$ et

$d\left\langle Y^{(i)}, Y^{(i)}\right\rangle_t = \dfrac{\eta^2}{4}dt.$

Ainsi, d'après la formule d'Itô multidimensionnelle, on a

$$\begin{aligned}
dU_t &= \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right)dY_t^{(i)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right)d\left\langle Y^{(i)}, Y^{(j)}\right\rangle_t \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} 2Y_t^{(i)}dY_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(t, Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, ..., Y_t^{(n)}\right)d\left\langle Y^{(i)}, Y^{(i)}\right\rangle_t \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} 2Y_t^{(i)}\left(-\frac{\kappa\theta}{2}Y_t^{(i)}dt - \frac{\eta}{2}dW_t^{(i)}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{\eta^2}{4}\right)dt \\
&= -\kappa\theta\sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2 dt - \eta\sum_{i=1}^{n} Y_t^{(i)}\ dW_t^{(i)} + \frac{n\eta^2}{4}dt \\
&= -\kappa\theta U_t dt - \eta\ U_t^{\frac{1}{2}}\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_t^{(i)}\ dW_t^{(i)}}{U_t^{\frac{1}{2}}} + \frac{n\eta^2}{4}dt \\
&= -\kappa\theta U_t dt - \eta\ U_t^{\frac{1}{2}}\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_t^{(i)}\ dW_t^{(i)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2}} + \frac{n\eta^2}{4}dt \\
&= \left(\frac{n\eta^2}{4} - \kappa\theta U_t\right)dt - \eta U_t^{\frac{1}{2}}dW_t.
\end{aligned}$$

car $dW_t = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_t^{(i)}\ dW_t^{(i)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2}}$ avec W_t défini par (3.23).

Puisque $\dfrac{n\eta^2}{4} = \kappa + \eta^2$, car la condition $(\mathbf{C}')$ est vérifiée, alors

$$dU_t = \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta U_t\right)dt - \eta U_t^{\frac{1}{2}}\ dW_t,$$

d'où le processus U_t défini par (3.21) est un processus de Cox-Ingersoll-Ross et est aussi solution de l'EDS du processus U_t du système (3.17).

Nous montrons maintenant que le processus S_t défini par (3.20), est solution du processus S_t du système (3.17).

Nous ferons la démonstration avec le processus $X_t = \log(S_t)$. Nous rappelons donc la dynamique du processus du log-rendement du modèle 3/2. D'après le système (3.18), cette dynamique est définie par :

$$\begin{cases} dX_t &= \left(r - \dfrac{1}{2U_t}\right) dt + \sqrt{\dfrac{1}{U_t}} \left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\right) \\ dU_t &= \kappa\theta \left(\dfrac{\kappa + \eta^2}{\kappa\theta} - U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t} dW_t. \end{cases} \tag{3.24}$$

Aussi, de l'équation (3.19) on sait que le processus X est défini par :

$$\begin{aligned} X_t = X_0 &+ \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t U_s^{-\frac{1}{2}} dB_s \\ &+ \left(\frac{\kappa + \eta^2/2}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right) \int_0^t U_s^{-1} ds + \frac{\rho}{\eta} \log\left(\frac{U_0}{U_t}\right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $U_t = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_t^{(i)}\right)^2$. Il faut alors montrer que le processus X défini par (3.25) vérifie la dynamique (3.24). On sait que

$$dU_t = \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t}\, dW_t$$

alors

$$\frac{dU_t}{U_t} = \left(\frac{\kappa + \eta^2}{U_t} - \kappa\theta\right) dt - \eta U_t^{-\frac{1}{2}} dW_t.$$

D'après la formule d'Itô, on a

$$\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right) = \int_0^t \left(\frac{\kappa + \eta^2}{U_s} - \kappa\theta\right) ds - \int_0^t \eta U_s^{-\frac{1}{2}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\eta^2}{U_s} ds.$$

donc

$$\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right) = \int_0^t \left(\frac{2\kappa + \eta^2}{2U_s} - \kappa\theta\right) ds - \int_0^t \eta U_s^{-\frac{1}{2}} dW_s.$$

En remplaçant $\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right)$ par son expression dans (3.25), on obtient que

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t U_s^{-\frac{1}{2}}dB_s \\
&\quad + \left(\frac{\kappa+\eta^2/2}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right)\int_0^t U_s^{-1}ds + \frac{\rho}{\eta}\int_0^t \eta U_s^{-\frac{1}{2}}dW_s \\
&\quad - \frac{\rho}{\eta}\int_0^t \left(\frac{2\kappa+\eta^2}{2U_s} - \kappa\theta\right)ds \\
&= X_0 + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t U_s^{-\frac{1}{2}}dB_s + \rho\int_0^t U_s^{-\frac{1}{2}}dW_s \\
&\quad + \left(\frac{\kappa\rho}{\eta} + \frac{\eta\rho}{2} - \frac{1}{2}\right)\int_0^t U_s^{-1}ds - \left(\frac{\kappa\rho}{\eta} + \frac{\eta\rho}{2}\right)\int_0^t U_s^{-1}ds + \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}t \\
&= X_0 + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2U_s}\right)ds + \int_0^t U_s^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\rho^2}dB_s + \rho dW_s\right).
\end{aligned}$$

Sous forme différentielle, on a donc que

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2U_t}\right)dt + U_t^{-\frac{1}{2}}\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right).$$

d'où le processus X défini par (3.25) vérifie la dynamique du processus du log-rendement du système (3.24).

□

De même, comme dans le cas du modèle de Heston, si la condition $(\mathbf{C}')$ n'est pas vérifiée, nous définissons ici le modèle avec arrêt vérifiant la condition $(\mathbf{C}')$.

3.2.3 Dérivation de la dynamique du modèle avec arrêt

Tous les résultats présentés dans cette partie sont aussi nouveaux.
On sait que la dynamique du modèle 3/2 sous la mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$ est donnée par :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{U_t^{-1}} S_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t \right) \\ dU_t &= \kappa\theta \left(\dfrac{\kappa+\eta^2}{\kappa\theta} - U_t \right) dt - \eta\sqrt{U_t} dW_t, \end{cases} \tag{3.26}$$

avec $U_0 > 0, S_0 > 0$ les valeurs initiales des deux processus, κ, θ, η des nombres réels strictement positifs et $r > 0$ le taux de rendement sans risque.

Remarque 3.2.1. *Nous rappelons que le processus U est un processus de Cox-Ingersoll-Ross vérifiant la condition de Feller car $\kappa + \eta^2 > \eta^2$. Ainsi le processus U prend des valeurs strictement positives, c'est-à-dire que pour tout t, $U_t > 0$.*

Si le modèle ne vérifie pas la condition $(\mathbf{C}')$ alors nous définissons de nouveaux paramètres pour obtenir une calibration qui vérifie la condition $(\mathbf{C}')$, afin de dériver une solution faible.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5, κ_η et θ_η des nombres réels positifs tel que :

$$\begin{aligned} n &= \left(\left\lfloor \frac{4\kappa}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \vee 1 \right) + 4, \\ \kappa_\eta &= \frac{(n-4)\eta^2}{4}, \\ \theta_\eta &= \frac{\kappa\theta}{\kappa_\eta}. \end{aligned}$$

On a alors $\kappa_\eta \theta_\eta = \kappa\theta$.
Par la condition de Feller, on sait que le processus U ne peut pas atteindre zéro. Par contre, le processus peut prendre des valeurs arbitrairement proches de zéro. Dans ce qui suit, on arrêtera donc le processus U lorsqu'il approchera zéro.

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ un espace de probabilité filtré et $\epsilon \in (0,1)$. Considérons les mouvements browniens standards indépendants $W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}$ et B définis sur cet espace de probabilité filtré. Définissons les processus $\hat{U}$ et $\hat{S}$ par

$$\begin{aligned}\hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s^{-1}}dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t \\ &+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)\Bigg) \qquad (3.27)\end{aligned}$$

$$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2, \qquad (3.28)$$

où pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t\wedge\tau_\epsilon)}Y_0^{(i)} \qquad (3.29)$$

avec $Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n}$, $U_0 > \epsilon$ et $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0,T], \hat{U}_t < \epsilon\right\}$.
Dans ce qui suit, nous construisons une mesure de probabilité artificielle sous laquelle les processus $\hat{S}$ et $\hat{U}$ satisfont (3.26)

Lemme 3.2.1. *Soient $\left(W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}\right)$ des mouvements browniens standards et indépendants sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ et $\left\{Y_t^{(i)}\right\}_{i=1}^n$ des processus de Ornstein-Ulhenbeck dont la dynamique est définie par (3.29). Sous la mesure $\mathbb{Q}$, le processus W_t défini par*

$$W_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^n \left(Y_u^{(j)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)},$$

est un mouvement brownien standard pour $t \in [0,T]$ et le processus $\hat{U}_t = \sum_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2$ satisfait

$$\begin{cases} d\hat{U}_t &= \left(\kappa_\eta + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right)dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t}dW_t, \ \ si\ t \le \tau_\epsilon \\ d\hat{U}_t &= 0, \ \ si\ t > \tau_\epsilon \end{cases} \qquad (3.30)$$

avec $\hat{U}_0 = U_0$.

Pour la preuve de ce lemme, le lecteur peut se référer à la preuve du théorème 3.2.1.

En partant de la dynamique sous la mesure $\mathbb{Q}$ du processus $\hat{U}_t$ du modèle avec arrêt ci-dessus, on cherche la mesure sous laquelle $\hat{U}_t$ a la même distribution que celle de U_t sous $\mathbb{Q}$ pour $t \leq \tau_\epsilon$. On remarque que

$$\begin{aligned} d\hat{U}_t &= \left(\kappa_\eta + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t} dW_t \\ &= \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt + (\kappa_\eta - \kappa)\, dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t} dW_t \\ &= \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t}\left(dW_t - \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}} dt\right). \end{aligned}$$

Notons $\hat{W}_t$ le processus défini par $\hat{W}_0 = 0$ et

$$\begin{cases} d\hat{W}_t &= dW_t + \dfrac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}} dt, \text{ si } t \leq \tau_\epsilon \\ d\hat{W}_t &= dW_t, \text{ si } t > \tau_\epsilon. \end{cases} \tag{3.31}$$

Remarque 3.2.2. *S'il existe une mesure de probabilité sous laquelle $\hat{W}$ est un mouvement brownien standard sur $[0, T]$, alors sous cette mesure de probabilité, $\hat{U}_t$ aura la même distribution que celle de U_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ jusqu'à τ_ϵ.*

Dans le lemme suivant, nous définissons une mesure de probabilité sous laquelle $\hat{W}_t$ est un mouvement brownien.

Lemme 3.2.2. *Soient $\left(W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}\right)$ des mouvements browniens standards et indépendants sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ et W le mouvement brownien standard défini par (3.23). Soient $\epsilon \in (0, 1)$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0, T], \hat{U}_t < \epsilon\right\}$ un temps d'arrêt et $\hat{U}_0$ une constante réelle telle que $\hat{U}_0 > \epsilon$. On définit le processus $\hat{L}$ par*

$$\hat{L}_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2\hat{U}_s} ds\right). \tag{3.32}$$

et, on définit la mesure $\hat{\mathbb{P}}$ *telle que pour tout* $A \in \mathcal{F}_T$, $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A L_T\right]$ *où* $\mathbb{I}_A$ *est la fonction indicatrice de* A.

