UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE DE LA RÉSOLUTION DE SITUATIONS-PROBLÈMES PAR DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES : DIFFICULTÉS ET POTENTIALITÉS

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR

VICTOR MOUBOLI

NOVEMBRE 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je remercie profondément madame Nadine Bednarz, directrice de cette thèse, professeure émérite au département de mathématiques à l'Université du Québec à Montréal pour la richesse de son encadrement et son expertise exceptionnelle. Son investisement et son apport tout au long de cette thèse sont inestimables. En effet, j'ai bénéficié de précieuses orientations et de suggestions fort pertinentes. Merci Nadine pour votre contribution immense et votre soutien multiforme.

Mes sincères remerciements vont à l'endroit de monsieur Fernando Hitt, codirecteur, professeur au département de mathématiques à l'Université du Québec à Montréal pour sa contribution scientifique. Un grand merci sans borne à vous deux d'abord pour votre soutien financier, ensuite pour m'avoir aidé sans cesse à pousser les pions où il fallait en vue de l'aboutissement heureux de ce projet exigeant et exaltant. J'ai compris à travers vous que le domaine de la recherche et la dimension sociale sont fortement liés.

J'exprime chaleureusement ma profonde gratitude à l'endroit des membres du jury qui non seulement ont évalué cette thèse mais l'ont enrichie par leurs observations et suggestions judicieuses. Il s'agit de : monsieur Gérald Boutin, président du jury; madame Nadine Bednarz, directrice de recherche; monsieur Fernando Hitt, codirecteur de recherche; madame Claudine Mary, professeure (Université de Sherbrooke) et monsieur Jean-Claude Boyer, professeur (Université du Québec en Outaouais).

Je tiens à exprimer aussi mes sincères remerciements à la Direction du programme de doctorat en éducation de l'UQAM pour son soutien dans le cheminement de cette thèse.

Merci au professeur Claude Gaulin (Université Laval) pour son encadrement à la maîtrise qui m'a encouragé par la suite à poursuivre les études doctorales sans oublier

les professeures Marie Larochelle (Université Laval) et Anna Sierpinska (Université Concordia).

Que les professeures Caroline Lajoie et Mireille Saboya ainsi que les professeurs et professures du département de mathématiques de la Faculté des sciences de l'UQAM trouvent ici ma gratitude pour leur sincère collaboration. Un merci spécial à Gisèle Legault et Cynthia Lisée pour leurs conseils respectivement en bureautique et dans la présentation des références. Je n'oublie pas mes collègues Denisa, Madeleine, Mamadou Sané, Moévi et Rima dans la collecte des données. J'exprime toute ma reconnaissance et mes amitiés à Isabelle et Jean pour leurs encouragements et leur soutien constants.

Un grand merci à la direction de l'école secondaire où l'expérimentation a eu lieu avec les élèves. Mes pensées vont vers ces élèves qui ont été au cœur de cette recherche.

Que dire de l'apport de mes parents en particulier André Ounga qui m'ont soutenu sans cesse durant ma scolarité du primaire à l'université.

Enfin, mes meilleures pensées vont vers ma conjointe Alphonsine Ngombi et mes jumeaux et jumelles (Sandrine, Varnel, Danielle, Gracia, Hor et Lun) qui m'ont manqué durant des années et qui m'ont toujours encouragé à persévérer et à aller de l'avant. Je dédie ce travail à ma mère Rose Bouegni qui très tôt avait compris la nécessité de m'encourager à mettre mes pieds sur le chemin de la connaissance.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES v
LISTE DES FIGURES xi
LISTE DES TABLEAUX xiii
RÉSUMÉ xv
INTRODUCTION 1
CHAPITRE I
PROBLÉMATIQUE 5
1.1 Un questionnement initial portant sur les difficultés des élèves dans la résolution d'un certain type de situations-problèmes en mathématiques défini par le MELS 7
1.2 Analyse des choix institutionnels : une certaine façon de voir la situation-problème en mathématiques 15
1.2.1 Rôle des situations-problèmes dans le programme d'études du Québec . 15
1.2.2 Caractéristiques d'une situation-problème au sens institutionnel 18
1.3 Résolution de situations-problèmes (au sens du MELS) : quelques observations nous amenant à considérer ce que fait l'élève, ses potentialités 27
1.3.1 Quelques observations, provenant de ma pratique, en lien avec la résolution d'une situation-problème par des élèves identifiés en difficulté. 27
1.3.2 Quelques observations d'enseignants sur la résolution de situations-problèmes en mathématiques par des élèves en difficulté qui interrogent le type de situation proposée 31
1.3.3 Une exploration de la résolution d'une situation-problème autre par des élèves identifiés en difficulté : quelques observations montrant les potentialités de ces élèves 35
1.4 Portrait qui se dégage des recherches portant sur les élèves en difficulté et la résolution de problème en mathématiques : vers un recadrage du problème initial 42

1.4.1 Influence de l'idée qu'on se fait d'un problème et de la présentation de l'énoncé : éclairage des recherches et développements théoriques 43

1.4.2 Emprise du contexte 51

1.4.3 Mobilisation de multiples concepts et autres dimensions associées à la complexité 53

1.4.4 Élément temporel 54

1.4.5 Influence de différents types de situations et potentialités des élèves 57

1.4.6 Exploration de différentes situations et potentialités des élèves 63

1.5 Recadrage du problème de départ à la lumière des investigations préliminaires et de l'analyse des recherches/Objectif et questions de recherche 68

CHAPITRE II
CADRE THÉORIQUE 73

2.1 Perspectives prises par les chercheurs et intervenants dans les travaux menés auprès d'élèves en difficulté 74

2.1.1 Le modèle médical : des difficultés associées à une déficience 76

2.1.2 Le modèle lacunaire : une difficulté définie en référence à une norme 80

2.1.3 Vers une autre conception des difficultés et une mise en relation avec les conditions du milieu 86

2.1.4 Rapport entre milieu et connaissance: des balises importantes dans l'intervention auprès d'élèves identifiés en difficulté 91

2.1.5 Qu'est-ce qui se dégage de ces travaux aux fins de notre recherche? 95

2.2 Le concept de potentialités mathématiques 98

2.3 Le concept de situation-problème en didactique 105

2.3.1 Perspective historique autour du développement de la notion de problème dans le curriculum 105

2.3.2 La notion de problème en mathématiques : éclairage de la recherche en didactique 108

2.3.3 Émergence et développement de la notion de situation-problème 116

2.4 Qu'est ce qui se dégage pour notre recherche à la fin de ce cadre théorique? 127

CHAPITRE III
CADRE MÉTHODOLOGIQUE 129

3.1 Orientation globale de la recherche 129

3.1.1 Choix du "Teaching Experiment" (TE) : pourquoi? 131

3.1.2 Les composantes du "Teaching Experiment" 133
3.1.3 Quel rôle pour le chercheur? 136
3.2 Opérationnalisation de la recherche 137
3.2.1 Le choix de situations-problèmes : sur quelle base? 138
3.2.2 Un Teaching Expériment articulé sur l'expérimentation de ces situations 146
3.2.3 Modalités plus précises d'expérimentation 159
3.3 Les différentes sources de données 164
CHAPITRE IV
ANALYSE 167
4.1 Situation-recherche « Pavage de carrés » 169
4.1.1 Pavage de n'importe quel carré avec des dominos 169
4.1.2 Pavage de n'importe quel carré privé d'une case avec des dominos 176
4.1.3 Pavage avec des triminos 199
4.1.4 Évolution en lien avec les différentes variables introduites au fil du temps 218
4.1.5. Retour sur les recherches portant sur le pavage de carrés 224
4.2 Situation-problème « Pied de géant » 229
4.2.1 Résolution du problème initial du pied de géant 231
4.2.2 Autour du problème du panneau publicitaire 250
4.2.3 Comparaison des stratégies 254
4.2.4 Un retour sur ce qui se construit dans cette situation-problème 258
4.2.5. Retour sur les recherches portant sur le pied de géant 262
4.3. Analyse de la situation-problème « Défi climat » 268
4.3.1 Analyse de la dyade J et L dans la situation Défi climat (vont-ils pouvoir atteindre l'objectif de réduire de 1 million la quantité de CO2?) 271
4.3.2 Analyse de la dyade B et F dans la situation Défi climat 290
4.3.3 Analyse de la triade C, M, et R dans la situation Défi climat 307
4.3.4 Analyse de la dyade Y et M dans la situation Défi climat 321
4.3.5 Retour sur l'ensemble des résultats 329
CHAPITRE V

INTERPRÉTATION 341

5.1 Quelles potentialités manifestent les élèves identifiés en difficulté dans la résolution de différents types de situations-problèmes mathématiques? Retour sur notre première question de recherche.....342

5.1.1 Potentialités des élèves identifiés en difficulté : qu'est-ce qui ressort sur le plan du processus de résolution par les élèves?.....342

5.1.2 Un engagement des élèves dans la résolution de la situation.....343

5.1.3 Une variété de trajectoires.....345

5.1.4 Une variété de trajectoires à mettre en lien avec les conditions du milieu 351

5.2 À quelles difficultés les élèves sont-ils confrontés dans ces différentes situations? Retour sur notre deuxième question de recherche 364

5.3 Comment les caractéristiques des situations proposées viennent-elles interférer avec le processus de résolution par ces élèves? Retour sur notre troisième question de recherche.....374

5.3.1 Influence du contexte 374

5.3.2 Influence du type de situation 378

5.3.3 Influence des variables didactiques.....381

CONCLUSION 391

ANNEXE A –Planification de Sandra dans la situation-problème un voyage à Disney 403

ANNEXE B
Exemples de problèmes pour chercher.....405

ANNEXE C
Exemple de situation élaborée à partir des données collectées par les élèves (tirée de Mary et Theis, 2007) 407

ANNEXE D
Différentes situations proposées aux élèves s'appuyant sur une dimension expérimentale.....409

ANNEXE E
Exemples de situations-recherches.....411

ANNEXE F
Exemple de situation-problème: le casse tête (Brousseau, 1981) 413

ANNEXE G
Situation-recherche en classe (SRC) : le pavage (tirée de Grenier et Payan, 2003)..415

ANNEXE G-1
Teaching Experiment : le pavage d'un carré par des dominos 417

ANNEXE G-2
Teaching Experiment : le pavage d'un carré par des triminos..... 421

ANNEXE G-3
Teaching Experiment : le pavage d'un carré (conjectures formulées par des élèves)
..... 425

ANNEXE H
Situation-problème initiale : pied du géant (tirée de Rauscher et Adjiage, 2012, 2014)
..... 429

ANNEXE H-1
Teaching Experiment : pied du géant..... 431

ANNEXE H-2
Teaching Experiment : pied du géant (suite) 437

ANNEXE H-3
Teaching Experiment : panneau publicitaire..... 441

ANNEXE I
Teaching Experiment : défi climat..... 444

ANNEXE J
Formulaire de consentement 453

ANNEXE K
Déroulement de l'expérimentation..... 455

ANNEXE L
Formulaire d'information et de consentement destiné aux parents (participant mineur)
..... 457

RÉFÉRENCES..... 461

LISTE DES FIGURES

Figure Page

Figure 1.1 Taux de réussite par compétence en mathématiques au 3e cycle du primaire (à la CSDM) pour les années 2004-2006 (élèves ayant réussi avec les cotes A et B) 8

Figure 1.2 Taux de réussite au 3e cycle du primaire en 2004-2005 et 2005-2006 en mathématiques pour chacune des compétences, selon la cote obtenue (A, B ou C) 9

Figure 1.3 Moyennes de taux de réussite en mathématiques des élèves de 1re secondaire, par école, dans la compétence "Résoudre une situation-problème" de 2007 à 2012 10

Figure 1.4 Moyennes de taux de réussite en mathématiques des élèves de 1re secondaire avec cote EHDAA seulement par école, dans la compétence "Résoudre une situation-problème" 12

Figure 1.5 Comparaison du taux de réussite en moyenne des élèves EHDAA et non EHDAA par école de 2007 à 2012 13

Figure 1.6 Rôles des situations-problèmes dans le programme d'études du Québec 25

Figure 1.7 Différentes caractéristiques d'une situation-problème se dégageant de l'analyse des documents ministériels 26

Figure 2.1 Caractérisation d'un problème selon Lunkenbein (1985) 114

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 Principaux éléments qui ressortent des situations expérimentées dans les recherches menées avec des élèves en difficulté 68

Tableau 2.1 Concept de difficulté, vision de l'élève en difficulté/différents modèles. 97

Tableau 2.2 Critères de choix des problèmes et leurs rôles dans le programme d'étude québécois de 1900 à 2000. (Tiré et adapté de Lajoie et Bednarz, 2012). 107

Tableau 2.3 Différentiation entre les caractéristiques d'une SP et SR selon les recherches en didactique des mathématiques et les caractéristiques d'une SP selon le MELS 126

Tableau 3.1 Un exemple de situation, marquée ou non scolairement autour d'un même contenu mathématique 140

Tableau 3.2 Caractéristiques des trois situations retenues pour l'expérimentation 146

Tableau 3.3 Résultats des huit élèves au primaire et au secondaire 162

Tableau 3.4 Orientation globale et opérationnalisation de la recherche 165

Tableau 4.1 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré à l'aide de dominos 176

Tableau 4.2 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré privé d'une case avec des dominos (1^{er} temps) 197

Tableau 4.3 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré privé d'une case avec des dominos ($2^{è}$ temps) 198

Tableau 4.4 Synthèse des « mathématiques des élèves » aux différents temps de la tâche de pavage de carrés à l'aide de triminos. 217

Tableau 4.5 Trajectoires des élèves dans les différentes tâches de pavage 219

Tableau 4.6 Stratégies successives des élèves dans la résolution du problème de géant au moment 1 242

Tableau 4.7 Stratégies des élèves dans la résolution du problème de géant et du panneau publicitaire. 255

Tableau 4.8 Récapitulatif des trajectoires suivies par les élèves 330

Tableau 4.9 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du diagramme circulaire 332

Tableau 4.10 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse de l'histogramme ...334

Tableau 4.11 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du tableau « nombre de kilos récupérés, quantité de CO2 » 335

Tableau 4.12 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du tableau «nombre d'élèves, nombre d'employés» 336

Tableau 4.13 Stratégies des élèves dans l'analyse du tableau « gestes faits par chacun, quantité de CO2 économisée » 337

Tableau 4.14 Stratégies des élèves autour des arbres à acheter 339

Tableau 5.1. Les « mathématiques des élèves » déployées dans chacune des situations expérimentées 360

Tableau 5.2 Regard transversal sur les difficultés des élèves au regard du milieu dans chacune des situations expérimentées 373

Tableau 5.3 Variables didactiques identifiées dans les trois situations expérimentées 382

RÉSUMÉ

Depuis l'implantation du curriculum durant les années 2000, le programme d'études de mathématiques du Québec met l'accent sur la notion de situation-problème du début du primaire à la fin du secondaire. La compétence à résoudre des situations-problèmes y apparaît une compétence centrale et un enjeu important pour les élèves en difficulté confrontés ici à de multiples défis dans leur apprentissage. La présente thèse cherche à éclairer cette résolution de situations-problèmes par des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques, sous l'angle des potentialités que manifestent ces élèves et de leurs difficultés, lorsque confrontés à différents types de situations.

Dans le contexte du Québec, Lajoie et Bednarz (2012) ont analysé les critères de choix des problèmes et leurs rôles au fil du temps, faisant ressortir les éléments de rupture dans cette évolution et les différences entre problème et situation-problème, notamment sous l'angle du critère de complexité (Lajoie et Bednarz, 2016). Les concepts de problème et de situation-problème ont fait l'objet de nombreux travaux de chercheurs en didactique des mathématiques abordés dans des perspectives théoriques différentes (Arsac *et al*., 1991; Brousseau, 1983, 1998; Douady 1980, 1984; Houdement, 1999; Lajoie, Bednarz, 2016; Lunkeinbein, 1985; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). Leur analyse nous a permis de clarifier un cadre conceptuel pouvant servir à éclairer le choix de situations-problèmes faisant appel à la construction de connaissances ou au développement d'une activité mathématique par les élèves (nous parlerons davantage dans ce cas de situation-recherche).

Par ailleurs, le concept de difficulté d'apprentissage est abordé dans cette recherche sous trois modèles avec des pratiques qui leurs sont associées : le modèle médical, le modèle lacunaire et le modèle en termes de potentialités relatives à un certain milieu (au sens de Brousseau, 1988). Ce dernier modèle débouche sur deux visions mutuellement liées de la difficulté/erreur : d'une part, une difficulté associée à une connaissance viable localement (une connaissance en formation) et d'autre part, une difficulté à interpréter dans l'interaction de l'élève avec un milieu antagoniste (construction en développement au regard de conditions du milieu). Notre posture, tout au long de cette thèse, rejoint celle qui conçoit une difficulté en regard d'un certain milieu. Elle mise également sur le développement des potentialités mathématiques de l'élève dans cette interaction avec un milieu.

Pour aborder l'étude de la résolution de situations-problèmes par des élèves identifiés en difficulté, nous avons retenu une méthodologie de recherche, le Teaching Experiment, permettant une analyse en profondeur des potentialités de l'élève et de ses difficultés tout au long du processus de résolution, et ce sur un long temps. Cette approche permet de cerner celles-ci au regard de différentes situations et de leurs aménagements. Trois situations ont ainsi été choisies sur la base de quatre critères : (1) des situations plus ou moins marquées scolairement (2) dans lesquelles l'élève peut s'investir (nécessitant peu de prérequis) (3) de différents types (une situation provenant des situations-problèmes du MELS, une situation-problème autre, une situation-recherche) (4) référant à différents contextes (contexte mathématique, réaliste, fantaisiste). L'expérimentation a impliqué huit élèves identifiés en difficulté d'apprentissage en mathématique d'une classe régulière du début du secondaire, choisis sur la base de leurs résultats scolaires à la première étape de l'année scolaire. Elle s'est étalée sur 6 mois. Chacune des situations s'est étalée sur 3 à 4 semaines, et a pris place en dehors de la classe.

L'analyse des verbatims des séances et des productions des élèves nous a permis de mettre en exergue la richesse des « mathématiques des élèves » dans le processus de résolution des situations : recours à différentes stratégies et construits développés (prenant la forme de conjectures, concepts-en-acte et théorèmes-en- acte (Vergnaud, 1990, 2007)). Elle nous a permis également de cerner des difficultés des élèves au regard des conditions du milieu, certaines d'entre elles étant appelées à évoluer en lien avec ces conditions. Nous avons également montré comment les caractéristiques de ces situations et leurs aménagements viennent interférer avec le processus de résolution par ces élèves (le contexte, le type de situation, les variables didactiques).

Les résultats de cette recherche débouchent sur la nécessité d'aller plus loin face à un critère souvent mis de l'avant dans les curriculums sur la résolution de problèmes, celui de varier les problèmes proposés aux élèves. Il s'agit ici de mieux comprendre comment agit cette variation des situations proposées aux élèves sur leurs potentialités et difficultés.

Mots-clés : Résolution de situation-problème, élève en difficulté, Teaching Experiment, potentialités, difficultés.

INTRODUCTION

Il y a quelques années, des préoccupations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques m'ont animé lorsqu'étudiant à la maîtrise à l'Université Laval, j'envisageai d'entreprendre des études doctorales sur certaines questions vives en enseignement des mathématiques, telles que les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves du secondaire dans des activités mathématiques. Déjà, mes travaux à la maîtrise portaient sur différents types d'erreurs d'élèves en géométrie plane. Les « erreurs » d'élèves et leurs difficultés étant connexes, j'ai été amené à m'intéresser graduellement, dans le prolongement de ces recherches, aux difficultés des élèves, plus spécifiquement en résolution de problèmes. Bien qu'en didactique des mathématiques, les travaux des chercheurs aient migré des difficultés des élèves à la prise en compte des élèves en difficulté (EMF, 2006, 2009 et 2012), il n'en demeure pas moins que la vision positive de l'erreur dans la formation des connaissances mathématiques par l'élève (CIEAEM, 1988), ou encore une vision de la difficulté (Giroux, 2014) en lien avec un certain milieu (au sens de Brousseau, 1988) ont imprégné ces travaux. On mise dans ces travaux, notamment ceux menés en classe d'adaptation scolaire, sur le potentiel mathématique des élèves identifiés en difficulté (Giroux, 2013; Mary et Squalli, accepté). C'est dans cette perspective que nous avons abordé cette recherche doctorale portant sur la résolution de situations-problèmes en mathématiques par des élèves identifiés en difficulté, provenant de classes régulières du début du secondaire, et analysé les discours et les productions des élèves aux fins de nos travaux. En effet, les mathématiques que développent les élèves (les stratégies, les construits qu'ils déploient dans leurs processus de résolution) dans ces types de situation (et leurs

aménagements) témoignent de la richesse de l'activité mathématique des élèves et de leurs potentialités.

Dans le premier chapitre, nous revenons dans un premier temps sur le point de départ de notre questionnement : les difficultés des élèves dans la résolution de situations-problèmes du MELS. Puis nous faisons ressortir le cheminement qui s'est opéré au fil du temps en nous appuyant, d'une part, sur quelques éléments observés dans notre pratique d'enseignant de mathématiques au secondaire avec les élèves identifiés en difficulté d'apprentissage dans ces situations et, d'autre part, sur une exploration de leur résolution dans quelques situations-problèmes autres expérimentées en classe. Cette exploration est une première entrée dans la problématique de cette thèse, venant appuyer notre intérêt pour une étude des potentialités de ces élèves. Nous avons également voulu en savoir davantage, dans le milieu professionnel des enseignants, sur le portrait qu'ils tracent de la résolution de situations-problèmes par ces élèves, après quelques années d'implantation de la réforme du programme de mathématique au secondaire au Québec (MEQ, 2003). Cette entrée dans notre problématique par les enseignants et notre propre pratique, jointe aux travaux de recherche dans le domaine, nous permettra de montrer le recadrage qui s'est opéré au regard du problème initial, et d'introduire nos questions de recherche.

Le cadre théorique aborde une conceptualisation de la notion de difficulté et d'élève en difficulté à travers trois modèles sous-jacents à l'intervention auprès de ces élèves : le modèle médical, le modèle lacunaire et celui qui mise sur les potentialités mathématiques des élèves. Cette analyse débouche sur une conception de la difficulté et des potentialités, pensées en lien avec les conditions du milieu au sens de Brousseau (1988). D'inspiration constructiviste, cette conception nous permet de situer les fondements épistémologiques de cette recherche. De plus, ce deuxième chapitre relève les visions véhiculées par des chercheurs, au fil du temps, autour des concepts de problèmes, de situation-problème et de situation-recherche en didactique des

mathématiques, en faisant ressortir les caractéristiques des situations qui seront reprises dans le cadre de cette recherche et leurs fondements théoriques associés.

Le troisième chapitre justifie la pertinence d'adopter, en cohérence avec nos fondements épistémologiques, une approche de type « Teaching Experiment » (Steffe et Thompson, 2000) pour approcher cette étude sur la résolution de situations-problèmes par des élèves identifiés en difficulté, et ce sur un temps long. Nous y précisons les critères de choix des différentes situations retenues (au nombre de trois), le protocole élaboré pour chacune d'elles avec les aménagements proposés, et les raisons qui nous ont conduit aux choix posés au départ et en cours de route. Les modalités d'expérimentation ainsi que les critères de choix des élèves impliqués dans cette recherche y sont également explicités.

Dans le quatrième chapitre, nous analysons les « mathématiques des élèves » (Steffe et Thompson, 2000), à travers les stratégies qu'ils élaborent et leurs construits. Ces derniers prennent la forme de conjectures dans l'une des situations, et de concepts-en-actes et théorèmes-en-actes dans les deux autres (Vergnaud, 1990, 2007). Ces différents aspects témoignent des potentialités de ces élèves dans cette résolution. Cette analyse fait également ressortir quelques difficultés au cours des processus de résolution de ces situations.

L'interprétation des résultats obtenus, dans un dernier chapitre, nous permet de jeter un regard transversal sur les potentialités des élèves en lien avec les différentes situations proposées et le milieu antagoniste qu'elles mettent en place (Brousseau, 1988). Le type de situation, le contexte et les variables didactiques en jeu jouent ici un rôle important.

Nos travaux débouchent sur la nécessité de s'attarder davantage aux situations proposées aux élèves, et à l'analyse de leur variété, au regard du milieu et de la conjonction des différentes caractéristiques (type de situation, contexte, variables didactiques). Cette entrée sur la notion de variété de situations-problèmes trouve alors

un véritable ancrage pour comprendre les potentialités sur lesquelles elles ouvrent pour les élèves en difficulté.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Le problème de recherche étudié prend sa source, il y a maintenant plus de dix ans, dans un constat réalisé auprès d'élèves identifiés (par leur enseignant régulier) comme étant en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Nous travaillions alors, à l'automne 2006, avec 5 à 6 élèves inscrits dans les classes régulières de secondaire 2 à l'école secondaire Saint-Luc, une école de la Commission scolaire de Montréal (CSDM). Durant les cours de mathématiques, ces élèves sortaient de la classe et nous rejoignaient de manière à pouvoir être accompagnés dans la résolution des activités. Nous avions donc un rôle d'enseignant-ressource pour ces élèves dans leur apprentissage, notamment dans la résolution d'exercices et de problèmes, et par la suite de situations-problèmes[1]. Qu'avons-nous constaté?

Nous avons relevé, dans la résolution d'activités par ces élèves, des éléments touchant à leur compréhension de ce qui était proposé et à la manière dont ils présentaient leur démarche de résolution. Ainsi, ces élèves parvenaient à identifier adéquatement dans la tâche proposée les données en jeu et la, ou les, questions posées.

En revanche, nous avons au cours de ces périodes de travail avec ces élèves relevé les observations suivantes : les élèves dégageaient les données pertinentes, certes, mais ils avaient souvent de la difficulté à utiliser ces données pour s'engager dans une solution appropriée. De plus, ils avaient souvent besoin que je leur indique la méthode, ou le

[1] La réforme du programme de mathématiques au 1er cycle du secondaire a démarré en 2005, et le travail à partir de situations-problèmes en était alors à ses débuts.

modèle, ou la démarche à suivre pour présenter leur solution. Ainsi, les élèves me demandaient souvent la procédure à suivre pour résoudre le problème. Ces observations sont venues questionner mon intervention. Jusqu'où devais-je aller dans cette aide? Comme le mentionne si bien Conne (1999), la question est en effet de savoir : « jusqu'à quel point l'enseignant [doit] […] accompagner (si ce n'est suppléer) l'activité de l'élève » (p. 37). Comme le fait remarquer Julo cité par Lemoyne et Lessard (2003) : « nous avons toujours tendance à aider trop et […] cette aide se situe, presque toujours, du côté des procédures et non du côté des représentations » (p. 27). J'étais ainsi amené à m'interroger sur les difficultés de ces élèves et sur les manières de les aider dans la résolution de problèmes.

De plus, j'ai observé que ces élèves utilisaient peu un discours en mots pour présenter leur solution, appuyer leur raisonnement, la présentation des calculs et opérations sur leur feuille mobile ou au tableau suffisait comme solution, sans pour autant qu'il n'y ait de retour à la question du problème.

Dans la continuité de cette expérience de travail avec ce groupe d'élèves, j'ai voulu en savoir davantage sur la manière dont les élèves en difficulté pouvaient aborder la résolution de problèmes et, plus tard lorsque celles-ci sont devenues plus prégnantes dans le milieu scolaire, la résolution de situations-problèmes. Je cherchais ainsi à mieux comprendre leurs difficultés éventuelles dans ce domaine. Après quelques années d'implantation de la réforme du curriculum au Québec, quel était le portrait à l'égard de la résolution de situations-problèmes pour ces élèves? Que pouvait-on en dire? Avait-on des données à ce sujet sur les élèves en difficulté d'apprentissage?

1.1 Un questionnement initial portant sur les difficultés des élèves dans la résolution d'un certain type de situations-problèmes en mathématiques défini par le MELS

Nous avons cherché à avoir un portrait des élèves identifiés en difficulté face aux situations-problèmes introduites dans le cadre de la réforme du programme d'études. Le taux de réussite en résolution de situations-problèmes à la CSDM, pour l'ensemble des écoles, nous donne un premier indicateur global au regard d'éventuelles difficultés dans ce domaine[2]. Le choix de cette commission scolaire se justifie par le fait qu'elle est l'une des commissions scolaires importantes pour l'île de Montréal, qui regorge en son sein d'élèves provenant de tous les milieux sociaux-économiques et linguistiques et qui est confrontée à l'intégration, dans ses classes, de nombreux élèves dits en difficulté.

Nous avons analysé, plus spécifiquement, les taux de réussite dont nous pouvions disposer pour les élèves du primaire et du secondaire (il s'agit du bilan pour l'année) dans le but d'avoir un portrait des élèves en mathématiques et de leurs difficultés en résolution de situations-problèmes. Nous présentons dans les histogrammes ci-dessous quelques statistiques concernant les taux de réussite des élèves du 3^{e} cycle du primaire, pour l'ensemble des écoles[3] de la commission scolaire, dans les compétences résoudre une situation-problème (compétence 1), déployer un raisonnement mathématique (compétence 2) et communiquer à l'aide du langage mathématique (compétence 3), et ce au cours des années scolaires 2004-2005 et 2005-2006.

L'histogramme suivant montre, pour les années scolaires 2004-2005 et 2005-2006, soit quatre ans après la mise en place de la réforme au primaire[4], un taux de réussite (élèves

[2] Données non publiées et fourmies par la CSDM.

[3] En 2004-2005 et 2005-2006 on comptait respectivement 39346 et 37863 élèves au primaire à la CSDM, (CSDM 2007, p.6).

[4] La réforme du curriculum au primaire en mathématiques est entrée en vigueur dès 2000-2001 et a été implantée progressivement : au 1er cycle du primaire durant l'année 2000-2001, au 2ème cycle en 2001-2002 et au 3ème cycle en 2002-2003. Au moment où ces évaluations sont réalisées au 3ème cycle, la

ayant eu les cotes A et B) plus faible des élèves dans la compétence 1, résoudre une situation-problème, et ce même si ce taux de réussite augmente légèrement de 2004-2005 à 2005-2006. Ainsi, comme elle le relève elle-même, à l'époque, la CSDM (pour l'année 2005-2006) mentionne : « les élèves ont donc un peu plus de difficultés dans la résolution des situations-problèmes que partout ailleurs » (CSDM, 2007, p. 70).

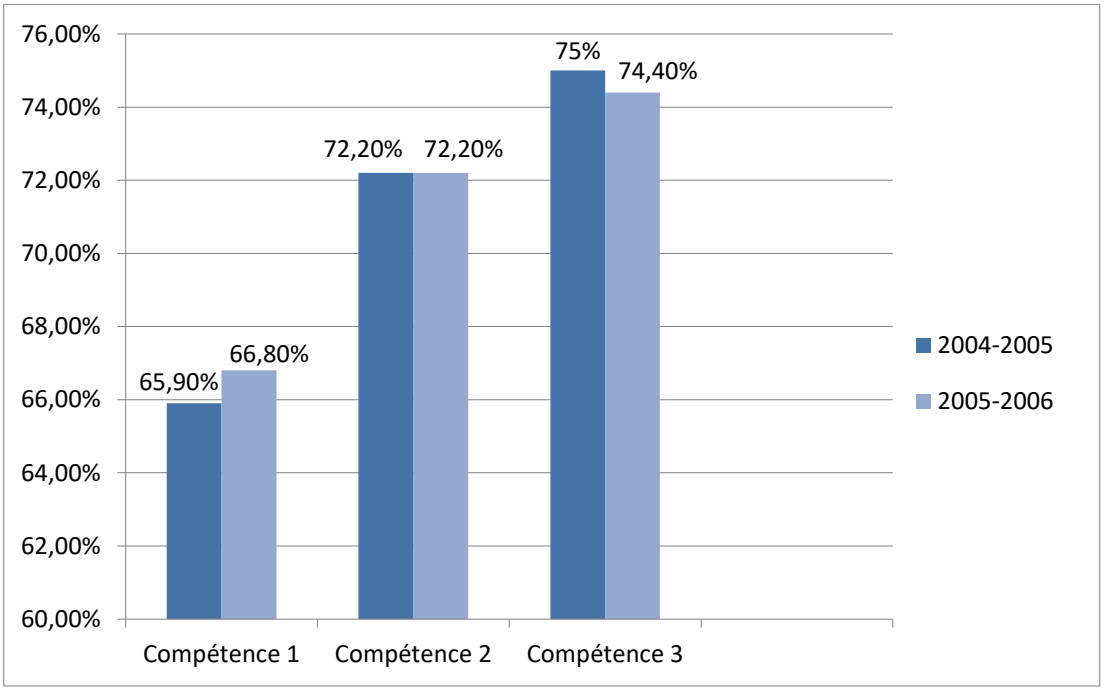


Figure 1.1 Taux de réussite par compétence en mathématiques au 3e cycle du primaire (à la CSDM) pour les années 2004-2006 (élèves ayant réussi avec les cotes A et B)[5]

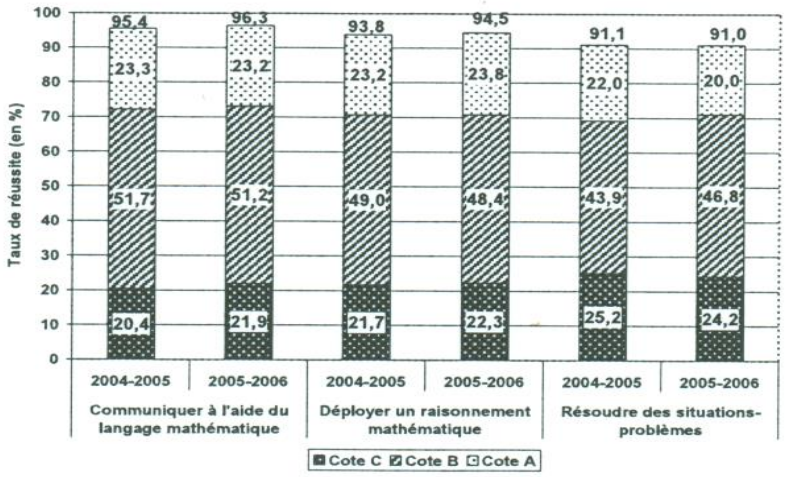
Allant dans le même sens, la comparaison des résultats (voir figure 1.2), au regard des différentes cotes attribuées, laisse apparaître que, pour la compétence à résoudre des situations-problèmes, moins d'élèves atteignent la cote A et la cote B que dans les

réforme est donc relativement récente (les évaluations ont été réalisées un an et deux ans après la mise en place de la réforme).

[5] Diagramme réalisé par nous à partir de données fournies par la CSDM.

autres compétences, et plus d'élèves obtiennent, pour la compétence à résoudre des situations-problèmes, la cote C que pour les autres compétences (CSDM, 2007, p. 70).

.



Légende :
Cote A : Compétence développée de façon remarquable
Cote B : Compétence développée
Cote C : Compétence à parfaire.

Figure 1.2 Taux de réussite au 3e cycle du primaire en 2004-2005 et 2005-2006 en mathématiques pour chacune des compétences, selon la cote obtenue (A, B ou C)

Ces différents résultats[7] nous montrent que la résolution de situations-problèmes ne va pas de soi pour les élèves. Relatif à l'ensemble des élèves, sans différenciation (que ces derniers soient en difficulté ou non), le portrait demeure toutefois global. Il ne nous renseigne pas directement sur les élèves identifiés en difficulté. Il nous laisse toutefois penser que si l'ensemble des élèves rencontre plus de difficultés dans la résolution de situations-problèmes que dans les autres compétences, il risque fort d'en être autant pour les élèves identifiés en difficulté.

[7] Nous ne disposons malheureusement pas de données concernant les années suivant 2005-2006.

Les moyennes de taux de réussite des élèves des classes régulières (cf. figure 1.3) de première secondaire de la commission scolaire de Montréal, provenant de 25 écoles[9], pour les cinq années, de 2007 à 2012, en compétence « résoudre une situation-problème » vont venir confirmer ces premiers résultats (CSDM, 2007). Elles nous donnent le portrait de la situation, sept ans après l'implantation de la réforme au 1er cycle du secondaire[10]. Ces classes ne comportent pas des élèves avec cote. Nous avons désigné les écoles par les lettres A jusqu'à Y.

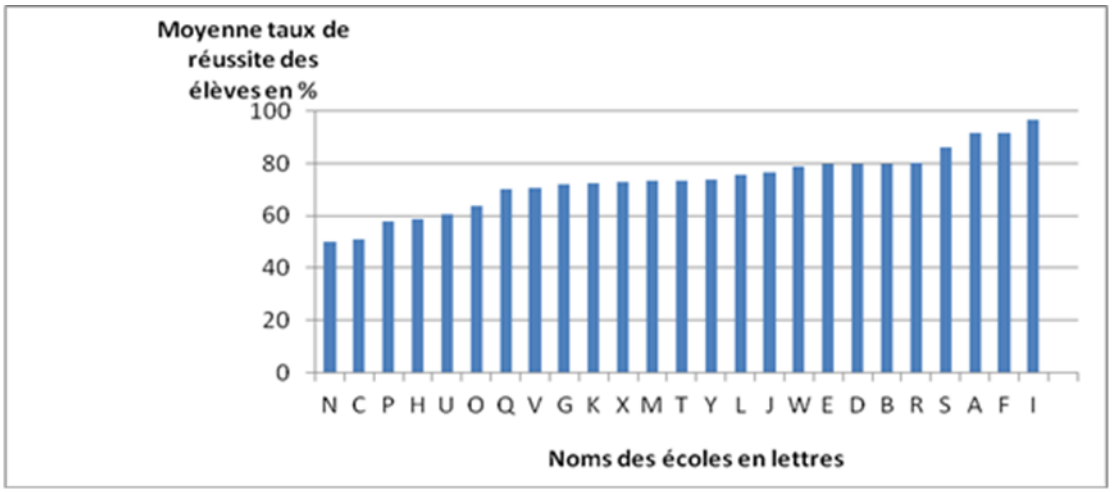


Figure 1.3 Moyennes de taux de réussite en mathématiques des élèves de 1re secondaire, par école, dans la compétence "Résoudre une situation-problème" de 2007 à 2012[11]

L'analyse de cet histogramme montre que, pour le niveau secondaire 1, au cours des années 2007-2012, les élèves de 5 écoles secondaires sur 25 (20 % des écoles) ont un

[9] Les données recueillies, à partir desquelles ont été faites ces analyses, sont celles des élèves : il s'agit, pour chaque élève, de la note finale (sur le bulletin émis en juin) dans la compétence résoudre des situations-problèmes. Cette note correspond à la moyenne pondérée des 3 étapes de l'année (20% étape 1; 20% étape 2; 60% étape 3). Le taux de réussite des élèves sans cote EHDAA (élèves handicapés en difficultés d'apprentissage et d'adaptation) de chaque école a été calculé de la façon suivante: nombre d'élèves sans cote EHDAA ayant réussi, divisé par le nombre total des élèves sans cote EHDAA par école. Le total des élèves sans cote EHDAA pour l'ensemble de 25 écoles varie de 2347 à 2882 élèves.

[10] Les résultats ont été obtenus auprès du Bureau de la planification institutionnelle de la CSDM.

[11] Diagramme réalisé par nous à partir de données non publiées et fournies par la CSDM.

taux de réussite en moyenne en mathématiques inférieur à 60 % dans la compétence résoudre une situation-problème, confirmant donc dans certains cas des difficultés importantes pour les élèves. Cette compétence ne semble pas aller de soi pour les élèves de ces écoles. La situation est plus dramatique pour les élèves identifiés en difficulté de ces écoles comme en témoigne l'histogramme ci-dessous (figure 1.4) qui présente les taux de réussite en moyenne pour la compétence 1 des élèves avec cote EHDAA[13] intégrés dans les classes régulières de ces 25 écoles de la Commission Scolaire de Montréal.

L'analyse de l'histogramme (figure 1.4) montre que pour le niveau secondaire 1, pour les cinq années, de 2007 à 2012, les élèves cotés EHDAA de 22 écoles secondaires sur 25 (88% d'écoles) ont un taux de réussite[14] en moyenne en mathématiques inférieur à 60% dans la compétence résoudre une situation-problème. Bien que l'on observe les potentialités des élèves dans certaines écoles (12% d'écoles, 3/25), la situation demeure préoccupante.

[13] EHDAA : élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage.

[14] Taux de réussite EHDAA = Nombre d'élèves EHDAA ayant réussi/nombre total d'élèves EHDAA.

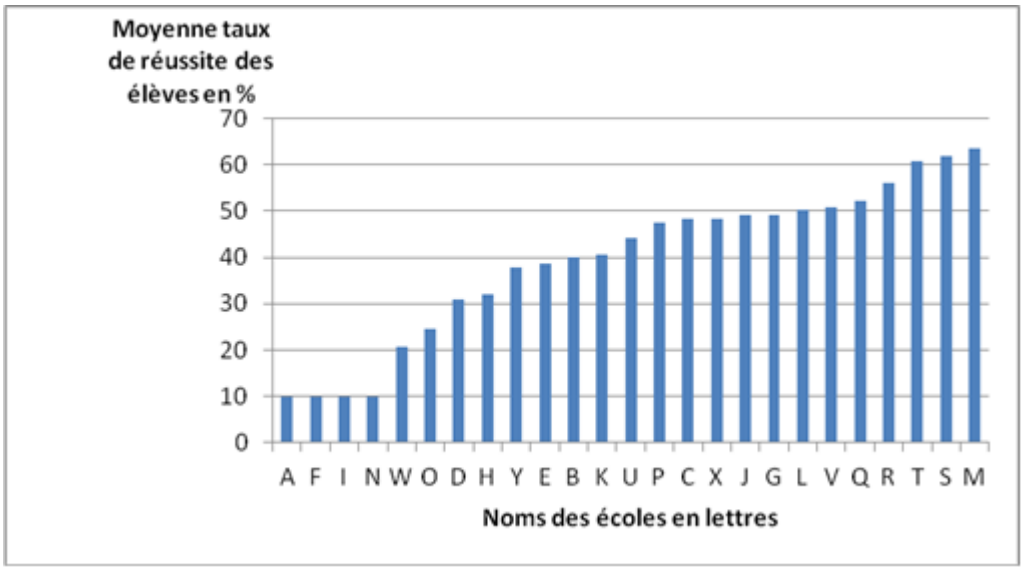


Figure 1.4 Moyennes de taux de réussite en mathématiques des élèves de 1re secondaire avec cote EHDAA seulement par école, dans la compétence "Résoudre une situation-problème"[15]

Comme on le remarque, les résultats précédents (figure 1.3) semblent montrer les potentialités des élèves dans certains cas (taux de réussite supérieur à 60 dans certaines écoles) et en même temps les difficultés que peuvent rencontrer certains élèves dans la résolution des mêmes situations-problèmes, comme en témoignent les taux de réussite de moins de 60% pour les élèves de certaines écoles en secondaire 1. Les résultats précédents (figure1.4) confirment ces difficultés chez les élèves EHDAA.

L'histogramme ci-dessous donne la comparaison de taux de réussite en moyenne par groupe d'élèves et par école de 2007 à 2012.

[15] Diagramme réalisé par nous à partir de données non publiées et fournies par la CSDM.

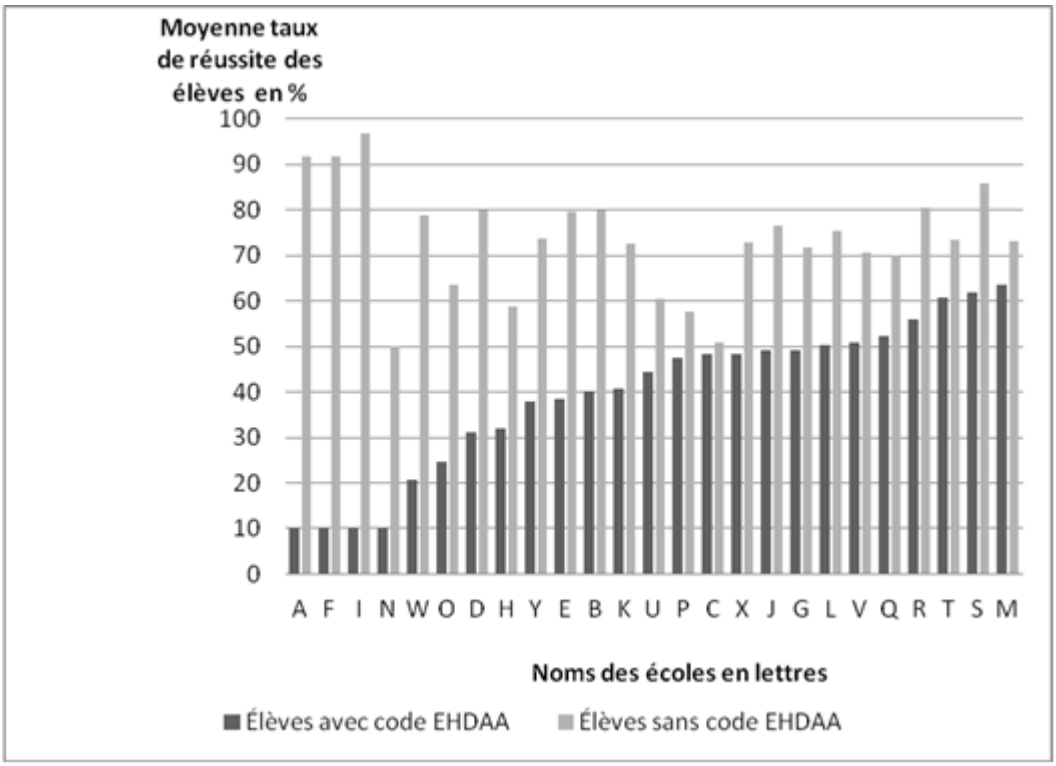


Figure 1.5 Comparaison du taux de réussite en moyenne des élèves EHDAA et non EHDAA par école de 2007 à 2012[18]

Cet histogramme montre une comparaison entre le taux de réussite moyen des élèves avec code EHDAA et ceux sans code EHDAA. Il fait apparaître un écart important entre ces taux de réussite moyens.

Nous nous devons, ceci dit, d'être prudent dans les conclusions, les écarts observés pouvant être liés à de nombreux facteurs : le milieu socio-économique de l'élève, la présence d'écoles de milieu défavorisé versus favorisé, mais aussi le système de notation utilisé, l'interprétation de la grille de notation par les enseignants, etc. On peut toutefois se demander à la lumière de ces résultats si la résolution de situations-problèmes, telle que proposée aux élèves tout au moins dans les épreuves

[18] Diagramme réalisé par nous à partir de données non publiées et fournies par la CSDM.

mathématiques, n'est pas une source de difficultés. Un questionnement auquel nous ne saurions répondre à cette étape.

Quoi qu'il en soit l'analyse précédente laisse voir que la résolution des situations-problèmes (compétence à évaluer) fait partie de la réalité de l'enseignement des mathématiques au Québec. Elle ne peut donc être ignorée. Tous les élèves y sont confrontés, et en particulier les élèves identifiés en difficulté (c'est-à-dire ici « cotes EHDAA »). On la retrouve notamment dans les directives énoncées par le programme d'études, dans les situations d'apprentissage et d'évaluation proposées à chacun des ordres et des cycles du primaire et secondaire. On la retrouve aussi dans les manuels qu'utilisent les enseignants du primaire et du secondaire ainsi que les élèves. Les élèves sont ainsi confrontés à la résolution d'un certain type de situations-problèmes, une résolution en quelque sorte imposée par le système institutionnel. Ces situations-problèmes sont délimitées par certaines caractéristiques, définies par les documents ministériels dans le contexte du Québec. Les élèves en difficulté ne sont pas en marge de ces exigences institutionnelles**.**

Ces choix institutionnels vont-ils de soi pour les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques? Que sait-on sur la résolution par ces élèves de situations-problèmes (telles que délimitées par les choix institutionnels)?

De manière à avancer sur cette question, nous revenons, dans les sections ci-après, tout d'abord sur ces choix institutionnels, en analysant le rôle et les caractéristiques d'une situation-problème dans le curriculum du Québec, tels qu'ils se dégagent de son analyse. Cela permet de situer les balises des situations-problèmes auxquelles les élèves en difficulté sont confrontés. Puis nous revenons sur quelques observations sur la résolution de ces situations-problèmes par des élèves en difficulté, provenant de la pratique d'enseignants de mathématiques du secondaire et de ma propre pratique. Elles donnent un premier éclairage sur les difficultés des élèves mais aussi sur leurs potentialités dans la résolution de ces situations-problèmes. Une amorce de

changement dans notre questionnement initial se fait alors sentir, dans la mesure où nos observations nous amènent à prendre conscience des potentialités de ces élèves. Une expérimentation préliminaire réalisée dans nos classes, auprès d'élèves identifiés en difficulté, touchant à une situation-problème autre (que celle prônée par l'institution), nous permet d'aller plus loin et d'apporter quelques éléments complémentaires à ces premières observations. Une exploration sur les recherches portant sur les élèves en difficulté en lien avec la résolution de différents types de problèmes nous permettra alors de jeter un nouvel éclairage sur ces observations. Il conduira, à la lumière de ces investigations préliminaires et d'une analyse de ces travaux de recherche, à un recadrage de nos questions de départ.

1.2 Analyse des choix institutionnels : une certaine façon de voir la situation-problème en mathématiques

Nous précisons dans les sections qui suivent le rôle des situations-problèmes et leurs caractéristiques, tels qu'ils se dégagent de l'analyse des documents ministériels.

1.2.1 Rôle des situations-problèmes dans le programme d'études du Québec

Le programme d'études actuel de mathématiques met l'accent sur la notion de situation-problème[19], et ce tout au long du cursus scolaire, du début du primaire à la fin du secondaire (MELS, 2007b; MELS, 2006a, 2006b)[20]. La compétence à résoudre des situations-problèmes y apparaît une compétence centrale, une des trois compétences mise de l'avant par le programme. On peut donc penser, à la lumière d'un tel énoncé que la notion de situation-problème y a un rôle important. Mais quel est plus précisément ce rôle?

[19] Nous reviendrons sur un plan théorique sur ce concept de situation-problème au chapitre 2.

[20] Le programme pour le préscolaire et primaire a commencé son implantation en 2001 et celui du premier cycle secondaire en 2003.

D'une part, la résolution de situations-problèmes apparaît, en tant que processus à développer, comme un objet d'apprentissage. D'autre part, elle est aussi une modalité pédagogique dans l'intervention éducative. Elle est enfin un outil d'évaluation. À propos d'un de ses rôles, celui de modalité pédagogique, le programme précise: « en tant que modalité pédagogique elle supporte la grande majorité des démarches d'apprentissage en mathématique » (MELS, 2006a, p. 124). On peut donc penser, à la lumière de cet énoncé, que les activités de résolution de situations-problèmes vont intervenir tout au long du processus d'apprentissage des élèves.

En tant que processus, la résolution de situations-problèmes permet, selon le MELS (2006b, p. 237), à l'élève : « [d]'explorer, d'inventer, de construire, d'élargir, d'approfondir, d'appliquer et d'intégrer des concepts et des processus mathématiques; d'acquérir les habiletés intellectuelles nécessaires au développement de la pensée et de la démarche mathématiques; de prendre conscience de ses capacités et d'adopter une attitude de respect à l'égard du point de vue des autres; de faire l'apprentissage de stratégies efficaces ». Le discours contenu dans le passage précédent nécessite de notre part une brève analyse.

Il véhicule, entre autres, l'idée d'un travail en profondeur sur les concepts et processus en mathématiques alliant l'exploration, la construction de sens, un élargissement, un enrichissement mais aussi une application et intégration de ces concepts et processus. Il renvoie ainsi au rôle de l'enseignant chargé de soutenir les élèves dans cette démarche. Ce discours met aussi en lumière que la résolution de situations-problèmes s'inscrit dans une démarche sociale, notamment à travers l'idée ici d'adopter une attitude de respect à l'égard du point de vue des autres, les interactions entre pairs ou avec l'enseignant pouvant engendrer des discussions parfois vives. Il pointe enfin le développement visé d'habiletés et de stratégies efficaces.

La résolution de situations-problèmes est ainsi vue, en tant que processus et modalité pédagogique, comme quelque chose qui intervient à différents moments, dans

l'introduction des thèmes à l'étude (en lien avec l'exploration des concepts et des processus), en cours d'apprentissage (avec l'idée par exemple de construire, d'élargir, d'approfondir des concepts et processus), à la fin de l'intervention éducative (avec l'idée d'appliquer et d'intégrer des concepts et processus) et dans l'évaluation des élèves. Les enseignants disposent à cet effet de ressources matérielles, entre autres, les programmes de formation, les manuels, les guides associés, rédigés par les auteurs de manuels, mais aussi de situations prototypes développées au fil du temps pour des fins d'évaluation.

En tant qu'outil d'évaluation, une situation-problème va être un instrument pour juger de l'état d'avancement des apprentissages des élèves et du développement d'une compétence (MELS, 2006b). Dans le contexte du Québec, les composantes de ces évaluations incluent, autour d'une situation d'apprentissage et d'évaluation (SAE)[21], des situations-problèmes et des situations dites d'application, ces dernières touchant la compétence « déployer un raisonnement mathématique » et intégrant également une dimension évaluation de connaissances.

La résolution de situations-problèmes est ainsi un enjeu important dans l'apprentissage des élèves et ce, tout au long de cet apprentissage, compte tenu de la place qu'occupent celles-ci dans l'intervention pédagogique mais aussi dans l'évaluation. Elle est ainsi un défi important pour les élèves, notamment pour les élèves en difficulté (nous reviendrons plus loin là-dessus).

