UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DES ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES EN CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ROX-ANNE L'ITALIEN-BRUNEAU

OCTOBRE 2020

REMERCIEMENTS

« On se fera le miroir de l'être
Et si rien ne dure pour toujours
On se donnera le devoir de naître
Et de renaître chaque jour »
(Stéphanie Boulay, 2018)

Les trois dernières années m'auront permis de plonger dans la didactique des mathématiques, mais aussi dans un monde d'idées, de questions et de recherche qui me donne l'impression d'avoir trouver une voie qui m'appartient. Le chemin que je parcours, je le dois à des personnes qui m'ont offert temps, efforts et conseils sans compter.

Un premier remerciement va à mon directeur de recherche, Jérôme, qui a fait confiance à une amatrice de réponses et en a fait la chercheuse-en-devenir que je suis aujourd'hui. Je te suis reconnaissante d'avoir partagé avec moi ta façon de faire la recherche : ouvrir les questions plutôt que de les fermer, laisser le temps aux réflexions de cheminer et ne jamais oublier le caractère dynamique de la recherche, d'un laboratoire, des interactions et, finalement, de tout. Tu m'as amenée à réfléchir à beaucoup plus grand que les mathématiques.

I would also like to thank Ricardo Nemirovsky for my two-month internship in January 2019. The work I did with you at Metropolitan Manchester University has opened my eyes to new ways to understand, work and study Mathematics. Thank you for you warm welcome, your ideas and your time with me. Un merci particulier au service de relations internationales de l'UQAM et au Laboratoire d'Épistémologie et Activité Mathématique pour le soutien de ce stage de recherche.

Ensuite, je tiens à remercier tous les membres du LEAM qui ont animé mes discussions de corridors, qui ont eu la générosité de partager leurs réflexions et qui ont rendu mes journées à l'UQAM lumineuses, enrichissantes et pertinentes. Un merci tout particulier à l'autre moitié de « les filles » du labo, Charlott(in)e. Tu auras été la technicienne informatique par excellence, qui m'a vue au plus haut comme au plus bas, qui connait ce projet aussi bien que moi et avec qui j'ai eu la chance de partager chacune de mes réflexions naissantes. Tu as été, et resteras mon âme sœur de la didactique des mathématiques et une amie précieuse. Au plaisir de « faire en faisant » nos doctorats, chacune sur notre continent!

Aussi, un merci particulier à mes proches qui m'ont vu dans tous mes états : stressée, curieuse, fatiguée, motivée, et parfois même absente. Votre patience et votre douceur m'ont amenée à accepter mes moments moins glorieux. À Alexandre et ma famille, merci de m'avoir épaulée, de m'avoir prise dans vos bras (pré-COVID19), de m'avoir encouragée, de m'avoir dit que vous étiez fier.e.s.

Finalement, un dernier merci à mes compagnons de travail. Que ce soit dans un café, dans une cuisine, au Malbord ou au Bénélux, derrière votre écran à trouver des synonymes, vous avez rendu le défi de la maîtrise moins grand. Mes ami.es matheux.ses avec qui j'ai échangé, mes ami.es débordées avec qui j'ai lu et écrit tard, mes ami.es vaillants avec qui j'ai travaillé devant mon ordinateur, même en vacances, merci de faire partie de ma vie académique et personnelle.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche est d'étudier la façon avec laquelle les élèves placés en résolution de problèmes en classe de mathématiques mettent en route les activités des mathématiciens. Pour ce faire, un portrait du travail des mathématiciens ainsi que de la résolution de problèmes en classe sont développés. Mis en correspondance, ils offrent une entrée sur l'analyse de séances de résolution de problèmes dans lesquelles les activités des mathématiciens sont identifiées et étudiées. Ces activités sont ensuite analysées et mises en relation avec le travail des mathématiciens.

À partir des analyses menées, les activités mathématiques des élèves placés en contexte de résolution de problèmes sont contingentes à cet environnement. Celui-ci amène les élèves à mettre en route certaines activités des mathématiciens, mais oriente aussi leur mobilisation. De plus, des différences sont relevées entre le travail des élèves et celui des mathématiciens à travers le rôle de l'enseignant et l'organisation de la classe en résolution de problèmes.

Mots clés : didactique des mathématiques, résolution de problèmes, activités mathématiques, mathématicien

INTRODUCTION

Pour de nombreux auteurs en didactique des mathématiques et en *Mathematics Education*, la résolution de problèmes est une façon de plonger les élèves dans une pratique de recherche mathématique dite authentique (voir, entre autres, Burton, 2004; Lampert, 1990b; Schoenfeld, 1988). Particulièrement, certains auteurs s'appuient explicitement sur les activités des mathématiciens pour faire faire de la résolution de problèmes aux élèves dans la classe de mathématiques (voir Brousseau, 1990; Lampert, 1990b; Legrand, 1995). Sous-jacent à cette façon de penser le contexte de résolution de problèmes se trouve l'hypothèse que cet environnement amène les élèves à vivre les mathématiques comme le font les mathématiciens. C'est cette idée, précisément, qui forme l'intérêt principal de mon projet de recherche alors que je cherche à mieux comprendre la façon avec laquelle les élèves placés en résolution de problèmes mettent en route les activités des mathématiciens.

Dans le premier chapitre, je précise l'origine des arguments qui s'appuient sur les mathématiciens afin de promouvoir la résolution de problèmes en classe de mathématiques. Je présente quelques reproches qui ont été formulés envers un type d'enseignement traditionnel, c'est-à-dire axé sur la mémorisation et l'application de procédures. Ensuite, j'explique comment la résolution de problèmes est présentée par certains auteurs comme alternative à ce type d'enseignement tout en explicitant la manière avec laquelle le travail des mathématiciens inspire ces auteurs pour la résolution de problèmes en classe de mathématiques.

Dans le second chapitre, j'offre une conceptualisation des activités des mathématiciens ainsi que du contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques.

J’explique d’abord le travail des mathématiciens sous les dimensions de production, communication et validation (des) mathématiques et puis je conceptualise le contexte de résolution de problèmes à travers quatre caractéristiques.

Dans le troisième chapitre, j’explique l’orientation méthodologique choisie pour répondre à mes objectifs de recherche, c’est-à-dire une recherche qualitative-interprétative selon la logique inductive-délibératoire (Savoie-Zajc, 2018). Je présente aussi les données, le processus d’analyse ainsi que la grille d’analyse qui sont utilisés pour répondre à ma question de recherche.

Dans le quatrième chapitre, je présente les analyses effectuées sur des séances de résolution de problèmes. Principalement, je reprends chacune des composantes des activités des mathématiciens présentées au Chapitre 2 et analyse leur mise en route dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes.

En conclusion, j’offre des pistes de réponses à ma question de recherche en dégageant de l’analyse des données un cadre aux activités des élèves placés en résolution de problèmes. J’explique aussi des nuances relatives à la mise en route de certaines activités des mathématiciens par les élèves en résolution de problèmes. Je termine en proposant certaines pistes de prolongement à mon projet de recherche.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

La résolution de problèmes a pris une place importante dans les classes de mathématiques entre les années 1970 et 1990 (Lester, 1994). Toutefois, son omniprésence ne s'est pas installée d'elle-même et de nombreux travaux en didactique des mathématiques et en *Mathematics Education* ont mis en avant une variété d'arguments pour appuyer la résolution de problèmes en classe de mathématiques. Notamment, le contexte de résolution de problèmes est présenté comme alternative à un type d'enseignement centré sur l'apprentissage et la mémorisation de procédures mathématiques. Cet environnement, appelé par certains *la classe traditionnelle,* est critiqué puisqu'il amènerait les élèves à développer une représentation erronée de ce que sont les mathématiques. À l'inverse, le contexte de résolution de problèmes, décrit comme étant aligné avec la pratique des mathématiciens, aurait comme objectif de faire vivre les mathématiques de manière créative, vibrante et dynamique et favoriserait une représentation plus authentique des mathématiques.

1.2 L'enseignement traditionnel comme fausse représentation des mathématiques

Certains auteurs qui s'intéressent à la résolution de problèmes en classe de mathématiques critiquent la classe traditionnelle parce que les mathématiques qui y sont faites donnent lieu à une représentation inadéquate de ce que ce sont réellement les mathématiques chez les élèves. Entre autres, ces auteurs soulignent que l'étude *par cœur* de formules et d'algorithmes, les réponses uniques aux questions posées et un travail mathématique limité chez les élèves seraient des aspects centraux des classes traditionnelles et promouvraient une représentation incorrecte des mathématiques.

Lampert (1990a, 1990b) évoque cette critique en pointant que l'école traditionnelle présente une définition erronée de ce que signifie *faire* des mathématiques, *connaître* les mathématiques et de ce que sont les *vérités* mathématiques. Selon elle, le *faire* de l'école traditionnelle correspond à suivre des règles présentées par l'enseignant, le *connaître* correspond à se souvenir et appliquer la bonne règle pour répondre à la question et enfin, les *vérités* mathématiques sont déterminées par la correction de l'enseignant :

> These cultural assumptions are shaped by school experience, in which doing mathematics means following the rules laid down by the teacher; knowing mathematics means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical truth is determined when the answer is ratified by the teacher. Beliefs about how to do mathematics and what it means to know it in school are acquired through years of watching, listening, and practicing. (Lampert, 1990b, p. 32)

En d'autres mots, pour Lampert, la classe de mathématiques traditionnelle introduit les mathématiques comme étant figées, absolues et nécessitant peu de travail réflexif de la part des élèves. Elle souligne de plus que cette vision des mathématiques est en contradiction avec la nature même des mathématiques qu'elle associe à ce que Lakatos propose dans *Proof and Refutations* (1976) :

> Lakatos's argument, which comes through in the person of the teacher, is that mathematics develops as a process of "conscious guessing" about relationships among quantities and shape, with proof following a "zig-zag" path starting from conjectures and moving to the examination of premises through the use of counterexamples or "refutations." (Lampert, 1990b, p. 30)

En s’appuyant sur Lakatos, Lampert avance que les mathématiques se développent de façon non linéaire, à travers des déductions, conjectures, réfutations et développements de preuves mathématiques. Les raisonnements sont au cœur de ce travail, amenant souvent des allers-retours entre réflexions, propositions, exemples et justifications. L’auteure soutient que les mathématiques de la classe traditionnelle ne laissent pas de place à cette création et exploration, aux va-et-vient entre conjectures et arguments, aux « peut-être » et « probablement », qui jouent, selon elle, un rôle de premier plan dans le développement et la validation des mathématiques.

Schoenfeld (1988, 1992) reproche aussi à l’enseignement traditionnel des mathématiques de promouvoir une vision erronée de ce que sont les mathématiques dans son article *When good teaching leads to bad results : the disasters of “well-taught” mathematics courses*. Dans la classe traditionnelle de mathématiques qu’il étudie, le curriculum est suivi à la lettre, les élèves sont guidés vers les bonnes solutions et performent généralement bien aux tests standardisés. Par contre, Schoenfeld soulève des enjeux importants à ce contexte. En particulier, il se penche sur la façon avec laquelle les mathématiques sont représentées dans ces classes et identifie une liste de croyances développées par les élèves à propos des mathématiques (Schoenfeld, 1992) :

- Les problèmes mathématiques ont une et une seule bonne réponse.
- Il n’y a qu’une seule façon adéquate de résoudre n’importe quel problème mathématique : habituellement par la règle montrée récemment par l’enseignant.
- Les élèves ordinaires ne peuvent s’attendre à comprendre les problèmes mathématiques.
- Les mathématiques sont une activité solitaire, mise en œuvre par des individus isolés.
- Les élèves ayant acquis les mathématiques étudiées seront capables de résoudre des problèmes en moins de cinq minutes.
- Les mathématiques apprises à l’école n’ont rien à voir avec le monde réel.

Pour les élèves, ces attributs finissent par être associés aux mathématiques elles-mêmes parce que c'est ce que met en avant l'enseignement traditionnel. Selon Schoenfeld (1994), le travail de mémorisation, les exercices permettant qu'une seule bonne réponse et le peu d'occasions de raisonner et se questionner prennent une grande place dans ces types de classes, et suggèrent aux élèves une vision erronée de ce que sont les mathématiques.

Dans son essai, Lockhart (2009) reprend sensiblement les mêmes arguments que Schoenfeld et Lampert, mais de manière un peu plus cinglante. Il insiste particulièrement sur ce que signifie pour lui *faire* des mathématiques : « Doing mathematics should always mean discovering patterns and crafting beautiful and meaningful explanations. » (p. 18) Pour lui, les mathématiques incarnent un travail de création, de découverte et d'élaboration qui demande investissement et engagement, ce qui, selon lui, est absent de la classe de mathématiques traditionnelle décrite, par exemple, par Lampert et Schoenfeld. Il critique cet environnement mathématique en affirmant que la mémorisation de définitions prend trop de place, que les exercices proposés sont inintéressants mathématiquement parlant et que la transmission de connaissances figées est au cœur de l'activité mathématique de ce type de classes. Selon Lockhart, cette manière de *faire* des mathématiques est éloignée de ce que représentent pour lui les mathématiques, et est une occasion manquée de mettre en avant les mathématiques comme activité vivante, créatrice et dynamique : « Math is not about following directions, it's about making new directions. » (p.6)

Legrand (1993, 1995) critique aussi ce type d'enseignement traditionnel et affirme que ce contexte a pour conséquence d'*écraser les concepts mathématiques*. Dans les classes où une seule réponse par problème est valide, ou encore, où un concept mathématique permet de répondre à une unique question, les concepts mathématiques enseignés deviennent exclusifs à certains problèmes. Legrand donne l'exemple de la continuité d'une fonction qui est présentée au collégial comme étant pertinente seulement lorsqu'il est demandé si une fonction est continue ou non. Cette propriété a pourtant un potentiel pour la compréhension ou le développement d'autres concepts comme l'intégrabilité ou les limites de fonction. Pour Legrand, ce potentiel est élagué par le travail spécifique demandé à propos de la propriété elle-même dans les classes traditionnelles. Selon lui, le travail mathématique est réduit à la résolution d'exercices ou de problèmes particuliers, et donc la compréhension des concepts n'est plus mathématique, mais devient plutôt technique. Ceci a pour conséquence de retirer les élèves des mathématiques qu'ils font alors que leur engagement pourrait plutôt être mis à profit pour une activité mathématique riche, rigoureuse et dynamique.

En somme, les travaux de Lampert, Lakatos, Schoenfeld, Lockhart et Legrand montrent que l'enseignement traditionnel est davantage axé sur la mémorisation de procédures, sur la relation d'exclusivité entre concepts et problèmes ainsi que sur la validation, par l'enseignant, des mathématiques effectuées. Selon les auteurs, ce type de classe amène les élèves à développer une vision inappropriée de ce que sont les mathématiques, et de ce que veut dire et implique faire des mathématiques. En d'autres mots, la classe traditionnelle de mathématiques transmet une image figée, absolue, et vide de sens des mathématiques. Elle fait voir les mathématiques comme étant soumises à une autorité intellectuelle indépendante et extérieure à celui qui les fait. Les va-et-vient entre conjectures, arguments, concepts et exemples ne semblent pas avoir leur place et sont remplacés par des exercices mécaniques où la mémorisation de définitions et de formules devient centrale. Ces mêmes auteurs, combinés à d'autres, souhaitent renouveler l'enseignement en classes de mathématiques et offrent des pistes ancrées dans ce qu'ils considèrent être la réelle activité mathématique.

1.3 La résolution de problèmes comme alternative à l'enseignement traditionnel

Alignés avec ces critiques, certains auteurs voient dans le contexte de résolution de problèmes une alternative à l'enseignement traditionnel des mathématiques. Inspirée de la pratique des mathématiciens, la résolution de problèmes plongerait les élèves dans une expérience mathématique authentique et offrirait une représentation plus adéquate de ce que sont les mathématiques. En ce sens, certains auteurs s'appuient sur les mathématiciens et leur pratique mathématique afin de justifier la place de la résolution de problèmes en classe de mathématiques.

D'abord, Lampert (1990a, 1990b) avance qu'un travail inspiré des mathématiciens, c'est-à-dire axé sur l'étude d'exemples, l'élaboration de conjectures ainsi que sur des discussions entre élèves à propos de la validité de leurs idées, permet de rapprocher le travail des élèves de ce que sont véritablement les mathématiques :

> Students learn about how the truth of a mathematical assertion gets established in mathematical discourse as the zig-zag between their own observations and generalizations – their own proofs and refutations – revealing and testing their own definitions and assumptions as they go along. (Lampert, 1990b, p. 42)

En ce sens, elle propose de faire faire de la résolution de problèmes aux élèves afin que le travail des élèves soit plus aligné avec ce que signifie, pour les mathématiciens, *faire* des mathématiques, *connaitre* les mathématiques et *vérités* mathématiques. En particulier, *connaître* dans la classe de mathématiques serait similaire à ce qu'est *connaître* pour les mathématiciens, car les élèves appuieraient leurs idées mathématiques sur des observations et arguments mathématiques. L'idée de *faire* des mathématiques serait en harmonie avec la pratique des mathématiciens puisque les élèves en résolution de problèmes seraient amenés à travailler de manière collaborative sur des questions sincères, et ce, en faisant preuve d'humilité, de courage et d'honnêteté. Finalement, les *vérités* mathématiques seraient établies à travers des discussions et échanges mathématiques axées sur une argumentation logique, comme dans le discours des mathématiciens. D'une certaine façon, le groupe d'élèves placés en résolution de problèmes interagirait et argumenterait comme le font les mathématiciens dans leurs propres communautés : « The ideals that governed classroom interaction came to parallel the standards for argument in the mathematical community more closely, as truth came to be determined by logical argument among scholars. » (Lampert, 1990b, p. 35) C'est donc en se référant aux mathématiciens que le contexte de résolution apparait, pour Lampert, comme un environnement mathématique dit authentique et pertinent pour la classe de mathématiques. D'une certaine façon, celui-ci offrirait aux élèves une occasion de se rapprocher de ce que font les mathématiciens et d'ainsi développer une vision plus adéquate de ce que sont les mathématiques.

Lockhart (2009), de son côté, soulève la nécessité de permettre aux élèves de créer des problèmes, formuler des questions et élaborer des solutions mathématiques afin d'éviter de promouvoir des mathématiques axées sur la technique. En particulier, il s'inspire de ce que signifie *être mathématicien* et propose un contexte où les élèves contribuent à un milieu mathématique vibrant et critique :

> So how do we teach our students to do mathematics? By choosing engaging and natural problems suitable to their tastes, personalities, and level of experience. By giving them time to make discoveries and formulate conjectures. By helping them refine their arguments and creating atmosphere of healthy and vibrant mathematical criticism. By being flexible and open to sudden changes in direction to which their curiosity may lead. (Lockhart, 2009, p. 10)

En ce sens, Lockhart propose de faire appel à la résolution de problèmes mathématiques en classe de mathématiques. Les élèves, comme les mathématiciens, pourraient alors s'engager dans des problèmes accessibles, avoir le temps d'observer, réfléchir et formuler des idées mathématiques à propos de ces problèmes, le tout dans un milieu mathématiquement ouvert, vivant et sain. En ce sens, pour Lockhart, le contexte de résolution de problèmes offrirait un environnement authentique de travail mathématique, aligné avec ce que font les mathématiciens.

De son côté, Richards (1991) s'intéresse à différents types de discours mathématiques afin d'inclure le travail de recherche et d'investigation dans la classe de mathématiques. En particulier, il affirme que le *discours scolaire* est trop similaire au *discours* *scientifique* qui, en présentant de manière ordonnée, cohérente et linéaire des résultats mathématiques, efface l'effort, la recherche et le travail mathématiques derrière ces résultats. Selon Richard, la classe de mathématiques devrait se détacher de ce type de discours et se rapprocher du *discours investigateur* afin de mettre en avant l'activité et le travail mathématique. Ce type de discours s'inspire du *discours de recherche* qu'emploient les mathématiciens lors de leurs travaux :

> Mathematical behavior is the activity of mathematicians. Research mathematics [*discours de recherche*], as a socially constructed human activity, has a unique culture and tradition. […] I look at the nature of this culture in order to examine how it is unique and how this culture provides a basis for *inquiry maths* [*discours investigateur*]. (Richards, 1991, p.22)

Pour Richards, le *discours investigateur* et le *discours de recherche* représentent le cœur de l'expérience culturelle mathématique qui doit être vécue par les élèves en classe de mathématiques. Les façons d'agir des mathématiciens, inscrits dans leur culture mathématique, apparaissent donc comme un référent pour amener les élèves vers un discours centré sur l'action mathématique, les questionnements, les propositions, les conjectures et l'argumentation. En d'autres mots, le contexte de résolution de problèmes permettrait de rapprocher le discours des élèves à celui de la recherche et ainsi de les plonger dans une culture mathématique.

Quant à Schoenfeld (1991, 1994), il se réfère à ce que font quotidiennement les mathématiciens afin d'appuyer le contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques. Selon lui, les élèves devraient être investis et impliqués dans les mathématiques de la classe parce que les mathématiciens sont eux-mêmes impliqués dans leurs propres mathématiques :

> if we believe that mathematical community grapples with serious mathematical problems collaboratively, making tentative explanations of these phenomena, and then cycling back through those explanations […], then our classroom practices must reflect these beliefs. (Schoenfeld, 1994, p. 60-61)

En ce sens, Schoenfeld souligne la nécessité de donner aux élèves l'opportunité de se poser des questions, de tenter d'y répondre, de donner du sens aux concepts avec lesquels ils travaillent et d'échanger avec leurs pairs afin de déterminer la validité de leurs idées mathématiques. En particulier, ce type d'activités serait favorisé par le contexte de résolution de problèmes, et offrirait aux élèves une représentation des mathématiques plus adéquate parce que similaire à celle de la pratique mathématique.

En somme, les travaux en didactique des mathématiques et en *Mathematics Education* s'inspirent ici explicitement de ce que font les mathématiciens afin d'appuyer la résolution de problèmes en classe de mathématiques[1]. Plus précisément, dans un tel contexte, les élèves poseraient des problèmes, élaboreraient des conjectures, développeraient des arguments et discuteraient des idées mathématiques de leurs collègues de classe. Ces activités, favorisées par le contexte de résolution de problèmes, permettraient ainsi aux élèves de vivre de manière authentique les mathématiques.

1.4 Vers la question de recherche

En se référant aux mathématiciens, à leurs communautés et à leurs pratiques, la résolution de problèmes est, pour certains auteurs, une alternative intéressante pour donner aux élèves un environnement mathématique authentique. Alors que la classe de mathématique traditionnelle donne aux élèves une représentation figée, uniforme et technique des mathématiques, la résolution de problèmes plongerait, selon plusieurs, les élèves dans une activité mathématique alignée avec ce que sont réellement les mathématiques. En particulier, le contexte de résolution de problèmes amènerait les

[1] La pratique des mathématiciens agit souvent à titre de référence pour la classe de mathématiques dans les travaux en didactique des mathématiques et en *Mathematics Education.* Cette entrée particulière est au cœur de ce projet, mais, tel que souligné dans Maheux *et al.* (2019), elle ne représente pas la seule façon de penser le travail mathématique.

élèves à mobiliser des activités caractéristiques de ce que font quotidiennement les mathématiciens pour ainsi développer une vision plus adéquate des mathématiques.

Toutefois, cette similitude entre les activités des élèves en résolution de problèmes et celles des mathématiciens demeure une hypothèse qui est employée au conditionnel et qui a été peu documentée par la recherche. Connue, acceptée ou utilisée par plusieurs pour promouvoir la résolution de problèmes en classe, il semble important de la détailler davantage pour mieux comprendre ce lien entre les activités des élèves en résolution de problèmes et les activités quotidiennes des mathématiciens. En ce sens, il est possible de se poser des questions telles que : quelles activités des mathématiciens sont mises en route par les élèves placés en résolution de problèmes? Est-ce que toutes les activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes peuvent être associées aux activités des mathématiciens? Est-ce que la mise en route des activités des mathématiciens est la même chez les élèves en résolution de problèmes?

Pour explorer ces questions, mon travail de recherche veut étudier la nature du travail déployé par des élèves placés en contexte de résolution de problèmes. En particulier, je souhaite mettre en correspondance ce travail avec celui des mathématiciens afin de répondre à la question de recherche qui guide mon travail de recherche :

> **De quelles façons sont mobilisées les activités des mathématiciens dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes?**

Cette question est abordée dans le prochain chapitre afin d'ancrer ma recherche dans une première réponse théorique à la question de recherche. Un portrait du travail des mathématiciens offre une première entrée théorique à mon projet en plus d'être nécessaire pour l'analyse des activités des élèves en résolution de problèmes. La description du travail des mathématiciens est ensuite bonifiée par des explications à propos du contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques, qui, jumelée au portrait du travail des mathématiciens, mène à une grille d'analyse pour la pratique des élèves placés en contexte de résolution de problèmes.

CHAPITRE II

CADRE DE RÉFÉRENCE

Ma question de recherche vise l'étude des activités des élèves en résolution de problèmes, et ce, en regard aux activités des mathématiciens. En ce sens, aborder les activités des mathématiciens et le contexte de résolution de problèmes devient nécessaire afin d'ancrer ma question de recherche. Dans ce chapitre, une description du travail des mathématiciens est offerte et permet d'expliquer, d'exemplifier puis de lister des composantes des activités mobilisées par les mathématiciens dans leur pratique. Par la suite, une présentation du contexte de résolution de problèmes permet de situer l'environnement ciblé par ma question de recherche. En plus d'offrir une entrée théorique sur ma question de recherche, ces deux portraits seront mis à contribution au prochain chapitre pour l'élaboration d'une grille d'analyse des activités des élèves en résolution de problèmes.

2.1 Les activités des mathématiciens

Le travail quotidien des mathématiciens forme le premier élément significatif de ma question de recherche. Sa description permet de préciser ce qui est entendu par *activités des mathématiciens* avant de les réinvestir pour l'analyse des activités des élèves placés en résolution de problèmes. Toutefois, les travaux qui portent sur la démarche de travail des mathématiciens sont peu nombreux et proviennent, pour la plupart, de propos rapportés ou de récits de pratique. Cette section s'appuie donc principalement sur des entrevues menées auprès de mathématiciens ou encore, sur des articles dans lesquels ils expliquent certaines facettes de leur travail.

Avant de se lancer dans l'élaboration du portrait des activités des mathématiciens, quelques précisions sont nécessaires quant à la nature des mathématiques sur lesquelles portent ces activités ainsi qu'à la structure du portrait présenté. D'abord, les mathématiques sur lesquelles travaillent les mathématiciens sont diverses. Alors que certains offrent une entrée dans le travail des mathématiciens par l'élaboration de preuves mathématiques (De Villiers, 1990; Livingston, 2006; Lynch et Lockwood, 2017), d'autres avancent que celles-ci ne sont pas le seul objectif des mathématiciens (Burton, 2004; Richards, 1991). En ce sens, les mathématiciens cherchent à développer des preuves mathématiques, mais fouillent aussi des définitions, développent des méthodes, s'intéressent à des exemples, élaborent des conjectures, etc. En d'autres mots, les mathématiques que font les mathématiciens dans leur quotidien sont plus vastes que les preuves qui se retrouvent dans les revues scientifiques. Plutôt, les mathématiques des mathématiciens demandent un travail de recherche pour construire du sens et des liens entre des idées. En particulier, un mathématicien rencontré par Burton et Morgan (2000) explique :

> Maths isn't what ends up on the page. Maths is what happens in your head. I don't think maths is about proving theorems. It is one constituent but maths is about mapping abstract ideas in your head and understanding how things relate. (p. 446)

La preuve n'est pas la seule activité à l'origine des mathématiques, mais est, comme les définitions, méthodes, exemples et conjectures, un moteur important de l'activité mathématique des mathématiciens.

Ensuite, une certaine structure du travail des mathématiciens est utilisée dans ce qui suit afin d'organiser et contextualiser les activités des mathématiciens décrites. En particulier, le travail des mathématiciens est divisé en trois dimensions interdépendantes: la production (des) mathématique(s), la communication (des) mathématique(s) et la validation (des) mathématique(s). Cette organisation en trois dimensions permet de structurer les activités des mathématiciens qui sont présentées dans cette section, en plus de faciliter le repérage des activités des mathématiciens dans le travail des élèves en résolution de problèmes (voir Chapitre 3). Plus encore, dans ce qui suit, chaque dimension se décline en composantes des activités mathématiques des mathématiciens. Ces composantes sont dégagées du portrait présenté dans cette section et englobent des activités des mathématiciens.

Finalement, un jumelage d'expressions permet d'aborder chacune des trois dimensions du travail des mathématiciens. Par exemple, pour la production (des) mathématique(s), *la production des mathématiques* est associée aux processus et efforts déployés pour élaborer des résultats mathématiques. D'un autre côté, *la production mathématique* est le résultat du travail mené et des activités mises en route. En ce sens, le jeu d'expression permet d'évoquer ces deux façons de parler chacune des dimensions *production (des) mathématique(s), communication (des) mathématique(s)* et *validation (des) mathématique(s).*

2.1.1 La production (des) mathématique(s)

La production (des) mathématique(s) correspond à l'avancement des idées mathématiques. Les activités associées à cette dimension contribuent à l'élaboration, au développement et à l'exploration d'idées comme des concepts, des méthodes, des théories, des conjectures, des définitions, des arguments, etc. Dans le but de mieux comprendre les intentions des mathématiciens lorsqu'ils produisent des mathématiques, Schoenfeld (1994) propose :

> Mathematics is an inherently social activity, in which a community of trained practitioners (mathematical scientists) engages in the science of patterns – systematic attempts, based on observation, study and experimentation, to determine the nature or principles of regularities in systems defined

> axiomatically or theoretically (“pure maths”) or models of systems abstracted from real-world objects (“applied maths”). (Schoenfeld, 1994, p. 60)

Les mathématiques sont présentées ici comme une « science des motifs » qui s’effectue par un processus d’essais et erreurs. Ce processus s’appuie sur des observations, des expérimentations sur des nombres, des structures, des formes, des équations, etc. À partir de ceci, il est possible de s’intéresser à ce que les mathématiciens font pour étudier ces idées, ce qu’ils utilisent pour développer des méthodes ou ce qu’ils explorent pour formuler des conjectures. Pour ce faire, cinq entrées sur la dimension de production (des) mathématique(s) sont abordées : Créer de mathématiques, Concevoir des liens, Poser des problèmes, Générer et étudier des exemples et Créer et exploiter le symbolisme. C’est à travers ces composantes qu’est décrite une première partie du travail des mathématiciens.

2.1.1.1 Créer des mathématiques

Un objectif clair des mathématiciens lorsqu’ils font des mathématiques est le développement de nouveaux résultats mathématiques. Les mathématiciens veulent innover en produisant des méthodes, des théories, des conjectures, des arguments et des définitions qui pourront être repris et réinvestis par leurs collègues. Ceci s’aligne avec les idées de Schoenfeld (1994) dans la citation précédente, mais aussi celles de Davis et Hersh (1981) et Lockhart (2009) qui expliquent que les mathématiciens veulent déterminer la nature des structures qu’ils observent et ainsi participer à l’avancement des connaissances mathématiques de leur communauté à propos de ces structures. En d’autres mots, les mathématiciens ont pour objectif de contribuer significativement au corps de connaissances de la communauté mathématique en apportant des idées nouvelles. Particulièrement, pour Lockhart (2009), le travail des mathématiciens se compare à celui des artistes puisque tous deux ont à jongler avec des idées, des structures et des propriétés pour produire des résultats. Un exemple de ce travail créatif est celui de Lagrange, en 1767, qui a élaboré une méthode pour extraire les racines réelles d'équations algébriques en les approximant (Struik, 2012). Cette méthode témoigne de la créativité des mathématiciens qui imaginent des manières de faire, créent des objets mathématiques et formulent des conjectures mathématiques.

Plus encore, la nouveauté des idées mathématiques des mathématiciens provient parfois de l'exploration d'objets, théorèmes ou méthodes mathématiques avec une perspective nouvelle (Burton, 2004). Les mathématiciens reprennent des résultats de leurs collègues et y jettent un regard différent, en lien avec leurs propres travaux et intérêts de recherche. Notamment, Struik (2012) raconte que Lagrange s'est intéressé aux séries de Taylor d'un point de vue algébrique, et a ainsi ouvert la porte à une série de résultats à propos des fonctions à variables réelles. Dans ce cas, c'est un angle spécifique, l'angle algébrique, qui a permis à Lagrange de *créer des mathématiques* à partir des idées de Taylor. En ce sens, les mathématiciens portent parfois un regard particulier à des idées mathématiques d'autrui et explorent des compréhensions singulières à propos des objets qui les intéressent.

2.1.1.2 Concevoir de liens

Dans le but de produire des mathématiques pour leur communauté, les mathématiciens s'appuient sur des idées, objets, méthodes et théorèmes connus de leur communauté (Davis et Hersh, 1981). Ceci implique que les mathématiciens ont besoin de comprendre et donner un sens aux concepts avec lesquels ils travaillent. Entre autres, ils conçoivent des liens entre certains concepts mathématiques et ce sont ces liens qui contribuent à donner une signification aux idées mathématiques. Aligné avec ceci, Richards (1991) aborde la logique reconstruite. Correspondant à la compréhension qu'a un mathématicien d'un résultat mathématique à partir d'un article ou d'un exposé, la logique reconstruite est établie à partir de reformulations, mises en relation et mobilisations de diverses idées mathématiques pour comprendre un résultat mathématique. En particulier, ceci signifie que les mathématiciens produisent (des) mathématique(s) à travers le développement de leurs compréhensions d'idées mathématiques. Par exemple, Klein, un mathématicien, a mis en relation deux champs des mathématiques en conceptualisant les géométries avec la théorie des groupes, et plus précisément, les groupes de transformations (Struik, 2012). En d'autres mots, en concevant ce lien, Klein a produit des mathématiques qui alimentent la conceptualisation des géométries. En ce sens, les compréhensions qu'ont les mathématiciens à propos des idées et objets avec lesquels ils travaillent sont des productions mathématiques issues d'un travail de mise en relation, de reformulation et de réinvestissement de concepts mathématiques.

Plus encore, l'exemple de Klein illustre aussi que les mathématiciens s'appuient aussi sur les liens qu'ils conçoivent entre des idées afin de produire d'autres mathématiques. Dans le cas de Klein, sa compréhension des géométries, axée sur les groupes des transformations et les invariants, est ensuite devenue un support pour la classification des géométries. En creusant les liens établis entre les deux théories, Klein a développé une classification des géométries à partir de la classification des groupes de transformations (Struik, 2012). D'autres mathématiciens abordent aussi l'idée de « fit », ou d'assemblage entre des idées avec lesquelles ils travaillent afin de produire des mathématiques (Burton, 2004). En ce sens, les mathématiciens explorent les correspondances qu'ils établissent dans le but de produire des mathématiques. Ils réinvestissent les liens établis pour développer de nouveaux concepts, méthodes, théories, conjectures, définitions et arguments. En d'autres mots, les mathématiciens se questionnent et fouillent le potentiel de leurs mises en relation, la signification de leurs compréhensions et les implications des liens qu'ils conçoivent.

2.1.1.3 Poser des problèmes

Dans son travail en *problem posing* en classe de mathématiques, Silver (1994) s'est intéressé à l'origine des questions et des problèmes pour la classe de mathématiques et décrit du même coup la pose de problèmes qui se produit chez les mathématiciens. Pour lui, la formulation de problèmes se fait par les mathématiciens eux-mêmes à partir de leurs expériences et intérêts personnels. D'une certaine façon, chaque mathématicien détermine, définit et met au clair ses propres problèmes afin de cadrer son travail mathématique. Notamment, Poincarré explique s'approprier les mathématiques auxquelles ils s'intéressent fouillant des perspectives et des idées qui lui apparaissent pertinentes pour ses propres intérêts (Poincaré et Newman, 1908). Un travail de reformulation est donc souvent effectué par les mathématiciens pour poser les problèmes sur lesquels ils travailleront. Très rarement, un problème formulé par des collègues ou déjà soulevé dans la littérature est repris textuellement, à l'exception des problèmes classiques. Dans ces cas, les mathématiciens s'approprient les problèmes, les précisent et les orientent vers leurs propres intérêts. En d'autres mots, les mathématiciens s'intéressent et formulent des problèmes en orientant leurs explorations sur des thèmes, des objets et des idées qui rejoignent leurs travaux et avec lesquels ils peuvent travailler (Misfeldt et Johansen, 2015).

Une nuance est toutefois à soulever quant à l'individualité des problèmes qui alimentent la production (des) mathématique(s) chez les mathématiciens. La pose de problème est partiellement individuelle puisque les questions et problèmes des mathématiciens émergent souvent des travaux de collègues (Burton, 2004; Liljedahl, 2004). À partir d'articles scientifiques, conférences, ou discussions entre collègues, les mathématiciens cherchent à généraliser des résultats connus, à développer des conjectures ou à résoudre un sous-problème d'un problème plus large. C'est à travers des situations et problèmes décrits par leurs collègues que les mathématiciens ciblent des questions à creuser et à explorer. En ce sens, inspiré de Pollak, Silver (1994) explique « Thus, it has been argued that professional mathematicians, whether working in pure or applied mathematics, frequently encounter ill-structured problems and situations which require problem posing and conjecturing » (p. 22). C'est donc à partir des travaux, questions et problèmes de collègues que les mathématiciens formulent les problèmes qui guideront leur propre travail mathématique.

2.1.1.4 Générer et étudier des exemples

Dans leurs travaux, les mathématiciens sont amenés à trouver, développer, étudier et travailler (avec) des exemples et des contre-exemples. Lynch et Lockwood (2017) offrent une catégorisation des exemples et contre-exemples utilisés par huit mathématiciens face à des conjectures en théorie des nombres. Particulièrement, les auteurs avancent qu'en général, les mathématiciens choisissent des exemples pour atteindre certains objectifs :

- Comprendre les objets mathématiques en jeu
- Tester la véracité de leurs résultats
- Comprendre pourquoi un résultat est vrai ou non
- Identifier ou étudier des propriétés particulières
- Représenter ce que le résultat propose

Ainsi, les mathématiciens observent, transforment et explorent des objets mathématiques pour déterminer ce qui les unit et les différencie en plus de les organiser, les comparer, les structurer. Ce type de travail les amène ensuite à identifier et étudier certaines propriétés des exemples, à comprendre des résultats mathématiques ou encore à contredire des propositions mathématiques.

Dans ce dernier cas, les exemples sont appelés *contre-exemples* et permettent de préciser des résultats mathématiques. En particulier, selon Lakatos (1976), les contre-exemples ne doivent pas être sous-estimés, car ils contribuent grandement au travail des mathématiciens. À titre d'exemple, dans son livre *Preuves et réfutation* (1976), Lakatos raconte qu'un cube creux a été présenté comme un contre-exemple à l'application de la relation d'Euler à tous polyèdres (Figure 2.1).

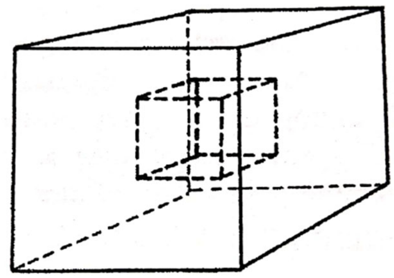


Figure 2.1 Cube creux contredisant la conjecture de la formule d'Euler

C'est donc à partir de cet objet mathématique que les mathématiciens ont cherché de nouvelles hypothèses et exploré la formule d'Euler afin de restreindre son domaine d'application. En ce sens, les contre-exemples n'annoncent pas la fin d'un résultat, mais offrent plutôt un pas vers la précision de ce résultat mathématique. Les mathématiciens se servent des contre-exemples pour peaufiner une idée mathématique et identifier précisément ce qui doit être exploré davantage.

Lynch et Lockwood (2017) soulignent aussi la sensibilité qu'ont les mathématiciens à propos des objets qu'ils utilisent et étudient comme exemple. Ils avancent que les mathématiciens sont conscients des limites que présentent certains de leurs exemples. Cette sensibilité aux propriétés des exemples avec lesquels ils travaillent offrent aux mathématiciens de contrôler, orienter et cadrer la production (des) mathématique(s) qui découle du travail sur des exemples. Notamment, l'application d'un cas minimal sur une conjecture pour comprendre cette conjecture limite l'avancement des mathématiques puisqu'elle offre peu d'indices pour la généralisation de cette conjecture ou le développement de sa preuve. Par exemple, pour le résultat s*i n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3,* il serait possible de considérer $n^2 = 9$ et conclure que la conjecture est valide. Cet exemple, avec cas particulier, permet de s'approprier le résultat, de comprendre ce qu'il signifie sur un nombre, sans mettre en lumière pourquoi il est valide. Ainsi, en étudiant certains exemples plutôt que d'autres, les mathématiciens savent que la portée de leur travail mathématique est réduite parce que les exemples étudiés sont trop précis ou trop larges. Les mathématiciens sont ainsi attentifs aux exemples avec lesquels ils travaillent afin de contrôler le travail effectué sur et à partir de ces exemples.

2.1.1.5 Créer et exploiter le symbolisme

Une autre façon de faire avancer les résultats mathématiques chez les mathématiciens est le recours au symbolisme, autant par la représentation symbolique d'idées et concepts mathématiques que la manipulation de ces symboles pour transformer et opérer sur ces idées et concepts (Schoenfeld, 1994). D'abord, la représentation symbolique permet de rendre accessibles des idées et des concepts souvent abstraits. Les mathématiciens se servent donc de symboles pour simplifier leur travail mathématique puisque la symbolisation permet de faire appel à des idées, concepts et relations sur lesquels il sera ensuite possible de travailler. Un exemple de ceci se trouve dans la notation fonctionnelle utilisée ici :

$$\boxed{\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}}$$

Figure 2.2 Notation fonctionnelle d'une fonction

Cette notation emprunte plusieurs symboles qui contribuent à la définition de la fonction f. Notamment, le symbole des nombres naturels $\mathbb{N}$, placé à gauche de la première flèche, est associé au domaine de la fonction. Ceci signifie que la fonction s'applique sur des nombres naturels. De la même façon, les symboles x^2 placés à droite de la seconde flèche indique l'action de la fonction. Celle-ci agit donc sur x en l'envoyant sur x^2. D'une certaine façon, la définition de la fonction f est ancrée dans chacun des symboles employés, dans leur emplacement et dans leur sens associé. Plus encore, le travail sur la fonction f se retrouve simplifié puisque cette définition n'a plus à être redonnée. Tout comme les nombres naturels sont associés au symbole $\mathbb{N}$, la fonction définie dans la Figure 2.2 est maintenant associée au symbole f. Les mathématiciens se servent donc de symboles pour représenter des objets et concepts mathématiques et ensuite travailler plus aisément sur ces idées.

De plus, les mathématiciens mettent parfois en place une certaine symbolisation afin de produire des mathématiques. Davis et Hersh (1981) donnent les exemples de la lettre *e,* introduite par Euler pour représenter le nombre 2.171818… ou encore, de la notation *n!* de Kramp pour la factorielle d'un nombre, c'est-à-dire le produit des n premiers entiers. En d'autres mots, lorsque les mathématiciens travaillent avec de nouveaux objets, opérations ou définitions, ils ont besoin de représenter ces concepts pour les étudier, les observer et les manipuler. La production (des) mathématique(s) chez les mathématiciens passe donc parfois par l'élaboration de symboles adéquats pour représenter et travailler des idées mathématiques. Toutefois, la mise en place de symboles est conditionnelle à l'utilisation de ce symbole par les autres mathématiciens (Davis et Hersh, 1981). Les symboles établis, que les mathématiciens réinvestissent régulièrement dans leur production (des) mathématique(s), ont gagné leur signification particulière au fil du temps, à force d'être utilisés et exploités à travers les travaux des mathématiciens. De la même façon, les nouveaux symboles doivent se tailler une place et être exploités par plusieurs mathématiciens qui forgent et construisent la signification des symboles (Davis et Hersh, 1981; Livingston, 2015).

Aussi, l'utilisation de symboles, usuels ou nouveaux, offre aussi une nouvelle perspective sur les objets qu'ils évoquent et permet parfois de donner un sens différent à ces objets ou de voir autrement les mathématiques en jeu (Byers et Erlwanger, 1984). Un symbole, bien qu'il porte le sens d'un objet mathématique, n'est pas l'objet mathématique lui-même. En ce sens, les mathématiciens explorent parfois des idées mises en lumière par la symbolisation. Davis et Hersh (1981) abordent ce potentiel des symboles pour la production (des) mathématique(s) : « Yet, it seems at times that symbols return more than was put into them, that they are wiser than their creators. » (p.125) En exemple, les auteurs donnent la notation de Leibnitz pour les dérivés successives : Df, D^2f, D^3f. En particulier, la notation plus générale D^af permet de s'intéresser aux différentes valeurs que peut prendre a et d'étudier la différenciation pour des valeurs rationnelles ou négatives de a. D'une certaine façon, la signification particulière que donnent les mathématiciens à des symboles offre des façons additionnelles de travailler les objets représentés par ces symboles. Ceci illustre que les mathématiciens développent parfois des mathématiques en s'intéressant aux différents symboles qu'ils emploient et à la portée de ces symboles sur le sens des objets qu'ils représentent.

D'un autre côté, la symbolisation implique aussi un travail de manipulations symboliques chez les mathématiciens. Ceci se traduit par l'association, la transformation, l'ajout ou le retrait de symboles en fonction de la signification des symboles. En particulier, les mathématiciens manipulent des symboles pour faire l'étude d'objets mathématiques, pour mettre en relation des idées, pour élaborer des arguments ou encore pour formuler des conjectures. Ces manipulations sont toutefois encadrées par la signification commune associée aux symboles (Davis et Hersh, 1981). Comme mentionné plus tôt, les symboles ont un sens particulier, construit à travers l'utilisation qu'en font les mathématiciens dans leurs travaux. Pour manipuler des symboles, les mathématiciens font donc aller-retour entre les symboles avec lesquels ils travaillent et le sens des objets que ces symboles représentent. Ceci leur permet de respecter la signification des symboles avec lesquels ils travaillent et d'effectuer des manipulations symboliques cohérentes avec le sens attribué à ces symboles.

2.1.1.6 Composantes des activités de production (des) mathématique(s) chez les mathématiciens

Pour conclure cette dimension sur la production de mathématiques chez les mathématiciens, plusieurs activités sont déployées pour la production (des) mathématique(s). Cinq composantes de cette première dimension sont ici mises en évidence à partir de la description offerte dans les sections précédentes:

- *Créer des mathématiques* : Les mathématiciens font preuve de créativité pour élaborer des définitions, des preuves et des méthodes afin de contribuer aux connaissances de leurs communautés. Ils reprennent des idées et concepts mathématiques de leurs collègues avec des perspectives et des entrées singulières.
- *Concevoir des liens* : Les mathématiciens donnent un sens aux concepts avec lesquels ils travaillent en les mettant en relation avec d'autres idées, objets et résultats mathématiques. Ces liens sont ensuite réinvestis comme appui au développement de résultats mathématiques.
- *Poser des problèmes* : Les mathématiciens formulent des problèmes et des questions à partir de travaux de leurs collègues. Ils s'intéressent à creuser davantage des idées, à les raffiner ou à les généraliser.
- *Générer et étudier des exemples* : Les mathématiciens se servent d'exemples pour étudier des propriétés, pour mieux comprendre certains résultats mathématiques ou encore, pour mettre à l'épreuve des idées (contre-exemples). Les contre-exemples à un résultat mathématique ciblent un travail mathématique à effectuer pour nuancer, bonifier et préciser ce résultat.
- *Créer et exploiter le symbolisme* : Les mathématiciens utilisent la représentation et la manipulation symboliques. Les symboles leur permettent de faire appel à des concepts et objets mathématiques et de travailler à partir et sur le sens de ces objets.

2.1.2 La communication (des) mathématique(s)

La deuxième dimension du travail des mathématiciens est la communication (des) mathématique(s). Les activités qui s'y rattachent contribuent à la diffusion d'idées mathématiques lors d'exposés, de conférences ou de quelconques échanges entre les mathématiciens. En particulier, par la communication (des) mathématique(s), les mathématiciens veulent rendre publics les résultats sur lesquels ils ont travaillé.

Tel que l'explique Struik (2012), avant l'avènement des revues savantes, les mathématiciens échangeaient souvent entre eux par correspondances, lettres, visites, groupes de discussion, etc. Plutôt informelle, cette vive communication permettait aux mathématiciens de véhiculer les idées et résultats sur lesquels ils travaillaient à des collègues. En retour, ces échanges permettaient d'alimenter le travail, de le transformer et de l'enrichir par l'apport des collègues consultés. Aujourd'hui, des structures formelles existent pour la communication (des) mathématique(s) : conférences, séminaires, articles, livres. Ces occasions d'échanges portent principalement sur des résultats considérés terminés et qui ont le potentiel de contribuer significativement aux connaissances de la communauté de mathématiciens. Toutefois, des discussions et échanges informels ont toujours lieu entre les mathématiciens afin de discuter des travaux qu'ils mènent, notamment dans les départements universitaires et lors de séminaires. En somme, autant dans un contexte formel que dans un contexte informel, les mathématiciens mobilisent des activités pour la communication de leurs idées mathématiques qui sont organisées sous trois composantes : Structurer les propos mathématiques, Mettre en évidence des manières de penser et Utiliser des outils de communication mathématique.

2.1.2.1 Structurer les propos mathématiques

Dans le but de communiquer clairement et adéquatement leurs résultats et idées mathématiques à leurs collègues, les mathématiciens ont à choisir ce qu'ils veulent partager et la façon avec laquelle ils le font. La structuration de propos mathématiques passe donc par une sélection et une organisation des idées principales exploitées pour la production (des) mathématique(s).

D'abord, pour la communication de résultats mathématiques, les mathématiciens reprennent ce qu'ils ont fait pour développer ces résultats et ciblent les idées qui leur semblent essentielles. Ces idées se retrouvent dans la communication (des) mathématique(s) parce qu'elles ont contribué de manière significative à l'avancement de la production ou encore, parce qu'elles permettent de clarifier certains détails importants du résultat. Ceci s'aligne avec ce que Richards (1991) appelle le *discours scientifique,* qui reprend les idées principales de la production d'un résultat mathématique et les présente de manière claire et concise. En d'autres mots, les mathématiciens repensent à leur processus de production d'un résultat mathématique et déterminent les énoncés, explications et raisonnements essentiels pour comprendre et pour parler ce résultat. Par exemple, lorsque Livingston (2015) explique la preuve mathématique sur laquelle il a travaillé, il présente les lemmes et les définitions qui lui ont permis de faire le travail mathématique menant à sa preuve. Toutefois, ces idées sont en fait une version simplifiée du processus de l'élaboration de la preuve par lequel est passé Livingston. Par exemple, le mathématicien a travaillé avec un schéma (Figure 2.3) afin de saisir le sens du théorème qu'il souhaitait prouver, mais ce schéma ne se retrouve pas dans la preuve qu'il a rédigé pour communiquer son résultat.

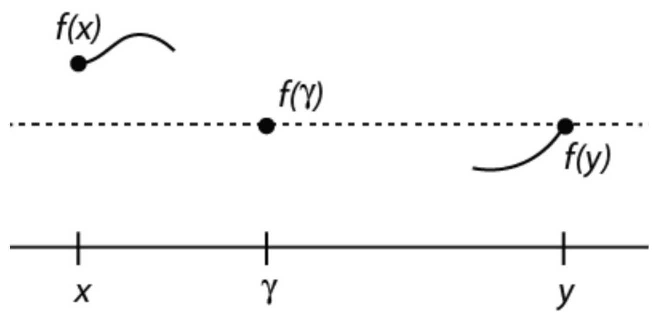


Figure 2.3 Dessin effectué par Livingston lors de la production de sa preuve

En ce sens, son article diffuse seulement les idées mathématiques qui participent de manière évidente aux résultats mathématiques. Le mathématicien laisse de côté plusieurs éléments qui ne sont plus pertinents comme des détours et des allers-retours maintenant inutiles pour la diffusion de la preuve. En ce sens, les mathématiciens synthétisent les étapes de leur production (des) mathématique(s) afin de rester au cœur du résultat développé qu'ils veulent communiquer.