Alors le processus $\hat{L}$ *est une martingale sur* $[0,T]$ *sous la mesure* $\mathbb{Q}$. *De plus,* $\hat{\mathbb{P}}$ *définit une mesure de probabilité et enfin le processus*

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(Y_u^{(j)}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} + \int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \frac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} ds \tag{3.33}$$

est un mouvement brownien standard sur $[0,T]$ *sous la mesure* $\hat{\mathbb{P}}$ *satisfaisant (3.31).*

Démonstration. La preuve de ce lemme se fera en deux parties.

1. Montrons d'abord que $\hat{L}$ est une martingale.
   — Considérons le processus X défini pour tout t par

   $$X_t = \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta \hat{U}_t^{\frac{1}{2}}}.$$

   Le processus X est bien défini car $\hat{U}_t \geq \epsilon \ \forall\ t$ par définition de $\hat{U}$.

   — Ensuite, le processus est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ et on a

   $$\mathbb{Q}\left[\int_0^T X_t^2 dt < \infty\right] = 1.$$

   En effet,

   $$\int_0^T \frac{(\kappa_\eta - \kappa)^2}{\eta^2 \hat{U}_s} ds \quad < \quad \int_0^T \frac{(\kappa_\eta - \kappa)^2}{\eta^2 \epsilon} ds \quad < \quad \infty \ \ p.s.$$

— Enfin, on vérifie la condition de Novikov :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T ||X_s||^2 ds\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta}\right)^2 \frac{1}{\hat{U}_s} ds\right\}\right] \\
&< \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} ds\right\}\right] \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta}\right)^2 \frac{T}{\epsilon}\right\} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

La condition de Novikov (Karatzas et Shreve, 1991) est donc vérifiée. Par conséquent

$$\hat{L}_t = \exp\left(\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||X_s||^2 ds\right)$$

est une martingale sur $[0, T]$ sous la mesure $\mathbb{Q}$.

2. Montrons la deuxième partie du Lemme.

— Par définition, pour tout $t \in [0, T]$, $\hat{L}$ est strictement positif, alors $\mathbb{Q}\left(\hat{L}_T > 0\right) = 1$ *p.s.*
De plus

$$\mathbb{E}\left[\hat{L}_T\right] = 1$$

car $\hat{L}$ est une martingale sur $[0, T]$. Ainsi $\hat{\mathbb{P}}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$.

— Ensuite, $\{W_t, t \in [0, T]\}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$ (d'après le théorème 3). Alors, d'après le théorème de Girsanov (Karatzas et Shreve, 1991), le processus $\{\hat{W}_t, t \in [0, T]\}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$.

— Enfin, nous avons pour $t \leq \tau_\epsilon$,

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(Y_u^{(j)}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} + \int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \frac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} ds$$
$$= W_t + \int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \frac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} ds.$$

Ainsi, pour $t \leq \tau_\epsilon$, $d\hat{W}_t = dW_t + \dfrac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}}\, dt$
et pour tout $t > \tau_\epsilon$, $\displaystyle\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \frac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} ds$ est une constante. Par conséquent $d\hat{W}_t = dW_t$ pour tout $t > \tau_\epsilon$, d'où le résultat.

□

Remarque 3.2.3.

$$\hat{L}_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2 \hat{U}_s} ds \right)$$
$$= \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}}\bigg|\mathcal{F}_t$$

est la dérivée de Radon-Nikodym de $\hat{\mathbb{P}}$ par rapport à $\mathbb{Q}$. $\hat{L}_t$ peut être interprétée comme étant le facteur d'ajustement appliqué à une probabilité quelconque $\mathbb{Q}$ afin d'obtenir $\hat{\mathbb{P}}$. Nous pouvons aussi voir $\hat{L}_t$ comme étant le poids qui est donné à chaque simulation en fonction de sa vraisemblance au vrai modèle. Ainsi, plus la valeur simulée est significative, plus le poids qui lui est associé est élevé. On fait donc de l'échantillonnage préférentiel.

Nous pouvons maintenant définir la dynamique du processus $\hat{U}$ du modèle avec arrêt sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$.

Lemme 3.2.3. *Sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ le processus $\hat{U}$ défini*

par (3.28) du modèle avec arrêt a pour dynamique

$$\begin{cases} d\hat{U}_t &= \left((\kappa+\eta^2)-\kappa\theta\hat{U}_t\right)dt-\eta\sqrt{\hat{U}_t}d\hat{W}_t \ si\ t\leq\tau_\epsilon \\ d\hat{U}_t &= 0\ si\ t>\tau_\epsilon \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\hat{W}$ défini par (3.33) est un mouvement brownien standard sous $\hat{\mathbb{P}}$. De plus, pour $t\leq\tau_\epsilon$, le processus $\hat{L}$ peut être exprimé par

$$\hat{L}_t=\exp\left(\frac{\kappa-\kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)+\int_0^t\left(\kappa\theta-\frac{\eta^2+3\kappa_\eta-\kappa}{2\hat{U}_s}\right)ds\right]\right). \tag{3.35}$$

Démonstration.

1. Montrons que la dynamique de $\hat{U}_t$ est donnée par (3.34) sous la mesure artificielle $\hat{\mathbb{P}}$.

   On sait que sous la mesure $\mathbb{Q}$,

   $$d\hat{U}_t=\left(\kappa_\eta+\eta^2-\kappa\theta\hat{U}_t\right)dt-\eta\sqrt{\hat{U}_t}dWt.$$

   — Si $t>\tau_\epsilon$, on a $d\hat{U}_t=0$. En effet, par définition, à τ_ϵ on arrête le processus $\hat{U}_t$ à ϵ. On a donc $\hat{U}_t=\epsilon\ \forall\ t>\tau_\epsilon$, d'où $d\hat{U}_t=0$.

   — Si $t\leq\tau_\epsilon$, on a $dW_t=d\hat{W}_t+\dfrac{\kappa_\eta-\kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}}dt$.

   Ainsi,

   $$\begin{aligned} d\hat{U}_t &= \left(\kappa_\eta+\eta^2-\kappa\theta\hat{U}_t\right)dt-\eta\hat{U}_t^{\frac{1}{2}}\left(d\hat{W}_t+\frac{\kappa_\eta-\kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}}dt\right) \\ &= \left(\kappa_\eta+\eta^2-\kappa\theta\hat{U}_t\right)dt-\eta\hat{U}_t^{\frac{1}{2}}d\hat{W}_t-(\kappa_\eta-\kappa)\,dt \end{aligned}$$

   d'où

   $$d\hat{U}_t=\left(\kappa+\eta^2-\kappa\theta\hat{U}_t\right)dt-\eta\hat{U}_t^{\frac{1}{2}}\ d\hat{W}_t\ \text{ si }\ t\leq\tau_\epsilon.$$

   Comme $\hat{W}$ est un mouvement brownien sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$, la première partie du Lemme est démontrée.

2. Montrons que $\hat{L}_t$ est donné par (3.35).

   On sait que sous la mesure $\mathbb{Q}$,

$$d\hat{U}_t = \left(\kappa_\eta + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt - \eta\hat{U}_t^{\frac{1}{2}} dW_t, \text{ pour } t \leq \tau_\epsilon.$$

   Donc

$$\frac{d\hat{U}_t}{\hat{U}_t} = \left(\frac{\kappa_\eta + \eta^2}{\hat{U}_t} - \kappa\theta\right) dt - \eta\hat{U}_t^{-\frac{1}{2}} dW_t.$$

   Puisque $\hat{U}_t \geq \epsilon$, on a d'après Itô, pour $t \leq \tau_\epsilon$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) &= \int_0^t \left(\frac{\kappa_\eta + \eta^2}{\hat{U}_s} - \kappa\theta\right) ds - \int_0^t \frac{\eta}{\hat{U}_s^{\frac{1}{2}}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\eta^2}{\hat{U}_s} ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{2\kappa_\eta + \eta^2}{2\hat{U}_s} - \kappa\theta\right) ds - \int_0^t \frac{\eta}{\hat{U}_s^{\frac{1}{2}}} dW_s
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\int_0^t \frac{\eta}{\hat{U}_s^{\frac{1}{2}}} dW_s = \int_0^t \left(\frac{2\kappa_\eta + \eta^2}{2\hat{U}_s} - \kappa\theta\right) ds - \log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right).$$

   Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\hat{L}_t &= \exp\left(\int_0^t \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2\hat{U}_s} ds\right) \\
&= \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{2\kappa_\eta + \eta^2}{2\hat{U}_s}\right) ds\right] - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2\hat{U}_s} ds\right) \\
&= \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{2\kappa_\eta + \eta^2}{2\hat{U}_s} - \frac{\kappa_\eta - \kappa}{2\hat{U}_s}\right) ds\right]\right) \\
&= \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2\hat{U}_s}\right) ds\right]\right)
\end{aligned}$$

   d'où

$$\hat{L}_t = \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2\hat{U}_s}\right) ds\right]\right),$$

   pour $t \leq \tau_\epsilon$

$\square$

Enfin, pour définir la dynamique du modèle avec arrêt, il faut déterminer la dynamique de l'actif sous-jacent du dit modèle sous la mesure de probabilité artificielle. Cette dynamique est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.2.4. *Sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ le processus $\hat{S}$ défini par (3.27) de l'actif sous-jacent du modèle avec arrêt a pour dynamique*

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r\hat{S}_t dt + \hat{U}_t^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_t\left(\rho d\hat{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right), \ si\ t \leq \tau_\epsilon, \\ d\hat{S}_t &= \hat{S}_t\left(r_\epsilon dt + \sigma_\epsilon dB_t\right), \ si\ t > \tau_\epsilon, \end{cases} \tag{3.36}$$

avec

$$\begin{cases} d\hat{U}_t &= \left((\kappa+\eta^2) - \kappa\theta\hat{U}_t\right)dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t}d\hat{W}_t, \ si\ t \leq \tau_\epsilon, \\ d\hat{U}_t &= 0\ si\ t \geq \tau_\epsilon, \end{cases}$$

où $r_\epsilon = r - \rho\dfrac{2\kappa\theta\epsilon + \eta\rho - \eta^2 - 2\kappa}{2\eta\epsilon}$, $\sigma_\epsilon = \sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{\epsilon}}$ *et* $\left(B, \hat{W}\right)$ *sont des mouvements browniens standards et indépendants sous la mesure artificielle* $\hat{\mathbb{P}}$ *car* (B, W) *sont des mouvement browniens standards indépendants sous la mesure* $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $\hat{S}_t$ défini par (3.27). On rappelle que

$$\begin{aligned} \hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s^{-1}}\, dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t \\ &+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)\Bigg) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} n &= \left(\left\lfloor \frac{4\kappa}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \vee 1\right) + 4, \\ \kappa_\eta &= \frac{(n-4)\,\eta^2}{4} \quad \text{et} \\ \kappa\theta &= \kappa_\eta\theta_\eta. \end{aligned}$$

Montrons que $\hat{S}_t$ vérifie l'équation différentielle stochastique (3.36).