Qu'ont de spécifiques ces situations-problèmes telles que définies au plan institutionnel? Comment se caractérisent-elles? La construction de ces programmes, du primaire à la fin du secondaire, s'étant étalée sur dix ans, la notion de situation-

[21] Plus spécifiquement, selon le MEQ (2003, p. 238), la SAE doit : porter sur le degré de développement des compétences mathématiques prises dans leur globalité. Elle fournit à l'élève des renseignements utiles sur l'état de ses apprentissages, notamment sur son niveau de maîtrise des processus et du langage propres à la discipline de même que des concepts et de leurs réseaux.

problème a pu se modifier, évoluer au fil du temps. Nous retraçons ici les balises qui délimitent, dans les différents documents, cette notion de situation-problème.

1.2.2 Caractéristiques d'une situation-problème au sens institutionnel

L'interprétation des caractéristiques d'une situation-problème n'est pas univoque; différentes interprétations sont en effet avancées au fil du temps comme nous le verrons dans ce qui suit, laissant planer comme le montrent Lajoie et Bednarz (2012) une certaine ambiguïté. Notre analyse des différents documents ministériels permet de dégager un certain nombre de balises, sur lesquelles risquent de s'appuyer la construction et le choix de situations-problèmes (dans les épreuves notamment développées aux fins d'évaluation).

- **Une différentiation situation-problème et exercice d'application**

Selon le MELS (2006a, p. 126) :

> Une situation-problème (SP) se caractérise par le fait qu'il y a un but à atteindre, une tâche à réaliser ou une solution à trouver. *L'objectif visé ne saurait être atteint d'emblée*[22] car il ne s'agit pas d'un exercice d'application qui fait appel à des algorithmes. La quête de solution d'une situation-problème *suppose, au contraire, raisonnement, recherche, et mise en place de stratégies mobilisant des connaissances.* Aussi, la résolution de situations-problèmes en mathématiques engage-t-elle l'élève dans une suite d'opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d'explicitation et de validation. Il s'agit d'un processus dynamique impliquant anticipations, retours en arrière et jugement critique.

Cette différenciation entre SP et exercice n'est toutefois pas propre à la notion de situation-problème, on la retrouvait en effet déjà dans le précédent programme au regard de la notion de problème (MEQ, 1988). Qu'est ce qui distingue donc une situation-problème d'un exercice d'application, au-delà de cette caractérisation?

[22] L'abréviation (SP) et l'italique dans cette citation ont été utilisées par nous.

Hitt (2004, p. 353) propose une clé pour identifier ce qui relève d'un exercice : « Quand un énoncé mathématique *fait appel à une procédure déjà établie par un individu*, nous pouvons classer cet énoncé comme un exercice […] ». Les indicateurs associés à la notion de situation-problème, dans les différents documents ministériels produits au fil du temps, s'éloignent clairement d'une telle caractérisation :

« la situation *n'a pas été présentée antérieurement* en cours d'apprentissage; L'obtention d'une solution satisfaisante *exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes* dont l'élève a ou non fait l'apprentissage; *Le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté* antérieurement » (MELS, 2006a, p. 18); elle « oblige à faire appel à une *combinaison nouvelle de concepts et de processus appris antérieurement* » (MELS, 2006a; 2006b, p. 240). En outre, elle requiert plus d'une démarche et exige l'autonomie de l'élève et des stratégies de recherche de solution. Ces différents indicateurs la distinguent donc d'un simple exercice, d'une simple application sur plusieurs plans. Mais au-delà de cette première caractérisation, à quoi renvoie plus précisément la notion de SP?

- **Une certaine ambivalence dans sa caractérisation : entre un défi (à la portée de l'élève) et un obstacle à franchir**

Dans les premiers documents curriculaires produits, une situation-problème renvoie à **un défi à la portée de l'élève**, qui doit susciter son intérêt et son adhésion (MEQ, 2001). Sa résolution comporte donc un véritable enjeu mais *elle doit en même temps* être à sa portée, de manière à ce qu'il puisse s'y engager : un juste équilibre donc entre défi et nécessité de rester à la portée de l'élève. Associé à l'idée d'un défi à relever, le rôle de l'enseignant est primordial. De nombreuses recherches (Brousseau, 1980; Cherel, 2005; Conne et Lemoyne, 1999; Lemoyne, 1989; Lemoyne et Lessard, 2003) pointent vers l'enseignant qui auprès des élèves identifiés en difficulté a tendance à les guider vers la ou les solution(s) en pratiquant la « pédagogie du succès » (Lemoyne, 1989, p. 91). Ces interventions, comme le soulignent judicieusement René de Cotret et

Fiola (2006, p. 115) « peuvent avoir pour effet d'enlever tout défi à l'élève puisqu'il n'a qu'à suivre le chemin tracé par l'enseignant ou encore à utiliser la procédure ou l'algorithme fourni ». Dans la résolution d'une situation-problème, il n'y a justement pas de chemin fixé à l'avance, ni de chemin unique, tout tracé. Ce que l'on attend de l'élève, c'est de construire justement son chemin.

Mais, ce défi doit être à la portée de l'élève, ce qui veut dire qu'il peut amorcer un processus de résolution, qu'il a les moyens de le faire, que la résolution de la situation-problème fait appel à peu de prérequis. La résolution de la situation par l'élève est accessible (dans ce cas cela pourrait faire en sorte que l'élève, notamment l'élève en difficulté ne bloque pas). Rey (2011) dégage une idée de compétence nécessaire, faisant référence aux nombreux travaux de chercheurs (Dolz et Ollagnier, 2002; Le Boterf, 1997, 1999; Perrenoud, 1997), en affirmant que la compétence découle de la mobilisation des ressources, de procédures et disons-nous de connaissances « pour faire face à une situation originale » (Rey, 2011, p. 36).

Pour y parvenir, il faut aussi, nous disent les concepteurs du programme du primaire, que l'élève s'intéresse à celle-ci. Mais que veut-on dire par « susciter son intérêt et son adhésion »? L'élève voit-il la résolution d'une situation-problème à l'instar de la musique ou du sport ou de ses artistes préférés?

La caractérisation au primaire en termes de défi à relever, à la portée de l'élève, laissera place à une tout autre caractérisation dans le programme du secondaire, où une situation-problème semble s'organiser autour du *franchissement d'obstacles* (MEQ, 2003; MELS, 2005). Il est à noter toutefois que cette notion d'obstacle n'est jamais explicitement définie. Il n'est donc pas du tout sûr qu'elle soit celle des didacticiens

(voir à ce sujet Bednarz et Garnier (1989)), en tout cas une référence explicite à cette signification que recouvre la notion d'obstacle n'est jamais mentionnée[23].

Deux idées vont ainsi apparaître à travers les différents programmes au fil du temps, laissant planer une certaine ambigüité : celle d'un défi à la portée de l'élève, celle aussi d'obstacle à franchir et d'un conflit cognitif[24] (MELS, 2007b). Ces deux critères, défi à la portée de l'élève et obstacle à franchir, n'orientent pas en effet a priori vers le même choix de situations-problèmes.

- **Autres balises**

D'autres balises correspondant aux caractéristiques associées par l'institution (le MELS) à la notion de situation-problème risquent de peser là aussi sur le choix des situations auxquelles sera confronté l'élève en difficulté, nous y reviendrons plus loin. Ces caractéristiques vont en effet orienter le choix et (ou) la construction de situations-problèmes qui seront proposées aux élèves en général (et en particulier à ces élèves).

Selon le MEQ (2003), une situation-problème est **contextualisée.** Qu'entend-on ici plus précisément par contexte? La conception que l'on a du contexte a évolué au fil des années. Elle n'est pas propre à la notion de situation-problème et était déjà présente dans les anciens programmes dans la réflexion sur la notion de problème (voir Lajoie et Bednarz, 2012). En effet, dans le fascicule K sur la résolution de problèmes produit en appui au précédent programme du primaire (MEQ, 1980), on évoquait différents types de contextes, à savoir des contextes réels, réalistes, fantaisistes et des contextes purement mathématiques (MEQ, 1988). Un problème est à contexte réel s'il se produit dans la réalité. En revanche, il est à contexte réaliste s'il est susceptible de se réaliser

[23] Nous reviendrons là-dessus au chapitre 2 en lien avec le concept de situation-problème.

[24] C'est-à-dire que les conceptions et les connaissances d'élèves sont confrontées aux représentations qu'ils se font de la situation-problème.

réellement (MEQ, 1988). Un problème est à contexte fantaisiste s'il est « le fruit de l'imagination » et « sans fondement dans la réalité » (MEQ, 1988, p.27).

À l'inverse, un problème à contexte purement mathématique réfère uniquement à des objets mathématiques (nombres, droites, opérations, etc.).

Une telle réflexion est reprise en partie dans le programme actuel : les situations-problèmes portent, nous dit-on, tantôt sur des situations réelles ou réalistes tantôt sur des situations purement mathématiques (MEQ, 2001)[25].

Ces contextes, comme nous l'indique le programme (MELS, 2006b), peuvent aussi faire appel à d'autres disciplines connexes (les sciences par exemple) ou aux domaines généraux de formation (DGF) (orientation et entreprenariat, vivre ensemble et citoyenneté, consommation, médias, santé et bien-être, environnement). Comment la présence du contexte dans une situation-problème jouera-t-elle sur le processus de résolution de l'élève? Comme nous le verrons par la suite cette question du contexte est un enjeu important à considérer dans la résolution par l'élève identifié en difficulté d'apprentissage en mathématiques (cf. 1.4.2).

D'autres caractéristiques viennent aussi se greffer à celles déjà énoncées. En effet, les situations-problèmes doivent *rejoindre l'élève* : une situation-problème doit être *signifiante* de manière à toucher « l'élève dans ses préoccupations, piquer sa curiosité et l'inviter à la réflexion » (MELS, 2005, p. 14).

En outre, une situation-problème est une situation *complexe* (MEQ, 2003; MELS, 2005), une caractéristique nouvelle, en rupture avec les balises associées précédemment aux problèmes, si on en croit l'étude historique menée par Lajoie et Bednarz (2012, 2016) sur l'évolution de la notion de problème dans les programmes et documents pédagogiques associés. Quelle signification donne-t-on plus précisément à

[25] Notons que les contextes fantaisistes ont disparu, qu'il n'y ait plus fait mention.

complexe? La complexité renvoie entre autre à l'idée de solliciter dans sa résolution un réseau de concepts et de processus ainsi que des liens intra-mathématiques, c'est-à-dire entre les domaines mathématiques tels que l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la probabilité et la statistique (MELS, 2005).

Une certaine interprétation de la caractéristique situation complexe est ici mise de l'avant : une situation-problème nécessite la mobilisation de *multiples concepts* (trois concepts au moins sont en jeu) (MELS, 2005), fait intervenir *beaucoup de données* (son énoncé est souvent long et lourd) et exige que l'on passe *d'un registre à un autre*, par exemple d'un registre verbal (message en mots) à un registre figural, voire symbolique (MELS, 2005). Le programme de l'école québécoise relève à ce propos qu'une situation-problème exige ainsi pour l'élève de démêler les multiples informations (nous y reviendrons plus loin) contenues dans l'énoncé (discerner les informations pertinentes de celles qui ne le sont pas, les questions posées dans la situation).

Ces informations peuvent être présentées dans des registres différents : verbal, symbolique, graphique, numérique.

Aussi, la résolution d'une situation-problème invite l'élève à construire au besoin un modèle mathématique qui représente cette situation-problème, à expliciter et vérifier sa solution à travers sa démarche, ses calculs, ses résultats, à valider sa solution ou ses réponses avec les pairs. Ce programme ajoute que: « Si les différents modes de représentation, qui se trouvent dans tous les champs de la mathématique, sont primordiaux pour l'appropriation des concepts, le passage d'un mode à un autre facilite la compréhension des situations auxquelles l'élève doit faire face » (MELS, 2006b, p. 238). On peut se demander si ce passage d'un mode à un autre est aisé pour l'élève en difficulté.

Bednarz et Saboya (2006) soulignent à cet effet, dans le cadre d'une expérimentation réalisée avec une élève identifiée en difficulté (élève d'une classe d'appui de secondaire

1) et menée sur une longue période de temps, dans le domaine de l'algèbre (dans un contexte de généralisation et résolution de problèmes), que le passage du registre verbal (messages en mots) au registre symbolique demeure fragile pour cette élève. Ces observations nous incitent à interroger l'impact éventuel de cette exigence de la situation-problème pour des élèves identifiés en difficulté.

De plus, selon le MELS (2006a, p. 126), la résolution de situations-problèmes engage « l'élève dans une suite d'opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d'explicitation et de validation. ». On est ici sur les processus que sollicite une telle résolution : s'y engager suppose aussi raisonner, rechercher des pistes de solution et mettre en place des stratégies qui mobilisent des connaissances (MEQ, 2001). Ce processus englobe des va et vient, des détours parfois nécessaires à la mise en marche d'un raisonnement qui peut ou pas aboutir à des conclusions pertinentes.

Nous présentons dans le schéma de la page 26 les différentes caractéristiques d'une situation-problème qui se dégagent de l'analyse des documents ministériels (voir à ce sujet aussi, Lajoie et Bednarz, 2012), et qui vont influencer le choix de situations-problèmes auxquelles les élèves, en particulier les élèves en difficulté, seront confrontés dans le système scolaire québécois (cf. figure 1.7).

Cette analyse fait ressortir, à travers les choix institutionnels, non seulement le rôle (cf. figure 1.6) accordé à la résolution de situations-problèmes mais surtout ses caractéristiques. Ces balises vont guider le choix et la construction des situations-problèmes proposées aux élèves à l'école, notamment aux élèves en difficulté (on les retrouvera ainsi mises en œuvre dans les épreuves d'évaluation ministérielles; elles sont susceptibles également d'avoir guidé les SP que l'on trouve dans les manuels). Une analyse plus fine de ce qui se passe chez les élèves, à leur propos, nous permettrait de mieux comprendre la manière dont ces contraintes pèsent réellement, à partir des effets observés chez les enseignants et les élèves. C'est dans cette perspective que nous revenons, à titre exploratoire, d'une part sur l'expérimentation d'une telle situation

auprès d'élèves identifiés en difficulté et, d'autre part, sur ce que des enseignants observent dans l'expérimentation de telles situations.

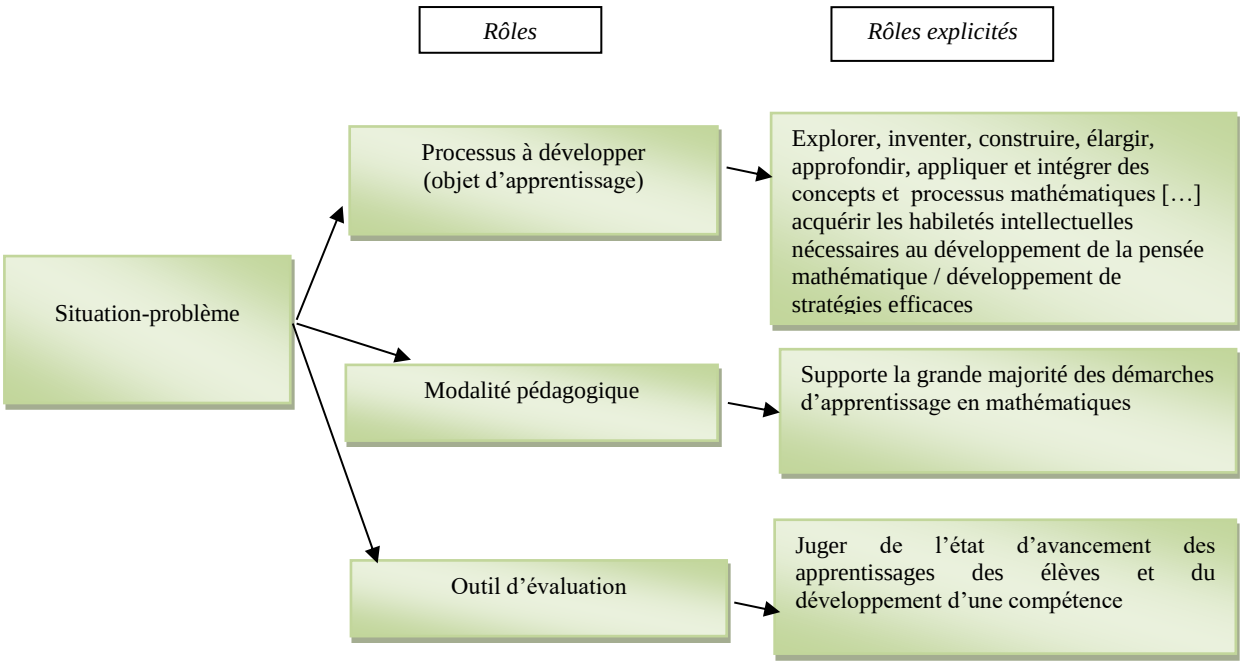


Figure 1.6 Rôles des situations-problèmes dans le programme d'études du Québec

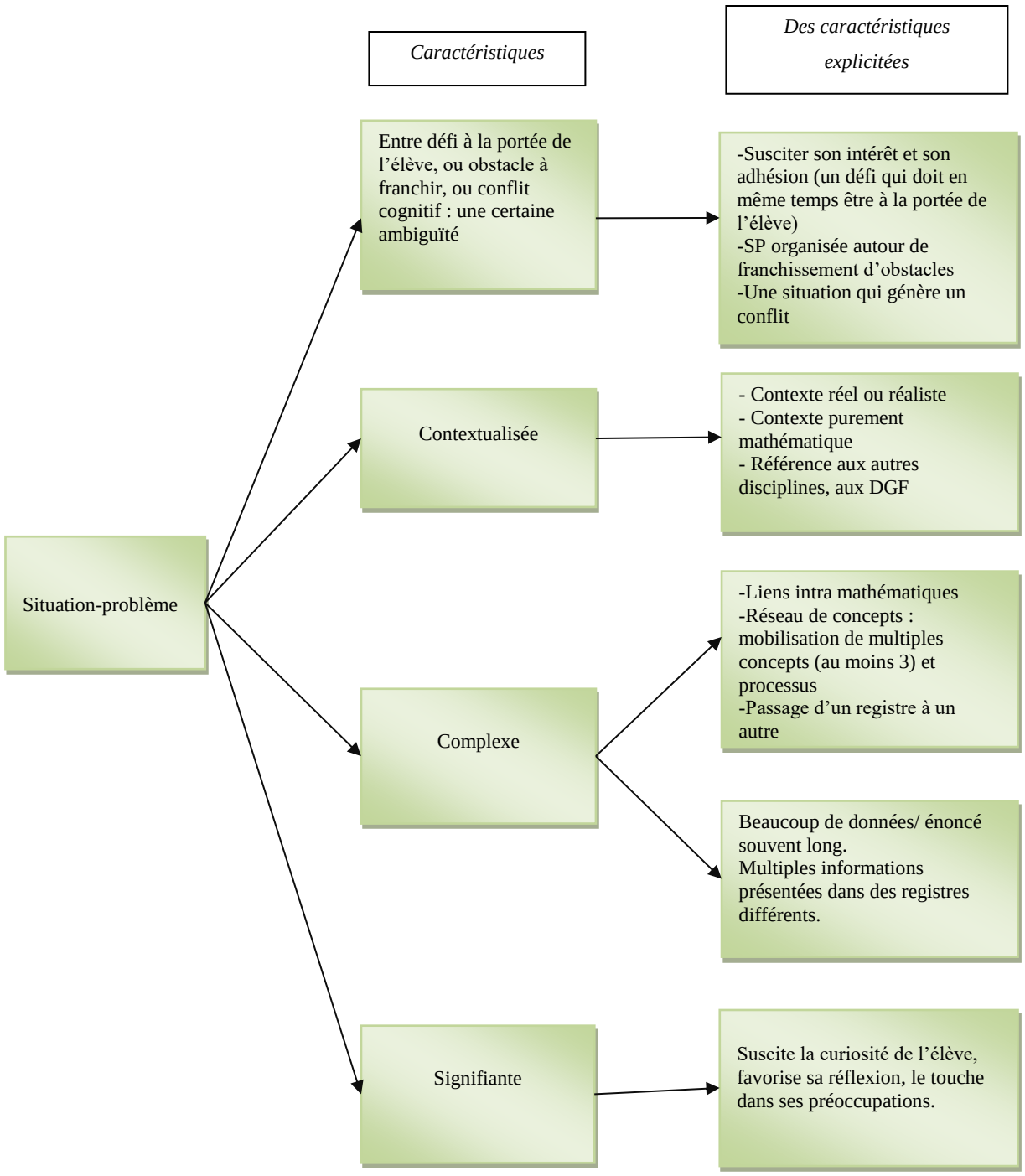


Figure 1.7 Différentes caractéristiques d'une situation-problème se dégageant de l'analyse des documents ministériels

1.3 Résolution de situations-problèmes (au sens du MELS) : quelques observations nous amenant à considérer ce que fait l'élève, ses potentialités

1.3.1 Quelques observations, provenant de ma pratique, en lien avec la résolution d'une situation-problème par des élèves identifiés en difficulté.

Nous avons proposé une situation en usage dans le milieu scolaire[26], qui selon ses concepteurs, est une situation-problème (au sens du MELS). Si nous analysons *a posteriori* celle-ci au regard des caractéristiques qui résultent de notre analyse des documents ministériels (cf. figure 1.7), nous pouvons dégager les critères suivants (mobilisés de fait) dans la construction de cette situation : (1) elle est contextualisée (on a ici affaire à un contexte réaliste, lié aux préparatifs d'un voyage pour les vacances d'été); (2) Cette situation représente un certain défi pour l'élève, dans la mesure où sur la base de multiples contraintes, il doit réussir à amasser le montant exigé pour la réalisation de son voyage et planifier à cet effet; (3) Un défi à sa portée (il peut amorcer une résolution); (4) Elle est en même temps, pour les concepteurs, signifiante pour les élèves (elle peut susciter un intérêt et rejoindre son adhésion); (5) Elle est enfin complexe[27] dans la mesure où de multiples données sont en jeu et où elle fait appel à plusieurs concepts, entre autres, ceux relatifs aux quatre opérations (une reconnaissance dans ce cas aisée, la situation-problème sollicite plus des procédures de calcul), aux fractions (des fractions simples), au pourcentage, à des mesures (de longueur) et des conversions. La complexité mise en jeu en est donc davantage une liée à la gestion de multiples données qu'une complexité conceptuelle, rejoignant en cela l'analyse menée par Lajoie et Bednarz (2016).

---

[26] Cette situation-problème a été construite par Isabelle Flibotte et Marie-France Desrochers, enseignantes à la commission scolaire de Saint-Hyacinthe, sous la supervision de Brigitte Provençal, conseillère pédagogique; et modifiée par Caroline Perron, Nathalie Krikorian et Sylvie Dufresne, conseillères pédagogiques à la CSDM.

[27] Sur le plan conceptuel, la situation des robots (p.34 de cette thèse) est sans doute plus complexe, comme le montrent les raisonnements des élèves, qui exigent une interprétation de la co-variation non aisée à contrôler; alors que les exigences de cette situation ne sont pas liées aux concepts mathématiques comme tels, tout compte fait assez simples. Et pourtant selon cette balise, la situation des robots ne serait pas considérée comme complexe, alors que celle-ci l'est.

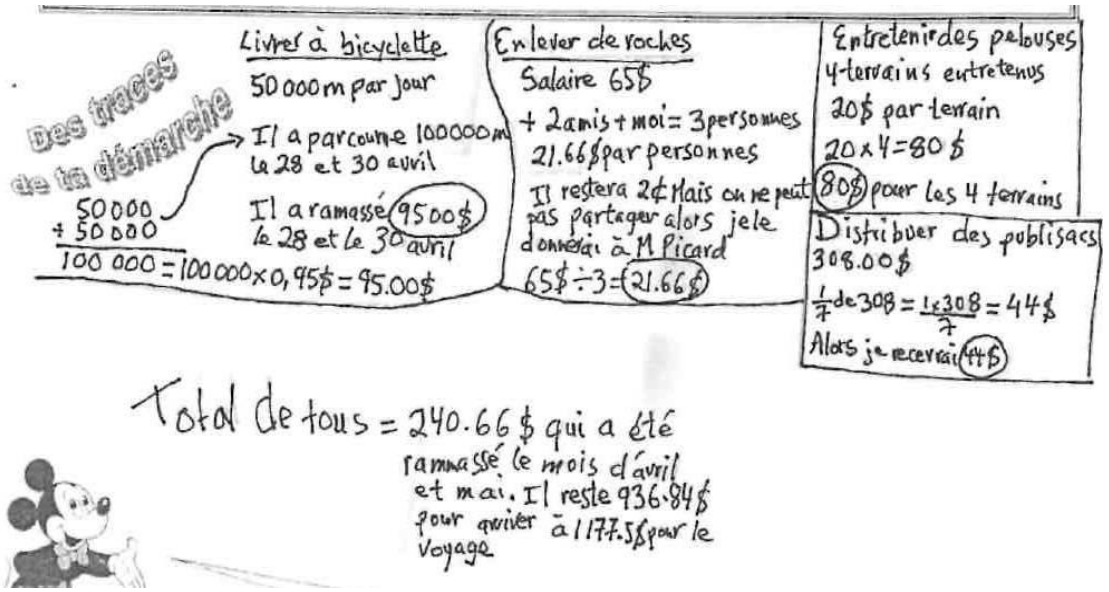
Cette situation a été proposée à 3 groupes d'élèves de secondaire 1 de l'École Georges Vanier de la Commission scolaire de Montréal dans le cadre d'un examen d'étape. Nous rapportons ici les démarches de Sandra et Claude (prénoms fictifs), des élèves manifestant quelques difficultés au regard de leurs travaux en classe (durant les interactions en classe, dans leurs résultats, etc.).

Que mettent en évidence, à titre exploratoire, l'analyse de ces solutions de 2 élèves de secondaire 1, identifiés en difficulté par nous? Une première observation intéressante de la résolution de la situation par ces élèves a trait aux **potentialités** dont témoignent leurs résolutions (connaissances mobilisées par les élèves dans l'action, contrôle exercé sur cette activité de résolution)

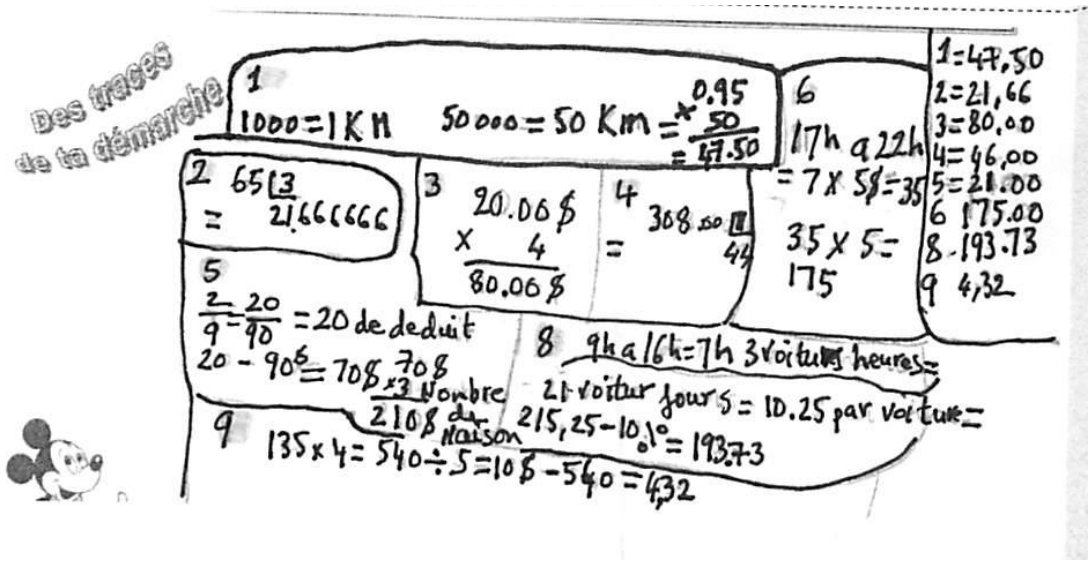
Il est intéressant en effet de noter que Sandra et Claude amorcent une résolution du problème posé, qui témoigne tout d'abord d'un décodage de l'énoncé avec ses multiples contraintes.

Sandra, dans sa solution, nous montre, par ailleurs, un retour au problème dans l'interprétation de la réponse : à la consigne d'être équitable lors de la rémunération sur les travaux effectués en avril et mai pour enlever les roches, elle écrit que chacun de ses amis recevra 21,66 $ et le reste d'argent, soit 2 sous, reviendra à M. Picard. Cette réflexion sur le reste nous montre la prise en compte du souci d'équité et de préoccupations (extérieures aux mathématiques) induites par les contraintes. On voit ici la prégnance du contexte, comment le contexte joue dans la résolution de l'élève.

Solution de Sandra



Solution de Claude



Diverses connaissances sont, par ailleurs, mobilisées par l'élève : une reconnaissance des opérations différentes en jeu, le calcul du salaire sur la base du salaire unitaire. De plus, Sandra respecte les contraintes exigées dans la planification des activités du mois de juin : à savoir un horaire réaliste, un engagement par jour, trois jours de congés par

semaine et ne pas travailler plus de 24 h par semaine (voir la planification de Sandra à l'annexe A).

La solution de Claude met également en évidence des connaissances mobilisées dans son raisonnement: la conversion des unités de distance, une reconnaissance des opérations en jeu, une maîtrise du calcul, une référence aux mesures de temps. Aussi, Claude semble avoir un certain contrôle sur sa démarche et son explicitation : Il précise les étapes à réaliser et les opérations à effectuer (division, multiplication, addition et soustraction).

En même temps, ces résolutions témoignent aussi de **difficultés** rencontrées par ces élèves. Sandra éprouve ainsi des difficultés à convertir les unités de distance. De plus, le taux par kilomètre n'est pas pris en compte. De même pour Claude, la livraison pour le dépanneur « du coin » se fait pendant un jour au lieu de deux jours. À la 5^{e} étape, il traduit « enlever 20$ de 90$ » par 20-90=70. Il s'agit d'une difficulté de symbolisation. En réalité, mentalement il fait bien 90-20, dans sa résolution l'élève sait bien qu'il fait cela.

Les solutions de Sandra et Claude mettent donc en évidence des potentialités (connaissances mobilisées dans l'action) et des difficultés (équivalence des unités, calculs, symbolisation de l'opération, pourcentage..). Ils illustrent aussi, dans le cas de la solution de Sandra, une prise en compte du contexte et d'enjeux extra mathématiques.

Ces observations font ainsi apparaître des difficultés chez ces élèves (point de départ rappelons-le de notre questionnement) dans la résolution de cette situation-problème mais aussi des potentialités. Ces observations vont me conduire à m'intéresser graduellement aux potentialités de ces élèves « dits en difficulté ». Une autre expérimentation apparaîtra en ce sens déterminante (nous y reviendrons plus loin). Nous avons voulu aller plus loin à ce propos en allant interroger des collègues sur ce qu'ils observaient dans la résolution de situations-problèmes par leurs élèves.

1.3.2 Quelques observations d'enseignants sur la résolution de situations-problèmes en mathématiques par des élèves en difficulté qui interrogent le type de situation proposée

Pour pouvoir mieux cerner le questionnement qu'ont les enseignants par rapport à la résolution des situations-problèmes (au sens du MELS) par les élèves en difficulté, et avoir un meilleur indice, à titre exploratoire, de la manière dont les élèves réagissent à de telles situations, des entrevues ont été réalisées auprès de quatre enseignants (3 femmes et un homme) du secondaire de la Commission scolaire de Montréal (CSDM) et de la Commission scolaire de la Pointe de l'Île (CSPI). Les difficultés des élèves identifiées par ces enseignants s'articulent autour des enjeux suivants : la compréhension de l'énoncé de la situation-problème proposée qui nous renvoie à la longueur et lourdeur de l'énoncé, l'emprise du contexte dans ces situations-problèmes, le recours nécessaire à de multiples concepts, l'influence du type de situations proposées sur les solutions des élèves et l'élément temporel.

- **La compréhension de l'énoncé**

La première impression des élèves, nous disent les enseignants, est que la situation-problème telle que présentée est difficile pour eux. Ils allèguent souvent qu'ils ne comprennent rien. Autrement dit l'énoncé a priori rebute.

Lorsque les élèves s'engagent dans la résolution d'une situation-problème, ils soulignent ou mettent en couleur certains mots et phrases contenus dans l'énoncé. Une stratégie, sans doute, initiée chez les élèves par les enseignants. Cette façon de faire par les élèves procède-t-elle de la nécessité de mieux se représenter l'énoncé du problème ou est-ce un effet de contrat?

Les enseignants interviewés déclarent que les élèves éprouvent des difficultés à traiter les multiples informations contenues dans une situation-problème, à dégager les informations essentielles et à décoder les informations qui s'y trouvent. Selon les enseignants, la lourdeur des énoncés, les multiples informations contenues dans

l'énoncé pêle-mêle pourraient influer sur la compréhension de la situation proposée et ce faisant ne permettraient pas aux élèves de se retrouver : plus l'énoncé est long, plus le problème est « complexe » pour les élèves, nous disent les enseignants. Dans ce cas, les élèves ne savent pas toujours ce qu'il faut prendre, où se retrouvent les informations dans tout ce lot de données fournies (les informations pertinentes, sur quels aspects, ce qu'il serait nécessaire éventuellement d'aller chercher; ou encore ce qu'il faut rejeter, les informations non pertinentes). Selon une enseignante interviewée, les situations moins lourdes, qui contiennent moins d'informations semblent davantage accessibles à ces élèves qui amorcent alors un processus de résolution. Autrement dit, ce n'est pas dans toutes les situations-problèmes que cette enseignante observe des difficultés chez les élèves, la résolution pouvant être dans certains cas plus aisée que dans d'autres. Qu'en est-il de l'influence du contexte dans la résolution de situations-problèmes?

- **L'emprise du contexte**

Une situation-problème dans la perspective du programme est contextualisée (MELS, 2006a, p. 126). C'est en fait, nous l'avons vu, une de ses caractéristiques. La question du contexte, très présente dans les situations-problèmes (au sens du MELS), est donc centrale.

Selon les enseignants interviewés, les élèves réussissent la résolution de la situation-problème lorsqu'il s'agit d'un contexte familier, d'un contexte proche de la réalité.
Par exemple, un enseignant révèle qu'une situation était proposée aux élèves dans laquelle il fallait déterminer le prix d'entrée dans une salle de jeu. Les élèves ont réussi à trouver la solution à la situation sans passer par la construction d'un système d'équations. Les élèves dans leur démarche ont plutôt procédé par essai et erreurs et ont abouti à une solution viable.

Ce point de vue des enseignants nous amène à nous poser les questions suivantes : le fait de proposer des situations-problèmes dans un contexte réel ou réaliste (familier ou non) a-t-il un effet sur la résolution de la situation par les élèves? En d'autres termes,

la présence d'un contexte familier dans une situation-problème est-il nécessairement positif? Les élèves sont-ils en mesure de se raccrocher à des manières spontanées de fonctionner parce que le contexte a un sens pour eux, et qu'ils ne cherchent pas alors à entrer sur la mathématique de l'école, sur les modèles mathématiques qui y sont abordés; s'y engagent-ils alors plus facilement et y font-ils montre de potentialités dans les raisonnements et les multiples concepts qu'ils sont alors en mesure de mobiliser? Que disent les recherches en ce sens? Nous y reviendrons dans la section 1.4. Entre temps, qu'en est-il de l'influence de multiples concepts en jeu dans une situation-problème?

- **Mobilisation de multiples concepts**

Un enseignant interviewé affirme que même si les élèves comprennent l'énoncé d'une situation-problème, ils ne savent pas comment procéder, quels concepts utiliser et comment faire les liens entre les concepts en jeu dans le problème en vue d'une solution, si elle existe. Selon les enseignants interviewés, moins il y a de concepts dans une situation, moins il y a de difficultés. Autrement dit, la présence de beaucoup de concepts dans une situation peut générer des difficultés au niveau des élèves. Ce point de vue soutenu par les enseignants interviewés interroge une des caractéristiques des situations-problèmes du ministère de l'Éducation du Québec du Loisir et du Sport. L'appel à beaucoup de concepts dans une situation-problème peut-elle influer sur les démarches des élèves en difficulté?

Ne peut-il pas y avoir plusieurs concepts dans une situation-problème sans que cela ne soit complexe pour l'élève ou une source de difficulté pour lui? Les difficultés des élèves peuvent-elles dépendre des types de situations proposées?

- **L'influence du type des situations**

Les situations-problèmes que proposent les enseignants aux élèves sont celles la plupart du temps provenant de précédentes évaluations (épreuves du ministère de l'éducation lors des examens de fin d'année), celles contenues dans les manuels scolaires et celles

proposées par des enseignants[28]. Les enseignants interviewés vont dans le sens d'une résolution des élèves qui dépend des situations-problèmes choisies. Une enseignante déclare en effet, que d'une situation-problème à une autre, les élèves ne réagissent pas de la même façon c'est-à-dire qu'il y a des situations-problèmes dans lesquelles ils observent une résolution par ces élèves et d'autres pour lesquelles les élèves éprouvent des difficultés. D'aucuns ont parlé de situations moins lourdes, d'autres de « grosses » situations-problèmes. Selon eux, les situations moins lourdes sont les situations dont les énoncés sont moins longs, les « grosses » situations sont les situations où l'énoncé est plus long et où l'on retrouve de multiples informations. Les multiples informations sont-elles un enjeu de complexité? Existe-t-il des types de situations-problèmes dans lesquelles on observe une résolution et une réaction différente des élèves? Que disent les recherches à propos de ces différences entre situations-problèmes? Nous en parlerons à la section 1.4.

Enfin, les enseignants relèvent l'élément temporel qui peut avoir une incidence sur la résolution de situations-problèmes.

- **L'élément temporel**

Les enseignants interviewés reconnaissent que la résolution d'une situation-problème (au sens du MELS) exige un temps long, généralement elle s'étale sur deux périodes soit 150 minutes, ce qui n'est pas le cas pour les problèmes courts. Les enseignants prévoient souvent d'ailleurs 120 à 150 minutes pour leurs examens d'étape lorsqu'ils font passer la situation-problème à résoudre. Les examens institutionnels prévoient 150 minutes à 180 minutes.

Ce temps long est sans contredit un défi pour les élèves en difficulté aux prises avec la résolution d'une situation-problème. Le découragement, la lassitude voire les bris

[28] Les enseignants dans certains cas aussi se sont construits (en équipes) de telles situations-problèmes, il existe des banques de situations d'apprentissage et d'évaluation construites par les enseignants et conseillers pédagogiques (http://domaine.recitmst.qc.ca/-Mathematique-).

d'engagement peuvent prendre le dessus, une pression souvent induite par la résolution de la situation-problème.

Par ailleurs, les enseignants interviewés reconnaissent que les élèves en difficulté disposent de potentialités lorsqu'ils sont confrontés à la résolution des situations-problèmes. C'est ce qu'ils ont été amenés à observer dans leur pratique. Ils se donnent, dans certains cas, la peine de chercher la solution. Ils s'investissent. « Il y en a qui sont bien organisés, c'est différent d'un élève à un autre » déclare une enseignante. Un enseignant affirme que « des fois, ils (les élèves) nous surprennent, des fois, ils vous proposent des choses ». Ainsi, ces élèves peuvent s'investir dans une situation, proposer des éléments de solutions dépendant de la situation, du contexte, du sujet, etc. Les observations des enseignants ne nous permettent pas d'en savoir davantage sur ces conditions qui font que les élèves en difficulté font montre d'un certain potentiel. Elles nous conduisent toutefois à interroger le type de situation-problème proposé, fortement influencé ici par le sens que lui a donné l'institution, et à vouloir explorer d'autres types de situations-problèmes. À cette étape, notre questionnement nous conduit ainsi à vouloir aller plus loin dans l'éclairage apporté par la résolution de ces élèves, du point de vue de leurs potentialités, en lien avec différents types de situations-problèmes.

C'est dans cet esprit que nous avons proposé, de manière exploratoire, un autre type de situation-problème à résoudre (que celles en usage et provenant du milieu scolaire), une situation-problème ne correspondant pas aux balises précédemment définies (cf. figure 1.7), afin d'amorcer et d'enrichir notre réflexion à ce sujet.

1.3.3 Une exploration de la résolution d'une situation-problème autre par des élèves identifiés en difficulté : quelques observations montrant les potentialités de ces élèves

Dans le cadre d'une expérimentation préliminaire, une situation-problème a été proposée aux élèves de secondaire 3 de l'école Marguerite-De Lajemmerais de la Commission scolaire de Montréal, au cours de l'année scolaire 2010-2011. Voici

l'énoncé de cette situation-problème, reprise dans la forme actuelle de Saboya (2010, p. 186).

> Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre 3 heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée jusqu'à l'usine. *Pourquoi panique t-elle?* Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?

Selon les balises que nous avons mises en évidence précédemment et qui ressortent de l'analyse des documents ministériels (cf. figure 1.4), cette situation ne serait probablement pas reconnue comme une situation-problème, puisqu'elle ne met pas en jeu un réseau de concepts. Pourtant dans la recherche collaborative dont est issue cette situation, l'enseignante impliquée dira qu'il s'agit d'une situation-problème : dans la mesure où elle est contextualisée (un contexte d'usine, de fabrication de robots, mettant en jeu un expert, une direction d'usine); où il n'y a pas de solution immédiate, elle exige recherche, raisonnement; où l'élève peut s'investir dans la résolution (l'enseignante anticipe ce que les élèves pourraient faire, et voit qu'elle est accessible).

Justification du choix de cette situation-problème pour notre expérimentation

Cette situation a été retenue par nous de manière à compléter les observations des enseignants au regard de l'influence du type de situation : c'est un énoncé long; c'est une situation à contexte réaliste. Ces deux caractéristiques rejoignent celles du MELS. En revanche, d'autres critères associés au choix de cette situation-problème s'en distinguent. Elle sort du cadre scolaire usuel; cet aspect est important pour les élèves identifiés en difficulté comme le montre Lemoyne (1989) (dans ce cas des élèves de

classes d'adaptation scolaire). De plus, elle ne sollicite pas la mobilisation de plusieurs concepts mais laisse place à un travail de modélisation et à la construction de modèles spontanés par les élèves et, est en ce sens intéressante du point de vue de l'activité mathématique qu'elle requière.

Trois classes régulières de secondaire 3 ont été concernées par cette activité qui s'est déroulée en deux périodes pour chaque classe. Nous revenons sur quelques solutions d'élèves identifiés en difficulté[29] (dans ces classes) et relevons quelques éléments qui émergent de cette investigation.

Sur l'interprétation de l'énoncé

L'intérêt pour nous de poser aux élèves la question de reformuler le problème dans leurs mots résidait dans l'examen de l'interprétation de l'énoncé d'une situation-problème par les élèves, surtout quand l'énoncé est long. L'exemple de l'énoncé sur la fabrication de robots l'illustre bien. Voici la reformulation d'une élève (en difficulté) à l'énoncé précédent.

> « D'après moi, c'est un monsieur qui fait des robots puis là, il fait un robot qui en fait un comme à chaque minute, il doit faire un. Il fait un robot. Le robot fait à chaque 5 minutes un autre robot. Et là, il a décidé d'en faire deux […] Il a décidé de faire un robot qui va faire un robot qui va faire 2 robots plus vite genre, il va faire 2 robots en 5 minutes […]. Puis là, je ne comprends pas pourquoi, mais là il va aller le dire à sa patronne et là après qu'il a fait un robot qui en fait 2 en 5 minutes […] sauf que ça fait comme 3 robots et là [...] ».

Cette élève[30] semble comprendre une des idées contenues dans l'énoncé qui leur est proposé (le fait qu'un robot en fasse deux autres en cinq minutes), cette explicitation apparaissant toutefois se perdre dans les détails.

---

[29] Ces élèves ont été identifiés en difficulté par nous sur la base de leurs résultats en secondaire 3 (tests et examens).

[30] Cette élève a obtenu aux étapes 2, 3 et 4 de l'année scolaire 2010-2011 respectivement 52%, 55% et 67 % en mathématiques. C'est une élève "faible" mais elle n'est pas identifiée en difficulté d'apprentissage.

Mais deux idées essentielles échappent à son récit : l'élève ne mentionne pas le moment où l'expert arrive en vue de rencontrer sa supérieure et son attente de 3 heures avant qu'il puisse lui expliquer son invention, elle ne mentionne pas non plus le désarroi de l'experte qui court après avoir regardé son horloge. L'élève ne retient donc qu'un des éléments de la structure de départ (la fabrication de 2 robots par un autre robot en 5 minutes).

Cette compréhension partielle de l'énoncé par cette élève semble appuyer le point de vue des enseignants selon lequel les élèves ont des difficultés lorsqu'apparaissent de multiples informations contenues dans une situation-problème.

Des potentialités chez les élèves mises en évidence

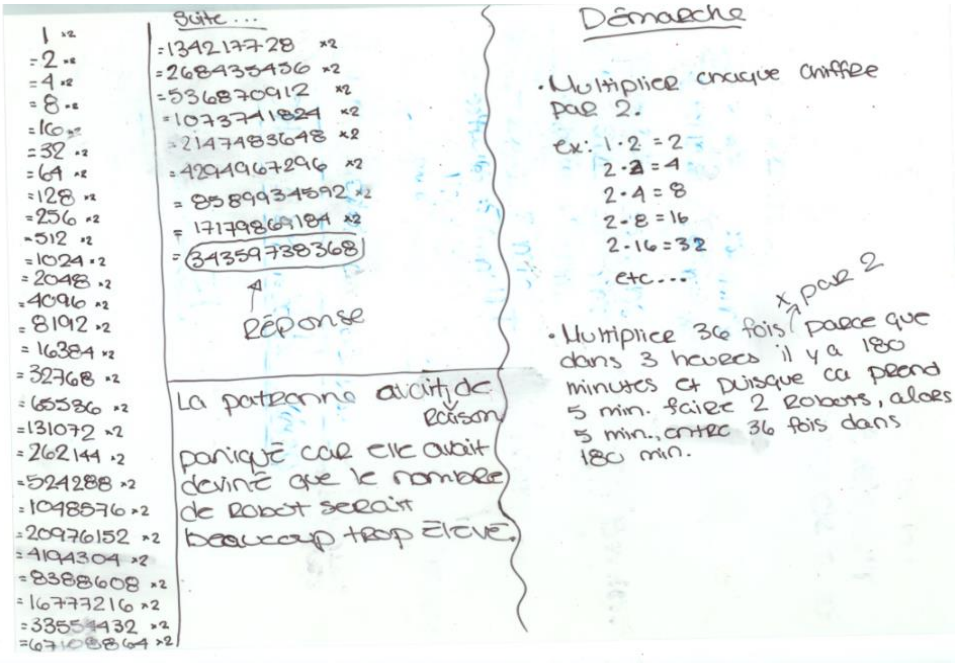
Nous avons observé des élèves identifiés en difficulté qui abordent cette tâche. En réponse à la question suivante **:** « à votre avis pourquoi panique-t-elle? », dans l'ensemble, les élèves affirment que la supérieure panique parce qu'elle s'attend à voir beaucoup de robots : « La supérieure panique parce que quand elle est entrée, elle a vu qu'il y avait beaucoup trop de robots. ». Cette anticipation de l'ordre de grandeur du nombre de robots obtenu est un indicateur de connaissance mobilisée dans l'action par les élèves. De plus, à la question « combien pense-t-elle trouver de robots? », différentes solutions émergent. Nous reprenons ici quelques exemples de démarches[31].

Il se dégage à travers ces solutions[32] des potentialités et des difficultés que nous proposons de mettre en évidence dans les lignes qui suivent.

Solution 1

[31] Ce qui est présenté ici n'est nullement exhaustif; ce n'est qu'une exploration.

[32] Les solutions 1 et 2 sont produites par deux élèves ayant le code 10 en 2010-2011 c'est-à-dire identifiées en difficulté d'apprentissage en plus de présenter parfois des problèmes de comportement. Elles ont un an de retard dans toutes les matières et bénéficient du soutien dans certaines matières. La solution 3 est produite par une élève «faible».



1 ×2
=2 ×2
=4 ×2
=8 ×2
=16 ×2
=32 ×2
=64 ×2
=128 ×2
=256 ×2
=512 ×2
=1024 ×2
=2048 ×2
=4096 ×2
=8192 ×2
=16384 ×2
=32768 ×2
=65536 ×2
=131072 ×2
=262144 ×2
=524288 ×2
=1048576 ×2
=20976152 ×2
=4194304 ×2
=8388608 ×2
=16777216 ×2
=33554432 ×2
=67108864 ×2

Suite...
=1342177728 ×2
=2684354456 ×2
=5368709912 ×2
=10737411824 ×2
=21474836648 ×2
=42949672296 ×2
=85899345592 ×2
=171798691184 ×2
=343597738368
↑ Réponse

La patronne avait de raison parce que elle avait devine que le nombre de robot serait beaucoup trop élevé.

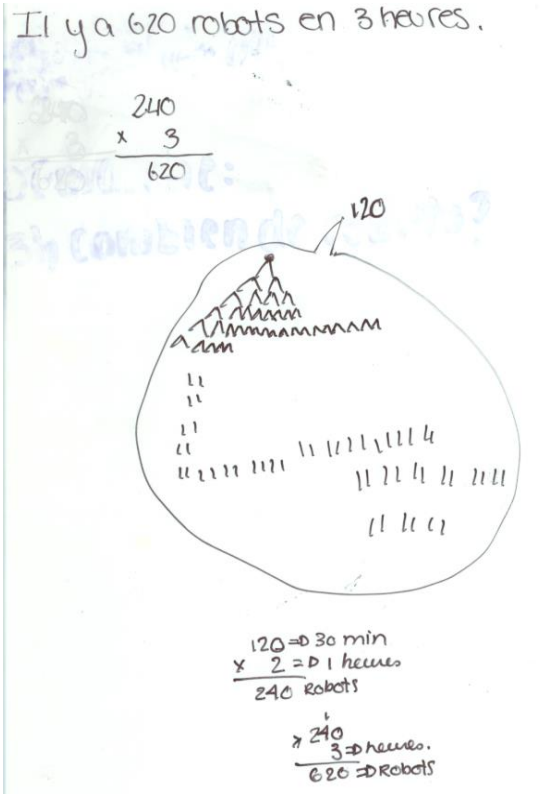
Démarche

- Multiplier chaque chiffre par 2.

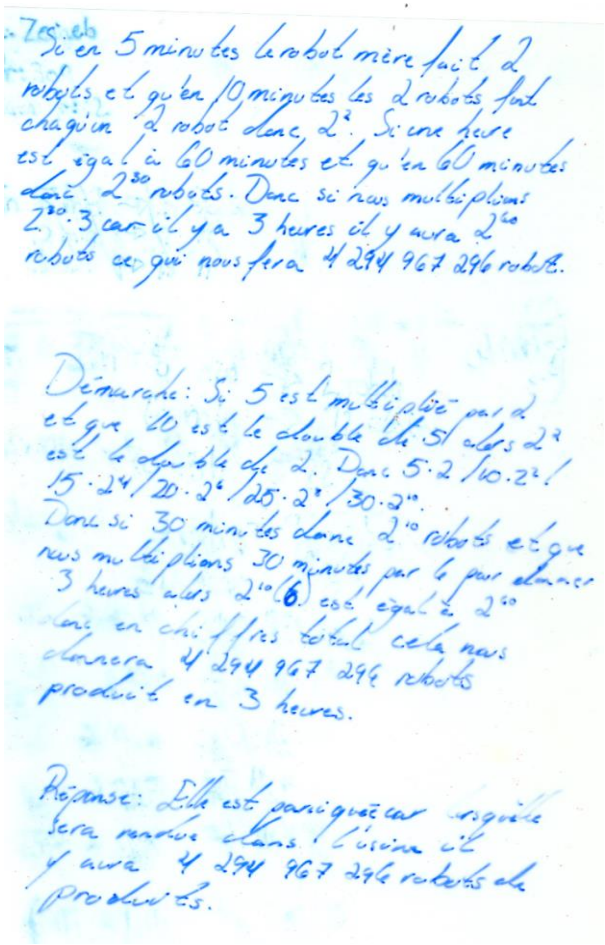
ex: 1·2 = 2
2·2 = 4
2·4 = 8
2·8 = 16
2·16 = 32
etc...

- Multiplier 36 fois par 2 parce que dans 3 heures il y a 180 minutes et puisque ça prend 5 min. faire 2 robots, alors 5 min., entre 36 fois dans 180 min.

Solution 2



Solution 3



Potentialités

Dans les trois cas, la structure multiplicative (le fait que ça double à chaque 5 minutes) est mise en évidence par les élèves, qui font apparaître une variété de modèles spontanés utilisés pour rendre compte de cette structure multiplicative : *sous forme de liste*, reproduisant le nombre de robots obtenus à chaque fois (cf. solution 1), chacun d'entre eux étant obtenu par la multiplication du précédent par 2 (une multiplication clairement mise en évidence par l'élève à la fin de chacune des lignes); *sous forme d'un arbre de choix* (cf. solution 2), reproduisant sous forme de bâtonnets les robots que l'on obtient à chaque fois; sous forme d'une écriture exponentielle- 2^2 en 10 minutes, 2^{30} en

60 minutes (cf. solution 3). Dans ces raisonnements, on observe de plus en parallèle un certain contrôle sur la variation correspondante du temps à prendre en compte : le résultat obtenu dans la solution 1 (indiqué par l'élève) correspond au 36ème nombre de la liste (soit le nombre de 5 minutes dans 3 heures); on retrouve 6 niveaux dans l'arbre de choix de la solution 2 (correspondant pour l'élève à 30 minutes, soit le nombre de 5 minutes dans 30 minutes); l'écriture exponentielle dans la solution 3 montre un contrôle du nombre de robots en fonction du temps écoulé (2 exposant 2 pour 10 minutes, soit 2 fois 5 minutes; 2 exposant 30 pour 60 minutes, soit 30 fois 5 minutes).

Ces divers raisonnements témoignent donc de potentialités des élèves et d'un certain contrôle de la structure de la situation (structure multiplicative-exponentielle de la variation du nombre de robots, structure multiplicative (addition répétée) de la variation du temps, élaboration de modèles spontanés). Ils témoignent, par ailleurs également, **de quelques difficultés**, sur lesquelles nous revenons maintenant.