Les mathématiciens ne font pas que choisir les idées mathématiques qu'ils souhaitent inclure dans leurs articles ou conférences, mais organisent et agencent aussi ces idées. Contrairement à la production (des) mathématique(s) qui est non-linéaire, le rendu des travaux est quant à lui ordonné afin de rendre clair ce que signifient les résultats mathématiques que les mathématiciens communiquent (Richards, 1991). Notamment, l'organisation des idées permet de suivre la suite d'arguments : « It gives the impression that, from the stated definitions, the desired results follow infallibly by a purely mechanical procedure. » (Davis et Hersh, 1981, p. 36). En ce sens, les mathématiciens sont sensibles à l'organisation de leurs idées mathématiques qui permet de préciser et rendre élégants les résultats qu'ils diffusent. D'une certaine façon, l'organisation des idées mathématiques contribue activement au sens des idées qui sont communiquées. Elle permet de rendre accessibles certains raisonnements et enchaînements d'idées qui ont été effectués lors de la production d'un résultat et qui appuient ce résultat. Le travail de Livingston (2015) illustre cette organisation des idées mathématiques alors qu'un théorème (voir Figure 2.4) utilisé au début du développement de la preuve s’est transformé au cours de la production (des) mathématique(s). Ce dernier n’est pas repris dans la rédaction de la preuve finale puisqu’il a été transformé à travers l’étude d’autres théorèmes et lemmes et n’est plus pertinent pour le résultat final. Particulièrement, le critère de différentiabilité a été remplacé par la propriété de croissance stricte en un point (Figure 2.5).

Theorem 1. *If $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ is continuous on $[a,b]$ and differentiable on (a,b) with $f'(x) > 0$, then f is a strictly increasing function.*

Figure 2.4 Théorème utilisé par Livingston au début de son travail sur la preuve

Lemma A.1. Let $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ be continuous on $[a,b]$ and pointwise strictly increasing on (a,b). Then f is pointwise strictly increasing on $[a,b]$.

Figure 2.5 Lemme utilisé par Livingston dans la preuve rédigée

Ceci montre que les mathématiciens, pour communiquer des idées mathématiques, jumèlent, associent et organisent leurs idées afin de rendre clairs et précis les résultats qu’ils souhaitent rendre publics.

2.1.2.2 Mise en évidence des manières de penser

La communication (des) mathématique(s) chez les mathématiciens n’est pas un simple transfert des idées utilisées pour la production de résultats. Comme mentionné dans la première dimension du travail mathématique, les mathématiciens ont souvent des façons singulières d’entrer dans les problèmes ou des manières particulières de comprendre les objets auxquels ils s’intéressent. En ce sens, dans la communication (des) mathématique(s), ces manières de penser et de faire sont mises en évidence et rendues explicites par les mathématiciens. Par exemple, lorsque Livingston (2015) présente la preuve qu’il a développée, il précise, par des explications et des ajouts, certaines façons avec lesquelles il a développé des arguments. Notamment, il spécifie avoir utilisé le *théorème des valeurs intermédiaires* pour justifier l'existence de certains points de sa fonction, ou encore, il souligne s'être appuyé sur la continuité de la fonction afin de déterminer une inégalité importante entre des valeurs de la fonction (Figure 2.6)

Lemma A.1. Let $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ be continuous on $[a,b]$ and pointwise strictly increasing on (a,b). Then f is pointwise strictly increasing on $[a,b]$.

Proof. If f is not p.s.i. at b, then for all $\delta > 0$, there exists an $x \in (b-\delta, b)$ such that $f(x) \geq f(b)$. Let s be one such x. By the p.s.i. property of f on (a,b), we can assume that $f(s)$ is strictly greater than $f(b)$; by the Intermediate Value Theorem, there exists some point $p_1 \in (s,b)$ such that $p_1 = \frac{f(s)+f(b)}{2}$. Now let $A = \{p_i \in (s,b] \mid p_i = \frac{f(s)+f(b)}{2}\}$, and let $p^* = \sup A$. By the continuity of f, it follows that $f(p^*) = \frac{f(s)+f(b)}{2} > f(b)$. Hence, $p^* < b$. Since f is p.s.i. at p^*, a similar argument would allow the construction of a point $p', p^* < p' < b$, such that $p' = \frac{f(s)+f(b)}{2}$. Thus, $p^* \neq \sup A$. The set A must be the empty set and, hence, f must be p.s.i. at b.

The argument that f is p.s.i. at a is similar. $\square$

Figure 2.6 Preuve de Livingston dans laquelle il explicite ses manières de penser

En ce sens, les mathématiciens ne font pas seulement résumer la production (des) mathématique(s) qui a été effectuée pour un certain résultat, mais mettent aussi en avant leurs compréhensions des idées mathématiques avec lesquelles ils ont travaillé. Ces compréhensions et raisonnements viennent expliquer, contextualiser et justifier les résultats qui sont communiqués et permettent de rendre accessibles certaines idées clés qui seraient, sans certaines remarques, restées implicites. D'une certaine façon, les mathématiciens s'attardent à communiquer leurs façons distinctives de penser les idées avec lesquels ils travaillent: « We mathematicians need to put far greater effort into communicating mathematical ideas. To accomplish this, we need to pay much more attention to communicating not just our definition, theorems, and proof, but also our ways of thinking. » (Thurston, 1994, p. 8) En d'autres mots, les mathématiciens mettent en valeur leurs manières de penser et de réfléchir aux idées mathématiques qui leur ont permis de produire des mathématiques.

2.1.2.3 Recours aux outils de communication mathématique

Pour rendre accessibles des idées et des manières de penser, les mathématiciens utilisent des symboles et des mots de vocabulaire reconnus dans leur domaine. Particulièrement, les mathématiciens utilisent ces outils de communication afin de faire référence à des objets ou concepts mathématiques, et ce, le plus précisément possible. Par exemple, le mathématicien Tall (1980) se sert de symbole pour représenter des objets mathématiques tout au long de son article[2] (Figure 2.7).

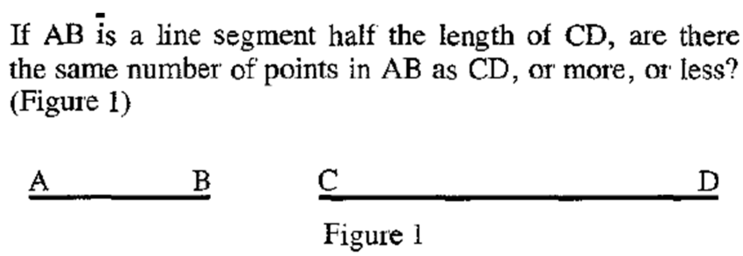

If AB is a line segment half the length of CD, are there the same number of points in AB as CD, or more, or less? (Figure 1)

Figure 1

Figure 2.7 Définition du segment AB par Tall

Dans la courte phrase qui introduit le segment AB, le symbolisme est utilisé pour aborder différents objets mathématiques. Les lettres majuscules représentent des points et, plus précisément, A et B sont les extrémités du segment noté AB. En ce sens, Tall s'appuie sur la signification précise des lettres, et de la symbolisation associée à ces lettres pour rendre accessible la nature des objets auxquels ils s'intéressent. De plus, la communication de la définition du segment AB est simplifiée, tout en gardant une certaine précision garantie par les symboles. Ceci s'aligne avec ce qu'avancent Davis

[2] Bien que Tall écrit dans la revue *For the Learning of Mathematics* destinée à aborder des enjeux de l'enseignement de mathématiques, il demeure qu'il communique des idées mathématiques en tant que mathématicien, ce qui est au cœur du travail mené dans cette section.

et Hersh (1981) à propos des symboles : les symboles ont des significations précises et facilitent la communication (des) mathématique(s) entre mathématiciens ou non-mathématiciens qui connaissent le sens des symboles. De plus, dans la définition que pose Tall, les symboles sont aussi accompagnés de vocabulaire. Les mots employés viennent alimenter la signification des symboles alors que AB est nommé comme étant un segment de droite. De plus, la longueur de ce segment est donnée par des termes de comparaison avec la longueur du segment CD. Ainsi, le vocabulaire employé permet de rendre accessible une propriété du segment AB en plus de préciser le sens des symboles employés. Ceci met en lumière que les mathématiciens, pour la communication (des) mathématique(s), ont recours au symbolisme et au vocabulaire pour rendre accessibles leurs idées mathématiques.

Comme mentionné dans la section 2.1.1.5, les mathématiciens développent aussi parfois des symboles pour représenter et travailler avec de nouveaux concepts mathématiques. Ces mêmes (nouveaux) symboles sont réinvestis pour la communication (des) mathématique(s) afin de rendre clairs les résultats rendus. Ceci implique que pour introduire de nouveaux symboles ou vocabulaire dans leurs articles, exposés et discussions, les mathématiciens doivent expliquer la signification des symboles et mots qu'ils ont attribuée à des concepts et des idées qu'ils ont développés. Un exemple de ceci se trouve dans le travail de Tall (1980) qui souligne qu'un nombre hyperréel s'écrit $\alpha = x + \delta$. Il ajoute aussi que dans cette notation, x est la *standard part* qui se note $st\ \alpha$. Bien que Tall ne soit pas à l'origine des nombres hyperréels introduit par Hewitt en 1948 (Keisler, 1994), Tall rend tout de même explicite la symbolisation utilisée pour aborder ce concept récent. Il introduit sa symbolisation en expliquant ce que représentent les symboles et les mots employés. Ceci témoigne de la construction du sens de la symbolisation et du vocabulaire, à travers leur utilisation, chez les mathématiciens. Lorsqu'il y a ambiguïté ou nouveauté, les mathématiciens précisent la signification des symboles et mots qu'ils emploient afin de rendre publics des résultats mathématiques.

Finalement, comme le montre l'histoire des mathématiques, bien qu'un mathématicien et sa communauté attribuent un sens aux symboles et aux mots employés, ce sens n'est pas statique et peut évoluer. Un mathématicien considère un symbole associé au concept visé au moment de sa communication, bien que ce sens soit fluide et contingent aux utilisations des autres mathématiciens. Par exemple, le terme « fonction » a maintenant une signification bien différente que celle de la mise en relation d'ensemble de nombres par Dirichlet (Moschkovich, 2007). En ce sens, les mathématiciens, lorsqu'ils utilisent des symboles et des mots pour la communication (des) mathématique(s), alimentent le sens de ces outils de communication (voir Section 2.1.1.5 sur *Créer et exploiter le symbolisme).* C'est par l'utilisation des mots et symboles dans différents contextes de recherche que leurs sens respectifs se transforment, évoluent, se raffinent avec le temps. Cette précision est importante dans le cadre des activités des mathématiciens puisque la communication de mathématiques ne se fait pas entièrement par emprunt technique et utilitaire de symbolisme ou vocabulaire existant et ouvre sur un échange entre les mathématiciens à propos du sens des symboles et des mots employés.

2.1.2.4 Composantes des activités de communication (des) mathématique(s) chez les mathématiciens

Pour conclure cette deuxième dimension du travail des mathématiciens, plusieurs activités peuvent être extraites de la description de la communication (des) mathématique(s) chez les mathématiciens et s'organisent sous trois composantes :

- *Structurer les propos mathématiques* : Les mathématiciens reviennent sur leur production (des) mathématique(s) pour déterminer les idées importantes des résultats à communiquer. Ils rendent claire la signification de leurs résultats en organisant ensuite ces idées mathématiques.

- *Mettre en évidence des manières de penser :* Les mathématiciens insistent sur certaines perspectives, manières de faire ou compréhensions qui ont alimenté le travail sur les résultats qu'ils communiquent.
- *Utiliser des outils de communication mathématique :* Les mathématiciens utilisent le symbolisme et des mots de vocabulaire pour faire appel à certains objets ou concepts mathématiques. En particulier, ils utilisent une symbolisation et un vocabulaire accessibles à leurs collègues ou introduisent des symboles ou mots en explicitant les concepts auxquels ils réfèrent.

2.1.3 La validation (des) mathématique(s)

La troisième dimension porte sur les différentes activités des mathématiciens qui leur permettent d'évaluer la validité de résultats mathématiques produits et proposés. Les mathématiciens, en tant que représentants de la communauté mathématique, ont parfois à s'assurer qu'un résultat est accessible et valide. En d'autres mots, un résultat mathématique, comme une preuve ou une méthode, est soumis à travers un exposé, un article ou une discussion, puis devient l'objet de vérifications de la part de mathématiciens. Les arguments sont révisés puis le résultat est soumis à quelques critères de validité. En ce sens, Neubrand (1989) explique comment s'opère la validation (des) mathématique(s) pour les mathématiciens :

> The process of acceptance of a proof by the community of mathematicians is initiated by the proposal of a convincing argument by an accepted member or the mathematical community, and by a careful check of the argumentation by the experts in that field. But then, the existence of some combination of the understanding, significance, compatibility, reputation and language-factors is necessary to ensure the final acceptance of the proof. (p. 6)

Des résultats mathématiques proposés sont révisés par certains mathématiciens considérés experts du domaine auquel se rattachent ces résultats. Ces mathématiciens s'assurent que les idées, raisonnements et arguments qui appuient un résultat mathématique sont valides et respectent certains critères. Entre autres, un résultat mathématique doit être compréhensible, significatif et compatible avec les autres travaux de la communauté. Tout ceci se décline à travers des quatre composantes associées à la validation (des) mathématique(s) : Étudier des exemples, Vérifier la rigueur, Évaluer l'innovation et Vérifier la cohérence.

2.1.3.1 Étude d'exemples

Bien que l'étude d'exemples contribue à la production de résultats, les mathématiciens ont aussi recours à des exemples pour s'assurer que des résultats mathématiques proposés sont valides. Entre autres, certains mathématiciens ont expliqué à Weber et Mejia-Ramos (2011) qu'en lisant des preuves mathématiques, ils utilisaient des exemples pour mettre en lumière le sens des arguments utilisés. Par exemple, un d'eux explique travailler avec deux colonnes lorsqu'il consulte un résultat mathématique : une première dans laquelle il retranscrit les idées essentielles du résultat proposé et une seconde dans laquelle il applique ces idées mathématiques sur des exemples (Weber et Mejia-Ramos, 2011) cette utilisation d'exemples lui offre une meilleure compréhension du résultat mathématique qu'il doit évaluer et il peut ensuite s'intéresser à sa validité. En ce sens, appliquer des résultats soumis à des exemples permet ainsi aux mathématiciens de mieux comprendre ce qu'ils ont à évaluer. Plus encore, Weber (2008) explique que dans certains cas, les mathématiciens s'intéressent à des exemples précis pour se convaincre de la validité de résultats mathématiques. Ces exemples permettent de vérifier qu'un résultat est valide puisque les objets étudiés lui correspondent et sont alignés avec les conclusions ou la signification du résultat. En particulier, Weber et Mejia-Ramos (2011) expliquent que quelques exemples bien choisis suffisent souvent pour convaincre les mathématiciens de la validité d'idées mathématiques. En ce sens, les mathématiciens se servent d'exemples généraux qui n'ont pas de propriétés spécifiques outre celles nécessaires pour appliquer le résultat proposé pour la validation (des) mathématique(s). Ils s'assurent que les exemples sélectionnés correspondent bel et bien au résultat évalué et qu'ils respectent ce qu'énonçait le résultat.

Les mathématiciens se servent aussi de *contre-exemples* pour la validation (des) mathématique(s), et plus particulièrement, pour souligner que des résultats sont invalides. Les mathématiciens identifient ainsi des objets qui concordent avec les hypothèses d'un résultat mathématique, mais qui contredisent ses conclusions. C'est ce qu'illustre Lakatos (1976) lorsqu'il fait le récit du développement de la relation d'Euler à propos des polyèdres en trois dimensions ($nombre\ de\ sommets + nombre\ de\ faces - nombres\ d'arêtes = 2$.) L'auteur raconte qu'historiquement, certains mathématiciens sont intervenus dans l'élaboration du résultat afin de souligner le fait que certains solides ne respectaient pas la relation d'Euler. Par exemple, Lhuilier a utilisé deux cubes superposés (Figure 2.8) pour invalider le domaine de validité du résultat proposé.

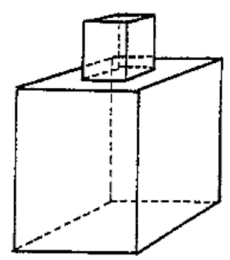


Figure 2.8 Cubes superposés ayant été utilisés comme contre-exemple par Lhuilier

Le mathématicien s'est servi d'une figure qui devrait respecter la relation d'Euler, mais qui, au final, donne le calcul : $16 + 11 - 24 = 3$. La figure introduite est un contre-exemple à la relation d'Euler et a permis à Lhuilier d'affirmer que le domaine de validité de la relation d'Euler devait être retravaillé afin d'exclure son contre-exemple.

En ce sens, les mathématiciens travaillent avec des contre-exemples pour invalider des résultats mathématiques, mais aussi pour identifier et mettre en lumière ce qui doit être repris et exploré davantage. Ceci met en avant un aspect important du travail de validation (des) mathématique(s) chez les mathématiciens et montre que les contre-exemples et l'invalidation de résultats n'annoncent pas la fin d'un résultat mathématique. Plutôt, les mathématiciens voient l'invalidation comme nécessaire à la bonification et l'avancement des idées mathématiques (Burton, 1990). Les contre-exemples, l'invalidation et les réfutations de propositions mathématiques sont au cœur du travail des mathématiciens parce qu'ils sont un des moteurs des efforts pour préciser un résultat mathématique (Lakatos, 1976).

2.1.3.2 Vérification de la rigueur

Pour la validation (des) mathématique(s), les mathématiciens ont recours à la rigueur comme premier critère de validité de résultats mathématiques soumis. Ceci signifie que les mathématiciens s'assurent qu'un résultat est adéquatement expliqué et argumenté pour être validé. Tel que mentionné dans la Section 2.1.2.1, un résultat mathématique est communiqué avec une suite d'idées et raisonnements qui l'appuient. Pour vérifier la rigueur d'un résultat mathématique, les mathématiciens s'intéressent à ces mêmes idées et raisonnements et s'assurent qu'ils sont eux-mêmes valides. En d'autres mots, les arguments et explications d'un résultat doivent eux-mêmes découler d'arguments et explications mathématiquement justes. Plus précisément, ceci amène parfois les mathématiciens à creuser et explorer les affirmations qui appuient un résultat mathématique afin de s'assurer qu'elles sont valides. Par exemple, un mathématicien rencontré par Weber (2008) complète le raisonnement derrière l'affirmation suivante:

Si $ab = n$ et $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$ alors,

soit $a \equiv 1 \ (mod\ 4)$ et $b \equiv 3 \ (mod\ 4)$ ou $a \equiv 3 \ (mod\ 4)$ et $b \equiv 1 \ (mod\ 4)$

Pour ce faire, le mathématicien se questionne sur les différentes multiplications possibles dans $\mathbb{Z}_4$ dont le produit est 3. Il arrive à la même conclusion que celle donnée dans la preuve qu'il évalue et conclut ainsi la validité de l'affirmation avant de poursuivre l'évaluation de la preuve. Cet exemple, bien qu'illustrant un travail avec des résultats écrits, permet de mettre en lumière que les mathématiciens qui évaluent la rigueur de résultats proposés se questionnent sur la validité des idées qui appuient ces résultats. Lorsque les mathématiciens vérifient la rigueur de résultats mathématiques soumis, ils complètent parfois les raisonnements derrière ces résultats.

En plus de s'assurer de la validité des explications et arguments qui appuient un résultat mathématique soumis, les mathématiciens vérifient que l'enchaînement de ces idées est logique, et permet bel et bien d'appuyer le résultat mathématique proposé. Bien que des idées et des explications soient proposées pour appuyer un résultat, les mathématiciens examinent l'articulation de ces mêmes idées et explications pour être certains que le résultat est argumenté adéquatement. Par exemple, Weber (2008) présente un mathématicien à qui il a demandé d'évaluer une preuve. Après avoir déterminé que la preuve était une preuve par l'absurde, le mathématicien s'assure qu'une suite logique de raisonnements mène bel et bien à une contradiction :

> [Reading the first line of the proof] Suppose to the contrary that n is not a multiple of 3. [Commenting] So I like, so proof by contradiction. [Reads the next line to himself and comments] So negating the conclusion. It looks good so far. (p.440)

En d'autres mots, le mathématicien s'assure ici que la suite d'idées dans la preuve est adéquate et mène bel et bien à une contradiction. L'évaluation de la rigueur d'un résultat mathématique proposé demande aux mathématiciens de s'intéresser à l'enchaînement d'idées qui appuient un résultat mathématique et de creuser les chaînes d'idées sous-jacentes pour s'assurer de leur validité.

2.1.3.3 Évaluation de l'innovation

Un autre critère utilisé par les mathématiciens pour valider des résultats mathématiques est l'innovation. Lorsque les mathématiciens ont la responsabilité d'évaluer des articles ou des exposés, ils s'assurent que le résultat proposé apporte une contribution significative à la communauté et représente une nouveauté. Par exemple, un mathématicien rencontré par Weber et Mejia-Ramos (2011) explique qu'en tant qu'éditeur de revue, il est réticent à publier des articles qui ne font que reprendre une idée d'une preuve nouvellement publiée pour montrer un nouveau théorème :

> I occasionally get papers where the author took an idea from a new proof that just came out, took the idea from the proof and applied it in a straightforward fashion to prove some new theorem. I'm reluctant to publish these types of papers (p. 336).

Pour ce mathématicien, la preuve qui reprend une idée déjà connue et utilisée par d'autres n'est pas suffisamment innovatrice pour être diffusée. L'apport de ce type de résultat mathématique est donc remis en doute parce que le travail effectué ne contribue pas suffisamment aux idées de la communauté. En ce sens, un résultat doit amener plus loin des idées mathématiques et avoir une portée pour les travaux menés dans la communauté. Les mathématiciens évaluent donc le potentiel des résultats mathématiques pour les travaux d'autres mathématiciens. Notamment, un résultat soumis contribue de manière importante à la communauté s'il présente une façon innovante de faire un calcul, s'il ouvre le domaine d'application d'un théorème, ou encore, s'il présente de nouveaux objets avec lesquels il est possible de travailler.

Les mathématiciens qui s'attardent à la contribution de résultats mathématiques soumis acceptent diverses formes d'apports significatifs aux connaissances de la communauté. Dans certains cas, un résultat mathématique est jugé innovateur parce qu'il reprend des idées mathématiques et offre une façon supplémentaire de travailler et comprendre ces idées. Par exemple, un mathématicien interrogé par Burton (2004) souligne qu'un résultat peut être considéré comme valide s'il permet de voir autrement une méthode, un théorème ou un objet mathématique. L'innovation peut donc se manifester à travers la reprise d'idées déjà étudiées, mais qui sont creusées davantage et qui offrent de nouvelles possibilités de recherche mathématique. En ce sens, un mathématicien peut considérer qu'un résultat mathématique est innovant s'il reprend des idées mathématiques pour montrer et explorer leur potentiel.

2.1.3.4 Vérification de la cohérence

Le troisième critère utilisé par les mathématiciens est la cohérence et prend deux formes. D'abord, les mathématiciens chargés d'évaluer un résultat s'assurent de la cohérence en vérifiant que le résultat mathématique concorde avec le travail réalisé par la communauté (Burton, 2004; Heinze, 2010). Ceci signifie que les résultats proposés doivent s'appuyer sur des résultats établis de la communauté. En d'autres mots, les mathématiciens qui vérifient la cohérence examinent les idées principales d'un résultat mathématique et les conclusions qui en sont tirées afin de s'assurer qu'elles sont alignées avec les connaissances de la communauté. Ce type de cohérence signifie aussi que les mathématiciens s'assurent qu'il n'y a pas de contradictions avec des idées mathématiques déjà établies dans la communauté. Les conclusions doivent donc concorder avec les conclusions des autres résultats établis chez les mathématiciens. Dans le cas contraire, le résultat proposé est invalidé et doit être retravaillé. Toutefois, historiquement, certains résultats établis ont été invalidés par des résultats soumis. Par exemple, les *cercles de Malfatti* ont longtemps été considérés comme la seule façon de placer trois cercles tangents entre eux dans un triangle tout en maximisant l'aire du triangle couvert par l'aire des cercles. Toutefois, Goldberg (1967) a offert une autre façon, plus optimale, de placer les cercles dans le triangle. Le résultat proposé par le mathématicien a ainsi remis en doute les *cercles de Malfatti* qui ont été réétudiés et nuancés. En ce sens, les mathématiciens doivent s'assurer de la cohérence entre les résultats mathématiques soumis et ceux établis afin de s'assurer de la validité des idées mathématiques diffusées au sein de leur communauté.

D'un autre côté, les mathématiciens vérifient aussi la cohérence interne. Ils cherchent à identifier une ligne directrice et à comprendre la structure globale d'un résultat dans le but de s'assurer que les idées mathématiques qui appuient ce résultat lui correspondent et lui sont alignées. Ceci signifie qu'un résultat considéré comme valide par les mathématiciens forme un tout organisé et aligné avec le résultat proposé. C'est, entre autres, ce que certains mathématiciens appellent l'esthétisme de résultats mathématiques. Par exemple, un mathématicien interrogé par Burton (2004) explique qu'un résultat qui est structuré et uni lui est attrayant. En d'autres mots, le fil conducteur d'un résultat est important pour les mathématiciens. Ceux-ci s'assurent que les idées et raisonnements communiqués pour appuyer un résultat proposé sont explicitement et adéquatement mis en lien avec celui-ci. Par exemple, un mathématicien rencontré par Weber (2008) explique que devant une preuve, il regarde rapidement la structure et le résultat dans son ensemble afin d'avoir une idée de la signification de la preuve. À la lumière de ceci, il s'intéresse aux affirmations et arguments plus précis offerts dans le résultat proposé. En ce sens, les mathématiciens vérifient que les affirmations soumises à travers des articles, exposés et discussions contribuent sans ambiguïté à la signification du résultat qu'elles supportent. De plus, ils portent une attention particulière à la signification d'un résultat mathématique et évaluent que celui-ci est bel et bien supporté par l'ensemble des idées et raisonnements offert avec le résultat mathématique.

2.1.3.5 Composantes des activités de validation (des) mathématique(s) chez les mathématiciens

La validation (des) mathématique(s) se traduit principalement par une vérification des résultats et idées mathématiques contenues dans une communication mathématique par des mathématiciens responsables de l'évaluation. Quatre composantes des activités des mathématiciens peuvent être dégagées de cette dimension :

- *Utiliser des exemples :* les mathématiciens se servent d'objets mathématiques avec des propriétés précises pour s'assurer qu'un résultat mathématique est valide. Lorsqu'un objet ne respecte pas les conclusions d'un résultat, l'objet est appelé contre-exemple, invalide le résultat et cible le travail qui doit être effectué pour rendre valide le résultat mathématique.
- *Vérifier la rigueur :* les mathématiciens s'intéressent aux idées et raisonnements proposés pour appuyer un résultat mathématique. Ils s'assurent que ces affirmations sont mathématiquement valides et qu'ils supportent adéquatement le résultat soumis.
- *Évaluer l'innovation* : les mathématiciens s'assurent qu'un résultat contribue de manière significative aux connaissances de leur communauté. En particulier, ils vérifient qu'un résultat contribue de manière significative à l'avancement des mathématiques en proposant de nouvelles manières de faire, de comprendre ou de prouver des résultats mathématiques.
- *Vérifier la cohérence* : les mathématiciens vérifient que les résultats sont cohérents avec les travaux réalisés par la communauté et qu'il forme un tout cohérent. Les mathématiciens s'assurent donc qu'un résultat est aligné avec les connaissances établies par la communauté et qu'il ne présente pas de contradiction avec d'autres résultats établis. Aussi, les mathématiciens s'assurent que les idées et raisonnements associés à un résultat sont en lien avec le fil conducteur du résultat mathématique et qu'ils contribuent explicitement à sa signification.

2.2 La résolution de problèmes en classe

Le second aspect déterminant de ma question de recherche est le contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques, c'est-à-dire le contexte dans lequel les activités des élèves seront étudiées. Que signifie faire faire de la résolution de problèmes aux élèves en classe de mathématiques ? Quels sont les aspects essentiels du contexte dans lequel sont plongés les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes en mathématiques ? Quel est le rôle des élèves lorsqu'ils sont placés en résolution de problèmes ?

Pour Stanic et Kilpatrick (1989), trois perspectives de la résolution de problèmes en classe de mathématiques peuvent être identifiées : la résolution de problèmes comme *contexte*, la résolution de problèmes comme *aptitude* et la résolution de problèmes comme *art*. Cette troisième perspective est celle qui cadre le mieux avec ma question de recherche puisque c'est la perspective mise en avant par les différents auteurs en didactique des mathématiques et en *Mathematics Education* présentés aux Section 1.2 et 1.3 de la problématique. En ce sens, les idées avancées par Lakatos, Lampert, Legrand, Richards, Lockhart et Schoenfeld dans le but de repenser l'activité mathématique que vivent les élèves en classe sont alignées avec les objectifs de la résolution de problème comme *art*. Dans ce qui suit, une brève description des deux premières perspectives de la résolution de problèmes est présentée dans le but de distinguer plus clairement ce qui caractérise la résolution de problèmes comme *art* et ce qui ancre mon projet dans une telle perspective.

2.2.1 Trois perspectives de la résolution de problèmes en classe

La première perspective décrite par Stanic et Kilpatrick (1989) propose de voir la résolution de problèmes comme *contexte*, ou comme véhicule qui permet d'atteindre différents objectifs de l'enseignement des mathématiques. Ces objectifs sont toutefois différents de ceux de la résolution de problèmes comme *art* puisqu'ils visent l'apprentissage de concepts mathématiques, et non une activité mathématique authentique similaire à celles des mathématiciens. Dans la résolution de problèmes comme *contexte,* des problèmes sont proposés aux élèves dans le but de les amener à réinvestir et s'approprier des concepts mathématiques visés, pour renforcer l'apprentissage de méthodes ou définitions ou encore pour justifier l'enseignement de certains concepts. Cette façon de mener la résolution de problèmes en classe dissimule ainsi un but pour l'enseignement des mathématiques, et plus précisément, pour l'apprentissage et la mémorisation de concepts mathématiques.

La deuxième perspective proposée par Stanic et Kilpatrick (1989) présente la résolution de problèmes comme *aptitude*. Dans cette perspective, des problèmes sont offerts aux élèves pour qu'ils développent leur capacité à résoudre des problèmes à travers l'apprentissage de méthodes de résolution de problèmes. Les élèves s'entraînent à suivre des méthodes de résolution de problèmes qui deviennent des contenus mathématiques que les élèves doivent maîtriser. En d'autres mots, la résolution de problèmes comme *aptitude* s'éloigne de l'activité mathématique inspirée des mathématiciens parce qu'elle place la résolution de problèmes comme élément du curriculum.

La troisième perspective de Stanic et Kilpatrick (1989), la résolution de problèmes comme *art*, est inspirée des mathématiciens et des idées de Polya, entre autres. Cette perspective a pour objectif de faire vivre aux élèves une résolution de problèmes sincère et créative, dans laquelle il est possible pour eux d'explorer, de mettre en doute et de poser des conjectures mathématiques. À l'instar de la première perspective, la résolution de problèmes comme *art* est un moyen d'atteindre certains objectifs avec les élèves, mais ces objectifs sont ici orientés autour de l'activité mathématique dite authentique. Cette vision de la résolution de problèmes la présente comme une façon de faire faire des mathématiques aux élèves. Comme l'expliquent Stanic et Kilpatrick

(1989), « finished mathematics requires demonstrative reasoning, whereas mathematics in the making requires plausible reasoning » (p.16). En ce sens, les buts de la résolution de problèmes comme *art* l'éloignent des mathématiques finies, figées et déterminées parce que le développement d'idées mathématiques est vivant, dynamique et incertain.

2.2.2 Exemples de modalités de résolution de problèmes en classe de mathématiques

Dans le but d'illustrer concrètement ce que signifie la résolution de problèmes comme *art* en classe de mathématiques, six exemples de modalités sont expliqués. Ceux-ci permettent ensuite de conceptualiser, raffiner et préciser ce que signifie la résolution de problèmes (dans ce projet et tel qu'argumenté par la recherche) à travers quatre caractéristiques tirées des exemples présentés.

2.2.2.1 Problème ouvert

Une première modalité est la pratique du problème ouvert qui a été introduite par Arsac et Mante (1988; 2007). Le déroulement des séances de résolution de problèmes dans cette modalité se divise en deux temps. La première phase, la *phase de recherche*, est caractérisée par un travail individuel qui permet de s'approprier le problème proposé et d'entrer dans sa résolution. Après quelques minutes, les élèves sont placés en petites équipes afin de travailler ensemble sur le problème et sur une stratégie de résolution. Ils doivent ainsi trouver une réponse alors que la *phase de recherche* leur appartient pour creuser une piste de résolution, formuler et explorer les conjectures qui les intéressent et fouiller des idées mathématiques en lien avec leurs propres solutions. Dans la seconde phase appelée *phase de bilan,* la classe fait un retour en groupe pour discuter de la validité des idées développées. En ce sens, les élèves doivent rédiger les solutions qu'ils ont élaborées et les soumettre à la classe en les retranscrivant au tableau afin de les faire comprendre à leurs collègues de classe. Une discussion animée par l'enseignant est ensuite lancée à propos de la part de validité de chacune des stratégies dans le but de déterminer une solution au problème posé. En ce sens, les élèves échangent entre eux pour trouver une réponse au problème en reprenant des stratégies proposées, en les transformant et en justifiant le tout mathématiquement.

Les problèmes ouverts sont le moteur de cette modalité de résolution de problèmes. Ceux-ci se définissent comme un énoncé :

1) court et accessible ;
2) qui n'indique pas la méthode de résolution ;
3) qui permet à chacun de développer sa propre stratégie de résolution.

Parce que l'énoncé du problème est simple, les élèves s'investissent rapidement dans la résolution du problème et ont, en plus, l'occasion de développer des stratégies et solutions qui leur sont propres. Un exemple de problème ouvert est offert par Charnay (1992) pour les classes de primaire, tiré de la revue Rencontres Pédagogique n° 12 :

> ***Dans ma tirelire j'ai 32 pièces de monnaie.***
> ***Il n'y a que des pièces de 2 F et de 5 F.***
> ***Avec ces 32 pièces, j'ai 97 F.***
> ***Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?"***

À travers ce type de problème, l'objectif principal est de plonger les élèves dans l'activité de recherche des mathématiciens et de leur faire vivre la pratique de recherche à travers le développement de stratégies de résolution (Arsac et Mante, 2007). Les élèves sont ainsi invités à creuser leurs idées mathématiques et à aller jusqu'au bout de leurs pistes de recherche. Plus précisément, l'élaboration d'une stratégie doit être poursuivie jusqu'à être convaincu que cette stratégie est valide ou ne l'est pas. Le problème ouvert est une façon d'amener les élèves à adopter des comportements de recherche : explorer des stratégies de résolution, formuler des conjectures, trouver des arguments et des contre-exemples, discuter à propos de la validité de leurs idées, etc.

De son côté, l'enseignant assiste les élèves dans le développement de leurs solutions. En ce sens, il intervient dans la *phase de recherche* pour soulever des doutes et des ambiguïtés à propos des idées des élèves, et pour encourager les élèves à s'assurer de la validité de leurs idées mathématiques. D'une certaine façon, l'enseignant amène les élèves à avoir un regard critique quant aux idées et stratégies mathématiques qu'ils développent. De plus, il est en support aux élèves qui se retrouvent bloqués en faisant avec eux un bilan de leurs avancées et en leur proposant des pistes alignées avec les idées qu'ils ont déjà travaillées. En ce sens, l'enseignant est vigilant afin d'amener les élèves au bout de leurs explorations, et non vers la « bonne » solution au problème (Mizoni, 2005).

En somme, la résolution de problèmes ouverts amène les élèves à développer et explorer les stratégies et idées mathématiques qui les intéressent pour résoudre le problème posé. Le partage de stratégies en petites équipes et en grand groupe incite les élèves à développer des explications visant à rendre claires leurs solutions en plus de les amener à établir des arguments mathématiquement appuyés à propos de la validité des leurs propositions. Ce type de travail offre aux élèves de se familiariser et de s'approprier des comportements de recherche mathématique tels que l'exploration, la remise en doute, le questionnement et l'argumentation d'idées mathématiques.

2.2.2.2 Situation-problème

Une seconde modalité proposée pour amener les élèves à faire de la résolution de problèmes est la situation-problème, issue de la théorie des situations de Brousseau (1989, 1998). Pour lui, les situations-problèmes sont nécessaires pour l'apprentissage de concepts et méthodes mathématiques parce que les obstacles, les problèmes et les questions (qui émergent de manière authentique en résolution de problèmes) précèdent un savoir qui ne peut être donné aux élèves de manière décontextualisée (Brousseau, 1998). En ce sens, devant un problème à résoudre, les élèves réorganisent leurs connaissances et développent des savoirs. Plus précisément, une situation-problème se divise en cinq phases :

1) La *phase d'instruction* correspond à l'énoncé du problème et de la situation aux élèves. Celle-ci permet de mettre en place le *milieu,* soit les objets physiques, culturels, sociaux, humains avec lesquels les élèves ont la possibilité d'interagir pour trouver une solution au problème posé. C'est ensuite ce milieu qui amène les élèves à s'impliquer dans les trois prochaines phases.
2) La *phase d'action* est la prise en charge, par les élèves, du développement de stratégies de résolution. Le problème posé leur demande d'agir sur le *milieu* afin d'élaborer, étudier, tester et organiser des stratégies de résolution. En retour, le milieu agit sur l'élève en répondant à ses stratégies et en lui offrant une rétroaction qui oriente la poursuite de son travail.
3) La *phase de formulation* est caractérisée par le besoin du problème et du *milieu*, de communiquer adéquatement une ou plusieurs stratégies. En ce sens, le problème posé amène les élèves à établir et/ou avoir recours à un langage qui leur permet de rendre clair et expliciter les solutions sur lesquelles ils ont travaillé. Des essais sont effectués et un retour est offert par le *milieu* à propos de clarté et l'efficacité des formulations.
4) La *phase de validation* se traduit par l'élaboration d'une réponse au problème qui est appuyée et justifiée mathématiquement. En ce sens, une rétroaction est aussi offerte par le *milieu* afin que les élèves aient l'occasion de revisiter leur opinion, de la préciser et de s'assurer de la validité de leurs réponses au problème.
5) La *phase d'institutionnalisation* est caractérisée par un retour de l'enseignant sur les connaissances développées par les élèves lors de la résolution de problèmes. L'enseignant met l'accent sur les savoirs qui étaient visés par la situation-problème et organise les connaissances dégagées du travail des élèves.

Les situations-problèmes présentées aux élèves dans cette modalité sont élaborées dans le but d'amener les élèves à développer un savoir précis. En ce sens, les problèmes proposés aux élèves sont pensés pour alimenter une situation qui amènera les élèves à passer par les *phases d'action, de formulation et de validation* et à travers lesquelles des connaissances seront réinvesties pour en développer des nouvelles. Un exemple de situation-problème est la course à 20, destiné aux élèves de primaire pour l'apprentissage du concept de division euclidienne. Le problème associé à cette situation est de trouver la stratégie pour s'assurer une victoire au jeu suivant : chaque élève ajoute un ou deux au nombre dit par son adversaire dans le but d'être le premier à dire 20. Par exemple, le premier élève commence en disant un ou deux, et le second ajoute un ou deux, jusqu'à ce qu'un d'eux dise 20 (Brousseau, 1998). La situation qui en découle s'organise en trois temps :

1) Les élèves jouent au jeu un contre un. Ce travail, associé à la *phase d'action,* amène les élèves à élaborer et tester des stratégies pour gagner. En retour, le *milieu* leur offre un retour en indiquant la validité de leurs stratégies s'ils gagnent ou perdent la partie.
2) Les élèves jouent deux contre deux. Ce travail, associé à la *phase de formulation* amène les élèves à communiquer les stratégies qu'ils ont élaborées et desquelles ils auront une rétroaction du *milieu* (leur collègue, les parties gagnées, les parties perdues, etc.)
3) Une discussion entre les élèves de la classe divisés en deux groupes. Associé à la *phase de validation*, ce travail demande aux élèves de formuler des affirmations mathématiques dont ils sont certains à propos de la stratégie gagnante. Chaque groupe peut intervenir pour appuyer ou contredire une affirmation de l'autre groupe.

Ceci illustre que le problème à résoudre est surtout contingent à la situation élaborée pour le travail des élèves. Comme celle-ci doit amener les élèves à passer par les *phases* *d'action, de formulation et de validation* pour le développement d'un savoir précis, le problème est réfléchi en fonction de la situation-problème à laquelle il est associé.

La résolution de problèmes sous forme de situations-problèmes a principalement deux objectifs. D'abord, comme mentionné plus tôt, les situations-problèmes sont pensées pour provoquer chez les élèves l'apprentissage d'un savoir visé. En ce sens, les situations-problèmes visent à amener les élèves à adapter leurs connaissances à une situation problématique et les rendre fonctionnelles à travers les décisions qu'ils prennent (Brousseau, 2011). Toutefois, cet objectif découle d'un second objectif des situations-problèmes, c'est-à-dire celui de rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens. Selon Brousseau, les connaissances mathématiques des mathématiciens sont développées à travers des questions et des problèmes que les mathématiciens formulent, explorent, discutent et justifient avec leurs collègues. C'est donc à travers ce type de travail mathématique que les élèves pourront s'approprier et développer des connaissances. Ceci signifie que les situations-problèmes ont pour objectif de faire vivre aux élèves les explorations, questionnements, formulations et argumentations des mathématiques dans le but de les amener à développer des savoirs mathématiques. Bien que similaires à la perspective de la résolution de problèmes comme *contexte* (voir Section 2.2.1), les situations-problèmes ne sont pas seulement une façon comme une autre d'apprendre les mathématiques, mais sont plutôt, selon Brousseau (1998), la seule façon de le faire. Les contenus mathématiques ne peuvent être enseignés autrement qu'à travers de situations-problèmes pensées pour ces contenus.

Le rôle de l'enseignant lors des situations-problèmes est différent selon la phase de travail dans laquelle se trouvent les élèves. Une fois le travail démarré par la *phase d'instruction*, l'enseignant se distance du travail des élèves qui est maintenant orienté par les interactions que les élèves ont avec le *milieu* (Brousseau, 1998). Toutefois, l'enseignant s'implique dans la *phase d'institutionnalisation* alors qu'il est en charge de rendre explicites les savoirs qui ont été développés dans le travail des élèves. L'enseignant rend claires les connaissances qui étaient visées par la situation-problème et qui pourront être réinvesties par les élèves dans de futures tâches mathématiques. D'une certaine façon, l'enseignant transforme le savoir des élèves en références (Brousseau, 2012).

En somme, les élèves qui résolvent une situation-problème sont amenés à mobiliser et modifier leurs connaissances pour raisonner sur une situation dans le but de développer, tester et raffiner des stratégies de résolution fonctionnelles qu'ils devront ensuite communiquer à leurs pairs. À travers cette communication, les élèves élaborent des moyens pour rendre précises et claires leurs solutions afin que les autres élèves puissent les comprendre, les questionner et donner une rétroaction. Le travail de l'élève en situation-problème est aussi caractérisé par l'évaluation et la justification d'idées mathématiques dans le but d'identifier une réponse au problème qui est adéquate et satisfaisante aux yeux de la classe.

2.2.2.3 Tableaux verticaux

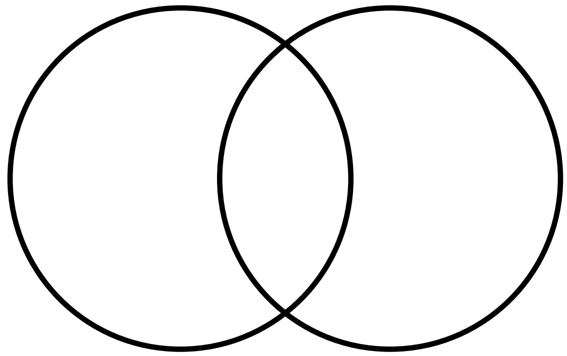
La troisième modalité est la résolution de problèmes sur tableaux effaçables verticaux (Liljedahl, 2016; Orr et Pearce, 2019; Towers *et al.*, 2013). Cette façon de mener la résolution de problèmes en classe de mathématiques est caractérisée par une organisation physique de la classe qui a un impact important sur le travail des élèves. Dès le début du cours, l'enseignant place les élèves en équipe de manière à ce que les élèves voient les équipes être formées aléatoirement. Ceci favorise, à long terme, la cohésion, la mobilité et la confiance du groupe pour le travail qu'ils mèneront en résolution de problèmes (Liljedahl, 2016). Chaque groupe se place ensuite devant un tableau vertical effaçable installé sur un mur de la classe et doit se partager un seul crayon. Un problème est ensuite présenté aux élèves qui doivent, avec leur équipe, trouver une solution au problème. Un retour peut ensuite être effectué sur les différentes stratégies développées afin de les étudier, les comparer et les questionner.

Les problèmes proposés dans le cadre de cette modalité sont simples et accessibles afin de permettre aux élèves de s'investir dans la résolution de problèmes. Toutefois, comme l'explique Liljedahl dans une entrevue avec Orr et Pearce en 2019, les tâches n'ont pas à être alignées avec le curriculum ou à être particulièrement riches, parce que le travail des élèves est lui-même enrichissant. Les stratégies et solutions des élèves reprendront naturellement des concepts, des connaissances et des contenus du cours afin d'alimenter la résolution de problèmes. En ce sens, sur son site web, Liljedahl propose une variété de « bons » problèmes pour alimenter le travail des élèves en résolution de problèmes. Par exemple, il propose les problèmes :

1) Trouver une façon d'obtenir tous les nombres entre 1 et 30 en utilisant quatre fois le chiffre quatre et les quatre opérations

2) Un groupe de chorale souhaite se placer pour leur concert. Toutefois, lorsque les membres se placent en rangs de deux personnes, il reste une personne. Lorsqu'ils se placent en rangs de trois personnes, il en reste deux. Lorsqu'ils se placent en rangs de quatre personnes, il reste trois personnes. Lorsqu'ils se placent en rangs de cinq personnes, il reste quatre personnes et quand ils se placent en rangs de six personnes, il en reste cinq. Finalement, lorsqu'ils se placent en rangs de 7 personnes, il ne reste plus personne (par John Grant McLoughlin).

3) Vous souhaitez placer 17 objets dans les deux cercles ci-dessous de sorte que chaque cercle contienne le même nombre d'objets. Combien existe-t-il de façon différente ? Et si le ratio d'objets entre les deux cercles était 4 : 3? Ou 12 : 9 ?



Ces exemples proposent des énoncés simples et accessibles pour les élèves qui auront à les résoudre. Pour chaque problème, une variété de stratégies peut être développée par les élèves qui les résolvent, et ce, à travers la mobilisation de divers concepts mathématiques.

L'objectif derrière la résolution de problèmes sur tableaux verticaux est d'amener les élèves à former une classe axée sur la pensée mathématique, ou ce que Liljedahl (2016) appelle une « thinking classroom ». Cet environnement de classe est caractérisé par des opportunités de raisonner et réfléchir aux idées mathématiques individuellement, mais aussi comme groupe. Les élèves y apprennent ensemble et développent leur compréhension de concepts mathématiques à travers des échanges et des discussions. En ce sens, certaines caractéristiques de la résolution de problèmes menée sur des tableaux verticaux ont des objectifs très précis pour favoriser la réflexion mathématique des élèves. Notamment, l'organisation des tableaux sur les murs de la classe rend le désengagement des élèves difficile puisqu'ils sont encerclés par leurs collègues qui s'investissent dans la résolution de problèmes. Aussi, le caractère effaçable des tableaux offre aux élèves de prendre des risques concernant les idées et solutions auxquels ils veulent réfléchir car leurs idées peuvent être effacées facilement au besoin.

Finalement, la limite d'un crayon par équipe amène les élèves à expliciter, remettre en question et discuter les idées qu'ils souhaitent soumettre à leur équipe.

De son côté, l'enseignant structure le déroulement de la séance de résolution de problèmes et alimente le travail des élèves en favorisant leur réflexion. Ceci signifie qu'il ne peut orienter le travail des élèves vers des réponses et doit les laisser explorer et creuser leurs stratégies. Liljedahl (2016) explique même qu'il est préférable que l'enseignant ne réponde pas à des questions comme « est-ce que c'est bon si je… ? » ou « est-ce qu'on peut faire … ? », car il risquerait d'arrêter les réflexions des élèves. En d'autres mots, l'enseignant encourage les élèves à réfléchir au problème proposé, aux stratégies qu'ils ont explorées et aux idées déployées pour avancer vers une solution au problème.

En somme, le travail des élèves placés en résolution de problèmes avec des tableaux verticaux est orienté vers le développement de la réflexion mathématique chez les élèves comme individu, mais aussi comme groupe. Les contraintes de la modalité, comme l'emplacement des tableaux ou l'unique crayon par équipe, amènent les élèves à s'impliquer dans la résolution de problèmes et à proposer leurs idées afin d'y réfléchir avec leurs équipes. En ce sens, la résolution de problèmes menée sur des tableaux verticaux est dynamique, vivante et collaborative parce que les idées mathématiques sont constamment échangées, reprises, discutées et développées.

2.2.2.4 Débat scientifique

Une quatrième modalité de la résolution de problèmes en classe de mathématiques est le débat scientifique abordé par Legrand (1993, 1995) dans le cadre de travaux avec des groupes universitaires (analyse, algèbre linéaire). La résolution de problèmes selon cette modalité s'organise autour de l'élaboration d'une preuve mathématique qui appuie la ou les solutions trouvées au problème posé. Lors d'une séance de débat scientifique, les élèves ont d'abord un temps de travail individuel pour tenter de trouver une réponse au problème posé, mais surtout, pour développer une argumentation mathématique qui appuie la validité de cette réponse. En grand groupe, les élèves avancent ensuite des énoncés qu'ils croient valides et les appuient mathématiquement dans le but de convaincre les autres élèves de la validité de leurs idées. En retour, les élèves peuvent intervenir à tout moment pour argumenter mathématiquement en faveur ou en défaveur des idées soumises. À travers les explications, les contre-exemples et les arguments, les élèves élaborent une réponse au problème et développent une preuve mathématique qu'il considère comme valide pour appuyer cette réponse.

Les situations à l'origine du travail des élèves dans cette modalité sont diverses, provenant de l'enseignant ou encore, de questions ou conjectures de la part des élèves. Principalement, les énoncés donnés pour la résolution de problèmes doivent amener les élèves à s'investir dans le développement et l'élaboration de preuves. Un exemple de situation proposée à la classe est la suivante (Legrand, 1995) :

> Faites des conjectures à propos des liens entre les propriétés de l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et la fonction $f(t)$.

Cette situation demande aux élèves de formuler des propriétés mathématiques et le contexte de débats scientifiques leur demande d'argumenter la validité de ces propriétés. En ce sens, les élèves interviennent pour proposer des réponses et les appuyer mathématiquement, et argumentent pour appuyer ou invalider les réponses, les arguments ou les explications offertes à la classe. De plus, les tâches choisies sont en lien avec des théorèmes du cours, c'est-à-dire des théorèmes que les élèves doivent connaitre à la fin du cours.