1. Si $t \leq \tau_\epsilon$, on a

$$d\hat{U}_t = \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t} d\hat{W}_t,$$

et

$$\frac{d\hat{U}_t}{\hat{U}_t} = \left(\frac{\kappa + \eta^2}{\hat{U}_t} - \kappa\theta\right) dt - \eta\hat{U}_t^{-\frac{1}{2}}\, d\hat{W}_t.$$

D'après la formule d'Itô, on a

$$\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) = \int_0^t \left(\frac{2\kappa + \eta^2}{2\hat{U}_s} - \kappa\theta\right) ds - \int_0^t \eta\hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\, d\hat{W}_s.$$

En remplaçant $\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)$ par son expression dans (3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s^{-1}}\, dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t \\
&+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds + \frac{\rho}{\eta}\int_0^t \eta\hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\, d\hat{W}_s \\
&- \frac{\rho}{\eta}\int_0^t \left(\frac{2\kappa + \eta^2}{2\hat{U}_s} - \kappa\theta\right) ds\Bigg) \\
= S_0 \exp\Bigg(&\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s^{-1}}\left(\sqrt{1-\rho^2}\, dB_s + \rho\, d\hat{W}_s\right) + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta} + \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t \\
&+ \left(\frac{\kappa\rho}{\eta} - \frac{\kappa\rho}{\eta} + \frac{\rho\eta}{2} - \frac{\rho\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)\int_0^t \hat{U}_s^{-1} ds\Bigg) \\
= S_0 \exp\Bigg(&\int_0^t \left(r - \frac{1}{2\hat{U}_s}\right) ds + \int_0^t \hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\rho^2}\, dB_s + \rho\, d\hat{W}_s\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Sous forme différentielle, on a

$$d\hat{S}_t = r\hat{S}_t dt + \hat{U}_t^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_t\left(\sqrt{1-\rho^2}\, dB_s + \rho\, d\hat{W}_s\right), \text{ si } t \leq \tau_\epsilon.$$

2. Si $t > \tau_\epsilon$, on a $\hat{U}_t = \epsilon$ et $\hat{S}_t$ devient :

$$\begin{aligned}
\hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\, dB_s + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\epsilon}}\left(B_t - B_{\tau_\epsilon}\right) + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t \\
&+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\left(\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s^{-1} ds + \frac{t - \tau_\epsilon}{\epsilon}\right) - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\epsilon}{U_0}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Puisque $t > \tau_\epsilon$, alors pour $s \in [0, \tau_\epsilon]$, les valeurs de $\hat{U}_s$ sont fixes et les quantités $\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s ds$ et $\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\, dB_s$ sont fixes par rapport à t. Ces termes sont donc considérés comme constants lors de l'application de la formule d'Itô.

Posons $\hat{S}_t = g(t, B_t)$ où

$$g(t,x) = S_0 \exp\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s^{-\frac{1}{2}}\, dB_s + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\epsilon}}\,(x - B_{\tau_\epsilon}) + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\left(\int_0^{\tau_\epsilon} \hat{U}_s^{-1} ds + \frac{t-\tau_\epsilon}{\epsilon}\right) - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\epsilon}{U_0}\right)\right).$$

On a alors,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, B_t) = \hat{S}_t\left(\left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\epsilon^{-1}\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, B_t) = \sqrt{1-\rho^2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_t,$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, B_t) = (1-\rho^2)\,\epsilon^{-1}\hat{S}_t,$$
$$d\langle B_t, B_t\rangle = dt.$$

Donc, d'après la formule d'Îto, on a :

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t &= \hat{S}_t\left(\left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\epsilon^{-1}\right)\, dt \\ &\quad + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_t\, dB_t + \frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)\epsilon^{-1}\hat{S}_t\, dt \\ &= \hat{S}_t\left(\sqrt{1-\rho^2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\, dB_t + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)\, dt + \frac{\rho\kappa}{\eta\epsilon}\, dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho\eta}{2\epsilon}\, dt - \frac{1}{2\epsilon}\, dt + \frac{1}{2\epsilon}\, dt - \frac{\rho^2}{2\epsilon}\right) \\ &= \hat{S}_t\left(r - \rho\frac{2\kappa\theta\epsilon + \eta\rho - \eta^2 - 2\kappa}{2\eta\epsilon}\right)\, dt + \hat{S}_t\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\epsilon}}\, dB_t \end{aligned}$$

d'où

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t\left(r_\epsilon\, dt + \sigma_\epsilon\, dB_t\right), \text{ si } t > \tau_\epsilon$$

□

Remarque 3.2.4. *Comme on arrête le processus $\hat{U}$ à ϵ après τ_ϵ, on obtient le modèle de Black-Scholes pour $t > \tau_\epsilon$.*

En résumé, soient $\left(B, \hat{W}\right)$ deux mouvements browniens standards indépendants sous $\hat{\mathbb{P}}$. La dynamique du modèle avec arrêt sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ est donnée par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} d\hat{S}_t & = & r\hat{S}_t dt + \hat{U}_t^{-\frac{1}{2}}\hat{S}\left(\rho d\hat{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right) \\ d\hat{U}_t & = & \left((\kappa+\eta^2) - \kappa\theta\hat{U}_t\right)dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t}d\hat{W}_t \end{array}\right. \quad \text{si } t \leq \tau_\epsilon \tag{3.37}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} d\hat{S}_t & = & \hat{S}_t\left(r_\epsilon dt + \sigma_\epsilon\, dB_t\right) \\ d\hat{U}_t & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{si } t > \tau_\epsilon \tag{3.38}$$

où $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0,T] : \hat{U}_t \leq \epsilon\right\}$.
De plus considérons les processus suivants :

$$\begin{aligned} \hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s}^{-1} dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t \\ &+ \left[\frac{\kappa+\frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^n \left(Y_t^{(i)}\right)^2, \tag{3.40}$$

$$\hat{L}_t = \exp\left(\frac{\kappa-\kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{\eta^2+3\kappa_\eta-\kappa}{2\hat{U}_s}\right)ds\right]\right), \text{ si } t \leq \tau_\epsilon \tag{3.41}$$

et

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}t\wedge\tau_\epsilon}Y_0^{(i)} \text{ où } Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n}, \tag{3.42}$$

avec $i \in \{1,2,3,...,n\}$ et $W_t^{(i)}$ des mouvements browniens standards indépendants. Ces processus satisfont, sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$ définie pour tout $A \in \mathcal{F}_T$ par

$\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A L_T\right]$, les équations (3.37) et (3.38). Par conséquent, l'ensemble de ces processus définit une solution explicite faible du modèle avec arrêt.

3.2.4 Méthode de simulation explicite pondérée du modèle 3/2

Dans la solution explicite faible du modèle 3/2 apparait le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le processus inverse de la variance $U_t = \dfrac{1}{V_t}$. Nous devons alors simuler chacun de ces processus. Dans ce qui suit, nous considérons la partition $\mathcal{P} = \{0, h, 2h, ..., Mh\}$ de l'intervalle de temps $[0, T]$ de pas uniforme $h = \frac{T}{M}$ et nous discrétisons chacun des processus.

3.2.4.1 Simulation du processus de Ornstein-Uhlenbeck Y

Le processus de Ornstein-Uhlenbeck Y est défini par

$$Y_t = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}dW_u + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}t}Y_0.$$

Pour $t \in [0, \tau_\epsilon)$, on a que

$$\begin{aligned}
Y_{t+h} &= -\frac{\eta}{2}\int_0^{t+h} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t+h-u)}dW_u + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t+h)}Y_0. \\
&= e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t+h)}\left(-\frac{\eta}{2}\int_0^t e^{\frac{\kappa\theta}{2}u}dW_u - \frac{\eta}{2}\int_t^{t+h} e^{\frac{\kappa\theta}{2}u}dW_u + Y_0\right) \\
&= e^{-\frac{\kappa\theta}{2}h}Y_t - \frac{\eta}{2}e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t+h)}\int_t^{t+h} e^{\frac{\kappa\theta}{2}u}dW_u.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\eta}{2}e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t+h)}\int_t^{t+h} e^{\frac{\kappa\theta}{2}u}dW_u$ est une intégrale de Wiener, donc elle suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $\dfrac{\eta^2}{4\kappa\theta}\left(1 - e^{-\kappa\theta h}\right)$ car

$$\frac{\eta^2}{4}e^{-\kappa\theta(t+h)}\int_t^{t+h} e^{\kappa\theta u}du = \frac{\eta^2}{4\kappa\theta}\left(1 - e^{-\kappa\theta h}\right).$$

En posant $\alpha_h = e^{-\frac{\kappa\theta}{2}h}$ et $\sigma_h = \eta\sqrt{\frac{1-e^{-\kappa\theta h}}{4\kappa\theta}}$, on obtient

$$Y_{t+h} \overset{\mathcal{D}}{=} \alpha_h Y_t - \sigma_h Z,$$

où Z suit la loi normale centrée réduite et $\overset{\mathcal{D}}{=}$ définit l'égalité en loi.

3.2.4.2 Simulation du processus de variance V

On sait que dans le modèle 3/2, le processus de variance V est exprimé en fonction du processus U tel que $V_t = \dfrac{1}{U_t}$ avec $U_t > 0$ et $U_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(Y_t^{(i)}\right)^2$ où $Y^{(i)}$ $i = 1, 2, ..., n$ sont des processus construit à l'aide des mouvements browniens indépendants $W^{(i)}$ et définis dans la sous section précédente. Puisqu'on sait simuler les $Y_t^{(i)}$, il est alors plus simple de simuler U_t et V_t. Il faut noter que U_{t+h} dépend de U_t par la relation entre Y_{t+h} et Y_t.