La première solution fait apparaître une erreur de borne usuelle, que l'on retrouve dans le dénombrement (le nombre de départ de la liste est inclus dans le comptage des 36 intervalles de 5 minutes) : autrement dit l'élève contrôle en parallèle la variation du temps (une répétition du 5 minutes 36 fois nécessaire pour retrouver 3 heures) et la variation du nombre de robots (chaque nombre de la liste est multiplié par 2 pour trouver le suivant) mais dans le repérage final du nombre de robots, il identifiera le 36ème nombre de la liste plutôt que le 35ème. Il obtient de fait le nombre de robots au bout de 175 minutes.

Dans les deux autres cas, on observe une confusion entre les deux structures multiplicatives en jeu dans le problème (exponentielle et additive répétée) : ainsi dans la solution 2, la structure exponentielle, présente pour trouver le nombre de robots au bout de 30 minutes à travers l'arbre de choix, est perdue de vue dans ce qui suit (de 30 minutes à 60 minutes, puisque ça double, le nombre de robots double; et en 3 heures, il sera de 3 fois plus). Même chose dans la solution 3, où l'élève écrira si 10 est le

double de 5, alors 2^2 est le double de 2. Ainsi la co-variation est loin d'être simple à contrôler pour ces élèves, d'autant que deux types de structure y sont en jeu.
Comme nous l'avons déjà relevé précédemment, des raisonnements, des connaissances dans l'action sont mobilisées dans la situation proposée, comme en témoignent les éléments de solution qu'ils mettent de l'avant. On observe ainsi des difficultés chez les élèves mais **aussi des potentialités** de leur part dans les raisonnements et modèles qu'ils explicitent pour répondre à la question posée. En regard de la résolution de la situation-problème proposée, le portrait précédent rejoint donc les observations faites par les enseignants (des difficultés sont identifiées mais aussi des potentialités dépendant de la situation).

À la lumière de cette expérimentation, le type de situation-problème proposé semble donc être un enjeu à investiguer plus à fond en lien avec la résolution de situations-problèmes par des élèves en difficulté, notamment pour mieux comprendre les potentialités qu'ils sont susceptibles d'y déployer et leurs difficultés. Ces dernières ne semblent pas en effet indépendantes du type de situation-problème proposée.

Pour aller plus loin à cette étape, nous nous proposons d'aller voir ce que disent les recherches à ce sujet.

1.4 Portrait qui se dégage des recherches portant sur les élèves en difficulté et la résolution de problème en mathématiques : vers un recadrage du problème initial

De nombreux travaux, aussi bien au niveau international qu'au niveau du Québec, se sont intéressés aux élèves en difficulté en mathématiques (Bednarz, 2009; Bednarz et Saboya, 2006; Brousseau, 2009; Coffin *et al*., 2006; DeBlois, 2001; Dias, 2006; Giroux, 2005, 2013; Giroux et Ste Marie, 2006; Landry, 1999; Lemoyne et Lessard, 2003; Mary et Squalli, 2014; Mary et Theis, 2007; Perrin-Glorian, 1993; Salin, 2006, Theis *et al*., 2014). Ces travaux mettent en évidence, d'une part, des difficultés multiples, souvent imbriquées les unes dans les autres, en lien avec l'apprentissage de

différents concepts mathématiques et la résolution de problèmes (Bednarz et Saboya, 2006; DeBlois, 2001; Giroux, 2005; Landry, 1999; Lemoyne et Lessard, 2003; Perrin-Glorian, 1993; Salin, 2006). Ils relèvent, d'autre part, le potentiel que présentent certaines situations et interventions pour le développement d'habiletés dans ce domaine chez les élèves (Bednarz et Saboya, 2006; Berdonneau, 2006; Coffin *et al.*, 2006; Dias, 2006; Landry, 1999; Lemoyne, 1989; Mary *et al.*, 2008; Mary et Theis, 2007; Theis et al., 2014).

L'examen des études menées sur les élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques est abordé plus spécifiquement, dans ce qui suit, sous l'angle de la résolution de problèmes. Même si nous ne sommes pas dans ces travaux explicitement sur la résolution de situations-problèmes, ces derniers nous semblent intéressants à considérer. Ils permettent en effet de cerner l'influence possible de certaines caractéristiques de la situation proposée (emprise du contexte, mise en jeu de multiples concepts, présentation de l'énoncé, dimension temporelle). Ils appuient aussi l'intérêt qu'il y a de s'attarder aux potentialités des élèves au regard de différents types de situations. Quel éclairage apportent les recherches sur ces différents enjeux?

1.4.1 Influence de l'idée qu'on se fait d'un problème et de la présentation de l'énoncé : éclairage des recherches et développements théoriques

Perrin-Glorian (1993) a réalisé une importante étude longitudinale auprès des élèves de classes faibles[33]. Nous ne reprenons ici que les données relatives à la résolution de problèmes[34]. La *représentation que les élèves se font de la notion de problème et de ce que veut dire résoudre un problème* en mathématiques vient teinter la manière dont ils

[33] La chercheuse a repris dans cette étude des ingénieries didactiques élaborées sur la base d'analyses préalables (sur la mesure, les nombres rationnels) et qui s'étaient avérées riches du point de vue des apprentissages qu'elles permettent de construire chez les élèves des classes régulières. Leur mise à l'épreuve dans des classes faibles est le point de départ pour cette chercheuse d'un nouveau travail qui permettra de montrer la complexité des phénomènes d'apprentissage/enseignement dans ces classes.

[34] Ces dernières sont toutefois imbriquées dans un ensemble d'autres difficultés, qui montrent la complexité des phénomènes en cause (difficultés langagières, conceptuelles multiples, sociales).

vont appréhender celui-ci : les élèves faibles observés dans cette étude n'associent pas la résolution d'un problème à quelque chose qui fait appel à une heuristique. Pour la plupart, résoudre un problème est une occasion de faire des opérations et des calculs, et bon nombre d'entre eux pensent, face à un problème, qu'on a une réponse soit juste soit fausse. Ces élèves faibles sont de plus, dans cette résolution, *en quête d'algorithmes, de règles,* ce qui représente en fait pour eux une économie de pensée (Perrin-Glorian, 1993). Dans ce contexte, ils se construisent des règles qui ne prennent en compte qu'une partie de l'information et ont un domaine de validité limité. De plus, les élèves faibles vont chercher *à appliquer le cours,* dont la réappropriation pour un problème spécifique va s'avérer complexe. Cette recherche de mise en application du cours les conduit indubitablement à chercher à appliquer une règle, une définition, une propriété ou des opérations, même si ces dernières ne sont pas nécessairement pertinentes. Les élèves retiennent ce qui a été institutionnalisé (par exemple n.1/n= 1, n différent de 0) et ont des difficultés quand il s'agit de l'utiliser (pour trouver par exemple n.1/2n (n différent de 0)) (Perrin-Glorian, 1993).

De son côté, Berdonneau (2006) dans les activités de résolution de problème a expérimenté auprès des élèves de classes hétérogènes (incluant les élèves identifiés en difficulté) des quatre premiers niveaux de l'enseignement élémentaire, les « problèmes pour chercher » (problèmes sensiblement différents de la majorité des manuels en regard de leur contenu et de leur présentation, voir annexe B). Elle a noté que les élèves se heurtent à une *difficulté qui n'est pas liée au problème « mais à la manière dont il leur est communiqué* ». En effet, la difficulté peut résider dans la manière dont est présenté cet énoncé (un énoncé écrit, les dessins, la mise en situation influençant la compréhension de cet énoncé).

Pour aller plus loin à ce sujet sur les élèves en difficulté, il est intéressant de faire un détour sur ce qu'implique la compréhension d'un problème en mathématiques. On

quitte ici dans ce qui suit les élèves en difficulté pour entrer momentanément sur un plan théorique.

Comprendre l'énoncé d'un texte, c'est se faire, mentalement, une représentation du contenu du texte, qui prend appui sur le texte et les connaissances de l'élève (Coquin-Viennot, 2001). Julo (1995) dans le même sens souligne que « comprendre quelque chose ce serait, d'une manière ou d'une autre, construire une représentation de cette chose » (p. 11). Ce quelque chose, ou cette chose, peut être : un objet, un discours, un texte. Fayol (2003) nous permet d'aller plus loin; il ne s'agit pas juste de construire une représentation de la situation portée par un texte (ou un autre support) mais une représentation qui doit être intégrée: « Comprendre un discours ou un texte c'est construire une représentation mentale intégrée et cohérente de la situation décrite par ce discours ou ce texte » (p. 2).

Mais qu'est ce qu'une représentation intégrée? Les représentations peuvent être considérées comme un « investissement des perceptions et des conceptions » (Crémieux *et al.*, 1994, p. 50), voire des conceptions spontanées que l'élève mobilise pour que le discours ou le texte soit signifiant. Pour lire un énoncé (un texte), l'élève doit se fixer un projet : pourquoi lit-il? Que veut l'élève? Pour comprendre un texte, nous dit Fayol (2003), deux composantes sont nécessaires en vue d'une lecture aisée :

> La première a trait aux traitements perceptif et linguistique du texte. La deuxième concerne les processus généraux de compréhension : processus d'interprétation et de mise en relation des phrases successives, processus d'intégration de l'ensemble des informations dans une représentation cohérente unique (un modèle mental). La lecture constitue en quelque sorte une double tâche en ce qu'elle intègre le traitement de deux composantes qui se situent à la fois en complémentarité et en compétition. D'une part, le lecteur doit traiter successivement, en leur consacrant de l'attention, chacune des marques linguistiques. D'autre part, il lui faut, dans le même temps, élaborer une interprétation en s'appuyant sur la signification des mots et des phrases mais aussi en mobilisant ses connaissances préalables du domaine et de la langue. Il lui faut également gérer (quasi) simultanément le traitement de ces deux dimensions au cours même de la lecture (Fayol, 2003, p. 3-4).

Les points de vue des auteurs précédents sur la compréhension d'un énoncé nous amènent à dire que la compréhension d'un texte est une activité complexe qui exige de l'élève, et en particulier de l'élève en difficulté dans notre cas, une mobilisation de connaissances diverses dont d'une part, la maîtrise de la langue dans laquelle le texte est écrit et d'autre part, la représentation et l'interprétation appropriées du texte qui suppose au départ l'élaboration d'un projet. Ce projet procède du but à atteindre par les élèves qui peut être celui de résoudre la situation proposée.

Julo (1995) nous permet d'éclairer davantage ce qu'exige pour l'élève la construction de cette représentation dans le cas de la résolution de problèmes. Trois processus sont ici en jeu « le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation » (p. 29).

Le processus d'interprétation et de sélection

Ce processus s'appuie sur les données du problème incluant ici les informations pertinentes et non pertinentes. Il faut donc les décoder et les sélectionner. Comme l'exprime bien Julo (1995), « ce qui est donné, c'est tout un ensemble d'éléments qui forment ce que nous conviendrons d'appeler un *contexte sémantique* et c'est l'interprétation de ce contexte qui nous donne accès aux informations concernant l'objet et la tâche qui caractérisent le problème » (p. 31). Le contexte sémantique peut être défini comme un ensemble d'éléments de nature différente (Julo, 1995) qui permettent de comprendre l'énoncé d'un problème. Il recouvre les connaissances qui intéressent les transformations, les combinaisons et les comparaisons d'ensembles d'éléments incluant le rôle des objets décrits dans un problème (Fayol, 1990). Bien que les observations de Fayol (1990) portent sur des problèmes courts additifs, passés à des élèves de 2 ans et demi à 15 ans, elles apportent un éclairage sur ce processus de compréhension de l'énoncé et les facteurs susceptibles de l'influencer : l'organisation entre les éléments du problème et la clarté de l'énoncé d'un problème (vocabulaire utilisé, clarté des données et des inconnues, etc.) favorise la compréhension de

l'énoncé. Un autre facteur important qu'évoque Fayol (1990) dans ce processus est la formulation même de l'énoncé, dont la place occupée par la question (au début de l'énoncé par exemple ou à la fin). Fayol en arrive ici à la conclusion que la sémantique et la formulation des problèmes semblent influer sur la représentation que se construit un élève (Fayol, 1990). Le contexte sémantique est ainsi un facteur primordial dans la résolution de problème.

Lorsqu'on utilise dans un énoncé des mots tels que « la droite », l'élève dans sa représentation mentale peut penser à la droite de quelque chose. Tout dépend donc de ce que sait déjà l'élève, de ses conceptions initiales. Cependant Rey (2011, p. 46) souligne que les termes qui constituent un énoncé « prennent leur sens, non pas directement d'objets ou de phénomènes qui appartiendraient aux situations vécues, mais des relations qui sont établies entre eux au sein du texte ». Autrement dit, on peut parler de la droite dans un plan ou de la droite qui passe par deux points donnés sans qu'elle ne se réfère à une réalité tangible en lien avec les objets de sens. La droite dans ce contexte est en lien avec un plan ou avec les deux points donnés. La droite n'a de signification que dans son rapport avec les objets mathématiques qui sont le plan et les points de la droite. Rey (2011) ajoute que ce qui donne sens à une phrase c'est le contexte dans lequel le texte est écrit.

Par ailleurs, la manière dont le problème est communiqué aux élèves (Berdonneau, 2006), la présentation de l'énoncé, c'est-à-dire l'écriture en mots ou l'utilisation d'un autre support, tel le recours à une expérimentation, le recours à un dessin (Berdonneau, 2006), la formulation de l'énoncé et la place des questions (Fayol, 1990) sont autant d'éléments qui semblent influer sur la compréhension d'un énoncé[35]. De même, Fayol (2003) évoque l'influence de la langue dans laquelle le texte est écrit et de la sémantique des problèmes (Fayol, 1990). À la lumière de ce qui précède, on peut se

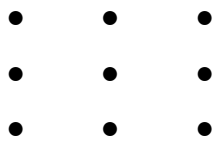
[35] Toutefois, Fayol (1990) traite des énoncés courts, de petits problèmes numériques en référence aux problèmes additifs évoqués précédemment.

questionner sur l'influence possible de la longueur et de la lourdeur de l'énoncé dans le cas des situations-problèmes proposées au plan institutionnel.

Le processus de structuration

Le contenu des interprétations est « un ensemble structuré » (Julo, 1995, p. 42). Les éléments qui le composent sont liés et forment un tout ayant un fonctionnement et une logique propres. Des dysfonctionnements peuvent intervenir dans ce processus de structuration. Julo (1995, p. 42) donne l'exemple ci-dessous lié au problème des 9 points de Maier[36].

Réunir les 9 points ci-dessous par 4 segments de droite tracés sans lever le crayon.



Julo (1995) rapporte que cette activité nécessite du temps et de « nombreux essais » (p. 43) pour aboutir au tracé souhaité. Il explique la difficulté par la nécessité de prendre en considération une information non donnée à savoir « on peut tracer des segments qui sortent du carré » (p. 43). Selon Julo (1995), si cette information complémentaire est donnée, celle-ci permet de rechercher adéquatement la solution au problème posé. Mais en même temps, elle simplifie la tâche sur le plan de la résolution, de sorte qu'on peut se demander si les deux tâches sont équivalentes, si elles sollicitent la même activité mathématique. On perçoit ici l'influence possible des variables didactiques introduites (dans ce cas préciser ou non qu'on peut tracer des segments en dehors du carré).

Le processus d'opérationnalisation

[36] Julo (1995, p.43) parle « d'un problème classique » et réfère à : OLERON P. –Les activités intellectuelles –in : *Traité de psychologie expérimentale, Tome VII, L'intelligence*, Paris, Presses Universitaires de France, 1969.

Ce processus permet d'agir (faire des calculs, réaliser des dessins, développer un modèle, etc.) et de concevoir un plan. C'est à ce niveau que l'élève élabore des stratégies ou une démarche en vue de résoudre le problème. Ce qui permet aussi de mettre en action les savoirs acquis. Pour Fayol, le projet que se donne l'élève est intégré à ce processus tout comme il l'était aux deux autres.

Ainsi, plusieurs processus entrent en jeu dans la compréhension de l'énoncé, entre autres, comme l'a noté Julo (1995), le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation.

Qu'est ce qui se dégage de ce qui précède?

La complexité du processus de compréhension d'un problème, de ce qu'il recouvre et exige de la part de l'élève, notamment de l'élève en difficulté, ressort clairement des travaux précédents. Des éléments fondamentaux intervenant dans ce processus d'interprétation d'un problème permettent de comprendre sa difficulté éventuelle pour les élèves en difficulté :

- Une interférence non négligeable dans ce processus d'interprétation du problème, l'idée que les élèves se font de ce qu'est un problème en mathématiques et de sa résolution. Par exemple, le fait qu'un problème ne soit pas associé à une heuristique mais à une occasion de faire des opérations ou du calcul, à une réponse juste ou fausse, ou encore le fait que le problème soit associé à une mise en application d'un cours, risquent fort de court-circuiter un processus de résolution dont la solution n'est pas immédiate, nécessite des essais multiples et s'étale sur une durée longue (cas des situations-problèmes).
- Une influence de la formulation des problèmes proposés (la place de la question, l'organisation des idées, la clarté des données et des inconnues …) et de la manière dont les problèmes sont communiqués aux élèves (écrit en mots, support expérimental, dessin, etc.) est également à considérer. Ces travaux pointent en effet ces variables susceptibles d'influencer la résolution. Ils

interrogent de plus directement certaines situations-problèmes (longueur de l'énoncé, multiples contraintes) dans ce qu'elles vont exiger de l'élève et leurs effets possibles.

- Enfin, l'éclairage théorique de ce que recouvre le processus d'interprétation et de sélection met en évidence qu'il s'agit bien plus que d'une simple activité de lecture : la construction d'une représentation mentale, intégrée et cohérente, de la part de l'élève est ici en jeu, faisant appel à diverses dimensions imbriquées devant être gérées au cours de la lecture même, prenant appui sur un projet que se fixe l'élève (il y a un enjeu à cette résolution et la lecture est orientée par ce projet), sur le texte et les connaissances de l'élève.

Comme le souligne Landry (1999), cette interprétation exige d'avoir « une vue d'ensemble des données du problème, de leurs relations, de leur enchaînement » qui concoure à « l'engagement réfléchi » dans le problème et à « une amorce de solution » de celui-ci. Krutetskii (1976) cité par Saboya (2010), mentionne que l'élève « fort » a la possibilité de reconnaitre les informations pertinentes (et non pertinentes) et les relations entre elles. En revanche « le sujet faible a tendance à s'arrêter à des détails superflus et aux données numériques, sans se préoccuper des relations entre les données » (Saboya, 2010, p. 65).

Bien que la compréhension d'un énoncé concerne tous les élèves, elle montre la complexité qu'elle peut exiger de l'élève identifié en difficulté. Nos questionnements à ce sujet sur les élèves en difficulté, face notamment à un énoncé en mots, long, comportant de multiples données (cas des situations-problèmes du ministère de l'Éducation du Québec telles qu'elles se dégagent des caractéristiques précédentes) demeurent et sont loin d'être clos.

Le contexte dans lequel s'inscrit un problème pourrait bien aussi être un élément clé dans la compréhension d'un problème et sa résolution. Une situation contextualisée,

une des balises clés qui ressort de notre analyse des documents ministériels sur la notion de situation-problème, est-elle nécessairement un apport?

1.4.2 Emprise du contexte

Certaines études montrent l'influence que peut avoir le contexte (Theis et Gagnon, 2010) dans la résolution de problèmes, notamment par des élèves identifiés en difficulté (élèves faibles) (Perrin-Glorian, 1993); Elle rend compte à ce propos de difficultés observées où la logique mathématique peut entrer en conflit avec la logique du quotidien (Perrin-Glorian, 1993, 1994a et 1994b). Elle donne à ce sujet l'exemple d'un élève de CM1 (4^{e} année primaire), qu'elle a suivi pendant six mois, à travers l'énoncé d'un problème formulé par l'élève (« J'ai 36 billes, je veux les mettre dans 20 sacs. Combien m'en restera-t-il? ») et sa résolution. Dans cet énoncé, il manque une donnée, le nombre de billes par sac, ce qui pour cet élève n'est pas vraiment problématique. Au départ, il pensait en effet mettre une bille par sac, ce qu'il révélera plus tard, quand la chercheuse lui demandera comment il met les billes dans les sacs « une par une par exemple, ou quatre par quatre ». Il dessine alors 20 boîtes, écrit 4 sur chacune d'entre elles, et ne prévoit pas que les 36 billes ne suffiront pas. Il semble, nous dit alors l'auteure

> « qu'on ait là une contradiction entre une logique concrète où on dispose de données un peu anarchiques : on peut bien avoir n'importe quel nombre de billes et n'importe quel nombre de boîtes et quand même ranger les billes dans des boîtes, et une logique de problème scolaire de mathématiques où il faut que les données soient telles qu'on puisse résoudre le problème avec les données dont on dispose, et où il faut donc anticiper la solution pour choisir les données. » (Perrin-Glorian, 1994a, pp. 9-10).

Un tel conflit entre logique du quotidien et logique de résolution de problèmes en mathématiques est visible aussi dans ce problème où on demande aux élèves de prévoir le temps que mettrait un coureur sur 90 m en connaissant le temps mis pour parcourir 60 m, où on prend le soin d'indiquer que la course est à vitesse constante; ce qui n'est

pas le cas pour une course réelle puisque la vitesse du coureur n'est pas nécessairement constante (Gellert, 2009; Perrin-Glorian, 1993).

Dans le même registre, l'élève Sandra dont nous avons parlée à la section 1.3.1 mentionne, dans le partage de 65 $ en trois parts, que chaque personne aurait 21,66 $ et le reste- 2 sous, dit-elle, reviendra à M. Picard, et ce dans un souci d'être équitable. Pourtant, au regard d'un partage équitable, chaque personne, selon une logique scolaire mathématique devrait recevoir (21 et 2/3). Ce résultat a du sens dans la logique mathématique, mais pas dans la logique du quotidien à laquelle réfère le problème.

Toujours sur cette emprise possible du contexte, Brossard et Wargnier (1992-1993), cités par Schubauer-Leoni et Ntamakiliro (1994, p. 93) mettent en évidence que « les élèves qui ont un statut scolaire « faible » se révèlent tout spécialement sensibles à la prégnance du contexte manipulé expérimentalement au travers de l'intitulé attribué à la tâche ». Les études de Saljo et Wyndhamm (1987) - citées par Schubauer-Leoni et Ntamakiliro (1994, pp. 92-93) - vont dans le même sens : « l'attribution d'un titre à une page de problèmes à résoudre affecte la version publique du travail de l'élève ». On se rapproche davantage toutefois dans ces études d'un effet de contrat didactique (voir aussi Giroux (2013) qui pointe une grande sensibilité des élèves en difficulté au contrat didactique)

> […] Selon que les élèves se trouvent confrontés à une activité indiquant qu'il s'agit de « problèmes mathématiques » ou de « problèmes de mathématiques : multiplication» avec une prégnance plus ou moins grande (d'après les caractères typographiques utilisés) de l'information, renforcée ou non par un exemple précis de résolution tel qu'attendu, certains élèves vont plutôt faire apparaître une multiplication pour résoudre un problème de contenance (Schubauer-Leoni et Ntamakiliro, 1994, pp. 92-93).

Ces quelques études semblent conforter l'idée selon laquelle le contexte joue un rôle non négligeable dans la résolution de problèmes en mathématiques pour les élèves en difficulté.

En somme, la présence d'un contexte, une des caractéristiques centrales dans la situation-problème selon le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, peut influer sur la compréhension d'un problème et sa résolution.

Une situation-problème fait aussi appel, nous l'avons vu (cf. figure 1.7), à un réseau de concepts et de processus puisant parfois à plusieurs domaines mathématiques (numérique, géométrique, algébrique…). Quel éclairage les recherches amènent-elles à ce sujet?

1.4.3 Mobilisation de multiples concepts et autres dimensions associées à la complexité

La résolution d'une situation-problème (au sens du MELS) fait intervenir un réseau de concepts et de processus, sollicite des liens intra-mathématiques, exige la mobilisation de multiples données, sollicite parfois de passer d'un registre à l'autre. C'est en cela que sa résolution est complexe (tout au moins c'est l'idée de complexité qui ressort de l'analyse des documents ministériels). Que sait-on à propos des élèves en difficulté? Nous avons déjà vu précédemment comment la lourdeur de l'énoncé, ses multiples données, pouvait jouer dans la compréhension de l'énoncé (voir 1.4.1). Mais que sait-on à propos d'autres dimensions?

Le changement de registre (figural, verbal, symbolique, numérique, etc.) c'est-à-dire le passage d'un registre à un autre n'est pas aisé pour les élèves en difficulté. Par exemple, dans une expérimentation touchant à l'algèbre et menée auprès d'une élève en difficuté, Bednarz et Saboya (2006) soulignent que le passage du registre verbal (messages en mots) au registre symbolique (message symbolique) demeure fragile pour cette élève. Dans le même sens, Perrin-Glorian (1993) relève que les élèves montrent peu de flexibilité (difficulté qui peut affecter le processus de résolution) à changer de point de vue face à une activité proposée. Ainsi, un problème posé dans un registre géométrique sera traité dans ce registre par ces élèves, même s'il pourrait très bien être traité, et cela pourrait être pertinent de le faire, dans un registre numérique. Perrin-Glorian (1993) donne ici l'exemple du demi-périmètre d'un rectangle qui sera traité par certains élèves

comme « un demi-bord » (p.26) et non comme faisant intervenir des relations entre des nombres, voire des « relations algébriques » (p. 26). Ainsi, le changement de registre (par exemple de la géométrie à l'arithmétique ou inversement) est difficile à opérer pour certains élèves. La résolution de situations-problèmes, sollicitant un tel passage ou changement de registre, pourrait bien en ce sens être difficile pour les élèves en difficulté.

Enfin, toujours en contexte de résolution de problèmes, même si cette dimension ne relève pas comme telle de la complexité, il est intéressant de mentionner que les élèves ont peu de contrôle sur le processus de résolution, revenant rarement sur le résultat et la démarche. Toutefois, cette difficulté n'est pas propre aux classes faibles, elle se retrouve aussi chez les élèves des classes régulières[37] (Margolinas, 1989; Saboya, 2010). Saboya (2010, p. 41) relève que « les élèves, à différents niveaux et dans différents domaines, s'engagent dans la tâche en mobilisant des connaissances mais font montre d'un contrôle limité sur leur activité mathématique en ce qui concerne la vérification, l'engagement réfléchi et les choix parmi plusieurs possibilités ».

Comment, enfin, la variable du temps accordé pour la résolution joue-t-elle pour les élèves en difficulté en résolution de problèmes?

1.4.4 Élément temporel

Des résultats de recherche indiquent que les élèves ne voient pas dans un problème, comme nous l'avons mentionné précédemment (voir 1.4.1, l'idée qu'ils se font d'un problème), quelque chose qui s'étale sur une longue période de temps. Ils associent celui-ci à une résolution courte (ils sont à la recherche d'opérations ou de calculs à faire, d'une application du cours, etc…). Le fait qu'un problème puisse exiger du

[37] La difficulté de changer de registre, de prendre d'autres points de vue, pour aborder une résolution apparaît un des aspects important relevé par Perrin-Glorian dans les classes faibles. Elle ne se retrouve pas nécessairement chez les élèves de classes régulières.

temps, ce qui est le cas des situations-problèmes, pourrait ainsi entraîner le découragement de la part des élèves lorsque confrontés à leur résolution.

À ce sujet, Perrin-Glorian (1993, p. 92) propose que l'on recherche « les conditions qui font qu'un problème va pouvoir continuer à vivre et à évoluer dans une classe ». Il s'agit là d'une question centrale pour le travail autour d'une situation-problème particulièrement dans le travail avec les élèves en difficulté : il ne s'agit pas juste de s'interroger sur son énoncé mais aussi sur les conditions qui permettent de la faire vivre sur une période longue. À cet effet, Giroux (2013) relève la difficulté d'élaborer des situations didactiques qui fonctionnent avec les élèves en difficulté (Giroux, 2013). Faire fonctionner des situations qui s'appuient sur une analyse didactique, ne va pas de soi, comme le montrent bien à cet effet les travaux menés par Perrin-Glorian (1993) dans les classes faibles. Les situations élaborées, qui provenaient d'ingénieries didactiques ayant fait leur preuve antérieurement auprès d'élèves de classes régulières, n'allaient pas du tout de soi dans ces classes. Giroux (2013) relève à cet effet, sur la base des travaux de Salin (2006), d'une part : a) « des dificultés d'asseoir ces situations sur des connaissances construites antérieurement»; b) « des difficultés à faire fonctionner la dévolution, autrement dit, de mettre en place un milieu qui favorise le fonctionnement autonome des élèves en leur offrant des rétroactions lisibles» (Giroux, 2013, p. 67), ou encore le passage difficile mais nécessaire de connaissances à connaissances outils. Elle mentionne enfin, en rapportant l'analyse de Perrin-Glorian (1993), les difficultés des élèves des classes faibles à passer à «l'institutionnalisation». Il y a donc un véritable défi à élaborer des situations didactiques qui fonctionnent dans ces classes sur un long temps.

Berdonneau (2006) fournit à cet effet certaines pistes. Dans le cadre d'une intervention exploitant avec des élèves ce qu'elle nomme des « situations-recherches »[38], les élèves

[38] Nous revenons sur ceci plus loin.

identifiés en difficulté ont évolué au regard de leur conception du problème. Ils ont pris conscience que la résolution d'un problème peut prendre du temps, que cette résolution ne se limite pas à trouver un résultat, que certains problèmes peuvent avoir plusieurs solutions. Selon elle, si les élèves arrivent à une solution dans un temps court, non seulement l'énoncé n'est pas une situation-recherche mais cela peut aboutir à une « démobilisation du reste de la classe » (p. 5), d'où la nécessité de bien choisir ou construire, selon nous, la situation. Il y a donc là des pistes par rapport à la question que posait Perrin-Glorian. Nous y reviendrons plus loin (cf section 1.4.5)

À ce stade, notre regard sur l'ensemble des recherches évoquées précédemment débouche sur les éléments de réflexion suivants :

- Notre analyse des documents ministériels pointe des situations-problèmes, d'un type particulier, qui se caractérisent par un certain nombre de balises : une situation complexe (i.e. impliquant plusieurs concepts et processus, plusieurs données; une lourdeur et longueur de l'énoncé, ainsi que plusieurs domaines des mathématiques en jeu, parfois un changement de registre..); une situation contextualisée (i.e contexte réel ou réaliste, purement mathématique, référence aux autres disciplines et aux domaines généraux de formation); une situation signifiante (suscite la curiosité de l'élève, favorise sa réflexion et le touche dans ses préoccupations); et un défi à la portée de l'élève, ou un obstacle à franchir, ou un conflit cognitif (bien qu'une certaine ambigüité existe ici).
- Ces caractéristiques en usage ne vont pas de soi pour les élèves en difficulté, si on en croit les recherches menées sur la résolution de problèmes auprès de ces élèves au regard de la compréhension de l'énoncé, de l'emprise possible du contexte, de sa complexité (multiples données, différents registres, etc.), et d'un travail qui sollicite une résolution sur une longue durée. Elles posent dès lors la question de

l'intérêt qu'il peut y avoir à consider d'autres types de situations-problèmes.

- Nos observations en lien avec d'autres situations (exemple de la situation les robots) et les propos des enseignants laissent penser que la résolution des élèves n'est pas la même dans toutes les situations, ce qui nous conduit à vouloir pousser plus loin notre analyse d'autres types de situations, de leurs aménagements et de ce qui s'y produit. À l'image du problème des robots que nous avons expérimenté, permettent-elles de mettre en évidence des potentialités des élèves? Que nous disent les recherches à ce sujet? C'est ce que nous examinons dans la section suivante.

1.4.5 Influence de différents types de situations et potentialités des élèves

Quelle influence peuvent avoir différents types de problèmes ou « situations-problèmes » sur la résolution des élèves en difficulté? Nous entrons ici dans l'analyse de « variables » susceptibles d'influencer la résolution de telles situations[39].

Certains travaux de recherche montrent le rôle du marquage scolaire de la situation présentée aux élèves (Lemoyne, 1989). Ainsi un blocage face au problème ne se manifeste pas partout : « chez l'élève (en difficulté) la peur de ne pas savoir la réponse n'est pas généralisée à tous les contenus mathématiques et ne se manifeste pas dans toutes (les) situations didactiques » (p. 83). L'auteure distingue ici deux types de situations, intéressantes à considérer pour notre propos : selon que celles-ci sont marquées scolairement ou non. Ses données nous montrent que l'élève identifié en difficulté aux prises avec une situation qui n'est pas marquée scolairement retrouve « ses fonctions constructives de sens, investit ses savoirs mathématiques et peut ainsi réagir brillamment à ces situations » (Lemoyne, 1989, p. 83). À titre illustratif, elle

[39] Nous élargissons ici à la prise en compte d'autres situations que des situations-problèmes (au sens où nous l'avons mis en évidence précédemment) de manière à ouvrir sur des éléments susceptibles d'être porteurs de sens pour des élèves en difficulté.

rapporte la situation suivante, « non marquée » scolairement, qui a été proposée par une intervenante (I) à un élève du primaire (E) en vue d'évaluer la compréhension de l'écriture des nombres naturels.

> (I.) J'ai été la semaine dernière confrontée à une discussion vive entre deux élèves de la classe de 5ème année qui étaient convaincus d'avoir chacun trouvé la bonne réponse au problème suivant. Le premier élève avait trouvé 1015 grains pour la boîte jaune et 1021 pour la boîte verte; le second élève avait trouvé 1030 grains pour chacune des boîtes.
> Voici le problème : j'ai déposé des grains de café dans ces deux boîtes de couleurs différentes. Pour trouver combien de grains de café j'ai mis dans chacune d'elles, tu ne peux ouvrir ces boîtes; tu dois alors utiliser les informations que je te donne. J'aimerais que tu me dises quel est l'élève qui a raison. Voici les informations :
> (1) J'ai d'abord déposé 2 de grains de café dans la boîte jaune, puis un sac contenant 1 millier de grains.
> (2) Dans la boîte verte, j'ai déposé d'abord 2 grains, puis un sac contenant 998 grains puis 2 autres grains.
> (3) J'ai ajouté 15 dizaines de grains dans la boîte jaune.
> (4) J'ai mis 1 centaine de grains dans la boîte verte.
> (5) J'ai enlevé 12 dizaines de grains de la boîte jaune; j'ai continué enlevant encore 2 grains de la boîte jaune.
> (6) J'ai déposé 40 grains et 1 dizaine de grains dans la boîte verte.
> (7) J'ai finalement enlevé 122 grains de la boîte verte. (p.84-85).

Si on analyse plus finement cette situation proposée à l'élève, elle évoque un récit contextualisé (celui d'une classe et de 2 élèves confrontés à la résolution d'une devinette). La situation ne correspond pas aux exercices et problèmes usuels que l'on retrouve à l'école à ce sujet (dans ce cas le travail sur la numération et l'écriture des nombres). Sa question non plus n'est pas usuelle, il ne s'agit pas de résoudre le problème et de répondre à la question combien y a t-il de grains dans chaque boîte, mais de savoir quel est l'élève qui a raison. De multiples contraintes sont par ailleurs en jeu (existence de deux boîtes de couleur différente- la boîte jaune et la boîte verte- dans lesquelles on dépose des grains de café en tenant compte de multiples informations). Elle rejoint donc certaines balises identifiées précédemment d'une situation-problème (cf. figure 1.7) : elle est contextualisée, fait appel à des données

multiples, est signifiante, représente un défi à la portée de l'élève. Mais elle ne rejoint pas toutes les balises d'une situation-problème (elle n'est nullement complexe au sens du MELS, par exemple énoncé long, multiples contraintes, plusieurs concepts et processus). On ne peut donc parler, au sens institutionnel, d'une situation-problème.

Cependant, ce ne sont pas ici ces balises qui nous intéressent mais un tout autre critère, celui du « non marquage » de cette situation, et de son impact sur la manière dont l'élève va aborder le problème. L'élève interviewé, après la lecture du problème, dira, montrant bien qu'il s'engage dans le défi qui lui est posé (trancher entre la réponse des deux élèves) :

> « Il doit y avoir une raison pour parler comme ça…on part avec 2 dans les 2 boîtes puis 1000 la jaune et 998 et 2 la verte…1000 » (p. 85).

Lemoyne explicite alors la démarche de cet élève :

Jaune	Verte
2	998-999-1000-1002
1002	
1152	1102-1142-1152
1032-1030	1030

et l'élève déclare à la fin : « c'est le deuxième qui a raison » (p. 85).

Dans ce protocole, comme le souligne Lemoyne (1989, p. 84), « l'élève ne commet aucune erreur d'interprétation des représentations (des nombres) ». Il affine une stratégie qui l'amène au résultat. En revanche, cet élève, lorsque placé devant une situation marquée scolairement, faisant appel à des connaissances similaires sur la numération, va signifier son malaise. Nous la présentons ci-dessous telle que rapportée par Lemoyne (1989) :

> (I.) Peux-tu faire les deux exercices suivants :
> 1. Un nombre est composé de : 5 unités, 1 millier, 13 dizaines et 10 unités. Quel est ce nombre? Encercle la bonne réponse :
> a) 51140; b) 100028; c) 1145; d) 1028; e) 128.
> 2. Un nombre est composé de : 5 unités, 994 unités, 1 centaine, 40 unités, 1 dizaine et 6 unités. Quel est ce nombre?
> Encercle la bonne réponse :

a)1019; b) 2055; c) 2046; d) 5114; e) 1145; f) 1001055. (p. 85).
(E.) L'élève lit chacun des problèmes et dit : *« j'aime pas ces problème*s… »
[en référence au premier exercice, il tente alors une résolution] : 511 310 […] non […] peut-être 51 140 […] 10 unités […]1 dizaine […] je sais pas […] peut-être le a
[en référence au 2ème exercice] 5 unités…5000…5994…1 centaine…1005994…+ 40…1006034…1006044…1006050…[…]
Je comprends pas ces problèmes…pourquoi toutes sortes d'unités?
(I.) Pourquoi n'aimes-tu pas ces problèmes?
(E.) *Je ne sais jamais comment faire*…comme la valeur du nombre dans un nombre…c'est pareil.
(I.) Peux-tu me donner un exemple?
(E.) Supposons 7852 le 5 vaut quoi?
(I.) Le sais-tu?
(E.) Ici oui, le 5 vaut 5 dizaines; c'est pas la bonne question…par exemple combien y-a-t-il de dizaines dans 7852…je sais que c'est pas 5 qui est bon.
(I.) Si je te dis 15 dizaines de grains de café, combien de grains y a-t-il?
(E.) 150…
(I.). Si je te dis 15 dizaines et 2 unités de grains de café
(E.) 152 facile.

Comme le montre le protocole ci-dessus, l'élève éprouve des difficultés dans ce type de situation très marquée scolairement (un type d'exercice classique dans les manuels dans le travail sur la numération). Manifestement, l'élève est bloqué et frustré dans ce type de situation (« j'aime pas ces problèmes, je comprends pas ces problèmes/pourquoi toutes sortes d'unités ») alors qu'il comprend fort bien dans l'autre situation la signification des groupements en jeu dans l'écriture des nombres et peut l'utiliser (15 dizaines de grains, etc.). Ce facteur (*situation marquée ou non scolairement*) apparaît important dans le déroulement de nos travaux au regard du type de situations-problèmes à proposer aux élèves pour que puissent s'exprimer les potentialités des élèves.

Le *type de situation* (incluant la manière dont elle est communiquée) pourrait bien être un autre élément à considérer. Ainsi Berdonneau (2006, p. 1) parle dans ses travaux de «*problèmes pour chercher*», qui semblent influer sur la manière dont les élèves abordent la résolution. Quelles sont les caractéristiques de ces situations? Elles

impliquent plusieurs domaines mathématiques, par exemple l'arithmétique (numération, ordre, opérations) et la géométrie (plane et de l'espace); elles ne reposent pas sur des contextes réels ou réalistes, mais leur *contexte* est *mathématique* et renvoie à *un certain nombre de contraintes à prendre en compte*; les situations proposées sont présentées oralement aux élèves par l'enseignant; leurs énoncés ont pour base des *éléments de manipulation*; leur résolution débouche dans bien des cas sur *plusieurs solutions*. Nous en donnons quelques exemples à l'annexe B.

Ces activités, entre autres, ont été proposées à des élèves de 5e et 6e année du primaire au cours d'une expérimentation menée pendant deux ans. Leurs résultats laissent pointer un potentiel.

En effet, Berdonneau (2006, p. 5) souligne ce qui suit lors d'une expérimentation :

> […] une remarque, inattendue pour les enseignants, est revenue à de multiples reprises : les élèves qui aboutissent les premiers à une solution effective ne sont pas toujours «les bons élèves», ceux-ci semblant parfois totalement déconcertés par ce type de problèmes. À la surprise des maîtres, certains élèves considérés en difficulté en mathématiques se montraient plus performants que nombre de « têtes de classe » : dans quelques cas cela a été une véritable révélation pour l'adulte, pour qui l'élève semblait parfois presque en situation de totale déroute en mathématiques.

Dans une étude qui cherchait à connaître « le potentiel de raisonnement d'élèves à risque scolarisés dans une classe spécialisée de fin primaire », Mary et Theis (2007) mettent en évidence dans le même sens d'autres types de situations prometteuses à considérer**.**

Ces situations, exploitées ici en lien avec le travail sur les statistiques, ont les caractéristiques ici de *partir de données réelles (collectées par les élèves)* pour avancer sur des *questions* à résoudre *(élaborées par les élèves)* (cf. annexe C pour un exemple de situation détaillée élaborée par les élèves).

Le déroulement de l'expérimentation montre ici *l'apport du contexte* dans la manière qu'ont les élèves d'aborder de manière réfléchie les données et la résolution : Mary et Theis (2007, p. 588) soulignent que les élèves estiment que « si quelqu'un porte des lunettes, ce n'est pas nécessairement parce qu'il a passé trop d'heures devant la télévision ». L'expérimentation a par ailleurs montré que les élèves ont recours à diverses « solutions riches et originales » : quelques solutions partent d'intuition des élèves; d'autres mobilisent des concepts connus tels que le calcul de la moyenne, le pourcentage, la multiplication, le regroupement, etc. L'étude semble ici montrer que le potentiel mathématique qui s'actualise chez les élèves pourrait être influencé par un *type de situations dont ils sont des acteurs clés (une situation qu'ils ont élaborée)* : les situations-problèmes « qui ont été proposées aux élèves consistaient à inventer une méthode pour répondre à des questions sorties du domaine réel[40], que se sont posées eux-mêmes les élèves » (Mary et Theis, 2007, p. 595).

Ces différents travaux ouvrent, avec d'autres, sur l'intérêt que présentent certaines situations et interventions (Bednarz, 2001; Landry, 1999; Lemoyne, 1989; Lemoyne et Bisaillon, 2006; Mary et Theis, 2007) dans ce domaine. Il s'agit, entre autres, de l'apport de dispositifs s'articulant sur les modèles (notations intermédiaires) développés par les élèves (Barry, 2009; Bednarz et Saboya, 2006; Landry, 1999); du potentiel d'une démarche de modélisation en résolution de problèmes prenant appui sur certains types de problèmes en mathématiques (Barry, 2009; Coffin *et al.*, 2006; Dias, 2006; Mary *et al.*, 2008) tels les "problèmes pour chercher" ou les situations-recherche (Berdonneau, 2006; Coffin *et al.*, 2006; Grenier et Payan, 1998); les situations avec une dimension expérimentale (Berdonneau, 2006; Dias, 2006); voire

[40] On peut toutefois ici se demander si des situations qui sortent du domaine réel sont toujours un apport pour susciter l'engagement des élèves.

des situations-problèmes liées à la construction de connaissances nouvelles (Brousseau, 1981, 1989).

Nous revenons plus précisément sur certaines des études précédentes.

1.4.6 Exploration de différentes situations et potentialités des élèves

Certaines études menées autour de la résolution de problèmes tendent à montrer qu'il est possible de développer chez les élèves identifiés en difficulté d'apprentissage en mathématiques des habiletés dans ce domaine, en misant sur les potentialités de ces élèves (Bednarz, 2001; Landry, 1999).

Ainsi, dans une recherche exploratoire portant sur le rôle de la validation et l'argumentation dans la construction de généralisations algébriques et leurs justifications chez des élèves identifiés en difficulté grave d'apprentissage (adaptation scolaire), Mary *et al.* (2008, p. 1) ont proposé la situation en annexe D aux élèves. C'est une activité proche d'une situation à caractère expérimental. En effet, la première tâche de cette activité consiste à prédire sans la grille le nombre qui va apparaître dans la case d'arrivée (carré bleu) connaissant le nombre de la case de départ (carré rouge). Sous un autre angle, elle est aussi proche d'une situation-recherche (Grenier et Payan, 1998) puisqu'elle envisage de formuler une règle générale donc un modèle qui permet de trouver les résultats pour différentes formes.

Les chercheurs montrent, à travers cette situation, l'émergence des connaissances mathématiques des élèves sur les nombres et leurs capacités à raisonner. En fondant leur intervention sur la prise en compte des connaissances et raisonnements des élèves, les auteurs de cette étude en arrivent aux observations suivantes : les élèves ont recours à différentes stratégies (certains élèves dénombrent, d'autres procèdent mentalement, d'autres encore utilisent des stratégies variées en se détachant même du matériel). Ils sont en mesure de passer, au-delà des exemples, à une généralisation, proposant une règle qu'ils formulent dans leurs mots et qui leur permet de soutenir leur raisonnement

et de prédire un nombre. Les chercheurs notent par ailleurs la motivation des élèves et leur maintien dans le problème (une dimension importante si on réfère à la remarque de Perrin-Glorian (1993, p. 92), au regard de la nécessité de faire vivre le problème sur le long terme) d'autant que (nous révèlent les chercheurs) les discussions des élèves se poursuivent en dehors des séances de classe, pendant la période de recréation.

Dias (2006) obtient des résultats semblables avec une situation de recherche ayant une dimension expérimentale, menée auprès d'un groupe d'élèves identifiés en difficulté (ces élèves présentaient tous des difficultés de langage). La situation se présente sous forme d'une énigme :

> Le maître du Donjon est un grand sorcier qui jette tout le temps des sorts. Pour cela il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais personne ne sait combien il en cache. Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des polyèdres réguliers. Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon en possède ?[41]

Pour la résolution de l'énigme, du matériel[42] est remis aux élèves pour leur permettre de construire et de défaire des solides (polygones en plastique).

Dias (2006) a relevé que ces élèves ont amélioré leurs capacités de construction et de raisonnement, ces derniers proposant des solutions à l'énigme et participant à la discussion inhérente à l'activité. Les résultats mettent ainsi en évidence les potentialités des élèves dans les situations-recherche ayant une dimension expérimentale (Dias, 2006; Mary *et al.*, 2008).

Dias (2006), dans la lignée de cette expérience, propose des balises pour délimiter un tel type de situation : une « *situation de recherche à dimension expérimentale* ». La première repose sur la nécessité pour l'enseignant d'avoir une « *réflexion*

[41] Avant cette situation, un rappel de connaissances sur les polyèdres a été fait à partir de la manipulation d'un matériel : il s'agissait de construire des solides fermés, de les décrire et les classer. Il s'agissait aussi de revoir le vocabulaire lié à la géométrie dans l'espace.

[42] Les objets et figures suivants sont proposés aux élèves : règles, compas, ciseaux, équerre etc.; triangles isocèles, rectangles ou équilatéraux, des rectangles, des losanges et des carrés, ainsi que des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones réguliers.

épistémologique sur les *objets mathématiques en jeu* dans la situation » (Dias, 2006, p. 8). La deuxième porte sur la médiation entre les sujets- ici les élèves (ceux qui sont appelés à agir dans la situation) et les objets-sur lesquels on agit, médiation qui inclut trois registres : un *registre sémantique* (la situation énoncée favorise-t-elle le discours sur les objets de la part des élèves?), un registre *syntaxique* (renvoyant à la création des mots et des actes associés). Enfin, un registre *pragmatique* (chaque élève est susceptible de changer, dans cette situation, son rapport aux savoirs). La troisième caractéristique est la *mise en jeu d'outils* (symboliques ou matériels) de *modélisation* dans la situation de recherche. Dias (2006, p. 9) souligne en effet :

> S'il est bien admis que la modélisation est une phase importante dans le processus de résolution de problème (et plus largement dans celui du raisonnement), [*la possibilité d'utiliser des outils pour favoriser cette construction de modèles*] est un aménagement didactique nécessaire pour des élèves en difficulté.

Enfin, la quatrième caractéristique concerne les différents statuts et rôles qui sont accordés aux élèves dans une situation de recherche (Dias, 2006)**.** Dans l'exemple présenté, la situation a permis aux élèves d'être alternativement joueur, chercheur et acteur. Ce tryptique (joueur, chercheur et acteur) favorise la construction des modèles par des élèves : à partir du matériel mis à leur disposition (rôle de joueur), il permet d'avancer des idées, de formuler des hypothèses et d'anticiper des résultats (rôle de chercheur) et encourage le débat par l'usage du langage et de discours parfois contradictoires (rôle d'acteur).

Ces résultats rejoignent ceux de Berdonneau (2006) dans les « problèmes pour chercher » et ceux de Coffin *et al.* (2006) dans les situations-recherches[43], les élèves identifiés en difficulté s'investissant mathématiquement dans la tâche proposée et maintenant cet investissement tout au long du processus. Comment se caractérisent ces

[43] Dans une étude portant sur l'enseignement des mathématiques auprès d'un groupe d'enfants présentant des troubles psychopathologiques, Coffin *et al.* (2006) ont proposé des situations- recherches sur un trimestre à une dizaine d'enfants en équipes à raison d'une séance par semaine.

dernières situations (Coffin *et al.*, 2006), différentes des situations précédentes, et que mettent-elles en évidence?

En annexe E, nous présentons deux exemples de situations-recherches, l'une conduisant à des solutions possibles et l'autre débouchant sur un cas d'impossibilité d'obtenir un résultat.

Ces différentes situations se rapprochent d'une situation de recherche au sens de celle du chercheur qui fait des mathématiques. Comme nous l'expliquent Coffin *et al.* (2006, p. 7), leur objectif est de :

> […] permettre à l'enfant de découvrir des concepts mathématiques liés à la preuve et plus généralement la démarche scientifique. Pour chacune des situations les élèves expérimentent à l'aide du support matériel, émettent des conjectures et accèdent à des premières preuves. Ils mettent en œuvrent des heuristiques proches de celles du chercheur.[…] En particulier, les élèves peuvent être amenés à formuler des conjectures qui sont des problèmes non résolus.

On est donc ici plus près de l'activité mathématique du chercheur (conjecturer, mettre en place des heuristiques, amorcer une preuve, etc) et ces situations diffèrent en ce sens des situations-problèmes précédentes (Berdonneau, 2006; Dias, 2006; Mary *et al.*, 2008; Mary et Theis, 2007). Dans Mary et al. (2008), la règle ou « généralité » peut être considérée comme une conjecture qui peut être validée par des arguements pragmatiques et intellectuels.

Leur exploitation telle que pensée semble, par ailleurs, avoir certaines caractéristiques communes avec les précédentes situations : elle favorise les interactions entre les élèves; la découverte par l'élève de conjectures, règles, concepts dans (et par l'action); la discussion par l'ensemble des élèves de laquelle émerge des idées nouvelles.

Coffin *et al.* (2006, p. 15) soulignent qu'un grand nombre d'enfants mettent en œuvre des processus d'apprentissage dans ces situations « parfois de façon surprenante compte tenu des possibilités cognitives pressenties. Ces capacités révèlent des potentialités préservées chez ces enfants, […] qui restaient certainement masquées dans le contexte d'un enseignement construit sur un mode traditionnel.».

Qu'est-ce qui se dégage à cette étape de ce qui précède?

Les potentialités des élèves identifiés en difficulté ressortent de ces différentes expériences menées autour de différents types de situations : problèmes pour chercher (Berdonneau, 2006), situations-recherches (Coffin *et al.*, 2006; Grenier et Payan, 1998), situations de recherche mettant en jeu une composante expérimentale (Dias, 2006; Mary *et al.*, 2008), situations élaborées par les élèves eux-mêmes à partir de données réelles collectées par eux (Mary et Theis, 2007), situations non marquées scolairement (Lemoyne, 1989). Elles mettent toutes en évidence, dans des situations précises, les potentialités de ces élèves, et viennent en ce sens interroger les conditions mises en place, le type de situation proposée qui permet ce développement. Elles nous permettent d'avancer sur la clarification éventuelle de caractéristiques de situations (cf. tableau 1.1) propices à l'émergence et au développement des potentialités des élèves. Ces différentes situations ont en effet en commun une véritable activité mathématique observée de la part des élèves idenifiés en difficulté, où comme nous le dit si bien Lemoyne (1989, p. 83), l'élève retrouve « ses fonctions constructives de sens ». Ceci montre l'intérêt pour nous de creuser davantage la notion même de situation-problème et à documenter, expliciter l'apport que peuvent avoir différents types de situations-problèmes dans l'analyse du processus de résolution par des élèves en difficulté que nous nous proposons de faire.

Des éléments communs ressortent de ces situations expérimentées par les chercheurs, en lien avec les potentialités des élèves :

- l'importance de la dimension expérimentale/base expérimentale pour permettre une construction des élèves;

- les situations sont non marquées scolairement;
- elles sollicitent une activité mathématique riche de la part des élèves, faisant appel à des stratégies, connaissances en action, conjectures, validations, etc
- un contexte mathématique est très souvent en jeu. Dans le cas de l'étude de Dias (2006), ce contexte est fantaisiste.