Un des objectifs des débats scientifiques est d'amener les élèves à se familiariser avec la signification de ces théorèmes. En s'intéressant à la validité de leurs propres conjectures, ou ce que Legrand appelle des versions naïves des théorèmes du cours, les élèves s'approprient le sens des idées derrière les théorèmes classiques vus en cours. En particulier, les élèves se rapprochent des théorèmes du cours parce que les preuves sur lesquelles ils travaillent les amènent à « sélectionner, parmi les intuitions spontanées, celles qui sont profondes et qui vont fournir des théorèmes » (Legrand, 1995, p.131). Aligné avec ceci, un autre objectif des débats scientifiques est de plonger les élèves au cœur du *jeu de la recherche* pour qu'ils développent des processus pour déterminer la validité d'énoncés mathématiques. Pour Legrand (1993), les faits mathématiques ne sont pas des évidences et doivent être questionnés, explorés et vérifiés pour s'assurer de leur validité. C'est pourquoi les débats scientifiques amènent les élèves à chercher et à développer des arguments pour appuyer les idées qu'ils proposent à leurs collègues. En ce sens, Legrand (1995) explique que les preuves qui motivent le travail des élèves en débats scientifiques ne doivent pas être vues comme finalité du travail mathématique, mais comme façon, pour les élèves, de s'intéresser à la validité d'idées qui leur sont soumises. En d'autres mots, les élèves ne sont pas placés en résolution de problèmes pour élaborer une preuve, mais pour vivre les processus d'argumentation et de remise en doute d'énoncés, de développement de preuves ainsi que d'exploration de la validité de leurs idées mathématiques. Du même coup, ces processus leur permettent de travailler le sens des théorèmes du cours et de s'approprier les idées et les arguments qui les appuient.

De son côté, l'enseignant est tout autant impliqué dans le déroulement des débats scientifiques puisqu'il agit comme support et organise les discussions autour des différents arguments et énoncés offerts par les étudiants. Il les met en relation et cherche à comprendre la nature des idées proposées en questionnant les étudiants sur l'origine de leurs énoncés conjecturaux. Toutefois, la place que prend l'enseignant est neutre afin de laisser place à la prise de risques et l'expression d'opinions chez les étudiants. En ce sens, il ne commente pas les propositions des étudiants, mais les écrit au tableau, les explore et laisse les étudiants formuler leurs arguments en faveur ou en défaveur des affirmations soumises. À la fin des débats, l'enseignant prend cependant en charge de repérer ce qui a été jugé faux, d'identifier les procédures qui ont permis d'identifier ces idées fausses et finalement, de garder ce qui a été validé par le groupe. Ceci permet de faire un retour sur la séance de débat en plus de rendre explicite ce qui a été effectué comme résolution de problèmes ainsi que les théorèmes du cours.

En somme, au cœur des débats scientifiques en classe de mathématiques se trouve le *jeu de la recherche* qui amène les étudiants à s'impliquer dans la formulation de conjectures, à prendre des risques et à exprimer leur opinion mathématique de manière réfléchie et appuyée. Les étudiants ont la responsabilité de faire avancer les idées mathématiques de la classe dans le but de développer une preuve qui permettra de résoudre la situation posée au début du débat scientifique. Les énoncés conjecturaux que proposent les étudiants alimentent le travail d'exploration du groupe, qui en vient à établir, à travers justifications et arguments, la validité des idées mathématiques soumises au groupe.

2.2.2.5 Travail sur les erreurs

Le cinquième exemple de modalités de résolution de problèmes en classe provient de la vision productive des erreurs de Borasi (1987, 1992, 1994). Dans ce type de travail, l'erreur est considérée comme opportunité d'apprentissage pour les élèves et devient un moteur pour la pose et la résolution de problèmes. Plus précisément, une erreur est introduite par l'enseignant ou ciblée par les élèves et devient l'objet de discussions lors desquelles est exploité son potentiel mathématique. Par des questionnements, des conjectures et des explorations, les élèves s'intéressent à fouiller les doutes générés par l'erreur en s'intéressant aux raisons derrière l'identification de l'erreur, en creusant les différents contextes dans lesquels l'erreur ne serait pas erreur, en questionnant les parts de validité dans l'erreur ou encore, en explorant ce qui pourrait arriver mathématiquement si l'erreur était considérée comme valide. En ce sens, à travers l'exploration d'erreurs, des problèmes sont posés et alimentent le travail de recherche mathématique des élèves jusqu'à ce qu'ils aient résolu les incertitudes soulevées.

Les erreurs exploitées comme point de départ dans cette modalité sont variées : définitions incorrectes, résultats erronés, modèles insatisfaisants, résultats valides trouvés par des méthodes invalides, résultats approximatifs, etc. En ce sens, Borasi (1994) explique que la nature de l'erreur utilisée comme point de départ du travail des élèves oriente le travail qu'il sera possible de faire avec eux et cadre les questions qui peuvent être posées pour démarrer le travail. Par exemple, une situation proposée à deux élèves est la suivante :

Analyser les différentes définitions du cercle :

1) Toutes les séries de points équidistants d'un unique point
2) πr^2 formule de la circonférence = rayon, centre, 360˚
3) Round – 3.14 – forme d'une orange, d'une pièce de monnaie, Terre – Pi
4) Cercle = quelque chose dont l'aire est = πr^2
5) Cercle : $(x)^2 + (y)^2 = r^2$. Rond
6) Un cercle est une figure géométrique dans un plan en deux dimensions. Il contient 360 et il y a un point appelé le centre qui est précisément dans le milieu. Une ligne qui passe par le centre est un diamètre, la moitié d'un diamètre est un rayon. Je n'aime pas les cercles vraiment parce qu'ils ressemblent à de gros zéros, mais ils peuvent être drôles parce qu'on peut en faire des bonshommes sourire avec des coupes de cheveux.
7) Une ligne ronde, fermée et continue.
8) Je me retrouve parfois à me promener en rond à l'intérieur d'eux…

L'enseignante demande aux élèves de déterminer, dans chaque définition, ce qui est valide. Rapidement, deux élèves avec qui Borasi travaille se sont rendu compte que chaque définition est insuffisante et devait être retravaillée. À travers le travail des élèves, différentes questions et problèmes ont émergé des définitions. Notamment, les élèves se sont intéressées à la définition 5 en se questionnant sur la nature des valeurs de x et y et sur les applications possibles de cette définition. D'une certaine façon, le travail fait avec ces définitions montre que les erreurs soumises aux élèves ne sont pas le seul problème que les élèves devront résoudre alors que d'autres questions et doutes sont soulevés en rapport au travail sur l'erreur. Un autre exemple du type de tâches demandées aux élèves dans les travaux de Borasi provient cette fois du travail des élèves alors qu'à la maison, ils avaient dû déterminer le cercle passant par les points (7,0), (5,4) et (6, -3). Au moment du retour, une élève avait formulé le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}(7-h)^2+(0-k)^2 = r^2\\(5-h)^2+(4-k)^2 = r^2\end{cases}$$

Avec l'enseignante et sa coéquipière, une élève a résolu ce système pour arriver à l'équation $2k = h - 2$, qu'elle n'arrivait toujours pas à résoudre. L'enseignante a ensuite proposé aux élèves qu'une infinité de cercles peut être trouvée si seulement deux points sont donnés et a demandé aux élèves de tenter de comprendre ce que cela signifie. Les élèves se sont ensuite intéressées à la stratégie de l'élève pour tenter de comprendre ce que soulignait l'enseignante. En ce sens, la réponse trouvée par l'élève à la tâche initiale est devenue source de questionnements pour les élèves, mais aussi source d'idées et signification pour donner un sens à ce qu'avait soulevé l'enseignante. Les deux exemples d'erreur utilisée pour la résolution de problèmes illustrent que la nature du travail d'explorations mathématiques est contingente à la nature des erreurs introduites par l'enseignante, ou générée par les élèves. Le travail qui sera effectué par les élèves ne peut être déterminé d'avance, mais l'erreur a le potentiel de générer des questions, des explorations, des doutes qui alimenteront le travail des élèves.

En ce sens, l'objectif principal d'un travail sur les erreurs est de mettre en avant l'ambiguïté des contenus mathématiques avec lesquels travaillent les élèves. Ceci les plonge ainsi dans un travail de recherche visant à explorer les doutes soulevés. En ce sens, les erreurs sont vues comme un moyen d'amener les élèves à explorer des idées mathématiques, à creuser leurs significations et à développer une vision plus humaniste des mathématiques. En effet, pour Borasi (1987, 1993, 1994), il est important que les élèves voient les mathématiques comme construites socialement et faillibles, forgées par les valeurs personnelles et culturelles de ceux qui les font. En ce sens, le travail sur les erreurs met en avant la dimension fragile des mathématiques, et amène les élèves à se rendre compte de la faillibilité des résultats et idées mathématiques. En ce sens, le travail sur les erreurs permet de voir que les incertitudes sont importantes dans le travail mathématique et qu'elles font partie de l'histoire des concepts mathématiques avec lesquels les élèves travaillent. Notamment, dans le cadre d'un travail sur l'incertitude générée par le résultat de 0^0, une élève a mentionné qu'au final, les idées mathématiques n'existent pas depuis toujours, mais sont le fruit d'un travail de recherche mené par des personnes. En d'autres mots, le travail sur les erreurs vise à représenter les mathématiques de manière plus vivante et instable pour les élèves.

À travers le travail sur les erreurs, l'enseignant supporte la recherche des élèves en présentant et en ciblant les erreurs sur lesquelles les élèves auront à travailler ainsi qu'en alimentant les réflexions des élèves. En ce sens, l'enseignant reformule les idées proposées par les élèves, rend explicites le doute et l'ambiguïté derrière ces idées et offre des pistes d'exploration en lien avec l'erreur au cœur du travail. Notamment, dans le second exemple d'erreur introduite aux élèves, l'enseignante a repris le travail de l'élève pour mettre en avant qu'une infinité de cercles passent par deux points donnés. Or, l'enseignant ne s'empêche pas de donner des réponses aux élèves si celles-ci fournissent aux élèves des occasions d'exploration mathématique ou des outils pour mener ces explorations. Principalement, l'enseignant agit en support au travail mathématique des élèves et structure leurs explorations à partir des questionnements, propositions et idées qu'ils soumettent.

En somme, le travail permis grâce aux erreurs mathématiques amène les élèves à s'impliquer dans les décisions mathématiques relatives à leur travail, à générer leurs propres questions et problèmes en lien avec l'erreur présentée et à s'appuyer sur leurs explorations pour résoudre les doutes et incertitudes soulevés dans leur travail. À travers tout ceci, les élèves développent leur besoin de vérifier et justifier leurs idées mathématiques, reconnaissent un aspect plus humain aux mathématiques et s'engagent dans l'exploration et la résolution de problèmes et questions mathématiques.

2.2.2.6 Travail en communauté mathématique

La dernière modalité de la résolution de problèmes provient des travaux menés par Lampert (1990b) sur le travail de la classe comme communauté mathématique. Au sein de ce type de classe, les rôles des problèmes, des solutions, des élèves et de l'enseignant sont transformés par la mise en place d'une culture alignée avec celles des mathématiciens. Ces séances commencent par la présentation d'un problème sans donner d'explications sur la façon de le résoudre. Les élèves sont ensuite invités à travailler, en petits groupes, sur l'élaboration d'une solution. Ces stratégies, parlées comme étant des hypothèses jusqu'à ce qu'elles soient argumentées comme étant valides, sont ensuite écrites au tableau par l'enseignant qui écrit le nom des élèves à côté des propositions. Ceci permet ensuite de rappeler aux élèves que ces hypothèses appartiennent à des membres de leur communauté et qu'ils peuvent ainsi s'adresser directement aux élèves concernés pour les commenter ou les réviser. Toutefois, avant de se lancer dans la discussion, l'enseignant offre des précisions concernant la signification des mots, des symboles et des objets mathématiques au cœur des hypothèses offertes. Ceci permet de faciliter la discussion qui sera organisée autour de celles-ci. Les élèves sont ensuite invités à expliquer leurs stratégies, à remettre en question ou à réviser des hypothèses, le tout en appuyant mathématiquement leurs commentaires.

Les problèmes proposés pour ce genre de travail nécessitent un travail de réflexion et d'implication qui ne peut être accompli par l'application d'algorithmes connus (Lampert, 1990b). Ceci implique que plusieurs solutions peuvent être développées par les élèves qui doivent élaborer une stratégie de résolution appuyée mathématiquement. Par exemple, un exemple de problème offert par Lampert (1990b) à des élèves de cinquième année est celui-ci :

> Établit des relations, des structures et des récurrences entre les nombres $1^2, 2^2, 3^2 \dots, 100^2$.

Dans cet exemple, les possibilités de réponses sont multiples et ne peuvent être établies par des méthodes ou techniques connues des élèves. En ce sens, Lampert (1990b) explique que le problème n'est pas vraiment celui qui est proposé sous forme d'énoncé aux élèves, mais plutôt celui d'argumenter et d'appuyer la validité de la solution trouvée à ce problème. De la même façon, la réponse au problème n'est pas la solution à l'énoncé du problème, mais devient plutôt les explications et arguments que les élèves développent pour appuyer cette solution.

Les objectifs de cette façon de mettre en route la résolution de problèmes en classe de mathématiques sont doubles. D'abord, à court terme, le travail mathématique en communauté de classe vise à aborder avec les élèves des contenus mathématiques du curriculum ainsi qu'une façon de travailler ces concepts. En ce sens, le travail proposé aux élèves leur permet de creuser la signification des idées relatives à certains concepts au curriculum, mais aussi, de favoriser un discours centré sur l'argumentation et l'échange d'idées mathématiques (Lampert, 1990b). Par exemple, dans le cas du problème présenté plus tôt à propos des puissances de deux, le travail mené par les élèves les amène à se pencher sur certaines propriétés et opérations des puissances. D'un autre côté, la résolution du problème leur offre aussi de développer des outils pour s'intéresser, formuler, questionner et justifier les propriétés relatives aux structures et récurrences des 100 premières puissances de deux. À plus long terme, ce type de travail en résolution de problème vise le développement d'une communauté mathématique qui prend en charge l'élaboration, la justification et la validation d'idées mathématiques selon des normes mathématiques établies par la communauté (Lampert, 1990b). Ceci signifie qu'éventuellement, les élèves prendront en charge l'avancement des idées mathématiques et le développement d'arguments mathématiques en appui à leurs stratégies et solutions, et ce, selon des critères qui auront été établis, implicitement et explicitement, à travers les diverses séances de résolution de problèmes. Finalement, ces deux objectifs sont expliqués en détail par Lampert (1990b) :

> This meant that I needed to work on two teaching agendas simultaneously. One agenda was related to the goal of students' acquiring technical skills and knowledge in the discipline, which could be called knowledge *of* mathematics, or mathematical content. The other agenda, of course, was working toward the goal of students acquiring the skills and disposition necessary to participate in disciplinary discourses, which could be called knowledge *about* mathematics, or mathematical practice. (p. 44)

Pour atteindre ces deux objectifs, l'enseignant est responsable d'alimenter une culture de classe alignée avec ces objectifs, c'est-à-dire qu'il doit guider les élèves vers des pratiques mathématiques adéquates. Ce rôle se décline en trois types d'intervention de l'enseignant : (1) dire ce qui est ou n'est pas approprié de faire dans la communauté de classe (2) modéliser explicitement les rôles que devraient prendre les élèves dans cette communauté de classe (3) prendre part aux discussions en argumentant de manière à forger et établir les normes de la classe. L'enseignant peut donc intervenir mathématiquement sur les propositions des élèves, mais le fait comme devraient le faire les élèves, c'est-à-dire en justifiant adéquatement son intervention et en se référant à la classe comme autorité mathématique. En ce sens, lorsque l'enseignant prend la parole pour questionner, mettre en doute ou appuyer une idée d'élève, il le fait en tant que membre de la communauté sans avoir une autorité particulière.

Finalement, dans cette modalité, les élèves forment une communauté mathématique capable d'explorer, de raisonner et de formuler des stratégies et des solutions mathématiquement appuyées. Les élèves font des tentatives diverses en manifestant du courage et de la modestie quant aux idées mathématiques qu'ils développent. Ils les soumettent à la classe pour alimenter les échanges mathématiques vers une solution au problème proposé. En ce sens, ils sont aussi responsables de recevoir les propositions de leurs collègues et d'établir, selon des arguments mathématiques, la validité de ces idées soumises.

2.2.3 Caractéristiques de la résolution de problèmes en classe

Les différents exemples présentés dans la section précédente partagent certains points communs à propos du travail déployé par les élèves en résolution de problèmes. Ces éléments sont abordés dans ce qui suit et offrent un cadre pour les activités précises des élèves en résolution de problèmes. En particulier, quatre caractéristiques peuvent être dégagées de ces six exemples de modalités de résolution de problèmes en classe : l'interaction entre élèves, stratégies et solutions ; la liberté mathématique ; l'incertitude et l'autorité mathématique à la classe.

2.2.3.1 Interaction entre élèves, problèmes et solutions

La première caractéristique qui peut être identifiée à partir des modalités présentées plus tôt est l'interaction entre les élèves, les problèmes et les solutions. En effet, dans chacun des exemples abordés, les élèves sont amenés à agir sur les problèmes proposés, à discuter avec leurs pairs et à raisonner sur différentes stratégies de résolution. Par exemple, dans la modalité des tableaux verticaux, les élèves d'une même équipe interagissent pour la résolution du problème. Des questions sont ainsi posées, des stratégies sont transformées et des arguments sont soulevés à propos des idées proposées. De plus, les équipes interagissent à travers l'accessibilité des idées affichées sur les tableaux verticaux et des raisonnements sont repris entre les équipes pour être explorés davantage. En ce sens, la résolution de problèmes est caractérisée par des échanges incessants entre :

- Les élèves qui discutent, s'interrogent, remettent en doute, mettent en commun et travaillent à partir d'idées, affirmations ou conjectures d'autrui.
- Les problèmes initiaux, ou ceux qui émergent en cours de résolution, et les questions soulevées qui alimentent et approfondissent les réflexions mathématiques.
- Les stratégies développées qui se retrouvent questionnées, explorées, exemplifiées, argumentées et mises en relation.

Ainsi, la résolution de problèmes en classe se fait dans un milieu dynamique d'échanges où l'élève interagit avec ses collègues, avec sa compréhension du problème, avec les questionnements d'autrui, avec ses stratégies et celles développées par d'autres élèves.

2.2.3.2 Liberté mathématique

La seconde caractéristique tirée des exemples est la liberté mathématique laissée aux élèves pour l'élaboration de stratégies de résolution. Cette liberté se traduit par la possibilité, pour les élèves, de faire des choix mathématiques quant aux idées, stratégies et questions qui les intéressent. Par exemple, dans la modalité des problèmes ouverts, les élèves ont l'opportunité de développer la résolution qu'ils souhaitent dans la mesure où ils peuvent l'argumenter mathématiquement. Ainsi, les élèves formulent leurs propres questions, développent leurs outils de résolution et élaborent leurs raisonnements mathématiques pour alimenter la résolution du problème proposé. Comme il n'y a pas de stratégies de résolution prédéterminées menant à la réponse, chacune des stratégies développées par les élèves a le potentiel d'être discutée, explorée, exemplifiée et questionnée par l'enseignant ou les autres élèves.

D'un autre côté, cette liberté est aussi caractérisée par les responsabilités mathématiques qu'ont les élèves placés en résolution de problèmes (Borasi, 1996). Dans un premier temps, bien qu'ils soient libres dans leurs stratégies de résolution, les élèves sont responsables de faire avancer les idées mathématiques de la classe. Par exemple, dans la modalité des tableaux verticaux, l'enseignant laisse les élèves travailler d'eux-mêmes dans la résolution de problèmes. En d'autres mots, pour faire avancer les idées de la classe, les élèves sont chargés d'élaborer des stratégies de résolution et de les soumettre à la classe. Dans un deuxième temps, la responsabilité mathématique des élèves se caractérise aussi par le besoin d'appuyer et d'expliquer leurs idées mathématiques (Lampert, 1990b). Si les élèves se questionnent, ils doivent formuler leurs questions et tenter d'y répondre. S'ils affirment une conjecture, ils doivent l'argumenter, l'expliquer et la rendre claire pour la classe. En d'autres mots, si les élèves bénéficient d'une certaine liberté mathématique dans les explorations qu'ils peuvent mener, mais ils sont tout de même contraints de mener ces explorations, de les soumettre à la classe et d'argumenter leur pertinence.

2.2.3.3 Incertitude

Une troisième caractéristique issue des exemples de modalités de la résolution de problèmes est la mise en valeur de l'incertitude et du doute. C'est entre autres ce qui déclenche l'élaboration de stratégies, l'exploration de raisonnement et le développement d'argumentations chez les élèves. Par exemple, dans le travail sur l'erreur, les élèves doivent résoudre des doutes et des incertitudes quant aux méthodes dites erronées. Ils doivent démêler ce qui fonctionne et ne fonctionne pas, doivent explorer comment pourrait fonctionner l'erreur soumise et . En ce sens, la remise en doute du caractère erroné d'une réponse permet d'alimenter le travail des élèves qui tentent de résoudre les incertitudes soulevées. En contexte de résolution de problèmes, le doute apparait donc comme moteur de l'activité des élèves.

D'un autre côté, l'incertitude est aussi une conséquence du travail mathématique des élèves. Alors qu'ils élaborent leurs propres stratégies pour résoudre l'ambiguïté d'une question ou d'un problème et qu'ils se questionnent sur le sens et la validité de leurs propositions, les élèves sont constamment replongés dans l'incertitude. Par exemple, dans les situations-problèmes, les élèves sont redirigés par la situation si les concepts qu'ils développent ne sont pas adaptés. En ce sens, les élèves (re)mettent en doute leurs stratégies, les (ré)explorent et les (ré)étudient dans le but de résoudre les incertitudes soulevées. D'une certaine façon, les propositions des élèves en contexte de résolution de problèmes sont aussi porteuses d'incertitude et engendrent des réflexions mathématiques supplémentaires (Beghetto, 2017).

2.2.3.4 Autorité mathématique à la classe

Une dernière caractéristique pouvant être identifiée à travers les modalités présentées plus haut est l'autorité mathématique qui appartient à la classe en tant que communauté. Dans la classe en résolution de problèmes, la validité des conjectures, idées, questions et stratégies est argumentée par des élèves qui cherchent à convaincre le reste de la classe et l'enseignant que leurs idées sont justes. Par exemple, dans le cas des débats scientifiques, les élèves s'appuient sur des arguments, des raisonnements et des affirmations mathématiques dans le but de convaincre les autres étudiants de la validité de leurs propositions. Ceci met en avant l'implication des élèves dans l'argumentation, la justification et l'explication des idées mathématiques qu'ils élaborent face à un problème. D'un autre côté, les élèves du groupe contribuent et participent à l'évaluation de la validité des idées proposées. Accompagnée de l'enseignant, la classe prend en charge de s'assurer que les idées retenues et travaillées sont appuyées adéquatement, c'est-à-dire que les arguments proposés sont valides. En reprenant l'exemple des débats scientifiques, les élèves de la classe doivent se prononcer sur la validité des affirmations mathématiques qui leur sont soumises et expliquer leur opinion. En ce sens, la classe en résolution de problèmes agit en tant qu'autorité mathématique et a la responsabilité de déterminer la validité des stratégies de résolution, des explications, des arguments, des exemples ou des propositions offerts par les membres du groupe (Lampert, 1990a).

Pour conclure cette deuxième section du cadre de référence, la résolution de problèmes est un milieu qui amène les élèves en interagir entre eux, mais aussi avec le problème, leurs questionnements et leurs stratégies. Cet environnement permet aux élèves de développer leurs propres stratégies de résolution, creuser leurs questionnements et explorer les arguments qu'ils jugent pertinents mathématiquement. De plus, l'avancement des mathématiques de la classe en résolution de problèmes est alimenté par l'incertitude et le doute issu du problème et du travail des élèves. Finalement, la classe, incluant l'enseignant, détient l'autorité mathématique qui permet de valider, accepter, nuancer, transformer les stratégies de résolution proposées.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Étudier la mise en route des activités des mathématiciens chez des élèves placés en résolution de problèmes m'amène à vouloir jeter un regard sur des classes de mathématiques où le contexte de résolution de problème joue un rôle central pour les activités mathématiques des élèves. Particulièrement, l'environnement de résolution de problèmes décrit à la section précédente oriente divers choix méthodologiques qui contribuent à répondre à ma question de recherche :

> **De quelles façons sont mobilisées les activités des mathématiciens dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes?**

Dans ce troisième chapitre, j'explique plus précisément l'orientation méthodologique choisie pour répondre à cette question de recherche et j'illustre de quelle façon le cadre d'analyse permet l'étude des activités mathématiques d'élèves dans des séances de résolution de problèmes. Je présente aussi les données, le processus d'analyse ainsi que la grille d'analyse qui sont utilisés pour répondre à mes objectifs de recherches.

3.1 Orientation méthodologique

L'étude des activités mathématiques des élèves ancrées dans un contexte de résolution de problèmes place mon projet de recherche dans une méthodologie qualitative/interprétative (Savoie-Zajc, 2018). Comme mes objectifs de recherches sont d'étudier la nature des activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes, ce contexte a un rôle de premier plan à jouer dans l'orientation méthodologique de mon projet. En particulier, le contexte de résolution de problèmes permet de mieux comprendre ce que mettent en route les élèves, et la nature des activités qu'ils déploient, parce qu'il oriente la façon avec laquelle les élèves travaillent les mathématiques. En ce sens, la méthodologie qualitative/interprétative est tout indiquée puisqu'elle permet l'interprétation des activités mathématiques des élèves en tenant compte de l'environnement de résolution de problèmes dans lequel elles sont plongées :

> La démarche souple de la recherche qualitative/interprétative permet au chercheur de comprendre, de l'intérieur, la nature et la complexité des interactions d'un environnement déterminé, et d'orienter sa collecte de données en tenant compte de la dynamique interactive du site du chercheur. (Savoie-Zajc, 2018, p. 193)

Alignée avec cette description, la résolution de problèmes apparait comme « environnement déterminé » qui permet de considérer, à travers l'analyse des données, la « dynamique interne » qu'elle apporte aux activités mathématiques des élèves. Plus précisément, l'orientation qualitative/interprétative offre de tenir compte des interactions entre les élèves encadrées par la résolution de problèmes, mais aussi des interactions des élèves avec le contexte dans lequel ils sont plongés.

Plus encore, l'analyse des données est orientée vers une logique inductive délibératoire (Savoie-Zajc, 2018). Cette spécificité se caractérise par l'apport important du cadre théorique dans le processus d'analyse. Dans ce projet, cette précision méthodologique permet l'opérationnalisation du cadre de référence en grille d'analyse. Les activités des mathématiciens et le contexte de résolution de problèmes, centraux dans la question de recherche et le cadre de référence, deviennent un ancrage pour comprendre ce que mettent en route les élèves placés en résolution de problèmes. En particulier, Savoie-Zajc (2018) aborde les allers-retours entre « prises de conscience et vérifications » des données à travers la logique inductive délibératoire. Ceci signifie que le cadre de référence alimente l'analyse des données, et qu'en retour, les conceptualisations offertes dans le cadre de référence sont alimentées par l'analyse des données. D'une certaine façon, le travail des élèves, étudié à travers celui des mathématiciens et du contexte de résolution de problèmes, met en lumière des compréhensions, perspectives et détails supplémentaires à propos des activités des mathématiciens et de la classe en résolution de problèmes.

3.2 Données de recherche

Comme mentionné plutôt, mes objectifs de recherche appellent à porter un regard sur les activités mathématiques des élèves en contexte de résolution de problèmes. Or, des séances en classes de mathématiques orientées sur la résolution de problèmes ont été menées par mon directeur de recherche, le professeur Jérôme Proulx, et sont réinvesties dans ce projet pour répondre à ma question de recherche. Au cours de son projet de recherche portant sur la résolution de problèmes et l'activité mathématique des élèves en classe[3], le professeur Proulx a mené des séances de résolution de problèmes en salle de classe avec quatre groupes de troisième cycle au primaire, un groupe de deuxième année du secondaire, un groupe de troisième année du secondaire et un groupe en prolongation de cycle. Ces séances en plénière sont d'une durée de 50 minutes au primaire et 75 minutes au secondaire et se sont déroulées toutes les deux semaines. La collecte s'est effectuée d'octobre 2017 à avril 2018, dans deux écoles situées en banlieue de Montréal.

Comme toutes ces séances sont similaires au niveau des problèmes proposés, de leurs déroulements et du travail demandé aux élèves, un seul groupe a été sélectionné pour former les données de mon projet et aborder ma question de recherche. Au total, 13 séances menées auprès d'un groupe de 5^{e} année du primaire (10-11 ans) formé de 27

---

[3] Se référer au document de travail issu de ces travaux de recherche dans Proulx et coll. (2019)

élèves sont visionnées puis analysées pour étudier les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problèmes.

Les séances issues du projet de professeur Proulx, menées selon la méthodologie du *Teaching Experiment* (Steffe, 1991; Steffe et Thompson, 2000) ont pour objectif la résolution de tâches mathématiques à travers le partage et l'exploration des stratégies des élèves. Plus particulièrement, dans un contexte de *Teaching Experiment,* le chercheur-enseignant[4] souhaite creuser et pousser les raisonnements des élèves. Il a recours à des questions d'investigation ou des tâches supplémentaires afin de mettre en lumière les stratégies des élèves et les raisonnements qui les appuient. En ce sens, l'enseignant en *Teaching Experiment* souhaite constamment rendre explicite le travail mathématique des élèves : les idées mathématiques qu'ils explorent, les questions qu'ils se posent, les conjectures sur lesquelles ils travaillent, les arguments qui supportent leurs raisonnements, le sens qu'ils donnent aux concepts avec lesquels ils travaillent, etc.

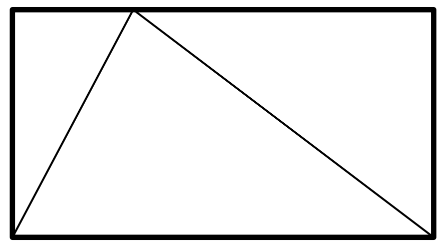
Dans le cadre des travaux du professeur Proulx, les problèmes proposés s'apparentent à ce que Borasi (1986) appelle des *words problems* et des *exercices*[5]. Les énoncés sont généralement assez courts, offrent parfois un contexte ou sont tirés des sections d'exercices des manuels scolaires. Certains étaient donnés oralement et d'autres à l'écrit, affichés tableau ou sur une feuille remise à chaque élève. Voici des exemples de problèmes proposés aux classes de primaire et/ou secondaire :

---

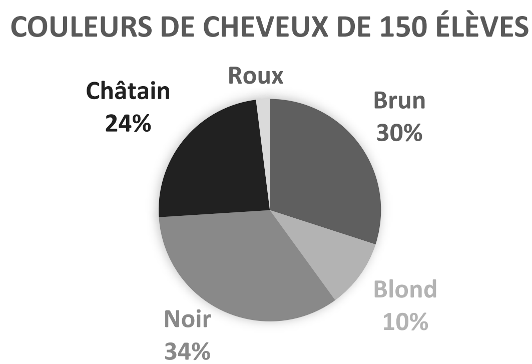
[4] Le chercheur joue le rôle de l'enseignant dans un *Teaching Experiment,* il est chercheur-enseignant. Il sera, pour la suite du mémoire, référé uniquement par « enseignant » à des fins de simplification.

[5] Voir Appendice A pour la liste complète des problèmes offerts au cours des séances analysées dans ce projet.

- Montrer que le triangle forme la moitié du rectangle dans la figure suivante :



- Déterminer quels nombres parmi 46, 70, 81, 106 sont divisibles par deux.
- Résoudre $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$.
- Estimer $152\ 498 + 608\ 947$.
- Combien d'élèves ont les cheveux roux selon le diagramme suivant, qui représente la couleur de cheveux de 150 élèves :



De plus, les séances de résolution de problèmes du professeur Proulx suivent le format suivant :

1) Un problème et différentes contraintes pour le résoudre (mentalement, sur papier, temps de résolution, individuellement, en équipe) sont donnés aux élèves.
2) Un temps, allant de quelques secondes à quelques minutes selon le problème, est laissé aux élèves pour la résolution du problème.
3) L'enseignant invite les élèves à faire part, par écrit ou oralement, de leurs réponses et de leurs stratégies. L'enseignant les note au tableau ou invite les élèves à venir les expliquer au tableau.
4) L'enseignant demande aux élèves qui auraient résolu la tâche d'une autre façon de proposer leurs réponses et leurs stratégies de résolution

5) En plénière, les solutions proposées sont explorées par des questionnements, des reformulations, des explications, des comparaisons, des mises en relation et des exemplifications de la part de l'enseignant et des élèves.
6) Ces 5 étapes sont non-linéaires. En effet, en cours de résolution, de nouveaux problèmes émergent et sont explorés à travers le travail des élèves. De plus, des allers-retours sont effectués entre les stratégies et permettent d'alimenter l'exploration mathématique.

À chacune des présences de l'enseignant en classe, une caméra est installée au fond de la classe, dirigée vers l'avant et captant le tableau blanc interactif et une majorité des élèves. Les séances sont enregistrées sur vidéo et les traces écrites au tableau sont conservées sur fichiers électroniques.

Ce type de séances est aligné avec mes objectifs de recherche, car le travail réalisé en classe avec les élèves est axé sur la résolution de problèmes. Les quatre caractéristiques de la résolution de problèmes identifiées à la Section 2.2 se retrouvent dans le type de travail mathématique effectué par les élèves au cours des séances.

D'abord, il y a *interaction entre élèves, problèmes et stratégies* dans les données parce que l'enseignant, menant un *Teaching Experiment*, alimente et structure la discussion et les échanges entre les élèves. De plus, ces discussions en plénière portent sur les stratégies développées, sur les arguments qui les appuient, sur les questionnements des élèves à propos de ces stratégies, ainsi que sur les propositions de la classe en lien avec ces stratégies soumises. En ce sens, les élèves interagissent à travers les idées et questions qu'ils proposent à la classe au sujet des problèmes à résoudre.

De plus, parce que l'enseignant au cœur des données est en *Teaching Experiment* et souhaite avoir accès aux raisonnements personnels des élèves, ceux-ci ont la *liberté mathématique* de creuser, offrir et remettre en doute les stratégies, arguments et affirmations mathématiques qu'ils souhaitent. Toutefois, les élèves ont en retour à expliciter la signification de leurs propositions mathématiques, les argumenter, les expliquer, les contextualiser et ainsi, rendre clairs ce qui appuie les idées mathématiques qu'ils soumettent à la classe. En particulier, l'enseignant questionne les élèves sur la validité des idées soumises au groupe, leur demande de prendre position par rapport à la validité de ces idées et de justifier cette prise de position afin de mettre en lumière les raisonnements des élèves.

Aussi, comme l'enseignant souhaite étudier les raisonnements mathématiques des élèves, il laisse place à leurs *incertitudes et doutes* mathématiques qui offrent une façon supplémentaire d'étudier leurs raisonnements. En ce sens, les élèves ont la possibilité, tout au long des séances, de s'interroger et formuler leurs questions à propos du problème, des stratégies et des arguments de leurs collègues de classe. Plus encore, ces questionnements sont réinvestis par l'enseignant qui s'en sert comme moteur du travail mathématique des élèves. En ce sens, les incertitudes soulevées par les élèves alimentent les raisonnements qu'ils développent et qui sont l'objet d'étude principal des données du professeur Proulx.

Finalement, toujours dans le but d'étudier les raisonnements des élèves, l'enseignant est en support à la *validation laissée à la classe.* Dans les données, l'enseignant oriente le travail des élèves vers l'argumentation, la justification et l'explication de leurs solutions dans le but de pouvoir s'intéresser aux raisonnements sous-jacents à ces solutions. Il leur demande d'expliquer pourquoi leurs stratégies fonctionnent, ou encore de préciser le sens des étapes de résolution. De plus, il incite les autres élèves à prendre position par rapport aux stratégies soumises. Ceux-ci sont invités à se prononcer sur la validité des stratégies, à donner leur avis sur les étapes de résolution proposées ou encore, à intervenir s'ils ne sont pas d'accord avec une affirmation mathématique. En ce sens, la classe est impliquée dans la validation des mathématiques parce qu'elle doit déterminer si les solutions proposées sont valides et adéquates mathématiquement.

En somme, les séances du professeur Proulx sont alignées avec la résolution de problèmes en classe de mathématiques au cœur de ma question de recherche. Le rôle que prend ici l'enseignant pour mettre en œuvre un *Teaching Experiment* plonge les élèves dans une activité mathématique alignée avec la résolution de problème décrite à la Section 2.2. Ces séances deviennent ainsi des données pertinentes pour étudier les activités des mathématiciens mises en route chez des élèves placés en résolution de problèmes.

3.3 Analyse des données

Dans le but d'étudier les activités mathématiques des élèves en contexte de résolution de problèmes, l'analyse des séances porte principalement sur ce que mettent en route les élèves pour résoudre le problème. Leurs gestes, paroles et écrits à propos des mathématiques deviennent des unités d'analyse qui permettent d'étudier la façon avec laquelle les activités des mathématiciens sont mobilisées par les élèves en résolution de problèmes. Plus précisément, le processus d'analyse portant sur ces unités d'analyse est décrit dans ce qui suit avant d'expliquer l'opérationnalisation du cadre de référence en grille d'analyse et de présenter la grille d'analyse finale.

3.3.1 Processus d'analyse

Le processus d'analyse qui guide l'étude des activités des élèves lors de séances en résolutions de problèmes en classe de mathématiques est inspiré du modèle de Powell *et al*. (2003). Ceux-ci ont développé sept étapes pour l'analyse en détail des idées mathématiques des élèves et leur développement à travers le temps. Il est adapté à ce projet, car il permet, à partir d'enregistrements vidéo de s'intéresser à l'activité mathématique des élèves. En particulier, cinq étapes non linéaires et interdépendantes sont reprises du processus de Powell *et al*. (2003) pour être appliquées aux séances de la classe en résolution de problèmes :

1. Visionnements répétés

   Plusieurs visionnements des séances permettent la prise de notes à propos des stratégies proposées, des actions des élèves et des interventions de l'enseignant. Cette étape permet de se familiariser avec le déroulement des séances.

2. Identification des moments clés

   À travers les visionnements, des moments clés correspondant à des gestes, paroles et écrits des élèves à propos des mathématiques sont identifiés. Ces moments clés sont utilisés pour étudier les activités des mathématiciens chez les élèves en résolution de problèmes.

3. Transcription des moments clés

   Chacun des moments clés est retranscrit dans un tableau[6] permettant de mettre au clair ce qui a été fait, dit et/ou écrit par l'élève. Ceci permet de s'intéresser en détail à ce qui est mis en route par l'élève ainsi qu'au contexte précis dans lequel l'élève agit.

4. Codage des moments clés

   Les moments clés sont ensuite codés et analysés en fonction de la grille d'analyse. Chaque activité d'élève est mise en relation avec une ou plusieurs composantes du travail des mathématiciens présentes dans la grille d'analyse, et ce, à l'aide des manifestations anticipées associées à chaque composante des activités des mathématiciens.

[6] Un exemple de tableau de transcription a été mis en annexe, voir Appendice B.

5. <u>Construction de sens</u>

   Une fois associé à une ou des composantes des activités des mathématiciens, chaque moment clé est interprété à la lumière de cette ou ces composantes . Par des allers-retours entre grilles d'analyse, cadre théorique et données de recherche, l'association d'une activité d'élève à une composante du travail des mathématiciens est décrite, expliquée, appuyée et nuancée.

3.3.2 Grille d'analyse initiale

La grille d'analyse associée à ce projet est issue d'un jumelage de la Section 2.1 à propos du travail des mathématiciens et de la Section 2.2 portant sur le contexte de résolution de problèmes. Ce croisement des deux pans principaux de mon projet de recherche permet de développer un portrait détaillé de ce à quoi ressembleraient les activités des mathématiciens mises en route par les élèves en résolution de problèmes.

Toutefois, les premières analyses de données ont permis de réaliser, à travers les activités mathématiques des élèves, que certaines modifications avaient à être apportées à la grille d'analyse. D'abord, la composante *Appliquer des méthodes* a été ajoutée à la grille d'analyse. Gardée implicite dans la description du travail des mathématiciens, l'application de méthodes contribue au travail des mathématiciens pour la production (des) mathématique(s). En effet, une relecture du cadre de référence a permis de confirmer que les mathématiciens se servent bel et bien de méthodes pour le développement de résultats mathématiques (Burton, 2004; Davis et Hersh, 1981; Livingston, 2015). Ensuite, l'activité *Utiliser des outils de communication mathématique* s'est vue bonifiée à la suite des premiers visionnements des séances. En effet, en plus du symbolisme et du vocabulaire employés pour communiquer, des exemples sont aussi utilisés afin de rendre claires des propositions mathématiques. Plus précisément, ces exemples permettent d'illustrer certaines idées mathématiques proposées et rendent ainsi clairs, comme le font le symbolisme et le vocabulaire, certains détails liés à ces idées. En ce sens, l'activité *Utiliser des outils de communication mathématique* s'est vue ajoutée des éclaircissements quant à l'utilisation d'exemples pour la communication (des) mathématique(s) chez les mathématiciens.

3.3.3 Grille d'analyse finale

La grille d'analyse finale est organisée en trois tableaux, chacun associé à une des dimensions du travail des mathématiciens. Ces tableaux abordent toutes les composantes dégagées du travail des mathématiciens et offrent, dans la seconde colonne, une brève description de ces composantes afin de rappeler la nature de chacune. Dans la troisième colonne, des exemples concrets de ces composantes chez les mathématiciens permettent d'illustrer les activités mathématiques des mathématiciens. Finalement, le croisement des deux sections de mon cadre de référence se retrouve dans la quatrième colonne et permet de lister quelques manifestations anticipées des activités des mathématiciens chez les élèves placés en résolution de problèmes. En particulier, ces tableaux contribuent à l'analyse des données en offrant des points de comparaison précis entre le travail des mathématiciens et le travail des élèves en résolution de problèmes.

3.3.3.1 Production (des) mathématique(s)

La grille qui suit permet d'aborder les activités mathématiques liées à la production (des) mathématique(s) sous les composantes :

- Créer des mathématiques
- Concevoir des liens
- Poser des problèmes
- Générer et étudier des exemples
- Créer et exploiter le symbolisme
- Appliquer des méthodes

Chez les mathématiciens, la production (des) mathématique(s) passe par l'élaboration de conjectures, la formulation d'arguments, le développement de méthodes ainsi que la mise au point de définitions. En ce sens, ces activités permettent de produire des idées mathématiques, de les explorer et de les étudier afin de contribuer aux connaissances mathématiques de la communauté des mathématiciens.

Chez les élèves en résolution de problèmes, ces activités les amèneraient à développer des stratégies pour résoudre un problème, à proposer des conjectures appuyant leurs stratégies et à élaborer des explications et justifications à leurs propositions mathématiques. La production (des) mathématique(s) chez les élèves correspondrait donc à l'avancement de la résolution des problèmes pour la classe.

Composante	Description de l'activité mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Créer des mathématiques	La production (des) mathématique(s) est caractérisée par le développement de nouveaux concepts, méthodes, théories, conjectures, définitions et arguments qui contribuent à l'avancement des idées mathématiques. Entre autres, des résultats mathématiques établis sont utilisés de manière nouvelle, sont recombinés ou sont abordés d'un nouvel angle pour développer de nouveaux résultats mathématiques.	Les mathématiciens développent une méthode de preuve. Les mathématiciens posent des définitions pour de nouveaux objets mathématiques Les mathématiciens émettent une conjecture à théoriser.	Un élève élabore une stratégie pour répondre au problème. Un élève propose un concept mathématique pour la classe. Un élève pose une conjecture à travailler.
Concevoir des liens	Concevoir des liens permet de donner du sens aux concepts qui sont repris pour la production (des) mathématique(s). Ces liens proviennent de la reformulation, la réorganisation et la mobilisation de concepts mathématiques qui alimentent la compréhension d'idées mathématiques. Ces liens sont ensuite repris et explorés pour appuyer le développement d'idées mathématiques. La mise en relation permet donc de produire des mathématiques en étant elle-même une production mathématique.	Les mathématiciens reformulent une définition d'un objet mathématique auquel ils s'intéressent. Les mathématiciens mettent en lien un nouveau résultat avec des objets, définitions et autres résultats mathématiques. Les mathématiciens fouillent la mise en relation de deux objets mathématiques.	Un élève explique les liens qu'il fait entre sa stratégie et une stratégie d'une autre élève. Une élève formule dans ses mots une explication de l'enseignant. Un élève justifie une conjecture proposée par autrui en s'appuyant sur des arguments déjà présentés à la classe.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Poser des problèmes	Des questions et problèmes sont formulés à partir d'idées de la communauté mathématique et portent sur des pistes d'exploration de ces idées. Les problèmes sont formulés en fonction des intérêts de la personne qui pose des problèmes et proviennent de questionnements et curiosités mathématiques.	Les mathématiciens souhaiteraient définir un objet mathématique. Les mathématiciens voudraient produire une preuve algébrique pour appuyer un résultat topologique. Les mathématiciens désireraient compléter un argument incomplet.	Un élève voudrait mettre en relation des stratégies. Un élève souhaiterait raffiner une stratégie mathématique pour qu'elle fonctionne sur d'autres objets. Un élève aimerait retravailler une conjecture.
Générer et étudier des exemples	Les exemples sont des objets ou des concepts mathématiques qui sont créés, développés et utilisés de 3 façons différentes : - L'étude des propriétés des exemples permet de développer des définitions ou conjectures. - Les exemples permettent d'expliquer et mettre en image une définition ou une conjecture afin de mieux la comprendre. - Les exemples contredisent des propositions mathématiques et permettent d'identifier ce qui doit être modifié dans ces propositions pour les rendre valides (contre-exemples).	Les mathématiciens choisissent des objets algébriques pour étudier leurs propriétés. Les mathématiciens trouvent des objets mathématiques qui s'appliquent à une nouvelle définition. Les mathématiciens cherchent des contre-exemples pour raffiner leurs conjectures.	Un élève étudie un exemple pour des propriétés précises. Un élève essaie d'appliquer une stratégie à un exemple. Un élève développe un contre-exemple pour invalider une proposition.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Créer et exploiter le symbolisme	La reprise de symboles connus et la création de nouveaux symboles pour représenter des idées mathématiques permet donner un sens à des idées au cœur du travail mathématique sur ces idées. Les manipulations symboliques sont caractérisées par la transformation, l'association, l'ajout et le retrait de symboles afin d'agir sur des idées mathématiques pour la production (des) mathématique(s). Ces manipulations sont des allers-retours entre symboles et sens des objets qu'ils représentent.	Les mathématiciens ont recours au symbolisme pour produire une définition. Les mathématiciens transforment des équations pour une preuve. Les mathématiciens produisent des notations pour les concepts en jeu dans leur conjecture.	Un élève transforme des équations pour produire une stratégie Un élève manipule des dessins au tableau pour produire une explication à une stratégie. Un élève discute des symboles et de leurs sens.
Appliquer des méthodes	Des méthodes mathématiques sont utilisées pour la production de mathématiques. En effet, pour développer les mathématiques, les méthodes comme des algorithmes, des équations ou des opérations sont utilisées afin de faire avancer la production de mathématiques. Celles-ci sont considérées comme connues et valides en elles-mêmes, ne demandant donc pas de les expliquer ou les justifier lors de leur application.	Le mathématicien utilise l'inégalité triangulaire pour transformer une équation. Le mathématicien projette un objet sur un plan pour l'étudier.	Un élève utilise l'algorithme de division pour calculer. Un élève multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un nombre afin d'obtenir une fraction équivalente.

3.3.3.2 Communication de(s) mathématiques

Les activités de cette seconde section de la grille d'analyse participent à la communication (des) mathématique(s) et se déclinent en 3 composantes :

- Structurer les propos mathématiques
- Mettre en évidence des manières de penser
- Utiliser des outils de communication

Chez les mathématiciens, ces activités mathématiques ont pour objectif la diffusion de résultats, mais aussi le partage des manières de penser et des manières de faire qui ont mené à ces résultats. À travers des exposés, des livres, des séminaires et des articles scientifiques, les mathématiciens rendent claires et disponibles des idées mathématiques sur lesquelles ils ont travaillé.

Chez les élèves en résolution de problèmes, la communication (des) mathématique(s) a comme objectif de faire part des stratégies et raisonnements déployés pour la résolution de problèmes. Les élèves prennent donc la parole ou écrivent leurs idées mathématiques afin de diffuser leurs propositions mathématiques à leurs collègues de classe.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Structurer les propos mathématiques	Pour rendre clairs des résultats mathématiques, une communication mathématique est structurée. Pour ce faire, un retour est fait sur la production des résultats pour identifier ce qui est pertinent à communiquer pour les appuyer. De plus, ces idées mathématiques sont organisées dans le but de les ordonner les unes par rapport aux autres. D'une certaine façon, une part de la communication passe dans l'ordre de présentation qui influence la manière de penser ces idées.	Les mathématiciens déterminent les lemmes qui appuient le théorème qu'ils ont produit. Les mathématiciens mettent en relation des propositions afin d'argumenter une affirmation mathématique. Les mathématiciens organisent les résultats mathématiques utilisés dans une preuve mathématique afin de l'appuyer adéquatement.	Un élève explique ce qui appuie leurs stratégies mathématiques. Un élève fait appel à des raisonnements qu'il considère comme étant connus des autres élèves Un élève met en relation différentes étapes pour décrire comment il est arrivé à formuler une conjecture.
Mettre en évidence des manières de penser	La communication d'un résultat mathématique se fait aussi par la mise en évidence des manières de penser et des raisonnements qui ont mené au résultat communiqué. Des explications additionnelles sont données à propos des idées mathématiques afin de les préciser, les détailler et faire part de leur sens particulier en lien avec le résultat mathématique diffusé.	Les mathématiciens exposent ce qui les a amenés à développer une preuve. Les mathématiciens expliquent une nouvelle définition en la comparant avec d'autres définitions connues.	Un élève décrit ce qui est à l'origine de sa stratégie de résolution. Un élève explique comment s'enchaînent les différentes étapes de résolution de sa stratégie.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Utiliser des outils de communication mathématique	Des symboles, vocabulaires et exemples sont parfois utilisés pour illustrer et rendre clair un résultat mathématique. Ces outils permettent de détailler et préciser le fonctionnement ou la signification d'une proposition ou idée mathématique.	Dans une communication, les mathématiciens emploient un symbolisme communément utilisé par ses collègues. Les mathématiciens ont recours à un vocabulaire cohérent avec les résultats qu'il souhaite communiquer. Les mathématiciens utilisent des exemples pour présenter une définition.	Un élève a recours à un symbolisme connu des autres des élèves pour présenter sa stratégie. Un élève emploie des mots propres au vocabulaire de la classe. Un élève explique une conjecture en l'appliquant à un nombre.

3.3.3.3 Grille d'analyse : Validation (des) mathématique(s)

La validation (des) mathématique(s) se décline en quatre composantes :

- Utiliser des exemples
- Vérifier la rigueur
- Évaluer l'innovation
- Vérifier la cohérence

Chez les mathématiciens, la validation d'un résultat mathématique se fait généralement par un groupe restreint de mathématiciens considérés experts du domaine lié au résultat. Ceux-ci s'approprient certains critères et normes de leur communauté et les appliquent pour s'assurer qu'un résultat peut être diffusé à la communauté pour être ensuite réinvesti dans d'autres résultats mathématiques.