3.2.4.3 Simulation du processus S

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons $\hat{S}_t$ et $\hat{L}_t$ définis respectivement en (3.39) et (3.41). Nous nous intéressons ici à la simulation des processus $\hat{S}$ et $\hat{L}$ jusqu'à T. Cela signifie que l'estimateur du prix sera calculé en utilisant uniquement les trajectoires pour lesquelles $\tau_\epsilon > T$. On introduit donc un biais dans l'estimateur, mais nous indiquons dans la Sous-section 3.4.4 que ce biais est négligeable. Ainsi, le fait que (3.44) tienne seulement jusqu'à τ_ϵ, cela n'affecte pas notre méthode de simulation. Dans le but d'écrire plus simplement $\hat{S}_t$ et $\hat{L}_t$ définis en (3.39) et (3.41), définissons les constantes suivantes.

$$a_1 = \sqrt{1-\rho^2}, \qquad b_1 = r - \frac{\kappa\theta}{\eta}\rho,$$

$$c_1 = \frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}, \qquad d_1 = \frac{\rho}{\eta},$$

$$e_1 = \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta^2} \text{ et} \qquad f_1 = -e_1\,\frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2}.$$

Ainsi pour $t \in [0,T)$, conditionnellement à $\hat{S}_t$, $\hat{V}_t$, $\hat{V}_{t+h}$ et $\hat{L}_t$, (3.39) et (3.41) peuvent s'écrire comme suit :

$$\hat{S}_{t+h} = \hat{S}_t \exp\left(a_1 \int_t^{t+h} \sqrt{\hat{V}_s} dB_s + b_1 h + c_1 \int_t^{t+h} \hat{V}_s ds + d_1 \log\left(\frac{\hat{V}_t}{\hat{V}_{t+h}}\right)\right) \quad (3.43)$$

$$\hat{L}_{t+h} = \hat{L}_t \exp\left\{e_1 \left(\log(\frac{\hat{V}_t}{\hat{V}_{t+h}}) + \kappa\theta h\right) + f_1 \int_t^{t+h} \hat{V}_s ds\right\}, \text{ si } t \leq \tau_\epsilon. \quad (3.44)$$

avec $\hat{V}_t = \dfrac{1}{\hat{U}_t}$, où $\hat{V}_t \geq \epsilon > 0$

Puisque B et $\hat{V}$ sont indépendants, alors sachant $\hat{V}$ l'intégrale $\int_t^{t+h} a_1 \sqrt{\hat{V}_s} dB_s$ est une intégrale de Wiener. Cette intégrale peut être simulée à partir d'une variable aléatoire normale centrée et de variance $\left(a_1^2 \int_t^{t+h} \hat{V}_s ds\right)$. De plus, l'intégrale $\int_t^{t+h} \hat{V}_s ds$ peut être approximée par une fonction déterministe conditionnellement à $\hat{V}$. En effet, pour le calcul des intégrales par rapport au temps, nous utiliserons l'approximation de Simpson $\dfrac{1}{3}$. Donc nous divisons l'intervalle de temps $[t, t+h)$ en M sous-intervalles d'amplitude $\dfrac{h}{M}$. L'approximation de Simpson $\dfrac{1}{3}$ de la variance intégrée est donc donnée pour $M > 0$ par

$$\int_t^{t+h} \hat{V}_s ds \simeq \frac{h}{3M} \left\{\hat{V}_t + \hat{V}_{t+h} + 2 \sum_{l=1}^{\frac{M}{2}-1} \hat{V}_{t+h-\frac{2lh}{M}} + 4 \sum_{l=1}^{\frac{M}{2}} \hat{V}_{t+h-\frac{(2l-1)h}{M}}\right\}. \quad (3.45)$$

Enfin, pour raison de simplification de l'algorithme, nous posons $h = 1$ et nous notons par $IntV$ la variance intégrée. Ainsi l'algorithme de simulation pondérée du modèle 3/2 est présenté dans l'Algorithme 3. Notons que cet algorithme est fortement basé sur ceux de Kouritzin et MacKay (2020)

Algorithm 3 Algorithme de Simulation explicite pondérée

procedure MDSIM(S_0,V_0,n,N,T)

$\left\{\left(S_0^j, L_0^j, \eta_\epsilon^j\right) = (S_0, 1, T)\right\}_{j=1}^{N}$

$U_0 = \dfrac{1}{V_0}, \left\{Y_0^{j,i} = \sqrt{\dfrac{U_0}{n}}\right\}_{j,i=1}^{N,n}, \left\{U_{\frac{k}{M}}^j = 0\right\}_{j,k=1}^{N,M}$

for $t = 1 \;\; to \;\; T$ **do**

$\left\{U_t^j = 0\right\}_{j=0}^{N}$

for $k = M - 1 \; to \; 0$ **do**

Générer variables aléatoires normales centrées réduites $\{Z^{j,i}\}_{j,i=1}^{N,n}$

$\left\{Y_{t-\frac{k}{M}}^{j,i} = \alpha_M Y_{t-\frac{k+1}{M}}^{j,i} - \sigma_M Z^{j,i}\right\}_{j,i=1}^{N,n}$

$\left\{U_{t-\frac{k}{M}}^j = U_{t-\frac{k+1}{M}}^j + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t-\frac{k}{M}}^{j,i}\right)^2\right\}_{j=1}^{N} \left\{V_{t-\frac{k}{M}}^j = \dfrac{1}{U_{t-\frac{k}{M}}^j}\right\}_{j=1}^{N}$

end for

$\left\{IntV^j = \dfrac{V_{t-1}^j + 4V_{t-\frac{M-1}{M}}^j + 2V_{t-\frac{M-2}{M}}^j + ... + 2V_{t-\frac{2}{M}}^j + 4V_{t-\frac{1}{M}}^j + V_t^j}{3M}\right\}_{j=1}^{N}$

Générer variables aléatoires normales $\{Z^j\}_{j=1}^{N} \rightsquigarrow N\left(0, a_1\sqrt{IntV^j}\right)$

$\left\{S_t^j = S_{t-1}^j \exp\left(N^j + b_1 + c_1 IntV^j + d_1 \log\left(\dfrac{V_{t-1}^j}{V_t^j}\right)\right)\right\}_{j=1}^{N}$

for $j = 1 \;\; \rightarrow \;\; N$ **do**

if $t \leq \eta_\epsilon$ **then**

if $\min_{k\in\{0,1,...,M-1\}} \dfrac{1}{V_{t-\frac{k}{2}}^j} > \epsilon$ **then**

$L_t^j = L_{t-1}^j \exp\left\{e_1\left(\ln\left(\dfrac{V_{t-1}^j}{V_t^j}\right) + \kappa\theta\right) + f_1 IntV^j\right\}$

else

$\eta_\epsilon^j = t_k - 1$

end if

end if

end for

end for

end procedure

3.2.5 Application de l'algorithme à la tarification

Dans notre travail, nous utiliserons l'algorithme 3 pour simuler le prix d'un actif financier afin de tarifier des produits dérivés. Nous désignons alors par $p(t, S_t)$ la valeur actualisée du payoff d'un produit dérivé. Pour une option d'achat européenne par exemple, on a $p\left(T, S_T\right) = \max\left((S_T - K)e^{-rT}, 0\right)$. Donc on a simplement à ajouter cette étape dans l'algorithme précédent pour pouvoir déterminer le prix du produit dérivé. Ce prix est obtenu en utilisant un estimateur Monte Carlo pondéré par les poids L_T encore appelé estimateur Monte Carlo avec échantillonnage préférentiel. Cet estimateur est défini selon Kouritzin et MacKay (2020) par

$$\mathbb{E}\left[p\left(T, S_T\right)\right] \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \hat{L}_T^{(k)} p\left(\hat{S}_T^{(k)}, T\right) \mathbb{I}_{\{\hat{\tau}_\epsilon^{(k)} > T\}}}{\sum\limits_{k=1}^{N} \hat{L}_T^{(k)} \mathbb{I}_{\{\hat{\tau}_\epsilon^{(k)} > T\}}}. \tag{3.46}$$

Le fait de ne considérer que les trajectoires pour lesquelles $\hat{U}$ demeure au-dessus de ϵ rend l'estimateur biaisé, mais on montre que ce biais est négligeable en pratique, et il n'affecte pas la performance de l'algorithme.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques obtenus dans l'évaluation des produits dérivés dans le cadre du modèle 3/2. Nous évaluons le prix des options d'achats européennes avec les différentes méthodes de simulations abordées dans notre travail, afin de tester l'algorithme développé dans le chapitre précédent. Ces résultats sont présentés en deux parties. L'erreur quadratique moyenne relative et l'efficacité obtenues avec la méthode de simulation pondérée (voir algorithme 3) sont présentées dans la première partie. Dans la deuxième partie, nous faisons une étude comparative basée sur l'erreur quadratique moyenne relative et l'efficacité des méthodes de Milstein, exponentielle quadratique de Andersen et de la simulation pondérée.

Nous rappelons aussi que le payoff à l'échéance d'une option d'achat européenne de maturité T et prix d'exercice K est $C(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$. Nous estimons donc le prix au temps $t = 0$ d'une option d'achat européenne sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ pour les méthodes de Milstein et l'exponentielle quadratique de Andersen en utilisant la simulation Monte Carlo par

$$\hat{C} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right] \approx \frac{e^{-rT}}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(S_T^{(i)} - K\right)^+ \tag{4.1}$$

où $(x-K)^+ = \max(x-K,0)$, N est le nombre de simulations, r est le taux d'intérêt sans risque et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ est l'espérance sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$. Dans le cas de la simulation pondérée, cet estimateur est donné par (3.46). Aussi, pour approximer l'erreur quadratique moyenne relative (RMSE) d'un estimateur $\hat{C}$ de C, on calcule l'estimateur $\hat{C}$ J fois puis on applique la formule (4.2) suivante

$$RMSE = \frac{\mathbb{E}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]}{C} \approx \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\frac{\left(C-\hat{C}^{(j)}\right)^2}{C} \tag{4.2}$$

où chaque $\hat{C}_j$, $j = 1, 2, .., J$ est calculé soit par (4.1) soit par (3.46).

Nous considérons pour la suite, plusieurs ensembles de paramètres pour le modèle 3/2. Le premier ensemble de paramètres $(PS1)$ provient de l'article de Baldeaux (2012). Le second ensemble de paramètres $(PS2)$ est obtenu par Drimus (2012). Le troisième ensemble de paramètres $(PS3)$ est obtenu à partir du second ensemble de paramètres en le modifiant afin que la condition $(\mathbf{C}')$ soit vérifiée. Pour le quatrième ensemble de paramètres $(PS4)$, nous modifions $PS2$ afin d'augmenter le nombre n de processus de Ornstein-Uhlenbeck, sans que la condition $(\mathbf{C}')$ soit vérifiée. Enfin, l'ensemble de paramètres $(PS5)$ est obtenu à partir de $(PS2)$ afin d'augmenter n et que la condition $(\mathbf{C}')$ soit vérifiée. Nous fixons le paramètre $\epsilon = 10^{-5}$ pour tous les ensembles de paramètres. Ces ensembles de paramètres sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau (4.1) Ensembles de paramètres

	$PS1$	$PS2$	$PS3$	$PS4$	$PS5$
S_0	1	100	100	100	100
V_0	1	0.2450^2	0.2450^2	0.2450^2	0.2450^2
κ	2	22.84	**18.3184**	**19.76**	**20.48**
θ	1.5	0.4669^2	0.4669^2	0.4669^2	0.4669^2
η	0.2	8.56	8.56	**3.2**	**3.2**
ρ	-0.5	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99
r	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00
ϵ	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

4.1 Présentation des résultats

Les résultats numériques obtenus dans le calcul des prix des options avec la méthode de simulation pondérée dans le cadre du modèle 3/2 sont présentés dans cette section. Nous considérons les trois premiers ensembles de paramètres $PS1$, $PS2$ et $PS3$. $PS1$ vérifie la condition $(\mathbf{C}^{'})$ avec un nombre $n = 204$ processus de Ornstein-Uhlenbeck. $PS2$ ne vérifie pas la condition $(\mathbf{C}^{'})$ avec $n = 5$ processus de Ornstein-Uhlenbeck et $PS3$ vérifie la condition $(\mathbf{C}^{'})$ avec $n = 5$.
Ensuite, nous considérons une option d'achat européenne au cours (*at-the-money*) d'échéance $T = 1$ pour $PS1$. Le prix exact de cette option dans le modèle 3/2 trouvé avec le logiciel Mathematica dans l'article de Baldeaux (2012) est $C_1 = 0.443059$. Une option d'achat européenne au cours (*at-the-money*) d'échéance $T = 0.5$ est considérée dans les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$. Le prix exact de cette option selon les formules (1.20) et (1.29) avec $PS2$ est $C_2 = 7.3864$ et celui avec $PS3$ est $C_3 = 7.0422$. Nous calculons l'erreur quadratique moyenne relative

du prix de ces options dans le modèle 3/2 avec la méthode de simulation pondérée. Pour chaque nombre de simulations, l'erreur quadratique moyenne relative est approximée en calculant l'estimateur du prix $J = 20$ fois. Nous rappelons aussi que M est le nombre de sous-intervalles utilisés dans l'approximation de Simpson $\frac{1}{3}$ de la variance intégrée. Pour les simulations, nous avons fixé le paramètre $\epsilon = 10^{-5}$. Nous avons remarqué qu'avec cette valeur, le processus de variance prend des valeurs au dessus de ϵ, c'est-à-dire que $\hat{U}_t > \epsilon$, $\forall\ t \in [0, t]$. Ainsi, en pratique, si on choisit un ϵ assez petit, on a que $\hat{U}$ demeure au-dessus de ϵ. On se concentre donc sur la simulation des processus pour $t \leq \tau_\epsilon$.
Nous obtenons alors les résultats du tableau (4.2).