Tableau 1.1 Principaux éléments qui ressortent des situations expérimentées dans les recherches menées avec des élèves en difficulté

Caractéristiques des situations expérimentées	Berdonneau (2006)	Mary et Theis (2007)	Mary, Squalli et Schmidt (2008)	Dias (2006)	Coffin *et al*. (2006)
Des situations non marquées scolairement (Lemoyne, 1989)	Problèmes pour chercher	Question/ problème élaboré par les élèves	Situation de recherche	Situation avec une dimension expérimentale	Situation de recherche
Une base expérimentale commune (souvent présente)	Des éléments de manipulation		Support des formes/des grilles servant de support à l'exploration	Dimension expérimentale pour favoriser la construction de modèles	Expérimentation à l'aide du support matériel
Solutions	Plusieurs solutions	Diverses solutions riches et originales	Passage à une généralisation, différentes stratégies, validation	Favorise la construction de modèles par les élèves	Formulation de conjectures, preuves, etc., de nouvelles questions
Contexte[44]	Mathémati-que/plusieurs domaines impliqués	Partant de données réelles (collectées par les élèves)	Mathématique (grilles de nombres/ pentaminos)	Fantaisiste (Maître du Donjon, objets mystérieux) contexte quelque peu accessoire	Mathéma-tique (heuristiques proches de celles du chercheur)

1.5 Recadrage du problème de départ à la lumière des investigations préliminaires et de l'analyse des recherches/Objectif et questions de recherche

[44] Le contexte est ici une composante non mise en évidence par les auteurs.

Face au portrait de départ (section 1.1) plus ou moins pessimiste sur les élèves en difficulté d'apprentissage, au regard d'un certain type de situation-problème (celle prônée par le MELS), les expériences décrites précédemment menées auprès d'élèves identifiés en difficulté (section 1.3) et certaines expérimentations menées en recherche (section 1.4), offrent un éclairage prometteur. Elles viennent élargir le regard sur les élèves en difficulté, en montrant l'intérêt de regarder leurs potentialités et ce, en considérant d'autres situations-problèmes, s'éloignant de celles provenant des analyses des documents ministériels (Berdonneau, 2006; Coffin *et al.*, 2006; Dias, 2006; Mary et al., 2008). Il faut s'ouvrir sur d'autres types de situations susceptibles de faire apparaître ces potentialités. Au cours de ces expérimentations, le processus de résolution de problèmes et la notion même de problème semblent revisités par les élèves : les élèves abordent le problème proposé, l'explorent, et en retour développent une nouvelle conception de ce que c'est que résoudre un problème, cette résolution n'étant pas juste associée à la production d'un résultat (Coffin *et al.*, 2006), pouvant prendre du temps (Berdonneau, 2006), et faisant intervenir une justification et validation tout au long du processus (Dias, 2006; Mary *et al.*, 2008; Mary et Theis, 2007).

Ces études offrent des résultats prometteurs. Ainsi, lorsque placés dans des situations favorisant une construction de sens, les élèves semblent s'investir pleinement dans la résolution – nuançant par le fait même leurs « difficultés mathématiques » soulignées auparavant. Ces difficultés apparaissent ainsi (pour des élèves identifiés en difficulté) non pas de façon absolue mais bien en lien avec certains types de situations (Giroux et Ste-Marie, 2006).

Ces recherches illustrent ainsi l'intérêt pour nous de travailler sur différents types de situations-problèmes ne se limitant pas aux caractéristiques mises en évidence précédemment à travers l'analyse des documents ministériels pour mieux comprendre les potentialités et difficultés des élèves (identifiés en difficulté) au regard de ces différentes situations (incluant les situations-problèmes au sens institutionnel). En

rejoignant cette perspective, notre position face à l'élève en difficulté n'en est pas une déficitaire, la voie empruntée n'est pas remédiative**.** Au contraire, nous privilégions la voie qui cherche à comprendre, à travers ce que font ces élèves en lien avec différents types de situations, les potentialités et les difficultés qui s'y expriment (Berdonneau, 2006; Lemoyne et Bisaillon, 2006), en considérant, en prenant en compte leurs connaissances, leurs capacités à raisonner (Mary *et al.*, 2008).

Ainsi, notre regard de chercheur, au terme de cette problématique, nous a conduit à passer d'un questionnement qui portait sur les difficultés des élèves en lien avec la notion de situation-problème (SP) (telle que conçue par le ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport du Québec) à un questionnement différent qui va s'attarder aux potentialités des élèves dits en difficulté. Ces potentialités semblent liées aux situations et à leur aménagement comme on le voit dans les observations que nous avons relevées à la section 1.3 et les recherches citées à la section 1.4. Nous serons donc amenés à considérer différents types de SP puisque ces potentialités vont s'exprimer dans la variété de ces situations[46].

Même si les recherches citées précédemment, menées auprès d'élèves identifiés en difficulté d'apprentissage, ont travaillé (sans le dire explicitement) à partir de situations-problèmes au sens où nous les définirons ultérieurement (voir chapitre 2), en misant sur le développement du potentiel mathématique de ces élèves, leur problématique de départ ne vise pas à éclairer ce qui se passe au regard de différents types de situations. C'est en ce sens que notre étude se démarque et permettra d'aller plus loin sur l'éclairage des potentialités de ces élèves en lien avec différentes situations.

À cette étape de notre réflexion, *l'objectif et les questions que nous nous fixons aux fins de cette recherche peuvent ainsi s'énoncer* :

[46] Nous préciserons cette variété de SP au chapitre 3.

La recherche vise à documenter, à analyser la résolution de situations-problèmes par des élèves de classes régulières, en difficulté d'apprentissage en mathématiques : les potentialités qu'ils manifestent et les difficultés qu'ils rencontrent et ce, en regard de différents types de situations-problèmes.

- Quelles potentialités manifestent les élèves en difficulté dans la résolution de différents types de situations-problèmes mathématiques?
- À quelles difficultés sont-ils confrontés dans ces différentes situations?
- Comment les caractéristiques de ces situations viennent-elles interférer avec le processus de résolution par ces élèves (par exemple le contexte, le type de situation, etc.)?

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Au terme du chapitre I, un objectif et des questions se sont précisés, centrés sur la résolution de situations-problèmes par des élèves identifiés en difficulté[47], cette résolution étant abordée au regard de différents types de situations-problèmes. Un tel questionnement nous amène à cette étape à vouloir fonder davantage cette notion de situation-problème, jusqu'alors abordée uniquement sous la lunette des documents ministériels et des balises qui se dégagent de leur analyse. Qu'est-ce qu'une situation-problème? Comment cette notion a t-elle été caractérisée par les didacticiens?[48] Dans quel cadre théorique a t-elle été développée, permettant d'en comprendre les fondements? La question de la résolution de situations-problèmes par des élèves identifiés en difficulté nous amène aussi à vouloir situer la notion d'élèves en difficulté et surtout les perspectives prises par les chercheurs au fil du temps par rapport à la question de ces élèves.

Dans le présent chapitre, nous revenons dans un premier temps sur les positions prises par les chercheurs en didactique dans les travaux réalisés auprès d'élèves identifiés en difficulté. Ces perspectives s'articulent autour de trois modèles dont nous montrerons les tenants et aboutissants et les questions qu'ils soulèvent. Cette analyse nous permettra de clarifier notre propre posture par rapport aux élèves identifiés en difficulté d'apprentissage en mathématiques considérés dans cette recherche. Dans un deuxième temps, nous revenons sur le concept de situation-problème (avec en amont les concepts

[47] Nous préciserons dans le chapitre 3 le choix plus spécifique qui a été fait à ce sujet.

[48] L'emploi du masculin est sans discrimination.

d'exercice et de problème), telle que conçue par les didacticiens, en mettant en évidence, pour certains auteurs, leur cadre théorique associé.

2.1 Perspectives prises par les chercheurs et intervenants dans les travaux menés auprès d'élèves en difficulté

Les élèves dont nous parlons aux fins de cette recherche sont les élèves du secondaire des classes régulières en mathématiques qui ont des difficultés d'apprentissage en mathématiques[49]. Il ne s'agit donc pas du champ de l'adaptation scolaire, mais d'élèves "faibles" qui ont des difficultés d'apprentissage (on ne parle pas d'élèves ayant de grandes difficultés d'apprentissage). Ce sont les élèves que l'on retrouve, dans certaines commissions scolaires ou écoles qui ont adopté des mesures de soutien, dans des classes dites d'appui (classes regroupant des élèves faibles, formées sur la base des résultats des élèves au primaire en mathématiques). Ces mesures ne se retrouvent pas partout. Par exemple, dans certaines écoles secondaires, deux enseignants de mathématiques peuvent avoir à leur charge une même classe de mathématiques. Celui qui est titulaire de la classe se charge des cours et des activités diverses (devoirs, examens, etc.). L'autre enseignant vient soutenir l'enseignant titulaire en aidant les élèves identifiés en difficulté à résoudre des exercices et des problèmes pendant les heures de cours de mathématiques, soit simultanément avec le titulaire, dans la même classe ou dans une autre classe. La plupart du temps ces élèves sont donc intégrés dans des classes régulières pour toutes les matières. Ce préambule étant fait, revenons à la question des élèves en difficulté et aux perspectives prises par les chercheurs dans ce domaine.

En didactique des mathématiques, la prise en compte de la question des « élèves en difficulté » a évolué de l'étude des difficultés des élèves à l'étude des élèves en difficulté. En effet, comme nous le verrons plus loin, les travaux de recherche de la fin des années 70 et 80, relatifs à « la notion de difficulté », se sont intéressés aux

[49] Ce choix sera justifié au chapitre 3.

interprétations des erreurs des élèves, aux conceptions relatives à certaines notions (voir notamment Bednarz et Garnier, 1989; Actes de la CIEAEM, 1988). Dans les années 1990-2000, les travaux de recherche se sont déplacés du côté de l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques avec un public particulier d'élèves (on retrouve notamment cette préoccupation dans les congrès EMF 2006, 2009 et 2012 dont un des groupes de travail porte sur ce thème)[50]. Les travaux de Perrin-Glorian (1993) sont révélateurs de ce changement de cap : on est ici non plus sur une analyse des difficultés mais on s'intéresse aux phénomènes complexes d'apprentissage et d'enseignement dans les classes faibles. À travers cette évolution, des façons différentes de concevoir les difficultés et l'intervention face à ces difficultés vont apparaître (Giroux, 2014).

Nous reprendrons trois d'entre elles qui ont eu un poids dans la façon dont les difficultés ont été envisagées et, avec elles, l'intervention auprès de ces élèves. Dans les deux premiers cas, une vision déficitaire associe la difficulté à l'élève. Deux modèles traversent ces travaux : un modèle médical et un modèle « lacunaire », ciblant les lacunes de l'élève en référence à une certaine norme. Dans le troisième cas, une vision différente est en jeu, qui conçoit la difficulté en lien avec les conditions du « milieu »[51] : la difficulté n'est plus associée à l'élève, la situation d'enseignement est prise en compte et l'accent est mis sur la façon dont les modifications des conditions du « milieu » favorisent le rapport de l'élève identifié en difficulté avec la connaissance.

Nous examinerons dans la section suivante les conceptions véhiculées par ces modèles, au regard de la notion de difficulté d'apprentissage, ainsi que des pratiques qui lui sont associées, en faisant ressortir les limites de certains modèles.

---

[50] EMF : Espace mathématique francophone

[51] La notion de milieu défini comme le « système antagoniste » de l'élève (Brousseau, 1988, p. 321), ce contre quoi « joue » l'élève, sera reprise dans la section 2.1.2.

2.1.1 Le modèle médical : des difficultés associées à une déficience

L'analyse menée par Bélanger (1991) sur près d'un siècle de travaux aux États- Unis portant sur l'erreur en mathématiques montre bien les différentes perspectives qui ont traversé la recherche en didactique des mathématiques face au concept d'erreur et de difficulté d'apprentissage. Elle fait ressortir le rôle qu'a pu jouer ici le modèle médical, dès le début du 20ème siècle, modèle qui repose sur les idées de déviance à la norme et renvoie à une difficulté dont la cause est à chercher dans une déficience physiologique, déficience qu'on va alors chercher à diagnostiquer et à corriger (Bélanger, 1991), à dépister puis à réparer (Meirieu *et al.*, 2010).

Quelle conception de l'erreur et de la difficulté sous-tend l'intervention dans ce modèle?

Une difficulté d'apprentissage est conçue comme un dysfonctionnement auquel on devra s'attaquer par une remédiation, le modèle sous-jacent étant celui du « diagnostic et correctif » (Bélanger, 1991, p. 58) : « les erreurs sont des indices de difficultés » et une difficulté résulte d'une déficience (dans ce cas physiologique); ce que Bélanger nomme « modèle de la déficience » (p. 60).

Brousseau (2009, p. 9) va caractériser ainsi cette approche : il s'agit « d'identifier les erreurs ou les fautes [que les élèves] commettent et si elles se répètent, [de] les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce qu'elles vont rendre l'enfant incapable d'accéder aux mathématiques ».

Ce discours d'anomalies est encore présent aujourd'hui dans les interventions auprès d'élèves identifiés en difficulté, en adaptation scolaire ou dans les classes spéciales, où on parle par exemple de dyscalculie, ou de trouble spécifique d'apprentissage du calcul (Fischer, 2009a, 2009b; Giroux, 2010; Van Hout, 2001). Un aperçu du discours sur la dyscalculie nous permet d'appréhender l'utilisation de ce concept dans le monde scolaire.

Fischer (2009b) parle de « dyscalculie acquise » (DA), concept assimilé aussi à la notion d'acalculie (incapacité à calculer). On parle également de dyscalculie développementale (DD) (Cohn, 1968). Selon Fischer (2009a, p. 115), la dyscalculie développementale est « un trouble dans l'apprentissage du calcul (non lié à des déficiences intellectuelles) qui a son origine dans un désordre cérébral ». Se pose alors pour les intervenants la question de l'identification de ce trouble d'apprentissage de calcul dont l'origine est un dysfonctionnement neurologique : comment identifier les élèves dyscalculiques?[52]. Giroux (2010, p. 150) rapporte à cet effet les critères d'identification de la dyscalculie contenus dans le manuel « Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders » (American Psychiatric Association, 1994)[53] :

> Critère A : Les aptitudes en mathématiques, évaluées par des tests, sont nettement en dessous du niveau escompté, compte tenu de l'âge chronologique du sujet, de son niveau intellectuel (mesure par des tests) et d'un enseignement approprié à son âge;
> Critère B : La perturbation, décrite dans le critère A, interfère de façon significative avec la réussite scolaire ou les activités de la vie courante faisant appel aux mathématiques ;
> Critère C : S'il existe un déficit sensoriel, les difficultés en mathématiques dépassent celles habituellement associées à celui-ci. (Vannetzel, Eynard et Meljac, 2009).

Giroux (2010) questionne ces critères qui, selon, elle, ne prennent pas en compte l'enseignement reçu par l'élève : « de quelles informations et surtout de quel cadre théorique dispose-t-on pour déterminer [la qualité de] l'enseignement reçu par l'élève évalué ? ». Comme on peut le voir, les points de vue des chercheurs ne convergent pas

---

[52] Fischer (2009b) rapporte deux critères retenus, pour la sélection des élèves, qui suscitent une forte polémique : la faiblesse en calcul et le test de quotient intellectuel (QI). En ce qui concerne le premier critère, si l'idée est de s'intéresser au calcul élémentaire, comme le fait bien remarquer Fischer (2009b), s'agit–il de la faiblesse d'un élève en calcul mental, en calcul écrit ou en problèmes arithmétiques? Pour le deuxième critère, il existe selon Fischer (2009b), d'autres formes d'intelligence qui ne sont pas identifiées par le QI.

[53] 4e édition en français du Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux.

sur cette question; Ils nous montrent toutefois que le modèle médical est bel et bien présent dans les travaux portant sur les difficultés d'apprentissage des élèves.

Bélanger (1991) et Meirieu *et al.* (2010) décrivent les conceptions au fondement de ce modèle médical. Selon Bélanger (1991, p. 59), on y développe des catégories de la déviance qui servent à obtenir des « indices en vue d'identifier cette déviance » et de la « renormaliser ».

Dans les travaux, en conséquence, qui s'intéressent à l'intervention auprès de ces élèves et qui reprennent ce modèle médical à leur compte, on cherche les indicateurs d'une certaine déviance. Les exemples suivants en lien avec le calcul, tirés de Bélanger (1991, p. 61), en sont une illustration. L'auteur rapporte que dans un rapport de Brueckner (1930) sur le « diagnostic psychologique des difficultés de 45 élèves de la quatrième à la sixième année (10-12 ans) », une faute récurrente apparaît dans la façon de compter des élèves (cette manière de faire va être identifiée comme un indice de difficulté par l'auteur) : face aux opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, les élèves cherchent leur réponse en procédant par comptage en utilisant leurs doigts. Bélanger (1991) mentionne aussi le « morcellement des combinaisons » comme indice d'une difficulté (par exemple au lieu de faire 9 + 7 directement, l'élève fait 9 + 3 = 12, 12 + 4 = 16) ainsi que le recours à une addition par dix (voir exemple ci-dessous). Ces différents exemples étaient considérés à l'époque, selon Brueckner, comme autant de signes de difficultés des élèves:

Exemple de morcellement de combinaisons :

66
47
 9
 9

212

L'élève (au lieu de faire 9+ 7 directement) fait la combinaison qu'il connaît. Il dit « 9 plus 3 ça fait 12 »; « 12 plus 4, 16 »; « 16 et 6 font 22 ».

Addition par dix :

114
5
7365
59

L'élève dit « 5 plus 5 font 10; 10 plus 9 plus 1 font 20; 20 plus 3 ça fait 23 » Bélanger (1991, p. 61).

Les réponses des élèves apparaîtraient aujourd'hui intéressantes du point de vue des stratégies de calcul mental, mais à l'époque le morcellement des combinaisons ou l'addition par dix (Bélanger, 1991) n'étaient pas autorisés. En le faisant, l'élève était ainsi considéré en difficulté et de ce fait « déficient ». Bélanger critique ce point de vue et stigmatise la simplicité du modèle médical reposant sur une vision restreinte du calcul, associée à des automatismes (connaissance par exemple des combinaisons).

Ainsi, parlant de Brueckner, qui considère que l'arithmétique requiert des habiletés particulières à développer à l'aide d'exercices soutenus, Bélanger (1991) déplore l'absence d'un cadre théorique adéquat sur les déficiences qui pourrait expliquer les difficultés des élèves. Il s'agit d'une faiblesse sur le plan théorique, sur la conception même de déficience non fondée théoriquement.

De son côté, Meirieu *et al.* (2010, p. 84), bien que reconnaissant l'apport du modèle médical qui a contribué, selon lui, au progrès de l'éducation[54], critique aussi ce modèle et dénonce ce qu'on appelle la « pédagogie de la ritaline » c'est-à-dire la pédagogie qui empoisonne, faisant plus de tord que de bien, ou dirions-nous, en atténuant, la *pédagogie à la carte*.

[54] Meirieu évoque le rôle joué par les médecins dans l'histoire de la pédagogie d'Itard à Montessori, de Claparède à Decroly et à Korczak notamment dans l'obligation de soigner les élèves malades généralement sans conditions en opposition à l'éducation qui exigeait (et sans doute le fait encore) de débourser des frais de scolarité.

Ainsi, Meirieu *et al.* (2010, p. 84) décrit le fonctionnement de ce modèle, et évoque les conséquences néfastes qu'il engendre pour l'enfant tout en rappelant le rôle d'un véritable travail éducatif:

> Ainsi, à côté des cas qui requièrent effectivement des interventions ciblées, on oriente une multitude d'enfants vers des dispositifs de « remédiation » qui engendrent plus de stigmatisation et de ségrégation qu'ils n'apportent d'aides spécifiques. Ce n'est pas la bonne foi ou la bonne volonté des personnes qui est en jeu ici, c'est le modèle de fonctionnement qui supporte et encourage les comportements en question : identification segmentée de tous les dysfonctionnements, interprétations monofactorielles, voire biologisantes (avec l'obsession d'une localisation physiologique), traitement individuel et isolé des problèmes, utilisation systématique de prothèses chimiques ou de techniques de reconditionnement. Au bout du compte, on réduit l'enfant à un ensemble de circuits et on prétend pouvoir l'« éduquer » par une somme d'interventions ponctuelles ciblées. Le sujet disparaît et, avec lui, le seul travail véritablement éducatif qui consiste à créer les conditions les plus favorables pour qu'un être s'engage dans des apprentissages et trouve en lui la force de grandir.

La critique de ce modèle, présentée par Meirieu, pointe la pratique de remédiation qui est mise en exergue avec les conséquences qui en découlent pour l'élève en difficulté : angoisse, estime de soi, négation, décrochage, etc.

Enfin, ce modèle médical, basé sur des tests et des mesures pour appuyer un diagnostic, a fait son chemin dans le domaine de l'éducation avec les conséquenses néfastes évoquées par Meirieu *et al.* (2010). Un modèle parent, adoptant aussi la pratique de remédiation, est décrit dans la section suivante.

2.1.2 Le modèle lacunaire : une difficulté définie en référence à une norme

Un autre modèle d'intervention qui prend ses fondements dans une conception déficitaire de l'élève en difficulté, associée à des lacunes des élèves, va également faire appel à une pratique de remédiation. L'erreur ou la difficulté d'apprentissage est ici vue comme un écart à la norme. Bélanger (1991, p. 50) cite en ce sens Rice (1902) qui affirme qu'une erreur est « une mauvaise réponse ». Cette opinion se fonde sur l'idée

d'une norme établie par des experts (intervenants, enseignants etc.) qui considèrent les erreurs des élèves à partir du jugement qu'ils portent par rapport à cette norme.

Les stratégies d'enseignement inspirées de ce modèle chercheront alors à guider les élèves vers la « bonne » réponse, voire la « bonne » conception. L'intervenant insistera sur les méthodes à suivre, se servira du matériel et d'un dispositif d'enseignement adéquat, accentuera son intervention sur les règles à retenir par l'élève, etc. Ce modèle véhicule l'idée de travailler dans le sens de la re-prise de ce qui n'est pas acquis (les intervenants reviennent par exemple sur les préalables non acquis).

L'intervention est ainsi souvent axée sur *les habiletés de base en calcul, les pré-requis sur les nombres et les opérations, les tables de multiplication et d'addition; les procédures de calcul et la numération* (Mary *et al.*, 2008) ainsi que sur les stratégies de lecture (l'apprentissage de lecture d'un énoncé mathématique, l'identification des données dans un texte et les questions posées, etc.). Ce modèle consiste en quelque sorte en un ré-enseignement des savoirs qui, croit-on, devraient être acquis par les élèves. Dans cette démarche, les intervenants insistent sur les éléments de base, les opérations, la compréhension des mots, le vocabulaire, etc. (DeBlois, 2001; Lemoyne et Lessard, 2003). Cherel (2005), sur la base des observations effectuées dans une classe spéciale, décrit l'organisation de l'enseignement et montre bien l'importance accordée à ces contenus de reprise. Elle relève que:

> L'organisation de l'enseignement des contenus dans cette classe d'adaptation montre, outre la relative étanchéité des contenus, la grande importance accordée à la numération. Ce domaine est en effet travaillé sur plus de la moitié de l'année, et il est même repris au milieu d'autres grands thèmes ultérieurement, sans doute pour s'assurer que les élèves n'ont pas oublié ce qui a été vu au début de l'année. Par ailleurs, ils continuent tout au long de l'année à mémoriser leurs « jeux de calculs », c'est-à-dire leurs tables d'addition et de soustraction. La numération apparaît donc comme le thème emblématique de l'enseignement des mathématiques dans la classe spéciale, avec une grande importance donnée à la décomposition en dizaines et unités (avec notamment le dessin de sous-collections déjà regroupées par dix), ainsi qu'à l'ordre des nombres (Cherel, 2005, p. 72).

Aussi, les intervenants s'attardent aux « manques » de l'élève (son inattention, son manque d'organisation, ses « lacunes », son déficit de mémorisation, son rendement scolaire insuffisant, etc.).

Les pratiques des intervenants liées à ce modèle ont été mises en évidence par de nombreux chercheurs (Brousseau, 1995; Cherel, 2005; Giroux, 2014; Maréchal, 2010; Mercier, 1995; Perrin-Glorian, 1993; Ratsimba-Rajohn, 1992; René de Cotret et Fiola, 2006; René de Cotret et Giroux, 2003; Roditi, 2003; Salin, 1999).

Brousseau (1995) évoque à ce propos différents contrats qui lient l'enseignant et l'élève, en particulier *le contrat d'ostension* couramment utilisé dans le cas des élèves en difficulté. Cette pratique ostensive qui est une stratégie d'enseignement qu'on retrouve auprès des élèves identifiés en difficulté, se caractérise comme le décrit Brousseau (1995, p. 23) par : « Le professeur "montre" un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances ». Or cette pratique ne favorise pas l'explication du savoir en jeu. Au contraire, elle permet d'établir une relation entre l'objet en cause et les critères qui permettent de le reconnaître sans pour autant le définir.

René de Cotret et Giroux (2003) montrent dans le même sens, dans leurs travaux sur le temps didactique dans trois classes de secondaire 1 (doubleurs, ordinaires, forts), qu'en classes de doubleurs, les élèves identifiés en difficulté n'ont pas à se questionner sur les connaissances nécessaires en vue de résoudre des problèmes. Ainsi, les savoirs utiles dans ces tâches sont connus des élèves, ces derniers leur étant communiqués par des enseignants à travers des règles. Ce qui ne permet pas, disent-elles, de questionnement de la part de l'élève concernant les « objets utiles et pertinents à la résolution des tâches » (René de Cotret et Giroux, 2003, p. 164).

Une autre pratique courante utilisée par les enseignants auprès d'élèves identifiés en difficulté, et qui trouve son ancrage dans cette vision déficitaire de l'élève associée au

modèle lacunaire, consiste à proposer aux élèves des situations qui réfèrent à des contextes qu'ils présument familiers en vue de faciliter leur résolution, et ce dans une préoccupation de répondre aux besoins de ces élèves. Aussi *les tâches proposées sont souvent simplifiées* et de niveau inférieur à celles de la classe des élèves concernés (élèves identifiés en difficulté, provenant de milieu défavorisé, dans le cas de cette recherche) (Ngono, 2006). Les professeurs choisissent dans les manuels ce qui pourrait convenir à leurs élèves et adaptent les programmes en fonction de leurs préoccupations *en modifiant le plan des contenus* (supprimant parfois quelques contenus), *leur progression et le temps alloué aux apprentissages* (Maréchal, 2010; Ngono, 2006). Comme le souligne Conne (1999, p. 56) « la première réponse didactique […] sera une régression dans le programme. Les mesures didactiques préconiseront d'assurer les pré-requis, de ramener l'activité aux points supposés de blocage, aux étapes qu'on soupçonnera avoir été manquées ». De plus, *une stratégie d'évitement des discussions entre l'enseignant et l'élève* est souvent instaurée privilégiant de ce fait le système d'interactions question-réponse ayant pour finalité la recherche de la « bonne » réponse (Cherel, 2005).

Par ailleurs, les enseignants vont aussi *proposer des exercices du même genre* aux élèves en difficulté (Brousseau, 2009). La résolution des exercices ou problèmes par les élèves semble reposer sur l'application de méthodes, court-circuitant le processus de résolution (Perrin-Glorian, 1993). Dans la résolution des exercices ou des problèmes, voire des situations-problèmes, les intervenants devant les difficultés des élèves ne se retiennent pas de *divulguer la règle aux élèves* (Maréchal, 2010) en espérant qu'ils vont s'y engager. D'ailleurs, Lemoyne (1989, p. 91) décrit les réactions d'un orthopédagogue face à ces difficultés :

> […] à certaines occasions, il réagit en apportant des informations, prenant très souvent la forme d'une description de la solution attendue ; à d'autres occasions, il propose des modèles concrets ou des représentations des notions impliquées ou encore des situations similaires ; très souvent également, il interroge l'élève sur certains aspects de sa solution, faisant alors remarquer des éléments non traités par l'élève, interprétant même ces éléments, ces interrogations conduisant à une évacuation de la situation didactique originelle et de l'apprentissage ; rarement toutefois, il engage l'élève dans une démarche de construction ou de reconstruction du sens mathématique prenant appui sur les connaissances manifestées par l'élève.

Des effets pervers associés à ces pratiques ont été mis en évidence par les chercheurs (Mary et Squalli, accepté; René de Cotret et Giroux, 2003), telle la crainte de ne pas savoir la réponse (Lemoyne, 1989), le fait de se remettre à l'intervenant qui, connait la « bonne » réponse, le manque d'autonomie de l'élève. Ces effets résultent aussi des interactions entre l'intervenant et l'élève prenant la forme de questions–réponses, l'absence de débats entre, d'une part, l'intervenant et l'élève et, d'autre part, entre les pairs, privilégiant de fait l'enseignement individualisé, l'absence de défi à l'élève (René de Cotret et Fiola, 2006), l'insistance sur les procédures, les algorithmes ainsi que la mémorisation de savoirs (ex tables de multiplication, décompositions additives, formules permettant de trouver le périmètre, l'aire, etc)**.**

Les limites de ces pratiques ont été mises en évidence par certains travaux (Giroux, 2013; Lemoyne et Bisaillon, 2006; Mary et Squalli, accepté; Ngono, 2006; Perrin-Glorian, 1993). En effet, les enseignants vont opérer des choix sur ce qu'ils doivent enseigner aux élèves, sur la manière dont les savoirs seront dispensés aux élèves, sur le vocabulaire à employer, non sans conséquences sur les élèves. Ils vont mobiliser la reprise des concepts mathématiques anciens (Lemoyne et Bisaillon, 2006), utiliser des mots censés être à la portée des élèves pour permettre à ceux-ci d'accéder au savoir en jeu. Du point de vue de l'enseignant, les difficultés rencontrées par les élèves soulèvent le problème de l'articulation possible de nouveaux savoirs sur les connaissances antérieures des élèves (Bednarz et Garnier, 1989; Giroux, 2013; Perrin-Glorian, 1993). Des connaissances antérieures lacunaires ne permettent pas l'entrée sur un nouveau

savoir; il faut ré-enseigner, reprendre le travail sur ces savoirs anciens. D'où l'idée très présente dans ce modèle lacunaire d'un retour sur les concepts de base, d'une reprise de ce qui n'est pas acquis, en insistant sur les erreurs à éviter et les raccourcis. Les élèves auront dans ces conditions tendance à chercher les routines, les gestes stéréotypées et à se raccrocher au support de l'enseignant (qui valide leur réponse). Ainsi, il se crée « un cercle vicieux » (Ngono, 2006, p. 4). En fin de compte, malgré les efforts des intervenants, les difficultés des élèves sur les concepts anciens persistent au moment où l'intervenant pensait qu'elles avaient disparu (Perrin-Glorian, 1993).

Les deux modèles que nous venons de décrire ont fortement influencé, et influencent encore, la vision de la difficulté d'apprentissage et de l'élève en difficulté; ils sont encore présents dans le modèle d'intervention qui sous-tend la pratique auprès de ces élèves. Cette vision déficitaire est celle que reprend par exemple le ministère de l'Éducation, du Sport et du Loisir du Québec (MELS, 2007a) à travers le passage ci-dessous :

> Au secondaire, l'élève en difficulté d'apprentissage est celui:
> dont l'analyse de sa situation démontre que les mesures de remédiation mises en place, par l'enseignante ou l'enseignant ou par les autres intervenantes ou intervenants durant une période significative, n'ont pas permis à l'élève de progresser suffisamment dans ses apprentissages pour lui permettre d'atteindre les exigences minimales de réussite du cycle en langue d'enseignement et en mathématiques conformément au Programme de formation de l'école québécoise (p.24).

Dans cette caractérisation, un élève en difficulté d'apprentissage est défini en regard d'une certaine norme établie par le ministère, associée à la réussite: la note minimale d'admission exigée au Québec est de 60 %, ce qui signifie qu'un élève ayant moins de 60 % en français et en mathématiques est un élève en difficulté d'apprentissage qui nécessite des plans d'intervention. On y retrouve bien présente par ailleurs cette idée de remédiation qui caractérise les modèles précédents.

Dans une comparaison à une certaine norme, les difficultés des élèves et leurs manifestations à travers les « erreurs » qu'ils commettent sont considérées comme des lacunes dans le processus d'apprentissage de notions ou dans la résolution d'exercices ou de problèmes.

Cette voie ne permet toutefois pas de comprendre le fonctionnement de ces élèves et débouche difficilement, comme nous l'avons vu, sur des pistes d'intervention qui conduisent à construire un sens aux concepts de base et permettent aux élèves de s'engager dans un autre rapport à la connaissance.

Plusieurs chercheurs se sont placés dans une toute autre perspective (Bauersfeld, 1994; Bednarz et Garnier, 1989; Brousseau, 1983, 1989; DeBlois, 2001; Giroux, 2013; Giroux et Ste-Marie, 2006; Lemoyne, 1989; Mary et Squalli, accepté). Ils ouvrent sur une autre façon d'envisager la difficulté et l'intervention dans ce domaine.

2.1.3 Vers une autre conception des difficultés et une mise en relation avec les conditions du milieu

Les définitions que l'on retrouve de l'élève en difficulté dans l'Association des Orthopédagogues du Québec (ADOQ, 1992) sont illustratives du changement subtil de vision d'une difficulté: d'un modèle lacunaire centré sur le déficit de l'élève à une difficulté mise en lien avec la situation proposée.

Pour l'ADOQ en effet, un enfant en difficulté est celui qui présente une incompréhension persistante des concepts à l'étude dans la classe en lien avec un enseignement régulier (DeBlois, 2001). Ainsi, l'ADOQ (1992) affirme :

> L'élève qui éprouve un problème d'apprentissage est celui qui, suite à un enseignement ordinaire, reçoit un suivi personnalisé de la part de son enseignante ou enseignant et persiste malgré tout dans l'incompréhension des concepts relatifs au programme de lecture, d'écriture et/ou de mathématique […] (p.1).

Selon DeBlois (2001), l'enfant en difficulté d'apprentissage est « celui qui, après avoir vécu les mêmes expériences scolaires que ses camarades de classe, ne parvient pas à

réutiliser les concepts et les savoir-faire utiles à la création de solutions adaptées » (p.341). Là où l'ADOQ parle d'incompréhension persistante des concepts pour un enfant en difficulté, DeBlois (2001) parle de la création de solutions adaptées difficile. Analysant cette définition de DeBlois (2001, p. 341), nous comprenons qu'un élève en difficulté d'apprentissage en mathématiques est un élève qui ne parvient pas momentanément (après avoir vécu un certain nombre d'expériences scolaires) à mobiliser les concepts, modèles, théories, notations…et « les savoirs-faire utiles à la création de solutions adaptées » aux tâches et aux problèmes proposés. L'idée principale mise en avant dans la définition proposée par Deblois est le passage d'une vision de la difficulté rattachée à l'élève à une vision d'une difficulté relative à la situation, qui fait appel à l'idée d'adaptation.

Ce regard sur les difficultés des élèves marque un changement de paradigme face à l'erreur, comme le mettent en évidence Bednarz et Garnier (1989, p. 19) .

> Pendant très longtemps […]l'erreur a été conçue comme un accident regrettable, une maladresse, un manque, l'ignorance d'un savoir. Personne n'avait encore dit, avec l'insistance de Bachelard, que l'erreur a une fonction positive dans la genèse du savoir, qu'elle n'est pas une sorte de lacune ou d'absence, mais qu'elle a la structure et la vitalité de l'instinct[55] .

Dans cette perspective, les actions "inadaptées" des élèves sont en fait les indices « d'une tentative de réponse en formation qui, du point de vue de son auteur [l'élève], semble acceptable dans la situation présente » (Bauersfeld, 1994, p. 187).

Cette vision positive de l'erreur va imprégner les travaux de recherche des didacticiens dans les années 80-90. Bélanger (1991, p. 67) relève que « durant les vingt dernières années, il y a eu un intérêt croissant non plus seulement pour « les mauvaises réponses » mais pour les connaissances que les enfants et les adolescents

[55] Ce point de vue de Bednarz et Garnier (1989) s'appuie sur le texte de Bachelard (1973) –*La philosophie du non* (6e édition). Paris : Vrin.

se construisent qui sont en quelque sorte en désaccord avec le consensus accepté ou la connaissance des experts», que ces dernières conduisent ou non à un échec dans une tâche. Ce passage laisse transparaître l'amorce d'un travail entrepris par les chercheurs sur une interprétation différente de l'erreur/de la difficulté.

Cette préoccupation sur les constructions des élèves, sur leurs connaissances ouvre la voie à une analyse en termes de potentialités des élèves et à une intervention auprès des élèves identifiés en difficulté pensée différemment.

L'erreur, la difficulté dans la perspective constructiviste sous-jacente aux travaux de ces chercheurs, est vue comme une connaissance locale en formation (Bednarz et Garnier, 1989). Comme l'indique Bachelard (1938, p. 13), il ne s'agit pas d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain. Au contraire, « l'erreur est conçue comme témoignant d'une construction individuelle en cours plutôt que comme le produit de la connaissance, de la sélection et de l'application conscientes d'une règle. » (Bauersfeld, 1994, p. 187). L'erreur qui se répète est l'effet « d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. » (Brousseau, 1983, p. 171).

Ce discours rompt radicalement avec l'idée des erreurs ou des difficultés attribuables à des dysfonctionnements cérébraux ou à des carences de toutes sortes. Il marque un pas important dans le travail sur les difficultés, par leur reconsidération du statut même des erreurs. Les façons de faire de l'élève, même si elles sont inefficaces dans la situation, même si elles ne permettent pas d'exercer un contrôle sur la situation et entraînent un échec à une tâche, *sont des connaissances*. Ce qui fait agir l'élève dans une situation est considéré comme une connaissance qui fonctionne localement (cette même connaissance, en d'autres situations, pourrait se révéler utile et efficace).

Plusieurs travaux ont été animés par cette conception de la difficulté/erreur comme connaissance. Ainsi, Brousseau (1989, p. 42) recommande d'envisager « les erreurs

récurrentes comme le résultat (produit par et construit autour) de conceptions, qui, même lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives ».

La perspective didactique qui anime ces chercheurs postule qu'une erreur est une construction en développement et qu'une difficulté ne peut être considérée de façon absolue mais dans l'interaction de l'élève avec une situation, avec un "milieu"[56]. Dans le même sens, Giroux et Ste-Marie (2006, p. 40) considèrent que les difficultés « se présentent pour un élève particulier, à l'égard de certaines situations et de certains savoirs (les deux étant liés) et non pas de manière absolue ». Cette conception préconise un modèle d'intervention différent de ceux analysés à la section 2.1 et 2.2.

Cette intervention va chercher à agir sur les conditions du milieu pour que l'élève rentre dans un rapport différent au savoir. Le cas Gaël analysé par Brousseau (2009) nous offre l'occasion d'illustrer ce point de vue. Gaël est un élève (du primaire) en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Le problème suivant lui a été initialement proposé :

> Dans un parking, il y a 57 voitures. 24 de ces voitures sont rouges. Trouver le nombre de voitures du parking qui ne sont pas rouges (Brousseau, 2009, p. 3).

La première réaction de Gaël témoigne de son entrée dans le problème : « je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse » (Brousseau, 2009, p. 3) : Gaël trouve 81 (il ajoute 57 + 24), ce qui conduit à un échec à la tâche proposée. L'intervenant *conduit* alors Gaël à la "bonne réponse", que ce dernier trouve à partir du comptage (24, 25, 26, … jusqu' à 57). Gaël ne se sert pas d'une opération pour vérifier sa réponse. Au contraire, il s'appuie sur le dessin au lieu de convoquer « certains mécanismes abstraits » (Brousseau, 2009, p. 5). Gaël n'a, nous dit Brousseau, avec le savoir en jeu qu'un « rapport superficiel » (p. 9). En effet, il évite de s'engager totalement dans le problème, se contentant de ce qu'il a appris avec l'enseignant immédiatement dans les

[56] Nous reviendrons sur le concept de "milieu" à la sous-section 2.1.4.

cours antérieurs, à savoir effectuer l'opération d'addition, sans se poser la question du bien fondé de son utilisation. On retrouve ici des observations relevées par Perrin-Glorian (1993) dans les classes faibles : un recours à ce qui a été appris antérieurement dans le cours, dans un rapport d'application à la connaissance, sans se poser la question de la pertinence de celle-ci en lien avec la tâche et la question posée.

Brousseau va révéler, à travers ce cas, comment en intervenant sur la situation, sur les conditions du "milieu", le comportement de Gaël et ses capacités à déployer un raisonnement vont changer. Cette activité a été proposée à Gaël la séance suivante :

> L'intervenant reprend donc sans modification, le jeu de devinettes de la dernière fois : il y a 56 pièces que Gaël compte et met dans un sac, après avoir écrit le nombre sur une feuille. L'intervenant retire ensuite 10 gros ronds du sac, les fait compter par Gaël puis les enfouit avec le premier sac dans un second. Il s'agit de savoir combien il y a de pièces dans le petit sac intérieur [après avoir pigé] (Brousseau, 2009, p. 21).

Le jeu consiste donc à parier sur le nombre qu'il y a dans le sac, à écrire ce nombre et si l'hypothèse formulée est vérifiée, la personne a gagné. Le premier pari n'a pas été gagné par Gaël.

Le déroulement de la suite de la séance a montré que Gaël est capable d'anticiper, de s'engager dans une situation d'action, de proposer des solutions, de les confronter à la vérification et de se rendre compte de ses erreurs. De plus, d'autres séances ont montré une participation effective de Gaël en raison du comportement de l'intervenant qui a aménagé la situation d'apprentissage et les conditions d'apprentissage propices à un nouveau rapport de l'élève au savoir. En effet, l'intervenant a joué sur les conditions du "milieu" en vue de la résolution des problèmes qui se sont posés à Gaël et ne s'est pas intéressé aux caractéristiques de l'élève ou à ses aptitudes. Par exemple, dans le jeu précédent, l'intervenant a demandé à Gaël le nombre de pièces dans le sac. Après trois réponses infructueuses et à la suite des interactions avec l'intervenant qui lui a rappelé le principe du jeu et de la validation de la réponse (faire un pari et vérifier si

l'affirmation est juste), Gaël (G) a réussi à donner une réponse exacte : 46. L'intervenant (I) lui a demandé de justifier sa réponse.

> I : Pourquoi dis-tu que ça fait 46?
> G : Parce que je sais qu'à 10 on enlève 5 [il veut dire aux 5 (dizaines) on enlève 10], alors ça fait 4 et puis il reste 6 alors ça fait 46 (Brousseau, 2009, p. 21).

Brousseau (2009) modélise la réponse de Gaël par le processus : 56 - 10 = (50 + 6) -10 = (50-10) + 6 = 40 +6 = 46.

À travers ce qui précède, une certaine caractérisation de la notion de difficulté, d'erreur se précise, inscrite dans une certaine vision de l'apprentissage, cohérente avec la perspective sur l'élève en difficulté que nous avons précisée précédemment.

Pour la théorie des situations didactiques (TSD) s'inspirant du constructivisme piagétien, l'élève « apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage » (Brousseau, 1988, p. 59). Ce discours nous conduit à examiner le concept de milieu, central dans la perspective théorique développée précédemment.

2.1.4 Rapport entre milieu et connaissance: des balises importantes dans l'intervention auprès d'élèves identifiés en difficulté

Le concept de milieu dans son sens commun réfère à une variété de significations (Drouin et Astolfi, 1987). Il existe plusieurs types de milieu : physique, social, culturel, etc. (Brousseau, 1988). Brousseau (1988) en distingue quelques–uns, notamment *l'environnement* dans lequel un enseignant place ses élèves, avec lequel il interagit concomitamment ou alternativement. L'élève placé devant une situation interagit avec un système qu'il cherche à « comprendre et à maîtriser » (Brousseau 1988, p. 321) et disons-nous à apprivoiser. Ce système est aussi nommé « milieu ». C'est à cet emploi que nous nous intéressons en didactique.

Un milieu est défini comme « un système antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur » (Brousseau, 1988, p. 320). Dans certaines situations, le milieu peut ne pas se retrouver suffisamment antagoniste : on est alors en présence de ce que Brousseau nomme un milieu allié de l'élève, pas en tant qu'apprenant mais par rapport à une activité mathématique amoindrie, peu favorable à un apprentissage de l'élève.

Dans les expérimentations avec Gaël (Brousseau, 2009), le milieu joue son rôle antagoniste, de sorte que l'adaptation de Gaël au milieu permet à Gaël de construire des raisonnements, de donner des réponses, de reconnaître ses erreurs et de les corriger au besoin. Le chercheur met en place des conditions qui favorisent une interaction, une relation enrichissante avec le milieu. En agissant sur les conditions du milieu, il favorise chez Gaël un rapport différent avec le savoir en cause.

Cette analyse des difficultés illustrée par le cas Gaël va progressivement amener un déplacement des recherches sur les difficultés et les élèves en difficulté: de l'étude des difficultés liées à l'élève à l'étude des situations d'enseignement s'adressant à cet élève, du milieu (au sens de Brousseau) avec lequel interagit l'élève. Il s'agit, comme l'a expérimenté et l'a proposé Brousseau (2009, p. 9) dans le cas de Gaël, « d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitude souhaités », d'aménager en utilisant la théorie des situations didactiques, les conditions du milieu favorables à l'émergence des connaissances : une situation qui favorise une dévolution (une prise en main de la situation par l'élève), une situation d'action, favorisant la mise en place de modèles implicites par les élèves, mettant en jeu un déséquilibre (forçant une adaptation de l'élève) (Brousseau, 1988).

Salin (2006, p. 200) développe trois caractéristiques importantes du milieu propices à un tel développement: un « facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, donc d'adaptation pour l'élève », favorisant son autonomie; permettant un apprentissage conduisant à la maîtrise de savoirs visés via la remise en cause, si

nécessaire, des connaissances que mobilise l'élève. Développons ces trois caractéristiques en vue de clarifier cette idée de milieu, fondamentale dans l'intervention auprès d'élèves identifiés en difficulté, comme nous le montre le cas Gaël.

2.1.4.1 Le milieu doit être un système antagoniste

La construction de connaissances par un élève suppose la présence d'un milieu générant des déséquilibres, des contradictions. Lorsque l'élève réussit à surmonter ces contradictions, il s'adapte ainsi à ce milieu et, des connaissances nouvelles peuvent émerger. Ce milieu est donc un levier puissant pour la production de connaissances par l'élève. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce milieu peut ne pas être antagoniste, c'est le cas par exemple des activités simples faisant appel à des procédures, des règles. Dans ce cas, le milieu ne stimule pas l'élève dans la construction de ses connaissances; il est "complice" de l'élève; l'activité proposée à l'élève n'est qu'un jeu de stéréotypes ou d'algorithmes. Dans le cas de Gaël, il n'y a pas d'apprentissage. L'intervention de l'intervenant au départ (qui guide l'élève pour trouver la réponse par comptage) est un exemple de "milieu" complice non favorable à l'apprentissage**.** Pour qu'il y ait apprentissage, il doit y avoir milieu antagoniste et pour dépasser la contradiction, l'élève va chercher à s'adapter à ce milieu. Ce processus doit se faire sous le contrôle de l'élève lui-même.

Dufour-Janvier et Bednarz (1989, p. 323) identifient trois conditions à satisfaire par les « situations conflictuelles »[57] construites en vue du progrès des élèves dans la résolution d'une situation.

[57] Selon ces auteures « une situation est conflictuelle si l'enfant est confronté à un problème (par exemple, stratégie inefficace…) qu'il reconnaît, dont il est conscient, s'il est de plus insatisfait de ne pouvoir résoudre la situation proposée (avec ses conceptions du moment) et enfin s'il est motivé à prospecter davantage, à rechercher des alternatives. »

1. Mettre en évidence les limites, la non-efficacité des représentations, des procédures, des conceptions que les enfants ont élaborées. (Les situations doivent faire en sorte que les productions des élèves soient mises à l'épreuve).
2. Permettre d'emblée à l'élève d'investir dans la construction d'une première solution, ou tout au moins d'une tentative de solution.
3. Permettre une remise en question, une ouverture à d'autres façons de faire.

2.1.4.2 Le milieu doit favoriser l'autonomie de l'élève

L'élève doit prendre en charge cette résolution (Salin, 2006), l'enseignant intervenant dans une moindre mesure dans la relation de l'élève avec le milieu. Le développement d'un raisonnement, la construction de connaissances par un élève supposent des va-et-vient, des bifurcations, des choix propres de l'élève qui aboutissent à une conception, à une représentation qui n'est pas forcément celle attendue par l'enseignant (Mouboli, 2004).

Ainsi, permettre un système antagoniste favorable c'est-à-dire un milieu qui n'est pas sous le contrôle exclusif de l'enseignant questionne le rôle de l'enseignant: il ne contraint pas, n'oriente pas vers une réponse attendue mais doit davantage intervenir sur les conditions du milieu.

Une situation didactique impose des contraintes, une sorte de « contrat didactique » (Brousseau, 2009, p. 1). Le moyen qui permet à l'enfant d'entrer dans ce contrat est la dévolution qui permet à l'élève d'établir un rapport avec un milieu, l'enseignant n'intervenant que partiellement. Selon Brousseau (1988, p. 325), « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ».

2.1.4.3 Le milieu doit favoriser un apprentissage débouchant sur la maîtrise de savoirs et connaissances mathématiques

Le choix de situations propice à mobiliser un certain savoir (Salin, 2006) semble être une condition centrale. Il renvoie pour l'intervenant à une analyse fine des situations au

regard du savoir. Par exemple, les exemples des situations fondamentales reprises dans le travail sur les décimaux (Brousseau, 1980, 1981) répondent à une telle condition.

Brousseau (1976, p. 110) suggère trois types de situations : les situations d'action, de communication et de validation. Les situations d'action permettent à l'élève d'élaborer « des régularités, des schèmes et des modèles d'action, le plus souvent inconscients ou implicites ». Ces schèmes sont des structures conceptuelles que les élèves se construisent qui peuvent être modélisées aussi dans d'autres situations. Les situations de formulation font intervenir le langage, le discours verbal ou écrit en d'autres mots la communication et vont conduire à expliciter les modèles développés dans l'action. Les situations de validation quant à elles fournissent à l'élève la possibilité de prouver la validité d'une proposition. C'est l'occasion pour l'élève de convaincre à partir d'arguments structurés.

Dans le cadre de cette recherche, cela suppose en ce sens de la part du chercheur des analyses préalables qui vont fonder le choix plus précis des situations et des conditions mises en place.

2.1.5 Qu'est-ce qui se dégage de ces travaux aux fins de notre recherche?

Dans cette première partie, nous avons examiné les concepts de difficulté à travers les différentes perspectives abordées au fil du temps, et avons vu comment nous sommes passés dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques d'une vision déficitaire, où la difficulté est associée à l'élève, à une vision d'une difficulté associée à une connaissance en formation, dès lors non plus considérée dans l'absolu mais dans son interaction avec un certain milieu. Cette conceptualisation de la difficulté, dont l'ancrage prend tout son sens en lien avec certains fondements théoriques (le constructivisme et son idée centrale d'adaptation, la théorie des situations didactiques chez Brousseau (1998)), amène graduellement les chercheurs à ne plus s'intéresser uniquement aux interprétations et modélisations des erreurs ou difficultés en termes de conceptions, de connaissances locales en formation, mais également aux conditions du

milieu avec lesquels interagit l'élève, pour comprendre ces difficultés et les potentialités de l'élève. Nous résumons dans le tableau 2.1 les différentes conceptions d'une difficulté en jeu dans les différentes perspectives présentées précédemment et les natures de l'intervention sous-jacentes.

Notre perspective face aux difficultés d'apprentissage en mathématiques rejoint les travaux menés en didactique des mathématiques (Dufour-Janvier et Bednarz, 1989; Giroux, 2014) et s'éloigne des courants de pensée analysés aux sections 2.1.1 et 2.1.2 précédemment. Elle conçoit davantage une difficulté comme la manifestation d'une certaine connaissance, d'un processus en formation, et va s'intéresser à ces connaissances de l'élève en interaction avec un certain milieu.

Les aménagements du milieu seront ainsi indispensables. Penser ces aménagements nous renvoie entre autre à l'analyse plus fine de la notion de situation-problème, dimension centrale de ce milieu auquel sera confronté l'élève (nous y reviendrons dans la 2ème partie de ce chapitre), mais cela renvoie aussi aux conditions de ce milieu sur lesquelles le chercheur sera amené à intervenir (nous y reviendrons au chapitre 3).

Tableau 2.1 Concept de difficulté, vision de l'élève en difficulté/différents modèles.

Modèle		**Conception de la difficulté/de l'erreur**	**Nature de l'intervention**
Une vision déficitaire de la difficulté/ de l'élève en difficulté	Médical	Difficulté associée à l'élève Une difficulté associée à une déficience physiologique (exemple : dyscalculie)	Diagnostiquer le problème (tests et mesures: QI, tests de calcul, etc.) Remédier : Agir sur l'attention, l'hyperactivité (médicaments), etc.
	Lacunaire (en référence à une norme)	Difficulté associée à l'élève Une difficulté associée à un manque/une lacune	Diagnostic (en référence aux tests usuels, à une certaine moyenne, à une performance « normale ») Reprise : revenir sur les préalables, les concepts de base non acquis, le vocabulaire, les stratégies de lecture…etc.
Une vision en termes de potentialités, relatives à un milieu	Perspective constructiviste	Difficulté associée à une connaissance viable localement, idée d'adaptation/ une connaissance en formation	Restructuration des connaissances, placer l'élève en conflit cognitif (déséquilibre) pour forcer une adaptation et favoriser une restructuration des connaissances
	Perspective didactique (TSD), trouvant ses fondements dans le constructivisme piagétien	Difficulté à chercher dans l'interaction de l'élève avec le milieu (élève en lien avec un milieu)/ Construction en développement	Agir sur les conditions du milieu pour que l'élève rentre dans un rapport différent au savoir

Pour synthétiser la perspective qui est la nôtre face à l'intervention auprès d'élèves identifiés en difficulté, on peut ici emprunter les questions que se posent Mary *et al.* (2011), dans leur analyse de ces interventions : sur quoi interviennent-elles et dans quel but intervient-on? L'objet de cette intervention, nous disent les auteurs, peut porter sur

un certain contenu mathématique ou sur les fonctions cognitives générales (Mary *et al.*, 2011). Le but de l'intervention est de remédier aux difficultés des élèves identifiés en difficulté (cas des modèles développés aux sections 2.1.1 et 2.1.2) ou de miser sur les potentialités mathématiques des élèves, en jouant sur les conditions du milieu (voir sections 2.1.3 et 2.1.4). Dans le premier cas, la pratique de remédiation caractérise l'intervention, elle consiste à pallier aux difficultés des élèves, à vouloir traiter sur le champ l'erreur ou la difficulté, à s'assurer de l'acquisition des préalables (en revenant sur les habiletés de base, les techniques de calcul…) avec les effets pervers que cette pratique d'enseignement comporte comme nous l'avons mentionné à la section 2.1.2 (voir aussi Mary et Squalli, accepté). Dans le deuxième cas, la pratique d'intervention vise le développement du potentiel de l'élève[58], de son « génie mathématique », en agissant sur les conditions du milieu et en portant attention aux constructions et inventions des élèves en interaction avec les situations. C'est la voie que nous adoptons.