Dans la classe en résolution de problèmes, l'ensemble des élèves de la classe participe à la validation d'une stratégie proposée ou l'énoncé d'une conjecture. Les propositions mathématiques formulées par les élèves sont accessibles aux membres de la classe qui peuvent la valider, l'invalider ou la questionner. En ce sens, les élèves prennent en charge la validation (des) mathématique(s) alors qu'ils ont la responsabilité d'intervenir à propos de la validité des propositions de leurs collègues de classe.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observables anticipés chez les élèves en résolution de problèmes
Utiliser des exemples	Des exemples sont développés, choisis et utilisés de deux manières pour la validation (des) mathématique(s) : - L'étude d'exemples permet de comprendre pourquoi un résultat fonctionne et peut être validé. - Des contre-exemples invalident un résultat mathématique et ciblent un travail supplémentaire pour préciser le résultat.	Les mathématiciens utilisent différents nombres pour s'assurer qu'un théorème est valide. Les mathématiciens se servent d'un objet topologique comme contre-exemple à une conjecture.	Un élève utilise plusieurs mesures de rectangle pour vérifier qu'une méthode pour mesure l'aire fonctionne. Un élève trouve un contre-exemple à une proposition mathématique d'un autre élève.
Vérifier la rigueur	Des résultats mathématiques proposés sont revus pour s'assurer que les raisonnements et affirmations qui l'appuient sont justes et qu'ils supportent adéquatement le résultat soumis. La rigueur est un critère de validité utilisé pour s'assurer que les résultats sont argumentés convenablement, c'est-à-dire par des justifications et explications elles-mêmes valides.	Les mathématiciens vérifient qu'un nouvel algorithme est valide et fonctionnel. Les mathématiciens évaluent les arguments associés à une preuve.	Un élève vérifie qu'une nouvelle manière d'additionner fonctionne et donne le bon résultat. Un élève évalue les justifications associées à une stratégie de résolution.

Composante	Description mathématique	Exemples chez les mathématiciens	Observable anticipé chez les élèves en résolution de problèmes
Évaluer l'innovation	Un regard est jeté sur des résultats mathématiques proposés afin de s'assurer qu'ils contribuent à la communauté de manière significative. Un résultat est innovant s'il reprend des idées mathématiques différemment et exploite le potentiel de ces idées mathématiques.	Les mathématiciens s'assurent qu'une définition est novatrice et offre de nouvelles propriétés intéressantes. Les mathématiciens vérifient qu'une preuve bonifie et précise d'autres preuves semblables. Les mathématiciens évaluent si le problème associé au résultat mathématique est pertinent.	Un élève s'assure qu'une stratégie est différente des autres déjà développées. Un élève vérifie qu'une justification ajoute des précisions à d'autres explications. Un élève évalue si les questions et problèmes posés sont pertinents pour la résolution du problème initial.
Vérifier la cohérence	La cohérence est un critère qui participe à la validation (des) mathématique(s) de deux façons : - La cohérence correspond d'abord à l'harmonie d'un résultat avec d'autres résultats de la communauté. Un résultat évalué ne doit donc pas contredire des résultats déjà établis. - La cohérence correspond ensuite à la présence un fil conducteur clair et précis entre un problème, un résultat et les explications qui l'appuient.	Les mathématiciens s'assurent qu'une preuve est appropriée à une conjecture. Les mathématiciens s'assurent que les explications d'un nouvel objet mathématique sont logiques et conséquentes Les mathématiciens évaluent si l'enchaînement des arguments d'une preuve est logique	Un élève s'assure qu'une stratégie aborde effectivement le problème posé. Un élève s'assure que les explications d'une stratégie appuient bel et bien cette stratégie. Un élève vérifie qu'une manière de faire s'enchaîne raisonnablement.

CHAPITRE IV

ANALYSE

Ce chapitre fait état et illustre les manières avec lesquelles les élèves placés en résolution de problèmes mettent en route les activités des mathématiciens. Pour ce faire, le travail des élèves est investigué sous l'angle de chacune des composantes associées aux dimensions du travail des mathématiciens (production (des) mathématique(s), communication (des) mathématique(s) et validation (des) mathématique(s), voir Section 3.3.3). Ceci permet d'aborder ma question de recherche qui est :

> **De quelle façon les élèves mobilisent-ils les activités des mathématiciens lorsque placés en résolution de problèmes?**

4.1 Analyse de la dimension production (des) mathématique(s)

La dimension *production (des) mathématique(s)* englobe des activités qui contribuent à l'élaboration de résultats mathématiques. Les mathématiciens étudient des objets mathématiques, formulent des conjectures, développent et utilisent des méthodes, conçoivent des définitions et des arguments, et participent ainsi à l'avancement des connaissances de leur communauté.

Chez les élèves en résolution de problèmes, leur production (des) mathématique(s) est orientée vers le développement de stratégies pour résoudre les problèmes proposés et vers l'élaboration d'explications, arguments et justifications pour appuyer ces stratégies. En ce sens, à travers le travail de résolution, les élèves explorent des résultats mathématiques tels que des compréhensions mathématiques, des stratégies, des méthodes, des explications et des conjectures mathématiques. Tout ceci est illustré par l'analyse des six composantes des activités des mathématiciens liées à la dimension de production (des) mathématique(s) : *Créer des mathématiques, Concevoir des liens, Poser des problèmes, Générer et étudier des exemples, Créer et exploiter le symbolisme* et *Appliquer des méthodes.*

4.1.1 Créer des mathématiques

La composante *Créer des mathématiques* est caractérisée par le développement d'innovations mathématiques comme des méthodes, des conjectures, des définitions et des arguments. Des idées mathématiques établies par d'autres mathématiciens sont reprises et étudiées sous un angle novateur ou une perspective particulière. Ce type de travail permet le développement de résultats qui contribuent à l'avancement des connaissances de la communauté.

Cette composante se retrouve chez les élèves placés en résolution de problèmes qui, pour contribuer à la résolution des problèmes proposés, élaborent de nombreux résultats mathématiques. Les élèves explorent des idées mathématiques offertes par leurs camarades de classe et les reprennent de manière différente: ils fouillent une perspective particulière du résultat et en font un nouveau résultat. Dans ce qui suit, un exemple est donné pour illustrer cette façon de *créer des mathématique*s.

4.1.1.1 Sabine crée une conjecture à propos de la parité du quotient de la division par deux

L'extrait représentant la manière avec laquelle les élèves *créent des mathématiques* provient d'une séance portant sur la divisibilité par deux. Pour débuter cette séance, le problème suivant est offert aux élèves :

46, 70, 81, 106
Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

Après avoir présenté le problème aux élèves, ceux-ci ont quelques minutes pour le résoudre en calcul mental, c'est-à-dire sans papier ni crayon. L'enseignant demande ensuite aux élèves d'offrir les réponses qu'ils ont trouvées et les stratégies qu'ils ont élaborées. Durant cette discussion, Rafa soulève à la classe une observation à propos de la division par deux :

> **Rafa** : À chaque fois que tu divises un nombre par deux, ça donne un nombre impair.

Rapidement, Simon, un autre élève, rappelle que 100 divisé par deux donne 50 et invalide l'affirmation de Rafa en soulignant que 50 est un nombre pair. L'enseignant[7] intervient et propose aux élèves d'explorer ce qu'énonce Rafa. Il leur demande de comprendre comment fonctionne son affirmation et de déterminer pour quels nombres celle-ci est valide, et pour quels nombres elle ne l'est pas. Après 10 minutes de travail individuel, ou en équipe pour quelques élèves, l'enseignant demande au groupe de

---

[7] Tel que mentionné au Chapitre 3, l'enseignant est ici un chercheur-enseignant en contexte de Teaching Experiment.

donner des cas où l'affirmation est valide, et les cas où elle ne l'est pas. Au fur et à mesure, deux listes d'exemples sont construites au tableau : une première dans laquelle la division donne une réponse impaire et une seconde dans laquelle la division donne une réponse paire (Figure 4.1).

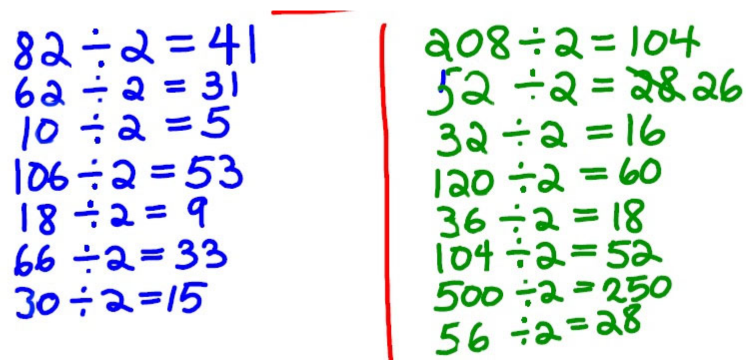


Figure 4.1 Listes des nombres dont la division par deux donne une réponse paire ou impaire.

À un moment, Sabine lève sa main et lit à la classe la conjecture qu'elle a développée durant la période de travail quelques minutes plus tôt :

> **Sabine** : Quand l'unité d'un nombre est 2 ou 6, je pense alors que la division par 2 donnera un nombre impair.
> **Enseignant** : Qu'est-ce que ça veut dire ça, quand ton unité est 2 ou 6, donne-moi un exemple?
> **Sabine** [En pointant au tableau] : Exemple, 82.
> **Enseignant** : Ah oui, ça fonctionne. Et 6 aussi tu as dit, et on a 106 ici [pointe 106 du côté des réponses impaires] Et après, c'est quoi la suite?
> **Sabine** : Quand 0,4 ou 8 est à la position des unités, la division par 2 donne un nombre pair.
> **Enseignant** : La même chose, si on regarde au tableau, on a des exemples qui fonctionnent. Mais attend un peu, on a un zéro du côté impair [en pointant la division $10 \div 2 = 5$]. C'est quand même intéressant, mais qu'est-ce que tu essayais de faire? Tu voulais trouver comment ça fonctionne en tout?
> **Sabine** : J'ai pris 100, 102, 104, 106, 108, et ainsi de suite avec les 200 et 300 aussi.

Un autre élève souligne qu'un nombre terminant par deux se trouve du côté des nombres donnant une réponse paire. L'enseignant encercle ensuite, avec l'aide des élèves, les nombres qui ne concordent pas avec la conjecture de Sabine dans les deux listes au tableau. De plus, il marque d'un trait ceux pour lesquels la conjecture fonctionne avant d'annoncer la fin de la séance.

4.1.1.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Créer des mathématiques*

Dans cet extrait, Sabine s'intéresse à l'affirmation proposée par Rafa à propos de la parité de la réponse de la division par deux. Elle reprend cette idée pour la raffiner et trouver quels types de nombres vérifient, ou non, ce qu'il a offert à la classe. En d'autres mots, la conjecture développée et proposée par Sabine représente une création mathématique parce qu'elle permet de faire avancer les idées mathématiques de la classe à propos des nombres divisibles par deux. De plus, cette conjecture représente une création mathématique parce qu'elle est issue d'une affirmation de Rafa qui a été reprise de manière particulière par Sabine.

Ceci correspond à la composante *créer des mathématiques* puisque Sabine participe à l'avancement des idées mathématiques de sa classe par l'élaboration d'une conjecture à propos de la division par deux. Cette conjecture porte sur la structure de la division par deux et met en lumière le lien entre le dernier chiffre d'un nombre et la parité de la réponse de la division par deux de ce nombre. D'une certaine façon, Sabine contribue au développement des connaissances de la classe puisqu'elle précise une régularité observée par Rafa à propos de la division par deux. Ceci est aligné avec ce qu'expliquent Davis et Hersh (1981), Lockhart (2009) et Schoenfeld (1994) à propos des objectifs des mathématiciens : ils visent à contribuer aux connaissances de leur communauté en développant de nouveaux résultats mathématiques qui permettent de déterminer la nature des structures et récurrences d'objets mathématiques. De la même façon, Sabine participe aux idées mathématiques au cœur du travail de la classe lorsqu'elle propose sa conjecture. Plus précisément, sa conjecture permet de structurer la division par deux selon les familles de nombres finissant par 2-6 ou 0-4-8, et offre, comme chez les mathématiciens, de mettre en lumière la nature des structures sous-jacentes à des objets mathématiques[8].

De plus, l'élaboration d'une conjecture par Sabine correspond à *Créer des mathématiques* puisqu'il est issu du regard particulier que jette Sabine à la tâche de l'enseignant au sujet de l'affirmation de Rafa. Pour répondre à l'enseignant, beaucoup d'élèves ont offert des exemples de nombres pour lesquels l'affirmation de Rafa est valide ou d'autres pour lesquels elle est fausse (voir Figure 4.1). De son côté, Sabine s'intéresse différemment au travail demandé par l'enseignant et explore l'affirmation de Rafa sous l'angle particulier des familles 2-6 et 0-4-8. De la même façon, de nombreux mathématiciens interviewés par Burton (2004) expliquent que leurs travaux se placent aussi en continuité avec des résultats développés par des collègues auxquels ils jettent un regard nouveau. Notamment, Struik (2012) donne l'exemple de Lagrange qui a étudié les séries de Taylor sous un angle algébrique afin de développer de nouvelles propriétés aux fonctions réelles. Sabine, de la même façon, *crée des mathématiques* en reprenant l'affirmation de Rafa sous un angle singulier, celui des familles de nombres.

4.1.2 Concevoir des liens

La composante *Concevoir des liens* est caractérisée par la mise en relation d'idées qui permettent de donner du sens à certains résultats mathématiques, voire même de les approfondir. Les liens établis ouvrent sur l'interprétation, la reformulation et la

[8] Cette mise en relation met en lumière que les élèves et les mathématiciens s'intéressent à la structure d'objets mathématiques, comme les nombres, entre autres. Toutefois, les objets mathématiques étudiés par les mathématiciens sont généralement plus variés et parfois même, plus complexes. En ce sens, cette ressemblance entre le travail des élèves et celui des mathématiciens porte sur la façon de travailler ces objets mathématiques, et non, sur la nature des objets mathématiques étudiés.

réorganisation d'idées mathématiques en jeu et contribuent à développer d'autres résultats mathématiques. En ce sens, les liens établis sont eux-mêmes des productions mathématiques qui supportent la production (des) mathématique(s).

Cette composante se retrouve dans ce que font les élèves alors que ceux-ci mettent fréquemment des idées en relation pour donner des explications à des idées discutées en classe. Ils s'intéressent à des concepts mathématiques au cœur de la résolution des problèmes et leur donnent un sens en établissant des liens avec d'autres concepts qu'ils maîtrisent. Les élèves s'appuient ensuite sur ces liens afin d'offrir des explications aux idées discutées par le groupe. Un exemple est donné dans ce qui suit afin de mettre en lumière la façon avec laquelle les élèves mobilisent l'activité *Concevoir des liens*.

4.1.2.1 Simon conçoit des liens pour offrir un sens aux fractions équivalentes

Un exemple de liens établis par les élèves se déroule lors d'une séance dans laquelle il est demandé aux élèves de trouver différentes façons d'écrire la fraction cinq dixièmes sur un tableau blanc effaçable qui leur est prêté. Après trente secondes de réflexion, des élèves proposent au groupe ce qu'ils ont écrit :

> **Nadia** : J'ai fait le tableau centaines-dizaines-unités. Et j'ai mis cinq dans les dizaines, mais j'étais mélangée, j'avais compris cinq dizaines.
> **Enseignant** : oh! C'est pas grave, quelqu'un d'autre?
> **Sabine** : Moi j'ai fait une demie. On a travaillé les fractions équivalentes et cinq, c'est la moitié de dix, et un c'est la moitié de deux.
> **Jessie** : Moi j'ai dix vingtièmes. J'ai fait cinq fois deux, ça m'a donné dix et j'ai fait dix fois deux, ça m'a donné 20, donc c'est une fraction équivalente à cinq dixièmes.
> **Enseignant** : Mais comment tu es certaine que ce sont des fractions équivalentes?

Jessie ne semble pas savoir quoi répondre à l'enseignant qui donne alors la parole aussi aux autres élèves de la classe. Philippe, souligne que la fraction de Jessie est la moitié alors que Nathan insiste que ce qui est important est de multiplier « par la même chose » au numérateur et au dénominateur de la fraction. Après ces brèves explications, l'enseignant propose de travailler avec des facteurs de multiplication différents au numérateur et au dénominateur de la fraction cinq dixièmes. Il multiplie cinq par trois et 10 par deux pour obtenir la fraction 15 vingtièmes. Lilia dit alors que la fraction est équivalente à la fraction un tiers alors que Simon pense que la fraction équivalente est plutôt trois quarts. L'enseignant mentionne alors que la multiplication du numérateur et du dénominateur par des nombres différents ne donne pas une fraction équivalente à cinq dixièmes et demande aux élèves d'expliquer comment fonctionne la méthode employée par Jessie. Simon lève la main et affirme ceci :

> **Simon** : C'est comme si tu faisais une suite. Si tu multiplies par un nombre différent les deux [numérateur et dénominateur], ça donnera pas une suite. Mais si tu fais fois deux, fois deux, fois deux, fois deux, ça donne toujours des fractions équivalentes à 5 dixièmes.

L'enseignant demande ensuite à la classe de trouver d'autres fractions équivalentes à la fraction cinq dixièmes. Les élèves en nomment une dizaine ($\frac{10}{20}, \frac{20}{40}, \frac{64}{128}, \frac{40}{80}, \frac{2}{4}$, etc) avant de poursuivre le travail sur le sens des fractions équivalentes avec ces exemples de fractions.

4.1.2.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Concevoir des liens*

Dans son intervention, Simon trouve une façon d'expliquer comment fonctionne la méthode utilisée par Jessie pour trouver une fraction équivalente à cinq dixièmes. Pour ce faire, Simon établit un lien entre les concepts de *suite* et *fraction équivalente* parce qu'il identifie une ressemblance entre les deux idées. De plus, ses explications correspondent à la conception de liens puisqu'il se sert des suites pour donner un sens à la méthode de Jessie et aux fractions équivalentes.

Lorsque Simon intervient, il met en relation les suites de nombres avec les fractions équivalentes. Il détaille que les fractions équivalentes sont « comme si tu faisais une suite » et explique qu'il est possible de générer des fractions équivalentes en faisant « fois deux, fois deux, fois deux, fois deux ». Pour lui, ceci peut être mis en relation avec les suites numériques puisque les fractions équivalentes sont aussi formées par la répétition d'une même opération. Cette correspondance entre les fractions équivalentes et les suites est un premier aspect de la composante *Concevoir des liens* telle que mise en route par les mathématiciens. En effet, certains mathématiciens ayant été questionnés par Burton (2004) parlent de « fit » et expliquent que ces mises en commun d'idées font partie intégrante de l'avancement de leurs travaux. Par exemple, Struik (2012) explique qu'un mathématicien, Klein, a mis en relation les géométries avec la théorie des groupes en établissant des correspondances entre les deux théories parce que des objets propres à chaque champ d'études lui apparaissaient similaires. Ceci s'aligne avec ce que fait Simon alors qu'il identifie un lien entre les fractions équivalentes et les suites. L'élève met en relation, comme les mathématiciens, des concepts mathématiques qui lui apparaissent similaires.

De plus, Simon réinvestit le lien qu'il établit et s'en sert pour mettre en avant le sens qu'il attribue à la méthode utilisée par Jessie pour trouver une fraction équivalente à la fraction cinq dixièmes. Dans son intervention, Simon mentionne que si la multiplication du numérateur et du dénominateur par un même facteur n'est pas respectée, la fraction trouvée « ne donnera pas une suite », et ne sera ainsi pas une fraction équivalente. Simon produit ici des mathématiques en exploitant le lien qu'il conçoit entre les concepts de *suite* et de *fraction équivalente* : il explique la méthode de multiplication du numérateur et du dénominateur par un même facteur pour générer, dans ce cas-ci, la fraction dix vingtièmes. D'une certaine façon, c'est aussi ce qu'a fait Klein en travaillant les géométries mises en relation avec la théorie des groupes (Struik, 2012). Le mathématicien a produit ainsi des résultats mathématiques puisqu'il a développé une classification des géométries à partir de la classification des groupes de transformations. En d’autres mots, Klein a réinvesti les liens qu’il a établis entre les deux théories afin de produire des résultats à propos des géométries. De la même façon, Simon exploite le lien qu’il a établi à propos des suites et des fractions équivalentes afin d’offrir des résultats mathématiques, c’est-à-dire des explications à la méthode utilisée par Jessie pour trouver une fraction équivalente à cinq dixièmes.

4.1.2.3 Précisions et nuances de *Concevoir des liens*

Dans les données recueillies, les élèves réinvestissent les liens qu’ils ont conçus pour explorer et formuler des explications, comme c’est le cas de Simon dans l’extrait de la Section 4.1.2.1. Ceci les distingue des mathématiciens puisque, de leur côté, ceux-ci produisent aussi parfois d’autres types de résultats mathématiques comme des conjectures, des méthodes et des définitions. Notamment, dans le cas de Klein, le résultat mathématique produit est une classification des géométries, c’est-à-dire un résultat novateur qui permet de faire un pas de plus dans le développement des connaissances de sa communauté. Dans le cas du travail des élèves analysé dans ce projet, le type de production mathématique issu des liens qu’ils conçoivent correspond davantage à des explications portant sur des idées discutées en classe. En ce sens, les élèves réinvestissent les liens établis pour donner un sens à des idées de la classe, sans pour autant en faire des contributions innovantes à l’avancement des connaissances mathématiques de la classe. Toutefois, ce type de contributions se retrouvent dans les résultats produits à travers la mise en route d’autres activités, comme *Créer des mathématiques* ou *Générer et étudier des exemples* (voir Section 4.1.1 et Section 4.1.4).

4.1.3 Poser des problèmes

Poser des problèmes se reconnaît lorsqu’une question ou un problème est soulevé à propos d’autres résultats mathématiques. Ces questionnements proviennent des curiosités des mathématiciens et portent sur le potentiel des résultats établis dans la communauté avec lesquels ils travaillent. Les problèmes posés sont des pistes d'exploration qui alimentent le travail mathématique.

Cette composante du travail des mathématiciens est mise en route par les élèves placés en résolution de problèmes particulièrement lorsque certains d'entre eux questionnent des idées de leurs pairs. Les élèves formulent leurs propres curiosités au sujet des mathématiques qui se font dans la classe et ces pistes d'explorations deviennent des (sous-)problèmes à résoudre. Deux façons avec lesquelles les élèves posent des problèmes sont illustrées plus précisément dans ce qui suit.

4.1.3.1 Mathis pose un problème pour vérifier une réponse

Un premier exemple de la pose de problème chez les élèves en résolution de problèmes s'est déroulé durant une séance portant sur l'estimation. Le problème demandé aux élèves était d'estimer la réponse du calcul 918 ÷ 4 sans accès au papier-crayon. Une des stratégies proposées provient d'Audrey qui a d'abord obtenu la réponse 402. Lorsque l'enseignant lui demande ce qu'elle a fait comme travail pour trouver cette réponse, Audrey explique :

> **Audrey** [pendant que l'enseignant note au tableau] : J'ai fait quatre cases, j'ai mis 2 dans chacun parce que, ben, j'ai 8 divisé par 4. Le 1 [de 918], j'ai mis 0 dans chaque case. Le 9, je l'ai séparé en 2, ça a fait 4, et la centaine qui restait…

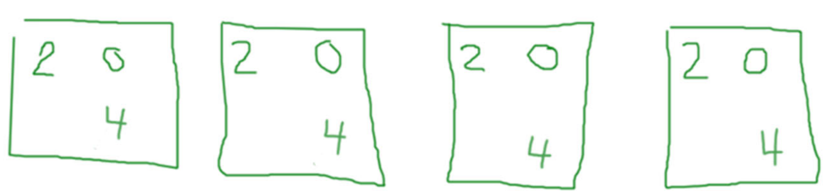


Figure 4.2 Premier résultat d'Audrey pour l'estimation de la division **918 ÷ 4**

L’enseignant interrompt Audrey et la questionne à propos de la dernière division, $9 \div 4 = 2$. L’élève semble hésiter et affirme que « peut-être, finalement, il faut diviser par quatre et ça ferait 2, ça fait 202. » L’enseignant transforme les « 4 » écrits au tableau en « 2 » et demande ensuite :

> **Enseignant** : Il reste ton 100 [mis de côté dans la stratégie d’Audrey], qu’est-ce que tu vas faire avec?
> **Fanny** : Tu mets 25, parce que 25 fois 4, je marche avec les sous et 4 vingt-cinq sous, ça fait un dollar
> **William** : 202 plus 25, ça donne 227.
> **Mathis** : Maintenant, essaie de les regrouper, 227 fois 4, pour faire une preuve. Si je fais 2 fois 227, ça donne 454. Et 454 plus 454, ça donne 908.
> **Enseignant** : ok, donc 227 ça serait une bonne estimation de la division. Les autres, qu’est-ce que vous pensez du calcul de Mathis?

Claire prend la parole et explique que Mathis « a sauvé un calcul, mais que ça donne la même chose ». Noah reprend ensuite la résolution et la réponse d’Audrey. Il souligne « qu’il reste une dizaine » qui n’a pas été divisée par quatre dans ses calculs puisqu’elle a mis un zéro dans les quatre cases pour représenter la division de la dizaine de 918. Il offre ensuite de diviser cette dizaine :

> **Noah** : Moi, ce que j’aurais fait, c’est j’aurai pris huit, et j’aurais mis mes deux unités partout [dans les quatre cases] et il m’aurait resté deux unités. Et là, j’aurai mis 0 virgule 5 unités parce que 0 virgule 5, c’est la moitié de 1.

L’enseignant demande ensuite à la classe de s’intéresser à ce calcul de Noah, et particulièrement, d’expliquer pourquoi 2 divisé en 4 donne 0,5. La séance se termine sur des explications de Louis à propos de cette réponse ainsi qu’une courte intervention de Simon qui soulève qu’« une division ne peut pas avoir de chiffre à virgule », mais plutôt, des restes de la division.

4.1.3.2 Analyse de l’extrait sous l’angle de *Poser des problèmes*

Dans cet extrait, Mathis s’intéresse à la réponse trouvée par Audrey et reprise par Fanny. À travers son intervention, Mathis est curieux de la validité de la réponse 227 parce qu’il propose de l’explorer et d’en faire une preuve. De plus, Mathis est impliqué dans le problème qu’il pose puisqu’il formule une résolution possible qu’il souhaite fouiller.

Ceci est associé à *Poser des problèmes* parce que Mathis s’intéresse à la réponse trouvée par Audrey et Fanny au problème initial et se questionne sur la validité de cette réponse. Entre autres, il demande de « faire une preuve » qui montrerait que 227 est une estimation adéquate de la division $918 \div 4$. D’une certaine façon, Mathis est curieux de la réponse 227, et propose une piste pour explorer sa validité. Ceci rappelle le travail des mathématiciens qui se questionnent eux aussi au sujet des résultats mathématiques qu’ils rencontrent. En particulier, un mathématicien questionné par Burton (2004) aborde l’idée de fouiller le potentiel des résultats mathématiques qu’il consulte en les questionnant. En ce sens, les mathématiciens identifient des pistes à explorer et des curiosités à propos des résultats mathématiques de leurs collègues. De la même façon, Mathis est curieux de la réponse 227, et demande de faire une preuve afin de creuser cette réponse au problème initial.

Plus encore, l’intervention de Mathis rappelle la composante *Poser des problèmes* parce que l’élève s’implique dans le problème qu’il formule. Lorsqu’il pose le problème « faire une preuve » pour explorer la validité de la réponse 227, Mathis propose simultanément de faire la multiplication 227×4 pour résoudre ce problème. D’une certaine façon, Mathis ne fait pas que soulever une idée à explorer et offre aussi une piste de solution à sa proposition. Ceci peut sembler contradictoire avec la signification même d’un *problème,* mais témoigne plutôt de l’implication de la personne qui met en route *Poser des problèmes.* En donnant une piste de résolution à sa demande de preuve, Mathis fait part de son intérêt dans ce problème. Ceci s'aligne avec la pose de problèmes chez les mathématiciens. Notamment, des mathématiciens interviewés par Misfeldt et Johansen (2015) ont expliqué qu'ils s'intéressent justement à certains problèmes parce qu'ils avaient déjà eux-mêmes une idée de piste de résolution à exploiter. C'est entre autres ce qui rend la pose de problèmes contingente au mathématicien qui pose le problème : un problème est posé parce qu'une résolution parait possible et pertinente. De la même façon, le travail de Mathis est semblable à celui du mathématicien puisqu'il se questionne à propos de la validité d'une réponse et est impliqué dans l'exploration d'une réponse à sa question.

4.1.3.3 Jessie pose un problème pour raffiner une stratégie

Un second exemple illustre la mise en route de *Poser des problèmes* parfois partagée avec l'enseignant. L'extrait est tiré de la résolution du problème suivant qui a été donné aux élèves pour être résolu en calcul mental :

46, 70, 81, 106
Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

Au début de la séance, Francis offre une première réponse à ce problème et affirme que 46 se divise par 2, car 4 est divisible par 2 et 6 est divisible par 2. À la suite de cette intervention, la classe est invitée à donner un sens à cette stratégie et à la questionner. Durant les discussions qui suivent, certains élèves clarifient qu'« être divisible par deux » signifie la même chose qu' « être pair ». La classe en vient alors à utiliser les deux expressions (« être pair » et « être divisible par deux ») sans les différencier. De son côté, Henri offre sa stratégie pour déterminer si 106 est divisible par 2 en regardant le « 10 comme deux 50 et le 6 comme deux 3 ». Cette stratégie est rapidement mise en relation, par l'enseignant, avec la stratégie initiale de Francis. Mathis avance ensuite qu'un autre nombre au tableau se divise en deux, soit 70. L'enseignant demande ensuite l'avis de la classe et demande à Jessie ce qu'elle pense :

> **Enseignant** : Qui est d'accord pour dire que 70 est pair? [Certains élèves lèvent la main] Qui ne l'est pas? [Quelques élèves lèvent la main] Qui n'est pas certain? [Quelques élèves, dont Jessie, lèvent la main] Pourquoi tu dis que tu es pas certaine? [En posant la question à Jessie]
> **Jessie** [avec hésitation] : Parce que 7, c'est un nombre impair…
> **Enseignant** : OK, donc toi, ce que tu dis, c'est que tu n'es pas certaine que la stratégie de Francis fonctionne parce que 7 est impair, et 0, on pourrait dire qu'il est pair… les autres, qu'est-ce qu'on fait avec ça?

Un élève lève ensuite la main et trouve, par l'algorithme d'addition et un travail au tableau que 70 est un nombre pair. La classe s'intéresse ensuite au nombre 81 et à sa divisibilité par deux.

4.1.3.4 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Poser un problème*

En répondant à l'enseignant, Jessie souligne son intérêt à explorer davantage la stratégie de Francis en lien avec le nombre 70. L'élève est incertaine de la parité du nombre 70, et insiste sur ce questionnement en utilisant la stratégie de Francis. D'une certaine façon, en décomposant le nombre 70 et en s'intéressant à la parité du nombre 7, Jessie pose un problème parce qu'elle se questionne sur l'affirmation « 70 est pair » et n'est pas certaine de pouvoir utiliser la stratégie de Francis avec le nombre 70.

Bien que concise, l'intervention de Jessie rappelle la composante *Poser des problèmes* car l'élève souligne davantage un questionnement qu'une réponse à propos de la divisibilité par deux du nombre 70. En expliquant pourquoi elle n'est pas certaine que 70 soit pair, Jessie questionne aussi le déploiement de la stratégie de Francis pour déterminer si le nombre 70 est un nombre pair. En d'autres mots, ce que fait Jessie est de regarder si 70 est pair en appliquant la stratégie de Francis, c'est-à-dire en décomposant le nombre 70 en 7 et 0. Toutefois, pour Jessie, et c'est ce que met de l'avant son intervention « 7 est un nombre impair », cette stratégie est problématique avec le nombre 70 et Jessie ne peut utiliser la stratégie de Francis pour déterminer si le nombre 70 se divise par deux. Ceci est aligné avec la pose de problèmes chez les mathématiciens qui les amène aussi à soulever des questions relatives à ce que leurs collègues proposent (sur le champ en conférence, à la suite d'une publication, en interaction informelle). Par exemple, un mathématicien interrogé par Burton (2004) explique avoir une certaine sensibilité aux précisions qu'il pourrait apporter aux résultats mathématiques avec lesquels il travaille. Ainsi, lorsqu'il lit un article ou assiste à une conférence, il lui arrive de soulever des questions et poser des problèmes à propos des résultats qui lui sont présentés. De la même façon, c'est ce que fait Jessie alors qu'elle soulève son intérêt pour explorer la stratégie de Francis et son application au nombre 70.

Toutefois, une nuance est ici à faire sur la pose de problème de Jessie. Lorsque Jessie, par son intervention sur la non-parité du nombre 7, soulève à la classe son questionnement à propos de la stratégie de Francis et le nombre 70, une partie de la pose de problème est prise en charge par l'enseignant. Alors que Jessie dit être incertaine de la parité du nombre 70, l'enseignant rend explicite cette incertitude et la reformule comme un nouveau problème pour le reste de la classe. D'une certaine façon, l'enseignant est instrumental pour rendre l'interrogation soulevée par Jessie « un problème » aux yeux des autres élèves. Plus encore, à d'autres occasions en résolution de problèmes, il arrive que l'enseignant en contexte de résolution de problèmes soulève ses propres curiosités sur ce qui est proposé par les élèves. En d'autres mots, il propose de nouveaux problèmes à résoudre aux élèves en lien avec ce qui est offert (voir Cobb *et al,* 1994). Par exemple, à la fin du premier extrait associé à l'activité *Poser des problèmes* (voir Section 4.1.3.1), l'enseignant demande aux élèves d'expliquer le calcul de Noah et dit : « Les autres, pourriez-vous m'expliquer ce qu'a fait Noah pour diviser les deux unités qui lui restaient en quatre? ». L'enseignant, sans qu'aucun élève ne soulève de questions par rapport au calcul de Noah (im)pose lui-même le problème d'expliquer le calcul. Ceci est une différence importante entre la pose de problèmes chez les élèves en résolution de problèmes et celle chez les mathématiciens puisque, ces derniers sont majoritairement responsables de soulever et formuler eux-mêmes les problèmes qui les intéressent. Cela dit, il arrive, comme avec les 21 problèmes d'Hilbert en 1900, que la communauté elle-même propose des problèmes (le dernier théorème de Fermat ou la conjecture de Poincarré étant deux exemples de problèmes émergeant de la communauté et non de l'intérêt d'un seul mathématicien). Il demeure toutefois que les mathématiciens explorent ces questionnements communs principalement en fonction de ce qui les intéresse (Misfeldt et Johansen, 2015). D'un autre côté, en résolution de problèmes, l'enseignant formule de nouveaux problèmes ou reformule les questionnements des élèves qu'il impose comme travail à faire. Ceci lui permet d'alimenter le travail des élèves en résolution de problèmes et d'insister sur certaines idées mathématiques qui lui apparaissent importantes.

4.1.4 Générer et étudier des exemples

La production (des) mathématique(s) passe aussi par un travail sur des exemples. Ces exemples sont des objets mathématiques qui sont générés, choisis et étudiés afin d'en tirer des résultats mathématiques et des compréhensions. Principalement, les exemples sont étudiés de trois façons :

1) Des exemples sont étudiés pour en dégager des propriétés et des structures qui alimentent le développement de méthodes, conjectures et arguments mathématiques.
2) Des exemples sont étudiés pour mieux comprendre des résultats mathématiques. Pour ce faire, des méthodes, conjectures et arguments sont appliqués à certains exemples pour mettre en lumière le sens et le fonctionnement de ces résultats mathématiques.

3) Des exemples sont étudiés comme contre-exemples. Ils contredisent des idées mathématiques qui sont ensuite travaillées à la lumière des contre-exemples trouvés.

Chez les élèves en résolution de problèmes, des exemples sont aussi étudiés pour la production (des) mathématique(s). Les élèves étudient des exemples de nombres et de formes géométriques dans le but d'explorer des conjectures. À partir des exemples qu'ils étudient, les élèves:

1) Dégagent des propriétés qui alimentent le développement de leurs conjectures;
2) Développent une meilleure compréhension des conjectures qu'ils élaborent;
3) Invalident certaines idées mathématiques de la classe

Dans ce dernier cas, les élèves étudient les exemples comme contre-exemples et précisent les idées mathématiques contredites. Dans ce qui suit, deux extraits sont présentés pour illustrer la façon avec laquelle les élèves *étudient des exemples.*

4.1.4.1 Sabine génère et se sert d'exemples pour les étudier

Une première façon avec laquelle les exemples sont étudiés correspond à la génération d'exemples dans le but (1) d'en dégager un résultat mathématique et (2) mieux comprendre une conjecture mathématique. Un extrait correspondant à ceci s'est déroulé lors d'une séance portant sur la divisibilité des nombres. Le problème suivant, présenté à la section 4.1.1.1 et 4.1.3.3, a été offert aux élèves :

46, 70, 81, 106 Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

Au cours de la résolution de ce problème, les élèves s'intéressent à la parité de la réponse de la division par deux de différents nombres à la suite d'une affirmation de Rafa (voir Section 4.1.1.1). L'élève avance que toute division par deux donne un nombre impair et l'enseignant invite les élèves à travailler individuellement ou en équipe durant 10 minutes sur cette affirmation. Lors du retour en plénière, les élèves offrent différents exemples de nombre pour lesquels la division par deux donne une réponse paire et d'autres pour lesquels la division par deux donne une réponse impaire. L'enseignant organise ces nombres en deux listes : une première pour les réponses paires et une seconde pour les réponses impaires. De son côté, Sabine développe une conjecture à propos de la parité de la réponse de la division par deux en fonction de la valeur des unités d'un nombre. Au cours de cet extrait déjà analysé pour l'activité *Créer des mathématiques*, Sabine est questionnée par l'enseignant qui souhaite comprendre ce qu'elle a fait pour arriver à cette conjecture :

> **Sabine** : Quand l'unité d'un nombre est 2 ou 6, je pense alors que la division par 2 donnera un nombre impair.
> **Enseignant** : Qu'est-ce que ça veut dire ça, quand ton unité est 2 ou 6, donne-moi un exemple?
> **Sabine** [en pointant au tableau] : Exemple, 82.
> **Enseignant** : Ah oui, ça fonctionne. Et après, c'est quoi la suite?
> **Sabine** : Quand 0-4-8 est à la position des unités, la division par deux donne un nombre pair.
> **Enseignant** : C'est intéressant, qu'est-ce que tu essayais de faire? Tu voulais trouver comment ça fonctionne, c'est ça?
> **Sabine** : J'ai pris 100, 102, 104, 106, 108 et ainsi de suite, avec les 200 et 300 aussi.

La séance se termine ensuite sur l'intervention d'un élève qui remarque, dans les deux listes de division au tableau, que des nombres terminant par deux donnent parfois une réponse paire. L'enseignant encercle ensuite, avec l'aide des élèves, les nombres qui ne concordent pas avec la conjecture de Sabine dans les deux listes au tableau. De plus, il marque d'un trait ceux pour lesquels la conjecture fonctionne avant d'annoncer la fin de la séance.

4.1.4.2 Analyse de l’extrait sous l’angle de *Générer et étudier des exemples*

Dans cet extrait, Sabine explique comment elle étudie certains nombres afin d’établir et mieux comprendre la conjecture qu’elle a présentée à la classe. Elle a généré 15 exemples de nombres avec lesquels elle travaille afin de développer la conjecture qu’elle propose à la classe. Cette façon d’élaborer une conjecture correspond à l’étude d’exemples, car Sabine s’est appuyée sur les propriétés des exemples de nombres afin de développer son résultat mathématique. De plus, le travail de Sabine rappelle l’étude d’exemples puisque les nombres générés systématiquement lui permettent de mieux comprendre sa conjecture.

Comme les mathématiciens, Sabine *étudie des exemples* afin d’en dégager des résultats mathématiques. Elle travaille avec les nombres 100, 102, 104, 106, 108, 200, 202, 204, 206, 208, 300, 302, 304, 306 et 308 puis s’intéresse à une certaine régularité dans les résultats de la division par deux de ces nombres. En ce sens, Sabine s’appuie sur ses exemples pour conclure la réponse de la division par deux d’un nombre terminant par 2 ou 6 est impaire et que celle d’un nombre terminant par 0,4 ou 8 est paire. Ceci est aligné avec ce qu’avancent certains mathématiciens interviewés par Lockwood *et al.* (2016). Ceux-ci expliquent étudier des exemples qui mettent en lumière certains résultats qu’ils pourront explorer. De la même façon, Sabine étudie certains exemples de nombres qui rendent saillante une caractéristique précise à des nombres, soit la relation entre le dernier chiffre d’un nombre et la parité de sa division par deux.

De plus, le travail de Sabine correspond à la deuxième façon d’*étudier des exemples* puisqu’initialement, Sabine s’intéresse à certains nombres pour mieux comprendre comment fonctionne la division par deux. Devant la tâche donnée par l’enseignant à propos de l’affirmation de Rafa, Sabine génère 15 exemples de nombres qu’elle étudie. Sabine se représente ainsi le sens de la division par deux à travers l’étude de ces exemples de nombres qui lui permettent de mieux comprendre comment fonctionne cette opération. Cette façon de travailler avec des exemples correspond à la deuxième façon d'*étudier des exemples* alors que les mathématiciens, eux aussi, utilisent des exemples pour mieux comprendre des résultats mathématiques. Notamment, dans le cas du travail sur des conjectures, Lockwood *et al.* (2016) expliquent : « The mathematicians also use examples in an effort to better understand a conjecture. Often, this means that they will explore a concrete example, as a means to develop an understanding of what a conjecture is stating. » (2016, p. 181) Les mathématiciens s'intéressent donc à des exemples pour se faire une idée et formuler des résultats mathématiques. Ceci s'aligne avec le travail de Sabine qui explore l'affirmation de Rafa et la division par deux à travers des exemples de nombres. Elle s'est servie de 15 nombres pour appliquer la division par deux et mieux comprendre cette opération.

Finalement, la nature systématique des exemples de nombres choisis par Sabine est un autre aspect pouvant être mis en relation avec l'étude d'exemples. Les exemples de nombre que Sabine étudie ne semblent pas être générés au hasard, mais plutôt être sélectionnés de manière contrôlée. Notamment, la valeur des unités des premiers nombres avec lesquels Sabine dit travailler varie. L'élève considère les cinq premiers nombres divisibles par deux à partir de 100 : 100, 102, 104, 106 et 108. Les nombres ensuite nommés par Sabine témoignent de nouveau d'une variation des unités, mais aussi, d'une variation des centaines : 200, 202, 204, 206 et 208. Finalement, elle effectue une dernière boucle de variation : elle fait varier le nombre de centaines à 3 et fait varier les unités pour obtenir 300, 302, 304, 306 et 308. Tout ceci témoigne d'une génération systématique d'exemples de nombres. Tout comme les mathématiciens, Sabine s'intéresse à des objets en fonction de certaines propriétés. Par exemple, un mathématicien ayant été questionné par Lockwood *et al.* (2016) mentionne être conscient des propriétés des exemples avec lesquels il travaille pour produire des mathématiques. Notamment, lorsque les mathématiciens travaillent avec des exemples de nombres, ils sélectionnent, selon le contexte et l'étude qu'ils veulent faire, certains types de nombres comme les nombres premiers, les nombres positifs ou encore, les nombres rationnels (Lockwood *et al*, 2016). De la même façon, Sabine est sensible aux propriétés des exemples de nombres avec lesquels elle travaille puisqu'elle génère de manière systématique 15 nombres en contrôlant leurs valeurs d'unités et de centaines.

4.1.4.3 Simon se sert d'un rectangle comme contre-exemple

Une dernière façon avec laquelle les élèves en résolution de problèmes mobilisent des activités liées à la composante *Générer et étudier des exemples* est le travail sur des contre-exemples pour contredire et raffiner une affirmation mathématique. Un exemple de cette mise en route s'est déroulé lors d'une séance portant sur le problème suivant :

Si l'aire d'un rectangle est 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

Les élèves ont travaillé individuellement ou en équipe afin de résoudre par écrit le problème suivant avant qu'un retour soit fait en plénière.

Une des premières stratégies abordées pour résoudre le problème est proposée par Francis : il double l'aire du rectangle afin de trouver une mesure de côté et multiplie ensuite cette valeur par 4, pour les quatre côtés. Simon, un autre élève, soulève qu'on ne peut pas multiplier la mesure d'un côté par 4 puisque la forme n'est pas un carré, mais bien un rectangle. L'enseignant questionne ensuite la classe à propos de la classification des carrés et rectangles :

> **Enseignant** : Est-ce qu'un carré, c'est un rectangle?
> **Jessie** : Un carré et un rectangle, c'est semblable, mais ce n'est pas exactement la même chose. Si tu prends deux carrés, un à côté de l'autre, collés, tu as un rectangle aussi. [L'enseignant dessine au tableau, voir Figure 4.3]
> **Simon** : Mais pas nécessairement. Un rectangle, ce n'est pas toujours deux carrés parce que si tu le fais vraiment plus long et que tu le coupes à la moitié, ça donne

pas deux carrés parce que les côtés ne seront pas égaux. [L’enseignant dessine au tableau, voir Figure 4.4] Ça va donner deux petits rectangles.
Enseignant : Oui, parce que le côté ici, à droite, il n’est pas la même longueur que lui ici, en haut par exemple [Il ajoute des lignes rouges à ces côtés].
Simon : Si tu le coupes en deux, ton rectangle, si tu prends la partie de droite, c’est pas un carré cette partie-là, elle va devenir…c’est pas un carré parce que les côtés ne sont pas égaux.

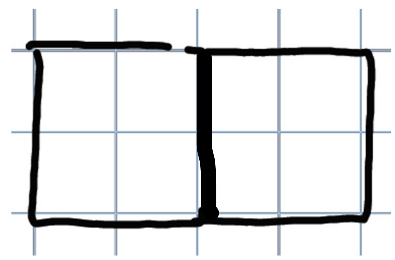


Figure 4.3 Dessin de l’enseignant pour illustrer l’idée de Jessie

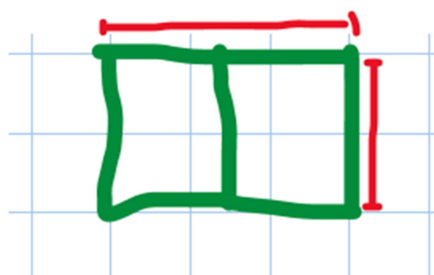


Figure 4.4 Dessin de l’enseignant pour illustrer la réponse de Simon

Les élèves tentent par la suite de trouver d’autres liens entre le carré et le rectangle afin de répondre à la question de l’enseignant. Certains offrent d’autres découpages afin d’illustrer qu’un rectangle peut être découpé en plusieurs carrés et la séance se termine alors que deux élèves présentent leur stratégie de résolution du problème initial.

4.1.4.4 Analyse de l’extrait sous l’angle de *Générer et étudier des exemples*

Dans cette intervention de Simon, il s’intéresse à l’affirmation de Jessie qui avance que deux carrés, placés côte à côte, forment un rectangle. Simon souligne que cette affirmation ne fonctionne pas toujours puisqu' « un rectangle vraiment plus long » ne peut être décomposé en deux carrés. En d'autres mots, le travail de Simon représente l'étude d'exemples puisque Simon s'intéresse à un rectangle qui contredit l'affirmation de Jessie. De plus, il se sert du contre-exemple trouvé pour raffiner l'affirmation de Jessie.

Dans l'extrait, Simon étudie un exemple de forme géométrique qui est un contre-exemple à l'affirmation de Jessie. Selon lui, deux carrés ne forment pas *toujours* un rectangle puisqu'il en considère un qui ne peut être décomposé en deux carrés. En effet, Simon décrit un rectangle ayant la propriété d'être « vraiment plus long » et montre ainsi qu'un rectangle n'est pas *nécessairement* formé de deux carrés. De la même façon, les mathématiciens aussi trouvent des contre-exemples à des idées mathématiques. Selon Lakatos (1976) dans *Proofs and Refutations,* des mathématiciens ont trouvé de nombreux contre-exemples à la relation d'Euler. Des cubes creux ou des « monstres mathématiques » pensés par les mathématiciens sont ainsi venus contredire un énoncé : ils l'ont invalidé ou ont souligné le besoin de le travailler davantage. De la même façon, Simon a trouvé un type de rectangle, c'est-à-dire un rectangle ayant un côté particulièrement long, pour lequel l'affirmation de Jessie ne semble plus tenir.

De plus, le travail de Simon représente l'activité *Générer et étudier des exemples* puisque Simon s'intéresse à raffiner l'affirmation de Jessie en travaillant avec son contre-exemple. Il travaille avec les propriétés du rectangle « vraiment plus long » et offre des précisions à ce qui a été avancé par sa collègue de classe. En particulier, avec son contre-exemple, Simon insiste sur le fait que l'affirmation de Jessie n'est pas une double implication : deux carrés forment peut-être un rectangle, mais un rectangle n'est pas nécessairement formé de deux carrés. Ceci s'aligne avec le travail des mathématiciens qui s'intéressent, selon Lakatos (1976), à retravailler des idées mathématiques en fonction des contre-exemples qu'ils ont trouvés. En particulier, des figures qui contredisaient la relation d'Euler ont amené les mathématiciens à restreindre et (re)définir le domaine de validité de cette propriété. De la même façon, le rectangle « vraiment plus long » de Simon l'a amené à restreindre l'affirmation initiale de Jessie à une implication maintenant limitée. En ce sens, Simon a recours à un exemple pour invalider une affirmation, mais aussi pour la retravailler et la préciser.

4.1.5 Créer et exploiter le symbolisme

La composante *Créer et exploiter le symbolisme* passe par la création et l'utilisation de symboles pour la production (des) mathématique(s). La représentation symbolique d'idées et les manipulations symboliques effectuées par les élèves leur permettent de donner du sens aux idées représentées. En particulier, les manipulations symboliques procurent une façon d'agir sur des idées pour les explorer en agissant sur les symboles qui les représentent. De plus, l'utilisation de symboles offre parfois des perspectives différentes sur les idées représentées et alimente ainsi le travail mené sur les symboles.

Créer et exploiter le symbolisme est mobilisée par les élèves en contexte de résolution de problèmes alors que ceux-ci utilisent des symboles mathématiques comme des nombres, des schémas et des figures. Les élèves représentent des idées mathématiques par des symboles pour donner un sens à ces idées, voire même pour les explorer et en faire des résultats mathématiques. De plus, les élèves manipulent ces symboles pour répondre à des questions et résoudre les problèmes proposés. Dans ce qui suit, deux exemples sont présentés. Ils permettent d'illustrer la façon avec laquelle les élèves mobilisent *Créer et exploiter le symbolisme* en résolution de problèmes.

4.1.5.1 Francis exploite le symbolisme des nombres et de l'algorithme d'addition

Le premier extrait illustrant l'utilisation de symbolisme chez les élèves provient d'une séance portant sur la divisibilité par deux des nombres 46, 70, 81 et 106 déjà abordée dans les Sections 4.1.1, 4.1.3 et 4.1.4. Le problème suivant est proposé aux élèves :

46, 70, 81, 106
Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

À la suite de l'extrait présenté à la Section 4.1.3.3, Francis lève sa main et demande d'aller au tableau. Une fois devant la classe, Francis explique en écrivant :

> **Francis** : On sait que 30 plus 30, c'est égal à 60 et que 60, c'est 10 de moins que 70. [Francis écrit alors ceci au tableau et poursuit]

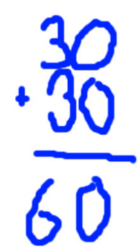


Figure 4.5 Première étape du calcul effectué par Francis au tableau

> **Enseignant** : Donc 60, c'est pair hein? Deux groupes pareils.
> **Francis** : Ouais, donc déjà là, 60, c'est divisible par deux, pis là, je viens de me rendre compte que 70, c'est 10 de plus, donc…
> **Enseignant** : …70, c'est 10 de plus que 60, qui est déjà divisible par 2.
> **Francis**: Faque là, je me dis, je vais effacer les zéros, et je vais venir les remplacer par les 5 [Figure 4.6]. Faque là, ça me donne 10, donc je mets 1 en haut, et ça fait 6 + 1, donc 70.