Tableau (4.2) Erreur quadratique moyenne relative avec $PS1$, $PS2$ et $PS3$

Nombre de		Erreur		
simulations	M	$PS1$	$PS2$	$PS3$
5000	2	0.00271	0.00183	0.00239
	4	0.00316	0.00225	0.00214
10000	2	0.00203	0.00111	0.00172
	4	0.00158	0.00112	0.00143
50000	2	0.00157	0.00085	0.00067
	4	0.00135	0.00083	0.00070

Comme nous le voyons dans le tableau (4.2), l'erreur quadratique moyenne relative décroit en fonction du nombre de simulations. De plus, nous remarquons que les erreurs quadratiques moyennes relatives obtenues avec les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$ sont dans le même ordre de grandeurs. Certes, l'ensemble de paramètres $PS1$ produit des erreurs quadratiques moyennes relative légèrement

supérieures à celles des ensembles $PS2$ et $PS3$. Cela peut-être dû au fait que l'option considérée dans l'ensemble $PS1$ a une maturité plus longue, ainsi, l'erreur de discrétisation dans ce cas est un peu plus élevée.

Nous analysons maintenant l'impact de la condition $(\mathbf{C}')$ sur le compromis entre la précision et le temps de calcul. Nous définissons ce compromis comme étant l'efficacité d'une méthode. Dans les notes de cours de Simulation Monte Carlo (Ameur, 2019), l'efficacité d'un estimateur $\hat{C}$ de C est donnée par la formule suivante

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right) = \frac{1}{\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C - \hat{C}\right)^2\right] \times \hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)} \tag{4.3}$$

où $\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$ est le temps de calcul moyen en seconde et $\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C - \hat{C}\right)^2\right]$ est l'erreur quadratique moyenne.

Nous considérons les deux ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$ et nous fixons $M = 2$. Les résultats présentés dans le tableau (4.3) sont obtenus en calculant les estimateurs $J = 20$ fois. Nous avons pour chaque nombre de simulations, l'erreur quadratique moyenne, l'efficacité et le temps de calcul en secondes.

Tableau (4.3) Efficacité avec $PS2$ et $PS3$

Nombre de simulations	M		Efficacité $PS2$	Efficacité $PS3$
5000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.01352	0.01683
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.1087	0.0837
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	680.95	709.90
10000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.0082	0.01211
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.4752	0.2497
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	256.63	330.70
50000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00472	0.006278
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	2.1046	1.3242
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	75.68	160.06

Après l'analyse du tableau (4.3), nous remarquons que l'efficacité lorsque le condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée est plus grande que celle lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée. Cela est lié à l'étape supplémentaire dans l'algorithme (3) lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée. Avec 5 processus d'Ornstein-Uhlenbeck à simuler, on constate que le temps de calcul devient important lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée. Ainsi, l'efficacité diminue considérablement bien qu'on ait une bonne précision. Par conséquent, plus le nombre de processus d'Ornstein-Uhlenbeck à simuler est élevé, moins la méthode de simulation pondérée est efficace.

4.2 Analyse comparative des méthodes

Dans cette section, nous analysons la précision et l'efficacité de notre méthode comparativement aux schémas de Milstein et l'exponentielle quadratique de Andersen. Pour l'étude comparative de la précision des méthodes, nous considérons d'une part les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS4$ et d'autre part les ensembles de paramètres $PS3$ et $PS5$. Nous effectuons ce choix car nous analysons l'impact du nombre de processus de Ornstein-Uhlenbeck sur la précision lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée et lorsqu'elle n'est pas vérifiée. Pour l'étude comparative de l'efficacité, nous fixons $M = 2$ et nous choisissons les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$ car nous volons aussi analyser l'impact de la condition $(\mathbf{C}^{'})$ sur cette étude.

Nous considérons aussi des options d'achats européennes hors du cours (*out-the-money OTM*), au cours (*at-the-money ATM*) et dans le cours (*in-the-money ITM*) tel que $K/S_0 \in \{0.95, 1, 1.05\}$ où K est le prix d'exercice de l'option et S_0 la valeur au comptant de l'actif sous-jacent. Toutes ces options ont une maturité de 6 mois, c'est à dire $T = 0.5$. Nous remarquons qu'avec les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$, nous simulons $n = 5$ processus d'Ornstein-Uhlenbek tandis qu'avec $PS4$ et $PS5$, $n = 12$.
Le tableau (4.4) résume les prix exacts des différentes options d'achats européennes avec les ensembles de paramètres $PS2$, $PS3$, $PS4$ et $PS5$.

Tableau (4.4) Prix exacts des options d'achat européennes avec $PS2$, $PS3$, $PS4$ et $PS5$

	Prix exact			
K/S_0	$PS2$	$PS3$	$PS4$	$PS5$
0.95	10.364	10.055	11.657	11.724
1	7.3864	7.0422	8.9263	8.9987
1.05	4.9376	4.5860	6.6360	6.7101

A partir des prix exacts ci-dessus, nous calculons l'erreur quadratique moyenne des méthodes de Milstein, de l'approximation quadratique de Andersen (QE), de la simulation pondérée (WE) avec $M = 2$ et avec $M = 4$. Les résultats de l'erreur quadratique moyenne relative (RMSE) sont consignés dans les tableaux (4.5) et (4.6). Il faut noter que les valeurs qui sont dans ces tableaux doivent être multipliées par 10^{-4} pour obtenir les erreurs quadratiques moyennes relatives. Nous avons fait cette représentation pour une meilleure gestion des tableaux.

Tableau (4.5) Erreurs quadratiques moyennes relatives avec $PS2$ et $PS4$ ($\times 10^{-4}$)

Nombre de		Milstein		QE		WE(M=2)		WE(M=4)	
simulation	K/S_0	n=5	n=12	n=5	n=12	n=5	n=12	n=5	n=12
	0.95	5.583	9.329	7.282	**7.747**	8.959	8.551	**9.167**	10.01
20000	1	**7.488**	8.349	7.616	12.13	7.802	8.567	7.454	**6.964**
	1.05	6.035	10.55	**5.532**	9.309	7.492	**6.503**	8.489	10.01
	0.95	2.788	4.715	**2.451**	4.713	4.860	**4.648**	7.193	5.777
40000	1	4.323	5.101	**3.918**	4.939	4.135	**3.164**	5.213	5.019
	1.05	3.053	4.444	**2.887**	4.474	5.644	3.867	5.117	**3.264**
	0.95	1.898	3.875	**1.954**	**2.621**	3.016	2.829	5.122	3.056
60000	1	2.428	3.486	**2.421**	2.223	2.933	**1.957**	3.518	3.844
	1.05	2.378	2.663	**2.085**	4.123	3.549	3.007	3.701	**2.191**
	0.95	1.485	2.481	**1.373**	2.171	3.179	2.167	4.236	**2.030**
80000	1	2.259	2.641	**1.929**	1.903	2.021	**1.934**	2.699	3.026
	1.05	1.539	**1.985**	**1.332**	2.834	2.984	2.503	2.928	2.172
	0.95	1.419	1.966	**0.989**	1.815	2.773	1.792	3.556	**1.776**
100000	1	1.839	2.071	**1.372**	**1.530**	2.016	1.749	2.620	2.234
	1.05	1.176	**1.675**	**0.994**	1.761	2.608	1.805	2.660	1.828

Tableau (4.6) Erreurs quadratiques moyennes relatives avec $PS3$ et $PS5$ ($\times 10^{-4}$)

Nombre de		Milstein		QE		WE(M=2)		WE(M=4)	
simulation	K/S_0	n=5	n=12	n=5	n=12	n=5	n=12	n=5	n=12
	0.95	5.334	8.533	5.053	**6.120**	**5.010**	6.633	7.495	13.73
20000	1	**5.107**	8.345	6.978	9.182	6.301	8.931	5.833	**8.097**
	1.05	**3.700**	9.846	5.692	11.03	6.808	10.62	4.702	**8.091**
	0.95	2.725	5.244	2.657	**3.175**	**2.587**	5.657	3.757	5.784
40000	1	3.328	3.986	**2.611**	3.808	2.964	4.615	3.094	**3.060**
	1.05	2.798	4.934	2.750	**4.578**	3.799	5.131	**2.572**	4.946
	0.95	1.781	4.065	**1.586**	**2.902**	2.085	3.670	2.501	4.223
60000	1	2.374	2.631	1.885	2.116	1.829	2.982	**1.774**	**2.046**
	1.05	2.378	3.100	2.436	3.347	2.660	**3.015**	**1.707**	3.255
	0.95	1.706	2.582	1.455	**2.003**	**1.291**	2.499	1.835	2.933
80000	1	1.949	2.960	**1.276**	1.805	1.520	2.836	1.538	**1.469**
	1.05	1.653	2.690	1.622	2.310	1.996	2.113	**1.231**	**1.906**
	0.95	1.556	2.368	**1.071**	1.836	1.079	**1.638**	1.259	1.976
100000	1	1.749	2.377	1.258	**1.503**	1.267	1.723	**1.052**	1.567
	1.05	1.300	2.096	1.370	1.594	1.391	1.985	**0.879**	**1.419**

Nous analysons ensuite l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de simulations pour chacune des méthodes. Les graphiques des figures (4.1)et (4.2) suivantes présentent cette analyse. Dans la figure (4.1), le panel du haut est pour l'ensemble de paramètres $PS4$ et celui du bas est pour l'ensemble de paramètres $PS2$ tandis que dans la figure (4.2), le panel du haut est pour l'ensemble de paramètres $PS5$ et celui du bas est pour l'ensemble de paramètres

$PS3$. Dans la légende de tous les graphiques, M représente la méthode de Milstein, QE l'approximation quadratique de Anderson, WE la simulation pondérée avec $M = 2$ et WE2 la simulation pondérée avec $M = 4$.