Comme l'affirme si bien von Glasersfeld (2004, p. 311) à ce sujet, « les élèves prennent souvent des chemins tout à fait inattendus et originaux pour trouver une solution assez viable, mais peut-être limitée dans son applicabilité ». Ce sont ces potentialités mathématiques des élèves en interaction avec les conditions mises en place (les situations et leurs aménagements) qui nous intéressent.

Il nous semble important, avant de poursuivre, de clarifier ce que recouvre ce concept de « potentialités mathématiques » au cœur de la recherche que nous entreprenons.

2.2 Le concept de potentialités mathématiques

Plusieurs travaux menés auprès d'élèves identifiés en difficulté d'apprentissage se sont intéressés, de manière implicite souvent, explicite dans certains cas (Mary et al., 2011, accepté), au développement du potentiel mathématique de ces élèves (voir section

[58] Nous parlerons davantage de développement des potentialités mathématiques des élèves. Nous reviendrons dans la section suivante sur ce concept et les fondements qui nous guident.

1.4.6). Nous utilisons dans cette recherche le terme potentialités. Mais qu'entend-on par potentialités mathématiques des élèves?

L'étymologie du mot potentialité nous renvoie à diverses acceptions, dont celle, en biologie, d'un « ensemble de réalisations (diverses) que peut manifester un caractère, une cellule, un territoire embryonnaire, un organe, suivant les conditions naturelles ou expérimentales » (Husson, 1970)[59]. Cette signification, qui rejoint les préoccupations qui sont les nôtres, est associée à un ensemble de réalisations, de manifestations mises en lien avec des conditions : dans ce cas, un caractère ou organe vivant (pour nous un élève) se meut dans un environnement ou dans des conditions (naturelles ou expérimentales) qui peuvent lui permettre de manifester ces potentialités (mathématiques).

En éducation, certains chercheurs parlent des enfants à « hautes potentialités » (Vaivre-Douret, 2019). Dans ce cas (Ibid, 2019, p. 141), les potentialités réfèrent « à la fois à une pluralité et à une diversité de dispositions potentielles, susceptibles de recevoir dans certaines conditions d'environnement, d'exercices et de motivations, les impulsions nécessaires à leur développement ». La potentialité est ici vue comme une disposition latente de l'élève susceptible d'être activée. Elle est attachée à l'élève et va se développer sous l'effet de l'environnement. Ce n'est pas la perspective que nous retenons, la potentialité n'étant pas conçue dans cette recherche comme une disposition de l'élève.

En didactique des mathématiques plus spécifiquement, certains chercheurs ont précisé ce concept de « potentialités mathématiques » des élèves, en prenant appui sur une perspective socioculturelle de l'apprentissage (Radford, 2011; Mary et Squalli,

[59] Référence : https://www.lalanguefrancaise.com/dictionnaire/definition-potentialite/

accepté[60]; Mary et al., 2011). Ils se basent sur une certaine vision des mathématiques comme activité humaine, culturellement constituée, et sur celle d'un apprentissage des mathématiques conçu comme une construction sociale qui s'opère dans des échanges médiatisés par le langage, la culture et ses artefacts. Mary et al. (2011) et Mary et Squalli (accepté) puisent également à d'autres sources, davantage didactiques (Brousseau, 1998), qui permettent de faire ressortir l'importance des situations dans cette actualisation du potentiel mathématique de l'élève. Voyons ce qu'il en est plus précisément.

Pour Radford (2011), le terme « potentialité » (on parle ici de potentialité mathématique de l'élève) est utilisé pour rendre compte d'un « savoir mathématique (culturellement constitué) qui peut se révéler à l'élève au cours d'une activité mathématique médiatisée par les outils de la culture que l'enseignant met à la disposition des élèves ». L'activité mathématique de l'élève est ici médiatisée par des artefacts culturels (symboles, langage, objets,…), en particulier des prototypes d'action et de réflexion, qui vont s'actualiser de manière singulière chez l'élève.

Mary et al. (accepté), prenant appui sur cette perspective socioculturelle des mathématiques et de l'apprentissage, reprennent cette signification, en parlant dans leur cas de potentiel mathématique de l'élève, et en explicitant notamment celui-ci à partir d'un exemple: *« Donnez une ficelle fermée à un enfant de 10 ans et demandez-lui quelle forme faut-il donner à la ficelle pour qu'elle entoure la surface de plus grande aire?* » (Mary et al. accepté). Selon les chercheurs, « un enfant de 10 ans réalisant l'expérience peut arriver à la conclusion que la ficelle doit avoir la forme d'un rond (cercle). Il peut même tenter des arguments du type : quand une portion de la ficelle n'est pas ronde, en la rendant ronde on augmente la surface intérieure, ce qui est en fait un théorème connu ». Ainsi, au cours de cette activité, nous disent les auteurs, « le savoir

[60] Dans ce cas, on parle de potentiel mathématique des élèves.

mathématique (dans ce cas le concept de cercle) apparaît comme une potentialité qui peut être actualisée par la pensée de l'élève sous l'effet de la médiation de l'activité mathématique des élèves ». C'est en ce sens que Mary et Squalli parlent d'un élève porteur d'un potentiel mathématique : « l'élève en difficulté est porteur d'un potentiel mathématique dont l'actualisation est teintée de ses propres expériences dans la vie de tous les jours et à l'école, de ses rencontres avec différents aspects du concept par l'intermédiaire d'artefacts et de médiation sociale ». Ces connaissances mathématiques qui se manifestent alors dans l'activité (dans l'exemple précédent, un concept intuitif de cercle, un théorème-en-acte) relèvent, nous disent les auteurs, de connaissances en action, souvent latentes ou implicites : « très souvent, les élèves manifestent des connaissances en action dans des activités mathématiques ».

Différentes postures se dégagent de notre analyse des points de vue des auteurs précédents. Certains reconnaissent les potentialités comme des dispositions latentes (Vaivre-Douret, 2019), d'autres parlent des potentialités en terme de savoirs mathématiques se révélant à l'élève de manière singulière au cours d'une activité mathématique médiatisée par des artefacts culturels (Radford, 2011). D'autres parlent d'un potentiel mathématique qui s'actualise (Mary et Squalli, accepté) en terme de connaissances en action, avec la nécessité de reconnaître « l'importance des situations », de rechercher « des conditions favorables à l'apprentissage », de favoriser la construction de connaissance par l'élève en interaction avec un milieu : « les conduites des élèves ne sont pas indépendantes des situations qui engagent une interaction spécifique avec le savoir » (Mary et Squalli, accepté). Ce dernier point de vue est le nôtre.

Nous parlons toutefois davantage de potentialités mathématiques qui se développent, que d'une actualisation du potentiel mathématique de l'élève. Pour aller plus loin sur cette idée d'un développement des potentialités, central dans notre conceptualisation, il nous apparaît intéressant de retourner à Piaget. **La potentialité ne peut en effet être**

pensée, d'une part, sans une interaction avec certaines conditions, un certain milieu, nous l'avons vu précédemment, mais, d'autre part, elle ne peut être conçue de façon statique. Inhelder, Garcia et Vonèche (1977, p. 8), en citant Piaget, rapportent ainsi que les rencontres (avec un certain milieu) « peuvent donner lieu à des couplages plus ou moins complets qui engendrent de nouveaux états d'équilibre, ceux-ci compensant les perturbations du milieu en les dépassant, ce qui est facteur de progrès ». Ces états d'équilibre procèdent de conflits et de contradictions qui, selon Inhelder, Sinclair et Bovet (1974) cités par Inhelder *et al.* (1977), sont facteurs de développement. Selon eux, « l'intelligence, en tant que mécanisme d'adaptation par excellence, ne peut être comprise que sur le modèle des mécanismes déjà en action dans l'adaptation biologique » (p. 9). On voit bien, dans ce qui précède, le lien établi par Piaget (1967), dans la foulée de ses travaux, entre la biologie et la connaissance, avec en avant les idées d'adaptation et d'équilibre, « tout déséquilibre constituant une ouverture sur de nouveaux possibles » (Inhelder *et al.* (1977, p. 10)). Dans ce sens, la métaphore reprise par Morf (1994, p. 38) nous apparaît instructive : « [s]i on enlève une branche à un pommier, il compense la perte et il poursuit sa croissance ». Autrement dit, le pommier intègre la douleur et l'apprivoise et continue de regénérer.

Ce processus dynamique que constitue l'adaptation, central dans l'apprentissage, peut être défini « comme un équilibre entre l'assimilation et l'accomodation » (Piaget, 1975, p. 14). Les deux concepts sont diamétralement opposés mais mutuellement inclusifs et solidaires dans un même système : l'adaptation. Il y a assimilation d'un élément à une organisation si en intégrant cet élément dans son cycle, la structure de cette organisation est conservée mais non détruite. En revanche, il y a accomodation, si cet élément modifie sa structure (Piaget, 1975).

Aussi, Piaget (1976, p. 16) établit un lien entre « les compensations et les constructions » en ce qui a trait à la connaissance, mettant bien en évidence le rôle joué ici par le milieu dans le développement de cette connaissance (a), mais aussi son

insertion dans un éventail plus large de possibles (c et e). Ses arguments reposent sur ce qui suit :

a) Lorsqu'une pertubation considérée comme telle intervient au cours d'activités du sujet, celui-ci cherche à la compenser.
b) Mais cette réaction compensatrice ne saurait être, au plan cognitif, un simple retour à l'état antérieur puisque l'activité pertubée est devenue de ce fait perturbable et qu'il s'agit alors de la consolider, ce qui revient à la compléter ou à l'améliorer.
c) Cette exigence de dépassement […] implique **une ouverture anticipatrice sur de nouveaux possibles.**
d) Dès le départ, la réaction compensatrice cognitive est donc orientée vers l'amélioration, ce qui implique dès le plan du possible, une tendance à la construction, puisque l'activité pertubée est considérée comme améliorable.
e) La régulation cognitive apparaît ainsi en ses sources comme l'amélioration possible d'une activité qui s'insère elle-même de ce fait en un éventail plus large de possibles (p. 16).

Ainsi dans le développement de potentialités mathématiques, au regard des points de vue précédents, les conditions mises en place autour d'une situation au profit d'un élève pourraient permettre à celui-ci d'ouvrir sur divers possibles.

Par ailleurs, ces potentialités mathématiques prennent la forme de connaissances qui prennent leur source dans l'action, comme nous le rappelent Inhelder *et al.* (1977, p. 7) : « l'intelligence humaine s'élabore à partir des activités sensori-motrices, qui sont une forme de connaissance en action pour laquelle la réalité n'existe que durant l'acte qui la pose ». On retrouve ici cette idée d'une connaissance-en-action, non nécessairement formalisée, fondamentale dans la conceptualisation de la potentialité.

Que dégagons-nous de ce qui précède? Dans quel sens parlons-nous de potentialités mathématiques de l'élève?

Les potentialités mathématiques des élèves sont de l'ordre de **connaissances-en-action,** elles ne sont pas nécessairement explicites ni formalisées. L'exemple précédent

du concept intuitif de cercle (rond) et du théorème-en-acte mis en œuvre dans l'activité mathématique de la ficelle (voir exemple précédent) est bien de cet ordre.

Ces potentialités mathématiques **se développent en interaction avec un certain milieu antagoniste** (Brousseau, 1998), source de déséquilibres, dans un processus d'adaptation ouvrant sur divers possibles. On retrouve ici les concepts clés piagétiens au fondement du constructivisme, et à la base de la théorie didactique de Brousseau.

Les potentialités mathématiques, en ce sens, sont vues comme un **ensemble de connaissances possibles** sur lesquelles ouvre cette activité mathématique de l'élève dans l'interaction avec ce milieu. **Ces potentialités ne sont pas statiques, elles sont appelées à évoluer au regard des conditions mises en place.**

S'intéresser aux potentialités des élèves, miser sur le développement de ces potentialités, **suppose pour le chercheur une ouverture à ce « génie mathématique »** dont est porteur tout élève. À ce propos, Bednarz et Larochelle (1994) soulignent que :

> Les connaissances ne peuvent plus être typifiées selon les catégories sémantiques habituelles : *il faut les envisager de façon dynamique.* Cela implique donc que les chercheurs, les chercheuses […] puissent réexaminer incessamment le cadre conceptuel qui guide leur lecture des solutions fournies par l'élève, et considérer celles-ci comme des potentiels d'action issus de l'expérience et qui peuvent être apparentés suivant le type d'activités cognitives qu'elles conditionnent (p. 10).

C'est la voie que nous adoptons au fondement de notre recherche. Cette posture épistémologique constructiviste prend en compte, de manière dynamique, les constructions mathématiques des élèves en lien avec les situations proposées et les conditions mises en place.

La réflexion sur ces situations proposées aux élèves, on le voit dans ce qui précède, joue donc un rôle central. C'est sur celle-ci que nous revenons maintenant.

2.3 Le concept de situation-problème en didactique

Le concept de situation-problème ne peut échapper à la nécessité d'être situé par rapport au concept de problème, les problèmes ayant été très présents dans l'enseignement des mathématiques à l'école et ce depuis très longtemps (Artigue et Houdemont, 2007; Lajoie et Bednarz, 2012). Nous reviendrons dans un premier temps sur une analyse historique du problème dans l'enseignement des mathématiques pour avancer sur une première caractérisation de ce qu'a recouvert la notion de problème au fil du temps. Dans un second temps, une analyse des travaux en didactique sur cette notion débouchera sur les distinctions formulées autour de ce concept de problème : notamment dans sa distinction avec la notion d'exercice et dans les nuances apportées en relation avec la caractérisation de différents types de problèmes. Dans un troisième temps, nous évoquerons l'émergence et le développement de la notion de situation-problème.

2.3.1 Perspective historique autour du développement de la notion de problème dans le curriculum

La notion de problème et la résolution de problèmes ont de tout temps fait partie des programmes de mathématiques dans le monde (Mason *et al.*, 1994; Schoenfeld, 1985, Artigue et Houdement, 2007; Lajoie et Bednarz, 2012). Artigue et Houdemont (2007) montrent par exemple qu'en France, la résolution de problèmes a joué un rôle central tant dans la recherche en didactique des mathématiques que dans les choix curriculaires, et que celle-ci est un objet à propos duquel ont été prises des positions controversées. Ces auteures abordent la question de la résolution de problème sous deux angles d'analyse : ce que dit la recherche en didactique des mathématiques, plus spécifiquement ce qu'elle apporte, ce qu'elle éclaire et en parallèle les choix curriculaires qui sont faits. En didactique des mathématiques, ces auteures reviennent, entre autres, sur l'influence de deux théories sur la résolution de problème en France : la théorie des situations didactiques (TSD) initiée par Brousseau (1998) et la théorie antropologique du didactique (TAD) construite par Chevallard (1992). Ces auteures

abordent aussi les concepts de problèmes ouverts, de problème dans la dialectique outil-objet. Nous en parlerons à la section 2.2.2.

De même au Québec, la résolution de problème a joué et joue encore un rôle important aussi bien dans les choix curriculaires que dans les travaux de recherche (Lajoie et Bednarz, 2012; Landry, 1999; Lemoyne, 1996). Ainsi Lajoie et Bednarz (2012, p. 179) ont mis en évidence, dans leur analyse des programmes et documents pédagogiques sur plus d'un siècle, que ceux-ci ont continuellement intégré la résolution de problèmes dans les « finalités » et les « moyens » envisagés dans l'enseignement des mathématiques. Mais que recouvre ici cette notion de problème? Les travaux de Lajoie et Bednarz (2012) apportent un éclairage important sur cette question en mettant en évidence les balises qui ont guidé le choix des problèmes proposés, tels qu'ils ressortent de l'analyse des programmes et documents pédagogiques associés, et les continuités et discontinuités dans cette évolution.

Il apparaît utile de mettre en relief ces critères de choix en prélude à ceux des situations-problèmes[62] en vue de faire ressortir les différences avec la notion de situation-problème se dégageant d'une telle analyse au plan curriculaire (voir chapitre 1, figure 1.6). Aussi, présentons-nous dans le tableau ci-dessous des éléments qui se dégagent de l'analyse des travaux de Lajoie et Bednarz (2012) (cf tableau 2.2).

Cette analyse montre bien les changements qui sont intervenus au fil du temps, des changements, nous disent les auteures, qui ne relèvent pas de réelles ruptures mais s'inscrivent plus dans une continuité. S'il y a rupture, cette dernière est plus à trouver du côté du rôle joué par ces problèmes dans l'enseignement : d'un rôle d'application des connaissances (avant 1959) à celui associé à la construction de nouvelles connaissances (1980-1990 amorcé dès les années 70). L'analyse de la notion de

[62] Les critères de choix des situations-problèmes dans le cadre de cette recherche seront examinés dans le chapitre 3.

situation-problème (telle qu'elle se dégage des documents ministériels, cf.figure 1.6) fait apparaître par ailleurs des balises nouvelles: une idée de complexité caractéristique des SP, qui ne se retrouve nullement dans la notion de problème (Lajoie et Bednarz, 2014).

Pour aller plus loin à cette étape, il apparaît important de retourner aux recherches en didactique qui ont abordé le concept de problème et, plus loin le concept de situation-problème.

Tableau 2.2 Critères de choix des problèmes et leurs rôles dans le programme d'étude québécois de 1900 à 2000. (Tiré et adapté de Lajoie et Bednarz, 2012).

Périodes	**Critères de choix des problèmes**	**Rôles attribués à la résolution de problèmes**
1904-1945	Accessibles en rapport avec la vie de l'élève - Énoncés clairs, précis et brefs; - Gradués du plus facile au plus difficile; Problèmes pratiques essentiellement - Exacts et vrais dans leurs données, pas de curiosité, pas d'énoncés fantaisistes. - Variés (quant aux domaines d'utilisation) pour éviter la monotonie	Appliquer les notions acquises (surtout) Former l'esprit
1948-1959	- Accessibles (énoncés clairs, précis et brefs, niveau de difficulté proportionné à l'âge de l'enfant, à sa « capacité ») : - Visualisables; - Rejoindre l'intérêt de l'enfant; - Problèmes pratiques (surtout) mais aussi problèmes pour raisonner Certains sont sans donnée numérique ou encore avec donnée manquante	-Raisonner en se servant des notions acquises -Appliquer les notions acquises
Années 80 et 90	- Exiger de l'élève une réelle recherche sans toutefois être difficiles - Intéresser les élèves, les motiver à s'engager dans une démarche de résolution. - Variés • différentes entrées (matériel, verbal, écrit, gestes), modalités (classe, équipes, individuel); • différents contextes (mathématique, réel, réaliste et fantaisiste), nombre de solutions, modes de représentation, adéquation de données fournies.	-Développer des habiletés intellectuelles -Développer des attitudes positives, des stratégies de résolution de problèmes -Réinvestir des connaissances -Explorer et construire de nouvelles connaissances

2.3.2 La notion de problème en mathématiques : éclairage de la recherche en didactique

Le concept de problème a été étudié par plusieurs chercheurs (Arsac *et al.*, 1991; Brousseau, 1983, 1998; Douady 1980, 1984; Lunkeinbein, 1985; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985)[64] et a donné lieu à différentes conceptualisations que nous préciserons plus loin.

Dans un contexte d'enseignement des mathématiques, Xenofontos et Andrews (2008) vont faire apparaître la relativité du concept de problème, un problème pour une personne pouvant ne pas en être un pour une autre personne (Blum et Niss, 1991; Borasi, 1986; Goos *et al.*, 2000; Nesher *et al.*, 2003; Wilson *et al.*, 1993). C'est ce que relève Kilpatrick (1985, p. 2) :

> The subjective nature of a mathematical problem, although often overlooked in discussions of problem solving has been understood and accepted in mathematics education for at least 40 years[65].

Kilpatrick (1985, p. 2) affirme en effet : **«** Researchers in mathematics education have long accepted the truth that a problem for you today may not be one for me today or for you tomorrow »[66].

Dans ces travaux, Kilpatrick (1985, p. 2) fait un détour par la psychologie pour définir ce qu'est un problème :

> ... A problem is defined generally as a situation in which a goal is to be attained and a direct route to the goal is blocked. The psychologists usually add that the

[64] L'article de 1998 de Brousseau reprend ses travaux de 1976 et 1983, voir http://guy-brousseau.com/550/obstacles-epistemologiques-problemes-et-ingenierie-didactique-1998/

[65] Le caractère subjectif d'un problème mathématique, bien que souvent négligé dans les discussions sur la résolution de problèmes, a été comprise et acceptée dans l'enseignement des mathématiques depuis au moins 40 ans. [Traduction libre].

[66] « Les chercheurs en didactique des mathématiques ont depuis longtemps accepté le fait qu'un problème pour vous aujourd'hui [un problème en mathématiques] puisse ne pas être un problème pour moi aujourd'hui ou pour vous demain » [Traduction libre].

> situation requires the presence of a person who "has" the problem; to be a problem, it has to be a problem for someone[67].

Kilpatrick (1985) ajoute que les psychologues ne sont généralement pas concernés par des problèmes mathématiques spécifiques. Il propose donc qu'à cette définition d'un problème, pour que celui-ci soit un problème mathématique, des concepts et des principes mathématiques doivent être utilisés dans la recherche de la solution.

> The psychologists are not usually concerned with mathematical problems per se, but one could add to the formulation that for a problem to be mathematical, mathematical concepts and principles should be used in seeking the answer. From this perspective, we see the problem as an activity of a motivated subject (Kilpatrick, 1985, p. 2).

Cette idée de Kilpatrick nous amène à pousser plus loin cette caractérisation de ce qu'est un problème en mathématiques. Différents auteurs ont abordé ce concept de problème en mathématiques sous des perspectives, des regards différents.

La conception courante de la notion de problème en mathématiques réfère aux exercices simples d'application de connaissances apprises antérieurement par les élèves. Ces exercices peuvent solliciter une simple application d'un algorithme (Arcavi et Friedlander, 2007; Hitt, 2004), un contenu mathématique à illustrer, à appliquer, à mettre en pratique (Glaeser, 1973). Glaeser distingue cette notion d'exercice de celle de problème, ce dernier suscitant la curiosité des élèves et déclenchant un « comportement de recherche » (Glaeser, 1973, p. 19). Une telle activité exige, nous dit Glaeser, du temps. Or il est possible que face à un problème, un élève prenne moins de temps qu'un autre. Dans ce cas de figure, on peut se demander si cet élève est devant

---

[67] « Un problème est généralement défini comme une situation dans laquelle un but doit être atteint et pour laquelle un chemin direct permettant d'atteindre ce but ne peut être utilisé. Les psychologues vont habituellement ajouter que la situation nécessite la présence d'une personne qui « vit » le problème [qui est confrontée au problème] : pour qu'il y ait problème, cela doit être un problème pour quelqu'un » [Traduction libre].

un problème ou un exercice, ou peut-on tout simplement dire qu'il a réussi à résoudre le problème. Le commentaire précédent met en évidence que la même tâche peut être un exercice pour certains élèves, un problème pour d'autres. En fait un problème est toujours relatif comme nous l'avons mentionné précédemment.

Par ailleurs, une telle tâche est aussi relative à ce qu'en fait l'enseignant : un même énoncé mathématique peut en effet être traité différemment par l'enseignant, tout dépend de l'intention pédagogique de celui-ci. Ainsi, un énoncé pourrait être formulé comme un problème accompagnant le cours par l'enseignant, une mise en situation amorçant le travail sur un concept, ou comme un exercice qui se veut alors une application du cours.

Le concept de problème peut aussi être examiné en lien avec son processus de résolution et au regard du rôle qu'il joue dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Kilpatrick, 1985). Voyons ce qu'il en est.

Les problèmes assimilés aux exercices, par exemple dans le cas des opérations, visent comme le souligne Lunkeinbein (1985) « à exercer les algorithmes de calcul appris récemment, à montrer l'utilité de ces algorithmes par des applications possibles dans la « vie quotidienne » et à vérifier si l'élève a bien compris l'essentiel des diverses opérations en reconnaissant les situations où elles s'appliquent » (p. 5). Cette conception est véhiculée dans le modèle de résolution proposé par Newman (1977) et repris par Cléments (1980) (cités par Lunkenbein, 1985). Ce modèle repose sur l'idée qu'un processus de résolution de problèmes implique cinq étapes à savoir la *lecture* et la *compréhension* du problème puis sa *transformation* en procédures mathématiques, ensuite *l'exécution* à bon escient des procédures et enfin la *retransformation* du résultat

numérique dans le contexte du problème (Newman (1977)[70], cité par Lunkenbein, 1985). Arcavi et Friedlander (2007) complètent les grandes lignes de ce modèle conventionnel qui propose :

> (a) to identify the relevant data,
> (b) to 'strip off' contextual details,
> (c) to translate the relevant verbal information into a 'mathematical model',
> (d) to operate within the model and to obtain a mathematical result, and
> (e) to interpret the result in terms of the given situation. (p. 359)

Brousseau (1998) réfère à ce sujet à ce qu'il nomme *une conception classique de la notion de problème*. Il définit le contenu mathématique d'un problème dans cette conception classique « comme un couple (T, f), T étant une théorie supposée explicitée dans le cours, et f la formule à trouver, à établir ou à placer dans une démonstration de T. » (Brousseau, 1998, p. 1). L'élève est donc invité à établir une formule vraie f (ou à l'utiliser) en ayant recours pour cela à une théorie en cours d'étude T (Brousseau, 1998). Cette conception, selon Brousseau (1998, p. 2), « conduit souvent à assimiler les hypothèses à ce qui est connu, les conclusions à ce qui est cherché (ou l'inverse) et la résolution à un cheminement qui coïnciderait facilement avec la démonstration cherchée ». Cette conception de problème, que l'on nomme aussi problème court ou problème scolaire ou problème ponctuel d'application (Lunkeinbein, 1985), est souvent associée à une « simple application de connaissances théoriques déjà acquises » (Dumas-Carré *et al.*, 1992).

Lunkeinbein (1985) se démarque de cette conception conventionnelle à la fois du concept de problème et du processus de résolution, en mettant de l'avant une conception

[70] (a) d'identifier les données pertinentes,
(b) d'évacuer les détails contextuels,
(c) de traduire les informations verbales pertinentes dans un «modèle mathématique»,
(d) d'opérer dans le modèle et d'obtenir ainsi un résultat mathématique,
(e) d'interpréter le résultat, en termes de la situation donnée. [Traduction[70] libre] (p. 359).

qu'il nomme « conception évoluée » du problème et de son rôle en enseignement. Selon lui, le problème est un objet dynamique et continu à l'opposé d'un objet statique et ponctuel. D'aucuns parlent dans ce sens de *problème de recherche, de problème continu d'élaboration et de développement*, etc. Ces problèmes « visent l'enrichissement, l'approfondissement ou l'accroissement de connaissances ou de techniques » (Lunkeinbein, 1985, p. 7). Ils apparaissent davantage prometteurs dans le cadre de cette recherche au regard du développement de potentialités mathématiques des élèves.

Selon l'auteur, ces problèmes exigent des « démarches graduelles de compréhension, de formulation d'hypothèses, de systématisation, … » (Lunkeinbein, 1985, p. 7). Ils stimulent ainsi un processus de questionnement plutôt que la production d'une réponse définitive et unique (Lunkeinbein, 1985). Le concept de problème renvoie ici à une activité qui amène l'élève non pas à appliquer des procédures, des connaissances déjà établies mais à réfléchir en vue de générer des connaissances et de trouver une solution viable à la situation proposée (Lemoyne et Lessard, 2003). C'est ce que soulignent aussi Lesh et Zawojewski (2007, p. 782)[71]:

> A task, or goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the « problem solver » (which may be collaborating group of specialists) needs to develop a more productive way of thinking about the given situation.

Les idées de réflexion sur les voies empruntées dans une tâche, de développement de la pensée à travers une activité proposée traversent ainsi cette définition des auteurs.

Par ailleurs, Lunkeinbein (1985) caractérise un problème par sa *nature* et son *contexte.* La nature d'un problème se réfère au processus de résolution que le problème engendre. Lunkeinbein distingue ainsi deux types de problèmes : le problème ponctuel

[71]Une tâche, ou une activité à but dirigé devient un problème (ou une problématique) quand celui qui cherche à résoudre le problème (lequel peut-être un groupe de spécialistes qui travaillent ensemble) doit développer un mode de réflexion plus efficace par rapport à la situation donnée [Traduction libre].

d'application (ou exercice) et le problème continu d'élaboration. Dans le premier type de problèmes, le processus de résolution requiert l'exécution d'un algorithme, une mise en pratique de connaissances introduites précédemment. Lunkeinbein fait allusion, par exemple, aux exercices du type, résoudre l'équation $5x + 7 = 2x + 3$. Un exemple de problème en mots, de type problème ponctuel d'application serait par exemple: « Votre papa est marchand. Il achète 3 douzaines de cravates à 9,60$ la douzaine, il les revend 1,25$ chacune. Combien de profit fait-il sur cette vente? » (Beaudry, 1950, p. 398, tiré de Lajoie et Bednarz, 2012)[72].

Dans le second type de problèmes, le processus de résolution exige l'approfondissement de connaissances. Un exemple de problèmes de ce type serait:

> En utilisant les nombres 3, 28, 67 et 85 une seule fois chacun et les quatre opérations au choix, trouve une suite d'opérations qui te permettrait d'arriver le plus près possible de 2039. Tu peux utiliser ta calculatrice. (MEQ, 1988, p. 27)

Le contexte du problème quant à lui est le domaine d'application ou de connaissance auquel le problème fait référence. Selon Lunkeinbein (1985), il y a d'une part « des contextes très spécifiques, souvent artificiels, sans signification ou intérêt pour l'élève […] » et d'autre part des contextes qui relèvent « des domaines très larges […] qui sont souvent des éléments de motivation pour les élèves ou des facteurs d'intégration de l'activité mathématique dans d'autres disciplines ».

Le schéma ci-dessous tiré de Lunkeinbein (1985, p. 7) résume la caractérisation d'un problème par sa nature et son contexte.

[72]Dans ces exemples, c'est nous qui parlons, pas Lunkenbein.

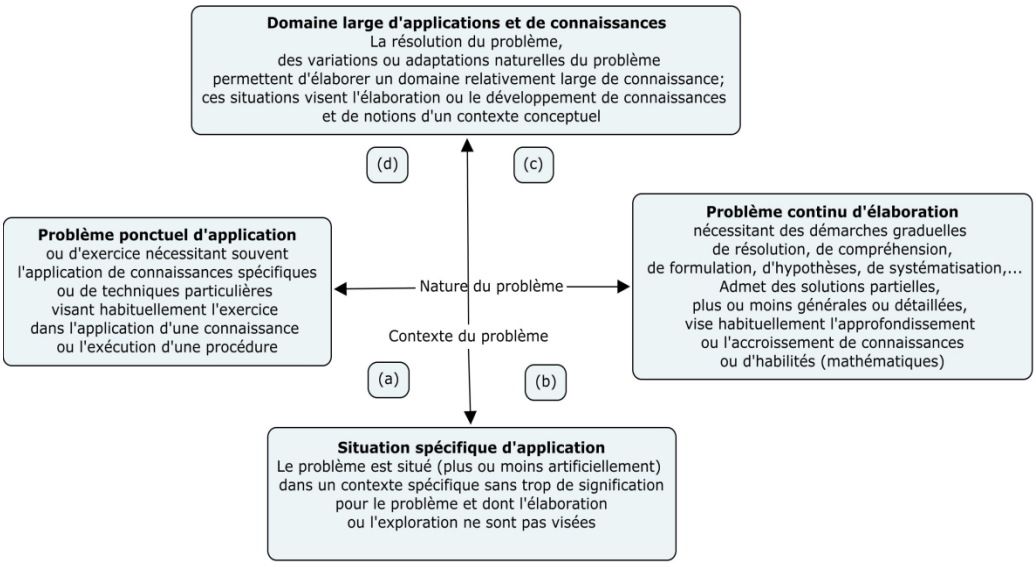


Figure 2.1 Caractérisation d'un problème selon Lunkenbein (1985)

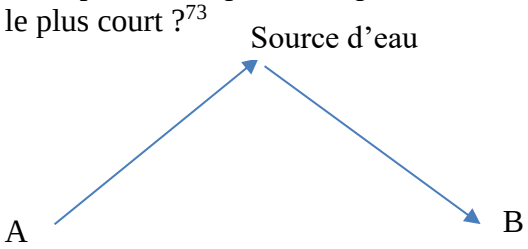
Il se dégage de ce schéma quatre types de problèmes correspondant aux quatre quadrants: d'une part, les problèmes ponctuels d'application, ou exercices, qui renvoient à l'application de connaissances spécifiques, de techniques particulières, une mise en pratique, une illustration de connaissances apprises antérieurement et, d'autre part les problèmes qui requièrent des développements et des constructions progressives; les solutions n'étant pas toujours trouvées immédiatement. Au contraire, elles peuvent exiger du temps et la mobilisation de plusieurs connaissances. L'enseignant a un rôle important à jouer dans le choix de ces problèmes. Ces types de problèmes font intervenir un contexte du problème qui peut être spécifique sans signification pour l'élève ou permettre d'élaborer un domaine relativement large de connaissances.

Plusieurs auteurs ont tenté de définir et de caractériser davantage ce concept de problème, en mettant en évidence différents types de problèmes et le potentiel qu'ils présentent pour l'apprentissage : problèmes ouverts (Arsac *et al.*, 1991), problèmes à données contradictoires, manquantes ou superflues forçant une réflexion de la part des

élèves (Bednarz, 1996), problèmes avec différents types de contextes, contextes réels, contextes réalistes, contextes fantaisistes et contextes purement mathématiques (MEQ, 1988). Les problèmes ouverts sont des problèmes qui encouragent les élèves à chercher des pistes de solutions. Selon Charnay (1992, p. 77), les problèmes ouverts offrent la possibilité aux élèves de mettre en marche une démarche scientifique c'est-à-dire de « faire des essais, conjecturer, tester, prouver ». Arsac et al. (1991) donnent les caractéristiques suivantes d'un problème ouvert:

> Un problème ouvert est un problème qui possède les caractéristiques suivantes:
> – l'énoncé est court;
> – l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de question du type "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
> –Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (p.7).

Exemple1 : Toto part de A, prend de l'eau et va en B. Peux-tu lui tracer le chemin le plus court ?[73]



Exemple 2 : Etant donné trois nombres positifs est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ? Si ce n'est pas toujours possible, quelle(s) condition(s) doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible?

À la lumière de ce qui précède, le concept de problème ne se limite pas, on le voit, à un problème ponctuel d'application; on y trouve déjà l'idée de problème de recherche (à travers la conception évoluée du problème explicitée par Lukenbein) et la caractérisation de différents types de problèmes. De plus, cette conception est associée

[73] Le dessin a été réalisé par nous.

à un rôle différent du problème, autre qu'une simple application (renvoyant à des approches d'enseignement susceptibles de favoriser et de maintenir cette dynamique d'élaboration et de développement qui caractérise une conception évoluée du problème), ouvrant sur l'élaboration d'un domaine relativement large de connaissances. Qu'en est-il de la notion de situation-problème? Se situe-t-elle dans la continuité de la réflexion amorcée précédemment? En quoi est-elle liée à cette notion de problème, en quoi s'en différencie-t-elle?

2.3.3 Émergence et développement de la notion de situation-problème

Le concept de situation-problème est un concept, dans l'usage qu'en ont fait les didacticiens des mathématiques, intimement associé à la construction de connaissances (nous y reviendrons plus loin) (Astolfi *et al.*, 1997; Brousseau, 1983; Douady, 1980, 1984). Il est aussi associé, si on étend à ce que certains appelleront situation-recherche, au développement de processus mathématiques (Dias, 2006; Grenier et Payan, 2003). Certains fondements théoriques sous-tendent les caractérisations de ces situations, et les projets dans lesquels elles s'inscrivent sont ici fondamentaux pour comprendre l'ancrage de ce concept chez leurs auteurs. L'importance accordée aux actions des élèves, à leurs interactions, l'attention portée à la construction de connaissances par ces élèves, ou au développement de l'activité mathématique (faire des mathématiques au sens d'un chercheur mathématicien) sont autant d'idées clés ayant sans contredit suscité la réflexion didactique par des chercheurs et chercheures à travers les concepts de problème et de situation-problème.

2.3.3.1 Un concept de situation-problème intimement lié à la construction de connaissances mathématiques par les élèves

Le concept de situation-problème chez Brousseau (1983), tout comme chez Astolfi (1997), apparaît lié à la notion d'obstacle et renvoie au dépassement des erreurs des élèves. L'idée d'obstacle a été mise en exergue par Bachelard (1938) : « on connait contre une connaissance antérieure » (p. 13) nous dit Bachelard. Un obstacle peut être

interprété comme « une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues […]» (Brousseau, 1983, p. 175). Un obstacle est une connaissance, qui comme l'affirme Brousseau (1976, p. 110), est « le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisement avec une situation qui rend la connaissance "intéressante" ». La notion de situation-problème chez Brousseau prend tout sons sens en lien avec cette notion d'obstacle. Brousseau (1983) caractérise un problème (au sens de situation-problème) comme

> une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une situation d'échanges relatifs à une même question qui fait "obstacle" pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier ou construire une connaissance nouvelle. Les conditions dans lesquelles se déroule cette suite d'échanges sont initialement choisies par l'enseignant mais le processus doit très vite passer sous le contrôle du sujet qui va "questionner" à son tour la situation. La motivation naît de cet investissement et s'entretient avec lui. Au lieu d'être un simple moteur extérieur, elle est de frustrations en équilibrations constitutive à la fois du sujet (de sa parole) et de sa connaissance (p. 178).

Une situation-problème (SP) pour Brousseau doit donc mettre l'élève en situation de conflit cognitif de manière à ce que le processus de déséquilibre/rééquilibration qu'elle va susciter puisse le conduire à s'approprier ou construire une connaissance nouvelle. Une perspective constructiviste guide ainsi cette définition d'une situation-problème et la caractérisation du processus de résolution qu'elle engendre.

Dans cette optique, cet obstacle joue un rôle central dans la caractérisation de la SP et guide sa construction. Cet obstacle est un levier puissant pour concevoir cette situation qui peut favoriser la construction de nouvelles connaissances. Dans la perspective qui sous-tend cette notion, les connaissances et les concepts sont donc construits par des essais et des rectifications successives (Brousseau, 1983) en franchissant de ce fait des obstacles qui suscitent de nouveaux questionnements et, partant, de changement de vision. On parle d'obstacle épistémologique**.**

Ce franchissement d'obstacle doit stimuler l'élève à s'investir considérablement « pour qu'un saut qualitatif soit nécessaire » (Brousseau, 1983, p. 176). De plus, Brousseau (1983, p. 175) souligne que le « franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance », autrement dit ce processus de franchissement requiert une série d'interactions entre l'élève et le milieu comme nous l'avons indiqué précédemment et nécessite d'être organisé. Pour ce faire, Brousseau (1976, p. 109) suggère une démarche :

> proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales […] pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi. […] Il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître.

Les conceptions précédentes de Brousseau (1983) nous permettent de dégager les caractéristiques essentielles d'une situation-problème qui conduit à la construction d'une nouvelle connaissance, à savoir : l'élève doit être en présence d'une *situation* d'échanges qui suscite de sa part un *engagement* (la volonté de résoudre un problème) qui va générer un *obstacle*. Les notions de *situation***,** de milieu, au sens de Brousseau[74], et d'*obstacle* constituent ici des appuis centraux dans la conceptualisation de la SP et l'analyse de ce qui s'y passe. La situation doit être sous le *contrôle* de l'élève dans son processus de résolution, engageant des questionnements, des stratégies et des détours de la part de l'élève. Ces idées sont pour nous centrales dans le choix que nous opérerons sur les situations-problèmes à expérimenter auprès d'élèves identifiés en difficulté.

[74] Voir à ce sujet le sens donné à ce concept à la sous-section 2.1.4

Dans la continuité de ce travail, Artigue et Houdemont (2007) énoncent les caractéristiques d'une situation-problème décrites par Douady, dont l'une des caractéristiques est la dialectique outil-objet que nous analyserons par la suite.

> The student can engage in the solving of the problem and perceive what is a possible answer to it, but her knowledge is a priori insufficient for an immediate solution; the student is able to decide if a given answer is or is not a solution; knowledge aimed at must be the best tool for solving the problem for students at this level of schooling; the problem can be formulated in at least two different settings and connections established between them, such connections favoring the construction of new knowledge " (p. 373)[75].

Notre analyse de ce passage permet d'identifier cinq caractéristiques qui rejoignent en partie celles énoncées par Brousseau (1983) à savoir : l'élève doit pouvoir *s'engager* dans une démarche de résolution de problème; les *connaissances* de l'élève doivent être insuffisantes pour une « solution immédiate »; l'élève a *le contrôle* sur la validité d'une solution; la connaissance visée est la connaissance « optimale » pour pouvoir résoudre le problème. De plus, il s'agit là d'un ajout aux caractéristiques proposées par Brousseau, le problème devra être formulé dans *au moins « deux cadres »* (par exemple les cadres algébrique et graphique) en vue de *construire une nouvelle connaissance*. Ces caractéristiques peuvent permettre de guider le choix ou la conception de la situation. L'exemple du casse-tête à l'annexe tiré de Brousseau (1981) satisfait aux caractéristiques précédentes d'une SP en lien avec la construction de concepts par l'élève; elle permet d'introduire le concept de proportionnalité qui fait l'objet d'un

[75] L'étudiant peut s'engager dans la résolution du problème et percevoir ce qu'est une réponse possible au problème, mais sa connaissance est a priori insuffisante pour une solution immédiate; l'étudiant est en mesure de décider si une réponse donnée est une solution ou non; à ce niveau d'apprentissage, la connaissance visée doit être le meilleur outil pour les étudiants pour résoudre le problème à ce niveau scolaire; le problème peut être formulé dans au moins deux différents cadres et des liens sont établis entre eux, de telles connexions favorisant la construction d'une nouvelle connaissance (p. 373) [Traduction libre[75]].

enseignement en secondaire 2 et de favoriser le développement d'un raisonnement proportionnel.

Landry (1999, pp. 30-31) reprend clairement ces cinq caractéristiques d'un problème (dans le sens de situation-problème) proposées par Douady (1984) en ajoutant la première caractéristique :

1. on doit avoir *repéré au préalable les conceptions « erronées » chez les élèves* liées à l'acquisition de la connaissance que l'on souhaite enseigner ou (et) les procédures correctes qui s'avèrent lourdes ou sources d'erreur.
2. les élèves doivent pouvoir *s'engager facilement dans la résolution du problème* en mobilisant ces conceptions et ainsi prendre conscience de l'insuffisance de celles-ci.
3. *le problème* ne doit pas être un réinvestissement de connaissances antérieures mais bien *permettre une production de connaissances nouvelles*.
4. *le contrôle de la solution* doit se faire par l'élève.
5. *l'outil le plus adapté* pour la résolution de problèmes est *la connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève.*
6. *et le problème peut avoir plusieurs cadres* **:** numérique, géométrique, graphique…

La 5^{e} caractéristique réfère à l'idée de «situation fondamentale» de Brousseau (1986) et suppose des analyses préalables du concept [analyse conceptuelle prenant appui sur une analyse épistémologique, analyse des conceptions, raisonnements des élèves,…] Bien que la théorie de Brousseau (théorie des situations didactiques (TSD)) et celle de Douady (dialectique outil-objet) prennent leur ancrage au départ dans la perspective constructiviste, les deux chercheurs diffèrent sur certains points (expliquant les critères différents mis de l'avant dans certains cas). En effet, Brousseau (1983) lie le concept de situation-problème à la notion d'obstacle et à son franchissement. Ce qui laisse apparaître une série de déséquilibres et de rééquilibrations. En revanche, Douady (1984) adopte une posture un peu différente sur la construction des connaissances par les élèves. Elle distingue pour un concept mathématique son caractère outil et son caractère objet et reprend cette dialectique outil-objet dans sa notion de SP. Elle entend

par outil « son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre » (Artigue et Douady, 1986, p. 77). Elle entend par objet « le concept mathématique considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (Artigue et Douady, 1986, p. 77).

Dans la même veine, Astolfi *et al.* (1997, pp. 144-145) qui s'inspirent de Robardet (1990) et Charnay (1987) et sans doute de Brousseau (1983), expriment les caractéristiques d'une situation-problème de la façon suivante :

1. Une situation-problème est organisée autour du *franchissement d'un obstacle* par la classe, obstacle préalablement *bien identifié.*
2. L'étude s'organise autour d'une *situation à caractère concret,* qui permette effectivement à l'élève de formuler *hypothèses et conjectures*. Il ne s'agit donc pas d'une étude épurée, ni d'un exemple ad hoc, à caractère illustratif, comme on en rencontre dans les situations classiques d'enseignement (y compris en travaux pratiques).
3. Les élèves perçoivent la situation qui leur est proposée comme une *véritable énigme à résoudre,* dans laquelle ils sont en mesure de s'investir. C'est la condition pour que fonctionne la *dévolution:* le problème, bien qu'initialement proposé par le maître, devient alors "leur affaire".
4. Les élèves *ne disposent pas, au départ, des moyens de la solution* recherchée, en raison de l'existence de l'obstacle qu'ils doivent franchir pour y parvenir. C'est le *besoin de résoudre* qui conduit l'élève à élaborer ou à s'approprier collectivement les instruments intellectuels qui seront nécessaires à la construction d'une solution.
5. La situation doit offrir une *résistance suffisante*, amenant l'élève à y investir ses connaissances antérieures disponibles ainsi que *ses représentations,* de façon à ce qu'elle conduise à leur remise en cause et à l'élaboration de nouvelles idées.
6. Pour autant, la solution ne doit pourtant pas être perçue comme hors d'atteinte pour les élèves, la situation-problème n'étant pas une situation à caractère problématique. L'activité doit travailler dans une zone proximale, propice au défi intellectuel à relever et à l'intériorisation des " règles du jeu".
7. *L'anticipation* des résultats et son expression collective précèdent la recherche effective de la solution, le « risque » pris par chacun faisant partie du « jeu ».

8. Le travail de la situation-problème fonctionne ainsi sur le mode du *débat scientifique à l'intérieur de la classe, stimulant les conflits sociocognitifs* potentiels.
9. *La validation de la solution* et sa *sanction* n'est pas apportée de façon externe par l'enseignant, mais résulte du *mode de structuration de la situation elle-même*
10. Le réexamen collectif du cheminement parcouru est l'occasion d'un *retour réflexif*, à caractère *métacognitif*; il aide les élèves à conscientiser les *stratégies* qu'ils ont mis en œuvre de façon heuristique, et à les stabiliser en *procédures* disponibles pour de nouvelles situations-problèmes.

Certaines de ces caractéristiques vont dans le même sens que celles de Brousseau (1983), notamment le franchissement d'un obstacle (point 1), la dévolution (point 3), la construction d'une solution et l'émergence d'idées nouvelles (points 4 et 5) et la validation (point 9) de la solution par l'élève.

Le point 5 nous rappelle l'idée de conflit cognitif. Les influences de Vygotsky et du courant psychosocial (point 8) ainsi que le regard métacognitif (point 10) se font par ailleurs sentir. Nous relevons l'influence de la didactique des sciences au point 2 notamment dans l'idée de « situation à caractère concret permettant de formuler hypothèses et conjectures » et de débat scientifique (point 8).

D'autres entrées que celles d'obstacle ont également alimenté la clarification de cette notion.

2.3.3.2 Un concept de situation-problème associé au développement de processus mathématiques

C'est le type de situation-problème que certains auteurs désignent par situation-recherche (SR) (Berdonneau, 2006; Coffin *et al.*, 2006; Dias, 2006). Grenier et Payan (2003) utilisent le concept de situation de recherche en classe (SRC).

Selon Grenier et Payan (2003), le premier objectif d'une SRC est de « produire des réponses à des questions » (Grenier et Payan, 2003, p. 6). Les concepts mathématiques en jeu pour la résolution des questions ne sont pas désignés à l'avance. Ce sont des outils qui servent à résoudre le problème. Le processus de résolution d'une question

dans le cas d'une SRC génère de nouvelles questions de recherche et partant l'élaboration de nouvelles stratégies de recherche. Aussi, le critère de réussite pour l'élève n'est pas obligatoirement la résolution de la question qui est soit juste soit fausse. La résolution de la SRC est souvent partielle et renvoie ainsi à d'autres questions.

Par ailleurs, selon Grenier et Payan (2003, p. 8), dans une SRC, il est possible d'avoir un « vrai enjeu social » de construction mathématique qui impliquerait le groupe (les élèves et le professeur). À l'opposé, selon ces auteurs, dans une situation didactique usuelle, seul l'élève est en situation de recherche et ce que l'on attend de lui c'est qu'il retrouve la solution du problème proposé. Les autres membres du groupe, notamment le professeur, connaissent les réponses aux questions posées. Ainsi la position de l'enseignant dans une situation-problème est différente de celle dans une SRC, un critère qui distingue une situation-recherche d'une situation-problème au sens précédent.

Dans la recherche d'une solution d'une situation-recherche, l'idée d'une communauté mathématique est à l'avant plan plutôt que la recherche d'une solution. Le chercheur (élève ou enseignant) utilise des résultats trouvés au cours de la recherche ou des propriétés à l'état de conjectures qui seront prouvées ou infirmées par la suite.

Des processus se développent par la résolution de questions. En classe, ces questions peuvent être résolues à partir des situations de recherche. Grenier et Payan (2003) abordent le concept de situation de recherche en classe qui met en relation l'élève, la situation et l'enseignant ou l'enseignante. Les auteurs donnent la position qu'occupent les acteurs dans une situation de recherche en « classe ». Dans celle-ci, l'élève est en position de *chercheur*. Il est impliqué dans une tâche de production de ce qui est nouveau aussi bien pour lui que pour les autres acteurs. Selon Grenier et Payan (2003), le rapport que l'élève a avec son activité se modifie lorsqu'il sait qu'il cherche à résoudre un problème non résolu ou partiellement résolu. Selon eux, les SRC modifient

le rapport que les élèves ont avec l'activité mathématique et la démarche scientifique. De son côté, l'enseignant est à la fois en position de *chercheur* et de *gestionnaire* de la situation. Ce qui exige de l'enseignant ou l'enseignante, selon ces auteurs, une pratique de recherche. Il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. Toutefois, les outils de résolution (notions mathématiques) peuvent être donnés par l'enseignant. Aussi, l'enseignant est susceptible d'être le détenteur des savoirs transversaux (savoirs intervenant dans de nombreux domaines mathématiques : argumentation, preuve, etc.) et des critères d'évaluation sur leur validité.

Les caractéristiques d'une situation de recherche en classe ont été données par Grenier et Payan (2003, p. 5). Ils s'énoncent ainsi :

1. *Une SRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle (L'idée d'une communauté mathématique est à l'avant plan; l'élève est ici un élève-chercheur confronté à un problème non résolu ou partiellement résolu)*
2. *La question initiale est facile d'accès :* la question est « facile » à comprendre. Pour ce faire, « le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques. »
3. Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques.
4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques (on perçoit bien ici l'intérêt de telles situations pour le développement des potentialités mathématiques des élèves)
5. *Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question.* La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux.

Les critères 3) 4) et 5) nous paraissent importants pour les élèves identifiés en difficulté au regard du développement des potentialités mathématiques de ces élèves, d'autant plus que ce type de situation-recherche n'exige pas de prérequis spécifiques.

Enfin, Grenier et Payan (2003) indiquent qu'une situation de recherche en classe doit être proche de questions non résolues. Selon ces auteurs, les connaissances scolaires

nécessaires à la résolution de la SRC sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

Aux fins de notre intervention auprès des élèves identifiés en difficulté, qu'est-ce qui se dégage à cette étape?

Quelques éléments ressortent des conceptualisations de situations potentiellement riches issues de la recherche en didactique et des différences importantes entre ces conceptualisations et la notion de situation-problème issue des documents ministériels (cf. chapitre 1).

La synthèse ci-dessous présente les caractéristiques d'une situation-problème (SP) ou situation-recherche (SR) qui se dégagent des recherches en didactique des mathématiques.

En didactique des mathématiques
Une situation-problème (SP) est associée à la construction de connaissances mathématiques [situation fondamentale]. Elle permet une amorce de résolution de la part de l'élève : c'est une situation accessible à l'élève favorisée par un *milieu « antagoniste »*. Une situation-problème suppose *un obstacle* (Brousseau, 1983) et une analyse du concept à la base ainsi qu'un jeu de cadres (Douady, 1984) mobilisés par la situation. Une situation-recherche (SR) est associée à une activité mathématique : elle implique des conjectures, des preuves, des validations. L'élève peut s'y engager; il n'y a pas de prérequis spécifiques; la question initiale est facile d'accès. Une situation-recherche est associée à une activité mathématique où interviennent plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche, *plusieurs développements possibles*.