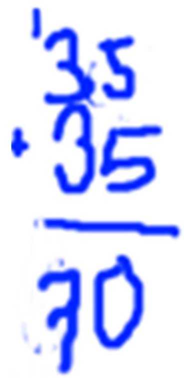


Figure 4.6 Remplacement des 30 par des 35 par Francis dans son calcul

L'enseignant conclut alors que 70 est pair, et demande ensuite à la classe si 81, un des nombres issus du problème initial, est pair. La classe se penche sur ce nombre et la séance se poursuit.

4.1.5.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Créer et exploiter le symbolisme*

Dans cet extrait, le travail effectué par Francis vise à déterminer si le nombre 70 est pair. Francis trouve un nombre, 35, qui, additionné à lui-même, donne 70. À travers ce travail, Francis utilise du symbolisme puisqu'il représente différentes additions pour donner un sens au nombre 70. De plus, Francis exploite du symbolisme puisqu'il manipule les symboles au tableau et montre que le nombre 70 est pair.

Ceci correspond à l'activité *Créer et exploiter du symbolisme* puisque Francis utilise initialement des symboles de nombres pour représenter l'addition $30 + 30 = 60$, et travailler sur le nombre 70. Lorsque Francis écrit les symboles 30, 30 et 60 dans le format d'addition en colonnes, il ajoute savoir que 60 est « dix de moins que 70 ». En d'autres mots, les symboles utilisés lui permettent de travailler le nombre 70 à partir du nombre 60 et orientent donc le travail qu'il mène sur le nombre 70. Cette façon d'utiliser des symboles pour travailler des concepts mathématiques rappelle le travail des mathématiciens qui se servent aussi de symbolisme pour étudier et faire avancer des idées mathématiques. Notamment, Livingston (2015) utilise des symboles à la Figure 4.7 afin d'aborder la notion de *dérivée d'une fonction.*

The proof began by giving the definition of the derivative:[3]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) > 0 \colon \iff$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \epsilon \text{ for } \Delta x < \delta$$

Figure 4.7 Inégalités écrites par Livingston

En écrivant la définition de *dérivée d'une fonction* sous cette forme, le mathématicien donne un sens précis à cette notion. Ce sens, ancré dans le symbolisme, l'amène ensuite à explorer la dérivée d'une fonction sous l'angle de cette définition. De la même façon, Francis travaille le nombre 70 à travers les symboles utilisés pour représenter l'addition $30 + 30 = 60$.

Plus encore, le travail de Francis correspond à l'exploitation de symbolisme parce qu'en représentant l'addition $30 + 30 = 60$, Francis fait ressortir une façon supplémentaire de travailler ces symboles. Tel que l'indique son « je viens de me rendre compte », Francis s'aperçoit, à travers sa représentation symbolique, que le 10 entre 60 et 70 peut aussi être étudié symboliquement. Ceci le mène à transformer l'addition au tableau et à montrer que 70 est un nombre pair. En d'autres mots, l'utilisation des symboles 30, 30 et 60 pour donner un sens au nombre 70 fait ressortir le travail qu'il est possible de faire à partir de ces symboles et ce sens. De la même façon, ceci se produit chez les mathématiciens (Davis et Hersh, 1981) alors que des symboles sont parfois porteurs de perspectives supplémentaires. En particulier, la notation Df, D^2f, D^3f développée par Leibnitz a permis d'étudier les différentes valeurs possibles (rationnelles et négatives) de a dans la notation généralisée D^af. C'est donc parce qu'il y a représentation symbolique de concepts que les mathématiciens explorent certaines idées pour produire des résultats mathématiques.

Dans le cas de Francis, l'écriture de l'addition $30 + 30 = 60$ au tableau lui a offert une perspective additionnelle et l'a amené à donner un sens au nombre 70 ainsi qu'à trouver une réponse à la question de Jessie.

Finalement, le travail de Francis dans l'extrait présenté correspond à l'activité *Créer et exploiter du symbolisme* puisque Francis manipule les symboles qu'il a écrits au tableau pour montrer que le nombre 70 est pair. Après avoir écrit son addition au tableau, Francis s'appuie sur le sens des symboles utilisés et fait avancer les idées représentées. Par exemple, en s'appuyant sur le nombre 10 comme étant *la différence entre 60 et 70* et comme étant $5 + 5$, Francis transforme les nombres 30 en 35 dans l'addition de la Figure 4.6. En d'autres mots, Francis manipule des symboles en faisant des allers-retours entre symboles et sens de ces symboles. C'est aussi ce que fait Livingston lorsqu'il produit le résultat mathématique au cœur de son article *The Disciplinarity of Mathematical Practice* (2015). Des équations sont transformées pour en trouver d'autres, des chaines de symboles sont modifiées selon le sens des symboles et finalement, Livingston se retrouve à faire des allers-retours entre symboles et sens des idées qu'ils représentent pour faire avancer ses idées mathématiques. De la même façon, Francis s'appuie sur le sens des idées représentées et sur les symboles écrits au tableau pour produire une réponse au problème de Jessie.

4.1.5.3 Francis, Jessie et William collaborent pour créer du symbolisme

Un deuxième exemple de la mobilisation de l'activité *Exploiter du symbolisme* illustre la création de symbolisme par les élèves. L'extrait illustrant cette mise en route s'est déroulé lors d'une séance portant sur la résolution du problème suivant :

Pour célébrer la fin des cours de ski, les moniteurs ont préparé un dîner pour leurs élèves. Trouve le nombre de sandwichs que compte la collection.

30 sandwichs correspondent au $\frac{5}{4}$ des sandwichs préparés

Après cinq minutes de travail individuel ou en équipe sur le problème, quelques élèves soulignent ne pas avoir été capables de résoudre le problème à cause de la fraction cinq quarts. L'enseignant demande donc aux élèves de réfléchir à quoi pourrait ressembler la fraction cinq quarts. Certains élèves expliquent être encore bloqués parce que la fraction est « impossible », « compliquée » ou parce que « d'habitude, le dénominateur est plus grand que le numérateur ». Quelques élèves offrent leurs représentations de la fraction cinq quarts. Simon propose de faire quatre cercles et de mettre dans chacun cinq traits. Pour mieux comprendre, l'enseignant demande à Simon de représenter quatre cinquièmes selon cette façon de faire :

> **Enseignant** : Et si tu avais quatre cinquièmes, qu'est-ce que tu ferais?
> **Simon** : La même chose… je ferai cinq paquets, avec quatre dedans chaque.
> **Enseignant** : Ok… et si tu avais ça [Figure 4.8], tu ferais quoi pour faire quatre cinquièmes?

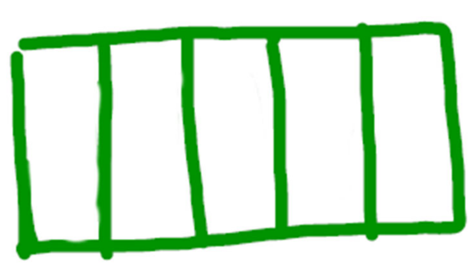


Figure 4.8 Rectangle offert par l'enseignant pour que Simon y représente quatre cinquièmes

Simon répond alors :

> **Simon** : Il faut mettre des barres.
> **Enseignant** : Mais elles sont là déjà.
> **Simon** : Mais ça, c'est le tout… c'est le rectangle, c'est le tout… dans le fond tu peux faire quatre cinquièmes, il faut… euh…
> **William** : tu en colores 4!
> **Simon** : Mais cinq quarts, tu peux pas le mettre en rangée comme ça. Cinq quarts, tu vas avoir quatre paquets à colorier, et tu peux pas en colorier cinq parce qu'il t'en manque un.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de quelle façon ils ont représenté la fraction cinq quarts. Lilia propose alors :

> **Lilia** : Moi, j'ai fait quelque chose comme ça [en pointant le rectangle de la Figure 4.8], mais j'ai recoupé en quatre pour le quart dans cinq quarts et j'ai tout colorié (voir Figure 4.9).

Figure 4.9 Représentation de la fraction cinq quarts par Lilia

Les élèves sont ensuite invités à commenter cette représentation et discutent jusqu'à arriver à une façon de représenter la fraction cinq quarts :

> **Francis** : Oui, elle a raison. Parce que s'il faut qu'elle colore cinq morceaux sur quatre, il faut qu'elle colore cinq morceaux [en pointant une rangée] sur quatre [en pointant une colonne]. Donc un entier… et il reste 1… parce que quatre quarts, c'est un entier, et il reste un.
> **Jessie** : Mais le reste un, c'est un petit carré du cinq [un petit carré d'une rangée]. Parce que Lilia, elle a fait le carré au complet. Si ça c'est un entier, il reste un carreau, du cinq.

Simon : Je ne suis pas d'accord, parce que dans son dessin, Lilia, elle a tout colorié, il n'y a pas de reste […] Et en plus, dans son dessin, il y a cinq colonnes, dans c'est pas quatre quarts.
Francis : Je pense que je me suis trompé. Le dessin qui Lilia a fait, ce n'est pas quatre quarts. Il faut enlever une colonne, ça va faire quatre. Il y a une colonne de trop.
Simon : Si tu enlèves une colonne, ça fait quatre quarts. Parce que Lilia les a tous coupés, ça fait 16 seizièmes.
Francis : Mais ici [dessine un carré qu'il coupe en quatre (Figure 4.10)], ça fonctionne. Parce qu'il y a quatre parties, donc c'est quatre quarts, et il en reste un… [en hésitant]
William : Il manque un carré. Il faut ajouter un carré. Il y a cinq parties, et le carré ajouté, c'est le reste un. [William ajoute un carré à la représentation de Francis (voir Figure 4.11)].

Figure 4.10 Représentation de Francis pour illustrer quatre quarts et le reste un.

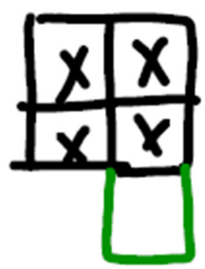


Figure 4.11 Modification de William à la représentation de Francis

L'enseignant reprend le travail des élèves et reformule que les carrés noirs forment un tout composé de quatre quarts. Il ajoute que comme un carré forme un quart, William en a ajouté un à la représentation de Francis pour représenter cinq quarts. Alignés avec ces explications, les élèves offrent quelques autres façons de représenter la fraction cinq quarts et la séance se termine.

4.1.5.4 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Créer et exploiter du symbolisme*

Dans cet extrait, les élèves échangent à propos de la construction d'un symbolisme pour représenter une fraction qui est nouvelle pour eux. Francis, Jessie et William utilisent ensemble des symboles afin de créer un symbolisme adéquat pour la fraction cinq quarts. Ce travail correspond à l'utilisation de symbolisme parce que les élèves cherchent à développer une nouvelle symbolisation.

Ceci rappelle la création et l'exploitation de symbolisme puisque Francis, Jessie et William créent une symbolisation pour représenter la fraction cinq quarts. Cette symbolisation s'appuie sur la représentation d'un entier, formé de quatre quarts, ainsi que le « reste un » représenté par l'ajout d'un quart. Les élèves travaillent à partir de la représentation d'une fraction connue, quatre cinquièmes, et tentent de la transformer pour en faire une symbolisation de la fraction cinq quarts. Francis reconnait dans la représentation de Lilia le « reste un » et offre plus tard une autre façon de travailler les quarts, Jessie reconnait « l'entier » et soulève qu'il doit « rester un carreau » et finalement, William replace ces idées ensemble et propose un nouveau symbolisme pour représenter la fraction cinq quarts. De la même façon, les mathématiciens aussi créent des symboles pour représenter des idées mathématiques. Notamment, Davis et Hersh (1981) racontent que les mathématiciens utilisent parfois de nouveaux symboles pour représenter des idées mathématiques. Par exemple, Kramp s'est servi de la notation *n!* pour représenter la factorielle d'un nombre et Euler a utilisé *e* pour représenter le nombre d'Euler (2,718…). En d'autres mots, lorsque les mathématiciens veulent travailler avec de nouveaux objets, opérations ou concepts, ils trouvent des symboles pour les représenter. De la même façon, les trois élèves créent une façon de représenter la « nouvelle » fraction cinq quarts dans le but de travailler avec cette fraction.

De plus, le travail des élèves autour du symbolisme de la fraction cinq quarts correspond à *Créer et exploiter du symbolisme* puisque les élèves forgent le sens des symboles à travers des discussions. Dans l'extrait présenté plus tôt, Lilia, Francis, Simon, Jessie et William échangent à propos de la signification des symboles utilisés et contribuent à donner le sens de la fraction cinq quarts au symbolisme créé. La représentation initiale de Lilia, les idées de Francis, les questionnements de Simon, les remarques de Jessie et la symbolisation de William portent tous sur les symboles utilisés, et contribuent à la signification de la représentation de la fraction cinq quarts. Ceci fait penser à la mise en place de nouveaux symboles chez les mathématiciens (Davis et Hersh, 1981). À force d'être discutés, utilisés et transformés, les symboles gagnent leur signification à travers le travail des mathématiciens. De nouveaux symboles deviennent des symboles connus parce que les mathématiciens les utilisent et contribuent à leur sens en les exploitant. C'est un peu ce qui se produit lorsque les élèves échangent à propos de la représentation de la fraction cinq quarts. La dernière représentation proposée par William gagne, à travers les interventions des élèves, une signification particulière.

4.1.6 Appliquer des méthodes

L'application de méthodes mathématiques est fréquente dans le travail des mathématiciens. Ces méthodes sont caractérisées par une suite d'étapes à effectuer pour faire des calculs, transformer des équations ou encore développer des preuves. Ces outils de production (des) mathématique(s) sont rapides et assurent une validité des résultats mathématiques développés à travers l'application de méthodes.

Les élèves placés en résolution de problèmes appliquent aussi des méthodes mathématiques. Comme les mathématiciens, ils emploient des méthodes, des manières de faire et des algorithmes afin de travailler les idées discutées en classe. En particulier, les élèves utilisent des méthodes efficaces en lesquelles ils ont confiance. Deux extraits sont présentés dans ce qui suit et illustrent la façon avec laquelle les élèves appliquent des méthodes en résolution de problèmes.

4.1.6.1 Louis applique un algorithme de soustraction

Une première façon d'*appliquer des méthodes* se retrouve dans le travail de Louis durant une séance portant sur la comparaison de superficie. Le problème suivant (Figure 4.12) est offert à la classe qui travaille dans leurs cahiers de mathématiques, individuellement ou en équipe.

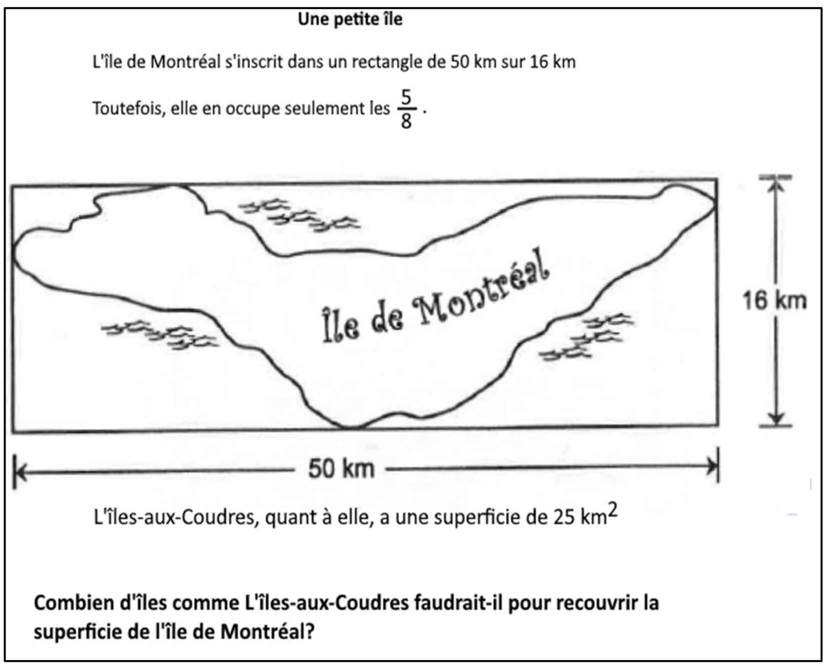


Figure 4.12 Problème proposé à propos de la comparaison de surfaces

Francis est le premier élève de la classe à offrir une réponse au problème et propose la stratégie suivante :

> **Francis** : Je vais calculer le tour du rectangle, parce que les deux côtés sont la même chose. Ça fait $50 + 50 + 16 + 16$, ça va faire 132 km. J'ai soustrait après 25, et ça fait 5 Îles-aux-Coudres dans l'île de Montréal. Dans 100, c'est quatre 25, et dans 32, il y en a un de plus

Francis fait ensuite une soustraction pour trouver ce qui reste à couvrir. En souhaitant faire la soustraction $132 - 125$, Francis écrit plutôt $125 - 132$, et arrive, après quelques erreurs de calculs et manipulations, à la réponse 143. L'enseignant soulève ne pas être certain de cette réponse. C'est à ce moment que Louis lève sa main et explique à l'oral ce qui aurait dû être fait comme calcul de soustraction :

> **Louis** : Si tu avais fait 132 moins 125, tu aurais barré ton 3, tu aurais mis un 2 avec le 1 à côté du 2, ça donne sept. 2 moins 2, zéro et 1 moins 1, c'est zéro.

La séance se poursuit ensuite avec une intervention d'un autre élève qui souligne que la fraction cinq huitièmes a été oubliée dans la stratégie de Francis et que l'île de Montréal ne couvre pas tout le rectangle. D'autres élèves présentent leurs stratégies en soulignant qu'ils travaillent sur l'aire plutôt que sur le périmètre comme l'a fait Francis et la résolution du problème se poursuit.

4.1.6.2 Analyse de l'extrait sous l'angle d'*Appliquer des méthodes*

Dans son intervention, Louis utilise l'algorithme de soustraction et explique comment il aurait fallu s'en servir pour faire la soustraction $132 - 125$. En particulier, Louis fait référence aux emprunts et aux valeurs de position, toutes deux caractéristiques de la soustraction en colonnes. Ce recours à l'algorithme de soustraction représente l'application de méthodes puisque Louis a recours à une suite d'étapes pour faire le calcul et puisqu'il applique sa méthode avec assurance.

D'abord, tout comme les mathématiciens, Louis utilise une méthode afin de produire une réponse à un calcul et expliquer à la classe ce qui aurait dû être effectué pour calculer la soustraction $137 - 125$. Toutefois, cette suite d'étapes ne fait pas référence aux détails des retenues, d'emprunts ou de valeurs de position sous-jacents à l'algorithme de soustraction. Notamment, lorsque Louis dit « tu aurais barré ton 3, tu aurais mis un 2 », il emprunte 10 unités aux trois dizaines de 132, mais ne l'explicite pas ainsi. En d'autres mots, l'explication des manipulations de nombres et de symboles n'est pas nécessaire pour l'application de l'algorithme de soustraction par Louis. Ceci s'aligne avec le travail des mathématiciens lorsqu'ils utilisent des méthodes. Certains mathématiciens disent utiliser des logiciels de calcul sur ordinateur alors que d'autres mentionnent appliquer des techniques (Burton, 2004). Entre autres, dans *The Mathematical Experience*, Davis et Hersh (1981) présentent un mathématicien qui a recours aux séries de Taylor afin de trouver la limite de son équation en 0, et ce, sans s'attarder en détail au fonctionnement des séries de Taylor. En d'autres mots, le mathématicien applique une méthode pour évaluer son équation sans se questionner sur le sens des étapes de sa méthode. De la même façon, Louis applique l'algorithme de soustraction sans expliquer qu'il travaille avec trois dizaines, qu'il en donne une aux deux unités pour avoir 12 unités, qu'il fait la soustraction 12 unités moins 5 unités, etc. Ces détails, qui permettent d'expliquer le fonctionnement de l'algorithme de soustraction, sont laissés de côté et Louis applique sa méthode avec efficacité.

Ensuite, le travail de Louis rappelle l'application de méthodes puisque l'élève emploie avec assurance l'algorithme de soustraction. Lorsque Louis prend la parole pour faire le calcul $132 - 125$, il n'est pas en train d'offrir sa manière de faire qu'il devra éventuellement justifier. Il n'est pas non plus en train de proposer une piste plausible de solution. Plutôt, Louis dit à la classe ce qu'il *faut* faire pour calculer la soustraction effectuée par Francis. De la façon similaire, lorsque les mathématiciens emploient des méthodes, ils ne doutent généralement pas de leur validité et ont confiance dans la réponse trouvée (Davis et Hersh, 1981). Par exemple, dans le cas des calculs à l'ordinateur, il n'existe souvent pas de preuve dite rigoureuse de la validité des algorithmes. Cependant, les mathématiciens ont confiance en ces programmes puisqu'ils ont été utilisés assez souvent sans présenter d'erreurs. Une assurance semblable se trouve dans ce que fait Louis qui applique l'algorithme de soustraction à la suite du calcul de Francis. Il est confiant de sa réponse parce qu'il connait les étapes à effectuer et est convaincu que ces étapes le mèneront à la réponse demandée.

4.1.6.3 Jessie utilise une méthode pour trouver une fraction équivalente

Un second extrait permet d'illustrer la façon avec laquelle les élèves justifient, lorsque nécessaire, la validité des méthodes qu'ils utilisent. Un exemple de cette application de méthodes s'est déroulé lors d'une séance portant sur les fractions. Le problème proposé aux élèves était de trouver en 30 secondes une façon d'écrire la fraction cinq dixièmes sur un tableau blanc effaçable qui leur avait été remis.

Rapidement, deux élèves offrent d'écrire les fractions une demie et 10 vingtièmes et expliquent avoir travaillé avec les fractions équivalentes. À la suite de l'extrait présenté à la section 4.1.2.1, Jessie a expliqué :

> **Jessie** : J'ai 10 vingtièmes. J'ai fait cinq fois deux, ça m'a donné 10, et j'ai fait 10 fois deux, ça m'a donné 20, donc c'est une fraction équivalente à cinq dixièmes.
> **Enseignant** : En quoi tu sais que c'est des fractions équivalentes? Les autres, vous en pensez quoi?
> **Philippe** : Parce que c'est la moitié.
> **Nathan** : Tu peux faire cinq fois deux, ou cinq fois n'importe quoi, mais il faut que tu multiplies aussi le dénominateur par la même chose, sinon ça fait pas une fraction équivalente.
> **Simon** : Parce que, vu que tu multiplies par deux, si tu prends n'importe quelle fraction…
> **Enseignant** : Disons cinq dixièmes
> **Simon** : Ouais, et que tu multiplies par n'importe quel nombre, mettons 5, ça va donner 25 au dénominateur. Il faut aussi prendre le 10, et le multiplier par cinq, ça va donner 50. Ça va toujours donner une fraction équivalente tant que tu multiplies par la même chose.

La multiplication par deux au numérateur et par trois au dénominateur de la fraction cinq dixièmes, qui donne 15 vingtièmes, est ensuite introduite par l'enseignant. Un élève réagit en disant que la fraction équivalente à cette nouvelle fraction est un tiers, alors qu'un autre insiste pour dire que c'est plutôt trois quarts. Chacun explique brièvement leurs affirmations et Simon offre ensuite de donner un sens aux fractions équivalentes à l'aide du concept de *suite* (voir Section 4.1.2.1) et l'enseignant reformule ses explications. La séance se termine sur des explications de l'enseignant qui insiste qu'il est nécessaire de multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même facteur pour trouver des fractions équivalentes.

4.1.6.4 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Appliquer des méthodes*

Dans cet extrait, Jessie utilise une méthode pour trouver une fraction équivalente à la fraction cinq dixièmes. Elle multiplie le numérateur et le dénominateur de sa fraction par deux et conclut alors que la fraction 10 vingtièmes est équivalente à la fraction cinq dixièmes. Dans ce travail, Jessie applique une méthode puisqu'elle suit efficacement des étapes pour répondre au problème initial et parce qu'elle et d'autres élèves justifient la validité de la réponse trouvée en se référant à la méthode qui a été utilisée.

D'abord, Jessie applique une méthode pour trouver une fraction équivalente à la fraction cinq dixièmes et répondre au problème posé. En premier, Jessie multiplie le numérateur par deux et obtient 10. Ensuite, elle multiplie le dénominateur aussi par deux, ce qui lui donne 20. Elle forme ensuite une seconde fraction avec les deux produits et conclut que la fraction 10 vingtièmes est équivalente à cinq dixièmes. À travers ceci, Jessie ne s'attarde pas aux détails de sa méthode. Comme mentionné plus tôt, les mathématiciens travaillent de façon similaire lorsqu'ils appliquent des méthodes. Par exemple, dans le cas de la preuve par contradiction, les mathématiciens ne rendent pas explicite le fonctionnement de cette preuve. D'une certaine façon, ils n'ont qu'à suivre les étapes suivantes :

1) Formuler la négation du résultat recherché
2) S'appuyer sur cette négation pour raisonner et trouver une contradiction
3) Une fois la contradiction trouvée, conclure que le résultat recherché est vrai

Sans s'attarder au fonctionnement de ces étapes, les mathématiciens prouvent efficacement des conjectures. De la même façon, Jessie applique deux multiplications d'un même facteur au numérateur et au dénominateur d'une fraction afin de trouver de manière sure et efficace une fraction qu'elle sait équivalente.

Plus encore, la justification de cette méthode semble être assurée par la méthode elle-même. Lorsque Jessie explique ce qu'elle a fait pour trouver la fraction 10 vingtièmes, ce sont les étapes qu'elle a suivies qui lui assurent que cette fraction est équivalente à cinq dixièmes. De la même façon, lorsque les élèves sont interrogés par l'enseignant à propos de l'équivalence des fractions cinq dixièmes et 10 vingtièmes, Nathan et Simon se réfèrent à la méthode elle-même. Nathan affirme d'abord que l'équivalence est assurée par la multiplication du numérateur et du dénominateur par un même facteur, quel que soit ce facteur. De son côté, Simon assure qu'en multipliant le numérateur et le dénominateur « par le même nombre », des fractions équivalentes sont « toujours » obtenues. En d'autres mots, les fractions sont équivalentes parce que la méthode fonctionne. Chez les mathématiciens, la validité des calculs à l'ordinateur se justifie aussi par la méthode employée alors que certains algorithmes n'ont aucune preuve dite rigoureuse (Davis et Hersh, 1981). La validité des algorithmes de calculs se fait par leur utilisation répétée et la cohérence des réponses obtenues. En ce sens, la méthode en elle-même est un argument pour la validité des réponses obtenues. En particulier, c'est ce qui se produit chez les élèves devant la méthode de Jessie alors que Jessie, Nathan et Simon se réfèrent à certaines étapes de la méthode pour appuyer l'équivalence des fractions deux cinquièmes et 10 vingtièmes.

4.1.7 Retour sur l'analyse de la dimension production (des) mathématique(s)

L'analyse de ces six activités permet de mettre en lumière la façon avec laquelle les élèves développent des compréhensions et des résultats mathématiques. Afin de conclure l'analyse du travail des élèves en production (des) mathématique(s), une synthèse de la mise en route de chaque activité est offerte. Pour compléter ce retour, un tableau récapitulatif de chaque activité est offert pour présenter les exemples appuyant l'analyse de chaque activité.

4.1.7.1 Créer des mathématiques

Comme les mathématiciens, les élèves élaborent des résultats mathématiques à propos des objets mathématiques au cœur des idées proposées par la classe qui agit comme communauté. Les élèves explorent ces objets, les étudient, les structurent et les catégorisent pour faire avancer les mathématiques de la classe et la résolution des problèmes proposés. En particulier, comme les mathématiciens, les élèves développent des résultats mathématiques innovants en reprenant de manière particulière des idées de leurs collègues. Ils fouillent des façons différentes de penser à/avec ces idées et explorent des angles particuliers sous lesquels il est possible de les travailler.

Tableau 4.1 Récapitulatif de l’activité *Créer des mathématiques*

Créer des mathématiques		
La production (des) mathématique(s) est caractérisée par le développement de nouveaux concepts, méthodes, théories, conjectures, définitions et arguments qui contribuent à l’avancement des idées mathématiques. Entre autres, des résultats mathématiques établis sont utilisés de manière nouvelle, sont recombinés ou sont abordés d’un nouvel angle pour développer de nouveaux résultats mathématiques.		
Exemple 1		
Description de l’extrait	À la demande de l’enseignant, Sabine reprend l’affirmation de Rafa et formule un nouveau résultat à propos de la division par deux : quand l’unité d’un nombre est 2 ou 6, la division par deux donnera un nombre impair et quand l’unité d’un nombre est 0,4 ou 8, la division par deux donne un nombre pair.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l’extrait
Mise en route de l’activité	Les élèves élaborent de nouveaux résultats à propos de structures et récurrences d’objets mathématiques. Ceci leur permet de contribuer à l’avancement des idées mathématiques de la classe.	Le résultat de Sabine porte sur la structure des nombres et met en lumière une propriété de la division par deux. Ceci précise une conjecture soumise à la classe et alimente les idées de la communauté mathématique.
	Les élèves offrent des idées significatives en explorant des résultats mathématiques sous un angle particulier.	Sabine explore une affirmation proposée par Rafa en travaillant sur les propriétés des nombres qui caractérisent des familles de nombres. Elle s’appuie sur ces familles de nombres pour élaborer son résultat.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves *créent des mathématiques* et contribuent à l’avancement des mathématiques dans la classe. Ils s’intéressent aux idées de leurs camarades de classe pour les amener plus loin et les creuser sous un angle singulier. De ces explorations émergent des innovations mathématiques, comme des conjectures, qui portent sur la structure et la nature des objets mathématiques au cœur des problèmes à résoudre.		

4.1.7.2 Concevoir des liens

À l'instar des mathématiciens, les élèves identifient et détaillent des relations entre des idées proposées en classe et des concepts, objets ou méthodes qu'ils maîtrisent. Ils appuient ces liens sur des similitudes qu'ils ont observés entre chacun des concepts et les rendent explicites à la classe. De plus, ils réinvestissent les liens qu'ils conçoivent afin de produire des résultats mathématiques qui contribuent à l'avancement des idées mathématiques de la classe. Les liens établis sont explorés et servent d'appuis pour fournir des explications à des idées discutées en classe.

Tableau 4.2 Récapitulatif de l’activité *Concevoir des liens*

<table>
<tr><th colspan="3">Concevoir des liens</th></tr>
<tr><td colspan="3">Concevoir des liens permet de donner du sens aux concepts qui sont repris pour la production (des) mathématique(s). Ces liens proviennent de la reformulation, la réorganisation et la mobilisation de concepts mathématiques qui alimentent la compréhension d’idées mathématiques. Ces liens sont ensuite repris et explorés pour appuyer le développement d’idées mathématiques. La mise en relation permet donc de produire des mathématiques en étant elle-même une production mathématique.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Exemple 1</th></tr>
<tr><td>Description de l’extrait</td><td colspan="2">Simon établit un lien entre suite et fraction équivalente parce que l’opération répétée pour générer des suites numériques lui fait penser à la multiplication du dénominateur et du numérateur par un même facteur. Il sert ensuite de ce lien pour expliquer que si la suite de multiplications par deux au numérateur et au dénominateur est respectée, des fractions équivalentes seront trouvées. De plus, il explique que si la multiplication d’un même facteur n’est pas respectée, les fractions générées ne sont pas des fractions équivalentes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l’extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l’activité</td><td>Les élèves en résolution de problèmes produisent des liens entre des idées mathématiques de la classe et des concepts qu’ils réinvestissent.</td><td>Simon met en relation les fractions équivalentes et les suites numériques en expliquant comment des fractions équivalentes peuvent être trouvées en faisant « fois deux, fois deux, fois deux, fois deux ».</td></tr>
<tr><td>Les élèves réinvestissent les liens établis et les exploitent pour explorer et formuler des explications et justifications.</td><td>Simon se sert de son lien entre les fractions équivalentes et les suites afin d’expliquer pourquoi il faut multiplier le numérateur et le dénominateur d’une fraction par un même facteur.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</th></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves établissent des liens et les détaillent en rendant explicites les similitudes entre les concepts mis en relation. Ils se servent ensuite des liens qu’ils conçoivent pour formuler des explications et des justifications à des idées de la classe.</td></tr>
</table>

4.1.7.3 Poser des problèmes

Comme le font les mathématiciens, les élèves s'intéressent aux idées mathématiques de leurs collègues à travers la formulation de problèmes. À travers la production (des) mathématique(s), les élèves rendent explicites leurs curiosités à propos des idées mathématiques proposées dans la classe et les explorent pour mieux les comprendre. De plus, à l'instar des mathématiciens, les élèves sont impliqués dans la pose de problèmes et cible des tâches qui les intéresse. En particulier, les élèves offrent parfois des pistes de résolution aux problèmes qu'ils posent, ce qui témoigne du caractère personnel de l'activité *poser des problèmes* chez les élèves placés en résolution de problèmes.

Tableau 4.3 Récapitulatif de l'activité *Poser des problèmes*

Poser des problèmes		
Des questions et problèmes sont formulés à partir d'idées de la communauté mathématique et portent sur des pistes d'exploration de ces idées. Les problèmes sont formulés en fonction des intérêts de la personne qui pose des problèmes et proviennent de questionnements et curiosités mathématiques.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Mathis souligne qu'une exploration supplémentaire peut être effectuée à propos d'une réponse développée par Audrey et Fanny et il pose le problème de faire une preuve. De plus, il propose de faire la multiplication par quatre de 227 afin d'explorer si c'est une réponse valide pour l'estimation de $918 \div 4$.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves formulent des questionnements, curiosités et interrogations pour mieux comprendre les résultats mathématiques de leurs camarades.	Mathis demande qu'une preuve soit effectuée à propos de la réponse d'Audrey et Fanny pour s'assurer que c'est une estimation valide de la division $918 \div 4$.
	Les élèves sont impliqués dans la pose de leurs problèmes et leurs questionnements sont en fonction de leurs propres intérêts et curiosités.	Après avoir posé son problème, Mathis a une idée de piste de résolution. Il propose la multiplication 227×4 pour faire la preuve de la réponse 227.
Exemple 2		
Description de l'extrait	Fanny identifie que la stratégie de Francis doit être précisée. Celle-ci permet de dire que 46 ou 106 sont pairs, car 4, 6 et 10 sont pairs, mais comme 7 est impair, Fanny souligne qu'il faut travailler la stratégie pour l'appliquer au nombre 70.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves formulent des questionnements, curiosités et interrogations pour mieux comprendre les résultats mathématiques de leurs camarades.	Fanny soulève que la stratégie de Francis peut être explorée davantage avec le nombre 70. Elle applique la stratégie de Francis en décomposant 70, et comme 7 est impair, elle n'est pas certaine si 70 est pair ou impair.
	Les élèves partagent la pose de problèmes avec l'enseignant qui reformule et rend clair leurs curiosités et qui pose des problèmes selon ses propres curiosités.	L'enseignant reformule, explique et contextualise la curiosité de Fanny à propos de la stratégie de Francis et de la parité du nombre 70.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes *posent des problèmes* et formulent leurs propres curiosités à propos des résultats de leurs camarades de classe. Ils sont impliqués dans la pose de problèmes et proposent parfois des pistes de résolution qui témoignent de leur intérêt à résoudre leur problème. Toutefois, l'enseignant en résolution de problèmes prend parfois en charge la (re)formulation de problèmes. Il rend ainsi explicite ce qui intrigue les élèves ou impose aux élèves d'explorer des idées qui lui paraissent importantes.		

4.1.7.4 Générer et étudier des exemples

Comme dans le travail des mathématiciens, les exemples sont étudiés de diverses façons par les élèves. Ceux-ci travaillent avec des exemples pour en tirer des résultats mathématiques, ils appliquent des résultats à des exemples pour mieux comprendre des idées discutées en classe ou encore, ils trouvent des exemples qui contredisent des affirmations de leurs camarades. En ce sens, les élèves s'appuient sur les propriétés des exemples de nombres et figures avec lesquels ils travaillent pour contribuer à l'avancement des idées mathématiques de la classe.

Tableau 4.4 Récapitulatif de l'activité *Générer et étudier des exemples*

<table>
<tr><th colspan="3">Générer et étudier des exemples</th></tr>
<tr><td colspan="3">Le recours à des exemples mathématiques prend trois formes pour la production (des) mathématique(s):
- L'étude des propriétés des exemples permet de développer des définitions ou conjectures.
- Les exemples permettent d'expliquer et mettre en image une définition ou une conjecture afin de mieux la comprendre.
- Les exemples contredisent des idées mathématiques et permettent d'identifier ce qui doit être modifié pour rendre ces idées valides (contre-exemples).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemple 1</td></tr>
<tr><td>Description de l'extrait</td><td colspan="2">Sabine se sert d'une quinzaine d'exemples de nombres qu'elle a générés afin d'étudier l'affirmation de Rafa à propos de la parité de leurs divisions par deux. De ces exemples, elle tire la conjecture suivante : si le nombre termine par 2 ou 6, la division par deux donne un nombre impair et si le nombre pair se termine par 0, 4 ou 8, la division par deux donne un nombre pair.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l'extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mise en route de l'activité</td><td>Les élèves étudient des nombres et des figures pour en dégager des conjectures et des propriétés.</td><td>Sabine s'appuie sur 15 exemples de nombres afin de mettre en relation le dernier chiffre d'un nombre ainsi que le résultat de sa division par deux.</td></tr>
<tr><td>Les élèves se servent d'exemples pour mieux comprendre des idées mathématiques.</td><td>Sabine se sert des 15 exemples de nombres pour se représenter la division par deux.</td></tr>
<tr><td>Les élèves contrôlent les exemples mathématiques qu'ils étudient</td><td>Sabine génère ses 15 exemples de nombres en variant les unités et les centaines.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemple 2</td></tr>
<tr><td>Description de l'extrait</td><td colspan="2">Simon décrit un rectangle ayant la caractéristique d'être « vraiment plus long » et se sert de cette figure comme contre-exemple à une affirmation de Jessie. En effet, le rectangle de Simon ne peut être divisé en deux carrés comme semble le proposer Jessie. De plus, Simon s'appuie sur ce contre-exemple pour apporter une précision importante à ce qu'avançait Jessie, c'est-à-dire que ce n'est pas tous les rectangles qui peuvent être séparés en deux carrés.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l'extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l'activité</td><td>Les élèves identifient des contre-exemples à des idées mathématiques.</td><td>Simon souligne qu'un rectangle « vraiment plus long » ne peut être séparé en deux carrés</td></tr>
<tr><td>Les élèves précisent des idées mathématiques à partir des contre-exemples trouvés.</td><td>Simon s'appuie sur son contre-exemple et précise alors que deux carrés forment un rectangle, mais que ce n'est pas tous les rectangles qui sont formés des deux carrés.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves en résolution de problèmes étudient des exemples afin (1) d'en dégager résultats mathématiques comme des conjectures (2) de mieux comprendre les idées mathématiques avec lesquels ils travaillent et (3) soulever des contre-exemples et préciser des résultats mathématiques et préciser ces résultats mathématiques. Les élèves sont sensibles aux propriétés des nombres et figures avec lesquels ils travaillent et s'en servent pour contribuer à la résolution de problèmes.</td></tr>
</table>

4.1.7.5 Créer et exploiter le symbolisme

À l'instar des mathématiciens, les élèves utilisent des symboles pour donner du sens à des idées mathématiques avec lesquelles ils travaillent. Parfois même, la représentation symbolique permet aux élèves de rendre saillantes des façons de comprendre et travailler les idées représentées. D'autres fois, les élèves créent des symboles pour représenter des idées nouvelles. C'est à travers des échanges et des questionnements que les élèves construisent, comme les mathématiciens, un sens aux symboles qu'ils ont créés. Aussi, les élèves manipulent des symboles en les associant et les transformant dans le but d'étudier les idées qu'ils représentent. En d'autres mots, ils font des allers-retours entre les symboles utilisés et le sens qu'ils supportent pour trouver des réponses à des calculs, donner un sens à des stratégies de résolution, pour transformer des formes géométriques, etc.

Tableau 4.5 Récapulatif de l'activité *Créer et exploiter du symbolisme*

Créer et exploiter du symbolisme		
La reprise de symboles connus et la création de nouveaux symboles pour représenter des idées mathématiques permettent de donner un sens à des idées au cœur du travail mathématique. Les manipulations symboliques sont caractérisées par la transformation, l'association, l'ajout et le retrait de symboles afin d'agir sur des idées mathématiques pour la production (des) mathématique(s). Ces manipulations sont possibles par des allers-retours entre symboles et sens des objets qu'ils représentent.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Francis représente symboliquement l'addition trente plus trente égale soixante en écrivant « $30 + 30 = 60$ » en colonnes. Il se sert des symboles, et de leur signification, pour donner un sens au nombre 70. Il manipule les symboles des nombres en transformant les « 30 » en « 35 » et montre que le nombre 70 est pair.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves utilisent des symboles pour représenter des idées et leur donner un sens.	Francis écrit l'addition $30 + 30 = 60$ en utilisant les symboles de nombres et le format d'addition.
	Les élèves explorent des perspectives mises en lumière par la symbolisation.	Francis se rend compte du travail possible sur l'addition $30 + 30 = 60$ afin de trouver que le nombre 70 est pair.
	Les élèves manipulent les symboles pour résoudre des problèmes, répondre à des questions et développer des idées mathématiques.	Francis manipule l'addition $30 + 30 = 60$ et transforment les 30 en 35 afin de montrer que le nombre 70 est pair.
Exemple 2		
Description de l'extrait	Francis, Jessie et William crée une symbolisation de la fraction cinq quarts en utilisant des symboles représentant la fraction quatre cinquièmes. Des interventions de Lilia et Simon, en plus des idées de Francis, Jessie et William, contribuent à la signification de la nouvelle représentation symbolique.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves créent des symboles pour représenter des idées nouvelles.	William propose une symbolisation pour représenter la fraction cinq quarts à partir des idées de Jessie et Francis.
	Les élèves contribuent à la signification des nouveaux symboles en les utilisant, en les questionnant et en discutant de leur création.	Francis, Jessis, William, Lilia et Simon participent à donner un sens à la symbolisation de la fraction cinq quarts en proposant des idées et des questions.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes *exploitent du symbolisme* puisqu'ils représentent et explorent des idées en utilisant des symboles. Ils s'appuient sur le sens des symboles pour donner du sens à des concepts discutés en classe. De plus, ils créent parfois des symboles mathématiques qui leur permettent de représenter de « nouvelles » idées. Finalement, ils manipulent des nombres, des formes et des schémas selon le sens des idées que ces symboles représentent et contribuent à faire avancer les idées mathématiques de la classe.		

4.1.7.6 Appliquer des méthodes

Comme les mathématiciens, les élèves utilisent des suites d'étapes qui leur assurent de trouver une réponse valide. Lorsqu'ils appliquent des méthodes, les élèves ne s'attardent pas aux détails derrière le fonctionnement de la méthode, ce qui rend efficace le travail mathématique. Ils enchainent les étapes, jusqu'à trouver une réponse dont ils sont certains de la validité. Finalement, lorsque les élèves doivent justifier la validité d'une réponse issue de l'application d'une méthode, ils se réfèrent à la méthode puisque celle-ci se justifie et est valide en elle-même.

Tableau 4.6 Récapitulatif de l'activité *Appliquer des méthodes*

<table>
<tr><th colspan="3">Appliquer des méthodes</th></tr>
<tr><td colspan="3">Des méthodes mathématiques sont utilisées pour la production de mathématiques. En effet, pour développer les mathématiques, les méthodes comme des algorithmes, des équations ou des opérations sont utilisées afin de faire avancer la production de mathématiques. Celles-ci sont considérées comme connues et valides en elles-mêmes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemple 1</td></tr>
<tr><td>Description de l'extrait</td><td colspan="2">Louis applique l'algorithme de soustraction pour reprendre la résolution du problème proposée par Francis. Il effectue la soustraction $132 - 125$ et travaille avec les retenues et valeurs de position tel que le demande l'algorithme de soustraction pour trouver la réponse 7.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l'extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l'activité</td><td>Les élèves utilisent des méthodes efficacement, en ne se questionnant pas sur la signification des étapes.</td><td>Louis se sert de l'algorithme de soustraction de manière simple et efficace et garde implicite les retenues et les valeurs de position.</td></tr>
<tr><td>Les élèves emploient des méthodes en étant assurés de leur validité.</td><td>Louis emploie une méthode pour dire à la classe ce qu'il faut faire pour calculer la différence $132 - 125$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemple 2</td></tr>
<tr><td>Description de l'extrait</td><td colspan="2">Jessie utilise une méthode pour trouver une fraction équivalente à la fraction cinq dixièmes : elle multiplie le numérateur et le dénominateur par deux. L'enseignant l'a ensuite questionnée pour savoir comme elle était certaine que c'était des fractions équivalentes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l'extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l'activité</td><td>Les élèves utilisent des méthodes efficacement, en ne se questionnant pas sur la signification des étapes.</td><td>Jessie utilise méthode pour générer des fractions équivalentes sans s'appuyer sur le sens des multiplications qu'elle effectue.</td></tr>
<tr><td>Les élèves emploient des méthodes en étant assurés de leur validité et de la validité de la réponse trouvée.</td><td>Jessie propose une réponse au problème demandé en s'appuyant sur sa méthode. Sa méthode se justifie d'elle-même et permet même d'argumenter la validité de la fraction dix vingtièmes. Nathan et Simon s'appuient sur des étapes de la méthode pour justifier la validité de l'équivalence des fractions cinq dixièmes et dix vingtièmes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves se servent de méthodes afin de contribuer à la production (des) mathématique(s). Ils appliquent efficacement des suites d'étapes pour trouver des réponses dont ils sont assurés de la validité. Lorsque nécessaire, ils justifient la validité des réponses par la méthode employée.</td></tr>
</table>

4.2 Analyse de la dimension communication (des) mathématique(s)

La deuxième dimension du travail mathématique est la communication (des) mathématique(s). Elle porte sur les activités mises en route pour rendre publics des résultats mathématiques. Chez les mathématiciens, une présentation orale ou écrite, formelle comme informelle est effectuée dans le but de faire part des résultats mathématiques qui ont été développés. De plus, toute autre affirmation mathématique pertinente pour appuyer, expliquer et contextualiser ces résultats mathématiques est aussi communiquée. En d'autres mots, la communication (des) mathématique(s) ne porte pas seulement sur un résultat mathématique principal, mais aussi sur des concepts, méthodes, théories, conjectures, définitions et arguments qui participent au sens et à la compréhension de ce résultat mathématique.

Dans le cas des élèves, la communication (des) mathématique(s) porte principalement sur la diffusion de leurs stratégies de résolution et des réponses trouvées. À travers la résolution de problèmes, les élèves sont amenés à rendre clairs leurs stratégies, méthodes, conjectures, arguments et explications aux autres élèves et à l'enseignant. Les élèves communiquent aussi leurs compréhensions des idées mathématiques de la classe. Tout ceci est mis en lumière à travers l'analyse des composantes de la communication (des) mathématique(s) : *Structurer les propos mathématiques, Mettre en évidence des manières de penser, Utiliser des outils de communication mathématique.*

4.2.1 Structurer les propos mathématiques

La communication (des) mathématique(s) passe d'abord par un retour sur la production d'un résultat à communiquer. Ce retour permet de retracer et sélectionner des idées mathématiques qui ont contribué à la production de ce résultat principal. Ces idées sont ensuite organisées les unes par rapport aux autres dans le but d'alimenter le sens du résultat communiqué.

Cette composante fait partie du travail des élèves, puisqu'en général, durant la résolution de problèmes, ceux-ci sont invités à faire part de leurs réponses au problème et de leurs stratégies de résolution. Ainsi, ils font un retour sur leur production (des) mathématique(s) pour expliquer ce qu'ils ont obtenu comme réponses, ou ce qu'ils ont produit comme résultats mathématiques. De plus, ils organisent ces idées mathématiques afin de rendre claires les affirmations qu'ils veulent offrir à leurs collègues de classe. Un exemple d'intervention des élèves est offert dans ce qui suit dans le but d'illustrer la mise en route de *Structurer les propos mathématiques* dans le travail des élèves.

4.2.1.1 Mirka présente la réponse qu'elle a trouvée avec Danaé

L'extrait suivant provient de la séance portant sur la résolution du problème suivant.

Si l'aire d'un rectangle est 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

Une fois le problème affiché au tableau, les élèves travaillent en équipe ou individuellement à le résoudre. À la suite de l'extrait présenté à la Section 4.1.4.3 où Simon explique à la classe que certains rectangles ne peuvent être décomposés en carrés, les élèves continuent de s'intéresser à la relation entre un carré et un rectangle. À la fin de la séance, Mirka et Danaé ont quelques minutes pour se rendre au tableau et présenter la réponse qu'elles ont trouvée au problème ci-haut :

> **Mirka :** Pour commencer, on savait qu'on avait 32 cm carré à mettre. On a compté 32 carrés, mais on a fait plusieurs essais. C'est Danaé qui a trouvé une autre façon,

> de faire quatre carrés par huit carrés, parce que je savais que ça donnait 32. [Mirka dessine au tableau (Figure 4.13)] On a donc écrit un périmètre de 24 cm, et pour l'aire, on avait 32. On a essayé de faire une preuve, mais on n'avait pas le temps.

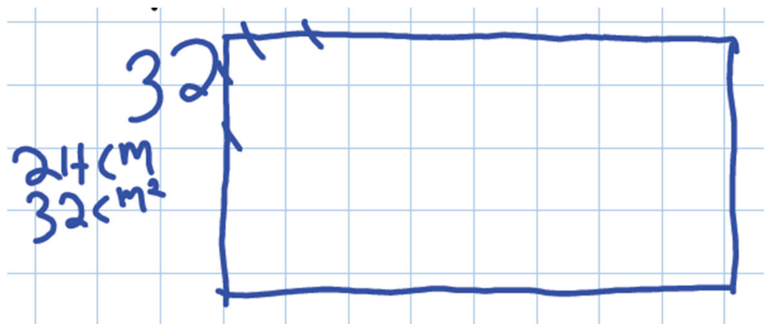


Figure 4.13 Dessin de la réponse trouvée par Mirka et Danaé

Cette intervention est la dernière de la séance et la cloche sonne.

4.2.1.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Structurer les propos mathématiques*

Dans cet extrait, Mirka explique ce qui a orienté le travail de résolution qu'elle a effectuée avec Danaé. D'une certaine façon, elle structure ses propos mathématiques à travers le retour qu'elle fait sur la résolution de problème qu'elle et Danaé ont effectuée. Elle choisit de dire certaines de leurs idées et les organise pour rendre claire la réponse trouvée.

Tout au long de ses explications, Mirka dit qu'elle et sa collègue cherchaient un rectangle formé de 32 carrés. Cette information apparait importante pour le travail de résolution des deux élèves parce qu'elles ont orienté leurs explorations autour de cette idée de rectangle. C'est donc pour mieux faire comprendre le travail effectué que Mirka mentionne le « 32 cm » recherché dans le rectangle. Encore plus central dans la structuration de sa communication, Mirka nomme le rectangle qui leur a permis de répondre au problème. Ce choix de l'élève lui offre d'introduire sa réponse, 24 cm, afin d’en faire part de manière précise. Ce genre de retour est aussi fréquent chez les mathématiciens qui reviennent sur le travail qu’ils ont mené et qui choisissent certaines idées centrales pour la communication (des) mathématique(s). Ils sélectionnent des définitions, des théorèmes, des arguments qu’ils mettront en avant dans leur article ou leur exposé. Et même, au contraire, certains mathématiciens vont aussi mettre de côté des éléments qui ne sont pas significatifs pour faire comprendre des résultats. Par exemple, dans la preuve que rédige Livingston (2015), il laisse de côté un schéma qui lui a permis de se familiariser avec les idées au cœur de sa preuve (voir Section 2.1.2.1). En d’autres mots, Livingston fait le choix de ne pas communiquer certaines idées parce que celles-ci ne contribuent pas de manière essentielle à faire comprendre à d’autres son résultat mathématique. Dans le cas de Mirka, elle a choisi de dire qu’elle et Danaé cherchaient une forme avec 32 carrés à l’intérieur ou, encore, que la solution provient d’un rectangle de quatre carrés par huit carrés. Elle laisse même tomber, à la manière de Livingston, des détails à propos des différents essais effectués pour trouver cette réponse (tels que le nombre d’essais effectués, les rectangles trouvés, etc.). En ce sens, le travail de Mirka rappelle le travail des mathématiciens puisque l’élève fait un retour sur le travail mené pour le développement d’une réponse et sélectionne les idées essentielles à la compréhension de cette réponse.