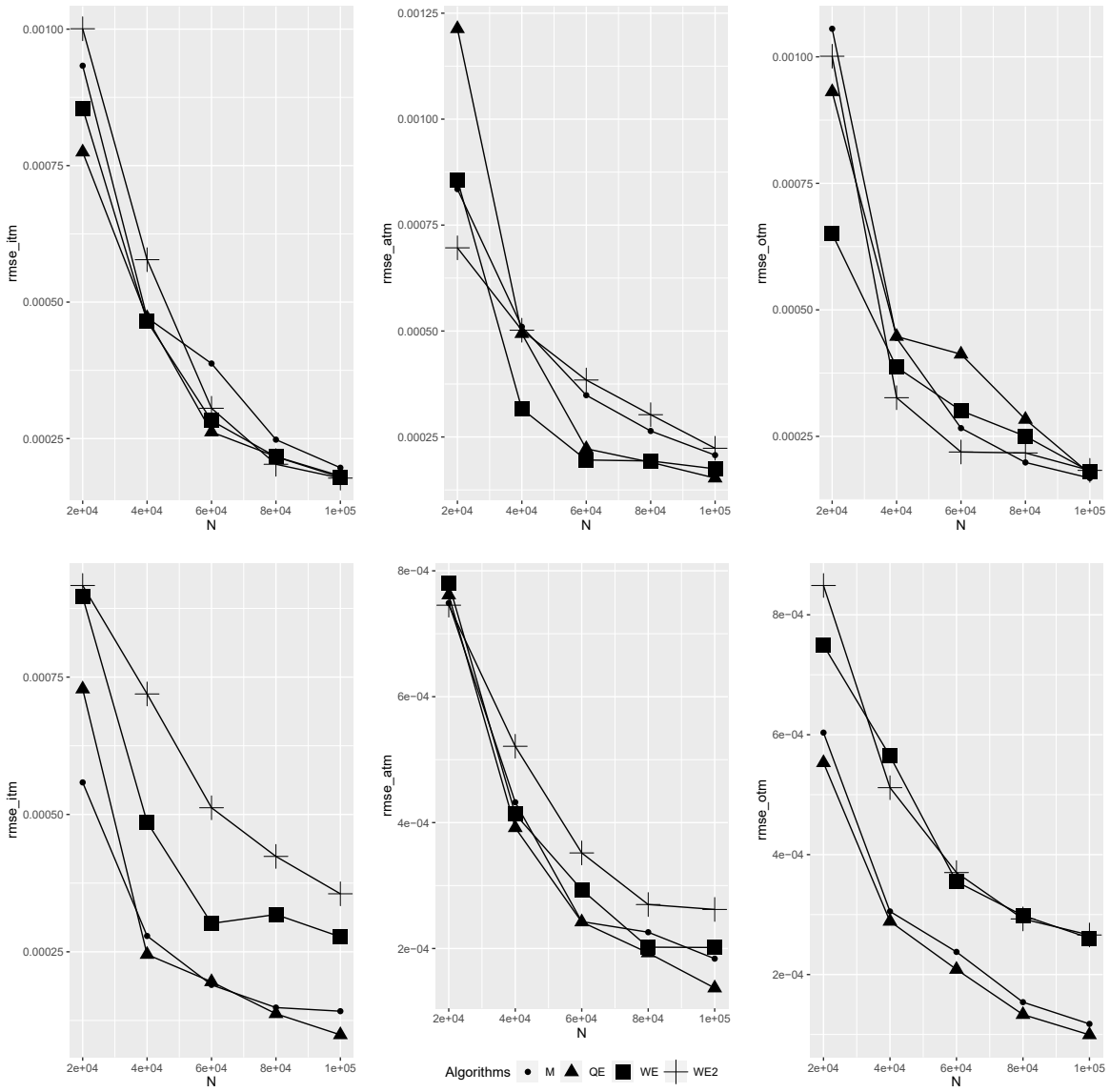

Figure (4.1) Évolution de RMSE en fonction du nombre de simulations avec $PS2$ (en bas) et $PS4$ (en haut)

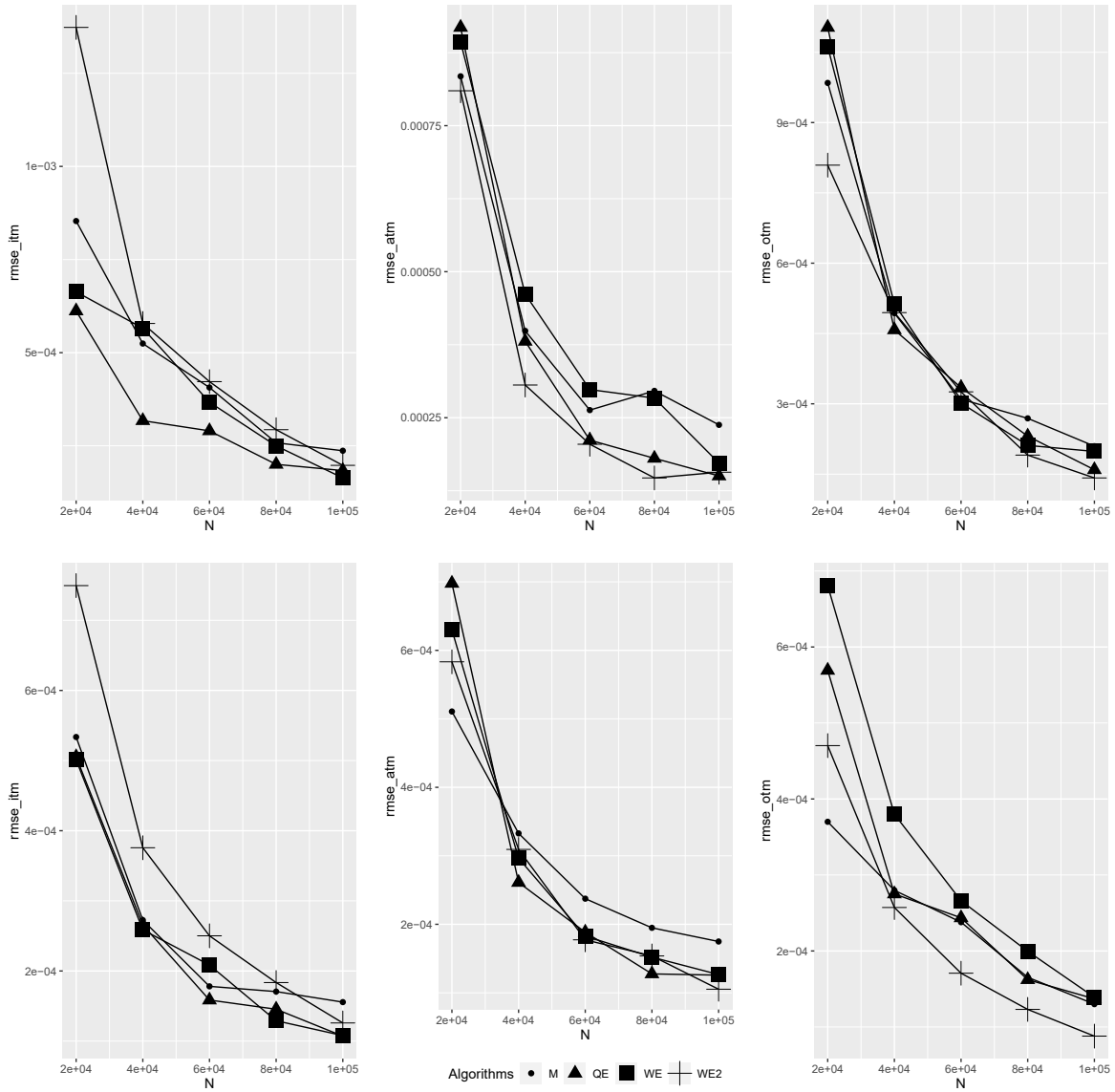

Figure (4.2) Évolution de RMSE en fonction du nombre de simulations avec $PS3$ (en bas) et $PS5$ (en haut)

Enfin, à l'aide du diagramme en boîte, nous présentons la distribution de l'erreur pour un échantillon de 50 erreurs. Chacune des 50 erreurs est calculée avec 100000 simulations. Les figures (4.3) et (4.4) suivantes présentent cette distribu-

tion.

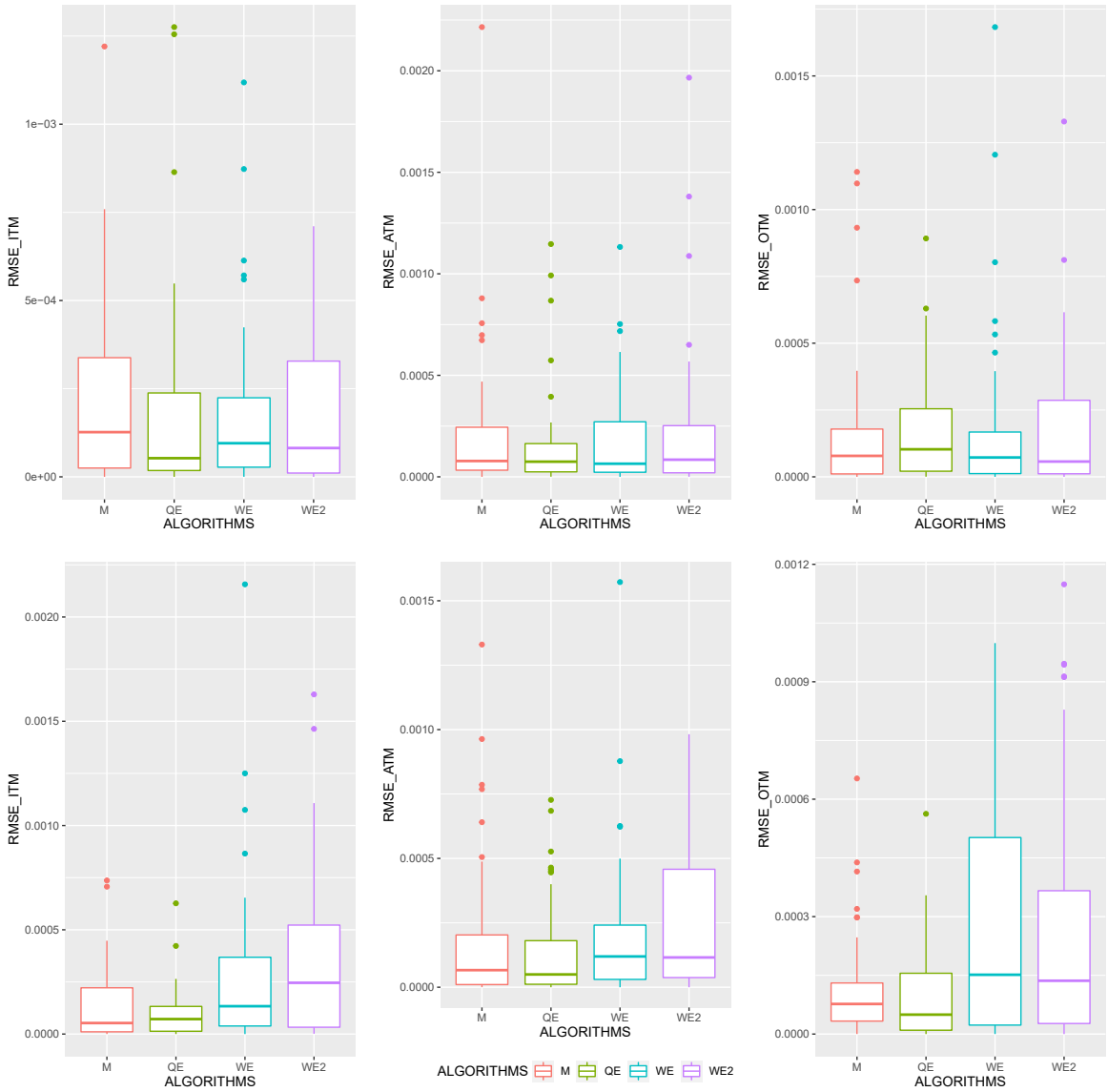

Figure (4.3) Distribution de RMSE pour 100000 simulations avec $PS2$ (en bas) et $PS4$ (en haut)