L'analyse des caractéristiques d'une situation (SP ou SR) qui ressortent des recherches nous conduit à les distinguer de celles du MELS à travers le tableau 2.3.

En fait, dans le choix des situations qui seront effectuées dans le cadre de cette recherche, les notions de SP (au sens de Brousseau/Douady) et de SR seront une source d'inspiration possible. Nous y reviendrons plus loin.

Tableau 2.3 Différentiation entre les caractéristiques d'une SP et SR selon les recherches en didactique des mathématiques et les caractéristiques d'une SP selon le MELS

Caractéristiques d'une situation-problème (SP)/(SR)	
Selon les documents du MELS	En didactique des mathématiques
Une situation-problème (SP) est *complexe (*plusieurs concepts et processus, plusieurs données, énoncé long et lourd et plusieurs domaines mathématiques en jeu, parfois un passage d'un registre à un autre).	Une situation-problème (SP) est associée à un développement conceptuel [situation fondamentale]. Une situation-recherche (SR) est associée à une activité mathématique : elle implique des conjectures, des preuves, des validations. La complexité d'une situation (SP) vient du contenu de l'activité mathématique sollicitée; une idée de la complexité différente de celle du MELS, une complexité conceptuelle.
-*Signifiante* (suscite la curiosité de l'élève, favorise sa réflexion, le touche dans ses préoccupations).	Dans une SR, l'élève peut s'engager; il n'y a pas de prérequis spécifiques; la question initiale est facile d'accès. Une SP permet une amorce de résolution de la part de l'élève : une situation accessible à l'élève favorisée par un *milieu « antagoniste »*.
-*Contextualisée* (contexte réel ou réaliste, purement mathématique, référence aux autres disciplines et aux domaines généraux de formation (DGF).	
-Une certaine ambiguïté entre défi à la portée de l'élève et obstacle à franchir ou conflit cognitif.	Une SR est associée à une activité mathématique où interviennent plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche, *plusieurs développements possibles*. Une SP suppose *un obstacle* et une analyse du concept à la base (Brousseau, 1983) ainsi qu'un jeu de cadre mobilisé par la situation (Douady, 1984).

2.4 Qu'est ce qui se dégage pour notre recherche à la fin de ce cadre théorique?

Nous avons analysé à travers le présent chapitre les concepts de difficultés, d'élèves en difficulté, et de potentialités. Les difficultés des élèves et les interventions auprès d'élèves identifiés en difficulté ont été abordées, c'est ce que montre l'analyse des travaux menés dans ce domaine, sous trois perspectives différentes (voir section 2.1.5, tableau 2.1). Nous avons situé, au terme de cette analyse, la perspective que nous retenons, qui mise sur le développement des potentialités mathématiques des élèves, et conçoit les difficultés en termes de connaissances locale en formation en lien avec les conditions d'un certain milieu (Brousseau, 1998). Ces potentialités mathématiques renvoient à des connaissances dans l'action développées par l'élève, en interaction avec ce milieu, un milieu suffisamment riche pour que celui-ci puisse ouvrir sur un champ de possibles (voir section 2.2). En ce sens, la réflexion sur les notions de problème, notamment de problème de recherche (conception évoluée du problème se démarquant de la notion de problème d'application), de situation-problème (sollicitant le développement de connaissances mathématiques) et de situation-recherche (sollicitant une avancée dans la recherche, des développements possibles) fournissent des indices intéressants pour préciser ce milieu riche. L'interaction des élèves avec un certain milieu (ces situations font partie du milieu) et les conditions mises en place s'inscrivent dans un processus d'adaptation (voir section 2.2) et sont susceptibles d'être propices au développement des potentialités mathématiques des élèves. Les choix de ces situations, les conditions/aménagements mis en place seront développés dans le prochain chapitre.

CHAPITRE III

CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Le présent chapitre aborde dans un premier temps l'approche méthodologique choisie, cohérente avec l'objet, les questions de recherche, et les fondements épistémologiques et théoriques présentés précédemment. Puis, nous indiquerons le design plus précis de la recherche et mentionnerons la manière dont la collecte de données s'est faite : elle s'est s'appuyée sur différents types de données dont les sources seront précisées. Aussi, les conditions liées à la collecte des données seront définies.

3.1 Orientation globale de la recherche

Notre étude s'intéresse à la résolution de situations-problèmes par des élèves de classes régulières, identifiés en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Nous cherchons à mieux comprendre, à partir de ce que pourront nous révéler les élèves en action dans la résolution de ces situations-problèmes, leurs potentialités mathématiques, les difficultés qu'ils rencontrent et ce en interaction avec un certain milieu aménagé autour de la situation-problème. Nous souhaitons ainsi explorer ces potentialités, de l'intérieur de la résolution de la situation-problème par les élèves, à partir du sens construit par les élèves eux-mêmes sur un long temps. Par ailleurs, la posture constructiviste au fondement de la notion de potentialité et du travail avec les élèves identifiés en difficulté, telle que nous l'avons développée au chapitre précédent, s'inscrit dans une démarche compréhensive/interprétative.

L'étude des potentialités des élèves et de leurs difficultés en lien avec différentes situations-problèmes, passe pour le chercheur, par une compréhension sur un long temps des actions des élèves, de l'intérieur de la résolution des situations, du sens que les élèves eux-mêmes donnent à la situation, et non par des mesures de variables externes déterminées a priori, associées au phénomène, qui amèneraient à des restrictions peu propices à rendre compte des « mathématiques des élèves » et de leur développement en lien avec la situation-problème et ses aménagements. Les données recueillies ne peuvent être quantifiées. Elle sont de nature qualitative. Il s'agira, pour le chercheur, d'interpréter les « mathématiques des élèves », leurs construits qui vont émerger dans l'action au fil du temps, en accord avec cette posture épistémologique constructiviste annoncée au chapitre 2 (section 2.2)

La voie que nous empruntons pour cette recherche nous situe donc dans un paradigme de qualitatif/interprétatif. La recherche qualitative s'intéresse en effet aux différentes manières dont le monde social est interprété, expérimenté et produit (Anadón, 2007). Le modèle interprétatif cherche à comprendre le sens de ce monde tel qu'il se constitue chez des individus (Savoie-Zajc, 2000b). Dans le cas plus précis de cette recherche, nous nous intéressons au sens que donnent des élèves à la résolution de situations-problèmes, et ce tout au long du processus. Ce paradigme interprétatif rend compte, pour le chercheur qui y est engagé, d'une certaine position épistémologique à l'égard de la production du savoir : « La recherche qualitative/interprétative est une forme de recherche qui exprime des positions ontologique et épistémologique particulières. Le sens attribué à la réalité y est vu comme étant construit entre le chercheur, les participants à l'étude[...]. Le savoir produit est aussi vu comme dynamique et temporaire,[...]il continue d'évoluer » (Savoie-Zajc, 2000b, p. 176).

Ce qui précède traduit bien la position qui est la nôtre, d'un savoir construit à partir des significations développées par les élèves, tout au long du processus. On est ici sur la production d'un savoir contextuel, un savoir qui n'a de sens qu'en interaction avec un

certain milieu au sens où nous l'avons défini précédemment, et un savoir dynamique (ces potentialités ne sont pas statiques, elles sont appelées à évoluer). La notion de potentialité telle qu'elle a été définie au chapitre 2 met clairement de l'avant l'importance de ce dynamisme. Le chercheur construira ici son interprétation, reverra cette interprétation dans un va et vient avec ce qui se passe dans la situation, à partir des significations développées par les élèves. Nous verrons plus loin comment l'approche plus précise, retenue pour cette recherche, rejoint bien ces positions (voir plus loin la description du Teaching Experiment).

Cette étude de la résolution de situations-problèmes (SP) par des élèves identifiés en difficulté d'apprentissage s'inscrit dans une démarche exploratoire, et offre l'avantage, par l'approche retenue s'étalant sur un long temps, d'approfondir le phénomène à l'étude. Pour y parvenir, nous situerons maintenant l'approche de recherche plus spécifique retenue, cohérente avec nos questions de recherche : le "Teaching Experiment".

Nous présenterons globalement en quoi consiste cette approche méthodologique développée par des didacticiens des mathématiques aux États-Unis (Steffe, 1983, 1991; Steffe et Thompson, 2000) dans la continuité des travaux influencés par le constructivisme; nous justifierons pourquoi nous retenons celle-ci et en quoi elle nous apparaît appropriée pour investiguer les questions de cette recherche.

3.1.1 Choix du "Teaching Experiment" (TE) : pourquoi?

Nous cherchons à interpréter un certain phénomène (le processus, tout au long de la résolution par l'élève de situations-problèmes), dans toute sa complexité et son dynamisme. Il s'agit ici de rendre compte des significations qui émergent en cours de route, une interprétation que le chercheur essaie de capter dans son évolution en lien avec des situations (d'où l'idée du Teaching Experiment). Nous explicitons ci-dessous pourquoi le Teaching Experiment apparaît dans ce cas approprié, après avoir rappelé

l'origine, les intentions et quelques fondements de cette méthodologie de recherche ainsi que certains éléments autour de ses intentions et de sa pratique.

Le Teaching Experiment a été utilisé au départ dans des domaines autres que la didactique des mathématiques (Steffe et Thompson, 2000). Selon ces auteurs, l'émergence de cette approche de recherche résulte de deux raisons : d'abord la nécessité de tenir compte dans les modèles construits par les chercheurs des progrès dont les élèves attestent dans leur processus de construction de connaissances (le chercheur veut ici modéliser cette dynamique de construction et non faire état de connaissances à un moment donné), d'autre part la nécessité de valoriser l'idée que, dans toute pratique d'intervention, l'autonomie des élèves est une dimension importante à considérer**.** Ils rapportent à cet effet le discours d'Ackermann (1995) :

> In human relations, it is vital to attribute autonomy to others and to things, to celebrate their existence independently from our current interaction with them. This is true even if an attribution (of existence) is a mental construct. We can literally rob others of their identity if we deny them an existence beyond our current interests (p. 343)[76].

Ces auteurs distinguent en ce sens ce qu'ils appellent les "students' mathematics" des "mathematics of students", une distinction tirée d'Ackermann (1995). Selon Steffe et Thompson (2000), les "students' mathematics" réfèrent aux réalités mathématiques des étudiants, autrement dit à ce que les élèves disent et font avec/sur les mathématiques indépendamment des interactions avec les chercheurs, par opposition aux "mathematics of students" qui concernent les interprétations des chercheurs sur les

[76] Dans les relations humaines, il est important d'accorder une autonomie aux autres [personnes] et aux choses, de reconnaitre leur existence indépendamment de nos interactions avec eux. Même si cette attribution d'existence est une construction mentale, elle est fondamentale à considérer. Nous pouvons absolument priver les autres de leur identité si nous leur refusons une existence au-delà de nos intérêts du moment [Traduction libre].

actions mathématiques des élèves. Dans la méthodologie du Teaching Experiment, ces deux aspects sont présents.

On s'intéresse aux "students' mathematics" et une existence leur est bel et bien reconnue indépendamment de toute interaction. D'une part, le chercheur doit être à l'écoute de ces mathématiques et d'autre part, le chercheur - qui est aussi l'intervenant dans cette approche - cherche à construire un modèle des significations développées par les élèves dans l'action et confronte, durant les épisodes d'enseignement[77], ces modèles aux raisonnements et aux actions développées par les élèves dans de nouvelles situations, conduisant à une continuelle restructuration des modèles construits. Cette méthodologie du Teaching Experiment, à travers son intérêt de documenter les conceptualisations des élèves sur un long temps, tout au long d'un processus, en étant ouvert aux "students' mathematics", et en essayant d'en modéliser le dynamisme de construction, rejoint notre préoccupation. Nous préciserons maintenant plus spécifiquement les composantes de cette approche de recherche.

3.1.2 Les composantes du "Teaching Experiment"

Le "Teaching Experiment" (TE) est utilisé en didactique des mathématiques par de nombreux chercheurs (Bonotto, 2010; Confrey, 1994) en lien avec l'analyse du processus de construction de connaissances par les élèves. Selon Steffe (1983), cette méthodologie de recherche repose sur trois aspects imbriqués à savoir : a) la modélisation de ce processus[78], c'est-à-dire le chercheur construit, au cours de différents épisodes, des explications aux constructions des élèves. On retrouve là le pivot du Teaching Experiment, les « mathematics of the students » dont on a parlé précédemment, qui constituent des modélisations par le chercheur des significations

[77] Il s'agit en fait d'épisodes d'intervention. Le chercheur n'assure pas d'enseignement au sens où un certain apprentissage mathématique serait introduit aux élèves de manière explicite au cours de ces séances mais il fait plutôt travailler les élèves en intervenant localement. C'est ce qui justifie que nous utilisons par la suite les termes "épisode d'intervention" au lieu "d'épisode d'enseignement".

[78] Une modélisation hypothétique.

développées par les élèves; b) les « épisodes d'intervention » qui prennent la forme d'entrevues entrecoupées d'interventions. L'idée étant ici de confronter durant ces interventions les modèles hypothétiques que le chercheur construit des significations développées par les élèves; c) des entrevues individuelles, permettant localement une explicitation de ces significations. Rappelons que ces trois aspects ne sont pas des moments clairement séparés dans le temps mais bien, dans ce qui caractérise le TE, des aspects profondément imbriqués. Ces trois aspects sont constamment présents tout au long du TE.

Cette approche méthodologique suppose une « écoute attentive et soutenue » qui s'inspire de l'entrevue clinique mise au point par Piaget (1930). L'entrevue clinique « est une méthode basée sur une conversation libre avec un enfant sur un thème dirigé par l'interrogateur qui suit les réponses de l'enfant, lui demande de justifier ce qu'il dit, d'expliquer, de dire pourquoi, qui lui fait des contre-suggestions, etc. » (Boutin, 2008, p.32). Rappelons que l'entrevue clinique dans les travaux de Piaget sur l'épistémologie génétique (on parle chez Piaget d'entretien clinique-critique) est établie autour d'un problème concret : le chercheur choisit un problème ou une situation à laquelle il confronte l'enfant, dans laquelle il observe celui-ci et dialogue avec lui, dans le but de saisir son activité logique profonde (on peut penser ici aux expériences portant sur la conservation du nombre ou des liquides par l'enfant). Le terme critique renvoie à une certaine distanciation prise par le chercheur : ce dernier se méfie des interprétations qu'il peut faire des réponses ou des comportements de l'enfant et cherche, en dialoguant avec lui, en contre-argumentant à saisir sa pensée profonde. Le "Teaching Experiment" est, toutefois, plus qu'une entrevue clinique puisqu'il nécessite des interventions faisant appel aux constructions mathématiques des élèves.

Ces interventions ponctuelles, comme nous l'avons dit précédemment, confrontent les modèles (développés par le chercheur) des significations développées par les élèves, des raisonnements élaborés. Steffe et Thompson (2000) soulignent en effet:

> [...]The teaching experiment is a conceptual tool that researchers use in the organization of their activities. It is primarily an exploratory tool, derived from Piaget's clinical interview and aimed at exploring students' mathematics. Because it involves experimentation with the ways and means of influencing students' mathematical knowledge, the teaching experiment is more than a clinical interview. Whereas the clinical interview is aimed at understanding students' current knowledge, the teaching experiment is directed toward understanding the progress students make over extended periods. It is a dynamic way of operating, serving functional role in the lives of researchers as they strive to organize their activity to achieve their purposes and goals. In this, it is a living methodology designed initially for the exploration and explanation of students'mathematical activity (p. 273)[79].

Dans cette foulée, la dernière phrase de cette citation est renforcée par une idée forte qui sous-tend cette approche: "*Our view of mathematics as a product of functioning human intelligence defines mathematics as a living subject rather than as a subject of being; this is the core belief from which our research methodology flows*"[80] (Steffe et Thompson, 2000, p. 269). On cherche donc ici à « capter » une mathématique vivante, en développement et non à faire un état de conceptions figées, arrêtées.

Le « Teaching Experiment s'étale, on l'aura compris par ce qui précède, sur une longue période de temps (Confrey, 1994) de manière à pouvoir capter le processus de construction par les élèves. Steffe (1983) parle de 6 semaines à 2 ans. Dans le cas de notre recherche, la résolution de différentes situations-problèmes s'est étalée sur un

---

[79]. Le « Teaching Experiment » est un outil conceptuel (méthodologique) que les chercheurs utilisent dans l'organisation de leurs activités. C'est avant tout un outil exploratoire, qui s'inspire de l'entrevue clinique de Piaget, et qui vise à explorer les « mathématiques des élèves ». Parce qu'elle implique une expérimentation mettant en œuvre des manières d'influencer les connaissances mathématiques des élèves, le teaching experiment est plus qu'une entrevue clinique. Alors que l'entrevue clinique a comme objectif la compréhension des connaissances mathématiques des élèves, le teaching experiment vise à comprendre l'évolution des élèves sur une longue période. Il s'agit d'un mode de fonctionnement dynamique qui joue un rôle fonctionnel pour les chercheurs, alors qu'ils s'efforcent d'organiser leur activité pour atteindre leur buts et objectifs. En ce sens, il s'agit d'une méthodologie vivante conçue initialement pour l'exploration et l'explicitation de l'activité mathématique des élèves [Taduction libre].

[80] Notre vision des mathématiques comme émanation d'une intelligence humaine fonctionnelle conçoit les mathématiques comme un sujet vivant plutôt que comme un sujet donné (fixé a priori): c'est la croyance fondamentale sur laquelle prend appui notre méthodologie de recherche [Traduction libre].

temps assez long (10 semaines) et a donné lieu in situ à des rebondissements, à des prolongements. Les épisodes s'articulent sur ces situations de manière à pouvoir capter cette activité mathématique vivante en développement (nous y reviendrons plus loin).

3.1.3 Quel rôle pour le chercheur?

Steffe (1983) souligne que les chercheurs doivent observer directement le processus de construction des élèves en action, pour pouvoir obtenir la base expérientielle qui est cruciale pour formuler des explications (qui sont des modèles) à ces constructions. Le chercheur doit s'efforcer de faire fi de ses connaissances et de ses façons de faire en n'orientant pas les élèves dans ce qu'il sait et dans leurs démarches.

Au contraire, le chercheur doit laisser la place aux élèves dans leurs constructions, même si elles sont accompagnées « d'erreurs ». Cela peut permettre de mieux comprendre ce qu'ils font et les erreurs qu'ils commettent et le développement de ces "Students Mathematics".

C'est ce que font remarquer Steffe et Thompson (2000) ainsi qu'Ackermann (1995) cité par ces auteurs.

> We understand better what students can do if we understand what they cannot do. We understand what students can understand better if we understand what they cannot understand [...]
> When a student makes what appears to be an essential mistake, our purpose is not "to judge or evaluate the child's performance in relation to performances of other children who might come up with the right answer" (Ackermann, 1995, p. 346)[81].

[81] Nous comprenons mieux ce que les étudiants peuvent faire si nous comprenons ce qu'ils ne peuvent pas faire. Nous comprenons mieux ce que les élèves peuvent comprendre si nous comprenons ce qu'ils ne peuvent pas comprendre […].
Lorsqu'un élève commet une erreur qui semble centrale, notre but n'est pas de « le juger ou d'évaluer sa performance à la lumiére de celle des autres élèves qui semblent avoir trouvé la bonne réponse » [Traduction libre].

Aussi, les connaissances du chercheur, les modèles qu'il construit (des significations élaborées par les élèves) peuvent servir d'orientation à l'intervention, mais elles ne doivent pas servir de fondement à ce que les élèves doivent apprendre.

Le « Teaching Experiment », tel que décrit précédemment, apparaît une méthodologie qui répond à notre préoccupation de recherche sous l'angle de l'analyse en profondeur des potentialités et des difficultés des élèves tout au long d'un processus de résolution.

1. elle permet une étude approfondie du processus de résolution par des élèves identifiés en difficulté;
2. sur une période longue, fournissant une entrée en profondeur sur le processus de résolution des situations-problèmes par ces élèves : en leur accordant une autonomie dans l'explicitation de leur point de vue, en cernant jusqu'où ils peuvent aller au regard de ces situations.

Il a pris la forme « d'entrevues-interventions »[82] articulées sur trois situations-problèmes différentes (s'étalant sur le long terme).

Nous reviendrons maintenant sur la forme plus précise qu'il a prise, i.e. sur le choix des situations retenues et leurs fondements, ainsi que sur le choix des élèves retenus et les modalités plus précises de l'expérimentation.

3.2 Opérationnalisation de la recherche

Trois situations-problèmes ont été expérimentées par le chercheur avec des élèves identifiés en difficulté. Ces situations constituent un matériau central de la recherche. Leur choix est fondé sur un ensemble d'analyses préalables sur lesquelles nous reviendrons maintenant. Nous indiquerons les raisons de leur choix, préciserons le protocole anticipé avec les interventions à titre indicatif[83] autour de chacune d'entre

[82] Le trait d'union est utilisé entre les deux mots pour montrer que les concepts sont imbriqués.

[83] Il s'agit là d'une base possible pour anticiper des interventions mais la démarche souple du "Teaching Experiment" suppose que le chercheur est à l'écoute des constructions des élèves, les interventions s'articulant sur ces constructions, de manière à mieux comprendre ces "students' mathematics".

elles (au cœur des « épisodes d'intervention »), ainsi que les ajustements apportés en cours de route.

L'objet de la présente recherche porte sur les potentialités et les difficultés des élèves identifiés en difficulté des classes régulières dans la résolution de différents types de situations-problèmes. Il ne relève donc pas d'une conception de situations que l'on cherche à mettre à l'épreuve, mais davantage, nous l'avons vu précédemment, d'une exploration (dans différentes situations-problèmes), des potentialités et difficultés des élèves dans le processus de résolution. Des analyses préalables, fondées sur les recherches menées auprès d'élèves identifiés en difficulté au regard de situations présentant un potentiel (cf. tableau 1.1, chapitre 1) et la conceptualisation des notions de situation-problème et situation-recherche telle qu'elle se dégage chez les didacticiens (cf. tableau 2.3, chapitre 2) ont été mises à profit pour guider le choix de différentes situations.

3.2.1 Le choix de situations-problèmes : sur quelle base?

Deux sources ont donc servi ici de fondement aux critères de choix des situations. Celles-ci nous ont conduit à identifier un ensemble de critères clés, guidant le choix des trois situations-problèmes proposées aux élèves aux fins de l'expérimentation : « Pavage de carrés », situation-recherche tirée de Grenier et Payan (2003) (voir annexe G); « Pied du géant » tirée de Rauscher et Adjiage (2012, 2014), (voir annexe H); « Défi climat » adaptée à partir d'une situation scolaire (voir annexe I). Ces situations forment le matériau brut de départ, à partir duquel a été pensé le protocole aménagé. Avant d'expliciter les aménagements apportés dans chacun des cas, nous reviendrons sur les critères plus généraux qui fondent le choix de ces trois situations de départ.

1) Un premier critère : marquage scolaire ou non

Pour les élèves identifiés en difficulté, les travaux de recherche tendent à montrer l'influence, dans la résolution de la situation, du marquage scolaire de celle-ci

(Lemoyne, 1989). Lemoyne (1989, p. 83) a ainsi montré, comme nous l'avons déjà mentionné, que « chez l'élève (en difficulté) la peur de ne pas savoir la réponse n'est pas généralisée à tous les contenus mathématiques et ne se manifeste pas dans toutes situations didactiques ». L'auteure distingue deux types de situations : des situations marquées scolairement et des situations non marquées scolairement (Lemoyne, 1989), susceptibles d'influencer la manière dont l'élève va aborder le problème (voir tableau 3.1 ci-dessous, pour un exemple de telles situations autour d'un même contenu).

L'analyse des situations présentant un potentiel dans les recherches auprès d'élèves identifiés en difficulté mettait en évidence que celles-ci partageaient la caractéristique commune d'être non marquées scolairement, favorisant en ce sens une amorce de résolution de l'élève dans la tâche (voir chapitre 1, section 1. 4. 5). Ce critère sous-tend deux des situations retenues (pavage de carrés et pied de géant), des situations tirées de recherches menées en didactique des mathématiques et non usuellement exploitées avec les élèves en milieu scolaire. La 3ème situation, « Défi climat », tirée d'une épreuve proposée à des fins d'évaluation par la Commission Scolaire, est a priori davantage marquée scolairement. Cependant, comme nous le verrons plus loin, l'aménagement qui en est proposé et qui cherche à engager l'élève dans le projet et sa prise en charge tend à la rendre moins marquée scolairement.

Si l'on veut qu'il y ait une véritable dévolution à l'élève, de manière à permettre que se développent des potentialités mathématiques dans la tâche, il était important de choisir, pour cette recherche, des situations-problèmes non ou peu marquées scolairement.

Tableau 3.1 Un exemple de situation, marquée ou non scolairement autour d'un même contenu mathématique

Situation marquée scolairement	Situation non marquée scolairement[84]
Un exemple de problème que l'on retrouve dans les manuels (tiré de Saboya, 2010) Le nombre de bactéries dans une culture double à chaque jour. Si au début, il y avait 2 bactéries, combien y aura-t-il de bactéries au bout de 60 jours?	Un exemple tiré de Saboya (2010) Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre 3 heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée jusqu'à l'usine. Pourquoi panique t-elle? Combien de robots l'expert s'attend-t-il qu'elle trouve?

2) Un deuxième critère : l'élève peut amorcer la résolution, peut envisager une réponse

Notre choix a porté sur des situations "accessibles" à l'élève, dans lesquelles il pouvait s'engager a priori, de sorte qu'elles ne conduisent pas à un blocage de sa part et qu'une construction de significations puisse s'amorcer. Cette balise est présente dans le concept de situation-problème de Brousseau (1983), repris par Douady (1984) : l'élève doit pouvoir a priori s'engager dans cette situation même s'il n'a pas la connaissance

[84] Cette situation est a priori moins marquée scolairement. Elle ne rejoint pas le format classique proposé usuellement dans les manuels et incite moins, par la question posée, au calcul et à la recherche d'une opération à partir des nombres posés.

pour la résoudre. Par exemple dans le cas de l'agrandissement du casse-tête[85] (Brousseau, 1981), les élèves vont s'engager dans l'agrandissement de celui-ci en mobilisant différentes stratégies, dont la stratégie additive. Cette amorce de résolution va permettre une confrontation par la suite pour dépasser cette stratégie additive.

Dans les situations de recherche de Grenier et Payan (1998, 2003), la même balise est présente, dans la mesure où les situations retenues n'exigent aucun prérequis notionnel et permettent qu'une véritable activité de recherche se mette en place. Cette balise est présente implicitement dans l'ensemble des situations (présentant un potentiel) expérimentées auprès d'élèves identifiés en difficulté (cf. chapitre 1, section 1.4.5).

Si l'on veut favoriser une amorce de résolution dans la tâche, il s'agit là d'une deuxième balise importante. Nous la retrouvons dans les 3 situations expérimentées. Le « pavage de carrés » est une situation-recherche n'exigeant aucun prérequis notionnel et les différentes expérimentations menées autour d'elle montrent que les élèves abordent cette activité de recherche en faisant appel à un raisonnement, à une activité mathématique (Grenier et Payan, 1998, 2003). Le « pied de géant », expérimenté à de multiples occasions par les chercheurs avec des enfants de la fin du primaire, n'a donné lieu à aucun blocage lors de la phase d'exploration où différentes stratégies se sont manifestées (Rauscher et Adjiage, 2012, 2014). Dans le cas de « Défi climat », l'aménagement apporté est conçu pour permettre une amorce de résolution des élèves dans la tâche (voir section 3.2.2). Ces expérimentations tirées de recherches passées, et leurs analyses, viennent appuyer le fait que les élèves doivent pouvoir, a priori, s'engager dans ces situations.

3) Un troisième critère : différents types de situations-problèmes susceptibles de solliciter des potentialités différentes

L'analyse sur un plan théorique (cf. chapitre 2) fait apparaitre deux conceptualisations très différentes : celle de situation-problème (SP) chez Brousseau, associée à la notion

[85] Voir la situation-problème: le casse-tête à l'annexe G.

d'obstacle épistémologique et à la construction de connaissances nouvelles; celle de situation de recherche en classe (SRC) associée à une activité de recherche semblable à celle des mathématiciens. De plus, nous avons vu au chapitre 1 que les critères qui sous-tendent la notion de situation-problème, telle qu'elle apparaît dans les documents ministériels, est d'un tout autre ordre (une situation différente d'une situation d'application, qui présente un défi à la portée de l'élève, contextualisée, complexe). Ces trois types de situations vont être au fondement de nos choix.

Dans la SP telle que définie par Brousseau, le chercheur suppose l'existence d'une situation, parmi celles qui caractérisent une connaissance visée, qui suffit à préserver le sens de cette connaissance. Il suppose en outre qu'une de ces situations est parmi celles que l'élève peut résoudre. C'est l'hypothèse de la situation "fondamentale". La construction de ces situations-problèmes nécessite en ce sens une analyse épistémologique des savoirs en jeu visés. Dans cette recherche, nous ne sommes pas préoccupés par cette dimension fondamentale des savoirs à la base de la conceptualisation de la SP pour Brousseau. La reprise de la SP par Douady par la suite, qui nuance quelque peu cette dimension de l'obstacle à la base de la SP, apparaît intéressante, pour notre propos. La connaissance y a ici un caractère de nécessité mais il ne s'agit pas nécessairement d'obstacle épistémologique. Elle y met davantage en relief, par ailleurs, l'idée d'un travail sur différents cadres mobilisés (cadre par exemple numérique, algébrique, géométrique). Ceci apparaît intéressant dans la mesure où les travaux de recherche portant sur les élèves en difficulté montrent qu'il s'agit là d'un enjeu important (flexibilité, changement de point de vue nécessaires).

Une de nos situations-problèmes (problème de géant) s'inspire de cette notion de situation-problème de Douady : y sont mobilisés pour sa résolution des cadres numérique et géométrique en lien avec la résolution de situation-problème mobilisant des connaissances mathématiques : un recours à un travail sur des mesures et à un travail numérique dans le cas du Pied de géant.

Dans le cas de « Défi climat », nous retrouvons ici une situation-problème différente, élaborée sur la base des critères institutionnels que nous avons explicités précédemment (chapitre 2).

Par ailleurs, les SRC qui s'inscrivent dans une toute autre perspective semblent intéressantes à retenir pour le développement de potentialités mathématiques chez les élèves. Le « pavage de carrés » est une de ces situations de recherche. Elle sollicite en effet de la part des élèves une activité de recherche mathématique (élaboration de conjectures, validation, passage à une généralisation).

Ainsi parmi les 3 situations retenues, une est une situation-recherche (Pavage de carrés), une peut être qualifiée de situation-problème au sens de Douady (le pied de géant) et la dernière situation-problème est plus proche de ce que l'on retrouve en milieu scolaire (Défi climat). Entre SP dans laquelle ce que fait l'élève a un caractère de nécessité par rapport à une certaine connaissance mathématique, pour laquelle il existe un milieu pour la validation (le milieu permet des rétroactions), mettant en jeu différents cadres (Pied de géant), SP élaborée sur la base de critères institutionnels (Défi climat) et SRC où une véritable activité de recherche est sollicitée (Pavage de carrés), les situations proposées sont susceptibles de solliciter différentes potentialités mathématiques de la part des élèves et sont en ce sens intéressantes pour notre recherche auprès d'élèves identifiés en difficulté.

4) Un quatrième critère: le contexte auquel réfère la situation-problème

Les études sur les élèves en difficulté mettent en évidence l'emprise possible du contexte sur la résolution pour les élèves en difficulté, entre autres, les situations porteuses de potentiel mettent en évidence majoritairement un contexte mathématique au regard de notre analyse (cf. chapitre 1, tableau 1.1). Il nous est apparu intéressant, pour aller plus loin, de jouer sur différents types de contextes (contexte mathématique,

contexte réel/réaliste, fantaisiste)[86] pour explorer leur emprise possible sur la résolution de la situation par des élèves en difficulté. Nous retrouvons ici un contexte réaliste (Défi climat), un contexte fantaisiste (Pied de géant) et un contexte purement mathématique (Pavage de carrés).

Nous reprenons ci-dessous ce qui caractérise chacune des situations retenues sous l'angle de ces quatre critères.

Pavage de carrés

C'est une situation qui engage les élèves dans une activité de recherche mathématique-établissement de conjectures, validation, etc. Il s'agit donc d'une situation de recherche (Grenier et Payan, 1998, 2003). Cette situation n'exige pas de prérequis notionnel pour amorcer sa résolution, et les élèves peuvent s'y engager, d'autant qu'un matériel est fourni comme support à l'élève pour pouvoir amorcer l'exploration. Elle est non marquée scolairement, ce n'est en effet pas une situation que l'on retrouve exploitée en milieu scolaire usuellement, ne correspondant pas de façon claire à des contenus mathématiques officiels, délimités par le programme. Elle réfère à un contexte mathématique, faisant appel à des objets géométriques (carrés de différentes dimensions, recouvrement d'une surface à l'aide de dominos, triminos, position).

Elle rejoint également une autre caractéristique qui s'est avérée porteuse pour les élèves en difficulté (Dias, 2006; Berdonneau, 2006) : une "base expérimentale" faisant intervenir la manipulation (Dias, 2006; Berdonneau, 2006). Le support du matériel peut en effet aider l'élève en difficulté à s'engager dans la situation-problème, à comprendre les relations mises en jeu, à amorcer les constructions de modèles spontanés, etc. Les travaux de Dias (2006) et Berdonneau (2006) (voir chapitre 1) semblent montrer

[86] Comme nous l'avons mentionné à la section 1. 2. 2, une situation-problème est à contexte réel si elle se produit dans la réalité. En revanche, elle est à contexte réaliste si elle est susceptible de se réaliser réellement (MEQ, 1988). À l'inverse, une situation-problème à contexte purement mathématique réfère uniquement à des objets mathématiques (nombres, droites, opérations, etc.). Et un contexte fantaisiste est « le fruit de l'imagination » et « sans fondement dans la réalité » (MEQ, 1988, p. 27).

l'impact de cette dimension expérimentale sur les élèves identifiés en difficulté, permettant d'amorcer une résolution, de servir de support à une modélisation, etc.

Le pied de géant

C'est une situation-problème au sens de Douady (1984). Elle fait intervenir plusieurs cadres (iconique, numérique, mesure). Le cadre iconique refère à une image représentant trois personnages, deux hommes et le géant dont on ne voit que le pied. Les cadres numérique et de mesure apparaissent dans la résolution de la situation puisque dans le déroulement de celle-ci, les élèves doivent par exemple trouver certaines mesures (mesure par exemple d'un homme, mesure de la hauteur de la botte,…), établir des rapports entre des mesures de grandeurs (par exemple la hauteur de la botte d'une personne et la taille d'un homme), reporter ce rapport pour trouver la taille du géant. Elle est non marquée scolairement (elle est ouverte, ne réfère à aucun nombre et n'est pas du tout en ce sens de type scolaire). L'élève peut s'y engager à sa façon, aucun nombre n'étant mis à sa disposition. La situation est à contexte fantaisiste, la référence à un géant est « le fruit de l'imagination » et « sans fondement dans la réalité » (MEQ, 1988, p. 27).

Défi climat

Cette situation-problème est de type scolaire, proche des situations-problèmes du MELS. Elle est d'ailleurs tirée d'une des épreuves utilisées en milieu scolaire à des fins d'évaluation. Dans son aménagement, comme nous le verrons plus loin, elle se veut toutefois moins marquée scolairement : sa présentation cherche en effet à investir graduellement les élèves dans la réalisation du projet, dans sa prise en charge. Dans cet aménagement graduel, les élèves peuvent s'investir en donnant sens au contexte, en faisant leur le projet, en anticipant ce qu'ils pourraient faire. Elle est enfin à contexte

réaliste[88], étant susceptible de se réaliser (un tel projet pourrait faire l'objet d'un travail réel mis en place dans l'école au cours de l'année scolaire).

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques des trois situations retenues aux fins de l'expérimentation.

Tableau 3.2 Caractéristiques des trois situations retenues pour l'expérimentation

	Non marquées scolairement	Les élèves peuvent s'investir	Différents types de situations problèmes	Différents types de contexte
Pavage de carrés	X	X	SR (+ dimension expérimentale)	Contexte mathématique
Pied de géant	X	X	SP (au sens de Douady, 1984)	Contexte fantaisiste
Défi climat (telle qu'aménagée)	X	X	SP (au sens du MELS, 2007b)	Contexte réaliste

3.2.2 Un Teaching Expériment articulé sur l'expérimentation de ces situations

Le Teaching Experiment s'est articulé sur ces trois situations. Chaque épisode d'entrevue-intervention, d'une durée d'environ 4 heures, s'est étalé sur plusieurs semaines avec les élèves[89] et a été structuré autour d'une situation :

- Situation-recherche : le pavage d'un carré (3 séances d'une heure 15 minutes chacune);
- Situation-problème : le pied du géant (3 séances d'une heure 15 minutes chacune);
- Situation-problème : défi climat (4 séances d'une heure 15 minutes chacune).

[88] Le programme du MELS (2007b) suggère de mettre l'accent sur le contexte réaliste dans les situations-problèmes. Cette situation reprend en ce sens un contexte réaliste de manière à comprendre l'emprise éventuelle de ce contexte, une SP de type scolaire.

[89] Nous reviendrons plus loin sur le choix des élèves et les modalités d'expérimentation, mais il est important dès maintenant pour comprendre l'aménagement de ces situations de préciser que celles-ci ont été expérimentées auprès de dyades d'élèves (élèves regroupés par deux, certaines parties étant individuelles, d'autres faites en groupe).

Nous reprenons maintenant les situations expérimentées, de manière à bien montrer leur développement et dynamisme, en situant, pour chacune d'entre elles :

-les fondements ayant guidé la présentation de la situation aux élèves et son aménagement;

-l'aménagement tel qu'il a été pensé dans le protocole, avec les éléments pris en considération;

-les réajustements apportés en cours d'expérimentation, et ce dans la perspective du Teaching Experiment, i.e. celle d'une construction émergente prenant en compte ce qui se passe chez les élèves donnant lieu à de nouvelles interventions.

3.2.2.1. L'épisode expérimenté autour de la situation-recherche le pavage d'un carré

a) Les fondements ayant guidé la présentation de la situation aux élèves et son aménagement

La situation aménagée en partant d'une tâche expérimentée par Grenier et Payan (1998)[90] (voir annexe G) est à contexte mathématique et a une base expérimentale, c'est-à-dire une exploration du matériel pouvant servir de support à une modélisation par les élèves des possibilités : pavages qui fonctionnent, qui ne fonctionnent pas, à quelles conditions.... Le *support du matériel* joue donc ici un rôle important pour permettre le développement de conjectures et leur validation. En ce sens (voir annexes G1 et G2), nous avons confectionné du matériel réel, pouvant servir d'appui à la démarche des élèves. La tâche a été énoncée aux élèves de manière générale (peut-on recouvrir n'importe quel carré avec des dominos, des triminos? Peut-on recouvrir n'importe quel carré privé d'une case avec des dominos, triminos?) avec l'appui de matériel fourni à l'élève (petit carré 5x5 et grand carré 8x8 en feutrine mis à leur disposition, ainsi que des dominos et triminos de deux formes différentes; carrés prédécoupés autres en papier ou papier quadrillé mis plus tard à la disposition de l'élève). Ce matériel était par ailleurs volontairement limité (l'élève ne disposait que

[90] Cette situation a été reprise à de multiples occasions (Grenier, 2003).

de quelques dominos ou triminos, pas en nombre suffisant pour recouvrir entièrement les carrés donnés). Ce choix, a priori, cherchait à contrer une démarche qui ne serait qu'empirique, de manière à permettre une représentation mentale du recouvrement par l'élève et une anticipation de ce qui fonctionne ou non.

Différentes variables didactiques[91] ont été prises en compte, par ailleurs, dans l'aménagement de la situation. Ainsi, nous avons fait le choix d'amorcer celle-ci par le recouvrement d'un carré plein contrairement à la situation initiale à l'aide de dominos (le recouvrement à l'aide de triminos venant dans un deuxième temps[92]), et ce, pour favoriser les potentialités des élèves identifiés en difficulté dans la situation. Le choix de cas précis donnés sous forme matérielle vise aussi à permettre une amorce de résolution des élèves identifiés en difficulté dans la tâche et dans l'énoncé de premières conjectures.

L'extension du recouvrement par des dominos à d'autres carrés (ainsi, dans l'exemple précédent, que se passe-t-il si l'on travaille avec des carrés plus petits, par exemple 3*3, 5*5? plus grands?), à d'autres formes (par exemple que se passe-t-il dans le cas d'un rectangle?), à n'importe quel carré privé d'une case, puis à une variation de la position de cette case bouchée, constitue autant de variables didactiques qui visent à voir jusqu'où l'élève en difficulté peut aller dans l'extension du problème initial à de nouvelles questions, dans le changement de point de vue et dans le prolongement de la situation. La même logique sous-tend les variations apportées à la tâche de recouvrement par des triminos de deux formes différentes (carrés de différentes grandeurs, carré privé d'une case, variation de la position de cette case).

---

[91] On appelle variable didactique d'un problème ou d'une situation, une variable pouvant être modifiée par le chercheur et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer et de modéliser les situations dans une perspective didactique (Brousseau, 1986).

[92] Le pavage avec des triminos est de la situation initiale.

b) *Le protocole prévu autour de cette situation (voir annexes G-1, G-2 et G-3) et les éléments pris en considération*

La situation-recherche initiale dont nous nous sommes inspiré (voir annexe G- pavage d'un carré de côté impair privé d'une case) était présentée par écrit avec le support d'un exemple de grille 7x7. En revanche, la situation aménagée (voir annexe G-1) présentait la tâche oralement aux élèves : "Peut-on recouvrir n'importe quel carré à l'aide de dominos?". Elle est expliquée dans les mots des élèves pour être compréhensible : "tu dois recouvrir un carré à l'aide de dominos sans laisser de trou, tout doit être recouvert. Tu as différents carrés à ta disposition. Et on cherche à savoir si on va pouvoir recouvrir ainsi, avec des dominos, n'importe quel carré, peu importe sa grandeur". De plus, la reformulation demandée aux élèves de la tâche, dans un premier temps, permet de cerner le sens, l'interprétation qu'ils lui donnent (voir annexe G-1, partie 1).

Une exploration individuelle des recouvrements possibles ou non permet d'observer ce que vont faire les élèves dans la tâche (partie 1). Le retour par la suite, en dyade, sur ce qu'ils ont trouvé permet de cerner les constructions des élèves (leurs conjectures) et les explications qu'ils en donnent (partie 1).

La situation-recherche dans son aménagement anticipé (voir annexe G-1, annexe G-2, partie 2 et partie 4 partiellement) anticipe un ordre des questions en deux grandes parties qui repose, nous l'avons mis en évidence précédemment, sur un certain choix:

I) Possibilté de recouvrement d'un carré à l'aide de dominos (voir annexe G-1)

-Possibilité de recouvrement d'un carré peu importe sa grandeur à l'aide de dominos (partie 1);

-Possibilité de recouvrement d'un carré privé d'une case (on fixe ici une case en bouchant une case de la grille) à l'aide de dominos (partie 2);

Dans les deux cas, l'intention du chercheur est de voir si tous les cas marchent tout le temps.

-Possibilité de pavage d'un carré privé d'une case en partant de carrés impairs qui ont marché (en bouchant une case à une certaine position). L'intention du chercheur ici est de demander aux élèves de trouver tous les endroits où on peut boucher une case et où ça va marcher, les endroits où ça ne marche pas, et laquelle ou lesquelles? (partie 3)

II) Possibilité de pavage d'un carré à l'aide de triminos de deux formes différentes (voir annexe G-2)

-Pavage d'un carré de taille quelconque : l'intention est de voir si on peut recouvrir un carré peu importe sa grandeur avec des triminos qui ont tous la même forme (on donne ici deux types de triminos : forme 1–les triminos alignés et les triminos en forme de L–forme 2); Prédictions des cas qui marchent, qui ne marchent pas, cases non recouvertes (partie 2).

-Pavage d'un carré privé d'une case avec des triminos de la forme 1, de la forme 2 (partie 4 pour la consigne donnée).

Enfin, les différentes parties consacrent des moments de travail individuel et en équipe afin de favoriser la réflexion, les explications (de l'un à l'autre de ce que chacun a fait) et les contradictions entre les différents points de vue ou anticipations, et la manière dont ils dépassent ces éventuelles contradictions. À titre illustratif, le pavage d'un carré par des dominos ou triminos est d'abord individuel, puis cette exploration étant faite, on revient en équipe sur ce que chacun a trouvé, sur les éventuelles contradictions.

c) *les aménagements/interventions apportés en cours de route (voir annexe G-2, parties 1, 3, 4-retour et, annexe G-3) et les raisons sous-jacentes.*

- Un jeu a été conçu et introduit lors de la 2ème séance (voir partie 3 de l'annexe G-2) visant à amener l'élève à se construire une image du pavage et à anticiper le résultat, sans le recours au matériel. Dans le jeu, chacun est appelé à se prononcer sur ce qu'il anticipe, sur la solution de l'autre et les raisons qui lui font dire cela avant toute validation effective.

Dans l'idée du Teaching Experiment, cette partie correspond à un ajustement apporté en cours de route au protocole. La première séance a, en effet, permis d'observer que certains élèves fonctionnaient en s'appuyant très fortement sur une dimension empirique, en utilisant le matériel pour recouvrir le carré donné (déplaçant les dominos déjà utilisés, pour voir s'il était possible ou non de recouvrir le carré). Cette démarche empirique témoignait de leur difficulté à anticiper une conjecture sur le pavage possible ou non du carré sans son recouvrement complet, effectif avec le matériel (et ce même si les dominos, triminos n'étaient pas en nombre suffisant pour tout recouvrir). Une intervention est alors pensée, à la séance suivante, pour forcer une décentration du matériel et voir jusqu'où l'élève peut aller en ce sens. Le jeu mis en place, à cette fin, force une anticipation de ce qui va se passer pour une forme donnée (différentes formes, carrés et rectangles sont découpés à cette fin), et ce, avant toute validation effective avec le matériel : pourra-t-elle être recouverte avec des triminos de chacune des formes? Elle force ainsi une image mentale du recouvrement par l'élève.

- Autre ajout apporté (voir annexe G-2, partie 4, retour en groupe, et annexe G-3) :

Les élèves doivent se prononcer sur les prédictions d'élèves (fictifs) du secondaire durant le jeu. Un ajout a été apporté suite à l'observation de la difficile explication par les élèves de ce qui fait que ça marche ou non, des raisons qui montrent que ça fonctionne ou non.

Il s'agit pour l'élève de se prononcer sur les conjectures formulées par des élèves fictifs et de formuler par la suite eux-mêmes d'autres conjectures en les justifiant (de voir là encore jusqu'où ils peuvent aller dans cette validation).

- Un retour sur ce qu'ils ont fait est aussi inséré à chacune des séances (ces séances étant espacées d'une semaine, parfois plus dans le cas des périodes de congé) de manière à pouvoir cerner ce qu'ils en ont retenu (voir annexe G-2, partie 1, annexe G-3, début). Ces retours servent aussi de tremplin à l'exploration de la situation qui se poursuit sur une longue période.

3.2.2.2 L'épisode expérimenté autour de la situation-problème le pied du géant

a) Les fondements ayant guidé la présentation de la situation aux élèves et son aménagement

C'est une situation-problème fantaisiste (voir l'énoncé en annexe H) tirée de Rauscher et Adjiage (2012, 2014)[93]. Comme nous l'avons mentionné à la section 3.2.1, un contexte fantaisiste a été retenu en lien avec la variation des types de contexte, de manière à explorer l'emprise possible de ceux-ci sur la résolution par les élèves identifiés en difficulté. De plus, aucun nombre n'est fourni aux élèves dans cette situation à l'opposé des situations de type scolaire. On a là, en ce sens, une situation non marquée scolairement, très différente des situations-problèmes usuelles dans lesquelles des nombres sont souvent présents. Les élèves identifiés en difficulté ne pourront y rechercher une opération à faire ou une règle à appliquer (Perrin-Glorian, 1993).

Dans l'aménagement pensé autour de celle-ci (voir annexe H-1), du matériel est mis à la disposition de l'élève lors de la phase d'exploration libre. Ce choix permet de cerner la manière dont les élèves vont s'engager dans la résolution (des repères importants à l'observation, notamment la gestuelle et les traces dessinées, ont été identifiées dans le protocole à cette fin- voir 1ère phase). Le choix d'un travail collectif permet, par ailleurs, d'avoir une trace des idées qu'ils émettent de part et d'autre en cours de processus (ce que ne permettrait pas de voir une résolution individuelle), la construction conjointe forçant une explicitation à l'autre pour avancer sur une résolution.

Deux tâches ont été pensées pour solliciter davantage le raisonnement des élèves. La rédaction d'une affiche, présentant la solution trouvée à d'autres élèves, poursuit dans le sens d'une explicitation de cette résolution de manière à ce que les autres élèves puissent comprendre cette solution, et les interventions possibles articulées sur celle-ci (voir 2ème phase). Cette intervention cherche à semer le doute pour pousser plus loin le

[93] Cette situation a été reprise dans le cadre d'une recherche du groupe ACODIS IUFM-UDS.

raisonnement. Le choix des textes produits par des élèves fictifs a été pensé à cette fin (solution autre qui ne fonctionne pas, solution autre amorcée qu'ils doivent poursuivre).

Le choix, enfin, de 4 affiches présentant des solutions différentes (voir 3ème phase), construites sur la base des expérimentations réalisées par Rauscher et Adjiage (2012) et des stratégies que les chercheurs avaient identifiées, vise à forcer, là encore, une explicitation de la part des élèves (une argumentation à l'appui de l'acceptation ou du rejet d'une solution, de la clarté ou non de cette solution pour d'autres) et à voir si les élèves peuvent entrer dans un autre point de vue, adopter un autre regard possible sur la résolution.

b) Le protocole prévu s'articulant sur cette situation-problème (voir annexe H-1) et les éléments le composant

Dans le déroulement, on retrouve trois phases : (1) prise de connaissance du problème, et, après une reformulation de celui-ci par les élèves, exploration de celui-ci; (2) rédaction d'une affiche; (3) analyse de solutions d'élèves et retour sur leur solution.

-La prise de connaissance du problème et son exploration par un groupe de deux élèves : elles permettent d'observer les premières investigations des élèves, la manière dont ils envisagent de résoudre le problème et comment ils procèdent (voir annexe H-1, 1ère phase).

-La rédaction d'une affiche par la dyade présentant la solution trouvée à d'autres élèves : elle favorise l'explication de leur solution, encourage le raisonnement et la communication entre élèves (pour des fins de compréhension par d'autres élèves) (voir annexe H-1, 2ème phase).

-La présentation de quatre textes produits par d'autres élèves fictifs, pésentant des approches différentes, sur lesquelles ils ont à se prononcer : elle permet de favoriser l'explicitation de leur argumentation face à ces solutions et ouvre sur d'autres façons de voir. Puis, retour sur l'affiche qu'ils avaient rédigée précédemment : veulent-ils ajouter, modifier des choses à des fins de compréhension de celle-ci par d'autres élèves? (voir annexe H-1, 3ème phase).

c) Les aménagements apportés et les raisons sous-jacentes

Dans la perspective du Teaching Experiment, cette situation a été aménagée en cours de route pour tenir compte de ce qui se passait chez les élèves. Ainsi, les stratégies observées chez les élèves (davantage de type approximation de la taille du géant) vont nous amener à provoquer une réflexion sur la comparaison entre certaines dimensions d'un même personnage. Une situation nouvelle sera pensée en ce sens (voir annexe H-2, le dessin proposé dans lequel certaines parties des personnages sont cachées). On présente aux élèves une feuille dessinée où apparaissent six personnages, une partie est cachée par un carton pour deux des personnages : pour l'un d'entre eux, seules les bottes sont visibles ; pour l'autre, seul le visage est visible. Il faut trouver la taille approximative du personnage où on ne voit que les bottes, et la taille approximative du personnage où on ne voit que la tête.

La situation de départ (problème du géant) est par la suite redonnée aux élèves pour cerner l'évolution possible de leurs stratégies suite à cette intervention.

De plus, une nouvelle situation-problème[94], mettant en jeu un raisonnement proportionnel, sera également proposée aux élèves (voir annexe H-3), pour voir les réinvestissements que les élèves peuvent opérer des stratégies développées. Une photo d'une grande affiche, annonçant un concert de musique en Chine lors d'une tournée d'un groupe de musique, est présentée aux élèves. La tâche demandée est la suivante : peux-tu retrouver, à partir de cette photo, quelles étaient les dimensions de l'affiche, sa longueur, sa hauteur? Des indices sont donnés au besoin aux élèves, après leur avoir laissé explorer librement le problème, pour leur permettre de s'engager dans la situation et voir ce qu'ils pourront en faire (la largeur réelle du visage d'un des musiciens; la

[94] Le contexte de ce problème s'éloigne du contexte fantaisiste du problème du pied de géant.Il est davantage de type réaliste.

hauteur réelle de son visage; la taille du musicien debout). Dans cette situation, l'interviewer dispose des photos des personnages réels au besoin.

3.2.2.3. L'épisode expérimenté autour de la situation-problème défi climat

a) Les fondements ayant guidé la présentation de la situation aux élèves et son aménagement

Cette situation, qui part d'une situation-problème expérimentée en milieu scolaire en secondaire 1 dans le cadre des évaluations[95] sur la compétence « résoudre une situation-problème » a été repensée dans son aménagement et son contenu spécifique (voir annexe I). Quels sont les aménagements apportés à la situation initiale et pourquoi? La SP aménagée est différente de la situation-problème initiale proposée. En quoi et pourquoi?

Les informations contenues dans le texte aménagé ne sont pas données d'un seul coup à l'élève (il y a là un choix important pour le chercheur) mais en trois temps différents. Il s'agit de rendre la situation moins artificielle, plus près d'un projet tel qu'on le vit; d'enlever la lourdeur d'un énoncé de type scolaire; de permettre une amorce de résolution par l'élève. Des fondements guident aussi l'aménagement de chacun des temps.