Plus encore, Mirka structure ses propos mathématiques en organisant les idées mathématiques reprises de sa résolution du problème. Par exemple, Mirka synthétise et résume une partie de l’exploration menée et dit simplement avoir « fait plusieurs essais ». Aussi, les explications de Mirka témoignent d’une certaine temporalité alors que les différentes étapes semblent découler les unes des autres. D’abord, Mirka explicite ce qu’elle et sa camarade savaient, c’est-à-dire que 32 cm carré devaient être placés. Ensuite, Danaé a trouvé un rectangle qui répondait au problème et a pu calculer la mesure du périmètre. Finalement, elles ont commencé à travailler sur une preuve, mais ont manqué de temps. D’une certaine façon, Mirka montre l’avancement des idées derrière la réponse trouvée, bien que ces idées puissent ne pas avoir été développées de cette manière chronologique lors de la résolution. Tout ceci s'aligne avec ce que font les mathématiciens pour *structurer les propos mathématiques* alors qu'ils agencent, synthétisent et ordonnent les idées reprises de leur production (des) mathématique(s). Notamment, Livingston (2015) jumèle deux théorèmes qu'il a utilisés pour produire sa preuve en un et synthétise sa rédaction (voir Section 2.1.2.1). Il reprend ainsi des idées qui lui ont permis de produire un résultat, mais les organise afin de simplifier sa preuve. Ceci lui permet de communiquer avec précision les arguments qui appuient son résultat. De la même façon, Mirka synthétise et ordonne les idées mathématiques qu'elle communique afin de rendre claire la solution qu'elle offre à la classe.

4.2.1.3 Précisions et nuances de *Structurer les propos mathématiques*

La mise en route de cette composante du travail des mathématiciens par les élèves placés en résolution de problèmes permet de mettre en correspondance leur travail de communication (des) mathématique(s) avec les échanges informels des mathématiciens. Lorsque les élèves font part de leurs résultats mathématiques dans les séances analysées, ils le font uniquement à l'oral et n'ont pas de temps alloué à la préparation de leurs présentations. Par exemple, dans l'extrait ci-haut, Mirka est invitée à aller au tableau et doit, en quelque sorte, improviser sur le coup son exposé. Entre autres, Mirka répète à plusieurs reprises qu'elle et sa collègue cherchaient un rectangle de 32 carrés pour résoudre le problème, comme si elle souhaitait insister sur cette façon d'approcher le problème. L'élève tente de rendre claire une information essentielle pour bien faire comprendre sa réponse, mais s'y prend implicitement, en le répétant, plutôt qu'en indiquant clairement que le rectangle de 32 carrés a orienté le travail autour du problème. Cette façon de faire se distingue des articles ou exposés qui sont préparés, travaillés et établis d'avance chez les mathématiciens. Dans le cas des élèves, leur communication (des) mathématique(s) est ponctuée d'hésitations, de temps de réflexions, de répétitions et rappelle les échanges non planifiés qu'ont les mathématiciens. Bien qu'abordé très brièvement par certains d'entre eux, il arrive que les mathématiciens se rencontrent informellement, qu'ils discutent avec des collègues de bureaux, qu'ils s'échangent par courriel (Burton, 2004; Livingston, 2015). Dans ce type de communication (des) mathématique(s), les mathématiciens expliquent leurs résultats mathématiques spontanément, avec des doutes, des silences, des hésitations, etc. Ainsi, dans le cas où les élèves communiquent oralement et sans préparation leurs idées, leur travail en communication (des) mathématique(s) se rapproche davantage de celui des mathématiciens lors de discussions informelles.

4.2.2 Mettre en évidence des manières de penser

La deuxième composante liée à la communication (des) mathématique(s) est caractérisée par l'ajout d'explications, remarques et détails qui mettent en avant certains raisonnements et perspectives ayant mené au développement des résultats communiqués. Ces précisions rendent explicites les manières de faire et les manières de penser qui ont été explorées lors de la production (des) mathématique(s) et qui font mieux comprendre le sens des résultats mathématiques communiqués.

Cette composante est mobilisée par les élèves placés en résolution de problèmes lorsqu'ils présentent, à leurs camarades de classe, les réponses, stratégies et conjectures qu'ils ont développées. Les élèves détaillent les raisonnements qu'ils ont explorés et les angles particuliers avec lesquels ils ont travaillé. En ce sens, ils rendent explicites des manières de penser et de faire qui ont contribué à leur production (des) mathématique(s) dans le but de rendre précis leurs résultats mathématiques. Un extrait du travail des élèves est offert dans ce qui suit afin d'illustrer la façon avec laquelle les élèves mettent en route *Mettre en évidence des manières de penser*.

4.2.2.1 Nadia donne des détails à propos de ses calculs

L'extrait suivant s'est déroulé durant une séance portant sur la multiplication. Le problème à résoudre était de faire, sans papier-crayon, la multiplication 12 × 18. Les élèves avaient 20 secondes pour résoudre le problème.

Charles est le premier élève à offrir une réponse au problème et donne une estimation de la réponse à 1400. Ses explications sont assez courtes : l'enseignant demande ensuite à la classe quelles autres réponses ont été trouvées. Lilia lève sa main, et explique comment elle est arrivée à 216:

> **Lilia** : Ça m'a donné 216. J'ai fait 18 plus 18, ça m'a donné 36. J'ai fait 36 plus 36, ça m'a donné 72. Après, 72 plus 18, ça m'a donné 90. 90 plus 90, 180. 180 plus 180 …[L'enseignant écrit chacune des additions au tableau et Lilia hésite] ça ne fonctionne plus.
> **Enseignant** : OK, attends, tu as fait 18 plus 18, ça fait deux 18. Après, 36 plus 36, tu es à quatre 18. Après, dans 90, tu en as 5, donc dans 180…
> **Lilia** : Il faut ajouter 36, et on va en avoir 12. J'ai fait 180 + 36, ça donne 216.

L'enseignent demande ensuite si d'autres élèves sont aussi arrivés à la réponse 216. Nadia lève la main et dit :

> **Nadia** : J'ai aussi 216 comme réponse. J'ai commencé par faire mon estimation. 12, c'est 10, et le 18, c'est 20, et ça m'a donné 200. Après ça, j'ai fait 2 fois 8, ça m'a donné 16. J'ai fait 200 + 16 et ça m'a donné 216.
> **Enseignant** : Ok, je suis pas certain que j'ai tout compris. Peux-tu me répéter ce que tu as fait?
> **Nadia** : Parce que 200, c'est mon estimation, donc je sais que c'est proche de 200. 2 fois 8, c'est comme si j'enlevais les dizaines de 12 et 18, que j'additionnais ensemble après. Je prends juste les unités ensemble et je les multiplie ensemble.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de la classe s'ils comprennent ce qu'a fait Nadia et s'ils pourraient reformuler son calcul. Certains insistent sur la correspondance entre le calcul 20 ×10 et l'estimation de la multiplication 12 × 18. D'autres soulignent que la différence entre 12 et 10 et la même qu'entre 20 et 18, ce qui explique pourquoi le calcul de Nadia fonctionne. Finalement, Jessie explique qu'il aurait été possible de faire l'algorithme de multiplication pour résoudre le problème avant que l'enseignant n'annonce la fin de la courte séance.

4.2.2.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Mettre en évidence des manières de penser*

Dans les explications de Nadia se trouvent des détails importants à propos des calculs qu'elle a faits pour obtenir la réponse 216. En particulier, dans sa communication (des) mathématique(s), Nadia décrit le sens et la provenance des nombres qu'elle utilise dans ses calculs. En d'autres mots, Nadia met en évidence des manières de penser puisqu'elle rend explicite l'origine des deux multiplications qu'elle effectue pour trouver la réponse au problème posé.

Dans ses deux interventions, Nadia donne des informations qui précisent la nature des nombres utilisés dans ses calculs. Dans sa première intervention, elle explique que les nombres 10 et 20 sont issus de l'estimation de la multiplication 12×18., Elle rend ainsi clair à la classe le sens qu'elle attribue aux nombres 10 et 20 lors de la résolution du problème. Dans sa deuxième intervention, elle offre aux élèves et à l'enseignant le sens qu'elle donne aux nombres 2 et 8 avec son calcul 2×8. Elle explique que ces nombres proviennent des nombres 12 et 18 auxquels les dizaines ont été enlevées, c'est-à-dire que la multiplication 2×8 est la multiplication des unités de 12 et 18. Ainsi, à travers ses deux interventions, Nadia rend explicite le sens qu'elle attribue aux nombres qu'elle a utilisés pour trouver une réponse à la multiplication 12×18. De façon semblable, la diffusion de résultats mathématique demande aussi aux mathématiciens de rendre claire la manière avec laquelle ils se sont intéressés à certaines idées pour produire des résultats mathématiques. Un exemple de ceci se trouve dans le travail de Livingston (2015) qui spécifie utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver un point de sa fonction utile pour la suite de son raisonnement. En d'autres mots, les mathématiciens ont à fournir des explications supplémentaires à leurs raisonnements mathématiques et rendre claires leurs manières de travailler avec certaines idées. C'est aussi ce que fait Nadia qui détaille la nature des nombres qu'elle a utilisés pour arriver à la réponse 216. En donnant des explications additionnelles sur les multiplications les nombres utilisés, elle précise les opérations qu'elle a effectuées et rend claire la stratégie qu'elle a déployée pour résoudre le problème.

4.2.3 Utiliser des outils de communication mathématique

L'activité *Utiliser des outils de communication* fait référence à l'exploitation de symbolismes, vocabulaires et exemples pour la diffusion de résultats et idées mathématiques. Ces outils de communication mathématique offrent un support aux explications, justifications et raisonnements en plus de permettre la mise en valeur de certaines idées importantes du résultat partagé.

Cette composante du travail des mathématiciens est mise en route par les élèves lorsqu'ils ont à faire part de leurs idées et résultats mathématiques. Ils se servent de symboles, de vocabulaires et d'exemples afin de rendre claires les réponses, stratégies et conjectures sur lesquelles ils ont travaillé. Deux exemples de cette activité chez des élèves en résolutions de problèmes sont abordés dans ce qui suit. Le premier présente un élève qui se sert de symbolisme et de vocabulaire pour rendre claires ses idées à la classe. Le second exemple aborde un élève qui se sert d'un exemple pour faire comprendre son affirmation.

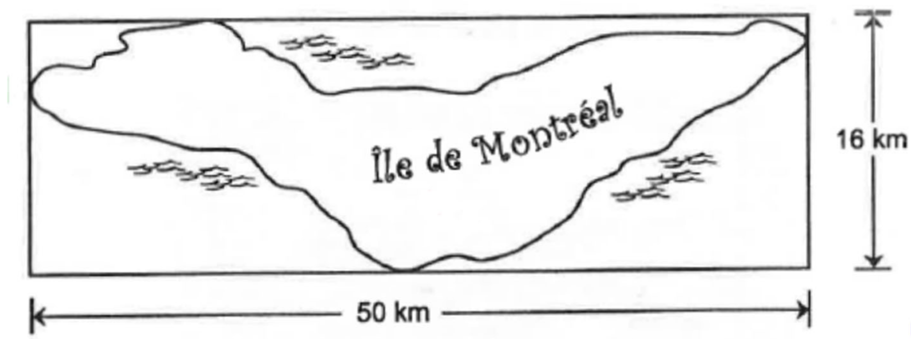
4.2.3.1 Le symbolisme et le vocabulaire de Francis pour communiquer ses calculs mathématiques

Le premier exemple est issu d'une séance portant sur la comparaison de surface, déjà abordée à la Section 4.1.6.1. Les élèves ont eu une dizaine de minutes pour travailler individuellement ou en équipe sur le problème suivant :

Une petite île

L'île de Montréal s'inscrit dans un rectangle de 50 km sur 16 km

Toutefois, elle en occupe seulement les $\frac{5}{8}$.



L'îles-aux-Coudres, quant à elle, a une superficie de 25 km^2

Combien d'îles comme L'îles-aux-Coudres faudrait-il pour recouvrir la superficie de l'île de Montréal?

Tout juste avant l'extrait présenté à la Section 4.1.6.1, Francis a utilisé des symboles de nombres et des mots de vocabulaire afin de faire part à la classe des calculs qu'il a effectués lors de la résolution du problème proposé. Pour répondre au problème, Francis va au tableau et explique :

> **Francis** : Je vais calculer le tour du rectangle, parce que les deux côtés sont la même chose. J'ai fait 50 plus 50 plus 16 plus 16, ça fait… eumh [l'élève fait l'addition en colonne (voir Figure 4.14)]… 132 km. Ensuite, j'ai soustrait après 25, et ça fait cinq Îles-aux-Coudres dans l'île de Montréal.
> **Enseignant** : Attends, comment tu es arrivé à cinq?
> **Francis** : Dans 100, j'ai quatre 25, et dans 32, il y en a un de plus.
> **Enseignant :** ok, donc tu as compté les 25 dans 132.
> **Francis** : ouais, et après, il reste 132 moins 125, donc ça donne … [l'élève fait la soustraction en colonnes] 143!
> **Enseignant** : Ouain… il faudrait peut-être revoir les calculs, mais on comprend l'idée, merci, Francis.

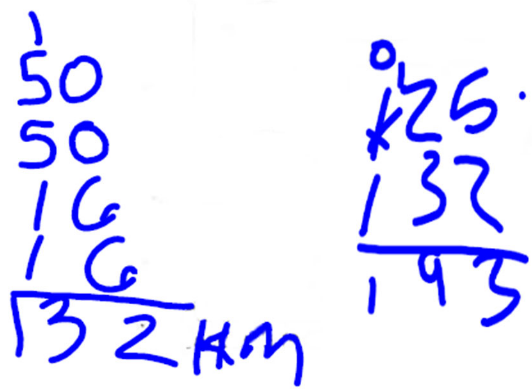


Figure 4.14 Calculs effectués par Francis pour résoudre le problème

Certaines élèves réagissent et mettent en lumière des modifications à apporter à la réponse de Francis. Louis souligne que la soustraction devrait plutôt donner 7 et Rafa rappelle que, selon le problème, Montréal occupe cinq huitièmes de l'aire. Rosalie propose ensuite sa propre stratégie :

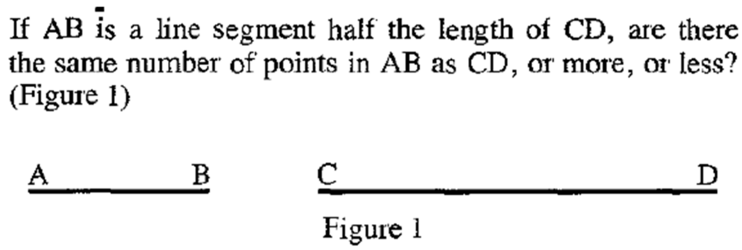
> **Rosalie** : Nous, au lieu de faire le tour, on a fait la superficie. Donc 50 fois 16, ça donne 800. Après ça, on a regardé le 5 huitièmes. Comme 800 et 8, ça se ressemble, on a pris 500. Dans 100, il y a quatre fois 25, donc on a fait 4 fois 5, ça fait 20.

L'enseignant demande à Rosalie de répéter cette dernière étape et d'expliquer d'où proviennent les nombres 4 et 5 dans sa dernière multiplication. Rosalie explique qu'elle a multiplié quatre par cinq puisque cinq est le nombre en haut de la fraction cinq huitième. Rapidement, Francis revient sur sa stratégie en disant qu'il a effectivement oublié la fraction et Rafa ajoute avoir fait le calcul et que « cinq huitièmes de 132, ça donne 82.5 ». La séance se termine sur une intervention de Rosalie qui insiste sur le fait que le problème demande de travailler la superficie de l'île de Montréal et non le périmètre.

4.2.3.2 Analyse de l'extrait sous l'ange d'*Utiliser des outils de communication mathématique*

Dans cet extrait, Francis explique à la classe sa stratégie pour trouver une solution au problème proposé. Pour ce faire, il se rend au tableau, représente les calculs qu'il fait et verbalise sa façon de résoudre le problème. En d'autres mots, Francis utilise des outils de communication parce qu'il se sert du symbolisme associé aux nombres et opérations et qu'il a recours à certains mots de vocabulaire pour communiquer sa stratégie de résolution, ce qui se distingue de Rosalie, qui le fait oralement.

Pour expliquer à la classe ce qu'il a fait comme calculs, Francis ne fait pas seulement communiquer son résultat mathématique en expliquant l'élaboration et le développement de ce résultat. Francis illustre, par le symbolisme et les mots qu'ils emploient, les calculs qu'il a effectués. Par exemple, dans la Figure 4.14, les quantités cinquante et seize, associées aux mesures de côté du rectangle, sont illustrées par les symboles « 50 » et « 16 », puis mises en relation par l'algorithme d'addition. De plus, la soustraction $132 - 125$ est aussi illustrée, bien que la représentation ne soit pas exacte. En effet, la représentation symbolique que Francis associe explicitement au calcul « 132 moins 125 » illustre plutôt la soustraction $125 - 132$, en plus de faire part d'un résultat erroné au reste de la classe. Le symbolisme de la Figure 4.14 est une façon pour Francis de communiquer des mathématiques et rendre clairs les calculs qu'il a faits. De plus, Francis se sert aussi de mots de vocabulaire afin de rendre claire la stratégie qu'il souhaite communiquer à la classe. En utilisant des mots comme « rectangle », « côté » « soustrait », il rend précises ses explications pour communiquer sa réponse. Notamment, en disant « je vais calculer le tour du rectangle », Francis introduit et contextualise le calcul « 50 plus 50 plus 16 plus 16 » qui découle ensuite presque naturellement de ses mots. Ceci s'aligne avec le travail des mathématiciens qui utilisent aussi le symbolisme et le vocabulaire pour communiquer des résultats mathématiques. Par exemple, dans son article, Tall (1980) définit le segment AB ainsi:


If AB is a line segment half the length of CD, are there the same number of points in AB as CD, or more, or less? (Figure 1)

A B C D

Figure 1

Figure 4.15 Définition de Tall qui utilise symboles et vocabulaires

Dans cette définition, le mathématicien utilise le symbole « AB » et « CD » pour faire référence aux segments entre les points A et B et les points C et D. Il se sert donc de symbolisme pour rendre clair que son résultat porte sur deux segments définis précisément par certains points. De plus, Tall (1980) a recours au vocabulaire pour rendre claire sa communication (des) mathématique(s). En effet, afin de préciser certaines propriétés des segments AB et CD, le mathématicien a utilisé les mots segments, longueur et moitié. De la façon similaire, Francis se sert du symbolisme et de vocabulaire afin de faire comprendre les résultats mathématiques qu'il a développés pour répondre au problème.

4.2.3.3 Simon utilise un exemple de pour illustrer la signification de son énoncé mathématique

Le deuxième exemple correspond à l'utilisation d'exemples comme outils de communication mathématique. Dans une séance portant sur l'aire et le périmètre de forme géométrique, Simon se sert d'un rectangle pour illustrer le sens de la conjecture qu'il propose à la classe. La résolution de problème était organisée autour de l'énoncé suivant (déjà abordé aux Sections 4.1.4.3 et 4.2.1.1) :

Si l'aire d'un rectangle est 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

À la suite de l'extrait présenté à la Section 4.1.4.3, les élèves s'intéressent à décomposer différents rectangles en carrés. En particulier, Rafa avance :

> **Rafa** : Mais on peut faire plein de carrés dans notre rectangle. [Il prend un rectangle dessiné au tableau et le coupe en plusieurs carrés] Donc le rectangle est composé de plusieurs carrés comme le carré est composé de plusieurs rectangles.
> **Simon** : Pas si un des côtés est impair.
> **Rafa** : Oui, ça marche même s'il est impair.
> **Simon** : Si tu as des côtés de rectangle qui mesurent un nombre pair, tu peux le couper en carré, mais sinon, tu peux pas. Mettons que tu fais un rectangle de deux par trois. Si on coupe dans le milieu, ça fait deux rectangles. Le côté en bas est plus petit que la ligne qui coupe en deux. [L'enseignant dessine au tableau la Figure 4.16].

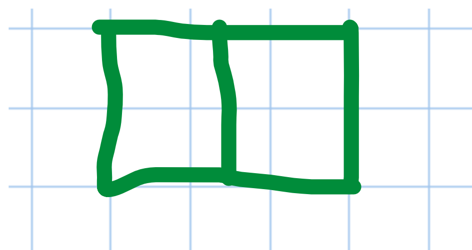


Figure 4.16 Dessin de l'enseignant du premier rectangle décrit par Simon

> **Simon** : Disons, si tu fais un rectangle avec quatre et deux, et que tu coupes bien au centre, ça va donner deux carrés parce que c'est deux par deux. [L'enseignant dessine au tableau (Figure 4.17)

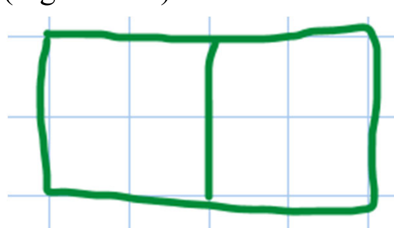


Figure 4.17 Dessin de l'enseignant du second rectangle décrit par Simon

Fanny propose ensuite de recoller autrement les deux parties du premier rectangle pour former un carré, mais se rend compte que ça ne fonctionne pas. Jessie essaie ensuite avec un rectangle un par cinq puis Simon insiste que ce découpage en deux donne aussi des rectangles. Finalement, Rafa trouve un découpage du rectangle trois par deux en huit carrés (Figure 4.18) avant que l'enseignant ne donne la parole à deux autres élèves qui viennent présenter leurs réponses et résolutions au problème initial.

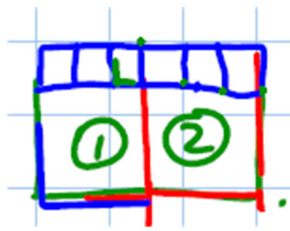


Figure 4.18 Découpage en huit carrés d'un rectangle dont un côté est de mesure impaire

4.2.3.4 Analyse de l'extrait sous l'angle d'*Utiliser des outils de communication mathématique*

Dans cet extrait, Simon offre à la classe une conjecture mathématique à propos du découpage de rectangles. À travers sa présentation, Simon a recours à des outils de communication puisqu'il utilise deux exemples de rectangle dans le but illustrer sa conjecture.

Pour Simon, il parait impossible qu'un rectangle ayant un côté impair puisse être découpé en deux carrés[9]. Afin de rendre claires ses idées, Simon présente deux rectangles qu'il décrit pour expliquer la signification de sa conjecture. Un premier

[9] Le découpage en deux carrés d'un rectangle devient rapidement implicite dans le travail des élèves. Plus encore, Rafa semble même l'oublier alors qu'il trouve finalement un découpage en huit carrés d'un rectangle ayant un côté impair. Toutefois, pour Simon, c'est le découpage d'un rectangle en deux carrés qui est impossible dans sa conjecture.

rectangle mesurant trois par deux permet d'illustrer qu'un rectangle ayant un côté de mesure impaire ne peut être découpé en deux carrés. Un second rectangle, mesurant cette fois quatre par deux, permet ensuite à Simon d'illustrer que le découpage en deux carrés d'un rectangle ayant des côtés pairs est possible. En ce sens, les rectangles choisis et utilisés par Simon illustrent le sens du résultat qu'il souhaite partager à la classe puisqu'ils montrent comment fonctionne sa conjecture. De leur côté, les mathématiciens se servent aussi d'exemples lorsque vient le temps de communiquer des résultats mathématiques. C'est le cas de Hofstadter (1997) qui, pour mettre en lumière une de ses conjectures, s'appuie sur un exemple de triangle et ses points remarquables (orthocentre, centre de gravité, etc.). En particulier, il se sert de cet exemple afin d'illustrer le lien entre l'emplacement des points remarquables d'un triangle et le cercle circonscrit à ce triangle (voir Figure 4.19). Dans le cas de Simon, l'élève se sert de deux exemples de rectangles afin de rendre compréhensible la conjecture qu'il offre à la classe.

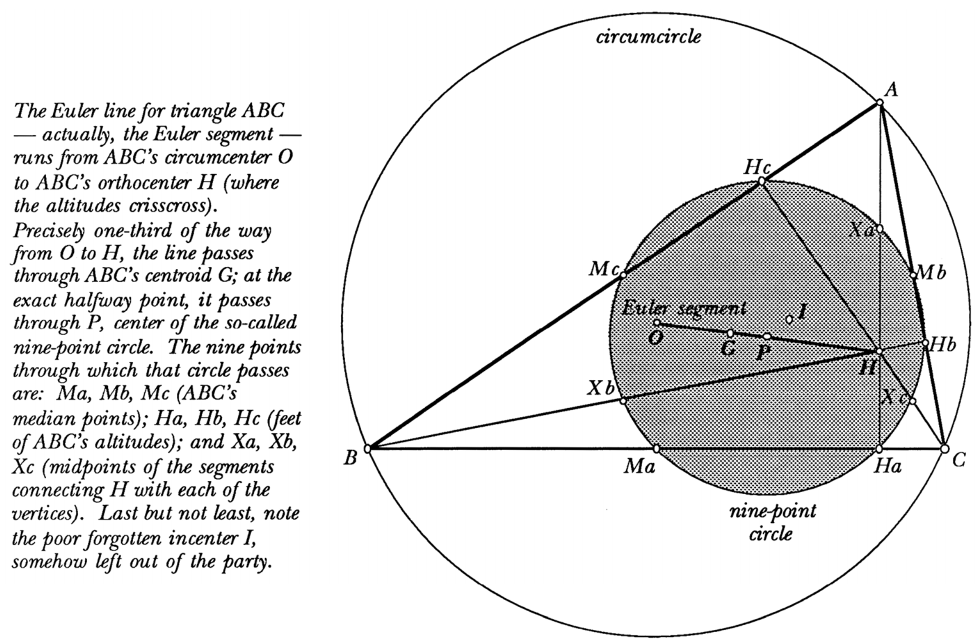


Figure 4.19 Exemple de triangle utilisé par Hofstadter

4.2.3.5 Précisions et nuances d'*Utiliser des outils de communication mathématique*

Ces deux extraits permettent d'insister sur l'interdépendance des dimensions de production et communication (des) mathématiques dans le travail des élèves, mais aussi dans le travail des mathématiciens. Dans le premier extrait, Francis se sert de symbolisme afin de faire part des calculs qu'il effectue pour trouver la réponse au problème posé. Toutefois, il produit aussi des mathématiques en *exploitant le symbolisme* (voir Section 4.1.5) et effectue les calculs en appliquant les algorithmes d'addition et de soustraction. De la même façon, dans le deuxième extrait, Simon se sert d'exemples dans le but d'illustrer le sens de sa conjecture, mais ces exemples lui permettent aussi de développer sa propre conjecture. D'une certaine façon, les exemples de rectangle alimentent la compréhension qu'a Simon de sa propre conjecture puisqu'ils lui offrent implicitement une entrée pour étudier sa conjecture. En particulier, ceci rappelle la mise en route de l'activité *Générer et étudier des exemples* (voir Section 4.1.4). Le travail des élèves, dans ces deux extraits, témoigne de l'enchevêtrement des dimensions de production et de communication (des) mathématiques. Ceci s'aligne avec le travail des mathématiciens, qui, tel que mentionné plus tôt, ne se divise pas de manière rigide en trois dimensions. Lorsque certains mathématiciens décrivent leur travail, la production et la communication (des) mathématiques s'entrecoupent. La présentation de résultats mathématiques par la rédaction d'un article ou la préparation d'un exposé est intimement liée au développement des résultats présentés (Burton, 2004; David et Hersh, 1981). En travaillant sur la communication de leurs idées mathématiques, les mathématiciens trouvent des détails à raffiner, des pistes d'exploration supplémentaires et des questions à fouiller qui alimentent leur production (des) mathématique(s). De plus, les mathématiciens développent des idées mathématiques dans le but, éventuellement, d'en faire part à leurs collègues. Ceci signifie qu'implicitement, la communication (des) mathématique(s) oriente l'élaboration de résultats mathématiques. De la même façon, les élèves en résolution de problèmes font des allers-retours entre les deux premières dimensions du travail mathématique parce que leurs idées sont constamment reprises pour être explorées et communiquées.

4.2.4 Retour sur l'analyse de la dimension communication (des) mathématique(s)

L'analyse de ces trois composantes illustre la mise en route des activités liées à la diffusion de compréhensions, réponses, stratégies et affirmations par les élèves. Dans le but de conclure l'analyse de la dimension communication (des) mathématique(s), un retour est ici offert sur chacune des composantes présentées plus haut. En particulier, une synthèse est effectuée sur la mise en route des activités et des tableaux récapitulatifs permettent de rappeler les exemples appuyant l'analyse du travail des élèves.

4.2.4.1 Structurer les propos mathématiques

Le contexte de résolution de problèmes amène les élèves à faire un retour sur le développement de leurs solutions et à choisir les idées essentielles à la compréhension de ces solutions. Les élèves, de façon similaire aux mathématiciens, jettent un regard sur le travail qu'ils ont accompli afin de déterminer ce qu'ils exposent pour rendre clairs leurs résultats mathématiques. Notamment, ils retracent les étapes d'une stratégie de résolution, ils identifient les calculs effectués pour une opération, ils retrouvent les raisonnements mathématiques qu'ils ont déployés pour établir une conjecture, etc. Plus encore, les élèves agencent ces idées afin de divulguer les résultats qu'ils communiquent. À l'instar des mathématiciens, les élèves organisent leur communication (des) mathématique(s) parce que l'ordre et l'association des idées contribuent au sens du résultat divulgué. La structure de leurs interventions permet de montrer une temporalité, ou une suite d'étapes, qui contribue à bien faire comprendre leurs stratégies, conjectures, arguments ou explications.

Tableau 4.7 Récapitulatif *Structurer les propos mathématiques*

<table>
<tr><th colspan="3">Structurer les propos mathématiques</th></tr>
<tr><td colspan="3">Pour rendre clairs des résultats mathématiques, une communication mathématique est structurée. Pour ce faire, un retour est fait sur la production des résultats pour identifier ce qui est pertinent à communiquer pour les appuyer. De plus, ces idées mathématiques sont organisées dans le but de les ordonner une par rapport à l'autre. D'une certaine façon, une part de la communication passe dans l'ordre de présentation qui influence la manière de penser ces idées.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemple 1</td></tr>
<tr><td>Description de l'extrait</td><td colspan="2">Mirka formule une réponse au problème posé et explique le travail effectué pour développer cette réponse. Elle répète plusieurs fois qu'elle et sa collègue cherchaient un rectangle de 32 carré, elle raconte que plusieurs essais ont été explorés avant de trouver le rectangle quatre par huit comme porteur de la réponse au problème. Elle répond au problème en identifiant le périmètre de 24 cm et termine en disant qu'elles ont essayé de faire une preuve, mais qu'elles n'ont pas eu le temps de la compléter.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l'extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l'activité</td><td>Les élèves font un retour sur leur production (des) mathématique(s) et sélectionnent des idées qui appuient leurs résultats.</td><td>Mirka mentionne ce qui a orienté l'exploration, c'est-à-dire le rectangle formé de 32 carrés. Elle décrit le rectangle qui met en lumière la réponse au problème et donne la réponse développée par elle et Danaé.</td></tr>
<tr><td>Les élèves organisent, synthétisent, jumèlent, associent les idées mathématiques tirées de la production (des) mathématique(s) pour rendre clairs les résultats communiqués.</td><td>Mirka synthétise les essais infructueux sans les détailler. Elle ordonne ses idées afin d'offrir un enchaînement fluide du travail effectué.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves structurent leurs propos mathématiques lors de discussions informelles. Avec quelques hésitations et répétitions, les élèves font une sélection des idées et étapes principales de leur production (des) mathématique(s) et les structurent afin de rendre clairs les résultats qu'ils veulent communiquer. Ils jumèlent, associent et ordonnent les raisonnements qui ont contribué au développement de leurs résultats mathématiques.</td></tr>
</table>

4.2.4.2 Mettre en évidence des manières de penser

Lorsqu'ils présentent leurs résultats mathématiques à la classe, les élèves, comme les mathématiciens, insistent sur certains éléments importants, apportent des détails supplémentaires, bonifient certaines de leurs explications, etc. Ceci leur permet rendre claire la façon avec laquelle ils ont travaillé les problèmes et les idées mathématiques de la classe pour développer ces résultats mathématiques. En d'autres mots, ils rendent explicites les manières de penser, la signification et l'origine des réponses, stratégies et explications qu'ils présentent comme résultats mathématiques à leurs camarades.

Tableau 4.8 Récapitulatif de l'activité *Mettre en lumière des manières de penser*

Mettre en évidence des manières de penser		
La communication d'un résultat mathématique se fait par la mise en évidence des manières de penser et des raisonnements qui ont mené au résultat communiqué. Des explications additionnelles sont données à propos des idées mathématiques afin de les préciser, les détailler et faire part de leur sens particulier en lien avec le résultat mathématique diffusé.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Nadia explique la réponse 216 qu'elle a obtenue au problème 12×18 en calcul mental. Elle explique d'abord avoir fait l'estimation 10×20 et le produit 2×8 pour ensuite faire leur somme. L'enseignant la questionne parce qu'il ne comprend pas tout à fait sa réponse et Nadia donne davantage de détails : 2 et 8 proviennent des nombres 12 et 18 auxquels les dizaines ont été enlevées.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves rendent explicites la signification, l'origine et leur façon de travailler des idées mathématiques qui ont contribué au développement de leurs résultats	Nadia détaille le sens des produits qu'elle a calculés : explique que l'opération 10×20 provient de l'estimation du produit 12×18 et que le calcul 2×8 provient des unités des nombres 12 et 18 du problème.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes *mettent en évidence des manières de penser* parce qu'ils détaillent et rendent explicites le sens des idées avec lesquelles ils ont travaillé pour produire des résultats mathématiques. Ceci permet de rendre plus clairs leurs résultats mathématiques et de mieux les faire comprendre à l'enseignant et aux autres élèves.		

4.2.4.3 Utiliser des outils de communication mathématique

Les élèves, comme les mathématiciens, utilisent des outils de communication mathématique pour rendre clairs et divulguer les réponses, stratégies et explications qu'ils développent. Ils se servent de symbolisme, vocabulaire et exemples afin de rendre claire la signification de leurs résultats mathématiques. Ils utilisent des schémas afin d'expliciter leurs raisonnements, ils verbalisent leur stratégie de résolution, ils se servent de nombres ou de figures comme exemples à leurs conjectures, etc. Comme le font les mathématiciens, les élèves utilisent ces outils de communication mathématique pour bonifier la présentation qu'ils font de leurs résultats mathématiques et mieux les faire comprendre. En particulier, le symbolisme et les mots de vocabulaire, parce qu'ils ont une signification précise, permettent de préciser les idées mathématiques qui sont communiquées par les élèves, comme c'est le cas aussi chez les mathématiciens. D'un autre côté, les exemples permettent d'illustrer et montrer comment fonctionne un résultat mathématique.

Tableau 4.9 Récapitulatif de l'activité *Utiliser des outils de communication mathématique*

Utiliser des outils de communication mathématique		
Des symboles, vocabulaires et exemples sont parfois utilisés pour illustrer et rendre clair un résultat mathématique. Ces outils permettent de détailler et préciser le fonctionnement ou la signification d'une idée mathématique.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Francis inscrit au tableau les calculs qu'il effectue pour résoudre le problème et détaille, en utilisant des mots de vocabulaire comme « côtés », « rectangle » et « soustrait », sa stratégie de résolution.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves se servent de symbolisme pour représenter leurs résultats mathématiques et les divulguer à la classe.	Francis écrit l'addition et la soustraction qu'il effectue pour résoudre le problème au tableau.
	Les élèves se servent de vocabulaire pour expliquer, contextualiser et présenter leurs résultats mathématiques et les communiquer à la classe	Francis se sert de certains mots comme « côtés », « rectangle » et « soustrait » afin d'expliquer et détailler le calcul qu'il a fait.
Exemple 2		
Description de l'extrait	Simon se sert de deux rectangles afin d'illustrer sa conjecture. Un premier rectangle aux côtés de mesure 2 et 4 lui permet d'illustrer qu'un rectangle dont les mesures de côté sont paires peut être découpé en deux carrés. Un second rectangle aux côtés de mesure 3 et 4 l'amène à montrer qu'un rectangle ayant une mesure de côté impaire ne peut être découpé en deux carrés.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves se servent d'exemples afin d'illustrer leurs résultats mathématiques. Ces exemples permettent de mieux faire comprendre le fonctionnement et la signification des affirmations exemplifiées.	Simon se sert de deux exemples de rectangles pour mettre en lumière le sens de sa conjecture. Un premier exemple de rectangle montre qu'il est possible de découper un rectangle de mesures paires en deux carrés, et le second montre qu'il est impossible de le faire pour un rectangle ayant une mesure de côté impaire.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes, comme les mathématiciens, se servent de symbolisme, de vocabulaire et d'exemple pour faire comprendre leurs résultats mathématiques à leurs collègues. Le symbolisme permet de rendre accessibles des idées à communiquer, le vocabulaire permet d'expliquer, contextualiser et introduire des idées à communiquer et les exemples permettent d'illustrer et mettre en lumière des idées à communiquer. De plus, le symbolisme et les exemples amènent les élèves à s'investir simultanément dans la production et la communication (des) mathématiques, comme dans le travail des mathématiciens.		

4.3 Analyse de la dimension validation (des) mathématique(s)

La troisième dimension du travail mathématique est la validation de résultats mathématiques produits et soumis par le biais de leur communication. Les explications, arguments et raisonnements qui appuient un résultat sont évalués dans le but de s'assurer qu'ils sont valides et qu'ils correspondent à ce qui est attendu par la communauté.

Dans le cas des élèves en résolution de problèmes, les stratégies, méthodes, conjectures, arguments et explications développés et proposés par les élèves sont évalués à travers des discussions en classe. De plus, ils ont parfois à travailler en équipe pour réexplorer une idée et déterminer sa validité. En d'autres mots, les élèves valident ou invalident les idées soumises en formulant des explications à une stratégie présentée à la classe, en commentant des étapes de calculs, en contredisant des réponses, etc. Tout ceci est illustré dans les sections à venir alors que la dimension validation (des) mathématique(s) est étudiée sous quatre composantes : *Utiliser des exemples, Vérifier la rigueur, Évaluer l'innovation* et *Vérifier la cohérence.*

4.3.1 Utiliser des exemples

L'utilisation d'exemples pour valider des résultats mathématiques correspond à l'application de résultats mathématiques à des objets dans le but de vérifier si ces résultats sont valides. Deux utilisations des exemples sont effectuées :

1) Certains exemples sont utilisés pour valider un résultat proposé. Ce résultat est appliqué à des exemples bien choisis et s'il fonctionne avec ces exemples, le résultat est considéré comme valide.

2) Des contre-exemples sont parfois trouvés. Ces contre-exemples invalident le résultat proposé et soulignent qu'un travail d'explorations supplémentaires doit être effectué.

Dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes, des exemples sont utilisés pour la validation (des) mathématique(s). Des contre-exemples sont fréquemment trouvés et proposés à la classe dans le but d'invalider des résultats mathématiques et souligner ce qui doit être réexploré pour modifier le résultat soumis. Dans ce qui suit, un extrait est présenté afin d'illustrer la façon avec les élèves utilisent des contre-exemples pour invalider des idées de leurs camarades.

4.3.1.1 Simon trouve un contre-exemple à une affirmation mathématique

L'extrait sélectionné pour illustrer l'invalidation d'idées mathématiques à l'aide de contre-exemple est issu d'une séance portant sur la divisibilité par deux. Le problème suivant (déjà présenté dans les Sections 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4 et 4.1.5) est présenté aux élèves.

46, 70, 81, 106

Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

Tel que mentionné plus haut, un premier élève, Francis, donne sa stratégie en expliquant que 46 est pair puisque 4 et 6 sont deux nombres pairs. D'autres élèves avancent que 106 est aussi pair puisque sa division par deux donne 53, ou encore, parce que 10 et 6 sont pairs. Quelques élèves s'intéressent au nombre 70 (voir Section 4.1.3.1) avant que l'enseignant demande aux élèves de trouver d'autres décompositions possibles pour 106. Les élèves en énumèrent quelques-unes : 53 + 53, 50 + 56, 86 + 20, 46 + 60, 36 + 70 et Fanny soulève :

> **Fanny** : On voit qu'il y a beaucoup de 3 et de 6.
> **Enseignant** : Ben oui, c'est drôle, 106, c'est un nombre pair et on l'a découpé en plein de nombres pairs.
> **Rafa** : À chaque fois que tu divises par deux, genre n'importe quel nombre, ça donne un nombre impair.
> **Simon** : Ok, mais 100 divisé par deux, ça fait 50, c'est pair.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de creuser l'affirmation de Rafa. En particulier, il propose aux élèves de trouver « quand est-ce que ça fonctionne, et quand est-ce que ça ne fonctionne pas? » Lors du retour en groupe, certains élèves offrent des nombres pour lesquels l'affirmation de Rafa est valide, et d'autres, des nombres pour lesquels elle est invalide. L'enseignant organise le tout sous forme de listes et, finalement, Sabine offre à la classe une dernière réponse à la proposition de Rafa avant que la séance ne se termine (voir Section 4.1.1.1).

4.3.1.2 Analyse de l'extrait sous l'angle d'*Utiliser des exemples*

Dans cet extrait, Rafa s'intéresse à la division par deux et formule à la classe une propriété à propos du résultat de la division par deux : une division par deux donne toujours un nombre impair. De son côté, Simon réagit rapidement et trouve un contre-exemple à cette affirmation de Rafa.

L'intervention de Simon correspond à l'activité *Utiliser des exemples* puisqu'il se sert du nombre 100 comme contre-exemple à l'affirmation de Rafa. Lorsque Rafa avance que toute division par deux donne un nombre pair, Simon rétorque que le résultat à la division par deux de 100 donne 50. Ainsi, Simon rend invalide la conjecture de Rafa en s'appuyant sur le nombre 100 comme contre-exemple. Ceci est aligné avec le travail des mathématiciens puisqu'ils cherchent et identifient parfois des contre-exemples à des résultats mathématiques qu'ils vérifient. Notamment, dans *Proof and Refutations* de Lakatos (1976), les mathématiciens trouvent constamment des contre-exemples à la définition de *polyèdre* au cœur de la relation d'Euler. Lhuilier, en 1812, a d'ailleurs utilisé le contre-exemple d'un cube superposé sur un plus grand cube (voir Figure 2.8) pour montrer que la propriété d'Euler est invalide dans ce cas de figure, réduisant son champ d'application à une définition plus restreinte de *polyèdre*. De façon similaire, Simon trouve et offre le nombre 100 comme contre-exemple à la conjecture de son collègue et souligne qu'elle est invalide puisque 100 divisé par deux est pair.

De plus, l'intervention de Simon peut être mise en correspondance avec *Utiliser des exemples* parce que le contre-exemple qu'il trouve permet de raffiner l'affirmation de Rafa. Après que Simon ait trouvé un contre-exemple, l'enseignant propose rapidement à la classe de s'intéresser à l'idée de Rafa. Face à cette tâche, Sabine reprend le nombre 100, explore quelques autres exemples de nombres et formule une nouvelle conjecture qui précise cette affirmation (voir Section 4.1.4.1). Ceci rappelle le travail des mathématiciens alors que l'invalidation par des contre-exemples a souvent le même effet, soit de déclencher une exploration mathématique visant à raffiner et rendre valide un résultat mathématique. Dans Lakatos (1976), les solides trouvés ont été utilisés pour transformer la relation d'Euler et la rendre valide. Notamment, la forme décrite par Lhuilier a permis de réévaluer le domaine de validité de la relation d'Euler et de limiter les solides auxquels s'applique cette propriété. Dans le cas des élèves, le contre-exemple de Simon a provoqué une recherche supplémentaire lors de laquelle Sabine a repris divers nombres pour établir une nouvelle conjecture.

4.3.1.3 Précisions et nuances d'*Utiliser des exemples*

Chez les mathématiciens, des exemples sont fréquemment produits et utilisés pour valider explicitement des résultats mathématiques. En particulier, certains mathématiciens interviewés par Weber et Mejia-Ramos (2011) disent avoir davantage confiance en des résultats si quelques exemples, parfois bien choisis, sont testés et confirment les résultats à vérifier. Ceci témoigne d'une utilisation d'exemples pour valider des affirmations mathématiques. Par contre, dans le travail des élèves analysé ici, ceci se fait implicitement plutôt qu'explicitement. Notamment, dans l'extrait à la section 4.2.3.3, Simon appuie la validité de ses idées en utilisant des exemples de rectangle. Notamment, Simon avance:

> **Simon** : si tu as des côtés de rectangle qui mesure un nombre pair, tu peux le couper en carré, mais sinon, tu peux pas. Mettons que tu fais un rectangle de deux par trois. Si on coupe dans le milieu, ça fait deux rectangles. Le côté en bas est plus petit que la ligne qui coupe en deux.

Dans cet extrait, Simon ne fait pas seulement rendre claires ses idées en utilisant un exemple. Il se sert aussi de cet exemple pour expliciter la validité de son affirmation. D'une certaine façon, le rectangle mesurant deux par trois montre le sens de l'affirmation de Simon, mais permet aussi de l'appuyer et de montrer qu'elle est valide. Ce type de travail montre que les élèves se servent d'exemples pour faire mieux comprendre des résultats mathématiques, mais aussi pour la validation de leurs idées mathématiques. Cette façon de faire correspond à l'utilisation d'exemples des mathématiciens, bien que ceux-ci se fondent *explicitement* sur des vérifications rigoureuses de plusieurs exemples pour la validation d'idées mathématiques proposées.

Cette façon d'utiliser des exemples chez les élèves met en lumière que, comme les dimensions de production et communication (des) mathématiques, les dimensions de communication et validation (des) mathématiques sont dépendantes dans le travail mathématique. Implicitement, lorsque les élèves se servent d'exemples pour faire comprendre leurs idées, ils montrent aussi la validité de leurs affirmations. En ce sens, ils font à la fois un travail de communiquer des idées mathématiques, mais aussi, de validation. De plus, lorsque les élèves invalident des affirmations soumises à la classe, les contre-exemples trouvés contribuent aussi à la communication (des) mathématique(s) et permettent de mieux faire comprendre ce qui est invalide. De la même façon, la communication et la validation (des) mathématiques s'enchevêtrent aussi chez les mathématiciens. Ceux-ci communiquent leurs idées mathématiques, mais les appuient aussi pour les rendre valides aux yeux de leurs collègues. C'est le cas de Hofstadter (1997) qui se sert d'un exemple de triangle pour appuyer son résultat à propos des cercles circonscrits à des triangles. Cet exemple lui permet de rendre clair son résultat, mais montre aussi la validité de son résultat par un exemple précis. En somme, l'utilisation d'exemples montre que les dimensions de communication et validation (des) mathématiques sont interdépendantes dans le travail des élèves et celui des mathématiciens.

4.3.2 Vérifier la rigueur

La composante du travail du mathématicien V*érifier la rigueur* fait référence à un premier critère utilisé lors de la validation (des) mathématique(s). Un résultat mathématique soumis est dit rigoureux s'il est juste et si les raisonnements mathématiques qui l'appuient le sont aussi. Ceci signifie que les méthodes employées doivent être appliquées adéquatement, que le développement d'affirmations mathématiques doit être expliqué et que des arguments justifient correctement le résultat mathématique proposé.

Chez les élèves en résolution de problèmes, la rigueur des réponses, stratégies et affirmations mathématiques est fréquemment évaluée et commentée par les élèves. Ceux-ci valident et invalident des résultats mathématiques proposés en s'appuyant sur le caractère rigoureux de ces idées. En particulier, les élèves vérifient la rigueur de deux façons. D'abord, ils avancent que des résultats sont exacts et reformulent des arguments importants qui les appuient. Ensuite, ils invalident des résultats en expliquant pourquoi certaines idées mathématiques ne sont pas rigoureuses. Ces deux façons de faire son illustrée dans les exemples qui suivent.

4.3.2.1 Francis vérifie la rigueur d'une représentation de la fraction deux cinquièmes

Le premier exemple s'est déroulé durant une séance portant sur la représentation de fractions. Au cours de cette séance, l'enseignant en est venu à demander aux élèves de trouver des représentations de la fraction deux cinquièmes. Après cinq minutes de travail individuel, l'enseignant demande aux élèves de présenter leur réponse. Béatrice offre la représentation suivante comme réponse :

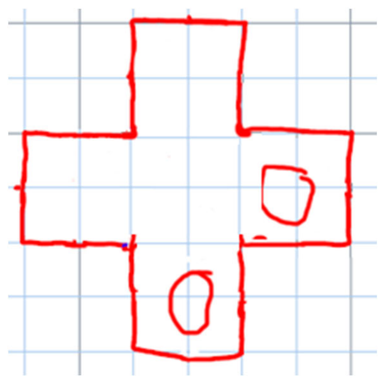


Figure 4.20 Représentation de la fraction deux cinquièmes par Béatrice

L'élève ajoute ensuite des explications avant que Francis explique pourquoi, selon lui, la représentation de Béatrice n'est pas rigoureuse :

> **Béatrice** : J'ai fait la croix, j'ai fait cinq en tout, et après, j'en ai pris deux, donc ça fait deux cinquièmes.
> **Francis** : Ce n'est pas deux cinquièmes parce qu'il faudrait fermer les carrés, sinon ce n'est pas un entier. C'est pour colorier la croix, pour qu'on voie les morceaux, c'est pour ça qu'il faut faire les lignes, sinon, ce n'est pas un entier.

D'autres élèves réagissent durant l'intervention de Francis pour dire que la croix est effectivement divisée en cinq et qu'il n'est pas nécessaire d'y ajouter les lignes. L'enseignant poursuit :

Enseignant : OK, donc ce que tu veux dire Francis, c'est qu'on trace les lignes pour avoir cinq carrés distincts. On va le faire [l'enseignant ajoute les quatre lignes qui délimitent le carré au centre, et tous les autres carrés]
Francis : Ouais, ça ne fonctionne pas, parce que s'il n'y a pas les lignes, si on ne ferme pas, c'est comme si on faisait ça [Francis se lève et dessine au tableau (voir Figure 4.21)]

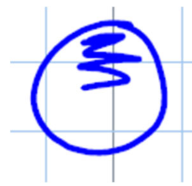


Figure 4.21 Dessin de Francis pour appuyer son opinion à propos de la représentation de Béatrice

La séance se termine alors qu'une autre élève offre rapidement sa représentation dans laquelle les deux cinquièmes sont représentés différemment dans la même croix utilisée par Béatrice.

4.3.2.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Vérifier la rigueur*

Dans cet extrait, Béatrice offre une représentation de la fraction deux cinquièmes dans un dessin de croix. Face à la figure dessinée par Béatrice au tableau, Francis souligne qu'il manque certains détails, des lignes, qui permettraient de bien représenter la fraction demandée et de s'assurer du nombre de morceaux qui forment la croix. En d'autres mots, Francis s'intéresse à la rigueur de la réponse de Béatrice puisqu'il affirme que la fraction deux cinquièmes n'est pas représentée correctement.