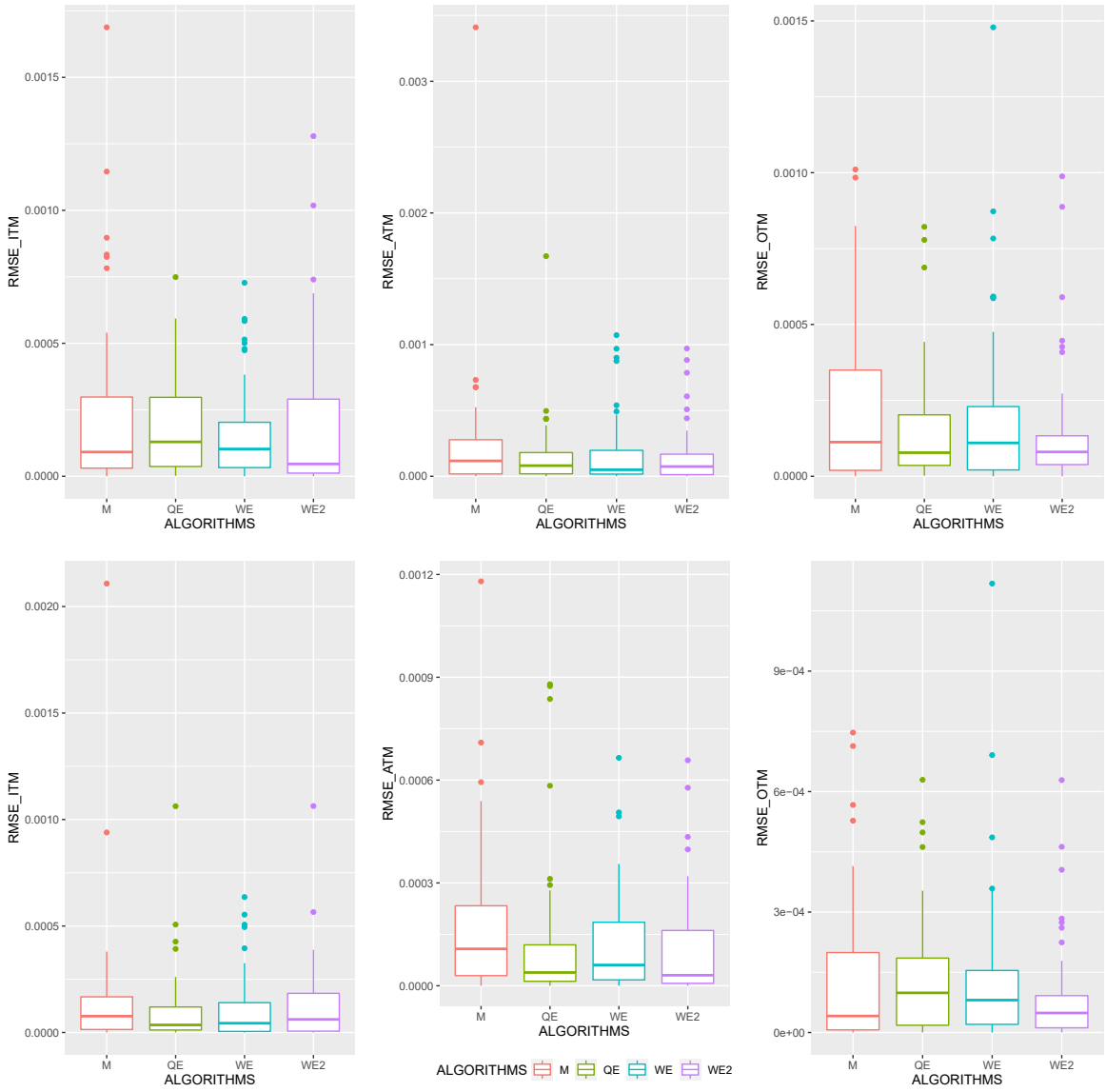

Figure (4.4) Distribution de RMSE pour 100000 simulations avec $PS3$ (en bas) et $PS5$ (en haut)

Une analyse des tableaux (4.5) et (4.6) montre que les quatre méthodes de simulation ont leur précision dans le même ordre de grandeur dans tous les cas. Ensuite, de l'analyse des graphes des figures (4.1) et (4.2), il ressort que l'erreur

quadratique moyenne relative décroit en fonction du nombre de simulations dans tous les schémas considérés. Aussi, nous remarquons que les courbes ont la même allure lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée. De plus, lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée et $n = 5$ (ensemble de paramètres $PS2$), nous constatons que les courbes des méthodes de la simulation pondérée sont légèrement au dessus des autres courbes. Ainsi, les méthodes de la simulation pondérée ont une précision légèrement inférieure à celles des autres méthodes dans ce cas. Par contre lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée et $n = 12$ (ensemble de paramètres $PS4$), nous ne faisons plus le même constat. Nous voyons donc que si le nombre de processus à simuler est élévé, cela améliore la précision de la simulation pondérée.
Enfin, les figures (4.3) et (4.4) montrent que l'écart type de la distribution de l'erreur quadratique moyenne relative pour les quatre méthodes est presque identique lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée (ensembles de paramètres $PS3$ et $PS5$) ou lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est vérifiée mais $n = 12$ (ensemble de paramètres $PS4$). Par contre lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée et $n = 5$ (ensemble de paramètres $PS2$), les écarts types des distributions de l'erreur quadratique moyenne des méthodes de Milstein et l'approximation quadratique de Andersen sont plus petits que ceux des distributions des deux méthodes de simulation pondérée. Cette analyse nous conduit donc aux mêmes conclusions que celles obtenues dans l'analyse des tableaux et des courbes. En outre, nous remarquons que le nombre de sous-intervalles M utilisés dans l'approximation de Simpson pour le calcul de la variance intégrée n'apporte pas plus de précision dans la méthode de simulation pondérée.

Pour finir, nous faisons une étude comparative de l'efficacité de chacune des trois méthodes. Les résultats présentés dans les tableaux suivants sont obtenus en calculant les estimateurs du prix $J = 20$ fois. Nous avons pour chaque nombre

de simulations, l'erreur quadratique moyenne, l'efficacité et le temps de calcul en secondes.

Tableau (4.7) Efficacité avec $PS3$

Nombre de simulations	M		Milstein	QE	Simulation pondérée
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.01662	0.01093	0.02664
5000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.04085	0.22160	0.0837
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1472.55	412.85	448.40
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00597	0.00570	0.00649
10000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.08165	0.44335	0.24975
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	2075.65	395.71	616.60
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00160	0.00133	0.00131
50000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.4067	2.2157	1.3242
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1536.24	339.147	578.00

Tableau (4.8) Efficacité avec $PS2$

Nombre de simulations	M		Milstein	QE	Simulation pondérée
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.01981	0.01376	0.02892443
5000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.0404	0.2217	0.1087
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1249.50	327.75	318.06
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00978	0.00736	0.01012
10000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.0813	0.4437	0.4752
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1257.68	306.14	207.85
		$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00222	0.00163	0.00309
50000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.4062	2.2151	2.1046
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1107.95	276.42	153.85

Nous constatons que la précision des trois méthodes est dans le même ordre de grandeur avec ces ensembles de paramètres. En ce qui concerne l'efficacité, nous constatons que la méthode de Milstein est meilleure que les deux autres méthodes avec les ensembles de paramètres considérés. Ensuite, lorsque la condition $(\mathbf{C}')$ est vérifiée (tableau 4.7), la méthode de simulation pondérée présente une efficacité légèrement supérieure à celle de la méthode exponentielle quadratique de Andersen alors que les résultats contraires sont observés lorsque la condition $(\mathbf{C}')$ n'est pas vérifiée (tableau 4.8). Nous rappelons qu'avec les ensembles de paramètres $PS2$ et $PS3$, nous simulons 5 processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les résultats ci-dessus sont donc obtenus avec $n = 5$ processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ainsi, si le nombre de processus de Ornstein-Uhlenbeck à simuler est élevé, la méthode de simulation

pondérée devient moins efficace car elle nécessite un temps de calcul important pour la simulation de ces processus. D'autres méthodes de simulation pourraient être intéressantes dans ce cas.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est de développer un algorithme de simulation pondérée pour le modèle 3/2 afin de l'appliquer à la tarification de tous les produits dérivés. En s'inspirant des résultats de Kouritzin (2018) sur le modèle de Heston, nous avons d'abord montré que le modèle 3/2 admet une solution faible explicite lorsque la condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée. Ensuite, nous avons montré que même si les paramètres du modèle ne vérifient pas la condition $(\mathbf{C}^{'})$, le modèle admet une solution faible explicite tant que le processus inverse de la variance est au-dessus d'une valeur ϵ fixé. En-dessous de cette valeur, on arrête le processus inverse de la variance à ϵ et nous retrouvons un modèle de Black-Scholes. En se basant sur cette solution explicite faible, nous avons développé l'algorithme de simulation explicite pondérée du modèle 3/2. Enfin, nous avons appliqué cet algorithme à la tarification des options européennes en utilisant la méthode de l'échantillonnage par importance introduite par Kouritzin et MacKay (2020) pour réduire la variance des estimateurs.

Les résultats numériques de l'algorithme semblent être satisfaisants en terme de précision. Néanmoins, nous avons remarqué que l'algorithme est légèrement plus efficace si la condition $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée que si elle ne l'est pas. De plus, vu que dans l' algorithme, la simulation du processus de Cox-Ingersoll-Ross est basée sur la simulation des processus de Ornstein-Uhlenbeck, nous avons étudié l'impact du nombre de processus de Ornstein-Uhlenbeck sur la précision et l'efficacité de la méthode. Il en ressort que plus on simule un nombre élevé de processus de Ornstein-Uhlenbeck, meilleure est la précision. Par contre, le temps de calcul

devient très important lorsqu'on simule un nombre élevé de processus de Ornstein-Uhlenbeck et la méthode n'est plus efficace. Il faut donc avoir recours à d'autres méthodes de simulation. Enfin, une étude comparative entre les méthodes de Milstein, l'exponentielle quadratique de Andersen et la simulation explicite pondérée a été faite avec $n = 5$ où n est le nombre de processus de Ornstein-Uhlenbeck. Les résultats numériques obtenus montrent que les trois méthodes produisent des résultats similaires pour le modèle 3/2 en ce qui concerne la précision. Sur l'efficacité de ces méthodes, nous avons constaté que la méthode de Milstein est la plus efficace. De plus, lorsque la condition $(\mathbf{C}')$ est vérifiée, la simulation explicite pondérée est plus efficace que l'exponentielle quadratique de Andersen, mais moins efficace lorsque la condition $(\mathbf{C}')$ n'est pas vérifiée.