Le premier temps présente le projet et son contexte, avec aucune information numérique excepté celle de l'objectif à atteindre (voir annexe I, 1ère partie). Il s'agit ici de proposer une situation moins marquée scolairement et d'y engager les élèves (voir la question si tu avais à organiser le travail, comment t'y prendrais-tu?), un élément important qui influence la résolution pour les élèves identifiés en difficulté (Lemoyne, 1989). Le choix de ne pas présenter de nombres au départ est central. Il vise à ne pas

[95] Nous n'avons pas les résultats de l'évaluation en notre possession.

focaliser les élèves sur les opérations à faire (ce à quoi vont s'accrocher les élèves identifiés en difficulté) et à permettre d'entrer qualitativement dans la situation.

Dans le deuxième temps, des informations sont données aux élèves, non pas de manière statique (cas de la situation scolaire initiale) mais de manière à ce qu'ils puissent les manipuler et les organiser (voir annexe I, 2ème partie). Ceci permet de voir comment les élèves vont entrer dans ces données, les organiser : quelles données sont choisies en premier? quels liens font-ils entre ces données? Quel va et vient entre ces données font-ils?

Des choix plus précis ont aussi été faits en lien avec ces données, présentées dans chacun des dossiers (voir annexe I, 2ème partie, contenu de chacun des dossiers, et 3ème partie) : le choix des nombres est différent de ceux présents dans la situation scolaire initiale (ex. 1 million de Kg au lieu de 1 100 150; 125 $ au lieu de 124, 99, etc); La formulation des relations (ex. le nombre d'employés qui prennent l'autobus correspond à 20% du nombre d'élèves qui prennent l'autobus) et des taux (ex. pour chaque kilo recueilli dans le bac à recyclage, on économise 2 kilos de CO2) est également différente dans la situation aménagée. L'idée de ces reformulations et du choix des nombres est de rentrer sur le sens plus que sur les calculs, de minimiser l'aspect calculs.

On retrouve une ambiguïté dans la situation intiale au regard de la référence à un certain tout donnant sens aux fractions et pourcentage. Dans celle-ci, on parle de 1200 élèves qui ont participé à Défi climat l'année denière, leur répartition correspondant bien globalement à 100% dans le diagramme circulaire. Puis, on indique qu'il y a 1/3 de plus que l'année dernière pour le vélo, 20% de plus pour l'autobus, 11/12 de plus pour l'utilisation de la gourde. Quel est ici le nouveau tout de référence? Le nombre d'élèves qui feront un geste cette année prend-t-il en compte uniquement les nouveaux élèves de l'école ou les élèves anciens auxquels se sont ajoutés les nouveaux élèves? (va-t-on encore retrouver 100% de la population?). Cette ambiguité a été enlevée dans la

situation que nous avons présentée aux élèves (voir dossier 2, on réfère ici clairement d'une part au nombre d'élèves de l'école, d'autre part au nombre d'employés).

Enfin autre choix important (voir dossier 3): Il n'y a pas de sous-graduation de l'histogramme (pas de graduation de l'axe vertical) alors que dans la situation initiale, la sous-graduation était déjà là. Ceci permet de voir l'interprétation que l'élève va faire de l'histogramme, laissant place à différentes stratégies possibles pour retrouver le nombre d'appareils recyclés (approximation, encadrement, construction de sous-graduations,..).

b) Le protocole prévu et les éléments le composant

Le premier temps est centré sur le contexte, il n'y a aucune information numérique excepté l'objectif à atteindre qui est de réduire de 1000 000 kilos le gaz carbonique (CO2) (voir annexe I, 1ère partie). L'intention sous-jacente est de voir un peu ce que les élèves pensent *a priori* de ce projet, de les plonger dans le contexte de la situation, de voir ce qu'ils comprennent de la situation. Ainsi, on demande aux élèves de redire dans leurs mots la situation pour voir ce qu'ils en ont compris. L'idée est aussi d'amener l'élève à s'approprier le contexte, à entrer dans la situation (voir les questions posées : est-ce que tu sais c'est quoi le gaz carbonique? En quoi est-il mauvais pour l'environnement? Etc.).

Par ailleurs, en demandant aux élèves la manière dont ils s'y prendraient s'ils avaient à organiser le travail, on place la situation à ce stade ouverte de façon à cerner les actions que les élèves pourraient entreprendre, les aspects auxquels ils pensent et les actions qu'ils pourraient cibler qui peuvent aider à réduire cette quantité de C02.

Dans le deuxième temps, les informations quantitatives nécessaires sont données aux élèves (voir annexe I, 2ème partie) de manière à ce qu'ils puissent les manipuler et les organiser. Il s'agit de trois dossiers. Le premier dossier porte sur les informations sur les élèves qui participent au projet (diagramme circulaire présentant la répartition des

élèves au regard de différents gestes). Le deuxième dossier contient les informations sur le personnel de l'école qui participe au projet (présentées sous forme de tableau). Le troisième dossier contient trois morceaux de papiers qui donnent les informations sur la quantité de CO2 économisée par l'école en posant des gestes (transport en vélo à l'école, transport en autobus et se servir d'une gourde d'eau réutilisable, présentés sous forme de tableau), la récupération effectuée dans l'école (sous forme de tableau) et l'histogramme à partir duquel il est possible de trouver la masse des appareils recyclés. Ceci permet de voir comment les élèves vont entrer dans ces multiples données, les organiser, les traiter.

Le troisième temps (voir annexe I, 3ème partie) débute par la question de savoir si l'objectif de réduire de 1 million de Kg la quantité de gaz carbonique, avec tous ces gestes, a été atteint, pour initier la nécessité d'autres gestes complémentaires. Au départ, la tâche est présentée oralement aux élèves : « après consultation des élèves et du personnel, l'école décide d'entreprendre la plantation d'arbres autour de l'école pour pouvoir atteindre son objectif. Elle dispose d'un budget de 8 500$ afin d'assurer les différentes dépenses liées à ce projet. Afin de pouvoir le faire, la directrice t'a remis un certain nombre d'informations ». Deux dossiers dans deux enveloppes sont remis aux élèves (le matériel à acheter, les types d'arbres, et les prix des objets à la quincaillerie).

c) Les ajustements apportés en cours de route et les raisons sous-jacentes

Des ajustements ont été apportés en lien avec les séances à la lumière de ce que nous avons observé (difficultés notamment avec les fractions et les pourcentages (voir partie 2). Ainsi nous sommes revenus sur le tableau, qui se trouvait dans le dossier 2, sur le lien entre le nombre d'employés faisant chaque geste et le nombre d'élèves). Par exemple : si je t'avais dit le nombre d'employés qui prennent l'autobus c'est 50 % du nombre d'élèves qui le prennent, qu'est-ce que tu m'aurais dit? et si cela avait été 25 % ? 75 % ? et 20 % dans tout ça selon toi ça devrait être combien? Comment on

pourrait faire pour trouver le 20 % précisément? Même chose pour le 11/12…si je t'avais dit le nombre d'employés qui utilisent une gourde est le 3/4, tu aurais dit quoi? et si c'est le 2/3, tu aurais dit quoi? Ces questions permettaient de voir comment les élèves se débrouillaient avec des pourcentages ou fractions plus simples, le sens qu'ils donnaient alors au calcul.

Nous sommes aussi revenus sur l'achat des supports à vélo et la combinaison des différents modèles (voir 3ème partie) (un retour sera fait sur différentes combinaisons possibles, y en aurait-il d'autres? Pourquoi avoir choisi celle-ci?), l'idée étant ici de forcer une explicitation et argumentation de la part des élèves. Un ajustement est apparu en cours de route pour cette 3ème partie : une information manquante (quantité de CO2 que permet d'économiser chaque arbre), au départ involontaire (nous étions censés donner ce nombre oralement) a été maintenue manquante. Compte tenu de ce qui s'est passé avec une équipe et de ce que cela a permis de mettre en évidence (perception de l'information manquante par cette équipe qui la demande au chercheur), la laisser absente nous est apparu riche, certains élèves voyant qu'une information manquait, d'autres non. Dans les prolongements de cette 3ème partie, nous avons enfin introduit certaines variantes pour pousser plus loin la réflexion (si pour chaque arbre, on n'économisait pas la même quantité de CO2, qu'est-ce que ça changerait ? Qu'est-ce que vous auriez fait ? Si par exemple l'érable permettait d'économiser 10 kg de C02?), de manière à voir s'ils contrôlaient cet effet de la variabilité dans le raisonnement.

Après avoir décrit précédemment le Teaching Experiment élaboré autour de chacune des situations, nous revenons maintenant sur les modalités plus précises de l'expérimentation : Comment s'est fait le choix des élèves et quel en a été le nombre? Dans quelles conditions a-t-elle pris place? Quelles sont les données recueillies qui serviront de matériau central pour l'analyse?

3.2.3 Modalités plus précises d'expérimentation

3.2.3.1 Choix des élèves et nombre d'élèves

L'étude réalisée a impliqué des élèves identifiés en difficulté de classes régulières de secondaire 1 d'une école de l'île de Montréal. Nous avons choisi plus spécifiquement pour notre étude des élèves de secondaire 1 pour les raisons suivantes. Les travaux menés sur les élèves en difficulté montrent que *dans le passage du primaire au secondaire et au début du secondaire* les difficultés augmentent en lien avec l'apprentissage de concepts et processus mathématiques complexes qui caractérisent le passage d'un ordre d'enseignement à l'autre (Bednarz et Janvier, 1996; Bednarz *et al.*, 2006; Perrin-Glorian, 1993; Salin, 2006; Bednarz et Saboya, 2006). Le niveau secondaire 1, qui constitue un passage important dans la progression des apprentissages, nous semblait donc présenter un intérêt pour notre étude. Il nous fallait aussi cibler plus spécifiquement, pour ce niveau, une école dont proviendraient ces élèves. Nous disposions des résultats de l'ensemble des élèves pour les différentes écoles de la CSDM (cf. chapitre 1, section 1.1).

Notre intervention a pris place plus spécifiquement dans une école de la CSDM[96] pour laquelle les résultats des élèves dans la compétence disciplinaire 1 (CD1) -résoudre une situation-problème en mathématiques- témoignent de difficultés (résultats de moins de 60 %). Cette école regroupe une population multiethnique.

Après la présentation du projet auprès de la direction de l'école et de deux enseignants de mathématiques de l'école retenue, intervenant en secondaire 1, un enseignant de secondaire 1 a accepté de participer au projet. Huit élèves ciblés en difficulté dans ses classes régulières ont été choisis en collaboration avec l'enseignant de mathématiques, et ce, en conjuguant deux sources : témoignages de l'enseignant liés aux observations qu'il avait pu faire lors de la première étape, et résultats scolaires obtenus en secondaire

[96] Quelques écoles ont été approchées à cette fin et l'une d'entre elles s'est montrée intéressée à participer au projet.. Cette école est parmi les écoles pour lesquelles on retrouvait des résultats faibles dans la compétence « résoudre une situation-problème » (voir chapitre 1), où nous étions donc à même de trouver des élèves identifiés en difficulté dans ce domaine.

1 à la 1ère étape de mathématiques (voir tableau 3.3 ci-dessous, avant dernière colonne[97]).

Nous avons pu, au cours de l'année, et ce, alors que l'expérimentation était engagée, avoir accès aux résultats au primaire de ces 8 élèves, permettant de confirmer que six d'entre eux rencontraient déjà des difficultés d'apprentissage en mathématiques au primaire[98] (voir tableau 3.3., résultats de moins de 60% ou autour de 60%) : 1 dès le cycle 1 du primaire (Rose)[99], 3 dès le cycle 2 (Capucine, Bambou, Yucca), 1 au cycle 3 (Ficus), 1 présentant des résultats faibles, autour de 60%, aux cycles 2 et 3 (Lavande). L'analyse après coup de leur dossier scolaire montre que les deux derniers élèves (Mandarine et Jacinthe) ne présentaient pas de difficultés au primaire, rappelons que ce sont ici leurs résultats faibles à la 1ère étape du secondaire (62% et 61%), jumelés aux observations de l'enseignant, qui ont conduit à les retenir comme des élèves présentant des difficultés.

[97] Selon ce tableau, on peut se questionner sur le choix d'une des élèves (Lavande), ses résultats à la première étape étaient en effet de 75. Les observations de l'enseignant ont dû jouer un certain rôle dans son choix. Les résultats au primaire obtenus après coup (cycle 2 et 3) laissent toutefois penser que c'est une élève qui présentait certaines faiblesses en mathématiques.

[98] Ils étaient suivis par l'orthopédagogue de l'école dans plusieurs cas, puisque nous avons retrouvé dans leur dossier une référence à des plans d'intervention touchant aux mathématiques.

[99] Des noms fictifs ont été attribués aux élèves.

Tableau 3.3 Résultats des 8 élèves[100] au primaire[101] et au secondaire

Élèves	Primaire																					Sec.1	
	A1 C1[79]			A2 C1				A1 C2				A2 C2				A1 C 3				A2 C3			Étapes	
	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	1	2
Rose					75	70	**60**		**61**	**45**	**63**		**60**	**56**	**57**		**45**	**45**	**46**	**67**	**65**	70	**55**	**65**
Capucine								**65**	**58**	**55**	**61**	**61**	72	70	**67**	76	**62**	**54**		**60**	**57**	**64**	**61**	**51**
Lavande	89	90	83	80	75	79	80	90	76	80	75	**61**	**60**	80	72	**60**	**67**	**60**		70	**65**	**65**	75	78
Bambou												**59**	**52**	**57**		**55**	**55**	**60**		**64**	**60**	**47**	**60**	**54**
Ficus					73	71	**68**		**66**	**61**	**68**		**68**	**65**	70		73	**58**	**55**	70	**69**	70	**61**	**68**
Yucca												**62**	**57**	**57**	**60**	76	**67**	**57**		**66**	**62**		**62**	**63**
Mandarine	85	76	75	75	79	76	85	85	82	85	**69**	**63**	70	73	70	78	74	75	80	74	84		**62**	74
Jacinthe	80	64			76	78	75	70	**69**	**69**	70	77	**56**	76	75	86	79	**68**		70	**67**	72	**61**	72

Légende : A1 C1 : Année1 Cycle 1, etc.

3.2.3.2 Conditions et durée de l'expérimentation

Les huit élèves ont été rencontrés, sur une base régulière, par groupe de 2 élèves, après l'école, à raison de 75 minutes par semaine, pendant 10 semaines comme le montre le tableau du déroulement de l'expérimentation (Annexe K). Les groupes d'élèves étaient ainsi constitués : Bambou et Ficus (au démarrage Bambou était avec Ancolie; Ficus était avec Molène)[102]; Jacinthe et Lavande; Capucine et Rose; Mandarine et Yucca

[100] Deux autres élèves étaient prévus au départ mais ils n'ont pas été retenus par la suite en raison de leurs absences répétées aux premières expérimentations. Il s'agit d'Ancolie et Molène. Ils ont été remplacés par Yucca et Mandarine.

[101] Les résultats des élèves au primaire ont été obtenus en cours d'expérimentation.

[102] Les changements résultent des contraintes contextuelles de disponibilité des élèves la journée de l'expérimentation.

(dans ce dernier cas l'expérimentation a commencé plus tard)[103]. La composition des dyades résulte de raisons essentiellement contextuelles, en lien avec la disponibilité des élèves aux journées fixées. Nous avions ainsi deux groupes de filles (Capucine et Rose; Jacinthe et Lavande), un groupe de garçons (Banbou et Ficus) et un groupe mixte (Mandarine et Yucca).

L'expérimentation s'est étalée sur six mois environ du 12 novembre 2013 au 13 mars 2014 pour les trois premières dyades à raison d'une séance par semaine pour chaque dyade, et les situations ont été expérimentées dans l'ordre suivant : Le pavage de carrés, le problème du géant et Défi climat. Pour la quatrième dyade (Mandarine et Yucca), elle a commencé le 3 février 2014 et s'est terminée le 30 avril 2014, dans l'ordre suivant : Défi climat, le pavage de carrés, le pied de géant. À l'occasion certains élèves étaient absents. Ce long temps a permis d'explorer en profondeur les situations avec les élèves. Rappelons qu'il s'agit d'une démarche exploratoire et qu'elle vise à mieux comprendre le processus de résolution de ces élèves dans différents types de situations. Trois situations-problèmes ont été expérimentées avec les élèves. Chacune de ces situations-problèmes, et son exploitation, s'est étalée sur 3 séances, l'une d'entre elles s'étalant sur 4 séances. L'expérimentation a été menée après la classe.

Les épisodes ont été expérimentés, comme nous l'avons vu dans la présentation des situations, en alternant travail en dyade (2 élèves) et moments individuels.

Avant l'expérimentation, une demande d'approbation déontologique a été soumise à la direction de programme de doctorat de la Faculté des sciences de l'éducation de l'UQÀM, et, après approbation de celle-ci, des accords préalables de la direction d'école, de l'enseignant (Annexe J) et des parents dont les enfants étaient impliqués

[103] C'est en raison du remplacement de deux élèves qui avaient amorcé l'expérimentation et qui n'ont pas été retenus pour la suite de l'étude, faute de présence régulière.

dans cette recherche ont été obtenus (voir formulaire d'information et de consentement en annexe L). Au tout début de l'expérimentation, lors de la première séance, les élèves (que nous allions suivre pendant un long temps) ont été introduits au projet, en leur précisant que nous allions travailler avec eux des situations-problèmes, toutes sortes de situations-problèmes en mathématiques, qui peuvent être un peu différentes de ce qu'ils font en classe mais qui peuvent les aider en mathématiques. Notre rôle a aussi été précisé : nous n'étions pas là pour les évaluer, pour les juger, mais au contraire pour les aider à cheminer dans la résolution de situations-problèmes en mathématiques. Ils étaient ici un peu comme nos co-chercheurs, pour comprendre ce qu'ils font quand ils résolvent des situations-problèmes, la manière dont ils pensent, en précisant que ce sont eux qui sont les mieux placés pour nous expliquer ce qu'ils font, pensent et qu'ils ont beaucoup de choses à nous apprendre. Nous leur avons également précisé qu'ils seraient filmés, pour mieux comprendre ce qu'ils font, et non pour les juger. Cette présentation visait à réduire l'appréhension éventuelle des élèves identifiés en difficulté qui auraient pu se sentir jugés, d'autant qu'ils étaient filmés, mais aussi à les impliquer dans la recherche. Les chercheurs leur ont enfin précisé qu'ils seraient toujours à deux et travailleraient souvent ensemble. L'important était donc qu'ils soient là chaque semaine à la même heure, nous comptions sur leur présence.

3.3 Les différentes sources de données

Toutes les séances du Teaching Experiment ont été filmées et enregistrées, et les traces des productions des élèves ont été recueillies. Un journal de recherche a par ailleurs été tenu par le chercheur sur une base régulière, après chacune des séances, où ont été notées les observations faites in situ, ainsi que les réflexions qu'elles suscitaient. Ces observations et réflexions ont formé la base, comme nous l'avons vu, des ajustements apportés en cours de route dans les situations. Aux fins de cette recherche, les données proviennent donc de différentes sources : les productions écrites des élèves recueillies aux différentes séances, les enregistrements vidéos de toutes les séances et le journal de recherche du chercheur.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les éléments clés qui ressortent de l'orientation globale de la recherche et de l'opérationnalisation de la recherche.

Tableau 3.4 Orientation globale et opérationnalisation de la recherche

Orientation globale de la recherche	Recherche qualitative	Paradigme qualitatif/interprétatif
	Approche méthodologique Teaching Experiment	Composantes -Modélisation du processus de résolution, des « students'mathematics » -Épisodes d'intervention/Entrevues articulés sur cette modélisation du chercheur
Opérationnalisation de la recherche	Choix de 3 situations-problèmes	Critères -Situations non marquées scolairement -L'élève peut s'investir dans la situation, peut envisager une réponse -Différents types de situations-problèmes non marquées scolairement susceptibles de favoriser différentes potentialités des élèves -Le contexte auquel réfère la situation-problème (mathématique/fantaisiste/réaliste).
	Choix des élèves et nombre d'élèves	Élèves de secondaire 1 identifiés en difficulté -Choix : témoignages d'un enseignant et résultats scolaires étape 1 -8 élèves suivis sur six mois environ.
	Modalités plus précises	-Chacune des situations s'étend sur 3-4 semaines (3 séances, 4 pour l'une d'entre elles) -Expérimentation sur 10 semaines (1période/semaine), après la classe, par groupe de deux élèves. -Séances filmées et enregistrées
	Donneés principales/Données complémentaires	-Productions écrites des élèves, enregistrements vidéos de toutes les séances, journal du chercheur

CHAPITRE IV

ANALYSE

Dans ce chapitre, nous analysons les productions orales et écrites des élèves à l'issue des expérimentations réalisées en lien avec une situation-recherche (Pavage de carrés) et deux situations-problèmes (le pied de géant; Défi climat). Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 3, ces expérimentations se sont déroulées sur trois séances chacune, hormis la situation-problème « Défi climat » qui s'est étalée sur quatre séances. Le corpus de données repris pour cette analyse puise à trois sources : les enregistrements vidéo qui ont permis de retracer les propos et gestes des élèves en lien avec chacune des situations (ils forment le corpus principal de données), les productions écrites des élèves (les traces qu'ils ont laissées au cours de ces séances) et le journal de recherche (reprenant nos observations). Nous amorçons l'analyse par situation en prenant en compte chacune des sous-questions abordées au fil des séances, et ce de manière à rendre compte des « mathématiques de l'élève » qui s'y développent en lien avec les situations et leurs aménagements (voir protocoles en annexes G, H et I).

Cette analyse des « mathématiques de l'élève » par le chercheur s'est faite en deux temps. Dans un premier temps, nous avons cherché à caractériser les différentes stratégies mises en oeuvre par les élèves dans ces situations et les argumentations qu'ils développent. Une analyse des difficultés rencontrées a pu également être dégagée de ce premier moment d'analyse. Nous sommes, par la suite, revenus sur cette analyse des mathématiques des élèves par le chercheur (stratégies, argumentations) de manière à mettre en évidence les construits qu'elles font apparaître. Dans chacune des situations, nous nous sommes ainsi intéressés aux stratégies des élèves, aux construits qu'ils

développent, ainsi qu'aux argumentations qui les sous-tendent. Cependant les caractéristiques différentes des situations-problèmes (voir tableau 3.2) nous ont amené à analyser les construits différemment d'une situation à l'autre. Ainsi dans la première situation (voir annexe G), dont les caractéristiques sont celles d'une situation-recherche, mettant de l'avant une activité mathématique au sens du travail d'un mathématicien (Grenier, Payan, 2003), ces construits ont pris la forme de conjectures, énoncées explicitement par les élèves ou mises en œuvre implicitement, ou encore de systématisation de cas possibles. C'est donc ici l'activité mathématique mobilisée par l'élève (émettre des conjectures, systématiser ou non les cas possibles) qui guide le chercheur dans son analyse des construits. Dans le cas de la deuxième situation (voir annexe H), nous sommes davantage sur une situation-problème mettant en jeu un travail de conceptualisation mathématique de la part de l'élève, faisant appel à la proportionnalité. Les concepts théoriques de « concept en acte » et « théorème en acte » (Vergnaud, 2007) sont, dans ce cas, apparus porteurs pour rendre compte des construits développés chez les élèves. Enfin la dernière situation, davantage de type scolaire (voir annexe I) met en œuvre un ensemble de petits sous-problèmes faisant appel à différents concepts mathématiques. Dans ce cas, les concepts théoriques de « concept en acte » et de « théorème-en-acte »[126] ont également été porteurs pour l'analyse. Par ailleurs, une gestion multiple de données et contraintes, caractéristique importante de cette troisième situation-problème, est également en jeu, ce dont nous avons cherché à rendre compte dans l'analyse des solutions des élèves.

Le cadre d'analyse retenu apparaît ainsi quelque peu différent d'une situation à l'autre, car il prend en compte, de manière plus spécifique, les caractéristiques des trois situations. Ces « mathématiques des élèves », telles qu'elle ressortent de l'analyse,

[126] Nous préciserons ces concepts par la suite.

témoignent du développement de potentialités chez les élèves, sur lesquelles nous reviendrons dans le chapitre 5.

4.1 Situation-recherche « Pavage de carrés »

Le développement du « Teaching Experiment » (TE), tel qu'il s'est constitué dans l'action, rend compte, dans ce cas, de cinq moments importants : (1) pavage de *n'importe quel carré avec des dominos* ; (2) pavage de n'importe quel carré *privé d'une case* avec des dominos ; (3) extension du pavage de n'importe quel carré avec des dominos à des *triminos ayant différentes formes* [allongé et en L] ; (4) jeu autour du pavage de *carrés et rectangles* avec des triminos de différentes formes ; (5) pavage de n'importe quel carré *privé d'une case* avec des triminos de différentes formes. L'analyse des « mathématiques de l'élève » et de leur évolution se fera en lien avec ces différentes variantes introduites au fil du temps.

4.1.1 Pavage de n'importe quel carré avec des dominos

Les élèves travaillent, au début de cette séance, seuls (explorant la question posée, chacun de leur côté) et le retour se fait, par la suite, en dyade. Ils ont à leur disposition plusieurs carrés de différentes grandeurs et des dominos en nombre limité (voir protocole G-1 en annexe).

Les constructions des élèves prennent ici la forme de *conjectures*, énoncées explicitement ou non, en réponse à la question posée. Ces conjectures s'appuient sur des *argumentations* venant justifier ce qu'ils avancent. Pour en arriver à ces conjectures, différentes *stratégies s*ont mises en œuvre par les élèves. Conjectures, argumentations et stratégies sont ainsi profondément imbriquées.

a) Différentes stratégies

Tous les élèves partent du matériel fourni, mis à leur disposition (carré 8 par 8, et carré 5 par 5, quelques dominos) pour explorer la question (7 élèves : B, J, L, C, R, M et Y), exprimant la nécessité d'avoir d'autres dominos pour pouvoir le faire. Ils poursuivent

l'exploration dans certains cas (2 élèves : C et R) avec d'autres carrés (découpés dans le papier quadrillé). Au delà de cette utilisation du matériel, les manières de résoudre la question posée diffèrent. Nous avons observé deux stratégies principales: l'une axée sur un recouvrement partiel et une anticipation de ce qui va se produire par la suite (l'élève amorce un recouvrement du carré avec des dominos, s'arrête et anticipe ce qui va se produire), l'autre s'appuyant sur un recouvrement complet du carré, prenant appui sur différents supports au fil de la séance (recouvrement réel avec le matériel, plus ou moins systématique, pointage par deux à l'aide des doigts, dessin d'une ligne qui traverse deux cases).

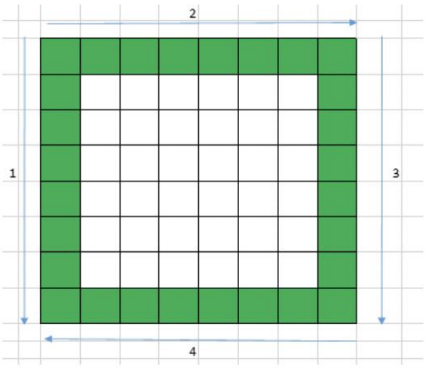
Stratégie 1 (RA) : amorce du recouvrement, arrêt et anticipation

Deux élèves (A, F), après avoir amorcé très brièvement un recouvrement avec le matériel, font appel à une représentation mentale leur permettant d'anticiper ce qui va se produire.

> Ainsi, Ancolie (A)[128] recouvre en partie le carré 8x8, se détache du matériel puis observe et anticipe très vite ce qui va arriver, pendant que l'élève qui lui est jumelé (B) continue à recouvrir avec *tout* le matériel (journal de recherche, séance 1, p. 1).
>
> Ficus (F) recouvre les bordures du carré 8x8 dans le sens indiqué (cf figure ci-dessous) puis anticipe, concluant vite que c'est possible de recouvrir le carré 8x8 avec des dominos (S1 4:23).[129]

[128] Ancolie n'a participé qu'aux expérimentations en lien avec la situation-recherche (pavage d'un carré). Il n'a pas poursuivi le reste des expérimentations en raison de ses absences répétées.

[129] Cette codification, qui sera reprise tout au long de cette analyse, pour référer aux données renvoie à la séance et au temps d'enregistrement (dans ce cas situation 1, séance 1, 4 :23 après le début de la rencontre). Elle permet de voir ici que cette anticipation est arrivée très rapidement.



Stratégie 2 : recouvrement complet (RC)

7 élèves[130] se situent ici et vont avoir recours à un recouvrement complet des carrés à l'aide du matériel, certains d'entre eux changeant en cours de route, faute de matériel suffissant, pour un pointage par deux (L, C). À titre d'illustration, nous rapportons ci-dessous l'engagement de quelques élèves.

B recouvre tout le carré [8x8] avec des dominos. Il le fera pour tous les carrés avec lesquels il va travailler. Un support du matériel est essentiel pour lui permettre de conclure comme on le perçoit à travers la question qu'il adresse au chercheur : « s'il manque des dominos, qu'est-ce que je fais? ». Il poursuit (la réponse du chercheur étant qu'il y a juste cela de matériel) en déplaçant les dominos déjà utilisés pour pouvoir poursuivre le recouvrement (contrôlant les cases déjà couvertes, qu'il ne reprend pas une autre fois dans son recouvrement) (journal du chercheur, S1, p. 2).

J recouvre le carré 8x8, en se donnant une manière systématique de procéder, ici dans le sens horizontal de la gauche vers la droite, et dit « ça ne va pas marcher parce qu'il y en a pas beaucoup » [sous-entendu il va manquer de dominos] (S16 : 28).

C après avoir tenté de recouvrir au complet avec le matériel les carrés 8x8 et 5x5, utilisant des petits carrés unités pour compléter (les dominos en nombre limité), change pour un pointage par deux, comme le montre le dessin ci-dessous (S1 17:03):

[130] Bambou (B), Jacinthe (J), Lavande (L), Capucine (C), Rose (R), Mandarine (M) et Yucca (Y).

				9	9	8	8
				10	10	7	7
				11	11	6	6
				12	12	5	5
						4	4
						3	3
						2	2
						1	1

À ce stade, les élèves ont donc recours majoritairement (7 élèves sur 9) à une stratégie de recouvrement complet du carré à l'aide des dominos matériels ou l'équivalent (voir C) qui sert d'appui à la formulation d'une conjecture permettant de dire si le pavage fonctionne ou non.

b) Différentes conjectures

L'analyse des vidéos, des traces écrites laissées par les élèves, et du journal du chercheur nous a permis d'identifier deux conjectures différentes construites par les élèves[131], qui reposent sur la parité et l'imparité : l'une portant sur le nombre de cases global du carré à paver [par exemple le carré 8x8, 64 cases, le carré 5x5, 25 cases] et l'autre sur le nombre de cases sur un côté du carré [par exemple, carré 8x8, sur une dimension, 8 cases].

Conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet **(Pnt)**

Cinq élèves (A, B, L, F et R) ont formulé cette conjecture, l'ont exprimée ou (et) écrite à leur façon comme en témoignent ces extraits :

> A : nombre pair, ça va marcher, nombre impair ça [ne] marchera pas. [On l'entend le dire durant l'exploration individuelle quand il travaille]. On ne peut pas [sous-entendu avec le carré 5x5], ça ne marcherait pas (journal du chercheur, S1, p. 4).

[131] Ces conjectures sont dans certains cas énoncées explicitement par les élèves. Dans d'autres cas, elles ont pu être identifiées à partir des argumentations qu'ils ont avancées (voir 4.1.1 c)

> B : tous les impairs ne vont pas marcher, tous les pairs vont marcher (journal du chercheur, S1, p. 4).
> La trace écrite laissée par B confirme cette conjecture: « (1) Dans le cas des pairs, si on les mettent [met] par deux, on va toujours réussir […]. (2) Dans le cas des impairs, si on les mettent [met] par deux, il va y rester toujours un carré libre. »

Cette conjecture, comme on le voit dans ce qui précède, est *formulée de manière générale.*

Conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases sur un côté [sur une dimension] **(Pnc)**

Trois élèves (J, M et Y) ont formulé cette conjecture relativement à la dimension linéaire du carré comme en témoignent ces extraits :

> J : ça marche [référant au carré 8x8]
> Ch : pourquoi ça marche?
> J : parce que c'est un nombre pair (S1 7 :25).
> Ch : qu'est ce qui est un nombre pair, qu'est ce qui est pair?
> J : tout ça [elle montre le côté] ça fait 8 (S1 7 : 33 à 7: 38).
> M : la longueur [carré 8x8] c'est un nombre pair, le domino a deux carrés, alors ça marche (S1 5: 00). Comme la longueur [carré 5x5] est un nombre impair et que les dominos ont deux [carrés], ça ne marche pas » (S1 5: 25).
> Y : ici, je pense que ça ne marche pas (carré 5x5) à cause que c'est un nombre impair puis chaque domino c'est un nombre pair (S1 10 : 27) et là [carré 8x8)] ça marche parce que c'est un nombre pair. Je compte par 2, ça donne 4 [il rentre 4 fois le domino dans le 8]

Remarquons ici que les conjectures sont énoncées sur des cas spécifiques.

Aucune conjecture explicitée (R)

Notons que l'élève C ne formule pas de conjecture. Elle pense que c'est en raison du manque de dominos que le recouvrement n'est pas possible, comme en témoigne cet extrait :

> Ch : Est-ce que tu peux m'expliquer pourquoi ça n'a pas marché?
> C : Ben! moi je dis que c'est parce que ces dominos ce n'est pas assez (S1 08: 02).

À cette étape, par ailleurs, ce ne sont pas tous les élèves qui argumentent à l'appui des

conjectures qu'ils avancent, la situation ne nécessitant pas en soi une telle justification (la demande de justification, pourquoi tu dis cela, est adressée par le chercheur). *La plupart des élèves se limitent donc à énoncer ce à quoi ils arrivent.* Une première argumentation est cependant avancée par quatre élèves A, L, J et F.

c) Argumentation des élèves

À l'appui de ce qui est avancé sur la parité et l'imparité (pourquoi le recouvrement marche ou non), l'élève A apporte un *argument mettant en évidence le reste* (une case non comblée, dans le cas de l'imparité) comme en témoigne ce verbatim :

> Ch : Mettez-moi de côté ce qui marche (parmi tous les carrés qui sont sur la table).
> A : Quand il y en a 5 [sous-entendu le carré 5x5], il va toujours rester une [une case] (journal de recherche, séance 1, p. 4)

Pour L, *l'argument est numérique* : il repose sur le calcul du nombre de cases au complet à travers le calcul de l'aire et sur la divisibilité ou non de ce résultat par 2.

> L : Si on compte la largeur fois la longueur, ça donne 64. Si on avait 64 petits dominos comme ça, ça aurait pu marcher, vu qu'on n'en a juste pas vraiment beaucoup là, ça ne marchera pas.
> Ch : Ça marche ou ça ne marche pas ? (Le chercheur veut parler du pavage du carré 5x5)
> L : Ça ne marche pas parce que c'est un nombre impair puis on ne peut pas diviser 25 par 2, ça va donner un nombre impair. (S1 10 : 17-38).
> Ch : Ça va donner un nombre impair?
> L : Non ça va donner un nombre à virgule (S1 10 : 52).

Pour J. aussi, l'argument est numérique mais passe, non par la division, mais par un comptage par deux:

> « Si tu comptes par des bonds de 2, ça ne va pas marcher » (S1 11 : 18-24).

F, quant à lui, met de l'avant une argumentation s'appuyant sur une visualisation (du recouvrement) de la bordure extérieure.

> F : Parce que j'ai essayé de mettre les dominos dans les coins [F veut dire autour] comme ça (…) Premièrement, ces deux carrés [il pointe le domino] c'est un

> nombre pair. Pour faire un carré, ça doit être le même nombre [implicitement veut dire le même nombre de carrés sur chacun des côtés]. C'est pour ça que je dis que ça se peut parce qu'on peut bien les mettre tout autour si on le remplit par les dominos.
> Ch : Tu as parlé du carré…tu parles de quel carré ?
> F : C'est celui-là [il montre le carré 8x8]. (S1 6 : 47).

En résumé, l'argumentation est centrée : (1) sur le reste (case non comblée dans le cas de l'imparité), (2) sur le nombre caractérisant le carré (nombre de cases au total ou sur une dimension) et la possibilité ou non de le diviser par 2, ou de rejoindre celui-ci en comptant par deux, (3) sur une visualisation du recouvrement en bordure.[132]

Le tableau ci-dessous reprend les principaux résultats associés au pavage d'un carré à l'aide de dominos (les stratégies, conjectures, argumentations développées par les élèves) et donne un premier aperçu où se situent les élèves.

[132] Dans le cas d'un nombre de cases pair, le domino entre sur chacun des côtés en bordure (les deux cases du coin étant utilisées une fois, la bordure restante est de nouveau paire et peut être comblée à l'aide de dominos). Une fois cette bordure comblée, la surface intérieure est de nouveau formée de carrés aux dimensions paires et le même argument s'applique. Il s'agit ainsi d'un argument qui fonctionne. Cependant l'élève ici bien sûr ne mène pas véritablement cette argumentation à fond.

Tableau 4.1 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré à l'aide de dominos

	Analyse	**Élèves**
Stratégies utilisées	(RA) Amorce de recouvrement, arrêt et anticipation	2 élèves (A et F)
	(RC) Recouvrement complet à l'aide de différents supports (matériel, pointage avec doigts, ligne couvrant deux cases; codage numérique)	7 élèves (B, J, L, C, R, M et Y)
Conjectures formulées	(Pnt) La parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases au complet	5 élèves (A, B, F, L et R)
	(Pnc) La parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases d'un côté [sur une dimension]	3 élèves (J, M et Y)
	(R) Aucune conjecture	1 élève (C)
Argumentations avancées	(Ar) Portant sur le reste (une case non comblée)	1 élève (A)
	(An) Numérique : divisibilité ou non par 2 du nombre caractérisant le carré (nombre total dans ce cas de cases) possibilité ou non de rejoindre le nombre (caractérisant la dimension dans ce cas) en comptant par deux	1 élève (L) 1 élève (J)
	(Ab) Visualisation ou non du recouvrement possible de la bordure extérieure	1 élève (F)
	(R) Aucune argumentation	5 élèves (B, C, R, M, Y)

4.1.2 Pavage de n'importe quel carré privé d'une case avec des dominos

Le pavage est étendu, lors de la 2ème partie de cette 1ère séance, à n'importe quel carré *privé d'une case*. Cette tâche se déroule en deux temps : on bouche une des cases (ligne 2, colonne 2) et on demande à l'élève s'il est possible de recouvrir n'importe quel carré privé d'une telle case avec des dominos. Puis ce cas spécifique est étendu à d'autres cas : si on bouchait une case ailleurs, est-ce que ça marcherait encore ? Pourrait-on

recouvrir un carré privé d'une case avec les dominos? (sous-question : Peux-tu me trouver tous les endroits où ça peut marcher, ceux où ça ne marcherait pas).

Six élèves ont travaillé en dyades (A et B, C et R, J et L) et trois autres élèves (F, M et Y) ont travaillé individuellement en raison de l'absence de leur co-équipier au moment de la rencontre.

Les élèves, comme nous le verrons dans ce qui suit, vont réinvestir les conjectures qu'ils ont élaborées précédemment en se centrant sur la transformation du nombre (total de cases du carré ou d'une dimension) lorsqu'on bouche une case : de nombre impair (pair), il devient pair (impair). Nous observons de plus chez certains élèves une évolution des stratégies, qui se manifeste par une prise de distance plus grande face au matériel et à la nécessité de passer par un recouvrement complet.

4.1.2.1 1er temps : Autour des carrés privés d'une case spécifique (ligne 2, colonne 2)

a) Différentes stratégies

Quatre principaux engagements des élèves se dégagent de notre analyse des vidéos.

Stratégie 1 : Une approche mentale du problème (M)

Trois élèves (F, J et Y) se situent ici, comme on peut le voir dans les extraits qui suivent illustrant les stratégies mentales de deux d'entre eux. L'élève L les rejoint pour le carré 5 par 5.

> J réfléchit, tient sa tête (S1 19 : 25 à 19: 53), prend le domino et le tient à la main (S1 19 : 52 à 20 : 11) et dit non [le recouvrement du carré 8 par 8 privé d'une case n'est pas possible].
> F réfléchit et affirme que le recouvrement du carré 8 par 8 privé d'une case [ligne2/colonne2] est impossible et qu'il est possible pour le carré 5 par 5 (S1 9 : 37).

Rappelons que précédemment ces élèves, à l'exception de F qui avait eu recours à une anticipation (et donc déjà à une amorce de démarche mentale) ont tous eu recours à un recouvrement complet du carré à l'aide de différents supports. *On constate donc ici pour ces 3 élèves une évolution, visible à travers une prise de distance face au matériel.*

Cette approche du problème, qui apparaît ici pour la première fois, ne nous donne toutefois pas nécessairement d'indice de la stratégie utilisée par ces derniers mentalement (exception faite, nous le verrons ci-dessous, de F, voir la stratégie 2).

Stratégie 2 : Réinvestissement des connaissances développées antérieurement (CA).

Dans certains cas (F, L), l'élève s'appuie directement sur un repérage du nombre de cases-total ou sur une dimension- et sur la propriété du nombre obtenu, pour pouvoir conclure (voir les extraits ci-dessous).

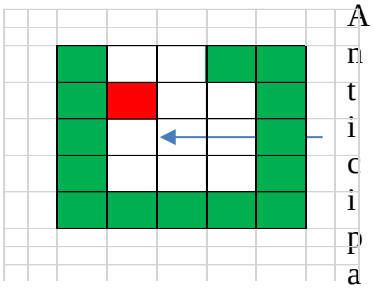
> F réfléchit et affirme que le recouvrement du carré 8 x 8 privé d'une case [ligne2/colonne2] est impossible et qu'il est possible pour le carré 5 x 5.
> Ch : pourquoi c'est impossible?
> F : quand vous avez bouché un [une case], il [le nombre pour le carré 8x8] devient impair. (S1 9 :10)
> L compte le nombre de cases sur les côtés du carré 8 x 8, s'arrête, réfléchit un moment et affirme que le recouvrement n'est pas possible (S1 19 :00).

Stratégie 3: Amorce de recouvrement, arrêt et anticipation (RA)

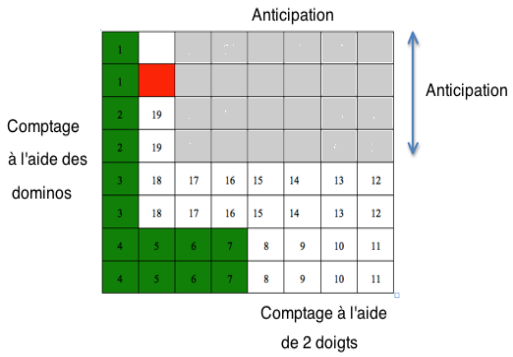
L'élève A adopte cette stratégie, comme on peut le voir dans les extraits qui suivent. Il a déjà eu recours à une telle stratégie précédemment.

> A recouvre avec les dominos le tour du carré 5 x 5 et anticipe ce qui va se produire, en pointant partiellement avec ses doigts (S1 2:38). Il poursuit la même stratégie, s'arrête et anticipe [carré 8x8] (S1 3:10).

Production de A (carré 5 x 5)



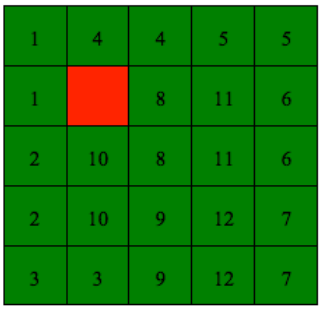
Production de A (carré 8 x 8)

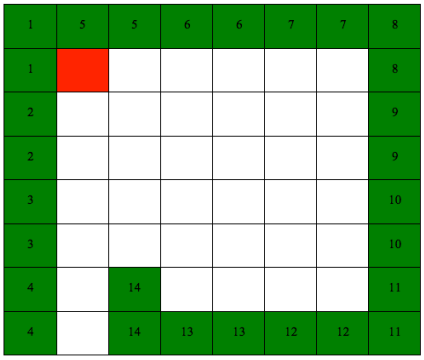


Stratégie 4 : (RC) recouvrement complet du carré

Quatre élèves (B, C, R et M) continuent de passer par un recouvrement complet des carrés, nécessaire pour pouvoir conclure.

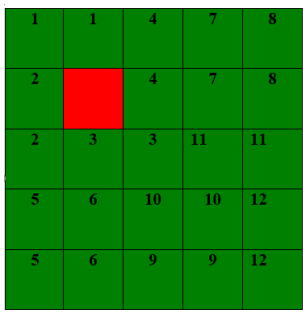
> B tente de paver au complet le carré 5 x 5 (S1, 3) et le carré 8 x 8 (S1 5 :24) pour se convaincre (et nous convaincre). Il procède par un recouvrement irrégulier (dès qu'il a un espace vide, il le comble (voir dessin).

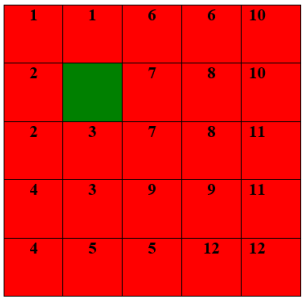




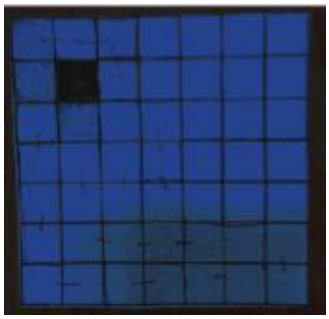
> Les élèves C et R procèdent par remplissage complet du carré 8 x 8 puis s'arrêtent par manque de dominos. Pour le carré 5 x 5, elles procèdent aussi par recouvrement complet et concluent que le recouvrement est possible. Il en est de même pour le carré 7 x 7 (S1 3:27).

Productions de R **Carré 5 x 5** **Productions de C**





Carré 7x7



Quant à M, elle recouvre au complet le tour du carré 8x8 et compte par deux à l'aide de doigts verticalement puis horizontalement en alternant pour le reste des carrés vides (S1 11 :24) puis affirme que ça ne marche pas (voir dessin ci-dessous).

Production de M

1	1	2	2	3	3	4	4
7		1	2	3	4	5	5
7		1	2	3	4	5	5
8		6	6	7	7	8	6
8	11	10	10	9	9	8	6
14	11	12	12	13	13	14	9
14		16	16	15	15	14	9
13	13	12	12	11	11	10	10

b) Différentes conjectures

Les conjectures élaborées précédemment par les élèves, portant sur la parité et l'imparité du nombre vont ici être réinvesties dans cette nouvelle situation. On observe, de plus, une évolution chez 5 élèves, telle que C qui n'avait énoncé précédemment aucune conjecture et qui s'est donc réappropriée ce qui a été amenée par sa co-équipière lors du retour; L qui travaille maintenant à la fois sur la parité du nombre total de cases mais aussi de la dimension (il y a ici restructuration de la conjecture initiale); J, M et

Y qui sont maintenant centrés sur le nombre total, et non plus sur la dimension (un changement prenant en compte le fait que la forme n'est plus un carré plein).

Conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet (Pnt)

Huit élèves (A, B, C, R, F, J, M et Y**)** ont explicité, dans leur argumentation, cette conjecture comme le montrent les extraits ci-dessous:

> A : Ici là ça marche [carré 5x5], ici non là non [carré 8x8] (S1 3:25).
> Ch : Pourquoi ça marche?
> A : parce qu'on a un nombre impair (S1 3 :31) [le carré ayant 64 cases, nombre pair a maintenant un nombre impair de cases**].** (S1 3 :35)
>
> Ch : Bon ça ne marche pas parce que c'est impair et toi, qu'est ce que tu dis J ? Pourquoi ça ne marche pas?
> J : Parce que tantôt le carré était pair et ça rentrait sans qu'il y ait un petit carré qui manque. Alors maintenant qu'on [en] a enlevé un, il va manquer un carré sans qu'on puisse le remplir (S1 21:13).
>
> Ch : Comment tu sais qu'il y a 49 cases?
> C : 7x7. Si on bouche une case ça fait 48, 48 est un chiffre pair.
> (S1 15:44)
> R : Parce que [en même temps, R compte les côtés du carré 5x5] […]
> Ch : Avez-vous une idée, si vous voulez expliquez à quelqu'un?
> R : si un carré ne serait pas enlevé, ça ne pourrait pas marcher parce que c'est un nombre impair.
> Ch : OK! Donc si on enlève pas le carré ça ne pouvait pas parce que c'est un nombre impair. Oueh!
> R : Comme on enlève un carré […]
> Ch : Comme on a enlevé un carré, oui [comme pour dire à R continue]
> R : ¨Ça, s'il n'y avait pas de trou bouché, ça ne fonctionne pas, quand on fait ça, les dominos c'est 2 par 2 […] puis là c'est 5, le nombre de carrés [au total], c'est impair.
> Ch : Ok et maintenant si on bouche?
> R : Ça fonctionne parce que c'est pair.
> Ch : […] Bon et ici [carré 8x8] pourquoi ça ne fonctionne pas? Vous, vous avez dit que ça ne fonctionne pas, pourquoi?
> R : Non!
> Ch : Pourquoi, selon toi?

> R : Ça ne fonctionne pas parce que [..] le nombre de carrés c'était déjà pair, et là on a bouché un trou, ça l'a enlevé, ça devient impair. (S1 4:12).

> Ch : […] Explique-moi pourquoi tu penses que ça ne marche pas.
> M : dans ce carré [carré 8x8], au début, s'il n y avait pas ce carré [l'élève veut parler de l'absence d'une case] (S1, 14 :55).
> Ch : Si on avait pas mis de trou, oueh!
> M : Il y aurait eu 32 cases [une erreur de calcul] et ça aurait marché. Mais là il a enlevé 1, ça fait 31, alors que le domino a deux cases et c'est impair alors ça ne marche pas (S1 15).

Cette conjecture est explicitée dans certains cas à partir d'un nombre spécifique (exemple de C ci-dessus ou de M), alors que dans d'autres cas la généralité du raisonnement est mise de l'avant (exemples de J et R, son argumentation tient pour tout carré).

Conjecture mixte (Pm) intégrant les deux conjectures précédentes soit Pnc et Pnt

La parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases sur un côté et le nombre de cases total.

Cette conjecture est explicitée par L à travers son argumentation (voir extrait qui suit).

> Ch : Non. Bon alors vous dites que c'est non [à propos du carré 8x8]. Vous allez me dire pourquoi ça ne marche pas?
> L : Si on enlève un carré, ça va donner 63. Si on représente 63, comme ça va être un genre de triangle [veut dire rectangle]; ça va être 7 par 9 […] et puis 7 et 9 ce sont des nombres impairs. Les deux carrés [sous-entendu le domino] ça pourrait pas rentrer dans 9 parce qu'il en restera au moins un. Puis les deux carrés ça pourrait pas rentrer dans 7 parce qu'il va en rester un. Ça ne marche pas parce que c'est impair (S1 20 : 21)

L énonce sa conjecture sur un cas spécifique. L'imparité porte à la fois sur le nombre total et sur les dimensions : 2 répété plusieurs fois ne rentre pas dans 9. Il en est de même pour 7 (2 ne rentre pas dans 7). Il reste 1. Il ne rentre pas non plus dans le nombre total.

c) Argumentation des élèves

Contrairement à la première situation (où on aboutissait à une certaine conjecture), l'explicitation de la conjecture (précédemment obtenue) est en soi un argument à l'appui du fait que le pavage va pouvoir se faire ou non dans le cas d'un carré privé d'une case.

Dans certains cas, toutefois, cette argumentation va plus loin. Ainsi on retrouve deux types d'arguments :

Une argumentation centrée sur la transformation (du carré plein au carré privé d'une case) (At) : effet de la transformation enlever une case.

Cette argumentation, mise en évidence par J (qui précédemment avait argumenté sur un plan numérique, possibilité ou non de rejoindre le nombre de cases en comptant par 2) est générale, elle fonctionne pour tous les carrés (si le pavage fonctionnait, il ne peut plus fonctionner)

> J : Parce que tantôt le carré était pair et ça rentrait [les dominos] sans qu'il y ait un petit carré qui manque. Alors maintenant qu'on en a enlevé un, il va manquer un carré sans qu'on puisse le remplir [S1 21 : 12].

Une argumentation à la fois géométrique et numérique (Ang)

Cette argumentation (voir L ci-dessous) prend appui sur la reconstitution d'une autre figure géométrique ayant la même aire que celle donnée, puis sur la propriété (nombre impair) de chacune des dimensions et du total (on retrouve ici l'idée de divisibilité par 2 sur laquelle L s'était appuyée précédemment) .

> L [à propos du carré 8x8] si on enlève un carré, ça va donner 63. Si on représente 63, ça va être un genre de triangle [rectangle]; ça va être 7 par 9 […] et puis 7 et 9 ce sont des nombres impairs. Les deux carrés [le domino], ça pourrait pas rentrer dans 9 parce qu'il en restera au moins un. Puis les deux carrés ça pourrait pas rentrer dans 7 parce qu'il va en rester un. Ça ne marche pas parce que c'est impair (S1 20 : 21).

Cette analyse met en évidence une première évolution des « maths des élèves » :

- sur le plan des stratégies : détachement d'une démarche empirique s'appuyant sur un recouvrement complet à l'aide du matériel. En fait, 3 élèves (J, Y et L) quittent le recouvrement complet, A et F étaient déjà là au départ. Certains réinvestissement les connaissances antérieures (L, F). Au total 5 élèves sur 9 à cette étape sont détachés d'une démarche empirique (A, F, J, L, Y);
- des conjectures réinvesties et nouvelles : une conjecture énoncée alors qu'il n'y en avait pas (C); combinaison des deux conjectures précédentes (L), changement de conjecture : du nombre sur une dimension au nombre total (J, M, Y);
- des argumentations mises de l'avant s'appuyant sur ce qui a été élaboré précédemment : effet de la transformation (J), reconstruction de formes ayant la même aire et argument numérique portant sur les dimensions (L). Ces deux élèves avaient précédemment une argumentation numérique.