Plus précisément, Francis trouve qu'il n'est pas clair que deux carrés sont coloriés dans la croix représentée par Béatrice puisque les lignes délimitant les cinq carrés n'ont pas été tracées. D'une certaine façon, pour Francis, représenter une fraction demande de représenter clairement les morceaux qui forment le tout de la fraction. Il *faut* y mettre des « lignes » pour « fermer » les morceaux, tel que l'explique Francis dans sa seconde intervention. Dans le cas de la représentation de Béatrice, elle ne représenterait donc pas deux cinquièmes de manière rigoureuse parce que Francis ne voit pas où s'arrêtent les cinquièmes de la croix. De la façon similaire, les mathématiciens aussi accordent une importance aux détails des résultats mathématiques soumis, et plus particulièrement, au sens de ces détails en lien avec le résultat qu'ils appuient. Par exemple, un des mathématiciens interviewés par Burton (2004) explique que la rigueur demande de fournir les détails qui rendent clairs et qui valident un résultat mathématique proposé. Ceci signifie d'appliquer adéquatement les méthodes, de justifier suffisamment les raisonnements et d'expliquer précisément des arguments. En d'autres mots, pour les mathématiciens, un résultat mathématique est rigoureux s'il peut être considéré sans aucun doute comme juste. Dans le cas de Francis, il s'intéresse à la rigueur de la représentation de Béatrice puisque, pour lui, la figure ne représente pas correctement les deux cinquièmes, et doit être améliorée, mieux dessinée.

Plus encore, Francis s'appuie sur sa propre compréhension de ce qu'est la rigueur d'un résultat mathématique pour évaluer la représentation de sa collègue. Dans l'extrait, certains élèves se prononcent durant l'intervention de Francis pour dire que la représentation de Béatrice est adéquate pour illustrer la fraction deux cinquièmes. En ce sens, la rigueur du résultat mathématique n'est pas la même pour Francis qui souhaite ajouter des lignes dans la représentation de Béatrice pour mieux dessiner la fraction deux cinquièmes. Ceci s'aligne avec ce que disent de nombreux mathématiciens questionnés par Burton (2004). Pour eux, la rigueur est internalisée par chaque mathématicien, et elle s'applique selon leur propre compréhension de ce critère de validité. Cette compréhension dépend des conventions, des manières de faire et des résultats mathématiques avec lesquels ces mathématiciens travaillent. Notamment, parmi les huit mathématiciens interviewés par Weber (2008), deux d'entre eux ont affirmé qu'une preuve qui leur a été présentée était valide alors que cinq l'ont invalidée et un autre était indécis. Dans le cas de Francis, il ne voyait pas clairement les cinq carrés et avait besoin de les délimiter pour mettre en évidence la fraction deux cinquièmes. Pour d'autres, les lignes quadrillées derrière la croix étaient suffisantes pour délimiter les différentes parties de la croix, car ils comprenaient ce que Béatrice « voulait exprimer ». En ce sens, chez les élèves comme chez les mathématiciens, la rigueur apparait comme un critère propre aux personnes qui font la validation (des) mathématique(s).

4.3.2.3 Claire valide une étape de calcul

Le deuxième extrait illustrant l'activité *Vérifier la rigueur* provient d'une séance portant sur l'estimation de la division 918 ÷ 4 (déjà abordé à la section 4.1.3). Notamment, à la suite de l'extrait dans lequel Mathis pose un problème et explique comment le résoudre, Claire offre des explications aux calculs de Mathis :

> **Mathis** : Maintenant, essaie de les regrouper, 227 fois 4, pour faire une preuve. Si je fais 2 fois 227, ça donne 454. Et 454 plus 454, ça donne 908.
> **Enseignant** : ok, donc 227 ça serait une bonne estimation de la division. Les autres, qu'est-ce que vous pensez du calcul de Mathis?
> **Claire** : Il a sauvé un calcul, il a fait 454 plus 454, mais ça donne la même chose. Il a fait ça pour savoir si l'estimation est bonne.

La séance se poursuit ensuite alors que Noah propose de reprendre 227 et de retravailler cette réponse. En particulier, lorsqu'Audrey a offert la stratégie qui lui a permis d'obtenir sa réponse, elle a laissé de côté la dizaine de 918. Noah s'intéresse à cette dizaine et offre de la diviser en quatre : il divise huit unités pour avoir 2, et divise les deux autres unités pour avoir 0,5. L'enseignant demande ensuite à la classe de s'intéresser à ce calcul, et particulièrement, d'expliquer pourquoi 2 divisé en 4 donne 0,5. La séance se termine sur des explications de Louis à propos de cette réponse ainsi qu'une intervention de Simon qui soulève qu'« une division ne peut pas avoir de chiffre à virgule », mais plutôt, un « reste ».

4.3.2.4 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Vérifier la rigueur*

Dans cet extrait, Mathis présente un calcul qui lui a permis de faire la multiplication 227×4 en deux additions. Claire, de son côté, s'intéresse à cette façon de calculer le produit et retrouve les arguments qui appuient ce calcul. En d'autres mots, Claire commente la rigueur du calcul de Mathis parce qu'elle offre des explications qui appuient la validité de la réponse trouvée.

Cette intervention de Claire représente *Vérifier la rigueur* puisque l'élève s'intéresse à ce que fait Mathis et identifie les arguments qui permettent de justifier la rigueur de la réponse 908. Pour expliquer les calculs de Mathis, Claire compare les calculs avec une autre façon de trouver la réponse de 227×4 (gardée implicite). Elle se sert de ce calcul de référence pour argumenter qu'en sauvant un calcul, Mathis a pu obtenir la « même réponse », c'est-à-dire une réponse juste. Claire retrace les arguments qui permettent de rendre rigoureux les calculs de Mathis. Ceci est aligné avec les mathématiciens qui considèrent généralement un résultat comme rigoureux si les arguments qui le justifient sont accessibles et peuvent être retrouvés (Burton, 2004). En ce sens, certains arguments peuvent être laissés implicites, mais être fouillés lors de la validation des résultats qu'ils appuient. C'est précisément ce que fait un mathématicien rencontré par Weber (2008) alors qu'il retrace les arguments qui permettent de passer d'une ligne à l'autre dans l'énoncé mathématique suivant :

> Si $ab = n$ et $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$ alors,
> soit $a \equiv 1 \ (mod\ 4)$ et $b \equiv 3 \ (mod\ 4)$ ou $a \equiv 3 \ (mod\ 4)$ et $b \equiv 1 \ (mod\ 4)$

Sans indications précises dans la preuve qu'il vérifie, le mathématicien s'intéresse à différents cas de divisions modulaires et s'assure de la rigueur du passage d'une ligne à l'autre. Un résultat peut donc être dit rigoureux si les arguments qui le justifient sont accessibles et peuvent être retracés par les mathématiciens qui le valident. De la même façon, Claire retrouve des arguments qui appuient le calcul de Mathis.

4.3.3 Évaluer l'innovation

L'innovation est un deuxième critère pouvant être utilisé pour la validation (des) mathématique(s). Pour être considéré comme valide, un résultat doit contribuer à l'avancement des idées mathématiques de la communauté en apportant de nouvelles idées. Ainsi, un résultat peut être invalidé s'il ne présente pas d'apport significatif à un résultat, de perspectives différentes ou, encore, s'il n'offre pas des manières de faire plus efficaces.

Dans le cas des élèves en résolution de problèmes, ils s'intéressent aussi à l'innovation des résultats mathématiques, mais particulièrement pour mettre en l'avant la validité de leurs propres résultats mathématiques. Ils s'appuient sur certains aspects novateurs de leurs stratégies et réponses afin d'illustrer que leurs affirmations mathématiques contribuent aux idées mathématiques de la classe.

4.3.3.1 Mia insiste sur l'aspect novateur de sa proposition mathématique

Le premier extrait qui illustre l'activité *Évaluer l'innovation* provient d'une séance axée sur les fractions (abordée à la Section 4.1.5). Le problème proposé suivant a été donné aux élèves qui ont à le résoudre individuellement ou en équipe dans leur cahier:

> Pour célébrer la fin des cours de ski, les moniteurs ont préparé un dîner pour leurs élèves. Trouve le nombre de sandwichs que compte la collection.
>
> 30 sandwichs correspondent au $\frac{5}{4}$ des sandwichs préparés

Quelques minutes après le début du retour avec les élèves sur leurs solutions, l'enseignant demande à la classe d'essayer de représenter la fraction cinq quarts dans leur cahier. Sur le champ, certains élèves disent ne pas être capables de travailler avec cette fraction. De son côté, Simon propose rapidement de dessiner quatre paquets et de mettre cinq lignes dans chaque paquet:

Figure 4.22 Représentation, par Simon, de la fraction cinq quarts

Afin de mieux comprendre cette façon de représenter la fraction, l'enseignant demande à Simon d'expliquer comment il représenterait la fraction quatre cinquièmes. Simon explique alors qu'il ferait quatre paquets, et mettrait « cinq dedans chaque ». L'enseignant dessine ensuite un rectangle divisé en cinq parties (Figure 4.23) et demande à Simon quoi faire pour représenter quatre cinquièmes.

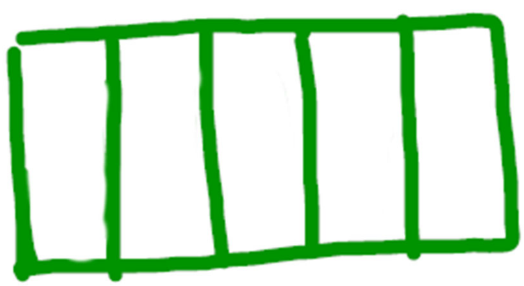


Figure 4.23 Dessin de l'enseignant pour que Simon représente la fraction quatre cinquièmes

Enseignant : Là-dedans, comment tu ferais quatre cinquièmes?
Simon : Il faut mettre des barres.
Enseignant : Elles sont là.

> **Simon** : Mais ça, c'est le tout. C'est le rectangle, c'est le tout. Dans le fond, tu peux faire quatre cinquième, il faut que tu … que tu…
> **William** : Tu en colories quatre!
> **Simon** : Mais si tu fais cinq quarts, tu peux pas le mettre en rangée comme ça. Cinq quarts, tu vas avoir quatre paquets à colorier, et tu peux pas en colorier cinq parce qu'il t'en manque un.
> **Enseignant** : OK, donc ça ne donne pas exactement ce qu'on voudrait. Les autres, qu'est-ce que vous avez comme réponse? Qu'est-ce que vous pensez de ça?

Mia prend alors la parole et explique sa propre représentation en insistant sur l'innovation de son dessin :

> **Mia** : J'ai fait presque la même chose, mais pas dans la même forme. Moi, j'ai mes pizzas. J'ai quatre petites pizzas, et je les ai coupées en cinq [Mia dessine la représentation à la Figure 4.24]. Notre ami, il a mangé une pizza, donc il a mangé cinq pointes de pizza. [Mia barre une des pizzas dans sa représentation].

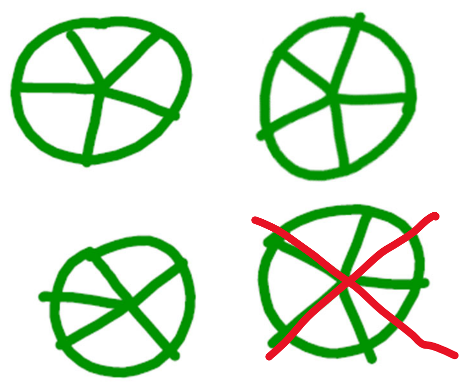


Figure 4.24 Représentation de Mia de la fraction cinq quarts

Lilia, une autre élève, offre ensuite sa représentation dans laquelle un rectangle est découpé en cinq colonnes et quatre rangées pour illustrer cinq quarts. Les élèves discutent ensuite de cette représentation jusqu'à identifier le besoin d'ajouter, à chacune des représentations offertes, ce que les élèves appellent le « reste un » (voir Section 4.1.5). À travers leurs explorations, les élèves concluent qu'ils peuvent représenter quatre quarts pour ensuite ajouter un quart à leur représentation et faire ainsi une représentation de la fraction cinq quarts.

4.3.3.2 Analyse de l'extrait sous l'angle d'*Évaluer l'innovation*

Dans cet extrait, Mia propose une autre représentation de la fraction cinq quarts. Les explications de Mia à propos de sa représentation correspondent *Évaluer l'innovation* puisque l'élève s'intéresse à l'aspect novateur de sa propre représentation, et ce, en comparaison avec le travail d'un autre élève.

Pour Mia, la représentation qu'elle a élaborée de la fraction cinq quarts est novatrice parce qu'elle offre une autre façon d'illustrer la fraction demandée et « n'est pas dans la même forme » que celle de Simon. En faisant part au groupe de la nouveauté qu'apporte sa représentation par rapport à celle de Simon, Mia met en avant que l'innovation occupe une place particulière pour elle. Du côté des mathématiciens, l'innovation est aussi importante lors de la validation (des) mathématique(s) puisque c'est à quoi s'attendent les mathématiciens qui évaluent des résultats mathématiques. Par exemple, pour certains mathématiciens interviewés par Burton (2004), un résultat mathématique innovant offre parfois de voir les choses autrement et « should open your eyes to something that you haven't noticed before » (p. 107). Le processus de validation d'un résultat mathématique passe donc par l'innovation et celui-ci peut acquérir une certaine validité s'il offre une manière différente de voir des idées mathématiques. Sans cet apport significatif aux connaissances de la communauté, un résultat peut être invalidé, comme l'explique à Weber et Mejia-Ramos (2011) un mathématicien responsable d'éditer une revue scientifique. Aligné à ceci, Mia insiste pour dire que sa représentation est innovante puisqu'elle se distingue de celle de Simon permet de voir la fraction cinq quarts dans une autre forme.

4.3.3.3 Précisions et nuances d'*Évaluer l'innovation*

Dans les données analysées pour ce projet, les élèves s'intéressent uniquement à l'innovation de leurs propres résultats mathématiques. Ils mettent en avant, comme Mia, ce qui distingue leurs résultats mathématiques d'autres idées de la classe, et rendent explicites ce qu'apportent leurs affirmations mathématiques aux discussions de la classe. Cependant, dans le cas des mathématiciens, ils se servent aussi du critère d'innovation pour (in)valider des résultats mathématiques qui ont été proposés par leurs collègues. En ce sens, ils s'interrogent à propos de l'apport des résultats mathématiques qu'ils vérifient et s'assurent que le potentiel des idées soumises par d'autres mathématiciens contribue de manière significative à la communauté. La mise en route de l'activité *Évaluer l'innovation* est donc partiellement différente dans le cas du travail des élèves en résolution de problèmes analysés dans le cadre de ce projet.

Par contre, cette nuance à propos de la mise en route de l'activité *Évaluer l'innovation* permet d'insister, une fois de plus, sur les liens qui existent entre les différentes dimensions du travail mathématique. Dans ce cas-ci, la production et la validation (des) mathématiques semblent s'entrecouper dans le travail sur l'innovation. En effet, si l'innovation fait partie des éléments pris en compte par les élèves en résolution de problèmes lorsqu'ils parlent de leurs stratégies et solutions, et qu'ils abordent le potentiel de leurs résultats mathématiques lorsqu'ils le soumettent à la classe, c'est qu'ils souhaitent *créer des mathématiques* et produire de nouveaux résultats pour la classe. De la même façon, si les mathématiciens portent une attention particulière au caractère innovant des résultats mathématiques proposés par leurs collègues, c'est qu'ils ont pour objectif de faire avancer les connaissances de leur communauté. En ce sens, les dimensions de production et validation (des) mathématiques dans le travail mathématique s'enchevêtrent, autant dans le travail des mathématiciens que celui des élèves placés en résolution de problèmes.

4.3.4 Vérifier la cohérence

La cohérence est le troisième critère utilisé pour la validation (des) mathématique(s). En particulier, un résultat mathématique est dit cohérent s'il :

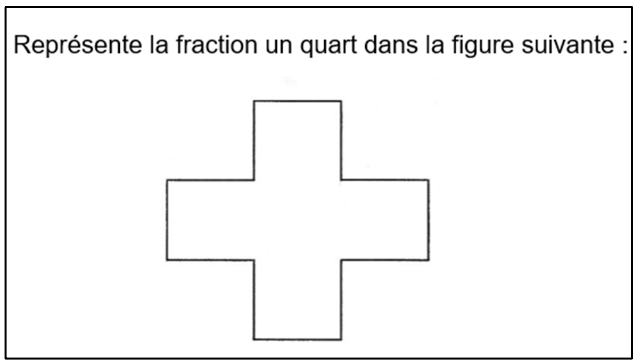
1) *Est aligné avec les connaissances de la communauté*. Un résultat mathématique ne doit pas être en contradiction avec d'autres résultats établis par d'autres mathématiciens.
2) *Forme un tout cohérent*. Les idées mathématiques proposées pour appuyer un résultat doivent former un tout cohérent et contribuer explicitement au sens du résultat mathématique soumis.

Ainsi, un résultat peut être invalidé s'il est contradictoire avec d'autres idées de la communauté ou si certaines propositions qu'ils l'appuient sont trop éloignées du résultat mathématique principal.

Pour valider des idées mathématiques de leurs camarades, les élèves s'assurent aussi de la cohérence des réponses, stratégies et affirmations proposées dans la classe. Entre autres, ils vérifient que les réponses soumises sont alignées avec les problèmes à résoudre. De plus, les élèves s'intéressent à des étapes précises des stratégies proposées et s'assurent qu'elles sont en lien avec le fil conducteur de cette stratégie. Deux exemples de vérification de la cohérence sont présentés dans ce qui suit et montrent comment les élèves valident et invalident des résultats mathématiques en utilisant la cohérence comme critère de validité.

4.3.4.1 Mathis considère qu’une représentation de la fraction un quart est valide

Le premier exemple illustre la façon avec laquelle les élèves valident des résultats mathématiques parce qu’ils sont cohérents. L’extrait suivant s’est déroulé durant la résolution du problème :



Après cinq minutes de travail, Lilia est la première élève de la classe à proposer une réponse et dessine la représentation suivante au tableau :

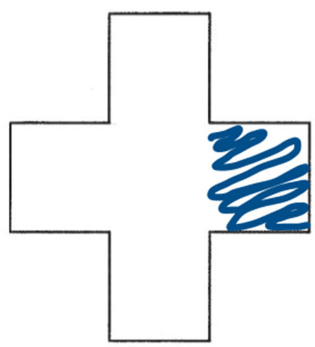


Figure 4.25 Représentation de la fraction un quart effectuée par Lilia

L’enseignant demande ensuite aux élèves ce qu’ils pensent de cette réponse et Mathis répond :

> **Mathis** : Je pense que c’est bon, un quart, il y a quatre carrés. Le 1, c’est le nombre qu’il faut colorier, mais il faut en avoir quatre comme lui.

Lilia se rend alors compte que dans sa représentation, il y a un cinquième carré, au centre, et qu'elle a alors représenté la fraction un cinquième. Claire, une autre élève du groupe propose ensuite une représentation dans laquelle elle a divisé la croix en quatre (Figure 4.26)

Figure 4.26 Représentation de la fraction un quart effectuée par Claire

> **Claire** : Ouais, la croix de Lilia, ça fait un cinquième, mais moi, j'ai séparé ma croix en quatre au lien d'en cinq. C'est un quart, parce qu'à la place de cinq, il y en a quatre.

La séance se poursuit ensuite alors que les autres élèves discutent de la représentation et justifient que la fraction un quart est bel et bien représentée dans ce qu'a fait Claire. D'autres offrent des façons supplémentaires de découper la croix et représenter la fraction un quart. Les élèves abordent finalement le concept de fractions équivalentes, qui est exploré par la classe et l'enseignant avant la fin de la séance.

4.3.4.2 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Vérifier la cohérence*

Dans cet extrait, Lilia propose une représentation de la fraction un quart à l'aide de la croix proposée dans le problème donné aux élèves. De son côté, Mathis s'intéresse à cette représentation et s'assure de la cohérence de la représentation de Lilia.

Lorsque Mathis commente la figure dessinée par Lilia, il « pense que c'est bon » parce qu'il retrouve, dans la réponse de sa camarade, « un » et le « quart » de la fraction « un quart » : le « un » est le carré qui est colorié, et le « quart » est représenté par les quatre carrés qui sont « pareils ». En d'autres mots, Mathis valide la représentation de sa collègue parce qu'elle lui apparait cohérente avec le problème posé. Ceci est aligné avec le travail des mathématiciens qui s'intéressent aussi à la cohérence des résultats mathématiques proposés. Particulièrement, un mathématicien interrogé par Weber et Mejia-Ramos (2011) explique que lorsqu'il évalue une preuve d'un théorème, il s'assure que les affirmations mathématiques s'enchaînent logiquement et qu'ils sont alignés avec l'objectif de la preuve. Pour les mathématiciens, un résultat mathématique est cohérent parce qu'il concorde avec l'objectif visé par ce résultat : une preuve prouve bel et bien le résultat à prouver, une méthode répond bel et bien au problème posé, un théorème appuie bel et bien une affirmation mathématique. C'est en ce sens que Mathis affirme que la représentation de Lilia est valide. Selon lui, la fraction un quart abordée dans le problème proposé à la classe est bel et bien représentée dans la croix soumise par Lilia puisque le un et le quart s'y retrouvent.

Plus encore, Mathis vérifie aussi que la représentation proposée est cohérente avec les connaissances de la communauté. Lorsque Mathis explique pourquoi il croit que la réponse de Lilia est valide, il s'appuie sur une façon connue de la classe pour construire des représentations de fractions. En effet, à plusieurs reprises au fil des séances, les élèves abordent l'idée que le dénominateur d'une fonction à représenter est le nombre de parties à dessiner et que le numérateur est le nombre de parties à colorier. En ce sens, Mathis rend explicite la cohérence de la représentation de Lilia avec les idées de la classe. De la même façon, les mathématiciens s'assurent aussi que des résultats mathématiques soumis sont alignés avec les idées mathématiques de la communauté (Burton, 2004; Heinze, 2010). Ceci signifie qu'il n'existe pas de contradictions entre les résultats soumis et des résultats déjà établis. De plus, des résultats peuvent être considérés comme cohérents par les mathématiciens s'ils sont en continuité avec des idées mathématiques de la communauté (Burton, 2004). C'est précisément ce que fait Mathis lorsqu'il valide la réponse de Lilia en soulignant que sa représentation correspond à la méthode utilisée par la classe pour représenter des fractions.

4.3.4.3 Noah trouve incohérents les calculs de Francis

Le deuxième exemple met en lumière la façon avec les élèves invalident des résultats mathématiques qui leur apparaissent incohérents. L'extrait suivant s'est déroulé dans une séance portant sur l'estimation. Le problème à résoudre était d'estimer en l'addition $152\,498 + 608\,947$. Au cours de la séance, les élèves se sont intéressés à la « vraie » somme au cœur du problème. Après que les élèves aient calculé $152 + 608$, l'enseignant demande aux élèves d'estimer la somme de $498 + 947$. Francis répond :

> **Francis :** Mille… mille cinq cents.
> **Enseignant** : Comment tu arrives à ça?
> **Francis** : Ben, sept plus huit, c'est 15 [L'enseignant écrit au tableau (voir Figure 4.59)].
> **Simon** : Mais là, il est en train de faire l'addition!
> **Enseignant** : Ah oui! Tu nous a dit 1500, comment tu arrives à ça?
> **Francis** : neuf plus quatre, c'est 13.
> **Enseignant** : ok, tu continues là-dessus, on va faire ça. [L'enseignant écrit au tableau l'addition de Francis (Figure 4.2)]
> **Francis** : quatre et neuf, ça fait 13 aussi.
> **Enseignant** : ok! Donc 13, et ça fait, 41?
> **Francis** : 4100.

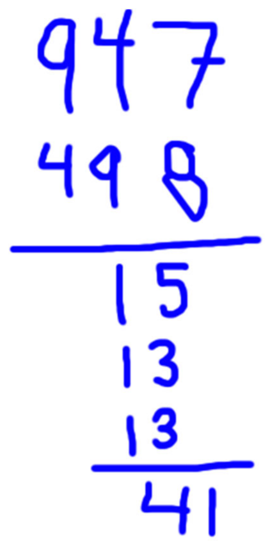


Figure 4.27 Calcul de Francis écrit par l’enseignant au tableau

Lilia, de son côté, propose de faire l’addition en faisant l’algorithme d’addition et trouve la réponse 1445. L’enseignant demande aux élèves d’identifier ce qui a été fait différemment dans les calculs de Francis et dans les calculs de Lilia. Des élèves parlent des retenues, certains parlent des centaines qui ont été oubliées dans le calcul de Francis, et d’autres soulignent qu’il aurait fallu avoir les unités, les dizaines et les centaines dans le calcul de Francis. En particulier, Noah explique :

> **Noah** : Il faut les dizaines, les centaines, les unités. Le 15 est bon, mais le 13, ce sont des dizaines, donc c’est 40 plus 90. Donc on rajoute un zéro [au premier 13] pour avoir 130. Ensuite, l’autre 13, vu que c’est des centaines, tu rajoutes deux zéros, donc 1 300.

Les élèves mettent ensuite ce calcul en lien avec le calcul de Lilia et trouvent la réponse à l’addition $152\,498 + 608\,947$.

4.3.4.4 Analyse de l'extrait sous l'angle de *Vérifier la cohérence*

Dans cet extrait, Francis propose que l'estimation de l'addition $498 + 947$ est 4100 en faisant une addition en colonne. De son côté, Noah revient sur le calcul, pointe ce qui n'est pas valide dans le calcul de Francis et le transforme pour offrir une autre réponse à l'addition. En d'autres mots, Noah considère le calcul de Francis comme incohérent puisqu'il cible ce qui n'est pas aligné avec l'addition en colonne que souhaite faire Francis.

Dans son intervention, Noah souligne ce qui, selon lui, ne correspond pas au calcul effectué par Francis, Il avance que « le 15 est bon, mais que le 13, c'est des dizaines » et le deuxième 13, « c'est des centaines ». Ceci lui permet de montrer que le calcul de Francis est incohérent avec le sens des nombres et les valeurs de positions. De la même façon, les mathématiciens s'intéressent à la cohérence des raisonnements et arguments desquels découle un résultat mathématique. Notamment, un mathématicien interviewé par Weber (2008) dit s'intéresser aux affirmations qui appuient un résultat mathématique en fonction de la signification de ce résultat mathématique. En ce sens, pour les mathématiciens, les résultats soumis et les idées qui l'appuient doivent former un tout cohérent. Dans le cas de Noah, il invalide le calcul proposé par Francis puisque celui est incohérent avec l'addition que veut faire son camarade et le sens des nombres utilisés.

Plus encore, l'intervention de Noah correspond à la façon avec laquelle les mathématiciens travaillent avec des résultats invalidés. Lorsque Noah souligne l'incohérence de l'addition $4 + 9 = 13$ avec les nombres en jeu, Noah ajoute que le calcul aurait dû être $40 + 90 = 130$ puisqu' « il faut les dizaines, les centaines et les unités ». D'une certaine façon, il reprend le calcul de Francis et le précise pour le rendre cohérent avec l'addition effectuée. Ceci s'aligne avec le travail des mathématiciens lorsque des résultats mathématiques proposés sont invalidés. Tel que le montre Lakatos

(1976), l’invalidation d’un résultat mathématique signifie qu’il peut être repris et (ré)exploré pour le rendre valide. En ce sens, les mathématiciens travaillent sur des preuves, des méthodes ou des concepts qui ont été invalidés et les précisent, les raffinent et les transforment pour les resoumettre à leur communauté. De la même façon, bien que le travail de Noah porte sur un calcul, il tente, comme le font les mathématiciens avec des preuves, des concepts ou des méthodes, de rendre meilleur le résultat mathématique invalidé. En particulier, il tente d’aligner le calcul de Francis avec le sens des nombres et de l’algorithme d’addition en colonne.

4.3.5 Retour sur l’analyse de la dimension validation (des) mathématique(s)

L’analyse de ces quatre composantes montre la façon avec laquelle les élèves s’intéressent à la validité des idées mathématiques soumises à la classe. Afin de boucler l’analyse de la troisième dimension du travail mathématique, une synthèse est ici offerte de chaque composante liée à la validation (des) mathématique(s). De plus, un tableau récapitulatif de chacune d’elle présente les exemples qui permettent d’appuyer l’analyse présentée ci-haut.

4.3.5.1 Utiliser des exemples

Comme les mathématiciens, les élèves trouvent des exemples qui ne se comportent pas tel que l’indique un résultat mathématique, et le propose comme contre-exemple à la classe. Ceci leur permet de rendre invalides des réponses et des affirmations soumises par d’autres élèves, mais offre aussi des pistes d’exploration pour retravailler les idées invalidées. En ce sens, les contre-exemples ne sont pas seulement utilisés pour invalider des résultats mathématiques, mais aussi pour les réexplorer et les rendre possiblement valides.

Tableau 4.10 Récapitulatif de l’activité *Utiliser des exemples*

<table>
<tr><th colspan="3">Utiliser des exemples</th></tr>
<tr><td colspan="3">Des exemples sont utilisés pour la validation (des) mathématique(s) de deux façons : (1) certains exemples qui correspondent au résultat mathématique proposé permettent de le considérer comme valide et (2) un exemple qui ne correspond pas au résultat mathématique est vu comme un contre-exemple et invalide le résultat proposé. Le contre-exemple oriente aussi le travail d’explorations mené pour raffiner le résultat invalidé.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Exemple 1</th></tr>
<tr><td>Description de l’extrait</td><td colspan="2">Simon a invalidé une proposition Rafa en trouvant un contre-exemple. Rafa a proposé à la classe que la division par deux donnait toujours un résultat impair. Simon est intervenu pour dire que 100 se divise par deux, donne 50, mais que 50 est un nombre pair. À la suite de son intervention, l’enseignant demande aux élèves de travailler sur la proposition de Rafa et Sabine en fait une nouvelle conjecture à propos de la division par deux.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l’extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l’activité</td><td>Les élèves se servent de contre-exemples pour invalider des résultats mathématiques proposés par leurs collègues de classe.</td><td>Simon propose le nombre 100 pour mettre à l’épreuve la proposition de Rafa. Il l’invalide puisque le nombre 100 divisé par deux donne 50, c’est-à-dire un nombre pair.</td></tr>
<tr><td>Les élèves effectuent un travail pour raffiner des propositions mathématiques invalidées en s’appuyant sur les contre-exemples trouvés.</td><td>À la suite du contre-exemple de Simon, les élèves retravaillent la proposition de Rafa et tentent de mieux la comprendre. Sabine propose une nouvelle conjecture en travaillant la proposition invalidée par Simon.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</th></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves en résolution de problèmes utilisent des exemples comme contre-exemples et invalident des résultats mathématiques proposés à la classe. Un travail est ensuite effectué à partir de ces contre-exemples pour raffiner la proposition mathématique invalide. De plus, les élèves montrent la validité de leurs affirmations mathématiques à travers les exemples qu’ils utilisent pour faire comprendre leurs résultats mathématiques.</td></tr>
</table>

4.3.5.2 Vérifier la rigueur

Comme les mathématiciens, ces élèves jettent un regard sur la validité d'affirmations mathématiques soumises en s'assurant que les calculs sont adéquats, que les stratégies sont appropriées et que les réponses sont justes. Pour ce faire, les élèves complètent parfois des arguments en mettant en lumière ce qui permet de justifier la rigueur d'un résultat mathématique. Dans le cas contraire, ils invalident le résultat mathématique et soulignent ce qui n'est pas suffisamment rigoureux selon eux, pour valider le résultat proposé.

Tableau 4.11 Récapitulatif de l’activité *Vérifier la rigueur*

<table>
<tr><th colspan="3">Vérifier la rigueur</th></tr>
<tr><td colspan="3">Des résultats mathématiques proposés sont revus pour s’assurer que les raisonnements et affirmations qui l’appuient sont justes et qu’ils supportent adéquatement le résultat soumis. La rigueur est un critère de validité utilisé pour s’assurer que les résultats sont argumentés convenablement, c’est-à-dire par des justifications et explications elles-mêmes valides.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Exemple 1</th></tr>
<tr><td>Description de l’extrait</td><td colspan="2">Francis invalide une représentation que Béatrice propose de la fraction deux cinquièmes parce que des lignes délimitant chacun des cinquièmes sont absents. Pour Francis, la représentation de Béatrice n’illustre donc pas la fraction deux cinquièmes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l’extrait</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mise en route de l’activité</td><td>Les élèves en résolution de problèmes invalident des résultats mathématiques parce que des façons de faire ne sont pas rigoureuses.</td><td>Francis souligne que des lignes devraient être tracées dans la représentation de Béatrice afin de mieux voir les cinq parties de sa forme. Autrement, la figure de Béatrice n’est pas une représentation de deux cinquièmes.</td></tr>
<tr><td>Les élèves s’approprient le critère de « rigueur » et leur façon de l’appliquer est parfois différente de leur camarade de classe.</td><td>Francis invalide la représentation de Béatrice alors que d’autres élèves lui disent qu’il n’est pas nécessaire de mettre des lignes.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Exemple 2</th></tr>
<tr><td>Description de l’extrait</td><td colspan="2">Claire retrouve les arguments qui permettent d’appuyer les calculs de Mathis. Elle compare la façon de calculer 227×4 de Mathis avec un autre calcul (laissé implicite) et affirme que la réponse de Mathis est bonne puisque c’est la même, et qu’il a en fait sauvé un calcul avec sa façon de faire.</td></tr>
<tr><td></td><td>Les élèves en résolution de problèmes</td><td>Exemple tiré de l’extrait</td></tr>
<tr><td>Mise en route de l’activité</td><td>Les élèves doivent parfois retracer les arguments qui leur permettent de s’assurer qu’un résultat mathématique est valide.</td><td>Claire commente la validité du résultat mathématique en retrouvant les arguments qui le rendent rigoureux.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens</th></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves en résolution de problèmes valident et invalident des résultats mathématiques en s’intéressant à leur caractère rigoureux. En s’appropriant ce que signifie le critère de « rigueur », les élèves commentent et fouillent les arguments, les stratégies et les réponses trouvées par leurs collègues et s’assurent qu’ils sont justes mathématiquement. Pour ce faire, ils doivent parfois expliciter et retracer les justifications qui appuient un résultat pour les vérifier.</td></tr>
</table>

4.3.5.3 Évaluer l'innovation

L'extrait présenté ci-haut illustre la mise en route de l'activité *Évaluer l'innovation* dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes. Plus précisément, les élèves jettent un regard sur le caractère innovateur de leurs propositions mathématiques en les comparant aux idées de leurs collègues. Ils rendent explicite ce qui distingue leurs propositions d'autres résultats mathématiques soumis, et, comme les mathématiciens, s'intéressent à l'innovation de résultats mathématiques afin de mettre en lumière que leurs propres résultats sont valides.

Tableau 4.12 Récapitulatif de l'activité *Évaluer l'innovation*

Évaluer l'innovation		
Un regard est jeté sur des résultats mathématiques proposés afin de s'assurer qu'ils contribuent à la communauté de manière significative. Un résultat est innovant s'il reprend des idées mathématiques différemment et exploite le potentiel de ces idées mathématiques.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Mia propose de représenter la même fraction (cinq quarts) que Simon a représenté dans quatre cercles avec chacun cinq parts. Elle soulève toutefois que sa représentation est « presque la même chose », mais dans des formes différentes. Mia dessine ensuite, et explique, à l'aide d'un contexte de pizza, qu'elle a dessiné quatre pizzas et qu'elle les a coupées en cinq, et qu'une personne prend une de ces pizzas.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves mettent en lumière comment leur résultat mathématique est significatif et différent d'autres propositions de leurs camarades.	Mia souligne que sa représentation de la fraction cinq quarts est dans une autre forme que la représentation proposée par Simon.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes s'intéressent au caractère novateur de leurs résultats mathématiques. Ils mettent de l'avant en quoi leurs stratégies, réponses, conjectures et arguments sont différents de ceux des autres élèves et insistent pour montrer le potentiel de leurs résultats mathématiques.		

4.3.5.4 Vérifier la cohérence

Comme les mathématiciens, les élèves valident et invalident des résultats mathématiques en fonction de leur cohérence. Ils s'assurent que les idées proposées pour supporter un résultat mathématique sont alignées avec la signification de ce résultat. De plus, les élèves valident des idées mathématiques soumises à la classe en explicitant les connaissances établies dans la classe qui sont cohérentes avec ces idées. Finalement, les élèves invalident parfois des résultats mathématiques parce qu'ils apparaissent incohérents, mais les reprennent et les fouillent pour les rendre valides.

Tableau 4.13 Tableau récapitulatif de l'activité *Vérifier la cohérence*

Vérifier la cohérence		
La cohérence est un critère qui participe à la validation (des) mathématique(s) de deux façons : (1) la cohérence correspond d'abord à l'harmonie d'un résultat avec d'autres résultats de la communauté. Un résultat évalué ne doit donc pas contredire des résultats déjà établis. (2) La cohérence correspond ensuite à la présence un fil conducteur clair et précis entre un problème, un résultat et les explications qui l'appuient.		
Exemple 1		
Description de l'extrait	Mathis montre que la représentation de la fraction un quart effectuée par Lilia est cohérente. Il explique qu'elle répond bel et bien au problème puisque le « un » et le « quart » se retrouvent dans la représentation. De plus, il explique que cette façon de représenter une fraction est cohérente avec les manières de faire connues de la classe.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves valident des idées proposées parce qu'elles sont cohérentes avec les questions et problèmes auxquels elles répondent.	Mathis explique que la représentation de Lilia est valide parce que le « un » et le « quart » s'y retrouvent.
	Les élèves valident des idées proposées parce qu'elles sont alignées avec des manières de faire établies dans la classe.	Mathis associe le numérateur et le dénominateur de la fraction un quart à la représentation de Lilia. Ceci est une méthode fréquemment utilisée par les élèves au fil des séances.
Exemple 2		
Description de l'extrait	Noah avance que le calcul de Francis pour l'addition $498 + 947$ est invalide. Noah souligne que certaines additions ne respectent pas le sens des nombres. Par exemple, son calcul $4 + 9 = 13$ devrait plutôt s'écrire $40 + 90 = 130$ afin d'être cohérent.	
	Les élèves en résolution de problèmes	Exemple tiré de l'extrait
Mise en route de l'activité	Les élèves invalident des résultats mathématiques puisqu'ils sont incohérents avec les sens des idées sur lesquelles ils portent	Noah invalide le calcul de Francis puisqu'il n'est pas aligné avec les dizaines représentées par 4 et 9 dans 947 et 498.
	Les élèves reprennent les résultats mathématiques invalidés pour les rendre cohérents.	Noah reprend les calculs de Francis et obtient 130 et 1300 pour chacun des additions en colonne.
Correspondances entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens		
Les élèves en résolution de problèmes valident et invalident des résultats mathématiques en s'intéressant à leur cohérence. Ils s'assurent que les idées, étapes et réponses soumises sont cohérentes avec le problème à résoudre et avec le résultat proposé. Si ce n'est pas le cas, les élèves invalident les résultats mathématiques en soulignant ce qui est incohérent. De plus, ils reprennent les résultats invalidés pour les rendre cohérents.		

CHAPITRE V

DISCUSSION ET CONCLUSION

À partir des analyses menées sur chacune des composantes des activités des mathématiciens, un portrait détaillé du travail des élèves en résolution de problèmes peut être tracé. En ce sens, ce chapitre vise à dégager des pistes de réponses à ma question de recherche :

> **De quelles façons sont mobilisées les activités des mathématiciens dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes?**

Ces pistes de réponse à ma question de recherche s'organisent en deux temps. D'abord, les caractéristiques de la classe en résolution de problèmes présentée à la Section 2.2 sont reprises. Elles permettent d'expliquer comment le contexte dans lequel les élèves sont placés oriente la mise en route de leurs activités mathématiques. Ensuite, deux aspects du travail des élèves sont dégagés et permettent d'insister sur les différences ou nuances qui émergent à travers les façons avec lesquelles les élèves mettent en route les activités des mathématiciens. Finalement, une dernière section présente les prolongements possibles à mon projet de recherche.

5.1 Contexte de résolution de problèmes comme cadre des activités mathématiques des élèves

À travers les analyses menées, les quatre caractéristiques de la résolution de problèmes cadrent les activités mathématiques des élèves. Ainsi, la façon avec laquelle les élèves mobilisent les activités des mathématiciens est orientée par *les interactions entre élèves, problèmes et solutions*, *la liberté mathématique*, *l'incertitude* et *l'autorité mathématique à la classe*. Dans ce qui suit, chaque caractéristique est reprise afin d'illustrer le rôle central qu'elle joue dans la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves placés en résolution de problèmes.

5.1.1 Interaction entre élèves, problèmes et solutions

Cette première caractéristique correspond aux échanges entre élèves à propos des problèmes et solutions avec lesquels ils travaillent. Ceux-ci ont l'opportunité de soumettre leurs idées à leurs camarades de classe, de proposer de nouvelles pistes d'exploration et d'(inter)agir avec les affirmations de leurs pairs. En ce sens, le contexte en résolution de problèmes offre un milieu dynamique où des discussions s'organisent autour des idées et questions des élèves. Plus précisément, les interactions entre élèves, problèmes et solutions orientent les activités de production (des) mathématique(s) des élèves puisque ceux-ci s'appuient sur les idées mathématiques de leurs camarades pour développer de nouvelles idées mathématiques et travaillent *ensemble* à fouiller celles-ci. De plus, ces interactions de la classe en résolution de problèmes cadrent les activités de communication (des) mathématique(s) parce que les élèves tentent de rendre claires leurs idées à la classe et participent aux discussions. Finalement, les interactions guident la validation (des) mathématique(s) parce que les élèves s'intéressent à la validité des idées mathématiques de leurs pairs.

5.1.1.1 Interactions et production (des) mathématique(s)

Lorsque les élèves développent des résultats mathématiques, ils le font souvent à partir des idées mathématiques proposées par les autres élèves. Ils les reprennent, les explorent et en formulent d'autres réponses, stratégies ou affirmations. En d'autres mots, les élèves produisent des mathématiques en travaillant les idées de leurs pairs. Par exemple, lors de la mise en route de l'activité *Concevoir des liens*, les élèves s'intéressent aux idées de leurs camarades de classe pour les mettre en relation avec d'autres concepts et développer de nouvelles explications (voir Tableau 4.2). Plus précisément, lorsque Simon donne un sens aux fractions équivalentes dans l'extrait présenté à la Section 4.1.2.1, il travaille à partir de la réponse de Jessie. Il met l'équivalence des fractions cinq dixièmes et dix vingtièmes en relation avec les suites numériques, et réinvestit ce lien pour formuler des explications. De la même façon, Sabine formule une nouvelle conjecture à partir d'une affirmation de Rafa lors de la mise en route de l'activité *Créer des mathématiques* (voir Tableau 4.1). Elle reprend une idée de Rafa, la fouille et en fait une nouvelle affirmation à propos de la division par deux (voir Section 4.1.1.1). Ceci offre une piste de réponse à ma question de recherche puisque le travail des élèves en production (des) mathématique(s) est encadré par les interactions entre élèves, stratégies et réponses. Ces interactions amènent les élèves à mettre en route les activités des mathématiciens puisqu'ils explorent les affirmations de leurs camarades de classe pour en tirer des conjectures, des explications ou des arguments.

D'un autre côté, les échanges de la classe amènent aussi les élèves à travailler de façon similaire aux mathématiciens, c'est-à-dire de manière à travailler avec leurs pairs. À travers les interactions entre élèves, problèmes et solutions, les élèves font avancer de manière commune les idées soumises, les stratégies proposées et les conjectures formulées, à l'instar des mathématiciens lors de séminaires, groupe de travail, discussions formelles ou informelles, etc. Notamment, lorsque les élèves *exploitent du symbolisme*, et plus précisément, *créent des symboles* pour représenter des idées, les échanges sont au cœur de leur travail (voir Tableau 4.5). Par exemple, à travers leurs discussions sur la représentation de la fraction cinq quarts, Francis, Jessie et William en viennent à élaborer une façon de représenter cette fraction (voir Section 4.1.5.3). Ici, chaque élève travaille sur la même idée, l'explore et alimente le travail mené dans la résolution de problèmes. Entre autres, Lilia et Simon questionnent les représentations proposées, et participent, comme Francis, Jessie et William, au développement de la représentation de la fraction cinq quarts. De la même façon, lors de *l'application de méthodes* par Louis à la Section 4.1.6.1, celui-ci révise l'algorithme de soustraction que souhaitait aussi effectué Francis (voir Tableau 4.6). D'une certaine façon, Louis n'apporte pas de nouvelles idées à la classe, mais il travaille *avec* (les idées de) Francis pour contribuer à la résolution de problèmes. Tout ceci montre que les interactions entre élèves, problèmes et solutions offrent aux élèves de faire avancer la résolution de problèmes ensemble, en discutant des méthodes utilisées, des stratégies développées, des réponses proposées, des conjectures formulées, etc. Ceci signifie que les activités des mathématiciens liées à la production (des) mathématique(s) sont aussi mises à profit pour la collaboration chez les élèves placés en résolution de problèmes. Le travail des élèves se fait de manière conjointe afin de faire avancer la résolution de problèmes et s'aligne par le fait même au travail des mathématiciens qui, ensemble, font avancer les connaissances de leurs communautés.

5.1.1.2 Interactions et communication (des) mathématique(s)

La communication (des) mathématique(s) est aussi encadrée par les échanges entre élèves placés en résolution de problèmes. Les élèves communiquent des idées mathématiques de manière à participer aux discussions de la classe, c'est-à-dire en tentant de rendre clairs les affirmations, stratégies, arguments et conjectures qu'ils offrent à leurs camarades et à l'enseignant. Entre autres, ceci amène les élèves à *Structurer leurs propos mathématiques* (voir Tableau 4.7). Par exemple, lorsque Mirka explique le travail qu'elle et Danaé ont effectué pour résoudre le problème présenté à la Section 4.2.1.1, l'élève rend clair le travail qui leur a permis de trouver une solution. Ceci lui permet d'entrer en interaction avec les autres élèves du groupe. De la même façon, c'est aussi dans le but d'échanger avec leurs camarades de classe que les élèves en résolution de problèmes *utilisent des outils de communication mathématique*. Par le symbolisme, un vocabulaire précis et des exemples de nombre et de formes, les élèves peuvent faire part de leurs réponses, stratégies et conjectures aux autres élèves de la classe et entrer en interaction avec eux. Tout ceci amène une piste de réponse supplémentaire à ma question de recherche puisque les interactions de la classe encouragent les élèves à rendre disponibles, de façon similaire aux mathématiciens, leurs idées mathématiques au reste du groupe.

5.1.1.3 Interactions et validation (des) mathématique(s)

Les interactions entre élèves, problèmes et solutions orientent aussi le travail des élèves en validation (des) mathématique(s). Comme les élèves ont accès aux idées mathématiques de leurs camarades de classe, ils ont la possibilité de commenter la validité de ces idées. En d'autres mots, les élèves mettent en route des activités liées à la validité des idées mathématiques de la classe en s'intéressant aux affirmations de leurs collègues. Par exemple, les élèves ont la possibilité de *vérifier la rigueur* des idées soumises à la classe (voir Tableau 4.10). Notamment, c'est parce qu'il y a interaction dans la classe que Francis commente la représentation de la fraction deux cinquièmes que fait Béatrice (voir Section 4.3.2.1). À travers les interactions de la classe, la figure dessinée par Béatrice devient disponible à la classe qui peut la commenter et justifier sa validité ou son invalidité. De la même façon, lorsque Simon trouve un contre-exemple lors de la mise en route de l'activité *Utiliser des exemples,* il invalide une affirmation de son camarade de classe (voir Tableau 4.10). En ce sens, pour répondre à ma question de recherche, les interactions entre élèves, problèmes et solutions amènent les élèves à mobiliser des activités de validation (des) mathématique(s) des mathématiciens puisqu'ils ont accès aux idées de leurs pairs, s'y intéressent, les questionnent et s'assurent de leur validité.

Plus encore, la validité des idées mathématiques est aussi établie à travers les interactions des élèves, à l'instar du travail de validation chez les mathématiciens. En ce sens, les élèves mettent en route des activités de validation (des) mathématique(s) en échangeant à propos de ce qui leur semble valide, ou non. C'est le cas de Mathis lorsqu'il *vérifie la cohérence* de la représentation de la fraction un quart effectué par Lilia puisqu'il entre en interaction avec la classe pour valider la réponse de Lilia (voir Tableau 4. 12). Entre autres, après son intervention, Lilia intervient pour dire que sa représentation est erronée et représente plutôt la fraction un cinquième. De son côté, Claire appuie la dernière intervention de Lilia avant d'expliquer sa propre représentation de la fraction un quart (voir Section 4.3.4.1). De la même façon, lorsque Francis explique que la représentation de Béatrice n'est pas rigoureuse, d'autres élèves interviennent pour dire qu'elle est valide et permet bel et bien d'illustrer la fraction deux cinquièmes (voir Section 4.3.2.1). Tout ceci montre que la validité des idées mathématiques de la classe est déterminée à travers les interactions de la classe, de la même façon que les discussions et échanges des mathématiciens contribuent à établir la validation d'idées mathématiques dans leurs propres communautés.

5.1.2 Liberté mathématique

La deuxième caractéristique de la classe en résolution de problèmes est la liberté mathématique. Ceci signifie que les élèves ont la possibilité de (et sont encouragés par l'enseignant à) contribuer au travail mathématique de la classe sans indications rigides à propos des idées à travailler ou de la façon de les travailler. Les élèves ont ainsi l'opportunité d'emprunter diverses pistes d'explorations, différents moyens de communication ou encore, plusieurs façons de valider des idées mathématiques. Toutefois, cette liberté est *mathématique*, c'est-à-dire que les élèves ont aussi la responsabilité de (1) contribuer à l'avancement des idées mathématiques et (2) de montrer la pertinence de leur propre façon de travailler. En d'autres mots, les élèves participent à la résolution de problème en explorant à leur guise différentes idées, mais ont aussi un devoir de montrer comment leurs idées et manières de faire participent à l'avancement du travail mathématique. Ceci offre une piste de réponse à ma question de recherche puisque la liberté mathématique de la classe en résolution de problèmes les amène à mettre en route des activités mathématiques de façon semblable aux mathématiciens. D'une certaine façon, les élèves ont l'occasion de fouiller les idées mathématiques qu'ils veulent en plus de déterminer la façon avec laquelle ils explorent ces idées. De plus, les élèves ont à rendre clairs les choix mathématiques qu'ils font, ainsi que la pertinence de ces choix mathématiques. Les élèves ont aussi la possibilité de prendre position quant à la validité des idées discutées en classe ainsi que la responsabilité d'appuyer cette prise de position.

5.1.2.1 Liberté mathématique et production (des) mathématique(s)

Comme mentionné plus haut, les élèves en résolution de problèmes ont accès aux idées de leurs camarades de classe à travers les interactions de la classe. La liberté mathématique s'ajoute à ceci et offre aux élèves de produire des mathématiques à partir des idées mathématiques qui les intéressent, et ce, dans le but de participer à la résolution de problèmes. Ceci signifie que les élèves ont l'occasion d'explorer les idées mathématiques qui leur paraissent porteuses pour l'élaboration de réponses, stratégies et conjectures. Par exemple, lors de sa *pose de problème*, Mathis s'intéresse de lui-même à une réponse d'Audrey et Fanny et interrompt les discussions de la classe pour explorer davantage cette réponse (voir Tableau 4.3). Dans ce cas-ci, l'enseignant[10] n'a pas demandé aux élèves de commenter la réponse et Mathis a saisi l'opportunité de fouiller une idée mathématique de la classe. De la même façon, lorsque Simon *étudie*

---

[10] Tel que mentionné au Chapitre 3, l'enseignant est ici un chercheur-enseignant en contexte de Teaching Experiment.

des exemples de rectangle pour préciser une affirmation de Jessie à la Section 4.1.4.3, il intervient à propos d'une idée de sa collègue sans indications de l'enseignant. En d'autres mots, il arrive que les élèves fouillent une affirmation mathématique parce qu'ils ont la liberté de le faire et ceci s'aligne à la libertée dont bénéficient les mathématiciens dans leurs travaux de recherche[11].