Après cette étude, quelques questions de recherches futures peuvent être soulevées. En premier lieu, on pourra déterminer à partir de quel nombre de processus d'Ornstein-Ulhenbeck, la méthode de simulation explicite pondérée n'est plus efficace et ensuite énumérer les algorithmes de simulation auxquels on peut avoir recours. Ensuite, on pourra appliquer la méthode de simulation explicite pondérée du modèle 3/2 pour la tarification des produits dérivés plus complexes comme les options exotiques ou les options américaines. Enfin, il serait aussi intéressant de développer un algorithme de simulation explicite pondérée pour le modèle 4/2.

ANNEXE A

PREUVE DU THÉORÈME 1

Démonstration.

Nous montrons dans ce qui suit que le couple (S, V) défini par (3.2) et (3.3) est une solution du système (3.1).

Dans un premier temps, nous appliquons la formule d'Itô au processus V_t (nous ferons seulement le cas $n = 2$) et ensuite, au processus $X_t = \log(S_t)$.

Pour $n = 2$, posons

$$V_t = Y_t^2 + Z_t^2$$

où

$$\begin{aligned}
Y_t &= \frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}(t-u)} dW_u^{(1)} + e^{-\frac{\kappa}{2}t} Y_0 \\
Z_t &= \frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}(t-u)} dW_u^{(2)} + e^{-\frac{\kappa}{2}t} Z_0 \text{ et} \\
W_t &= \int_0^t \frac{Y_u}{\sqrt{Y_t^2 + Z_t^2}} dW_u^{(1)} + \int_0^t \frac{Z_u}{\sqrt{Y_t^2 + Z_t^2}} dW_u^{(2)}
\end{aligned}$$

Montrons que $dV_t = \kappa\left(\theta - V_t\right) dt + \eta\sqrt{V_t} dW_t$ où $\theta = \dfrac{\eta^2}{2\kappa}$.

Posons $V_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right)$ où la fonction f est définie par $f(t, x, y) = x^2 + y^2$.

D'après la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} df\left(t,Y_t,Z_t\right) &= \frac{\partial f}{\partial t}\left(t,Y_t,Z_t\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,Y_t,Z_t\right)dY_t+\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,Y_t,Z_t\right)dZ_t \\ &+ \frac{1}{2}d\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t,Y_t,Z_t\right)d\left\langle Y,Y\right\rangle_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(t,Y_t,Z_t\right)d\left\langle Y,Z\right\rangle_t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(t,Y_t,Z_t\right)d\left\langle Z,Z\right\rangle_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(t,Y_t,Z_t\right)d\left\langle Z,Y\right\rangle_t \end{aligned} \tag{A.1}$$

Or on a que :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}\left(t,Y_t,Z_t\right)=0. \\ &\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,Y_t,Z_t\right)=2Y_t \\ &\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,Y_t,Z_t\right)=2Z_t \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t,Y_t,Z_t\right)=2 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(t,Y_t,Z_t\right)=2 \\ &dY_t=-\frac{\kappa}{2}Y_tdt+\frac{\eta}{2}dW_t^{(1)} \\ &dZ_t=-\frac{\kappa}{2}Z_tdt+\frac{\eta}{2}dW_t^{(2)} \\ &d\left\langle Y,Z\right\rangle_t=d\left\langle Z,Y\right\rangle_t=0 \\ &d\left\langle Y,Y\right\rangle_t=d\left\langle Z,Z\right\rangle_t=\left(\frac{\eta}{2}\right)^2dt \end{aligned}$$

Donc en remplaçant chacune des expressions dans (A.1), on obtient :

$$\begin{aligned} dV_t &= df\left(t,Y_t,Z_t\right) \\ &= 2Y_t\left(-\frac{\kappa}{2}Y_tdt+\frac{\eta}{2}dW_t^{(1)}\right)+2Z_t\left(-\frac{\kappa}{2}Z_tdt+\frac{\eta}{2}dW_t^{(2)}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}(2)\left(\frac{\eta}{2}\right)^2dt+\frac{1}{2}(2)\left(\frac{\eta}{2}\right)^2dt \\ &= \frac{\eta^2}{2}dt-\kappa\left(Y_t^2+Z_t^2\right)dt+\eta\left(Y_tdW_t^{(1)}+Z_tdW_t^{(2)}\right) \\ &= \left(\frac{\eta^2}{2}-\kappa V_t\right)dt+\eta\sqrt{V_t}\left(\frac{Y_tdW_t^{(1)}+Z_tdW_t^{(2)}}{\sqrt{V_t}}\right) \\ &= \kappa\left(\frac{\eta^2}{2\kappa}-V_t\right)dt+\eta\sqrt{V_t}dW_t \end{aligned}$$

d'où

$$dV_t = \kappa\left(\theta - V_t\right)dt + \eta\sqrt{V_t}dW_t. \tag{A.2}$$

Dans cette deuxième partie de la preuve, nous utilisons le processus $X = \log(S)$. Nous rappelons d'après (2.2) que la dynamique du processus X est donnée par :

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}V_t\right)dt + \sqrt{V_t}\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right). \tag{A.3}$$

Soit

$$\begin{aligned} X_t = X_0 + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t V_s^{\frac{1}{2}}dB_s + \left(r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right)t \\ + \left(\frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{1}{2}\right)\int_0^t V_s ds + \frac{\rho}{\eta}\left(V_t - V_0\right) \end{aligned} \tag{A.4}$$

où $X_t = \log\left(S_t\right)$.

Montrons donc que le processus X défini par (A.4) est une solution de l'équation différentielle stochastique (A.3).

On sait que

$$dV_t = \kappa\left(\theta - V_t\right)dt + \eta\sqrt{V_t}\,dW_t.$$

On a alors

$$V_t - V_0 = \int_0^t \kappa\left(\theta - V_s\right)ds + \eta\int_0^t \sqrt{V_s}\,dW_s. \tag{A.5}$$

En remplaçant (A.5) dans (A.4), on obtient

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{V_s}\,dB_s + \left(r - \frac{\kappa\theta\rho}{\eta}\right)t + \left(\frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{1}{2}\right)\int_0^t V_s ds \\ &\quad + \frac{\rho}{\eta}\int_0^t \kappa\left(\theta - V_s\right)ds + \frac{\rho}{\eta}\eta\int_0^t \sqrt{V_s}\,dW_s \\ &= X_0 + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta} + \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t + \int_0^t \sqrt{V_s}\left(\sqrt{1-\rho^2}\,dB_s + \rho\,dW_s\right) \\ &\quad + \left(\frac{\rho\kappa}{\eta} - \frac{\rho\kappa}{\eta}\right)\int_0^t V_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t V_s ds \end{aligned}$$

donc

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}V_s\right) ds + \int_0^t \sqrt{V_s}\left(\sqrt{1-\rho^2}\ dB_s + \rho\ dW_s\right) \tag{A.6}$$

d'où

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) dt + \sqrt{V_t}\left(\sqrt{1-\rho^2}\ dB_t + \rho\ dW_t\right)$$

avec $X_t = \log(S_t)$. On vient alors de prouver que le couple de processus (S, V) défini par (3.2) et (3.3), vérifie la dynamique du modèle de Heston donnée par (3.1) si $n = 2$.

$\square$

RÉFÉRENCES

Ahn, D.-H. et Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*, *12*(4), 721–762.

Ameur, H. B. (2019). Notes de cours : Simulation Monte Carlo. HEC Montéal.

Andersen, L. (2008). Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, *11*(3), 1–43.

Athreya, S., Barlow, M., Bass, R. et Perkins, E. A. (2002). Degenerate stochastic differential equations and super-Markov chains. *Probability theory and related fields*, *123*(4), 484–520.

Bakshi, G., Cao, C. et Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of finance*, *52*(5), 2003–2049.

Baldeaux, J. (2012). Exact simulation of the 3/2 model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *15*(05), 1250032.

Bégin, J.-F., Bédard, M. et Gaillardetz, P. (2015). Simulating from the Heston model : A gamma approximation scheme. *Monte Carlo Methods and Applications*, *21*(3), 205–231.

Billingsley, P. (2008). *Probability and measure (3rd ed.)*. John Wiley & Sons.

Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time (3rd ed.)*. Oxford university press.

Black, F. et Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, *81*(3), 637–654.

Broadie, M. et Kaya, Ö. (2006). Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations research*, *54*(2), 217–231.

Carr, P. et Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of computational finance*, *2*(4), 61–73.

Carr, P. et Sun, J. (2007). A new approach for option pricing under stochastic volatility. *Review of Derivatives Research*, *10*(2), 87–150.

Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. et Ross, S. A. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 363–384.

Drimus, G. G. (2012). Options on realized variance by transform methods : a non-affine stochastic volatility model. *Quantitative Finance*, *12*(11), 1679–1694.

Gatheral, J. (2006). *The volatility surface : a practitioner's guide.* John Wiley & Sons.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, *6*(2), 327–343.

Karatzas, I. et Shreve, S. E. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag.

Koleva, Dessislava et Nicolato, E. (2012). *Option Pricing under Heston and 3/2 Stochastic Volatility Models : an Approximation to the Fast Fourier Transform.* (Mémoire de maîtrise). Aarhus University.

Kouritzin, M. A. (2018). Explicit Heston solutions and stochastic approximation for path-dependent option pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *21*(01), 1850006.

Kouritzin, M. A. et MacKay, A. (2020). Branching particle pricers with Heston examples. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *23*(01), 2050003.

Kouritzin, M. A. et Remillard, B. (2000). *Explicit strong solutions of multidimensional stochastic differential equations.* Rapport technique, Département des sciences administratives, UQO.

Kouritzin, M. A. et Rémillard, B. (2019). On explicit local solutions of Itô diffusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *473*(1), 534–566.

Lafontaine, J. (2012). *Introduction aux variétés différentielles.* EDP sciences.

Lewis, A. L. (2000). Option Valuation under Stochastic Volatility with Mathematica Code, 2000. Finance Press, Newport Beach, California.

Lewis, A. L. (2001). A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes. *SSRN working paper, available at : http//ssrn.com/abstract=282110.*

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, *3*(1-2), 125–144.

Rogers, L. et Williams, D. (1987). *Markov processes and martingales : Volume 2, Ito calculus.* John Wiley & sons.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media.

Stein, E. M. et Stein, J. C. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach. *The review of financial studies*, *4*(4), 727–752.

Wilmott, P. (2013). *On quantitative finance (2nd ed.)*. John Wiley & Sons.