De plus, ces deux exemples montrent que les élèves prennent en charge l'avancement des idées mathématiques de la classe, de façon similaire aux mathématiciens et tel que le demande la liberté mathématique. Dans les deux cas décrits ci-haut, les élèves contribuent à faire avancer la résolution de problèmes, d'abord en soumettant une curiosité et ensuite, en précisant une idée de la classe. En ce sens, par la liberté dite mathématique, les élèves en résolution de problèmes sont encouragés à prendre en charge la résolution de problèmes, et doivent donc s'impliquer dans les idées mathématiques de la classe. De la même façon, les mathématiciens ont eux aussi la charge de faire avancer les idées mathématiques, de se questionner lorsqu'ils voient une occasion de le faire, de poser des conjectures lorsqu'ils trouvent une piste ou encore, de formuler des arguments lorsqu'ils ont une idée à défendre. D'une certaine façon, la liberté mathématique rapproche le travail des élèves en résolution de problèmes à celui des mathématiciens puisque les deux ont à s'impliquer dans l'avancement des idées mathématiques de leur communauté respective.

Plus encore, les élèves ont aussi la possibilité de choisir les façons avec lesquelles ils creusent des idées mathématiques. Lorsque l'enseignant cible un travail supplémentaire à effectuer, ou encore lorsqu'un élève décide de fouiller une

[11] Il est important de rappeler que l'enseignant structure tout de même le travail des élèves et que la liberté en classe placée en résolution de problèmes n'est pas une liberté totale, mais bien mathématique. Ceci signifie que les élèves ont à justifier la pertinence de leurs propositions et que l'enseignant intervient fréquemment pour demander des explications supplémentaires, ou encore, pour rediriger le travail des élèves lorsque celui-ci devient moins porteur pour la résolution de problèmes (voir Section 5.2.1).

affirmation de la classe, les élèves choisissent les moyens qu'ils prendront pour développer des résultats mathématiques. En d'autres mots, la liberté mathématique encadre les activités mathématiques des élèves puisque ceux-ci ont l'opportunité de s'intéresser à des idées sans pour autant utiliser une méthode donnée. Par exemple, lorsque l'enseignant demande à la classe de s'intéresser à l'affirmation de Rafa à la Section 4.1.4.1, Sabine se sert de différents exemples de nombres pour en dégager une nouvelle conjecture (Tableau 4.4). L'élève a ici l'occasion de choisir certains nombres qui lui semblent intéressants pour produire des mathématiques, c'est-à-dire qu'elle détermine la façon avec laquelle elle travaille l'affirmation de Rafa. De la même façon, pour répondre à un problème posé par Jessie, Francis se sert de symbolisme à la Section 4.1.5.1. De toutes les possibilités qui s'offraient à Francis, l'élève *exploite le symbolisme* pour produire une réponse à la parité du nombre 70. En ce sens, la façon avec laquelle les élèves mobilisent les activités de production (des) mathématique(s) est encadrée par la liberté mathématique parce que les élèves ne sont pas contraints dans le travail à faire sur les problèmes et idées de la classe. Ils peuvent donc s'intéresser librement aux idées mathématiques au cœur des discussions de la classe, à l'instar des mathématiciens qui bénéficient aussi de cette façon de travailler librement les problèmes, conjectures et méthodes qui les intéressent.

5.1.2.2 Liberté et communication (des) mathématique(s)

La liberté mathématique qui caractérise le travail des élèves en résolution de problèmes encadre aussi leur communication (des) mathématique(s). En particulier, la responsabilité des élèves relative aux détails et justifications de leur propre travail mathématique les amène en rendre clairs certains raisonnements derrière les résultats et compréhensions qu'ils divulguent à la classe. Ceci est mis en lumière dans le travail des élèves qui *mettent en évidence des manières de penser* parce qu'ils offrent parfois des précisions quant à leur façon d'entrer dans des problèmes (voir Tableau 4.8).

Notamment, lorsque Nadia offre des précisions à propos de sa réponse à la multiplication 12×18, elle rend explicite la nature des nombres avec lesquels elle a travaillé (voir Section 4.2.2.1). Ceci lui permet d'expliquer le travail mathématique qu'elle a pu faire en bénéficiant d'une liberté mathématique. Plus encore, Simon utilise deux exemples de rectangle pour montrer la pertinence de la conjecture qu'il a développée dans la Section 4.2.1.2. Ces outils de communication lui permettent d'illustrer le sens de son affirmation mathématique et ainsi mettre en lumière la contribution significative de sa conjecture (voir Tableau 4.9). D'une certaine façon, Simon a pu exploré de lui-même le découpage de rectangles en carrés, mais justifie, à l'aide de ses exemples de rectangles la signification de sa conjecture et donc, l'intérêt de son travail mathématique. En somme, la responsabilité des élèves qui découle de la *liberté mathématique* les amène à mettre en route les activités de communication (des) mathématique(s) de façon alignée avec le travail des mathématiciens puisque tous deux font part de leurs explorations et expliquent la pertinence de celles-ci.

5.1.2.3 Liberté mathématique et validation (des) mathématique(s)

La liberté mathématique dont bénéficient les élèves en résolution de problèmes encadre aussi la mise en route d'activités portant sur la validité des idées mathématiques proposées à la classe. Comme les élèves ont l'occasion d'intervenir librement sur les idées mathématiques de leurs camarades de classe, ils ont aussi l'opportunité, et la responsabilité, de prendre position par rapport à la validité de ces idées pour faire avancer la résolution de problèmes. Par exemple, lorsque Simon invalide l'affirmation de Rafa par un contre-exemple à la Section 4.3.1.1, il s'intéresse de lui-même à cette affirmation. Tout comme pour la production (des) mathématique(s), les élèves ont la possibilité d'agir avec les idées mathématiques de leurs collègues, mais cette fois-ci, pour commenter leur validité. De plus, comme la liberté mathématique vient avec une responsabilité d'expliquer et appuyer leurs idées, les élèves justifient leurs prises de position lorsqu'ils mettent en route des activités liées à la validation (des) mathématique(s). Par exemple, lorsque Claire s'intéresse à la rigueur du calcul de Mathis à la Section 4.3.2.3, elle explique ce qui lui permet de considérer comme valide la réponse de Mathis. En ce sens, la mise en route de l'activité *Vérifier la rigueur* est encadrée par la liberté mathématique puisqu'en prenant position, Claire est aussi responsable de justifier sa prise de position et de détailler les arguments qui rendent la réponse de Mathis rigoureuse. Ceci montre que la liberté mathématique amène les élèves à mettre en route des activités mathématiques de manière similaire aux mathématiciens qui ont, eux aussi, la possibilité et la responsabilité de valider et invalider des résultats mathématiques.

5.1.3 Incertitude

Dans la classe en résolution de problèmes, l'incertitude agit comme moteur important du travail des élèves. Les explorations que mènent les élèves sont alimentées par le doute alors que les élèves, encouragés par l'enseignant, souhaitent répondre aux interrogations soulevées par le problème posé et sa résolution. En d'autres mots, l'incertitude alimente explicitement la résolution de problèmes et force souvent même des explorations supplémentaires. De plus, le travail des élèves en résolution de problèmes est lui-même porteur d'incertitudes puisqu'à partir des idées de la classe, de nouvelles questions sont posées et de nouveaux doutes émergent. En ce sens, les élèves sont constamment plongés dans l'incertitude et s'y intéressent à travers la résolution de problèmes. Ceci offre une piste de réponse à ma question de recherche puisque cette caractéristique de la classe provoque la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves en résolution de problèmes qui produisent des mathématiques pour répondre et résoudre les doutes soulevés.

5.1.3.1 Incertitude et production (des) mathématique(s)

Parce que le doute est central dans le travail des élèves en résolution de problèmes, ceux-ci développent des résultats et compréhensions mathématiques afin d'amener des réponses aux interrogations de la classe. Par exemple, lorsque Francis se sert de symbolisme pour déterminer si le nombre 70 est pair, il tente de répondre à une incertitude posée par Jessie à propos de la parité du nombre 70 (voir Section 4.1.3.3 et Section 4.1.5.1). Dans ce cas-ci, l'incertitude encadre l'activité *Créer et exploiter du symbolisme* puisque Francis se sert de symboles de nombres afin de répondre à un doute soulevé par sa collègue. De la même façon, lorsque Jessie écrit la fraction dix vingtièmes pour répondre au problème « écrire la fraction cinq dixièmes », Jessie offre une façon de régler l'incertitude autour du problème (voir Section 4.1.6.3). Elle *applique une méthode* qui lui permet de générer des fractions équivalentes et trouve une façon de résoudre le problème soulevé. En d'autres mots, les élèves en résolution de problèmes produisent des mathématiques pour fouiller et résoudre les doutes soulevés par les questions soumises à la classe. L'incertitude apparait donc comme déclencheur de la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves en résolution de problèmes.

Plus encore, la place de l'incertitude dans la classe en résolution de problèmes amène aussi la mise en valeur du doute à travers le travail des élèves. Les élèves rendent explicites leurs interrogations en formulant des questions, mais aussi en soumettant des réponses non fixées à la classe. D'abord, lorsque les élèves *posent des problèmes*, ils formulent leurs propres doutes à leurs camarades de classe (voir Tableau 4.3). Par exemple, lorsque Fanny demande soulève ne pas être certaine de savoir si le nombre 70 est pair, son travail met en avant ses questionnements à propos de ce nombre. De plus, les idées mathématiques que développent les élèves sont soumises à la classe sous forme de propositions, voire même de conjectures. Par exemple, lorsque Sabine lit à la classe la conjecture qu'elle a développée en *créant des mathématiques*, elle la formule comme proposition en disant « je pense que » (voir Section 4.1.1.1). D'une certaine façon, les élèves sont amenés à produire des résultats mathématiques et à les proposer à la classe qui déterminera leur validité. En ce sens, l'incertitude (valorisée par l'enseignant en classe placée en résolution de problèmes) dans le travail des élèves les amène à formuler leurs questionnements ainsi qu'à expliciter, quelques fois, leurs résultats mathématiques sous forme d'hypothèses. De nouveau, ceci signifie que l'incertitude fait partie des sources à l'origine de la mise en route des activités mathématiques des mathématiciens par les élèves en résolution de problèmes.

5.1.4 Autorité mathématique à la classe

Les élèves placés en résolution de problèmes participent aussi à la validation des idées mathématiques proposées par les élèves. Ceci signifie que les élèves, accompagnés de l'enseignant, s'assurent que les réponses, stratégies et conjectures soumises à la classe sont appuyées adéquatement par des arguments mathématiques. En d'autres mots, les élèves sont impliqués dans la vérification des idées mathématiques développées et divulguées par leurs camarades de classe. Ceci offre une piste de réponse à ma question de recherche puisque cette dernière caractéristique de la classe en résolution de problèmes encadre les activités mathématiques des élèves et les rapproche du travail des mathématiciens. Les élèves sont amenés par l'enseignant à s'intéresser à la validité des idées soumises à la classe et à détailler ce qu'ils considèrent comme valides et/ou invalide.

5.1.4.1 Autorité mathématique et production (des) mathématique(s)

La responsabilité des élèves quant à la validité des idées mathématiques proposées à la classe les amène à développer des arguments pour appuyer leurs prises de position par rapport aux idées offertes à la classe. Ceci signifie que les élèves, lorsqu'ils (in)valident des idées mathématiques, produisent aussi des arguments qui supportent cette (in)validation. Notamment, lorsque Simon *établit un lien* entre les suites et les fractions équivalentes, il le fait pour montrer qu'une méthode utilisée par Jessie est valide (voir Section 4.1.2.1). Ainsi, il se sert du lien qu'il établit pour appuyer la validité du travail de Jessie. Plus encore, les élèves *exploitent* parfois *le symbolisme* pour appuyer des idées mathématiques (voir Tableau 4.5). Notamment, lorsque des élèves discutent du symbolisme à la Section 4.1.5.3, les élèves s'appuient sur le symbolisme pour valider et invalider des idées de leurs collègues. Par exemple, Francis dit : « Oui, elle a raison. Parce que s'il faut qu'elle colore cinq morceaux sur quatre […] » En ce sens, l'autorité mathématique oriente les activités de production (des) mathématique(s) puisque les élèves élaborent parfois des résultats mathématiques pour appuyer leurs prises de position quant à la validité des idées soumises à la classe. D'une certaine façon, l'autorité mathématique encadre les activités des élèves qui se retrouvent alignées avec celles des mathématiciens qui eux aussi produisent des arguments et des justifications à leurs idées.

5.1.4.2 Autorité mathématique à la classe et validation (des) mathématique(s)

Comme mentionné plus tôt, c'est la classe comme autorité mathématique des idées soumises qui amène les élèves à s'intéresser à la validité des affirmations de leurs camarades. En particulier, cette caractéristique de la classe en résolution de problèmes entraîne les élèves à préciser ce qui leur semble valide ou invalide dans les idées mathématiques de leurs camarades de classe. Par exemple, lorsque les élèves *vérifient la cohérence*, ils s'appuient sur ce critère particulier pour supporter leurs prises de position (voir Tableau 4.13). Entre autres, c'est ce que fait Noah lorsqu'il reprend le calcul de Francis et souligne comment celui-ci n'a pas respecté les valeurs de position de l'addition en colonne. Noah appuie sa validation (des) mathématique(s) en montrant ce qui est invalide dans le calcul de Francis et en donnant une raison de cette invalidation. De la même façon, les élèves s'intéressent aussi de manière particulière à la rigueur ou à la cohérence (voir Tableau 4.11 et Tableau 4.13). Par exemple, lorsque Mia met en avant le fait que sa représentation est innovante parce qu'elle n'est pas la même que Simon dans l'extrait 4.3.3.1, elle valide sa représentation mathématique en s'appuyant précisément sur l'innovation de sa réponse. En ce sens, l'autorité mathématique à la classe encadre le travail de validation des élèves puisque ceux-ci prennent position à propos de la validité des idées de la classe.et leur travail s'aligne alors à celui des mathématiciens.

Pour conclure cette section sur le contexte de résolution de problèmes, les caractéristiques de cet environnement semblent contribuer à la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves. Plus précisément, les activités des élèves sont similaires aux activités des mathématiciens à cause du cadre offert par le contexte de résolution de problèmes et ses quatre caractéristiques :

- *Interactions entre élèves, problèmes et stratégies* : les élèves entrent en interaction avec les autres élèves, les problèmes et les stratégies de la classe.
- *Liberté mathématique* : les élèves bénéficient de la possibilité de travailler avec les idées qui les intéressent, et ce, de la façon qui le désirent. Ils sont aussi responsables de montrer la pertinence de ces explorations.
- *L'incertitude* : les élèves fouillent les doutes soulevés à travers les problèmes et questionnements qu'ils rencontrent. Ils contribuent aussi à l'incertitude en formulant leurs propres interrogations.
- *Autorité mathématique à la classe* : les élèves s'intéressent à la validité des idées mathématiques de leurs collègues et prennent en charge la validation de ces idées.

5.2 Nuances et précisions

Les analyses menées ont aussi permis de mettre en lumière que certaines nuances sont à faire quant à la mobilisation des activités des mathématiciens dans le travail des élèves en résolution de problèmes. Bien que le contexte de résolution de problèmes semble orienter la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves, d'autres aspects de la classe en résolution de problèmes soulèvent des nuances à propos du lien entre le travail des élèves et celui des mathématiciens. En effet, certaines activités des élèves ne semblent pas être tout à fait alignées avec le travail des mathématiciens et montrent que le travail des élèves demeure intimement lié à la classe. Dans cette section, deux précisions sont formulées à propos du travail des élèves en résolution de problèmes : la place de l'enseignant et l'organisation de la résolution de problèmes.

5.2.1 Place de l'enseignant

L'enseignant, en résolution de problèmes, a une posture particulière. Celui-ci est en charge de proposer un problème initial, d'organiser le travail des élèves autour de ce problème, de structurer les échanges entre les élèves et de supporter et alimenter le travail des élèves au cours de la résolution de problèmes (Lampert, 1990b; Legrand, 1993; Proulx *et al*, 2019). D'une certaine façon, cette posture que prend l'enseignant en résolution de problèmes n'a pas d'équivalent chez les mathématiciens et les activités de ces derniers ne sont pas tout à fait mises en route de la même façon chez les élèves en résolution de problèmes. L'enseignant est en support au travail des élèves, et ses interventions forgent la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves.

D'abord, l'enseignant est parfois à l'origine de la mise en route des activités mathématiques chez les élèves. Bien que la *liberté mathématique* de la classe en résolution de problèmes offre aux élèves la possibilité de s'investir dans le travail mathématique, il arrive que l'enseignant cadre précisément ce que feront les élèves à travers les interventions qu'il fait et les questions qu'ils posent. Par exemple, il arrive que l'enseignant demande aux élèves de commenter la validité des idées mathématiques de leurs camarades de classe. C'est le cas, notamment, de la mise en route de l'activité *Vérifier la rigueur* par Nadia à la Section 4.3.2.2. L'élève s'est intéressée à la validité du travail suite à la demande suivante de l'enseignant « qu'est-ce que vous pensez du calcul de Mathis? ». Tout ceci offre une clé de compréhension importante aux façons avec lesquelles les élèves mettent en route les activités mathématiques en contexte de résolution de problèmes. L'enseignant a un rôle important à jouer dans le contexte de résolution de problèmes présenté comme *façon de faire faire des mathématiques* comme le font les mathématiciens aux élèves. C'est parfois à travers des interventions précises de l'enseignant que les élèves en viennent à mettre en route des activités mathématiques, et non seulement la résolution de problèmes en elle-même. En d'autres mots, ce n'est pas seulement parce que les élèves ont à résoudre un problème qu'ils mettent en route les activités des mathématiciens, mais aussi parce que l'enseignant alimente, questionne, encadre et oriente leur travail autour du problème donné.

Aussi, il arrive que l'enseignant partage des activités mathématiques avec les élèves. C'est le cas, notamment, de l'activité *poser des problèmes* (voir Tableau 4.3). Pour rendre claire la curiosité soulevée par des élèves, l'enseignant formule parfois explicitement un problème à résoudre, et ce, à partir d'une incertitude d'élève. L'exemple de Fanny, qui dit être incertaine que 70 est un nombre pair, montre la place que prend parfois l'enseignant dans la mise en route des activités des élèves. L'enseignant met en relation l'incertitude de Fanny avec une stratégie proposée plus tôt et formule un problème à partir de ce doute. Plus encore, l'enseignant synthétise aussi fréquemment des idées mathématiques des élèves, et complète ainsi la communication (des) mathématique(s) des élèves. Par exemple, lors du travail mené pour *créer et exploiter le symbolisme* et trouver une façon de représenter la fraction cinq quarts à la Section 4.1.5.3, les élèves ont utilisé le symbolisme pour illustrer leurs idées. À la suite de ceci, l'enseignant reprend les idées proposées et les rend claires à la classe. Entre autres, il rappelle la nature du tout d'une fraction, il met en relation la représentation trouvée avec l'expression « reste un » et met en avant le sens du symbolisme développé par les élèves. Tout ceci montre que l'enseignant fait partie de la mise en route des activités mathématiques des élèves placés en résolution de problèmes et mobilise, lui aussi, certaines activités des mathématiciens avec les élèves.

Il arrive aussi que l'enseignant guide le travail des élèves en résolution de problèmes. Entre autres, l'enseignant a la responsabilité de choisir le problème initial à proposer aux élèves, mais aussi de sélectionner, au cours de la résolution de problèmes, des explorations supplémentaires. Notamment, il reformule les curiosités qui lui semblent pertinentes pour le travail des élèves, et en laisse plusieurs de côté. Par exemple, lors du travail autour de la divisibilité par deux à la Section 4.1.1.1, Fanny a affirmé voir de nombreux « 3 » et « 6 » , dans les listes de nombres au tableau (Figure 4.1). À la suite de cette intervention, l'enseignant n'a pas demandé un travail supplémentaire aux élèves et ne leur a pas demandé de commenter cette idée. Ceci montre que l'enseignant oriente le travail des élèves en résolution de problèmes parce qu'il décide fréquemment ce qui est, ou n'est pas mathématiquement intéressant. Plus encore, il indique aussi parfois explicitement les façons avec lesquelles les élèves mettent en route certaines activités. Par exemple, lorsque Francis *exploite le symbolisme* pour déterminer que 70 est pair, l'enseignant met en lumière certaines idées et montre à Francis la signification de son symbolisme. Notamment, il mentionne que 60, écrit comme $30 + 30$ par Francis, est pair puisqu'il est formé de « deux groupes pareils ». Ici, l'enseignant oriente le travail de Francis puisqu'il insiste sur une idée particulière. Tout ceci montre que le travail des élèves en résolution de problèmes est contingent aux décisions et aux interventions de l'enseignant. Celui-ci oriente le travail de résolution de problèmes en indiquant des questions à fouiller et en soulignant des idées qui sont intéressantes pour le travail des élèves.

En somme, les activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes sont intimement liées aux interventions de l'enseignant. Celui-ci a une posture propre au contexte de résolution de problèmes alors que parfois, il déclenche, partage et oriente les activités des élèves. En d'autres mots, l'enseignant fait partie du travail mathématique des élèves en résolution de problèmes et contribue à encadrer les façons avec lesquelles les élèves mettent en route les activités des mathématiciens. Tel que mentionné plus haut, l'enseignant permet de distinguer le travail des élèves de celui des mathématiciens, car son rôle, tel que décrit dans cette section, n'a pas d'équivalent chez les mathématiciens. Alors que certains d'entre eux disent avoir des mentors ou des collègues qui les conseillent (Burton, 2004), la communauté de mathématiciens ne présente toutefois pas de figure de référence commune telle que celle de l'enseignant dans la classe de mathématiques. Toutefois, cette figure fait penser aux directeurs de recherche des étudiants aux cycles supérieurs en mathématiques. Ceux-ci agissent comme support pour le travail des étudiants et, comme l'enseignant en résolution de problèmes, déclenche, partage et oriente le travail mathématique. Notamment, il est chargé d'endosser, voire même choisir les problèmes à l'origine des travaux de recherche des étudiants aux cycles supérieurs. En particulier, cette façon de travailler chez les mathématiciens offre la possibilité de repenser la place de l'enseignant en résolution de problèmes et le rôle essentiel que joue l'enseignant dans la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves. Les quelques exemples décrits ici illustrent que l'enseignant, comme le directeur de recherche, est nécessaire afin de structurer, orienter et alimenter le travail des élèves. Le rôle de l'enseignant apparait ainsi central au contexte de résolution de problèmes et participe, tel que les quatre caractéristiques de la résolution de problèmes abordées à la section précédente, à l'encadrement du travail des élèves placés dans cet environnement.

5.2.2 Organisation de la séance de résolution de problèmes

La façon de mener la résolution de problèmes amène aussi les élèves à travailler de manière un peu différente les idées mathématiques de la classe. La structure de la résolution de problèmes influence les activités mathématiques des élèves parce que ceux-ci sont d'abord tous amenés à travailler sur un même problème au début de la séance. Ensuite, les vives discussions à propos de leur résolution forcent les élèves à penser, sur le coup, à la façon avec laquelle ils rendront claires leurs idées à la classe.

Dans un premier temps, le travail des élèves en résolution de problèmes est orienté autour d'un même problème. Ceci implique que les élèves s'intéressent aux idées de leurs camarades de classe en ayant déjà une certaine compréhension de ces idées à travers la résolution d'un même problème. En ce sens, lorsque les élèves prennent position par rapport à la validité des affirmations mathématiques de leurs pairs, ils le font en étant familiers avec les idées centrales de ces affirmations. Par exemple, dans l'extrait de la Section 4.3.4.1, après que Mathis aie *Vérifié la cohérence* de la réponse de Lilia, Claire compare sa propre représentation de la fraction un quart avec la représentation qu'a effectué Lilia. D'une certaine façon, le travail de résolution qu'a fait Claire alimente le travail de validation qu'elle fait à propos de la croix de Lilia. Ceci illustre que les élèves travaillent sur un même problème, mais aussi qu'ils ont déjà des réponses à ces problèmes. Dans le cas des mathématiciens, ils ont rarement travaillé le même problème au même moment avant d'évaluer des résultats mathématiques. Ils sont considérés comme experts du domaine qui s'y rattache, sans toutefois avoir travaillé précisément sur les mêmes résultats mathématiques. Davis et Hersh (1981) abordent ceci en mettant en lumière que peu de mathématiciens s'intéressent aux mêmes objets mathématiques et que la validation (des) mathématique(s) se fait donc souvent par des gens qui connaissent le domaine sans connaitre les objets ou concepts au cœur des résultats à évaluer.

Dans un deuxième temps, les vives discussions à travers desquelles les élèves font la résolution de problèmes distancent aussi leur travail de celui des mathématiciens. Comme mentionné à la Section 4.2.1.3, les élèves présentent leurs stratégies de résolution et leurs réponses aux problèmes sans avoir eu le temps de préparer leur exposé. Cependant, l'absence de temps alloué pour la préparation de communication (des) mathématique(s) est propre au contexte de résolution de problèmes analysé dans ce projet, et n'est pas nécessairement caractéristique de la résolution de problèmes. La classe en résolution de problèmes demeure toutefois caractérisée par des interactions incessantes entre élèves, solutions et problèmes. Ceci implique donc que les élèves (ré)agissent constamment sur le coup et produisent des mathématiques sans avoir beaucoup de temps pour le faire. Par exemple, lorsque Jessie utilise une méthode pour trouver une fraction équivalente à la Section 4.1.6.1, l'enseignant la questionne pour savoir comment elle est certaine que dix vingtièmes est équivalent à cinq dixièmes. Dans ce cas-ci, Jessie hésite et ne sait quoi répondre, mais n'a pas non plus le temps de fouiller cette question.

De la même façon, lorsque les élèves commentent la validité des idées mathématiques soumises à la classe, ils le font souvent immédiatement après la communication de ces idées. Ils n'ont pas nécessairement le temps de s'attarder à la signification des idées, ou même, aux arguments qui leur permettent de prendre position en faveur ou en défaveur d'une affirmation mathématique. Il arrive ainsi fréquemment que les élèves disent être d'accord ou non avec des idées, sans toutefois être capables d'expliquer cette prise de position. Un mathématicien, mis à part dans un séminaire, n'oserait pas faire ceci. De manière similaire, lorsque Mia commente l'innovation de son résultat mathématique, elle le fait spontanément, sans s'attarder à cette idée et fouiller davantage en quoi son résultat est différent de celui de Simon (voir Section 4.3.3.1). Elle explique brièvement que sa représentation est dans une autre forme, sans rendre explicite ce qui la rend innovante pour la résolution de problèmes. De plus, le caractère « sur le champ » de la validation (des) mathématique(s) chez les élèves les amène aussi à s'intéresser à un seul critère de validité à la fois. Ils (in)valident ainsi des idées mathématiques uniquement en fonction de la rigueur, l'innovation ou la cohérence. Chez les mathématiciens, bien que la validation se fasse parfois « sur le champ » lors de conférences ou de discussions informelles, c'est souvent une combinaison de critères qui sont attentivement vérifiés pour la validation (des) mathématique(s) (Burton, 2004). Par exemple, des mathématiciens responsables de la révision d'un article ont l'occasion de fouiller la validité des idées écrites et de s'assurer qu'un ensemble de critères est vérifié.

En somme, la façon avec laquelle la résolution de problèmes s'organise en classe a un impact sur les façons avec lesquelles les élèves mettent en route les activités des mathématiciens. Entre autres, le travail autour des mêmes problèmes et le temps alloué pour ce travail illustrent le caractère spécifique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques. Bien que celle-ci soit proposée pour rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens, il demeure que la classe en résolution de problèmes a un fonctionnement qui lui est propre et qui la distingue de l'environnement de travail des mathématiciens. Notamment, l'organisation de la résolution de problèmes a une influence sur la mise en route des activités mathématiques par les élèves et la différencie même de celles des mathématiciens.

5.3 Prolongements

Alors que ce projet vise à explorer les liens entre le travail des élèves en résolution de problèmes et celui des mathématiciens, d'autres questions et réflexions émergent des analyses menées. Cette section vise à aborder des pistes d'explorations supplémentaires qui peuvent être dégagées de mon travail de recherche.

D'abord, mon projet s'appuie sur l'analyse du travail des élèves à travers un contexte précis de résolution de problèmes. Toutefois, tel que mentionné à la Section 2.2, il existe une multitude de façons de plonger les élèves en résolution de problèmes. En ce sens, il serait possible de voir comment la mise en route des activités des mathématiciens diffère à travers divers contextes de résolution de problèmes. Est-ce que des activités sont davantage mises en route d'un contexte à l'autre? Est-ce que d'autres nuances dans les liens entre travail des élèves et travail des mathématiciens sont mises en lumière? Ce travail offrirait ainsi un portrait plus large du travail des élèves en résolution, tout en apportant des précisions supplémentaires quant à la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves.

Ensuite, la compréhension des activités des élèves en lien avec les activités des mathématiciens est tirée ici de séances détachées temporellement des unes des autres. Les activités des élèves étaient ici vues comme des captures instantanées de la classe en résolution de problèmes, les séances ont été visionnées et analysées de manière indépendante de l'avancement mathématique des élèves. Ceci soulève la possibilité de s'intéresser à l'évolution des activités des élèves en contexte de résolution de problèmes. Tel que le mentionnent Lampert (1990b), Legrand (1993) et Liljedahl (2016), le travail de résolution de problèmes pour rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens en est un à long terme. En ce sens, il semblerait que les activités mathématiques des élèves ont le potentiel d'évoluer et se transformer au fil du temps. Il devient ainsi intéressant de tenter de développer un portrait à long temps des activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes. À travers ce genre de travail, il serait même possible d'étudier comment les activités mathématiques partagées par l'enseignant sont influencées par un travail de résolution de problèmes à long terme. Est-ce qu'une certaine autonomie est gagnée par les élèves plongés dans un environnement de résolution de problèmes à long terme?

Finalement, tel que mentionné plus tôt, l'enseignant a un rôle important à jouer dans le travail des élèves en résolution de problèmes et pourrait être mis en relation avec le rôle de directeur de recherche dans le cas d'études à la maîtrise ou au doctorat en mathématiques. Ceci offre une perspective supplémentaire aux activités mathématiques des élèves qui pourraient ainsi être mises en relation avec le travail des étudiants aux cycles supérieurs en mathématiques. Plus encore, en continuité avec les idées présentées dans Maheux *et al.* (2019), le travail des élèves pourrait être ici utilisé pour mieux comprendre le rôle et le travail des étudiants aux cycles supérieurs en mathématiques. Comme les mathématiciens ont le potentiel de mieux comprendre le travail des élèves en résolution de problèmes, ce dernier semble avoir le potentiel de mieux comprendre le travail des étudiants en formation mathématique.

APPENDICE A

LISTE DES PROBLÈMES OFFERTS AUX ÉLÈVES DANS LES SÉANCES ANALYSÉES

1. Estimer la somme $152\,498 + 608\,947$
2.

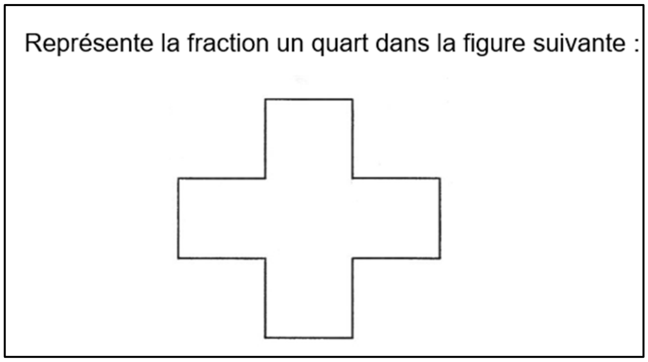
Une usine à crayons rejette 2 crayons sur 50 dans une journée. Combien de crayons sont conservés si l'usine produit 1000 crayons.

3. Estimer la réponse de $918 \div 4$
4.

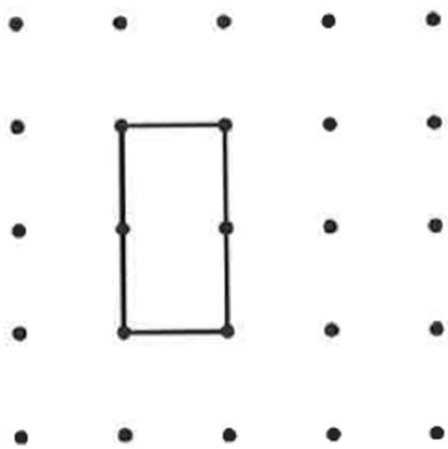
46, 70, 81, 106 Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2?

5. Écrire cinq dixièmes
6. Pour célébrer la fin des cours de ski, les moniteurs ont préparé un dîner pour leurs élèves. Trouve le nombre de sandwichs que compte la collection si 30 sandwichs correspondent au $\frac{5}{4}$ des sandwichs préparés.
7. Calculer 12×18

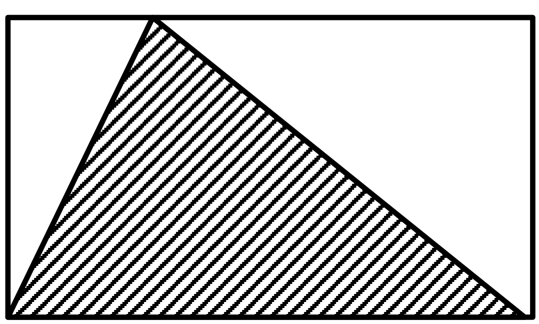
8.



9. Retrouve le tout si cette figure représente deux cinquièmes :



10. Montrer que le triangle hachuré représente la moitié du rectangle dans cette figure :

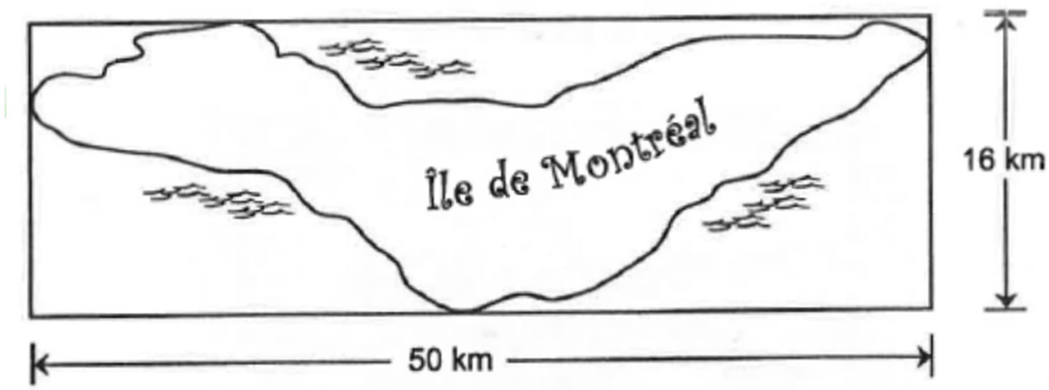


11.

Une petite île

L'île de Montréal s'inscrit dans un rectangle de 50 km sur 16 km

Toutefois, elle en occupe seulement les $\frac{5}{8}$.



L'îles-aux-Coudres, quant à elle, a une superficie de 25 km^2

Combien d'îles comme L'îles-aux-Coudres faudrait-il pour recouvrir la superficie de l'île de Montréal?

12.

Si l'aire d'un rectangle est 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

APPENDICE B

EXEMPLE D'UN TABLEAU D'ANALYSE D'UNE SÉANCE

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
2 :20	Henri	Henri : 8 milles, eumh, 800 000 CE : 800 000, comment tu as fait ça? Henri : C'est parce que 52, c'est plus proche que.... deux! Non, 152 c'est plus proche de 200 que de 100. CE : Donc ça va te donner 200 000? Henri : Ouais, et l'autre, c'est parce que c'est juste 8, à l'unité de mille, j'ai mis 600 000.	Créer des mathématiques Exploiter du symbolisme Structurer la communication	L'élève crée une méthode pour estimer la somme de ces deux nombres. L'élève raisonne et recombine des concepts comme la comparaison de nombre, les valeurs de positions, etc. Lorsque l'élève répond à la question « comment tu as fait ça », il retourne sur la production qui lui a permis de dire 800 000 comme réponse.
3 :45	Simon	CE : Qu'est-ce que ça veut dire ça, tu as regardé le 8? Est-ce qu'il y en a qui peuvent nous aider? Simon : Je ne comprends pas trop avec le 8, mais moi ce que j'aurais fait, j'aurais pris avec les centaines pour commencer… j'aurais arrondi aux centaines.	Exploiter le symbolisme Vérifier la cohérence	L'élève crée une méthode pour estimer la somme de ces deux nombres. L'élève raisonne et recombine des concepts comme la comparaison de nombre, les valeurs de positions, etc.

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
		CE : Donc là, ça donne quoi, si tu arrondis 608 947 aux centaines ? Simon : ça donne, 608 900. CE : pourquoi ? Simon : le 47 est plus bas que 50 donc tu mets pas un 10, tu.. CE : Tu le laisses comme il est là ? Simon : Ouais CE : et 152 498? Simon : ça donne 152 500. CE : Ok, et ça te donnait quoi comme réponse? Simon : proche de 750		Simon mentionne ne pas comprendre une certaine étape, celle de regarder le 8, dans la stratégie d'Henri. La stratégie n'est donc pas validée parce qu'une étape n'est pas comprise.
5 :00	Simon	CE : proche de 750 …milles. Comment tu fais pour savoir? Simon : dans le fond, vu qu'avec le 900, et qu'il faut le faire mental, avec le 900, ça serait trop compliqué, faut que tu mettes proche de 750 000.	Mettre en évidence des manières de penser	Ici, Simon communique pourquoi sa réponse est 750 000, il construit une justification à partir du contexte de calcul mental. D'une certaine façon, il expose ce qui l'a mené à faire les choix mathématiques qu'il a faits.
5 :35	Benoit	Benoit : Je ne suis pas d'accord avec Simon parce que moi, ce que je fais, c'est j'arrondis toujours au chiffre le plus gros	? validation (des) mathématique(s) ?	Benoit ne valide pas la stratégie de Simon, car il a une autre stratégie. La stratégie de Simon ne fonctionne pas aux yeux de Benoit parce qu'il a une autre stratégie qu'il considère comme plus adéquate.
5 :40	Benoit	Benoit : Dans ça, le plus gros, c'est 600 000, CE : Mais il est pas plus que 608 947	Créer des mathématiques Exploiter du symbolisme	L'élève crée une méthode pour estimer la somme de ces deux nombres. L'élève raisonne et recombine des concepts.

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
		Benoit : non non ! Le plus loin, là, c'est le 6, il est à la position des centaines de milles. Dans le fond, j'arrondis à ce chiffre-là, donc à côté c'est un 0, donc je mettrai 600 000, comme Henri. Pis l'autre, 152498, j'arrondis à 1, pis le 5, ça fait 2, donc je suis d'accord avec Henri.	Concevoir des liens Utiliser des outils de communication mathématique	la comparaison de nombre, les valeurs de positions, etc. Benoit met sa stratégie en relation avec celle de Henri au niveau de la réponse obtenue. Bien que sa stratégie soit différente de celle d'Henri, elle permet d'arriver aux mêmes nombres transformés puis à la même estimation. Lorsque Benoit mentionne pour la première fois qu'il regarde « le plus gros, 600 000 », le chercheur enseignant ne comprend pas tout à fait ce qu'il veut dire. Benoit se reprend donc en parlant de la position du nombre 6 (centaines de mille), qui représente 600 000. C'est un choix de vocabulaire précis. *Il y a une question de choisir/essayer*
6 :33	Lilia	Lilia : J'ai fait…eumh… ça m'a donné la même réponse que Henri.		
6 :50	Classe	CE : Mais là, Simon était pas d'accord lui avec la stratégie d'Henri… Il faut essayer de comprendre… est-ce que c'est possible que les deux réponses soient bonnes? *On entend des oui et des non* Simon : Les deux réponses sont quand même assez proches		Ici, les élèves sont bloqués entre les deux réponses d'estimation et tentent de comprendre en travaillant avec la vraie réponse. Certains élèves de la classe cherchent de nouvelles manières de travailler les nombres (nouvelle addition, calculer les nombres, le milieu des deux réponses).

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
		Henri : Si on additionne 498 et 947, je pense que ça va être proche de 800 000 Ariel : si tu additionnes les deux nombres, ça va donner la bonne réponse. Lilia : Ça va donner environ, dans le milieu de 750 000 et 800 000. Simon : La réponse réelle		
Longs moments d'échanges courts entre l'enseignant et les élèves. Ils discutent de la position de la réponse réelle (Est-elle plus proche de 800 000, ça ne peut pas être n'importe quoi)				
10 :08	Classe	Simon : Ça m'étonnerait que ça dépasse le 800 CE : Est-ce que ça peut dépasser 800? Kiliam : Moi, déjà, j'ai calculé 152 et 608, mais pas toute la réponse là, et ça va aller dans les 700 000.	Créer de nouvelles maths	En additionnant une partie des deux nombres, Kiliam crée de nouvelles mathématiques alors qu'on s'approche un peu plus de la réponse
11 :50	Rafa	CE : Mais là, tu as regardé des bouts, tu as pris 152 et 608. C'est pas du tout le même nombre, qu'est-ce qui te dit que ça marche? Tu as additionné 152 et 608, ça t'a donné 750 à peu près [calcul]. Rafa : il manque les centaines, unités dizaines. CE : ok, donc 152, c'est quoi? Rafa : C'est des unités de milles, des dizaines de milles et des centaines de milles.	Concevoir des liens *L'intuition vient de l'enseignant*	L'élève met en relation le nombre 152 et 152 000. Elle donne un sens et mobilise les valeurs de position pour expliquer le lien qui existe entre 152 et 152 000.
Long moment de discussion sur le googol, les nombres, le plus grand nombre, etc				

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
18 :15	Simon	Simon : Pour avoir la réponse finale, on pourrait juste additionner 498 + 947.	Poser des problèmes	Simon propose ici de résoudre l'addition 498 + 947 pour ensuite la combiner avec la somme 152 + 608. Ceci permettra d'avoir la « vraie » réponse de l'addition.
20 :15	Charles	Charles : Je suis d'accord avec la réponse de Simon. CE : pourquoi tu es d'accord Charles : Je sais pas	? Validation (des) mathématique(s) ?	
20 :45	William	Pourquoi il y a 760?	Poser des problèmes	L'élève demande d'où vient le 760 écrit au tableau
21 :55	Noah	La réponse, c'est 760 445		
22 :07	Fanny	Non, tu t'es trompé. C'est 761 445	?Validation (des) mathématique(s)?	Ici, l'élève ne valide pas la réponse de Noah en affirmant qu'il a fait une erreur et que sa réponse n'est pas bonne. Un critère de validité chez les élèves serait donc la réponse obtenue.
23 :25	Francis	CE : il manque donc de calculer 498 + 947. Comment on pourrait l'estimer ? Francis : mille… mille cinq cents CE : Comment tu arrives à 1500? Francis : Ben, 7 + 8 = 15	Exploiter le symbolisme	L'élève se réfère implicitement aux valeurs de position pour faire un calcul
23 :45	Simon	Simon : Mais là, il est en train de faire l'addition. CE : Ah oui, tu nous a dit 1500, comment tu arrives à ça?	?Critère de validité?	Ici, Simon remarque que Francis ne répond pas à la question d'estimation, donc que la stratégie qu'il développe ne permet pas d'obtenir l'estimation de 498 et 947.

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
24 :03	Francis	Francis : 9+3 = 13 CE : Ok, tu continues là-dessus… on va continuer, donc Francis : 4 et 9, ça fait 13 aussi. CE : Ok, donc 13, et ça fait? 41? Francis : oui… eumh, 4100	Créer des mathématiques Structurer la communication	Ici, une méthode pour estimer la somme est créée. On reconnait, dans le travail de l'élève, qu'il organise son addition en nommant les nombres dans l'ordre.
27 :21	William	En travail sur l'addition William : Monsieur, le calcul avec l'addition répétée, ce n'est pas bon. On ne rajoute pas deux zéros à la fin, c'est 41 la réponse. … Francis : ah non tu rajoutes un 0.		Une étape de l'estimation n'est pas validée, car les zéros ne peuvent être ajoutés pour former 4100. Il y a, là-dedans, la validation des mathématiques d'autrui, mais aussi de ses propres mathématiques
29 :55	Lilia	J'ai fait 947, parce que c'est plus gros, plus 498. 7+8, ça fait 15… (fait l'algorithme)	Concevoir des liens Utiliser du symbolisme	L'élève se sert de l'algorithme pour résoudre l'addition. Elle voit un lien entre l'addition demandée et l'algorithme d'addition pour trouver la somme cherchée. L'algorithme d'addition porte le sens de l'addition. On l'utilise pour représenter une somme, mais aussi pour calculer une addition à l'aide des valeurs de positions, des retenues.
31 :36	Lilia	1445, c'est proche du 1500	Concevoir des liens	L'élève rappelle que c'est proche de ce qui avait été estimé par Rafa un peu plus tôt.
31 :56	Louis	Louis : Il manque les retenues	Validation locale	Identification d'une étape erronée qui rend le calcul faux
32 :26	William	Lilia, dans son calcul, elle a compté les retenues sans l'écrire	Concevoir des liens	L'élève met en relation le 15-13-13 avec le calcul de Lilia. Il aborde les retenues.
33 :08	Simon	Simon : On a oublié les centaines		

Temps	Élève	Action-parole-geste de l'élève	Activités de la grille	Pourquoi cette activité?
33 :30	Rafa	Il faut les dizaines, les centaines et les unités. Le 15 est bon, mais le 13, c'est des dizaines, donc c'est 40 + 90. Donc on rajoute un 0 pour avoir 130. L'autre 13, vu que c'est des centaines, tu rajoutes 2 zéros, 1300.	Exploiter le symbolisme Vérifier la cohérence	Pour donner un sens à l'algorithme et au 15-13-13, l'élève utilise les valeurs de position qui lui permettent d'expliquer ce que signifient les 13.
35 :36	Mathis	La réponse, ce n'est pas 760 445 (au tableau, en pointant), c'est 761445. On a 760 qu'on avait calculé avec 152 et 609 et là, on a trouvé 1445 donc ensemble, la réponse c'est 761 445.	Concevoir de liens Utilise des outils de communication mathématiques	L'élève remet ensemble les deux réponses calculées, les réorganise L'élève, debout au tableau, fait explicitement référence à certains nombres. Il pointe le 760 445, pointe, parmi d'autres, 1445, et réfère à différents nombres au tableau qui ont été mobilisés et étudiés par la classe.
36 :50	Rafa	Rafa : Les retenues, c'est des unités. C'est pas 140 ou 1400, au lieu, c'est des unités. Il faudrait ajouter 5 + 2, donc c'est 17 en premier. En fait, on le fait sans retenue quand on le fait avec addition comme ça. Les retenues, elles sont déjà là quand tu fais l'addition répétée.	Concevoir des liens Exploiter le symbolisme	L'élève établit des liens en mobilisant le symbolisme, les retenues, les valeurs de position, etc.
42 :30	Simon	Quand on dit que c'est 13 dizaines, c'est comme si c'était 130 unités. 13 centaines, c'est la même chose que 1300 unités. C'est comme si on l'avait converti	Mettre en évidence des manières de penser	Ici, avec la conversion à la fin, l'élève utilise un mot pour représenter ce qui a été fait, il nomme explicitement ce qui a été fait comme étant de la conversion. (vocabulaire)

BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Villeurbanne : Université de Lyon, Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.

Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : SCÉREN-CRDP Académie de Lyon.

Beghetto, R. A. (2017). Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into non-routine problems. *ZDM*, *49*(7), 987-993.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, *7*(3), 2-8.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, US : Heinemann.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as" springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, 166-208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Ablex: NJ : Greenwood Publishing Group.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs : obstacles et conflits* (p. 41-63). Montreal : Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* La pensée sauvage Grenoble.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, *5*(1), 101-104.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétiens… aux situations didactiques. *Education didactique*, *6*(2), 103-129.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics* Springer Netherlands.

Burton, L. et Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 429-453.

Byers, V. et Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 259-275.

Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N*, *51*, 77-83.

Davis, P. et Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience* Mariner Books.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Goldberg, M. (1967). On the Original Malfatti Problem. *Mathematics Magazine*, *40*(5), 241-247. doi: 10.2307/2688277

Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: An empirical approach. Dans *Explanation and proof in mathematics* (p. 101-111). Springer.

Hofstadter, D. R. (1997). Discovery and dissection of a geometric gem. Dans J. King et D. Schattschneider (dir.), *Geometry Turned on: dynamic software in learning, teaching, and research*. Cambridge University Press.

Keisler, H. J. (1994). The hyperreal line. Dans P. Ehrlich (dir.), *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua* (p. 207-237). Springer.

Lakatos, I. (1976). Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.

Lampert, M. (1990a). Connecting inventions with conventions. *Transforming children's mathematics education*, 253-265.

Lampert, M. (1990b). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63. doi: 10.3102/00028312027001029

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères irem*, *10*(123-159).

Legrand, M. (1995). Mathématiques, mythe ou réalité, un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique. *Repères IREM*, (20).

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*, *25*(6), 660-675.

Liljedahl, P. (2004). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*. Theses (Faculty of Education)/Simon Fraser University.

Liljedahl, P. (2010). *Peter Liljedahl*. Récupéré de http://www.peterliljedahl.com/

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. Dans *Posing and Solving Mathematical Problems* (p. 361-386). Springer.

Livingston, E. (2006). The context of proving. *Social Studies of Science*, *36*(1), 39-68.

Livingston, E. (2015). The disciplinarity of mathematical practice. *Journal of Humanistic Mathematics*, *5*(1), 198-222.

Lockhart, P. (2009). A mathematician's lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form. *New York, NY: Bellevue Literary Review*.

Lockwood, E., Ellis, A. B. et Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(2), 165-196.

Lynch, A. G. et Lockwood, E. (2017). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 323-338.

Maheux, J.-F., Proulx, J., L'italien-Bruneau, R.-A. et Lavallée-Lamarche, M.-L. (2019). *Referring and proffering: An unusual take on what school mathematics is about* Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Misfeldt, M. et Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 357-373.

Mizoni, M. (2005). *Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts*. IREM de Lyon.

Moschkovich, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the learning of mathematics*, *27*(1), 24.

Neubrand, M. (1989). Remarks on the acceptance of proofs: The case of some recently tackled major theorems. *For the Learning of mathematics*, *9*(3), 2-6.

Orr, J. et Pearce, K. (2019). Interviewé par P. Liljedahl. Building Thinking Classrooms : An Interview with Peter Liljedahl.(prod.), Poincaré, H. et Newman, J. (1908). Mathematical creation. *Scientific Work and Creativity: Advice from the Masters*, *1*, 177-183.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, *22*(4), 405-435.

Proulx, J., Champagne, K., Dufault, A., Megroureche, C., L'Italien-Bruneau, R.-A. et Van Moorhem, A. (2019). *Enseignement des mathématiques par résolution de problèmes : Approche, fondements et illustrations*. Université du Québec à Montréal.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. Dans *Radical constructivism in mathematics education* (p. 13-51). Springer.

Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 191-217). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of'well-taught'mathematics courses. *Educational psychologist*, *23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Dans D. Grouws (dir.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). New York : MacMillan.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. *Mathematical thinking and problem solving*, 53-70.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Stanic, G. et Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dans R. I. Charles et E. A. Silver (dir.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (vol. 3, p. 1-22).

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. Dans *Radical constructivism in mathematics education* (p. 177-194). Springer.

Steffe, L. P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

Struik, D. J. (2012). *A concise history of mathematics* Courier Corporation.

Tall, D. (1980). The anatomy of a discovery in mathematics research. *For the Learning of Mathematics*, *1*(2), 25-34.

Thurston, W. (1994). On proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.

Towers, J., Martin, L. C. et Heater, B. (2013). Teaching and learning mathematics in the collective. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 424-433.

Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine If an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 431-459.

Weber, K. et Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 329-344.