4.1.2.2 2ème temps : extension à n'importe quelle case bouchée

Dans cette section, nous analysons les démarches des élèves (leurs stratégies, leurs conjectures et leurs argumentations) en lien avec la possibilité de recouvrement d'un carré quel que soit l'endroit où la case est bouchée.

Cette situation a pris place lors de la 2ème séance en lien avec le recouvrement d'un carré privé d'une case. Ce deuxième temps de la tâche a montré une exploration plus longue, en passant par des réajustements, qui a conduit à une systématisation ou non des cas possibles ou non selon la position de la case bouchée (comme nous le verrons en c).

Les analyses vont donc se centrer sur les productions des élèves en essayant de rendre compte de cette démarche et de ses réajustements.

Au cours de cette séance, il apparaît que les élèves vont renforcer leurs stratégies adoptées précédemment. Les élèves combinent parfois ces stratégies à savoir une approche mentale du problème (M), un réinvestissement des connaissances antérieures (CA) et un recouvrement complet du carré (RC). Cette exploration conduit à une systématisation des cas (SC) pour certains, pour aboutir parfois à une généralisation des résultats découverts.

Les propos des élèves (pour la plupart d'entre eux) révèlent un réinvestissement de connaissances antérieures (CA) en lien avec la première séance.

a) Stratégies des élèves

Stratégie CA

Cette stratégie est utilisée par tous les élèves à un moment ou un autre de l'exploration. Par exemple, Ficus (F) affirme que c'est toujours possible pour le carré 5 par 5 en soulignant que « ça reste toujours un nombre pair ». Il généralise ce qu'il a découvert précédemment à toute case bouchée, le nombre est toujours pair peu importe la position de la case. De leur côté, Ancolie (A) et Bambou (B) sont convaincus pour la même raison que, pour le carré 5 x 5, peu importe la position de la case bouchée, ça va marcher c'est-à-dire que le recouvrement du carré 5 x 5 est possible. En ce qui concerne les élèves Capucine (C) et Rose (R), elles renforcent leurs points de vue au regard de ce qu'elles ont dit à la première séance. C affirme qu'elle a bouché aux quatre coins du carré 7 x 7 (position où le recouvrement du carré est possible). Une déduction qui vient sans doute de la position initiale (L2C2) où le recouvrement était possible. En revanche, R conclut que l'on peut boucher partout après avoir compté chaque case de la première ligne du carré 7 x 7 (de la gauche vers la droite) et celle de la 1^{e} colonne (de haut en bas). Dans ce cas, le recouvrement est possible. Le raisonnement de R conduit au même résultat pour le carré 5 par 5. Les raisonnements de C et R se fondent sur les conclusions obtenues à la première séance, une façon de réinvestir des connaissances antérieures.

Y, quant à lui, apporte les réponses suivantes après avoir compté les côtés du carré 5 x 5 (format papier) :

> Y : Quand il reste un carré, il faut boucher un carré pour que ça marche. Quand il ne reste pas de carré, puis que le nombre [sous-entendu le nombre total] est correct comme ici [Y prend le carré 4x4], ça marche (S1 7 : 31).

En fait, Y parle de la parité ou de l'imparité du nombre total de cases avant qu'on ne bouche une case. Par exemple, si le nombre total de cases est impair (hormis celle déjà bouchée), il faut boucher un « carré » [sous-entendu une case] pour que ça marche. Autrement dit, selon Y, le recouvrement n'est possible que lorsqu'un carré a un nombre de cases impair.

Enfin, l'élève Mandarine (M) montre que le recouvrement n'est pas possible dans le cas du carré 5x5 dont le carré est privée d'une case à la ligne 2 et colonne 1 puisqu'elle dit qu'il resterait un carré.

Les conclusions des élèves viennent sans doute des résultats obtenus à la première séance. Autrement dit, les élèves réinvestissent les connaissances antérieures en lien avec la séance 1.

Stratégie mentale M

Cette stratégie est utilisée par les élèves F (S1 9 : 37), J (S1 19 : 25 à 19 : 53 et S1 19 : 52 à 20 : 11) et Y (S1 22 : 23 à 40). Ils abordent le problème mentalement, en observant le carré avec la case bouchée (à un endroit). On ne peut toutefois déterminer la stratégie plus précise dans ce cas.

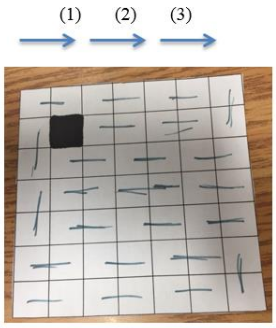
Stratégie RC

Une stratégie *utilisée partiellement* dans ce cas par 4 élèves, J, L, C et B. Par exemple, les élèves Jacinthe (J) et Lavande (L) concluent qu'il est possible de recouvrir le carré 5 par 5 privé d'une case sans se préoccuper de la position de la case après avoir procédé

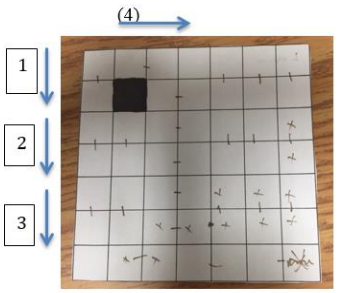
par recouvrement complet. Pour le carré 8x8 privé d'une case, les élèves J et L affirment qu'il n'est pas possible de le recouvrir (sans le faire cette fois empiriquement).

L'exploration par J et L pour le recouvrement du carré 7 x 7 à n'importe quelle case bouchée a montré des manières de faire (S1 37) différentes de la part des deux élèves dans la stratégie de recouvrement utilisée pour pouvoir voir si le pavage est possible ou non (voir dessins ci-dessous).

J met en évidence les dominos par son trait. La procédure est plus visuelle [on peut reconstituer le domino qui recouvre sous les traits].
Pour l'élève L, l'identification des dominos est moins efficace car elle laisse place à des oublis (elle change d'ailleurs de procédure en cours de route pour mieux mettre en évidence le domino). La procédure de L est moins visuelle car les traits ne permettent pas de repérer les dominos.



Jacinthe



Lavande

b) Conjectures des élèves

Conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet (Pnt)

La conjecture de A et B est la suivante même si elle n'est pas explicite : comme on a bouché une case, un nombre pair (ce qui était impair 5 x 5 = 25 devient pair), ça va

marcher, on va toujours pouvoir recouvrir avec des dominos. A et B étendent la conjecture qui va marcher pour les carrés impairs peu importe la position de la case (Productions des élèves A et B, p. 1)[133]. Ici, comme pour l'élève F (voir ce qu'il dit précédemment), les connaissances antérieures sont réinvesties [ici la conjecture formulée précédemment].

Y ne formule pas de conjecture de façon explicite. Le comptage des cases du carré 5x5 et les concepts de parité ou d'imparité, voire de divisibilité par deux ou non, semblent émerger de son raisonnement à travers l'idée du reste de carré comme nous l'avons vu dans son argumentation précédente. Y conclut que le recouvrement n'est pas possible pour les carrés pairs privés d'une case et possible pour les carrés impairs privés d'une case sans se préoccuper de la position du trou; une façon d'investir la conjecture formulée à la séance 1.

J, M et R formulent aussi la conjecture Pnt (J (S1 21 : 13), M (S1 15) et R (S1 4 :12)).

Conjecture mixte, à la fois sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension (Pm)

Cette conjecture est formulée par L (S1 20 : 21).

c) Des réajustements dans les argumentations des élèves et la systématisation des cas

L'interaction avec le chercheur permet à l'élève F de changer de point de vue. Il s'aperçoit qu'il y a des cas (positionnement de la case bouchée) où le recouvrement n'est pas possible. En effet, F avait à se prononcer sur une prédiction formulée par un élève de secondaire 1 (d'accord ou pas d'accord, si tu n'es pas d'accord qu'aurait-il dû

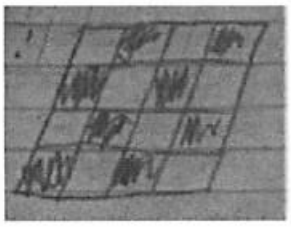
[133] Journal du chercheur.

écrire). La prédiction est la suivante : si on bouche une case d'un carré impair, on peut toujours le recouvrir avec des dominos.

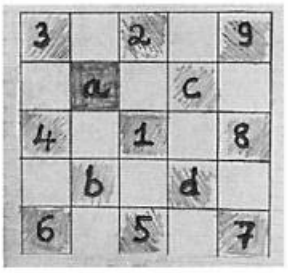
F : Je dis non
Ch : Tu as dit pas d'accord
F : Car il y a des cas où c'est possible et d'autres impossible
Ch : Ok, c'est bien (S2 20 : 25 à 35 V1)

Finalement F trouve les cas où le recouvrement est possible (voir productions ci-dessous). Il arrive à la fin à une systématisation des cas qui fonctionnent et des cas qui ne fonctionnent pas (énumération de tous les cas possibles ou non), qui s'appuie en cours de route sur une exploration qui met en jeu une *déduction* : à partir de a, pour lequel il a visualisé que le recouvrement est possible, il en déduira b, c et d. En sachant que ça fonctionne pour 1 (il visualise vite dans ce cas que le recouvrement est possible) il en déduit les 3 autres (2, 3 et 4) puis 5, 6, 7, 8 et 9.

Recouvrement non possible



Recouvrement possible

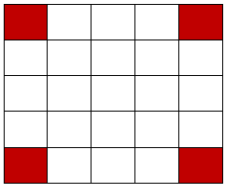


Pour A et B, ce sont des moments de doute qui provoquent un certain réajustement à partir de la confrontation de deux points de vue [carré 8 x 8 privé d'une case L2C2[134], l'un pense que ça marche, l'autre non]. De plus, l'interviewer sème un doute : « moi je pense que ça ne va pas marcher toujours ». Une intervention qui provoque un déséquilibre. Ils vont dès lors poursuivre l'exploration. Au préalable, les élèves ont

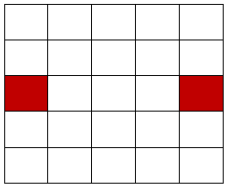
[134] Ligne 2 et colonne 2.

essayé plusieurs possibilités. B essaie la position (a) qu'approuve A, et A essaie la position (b) (voir dessins ci-dessous) qui marchaient toujours, les confortant dans leur hypothèse en quelque sorte. Le doute semé par l'interviewer les conduira à trouver un contre-exemple (dessin (d)).

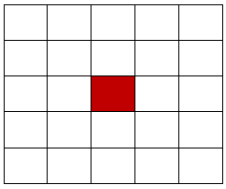
(a) Les quatre coins



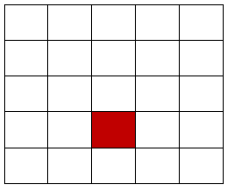
(b) Les 2 sur les côtés



(c) Le milieu



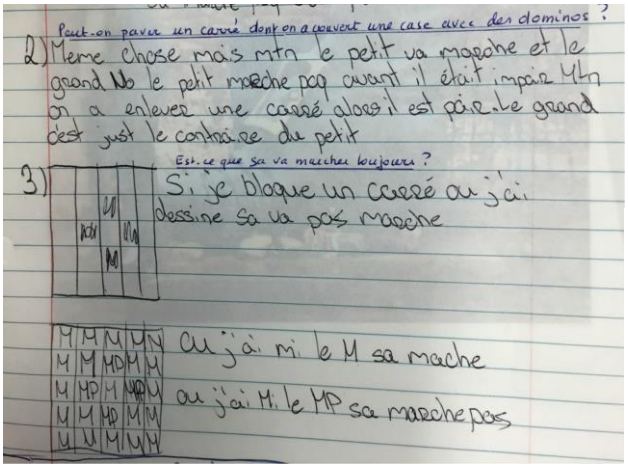
(d) Une position qui ne fonctionne pas

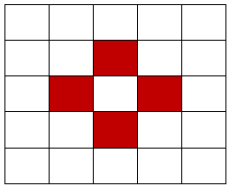


Le quatrième dessin apporte un *contre-exemple* et la déduction qui conduit aux autres cas. Cette exploration n'est pas faite au hasard ; elle vient d'une *déduction* à partir des cases des quatre coins, des deux cases bouchées sur le côté.

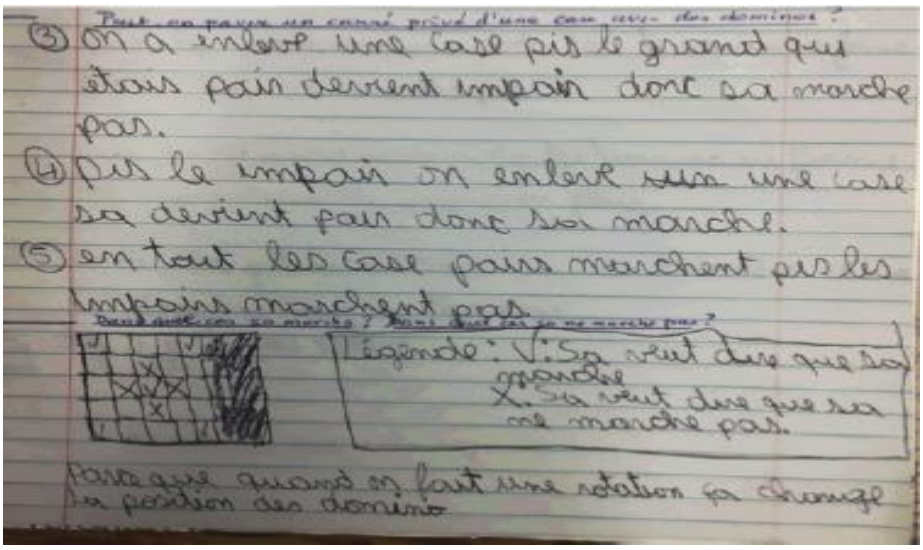
Après avoir trouvé une position qui ne fonctionne pas, A repère vite les autres positions possibles qui ne fonctionnent pas sans faire le pavage. B parlera de rotation pour faire un lien avec ce qu'ils font au cours de mathématiques. Finalement, A met en évidence la systématisation de tous les cas possibles et non possibles (voir production de A ci-dessous). En revanche pour l'élève B, il n'y a pas une systématisation de tous les cas possibles (voir production de B ci-dessous).

Production de A



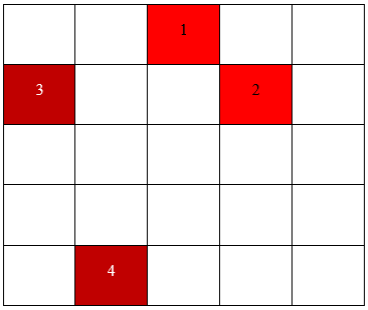


Production de B

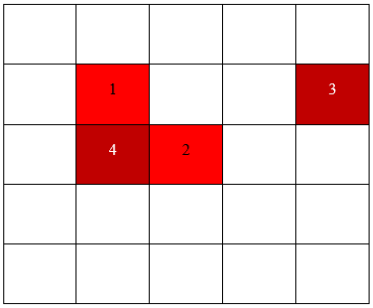


Dans le cas de la dyade J et L, en explorant des positions possibles de la case bouchée pour lesquelles le recouvrement est possible, J déduit la position 2 qui marche de celle de la position 1. De même, L déduit celle de 2 qui marche de la position 1. Cependant leurs stratégies ne sont pas explicites. Les positions 3 et 4 sont des positions qui ne marchent pas.

Production de Jacinthe

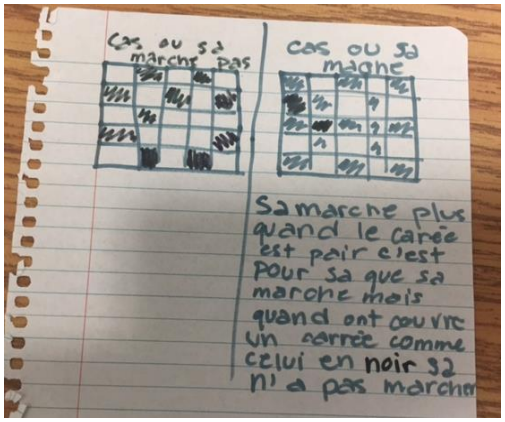


Production de Lavande



En fin de compte, les deux élèves produisent les cas où ça marche et les cas où ça ne marche pas (voir productions ci-dessous).

Production de Jacinthe

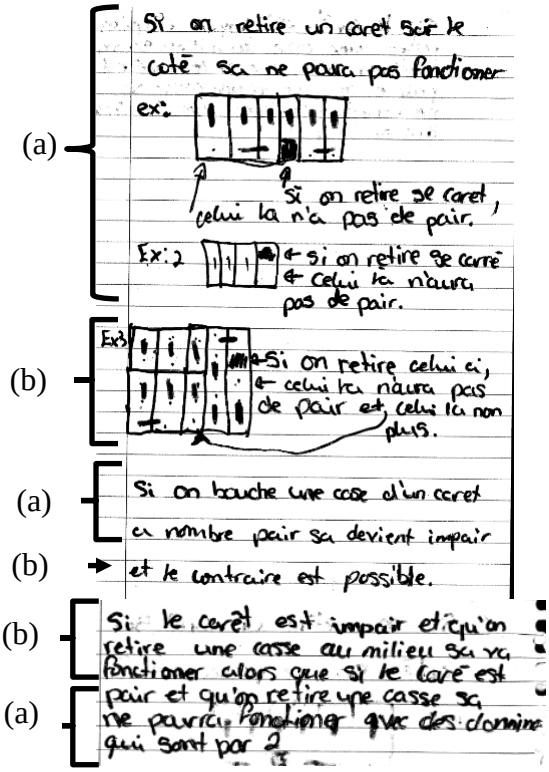


J systématise les cas qui marchent ou non. Elle oublie un cas qui marche [ligne 4 et colonne 3[135]].

Elle *détermine les conditions de validité* et exclut les carrés pairs. De plus, elle *exemplifie un cas où ça ne marche pas.*

[135] La lecture des colonnes se fait de la gauche vers la droite.

Production de Lavande



L trouve quelques cas qui fonctionnent puis les carrés impairs. Elle généralise dans le cas du carré pair (ça ne fonctionne pas).
(a) Conjecture générale
Carré pair ça va fonctionner parce que le nombre devient impair, un réinvestissement de connaissances antérieures.
Argumentation à l'appui avec des exemples (pas de compagnon reste 1 case).
(b) Généralise, pour un impair c'est possible].

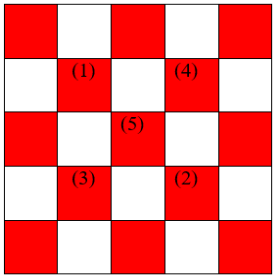
Au temps 1, C n'a émis aucune conjecture. Rappelons que C et R étaient sur la conjecture portant sur le nombre de cases au complet (voir temps 1 et 2). L'idée des deux élèves est que si on enlève une case au carré 7 x 7 (49), on a un nombre pair (48) et que si l'on désire le recouvrir à l'aide de dominos, ça marche. Le réajustement dans la conclusion des élèves C et R vient de l'idée du chercheur qui propose aux deux élèves de boucher la case de la ligne 2 et de la colonne 1 pour vérifier si l'on peut recouvrir le carré 7 x 7. Une interaction qui met les élèves dans une situation de déséquilibre qui les conduit à se rendre compte que l'on ne peut recouvrir le carré 7 x 7 dans cette position.

En fin de compte, C réussit à montrer que lorsqu'on bouche les carrés dans les coins, le recouvrement est possible pour le carré 5x5. À partir du résultat obtenu d'un coin du carré 5 x 5, C réussit à déduire les résultats pour les trois coins du carré 7 x 7 sans expliciter sa stratégie. R croit que si l'on bouche une case n'importe où, le recouvrement est toujours possible. Selon elle, le recouvrement est possible si le nombre de cases est pair et n'est pas possible si le nombre est impair et affirme qu'il y a des cas où ce n'est pas possible comme en témoigne sa conclusion ci-dessous :

> « Moi je dit que sa dépend de le nombre de carré qu'il y a parce que si c'est pair sa va fonctionner mais si c'est pas pair sa ne va pas fonctionner et il y a des endroits ou ça fonctionne et d'autres ou sa ne fonctionne pas quand le nombre de carré est pair » (Production de R, p. 1).

R n'indique pas les endroits où ça ne fonctionne pas.

À la question de savoir si le recouvrement est possible pour n'importe quelle case bouchée, dans un premier temps, Y bouche la case du carré 5 x 5 aux positions 1, 2, 3, 4 et 5 et vérifie à chaque fois si le recouvrement est possible (dessin ci-dessous). Par la suite, le chercheur lui demande de trouver les autres endroits sans manipuler (carré 5 x 5) où le recouvrement est possible après avoir bouché une case. Y réussit à trouver toutes les cases où le recouvrement du carré 5 x 5 privé d'une case est possible (voir dessin ci-dessous), une systématisation de tous les cas qui fonctionnent et des cas qui ne fonctionnent pas réalisée à partir d'une déduction par symétrie.



Y réussit à trouver toutes les cases où le recouvrement est possible pour le carré 5 x 5 privé d'une case et affirme qu'il y a des cas où ce n'est pas possible comme en témoigne un extrait de sa production :

> « Quand on bouche le petit carré [sous-entendu le carré 5x5], on peut le recouvrir de dominos mais il y a des cas ou on ne peut pas » (Production de Y, p.1).

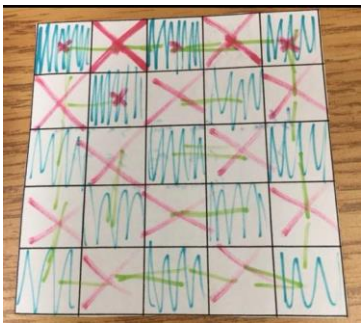
Ici, comme pour l'élève R, Y ne donne pas les cas où le recouvrement n'est pas possible.

De plus, il trouve par déduction que le résultat est le même pour le carré 7 x 7, à partir du carré 5 x 5 sans doute parce que ce sont des carrés dont les côtés sont impairs.

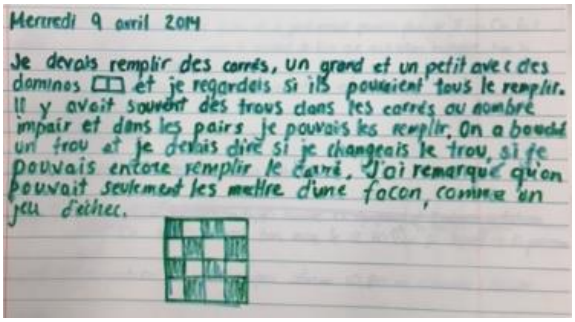
Dans le cas du carré 5 x 5, M réussit à trouver toutes les cases qui peuvent être bouchées pour que le recouvrement soit possible (voir productions de M ci-dessous). Elle systématise tous les cas possibles et les cas non possibles.

Case hachurée: recouvrement possible. Croix : recouvrement non possible.

La croix : ça ne marche pas; pas de croix : ça marche.



La synthèse formulée par M en lien avec le deuxième moment se résume à travers le texte ci-dessous qui sûrement fait allusion à la situation en lien avec le carré 5 x 5 bien que le dessin ci-dessous montre le carré 4 x 4.



Mercredi 9 avril 2014

Je devais remplir des carrés, un grand et un petit avec des dominos et je regardais si ils pouvaient tous le remplir. Il y avait souvent des trous dans les carrés au nombre impair et dans les pairs je pouvais les remplir. On a bouché un trou et je devais dire si je changeais le trou, si je pouvais encore remplir le carré. J'ai remarqué qu'on pouvait seulement les mettre d'une façon, comme un jeu d'échec.

4.1.2.3 Qu'est ce qui se dégage de notre analyse?

Le recouvrement par les élèves d'un carré privé d'une case à une position donnée à celui d'un carré privé de n'importe quelle case a montré que :

-Tous les élèves réinvestissent les connaissances antérieures en lien avec le pavage d'un carré avec des dominos (recouvrement non possible pour un carré pair et possible pour un carré impair sans se préoccuper de la position de la case bouchée). Il y a des similitudes au niveau des argumentations des élèves : réinvestissement des connaissances antérieures.

- Les élèves F, A, J, M et J systématisent les cas possibles et non possibles. En revanche pour B, C, L et R il n'y a pas de systématisation de tous les cas possibles. Ces élèves (sauf R) vont trouver plusieurs cas qui fonctionnent ou non, sans toutefois systématiser tous les cas. Ce travail passe par le recours à des contre-exemples, et ce même s'il n'y a pas systématisation (exemple : A, B, J, L), une déduction des autres cas à partir de certains cas (F, A, B, J, Y, L, M). On détermine les conditions de validité (J), et on généralise la conclusion aux carrés pairs (J et L) ou 7 x 7 (C). Cette analyse fait aussi ressortir la richesse de l'activité mathématique mise en œuvre par les élèves. Les interactions avec le chercheur ont conduit aux changements de point de vue des élèves F, A, B, C et R.

-Les élèves évoluent dans leurs stratégies comme nous l'avons souligné dans le 1er temps de la deuxième partie. Par exemple, L travaille sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension d'un côté. En revanche, J, M, Y travaillent sur le nombre total des cases et non plus sur la dimension d'un coté. F, J et Y utilisent l'approche mentale contrairement à la séance 1 où J et Y procédaient par recouvrement complet et F par amorce de recouvrement et anticipation.

Le tableau ci-dessous résume ce qui se dégage de notre analyse à la deuxième étape de la première situation.

Tableau 4.2 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré privé d'une case avec des dominos

Analyse 1er temps[case spécifique bouchée]

Recouvrement d'un carré avec une case spécifique bouchée	**Mathématiques des élèves au 1er temps**	**Élèves**	**Évolution des mathématiques des élèves (par rapport à la 1ère question : pavage de carrés avec des dominos)**
Stratégies	(M) Approche mentale du problème	F, J et Y	Au préalable, J et Y avaient eu recours à RC (recouvrement complet), sauf F (où on observait déjà une anticipation).
	(CA) Réinvestissements des connaissances antérieures : transformation du nombre (cases du carré ou d'un côté) : nombre impair (pair) devient pair (impair).	F, L	Au préalable, F avait recours à RA et L avait recours à RC.
	(RA) Amorce de recouvrement, arrêt et anticipation	A	A a déjà eu recours à cette stratégie. Elle reste inchangée.
	(RC) Recouvrement complet	B, C, R, M	Les quatre élèves ne changent pas de stratégie.
Conjectures	(Pm) Conjecture mixte (à la fois sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension)	L	Restructuration de la conjecture initiale [La parité ou l'imparité portait sur le nombre de cases au complet]
	(Pnt) Conjecture basée sur la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet	A, B, C, F, J, M, R, Y	J, M, Y travaillent sur le nombre total des cases et non plus sur la dimension C n'avait aucune conjecture et en formule une
Argumentations	géométrique et numérique sur des cas spécifiques (Ang)	L	Nouvelle argumentation. Au préalable, idée de divisibilité par 2
	Générale : centrée sur la transformation (du carré plein au carré privé d'une case) (At)	J	Nouvelle argumentation. Au départ, argumentation reposant sur la possibilté ou non de rejoindre le nombre de cases en comptant par 2.

Tableau 4.3 Analyse des « mathématiques des élèves » dans la tâche du pavage d'un carré privé d'une case avec des dominos

Analyse 2e temps : extension à n'importe qu'elle case bouchée

Recouvrement d'un carré quel que soit l'endroit où la case est bouchée	**Mathématiques des élèves au 2e temps**	**Élèves**	**Évolution des mathématiques des élèves (par rapport au recouvrement d'un carré privé d'une case spécifique)**
Stratégies[136]	(M) Approche mentale du problème	F, J et Y	La stratégie est la même que celle au 1er temps.
	(CA) Réinvestissements des connaissances antérieures : transformation du nombre (cases du carré ou d'un côté), nombre impair (pair) devient pair (impair).	A, B, C, F, L, R, Y, M	Seuls deux élèves se retrouvaient là précédemment (F et L), les autres ayant eu recours à un RC (B, C, R, M), à RA (A), où à une démarche mentale (J, Y).
	(RC) Recouvrement complet	J, L, C, B	J avait précédemment une démarche mentale et L avait fait appel aux connaissances antérieures (CA).
Conjectures	(Pm) Conjecture mixte (à la fois sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension)	L, C	La conjecture est la même qu'au 1er temps. C passe de Pnt à Pm
	(Pnt) Conjecture basée sur la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet	A, B, F, J, M, R, Y	La conjecture est la même qu'au 1er temps.

[136] Rappelons que plusieurs stratégies ont été utilisées au cours de ce 2e temps.

Analyse 2e temps : extension à n'importe qu'elle case bouchée (suite)

Recouvrement d'un carré quel que soit l'endroit où la case est bouchée	**Mathématiques des élèves au 2e temps**	**Élèves**
Argumentations /raisonnement à l'appui	Trouvent/exemplifient un (des) contre-exemple (s)	A, F, B, J, L, M, Y
	Déduisent d'autres cas, à partir d'un cas	A, F, B, J, L, M, Y
	Généralisent quelque chose qu'ils ont trouvé pour un carré à un autre (par exemple 5x5 à 7x7)	J, L, C
	Systématisent tous les cas possibles ou non	A, F, J, M, Y
	A recours à la conjecture (Pt) qu'elle réinvestit	R

4.1.3 Pavage avec des triminos

Les troisième, quatrième et cinquième moments de la situation portaient sur (3) le pavage de n'importe quel carré avec des *triminos* de deux formes différentes, (4) le jeu autour du pavage de *carrés et rectangles* avec des triminos de différentes formes ainsi que (5) le pavage d'un carré privé d'une case avec des triminos.

Les activités se sont déroulées par dyades (A et B, L et J, C et R, M et Y) hormis F qui a travaillé seul. À la première séance, on avait observé l'attachement des élèves au matériel dans l'exploration de la situation et parfois l'utilisation de stratégies « lourdes » (recours à un recouvrement complet). C'est ainsi que l'un des buts visés par le jeu était d'amener certains élèves (notamment B, C, R, L, J, M et Y) qui avaient eu recours à un RC au 1er temps, à se détacher du matériel et d'une démarche empirique pour forcer une représentation mentale et une anticipation de ce qu'ils pouvaient faire. En ce sens, le jeu de prédictions constituait un appui adéquat dans la situation proposée aux élèves. Nous avons aussi voulu voir si les élèves changeraient de stratégies et

énonceraient de nouvelles conjectures (en lien cette fois avec un pavage avec des triminos de formes différentes). Notre analyse des deuxièmes et troisièmes séances nous a permis d'une part d'observer le détachement des élèves du matériel pour certains, et cela de façon prononcée au cours du jeu, et d'autre part la confrontation des points de vue entre élèves qui a favorisé des discussions fructueuses aussi bien entre eux qu'avec le chercheur. C'est ce que nous allons voir dans les sections suivantes. Les axes principaux de notre analyse tournent autour des stratégies, des conjectures et des argumentations des élèves (sur certains moments). Nous abordons donc pour chacun des aspects les 3 moments, de manière à percevoir l'évolution.

4.1.3.1 Au 1er temps : pavage de n'importe quel carré avec des triminos

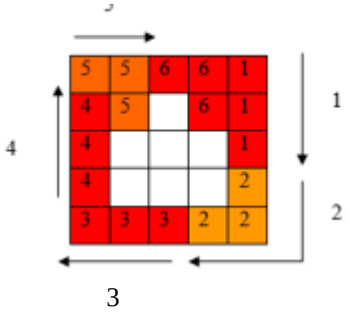
a) Stratégies des élèves

Trois sortes de stratégies utilisées par les élèves ont été identifiées à savoir la stratégie 1, nouvelle, recouvrement en construisant une forme intermédiaire (RFI), la stratégie 2, recouvrement complet (RC) et la stratégie 3, amorce du recouvrement, arrêt et anticipation (RA).

Stratégie 1 : recouvrement en construisant une forme intermédiaire (RFI) (A, L, J)

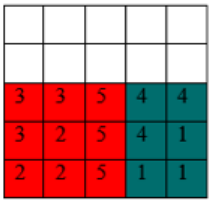
L'élève A a utilisé cette stratégie. Il amorce le recouvrement en prenant les deux triminos (voir figure 1er essai), s'arrête et anticipe ce qui va se produire. Au premier essai, A interprète la consigne comme le recouvrement à l'aide de deux formes différentes.

Production de A : 1er essai



(1) Recouvrement avec un trimino en forme de rectangle.
(2) Recouvrement avec un trimino en forme de L.
(3) Recouvrement avec un trimino en forme de rectangle.

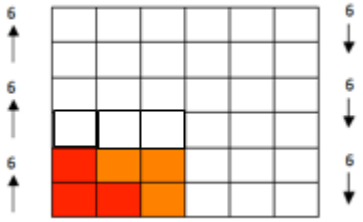
Production de A : 2e essai



Par la suite, A fait apparaître une forme intermédiaire qui lui sert de base pour voir si ça fonctionne ou non (voir figure, 2e essai) : rectangle formé par les triminos 1 et 4, rectangle formé par les triminos 2 et 3; ceci sera confirmé par la suite.

Une stratégie confirmée pour A par la suite sur un problème qui a été interprété cette fois comme recouvrement à l'aide d'un même type de trimino (voir figure ci-dessous). A repère une régularité (forme intermédiaire rectangle de 6 cases) qu'il répète. C'est d'ailleurs ce qu'il dit à l'élève B.

> A : Check ça, ca fait genre, un, deux, trois/ genre six, six, six, six six. six (S2 23 : 47)



Cette stratégie semble être utilisée aussi par les élèves L et J pour le carré 6 par 6 en procédant comme elles le décrivent dans le verbatim ci-dessous.

> J : J'ai essayé avec comme ça là [J désigne le trimino en forme de L] et ça a marché parce que l'aire du carré c'est 36 (S2, 16 : 02 à 10).
> Ch : 36
> J : Puis c'est comme j'ai rentré comme ça, j'ai fait comme un rectangle de 6 puis là j'ai fait trois fois et ça a marché (S2, 16 : 11 à 28).

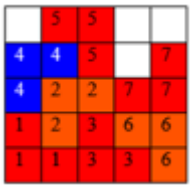
> Ch : Et puis ça a marché. Ok! Est-ce que tu as quelque chose à dire L? Elle a dit que ça marche pour ce type de trimino en forme de L et puis ça marche avec l'autre [sous entendu trimino en forme de rectangle]. Qu'en penses-tu L?
> L : Qu'elle a raison parce que j'ai essayé avec les deux sortes de triminos. J'ai fait comme ça, avec ceux là [triminos en forme de rectangle] je les ai alignés. C'est comme si c'était séparé en deux. Il y a un côté comme ça et l'autre côté est identique à l'autre et puis ça fonctionne. Toutes les cases ont au moins un domino. Dans celui-là aussi ça fonctionne parce que j'ai essayé avec ça comme ça, comme ça, comme ça, comme ça. Puis ça rentre (S2 16 : 50 à 17 : 30).

Pour les autres carrés 5 par 5 et 8 par 8, J et L ont utilisé le recouvrement complet au cours de l'exploration en ayant recours à la forme intermédiaire (voir production de J plus loin).

Stratégie 2 : recouvrement complet (RC).

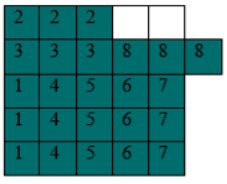
Cette stratégie est utilisée par les élèves B, C, J, L, M, R et Y. Ces élèves procèdent par un recouvrement complet avec le matériel, s'arrêtent quand il ne reste qu'un espace ou des espaces à couvrir. Un besoin de le faire tout au long avec le matériel qui demeure prégnant (pour pouvoir conclure). Par exemple, le recouvrement complet du carré 5 x 5 par l'élève B : à partir des cases qui restent à la fin, il voit dès lors (mais seulement à ce moment-là) que le carré 5 x 5 ne peut être recouvert, qu'il resterait une case vide (voir figure).

Production de B : 1er essai

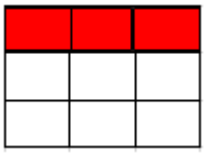


(1) Recouvrement avec un trimino en forme de L

Production de B : 2e essai



B repère un cas spécifique (carré 3x3) qui fonctionne pour un type de trimino (trimino allongé), une stratégie de recouvrement (3, 3, 3).

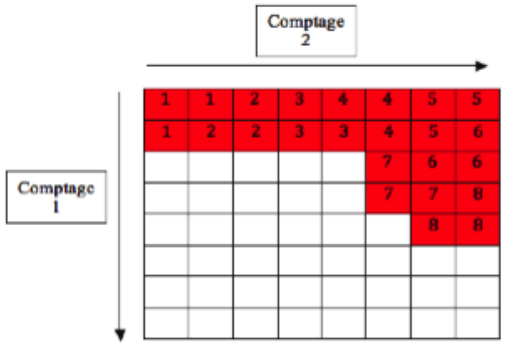


Les stratégies des élèves permettent de mettre en évidence l'interprétation de chacun du problème : A, C, L, J, M, R et Y recherchent un carré pour lequel le recouvrement fonctionnerait pour les deux types de triminos. B et F recherchent un carré pour lequel le recouvrement fonctionne pour un type de triminos ou l'autre. Notons que F n'utilise pas la stratégie de recouvrement complet.

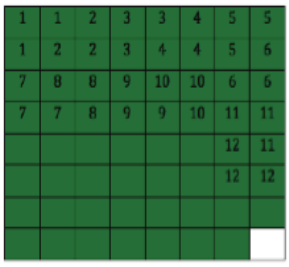
L'exploration par les élèves a aussi montré qu'une élève arrêtait le recouvrement avec le matériel quand les triminos étaient insuffisants, la forçant à réfléchir et partant à trouver un autre support.

Analysons par exemple ce que fait la dyade L et J. L procède par un recouvrement partiel et compte par 2 verticalement puis horizontalement par la suite (voir figure). En revanche, J utilise la stratégie RC consistant à recouvrir complètement le carré 8 par 8 jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une case (voir figure). Il en est de même de M, Y, C et R tel que nous l'avons déjà mentionné précédemment.

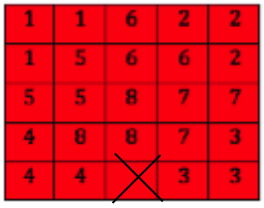
Production de L



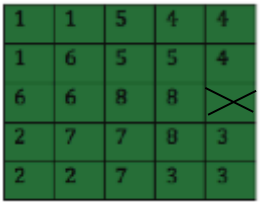
Production de J



Production de M [le pavage est ici abordé par les coins puis on complète]

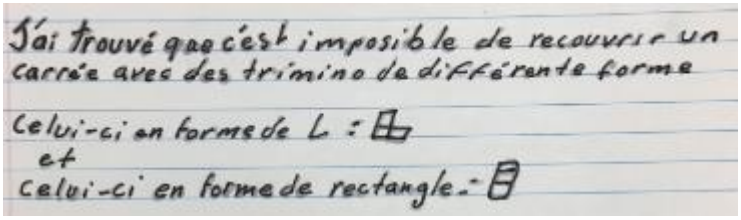


Production de Y [Idem]

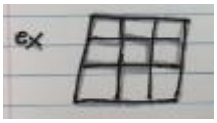


Stratégie 3 : amorce du recouvrement, arrêt et anticipation (RA) (F)

F utilise cette stratégie et affirme que c'est impossible de recouvrir un carré avec des triminos de forme L ou forme rectangle comme en témoigne sa conclusion ci-dessous.



Il donne un exemple du carré 3 par 3 pour montrer que le recouvrement n'est pas possible avec le trimino en forme de L.



Cependant, il ne conclut pas pour dire que le recouvrement est possible pour le trimino en forme de rectangle. À ce stade, les conjectures ne sont pas formulées par les élèves.

b) Conjectures au 1er temps : pavage de n'importe quel carré avec des triminos

Au 1er temps, les élèves n'énoncent pas de conjecture.

c) Argumentation au 1er temps : pavage de n'importe quel carré avec des triminos

Les arguments de A et B sont centrés sur le reste (il reste une case) après essai (dans un cas, A, recouvrement avec une forme intermédiaire amorcée puis anticipation; dans l'autre cas, B, recouvrement complet). M et Y mettent aussi à l'avant l'argument sur le reste de cases pour le recouvrement avec des triminos en forme de L et en forme de rectangle. Il en est de même de L et J dont les arguments reposent aussi sur le reste [explicité ici dans un registre numérique] comme en témoigne le verbatim suivant :

> L : Pour ça là [sous-entendu carré 5x5] ça ne fonctionne pas parce que c'est comme l'aire du carré c'est 25. Et puis quand tu rentres ça, quand tu les rentres c'est comme ça fait trois, trois, trois, trois, trois, trois, …. il va rester genre un carré.
> Ch : Il va rester un carré. Qu'as-tu trouvé [le (la) chercheur (e) s'adresse à J] est-ce que pour toi, ça fonctionne ou ça ne fonctionne pas pour ce genre de triminos, c'est ça? [triminos en forme de rectangle].
> […]
> J : Moi j'ai fait avec cette sorte de trimino là [sous entendu en forme de L] puis ça faisait ça comme puis ça arrive ça fait tout ça, en arrivant ici ça m'a juste laissé un carré de vide, parce que 25 divisé par 3 ça ne se peut pas. Donc ça n'a pas marché. (S2 9 : 32 à 10 : 36 V2)
> L : J'ai trouvé premièrement dans ma tête parce que avec la logique : 25 divisé par 3 ça se peut pas. J'ai trouvé le problème dans ma tête en premier puis en manipulant j'ai pu vérifier. (S2 10 : 55 à 11 : 13 V2)

L et J utilisent ainsi l'argument sur la divisibilité ou non par 3 de l'aire du carré trouvée. Par exemple, L affirme que le recouvrement du carré 8 par 8 n'est pas possible avec le trimino en forme de L parce que 64 n'est pas divisible par 3. Quant à J, son argument repose sur la parité pour certains cas et sur la divisibilité par 3 pour d'autres cas. Ainsi, selon J, comme 64 est un nombre pair, le recouvrement n'est pas possible avec de triminos. Aussi, J affirme que le recouvrement du carré 5 par 5 par le trimino en forme de L n'est pas possible du fait que 25 n'est pas divisible par 3. J prouve que 36 est divisible par 3 et par conséquent le recouvrement du carré 6 par 6 est possible par des

triminos en forme de L. Pourtant ce n'est pas le cas pour le carré 3 par 3 comme le relève J (idée ici d'un contre exemple).

4.1.3.2 Au 2e temps : pendant le jeu (triminos)

a) Stratégies des élèves

Le déroulement du jeu nous a permis de forcer l'explication des stratégies des élèves. Toutefois, nous avons observé que les stratégies des élèves étaient plus significatives à travers les gestes qu'à travers leurs arguments. Nous avons aussi noté des avis contradictoires entre les dyades notamment A et B ainsi que C et R. Nous y reviendrons dans les lignes qui suivent.

À cette étape, le problème est approché mentalement puisqu'on demande à l'élève de dire si cela va fonctionner ou non (en pigeant la forme) sans le faire. Toutefois, dans le jeu, après avoir anticipé, les élèves reviennent en expliquant leurs stratégies : pourquoi ça fonctionne ou non. On a en fait quatre stratégies : RD. RFI, RA et RC.

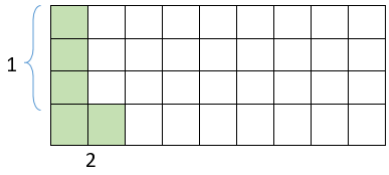
Stratégie RD : recouvrement mettant à profit la dimension (A, B, R, Y)[137]

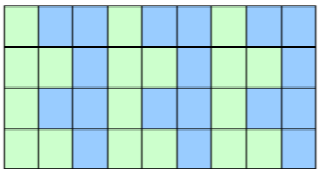
Élèves A et B (Recouvrement à l'aide des triminos en forme de L et allongé)

Pour B, le recouvrement ne se fait plus juste sur une base empirique, purement aléatoire. L'idée de la dimension qui est répétée. Le 3 dans le cas du trimino allongé et dans l'autre la dimension du rectangle qui est répétée.

Par exemple, dans le cas du rectangle 9x4 (pigé dans le jeu), B systématise le recouvrement en mettant à profit la dimension 3 dans la largeur 4 (le trimino formé de 3 cases se répétant peu importe l'autre dimension), puis l'autre dimension 9 (le trimino rentrant dans la longueur qui reste). Cette stratégie est confirmée par B pour le trimino en forme de L (fait apparaître aussi une forme intermédiaire).

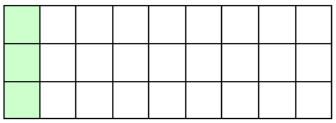
[137] A et B pour les triminos des formes L et allongée et R et Y pour le trimino en forme allongée.

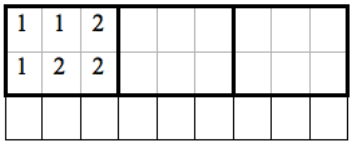




B confirme aussi sa stratégie pour le rectangle 9 x 3 (le trimino entre sur la largeur, 3, il s'agit juste de le répéter peu importe la longueur ça va fonctionner, voir dessin ci-dessous).

Dans le cas du trimino en forme de L, B explicite sa stratégie par un certain positionnement côte à côte : il recouvre les deux premières rangées du rectangle, en positionnant les triminos pour couvrir un rectangle 3 x 2, encore 3 x 2, 3 x 2 et il lui reste une rangée vide qu'il ne peut recouvrir (voir dessin ci-dessous). Il en conclut que le recouvrement dans ce cas n'est pas possible.

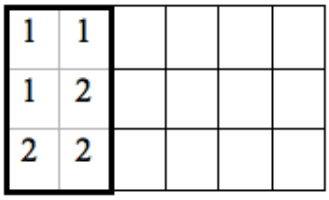




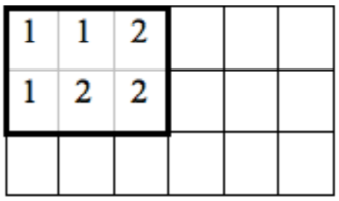
Dans le cas du domino en forme de L, c'est la visualisation à l'appui qui conduit A à dire que ça marche (il repère un rectangle 2 x 3 que l'on peut rentrer dans 6 x 3).

Dans l'autre cas, B voit un rectangle 3 x 2 et pense alors qu'il reste une rangée non-comblée.

Visualisation de A



Visualisation de B



Des avis contradictoires pour le recouvrement du rectangle 6 x 3 (S2 14 : 13, vidéo 2) vont forcer une explicitation des stratégies, et qui vont donner lieu par la suite à une évolution.

Élèves R et Y (Recouvrement à l'aide du trimino allongé uniquement)

Pour le rectangle 4 x 3, R affirme que ça fonctionne pour le trimino en forme de rectangle (forme allongée) et non possible pour le recouvrement en forme de L. Sans doute, pour le recouvrement en forme de rectangle, R visualise 3, 3, 3, 3. Elle met à profit la dimension. Elle explique sa stratégie de la façon suivante :

> […]
> Ch : vous avez visualisé ? Est ce qu'il y a une façon que vous avez utilisée dans vos têtes pour savoir à un moment donné que ça marchait et à un moment donné ça ne marchait pas ?
> R : je regarde puis quand je vois trois, je sais que ça donne trois, trois, trois, trois (S2 10 : 42 à 11 : 12).

C'est la même stratégie utilisée par l'élève Y reposant sur la visualisation du 3, sur le comptage par 3 qui se répète, comme le montre l'extrait du verbatim ci-dessous :

> Ch : Tu veux convaincre un ami que ça va fonctionner; sans le faire au complet, qu'est ce que tu vas lui dire de regarder? […]
> Y : Je lui conseillerai de ne pas regarder les nombres pairs et impairs, de regarder genre dans les rangées; s'il y en a 3 et ça continue, ça va marcher. (S2 01 : 07 à 53 V3**).**

Stratégie RFI : Recouvrement forme intermédiaire (A et B)

Les élèves A et B réinvestissent l'idée d'une forme intermédiaire qui apparaît dans le jeu en prenant en compte la flexibilité dans la façon de voir.

Stratégie NI : non identifiée

Il n'a pas été possible d'interpréter les stratégies des élèves J, L et C qui n'étaient pas claires.

Stratégie RC : recouvrement complet du carré (R et Y pour le trimino en forme de L et C et M pour les deux formes de triminos)

Élève R et Y

Les stratégies de R et Y donnent l'impression qu'ils procèdent par recouvrement complet cela transparaît dans l'extrait du verbatim suivant :

> Ch : Tu comptais par trois. Et pour le trimino en L, c'est ce que tu faisais aussi ?
> R : J'essayais de mettre dans tous les sens (S2 11 : 17 à 26)

Dans la même veine, Y explique sa stratégie :

> Ch : Qu'est ce que tu entends par visualiser les formes?
> Y : Mettre L là, mettre L là jusqu'à ce que tu finis et il reste 2 carreaux alors ça ne marche pas et s'il n'en reste pas alors ça marche (S2 02 : 50 à 03 :10 V3)

Quant à M, elle rejoint Y dans sa stratégie de recouvrement complet jusqu'à ce que le recouvrement soit possible ou non.

Élève C

La stratégie de C semble prendre appui sur le recouvrement complet dans la visualisation du 3 de l'élève comme elle l'exprime à travers cet extrait :

> C : Je faisais trois fois trois fois trois fois trois fois trois fois trois.
> Ch : Ah tu faisais, trois fois trois fois, OK (S2 12 : 19 à 26).

b) Conjectures au 2e temps : pendant le jeu (triminos)

Les élèves n'énoncent pas de conjectures pendant le jeu, seule M exprime sa conjecture ci-dessous après la question du chercheur (une conjecture (Pnc) portant sur la parité/l'imparité du nombre de carrés sur un côté).

> Ch : tu veux convaincre un ami, j'ai cette forme [rectangle 4x3] ça va fonctionner ou ça ne va pas fonctionner. Qu'est ce que tu devrais regarder?
> M : on peut savoir le nombre de carrés qu'il y a par longueur, largeur, des triminos c'est un nombre impair et si on obtient un nombre pair, ça peut aider. Si c'est pair [M pointe le carré format papier] et si ça [sous entendu triminos forme rectangle] c'est impair ça peut pas marcher (S2 23 : 34 à 56 V2).

Elle met ainsi en évidence que si le nombre sur le côté est pair, je sais que cela ne sera pas possible de recouvrir à l'aide d'un trimino (qui lui comprend un nombre impair de cases).

c) Argumentation au 2e temps : pendant le jeu (triminos)

À la question de savoir « comment vous avez fait pour savoir que ça marchait et que ça ne marchait pas? », les réponses de R et C montrent qu'elles s'appuient sur une certaine visualisation (S2, 10 : 42) :

> C : On a visualisé.
> Ch : vous avez visualisé? Est-ce qu'il y a une façon que vous avez utilisée dans vos têtes pour savoir à un moment donné que ça marchait et à un moment donné ça ne marchait pas?
> R : je regarde puis quand je vois trois, je sais que ça donne trois, trois, trois, trois.
> Ch : Ah quand tu vois trois, trois, donc chaque fois tu comptais?
> R : Oui (hochement de la tête).
> Ch : Tu comptais par trois. Et pour le trimino en L, c'est ce que tu faisais aussi ?
> R : J'essayais de mettre dans tous les sens
> Ch : Dans ta tête tu essayais de mettre dans tous les sens pour savoir si ça marchait? Et toi C, comment tu faisais pour savoir que ça marche et qu'à un moment donné ça ne marche pas ?
> C : Mais des fois je faisais des images dans ma tête ?
> Ch : Des images dans ta tête ?
> C : J'essayais de voir si ça peut marcher avec ça [sous entendu trimino en forme L]
> Ch : Pour savoir si ça pouvait avec les triminos en L ou sous forme de rectangle si ça marche, donc des images, des images. Par exemple [le chercheur présente à

> C le rectangle 6 x 4], quand tu dis, je faisais des images, tu disais comment, par exemple ici?
> C : Je faisais trois, fois trois, fois trois, fois trois, fois trois, fois trois [recouvrement d'un 3 perçu dans la dimension 6x3].
> Ch : Ah tu faisais, trois fois trois fois, OK (S2 10 : 50 à 12 : 25).

M et Y à la question du chercheur vont s'appuyer, eux aussi, sur une certaine visualisation : Tu veux convaincre un ami que ça va fonctionner ; sans le faire au complet, qu'est-ce que tu vas lui dire de regarder ? Par exemple, tu veux convaincre un ami, j'ai cette forme [rectangle 4 x 3] ça va fonctionner ou ça ne va pas fonctionner. Qu'est-ce que tu devrais regarder ?

> Y : tu regardes le nombre de formes, la forme.
> Ch : la forme et comment la forme ? est-ce que ça marche toujours pour tous les carrés, est-ce que ça marche toujours pour tous les carrés pour tous les rectangles ?
> M et Y : non.
> Y : je lui conseillerai de ne pas regarder les nombres pairs et impairs, de regarder genre dans les rangées; s'il y en a 3 et ça continue, ça va marcher.
> Ch : et s'il y en a pas trois, par exemple ici (rectangle format 6 x 4) ?
> Y : pour ça, je lui dirai de visualiser les formes.
> Ch : qu'est-ce que tu entends par visualiser les formes ?
> Y : mettre L là, mettre L là [au hasard] jusqu'à ce que tu finis et il reste 2 carreaux alors ça ne marche pas et s'il n'en reste pas alors ça marche.
> Ch : et M?
> M : même chose. (S2 00 : 00 à 4 : 03 V3)

L'argument sur la visualisation est aussi utilisé par C et R. Pour R, elle regarde le carré et elle voit trois, trois. Elle comptait par trois (pour le trimino en rectangle). Pour le trimino en forme de rectangle, R essayait de placer le trimino dans tous les sens mentalement pour voir si le recouvrement est possible. C se fait « des images » dans sa tête pour voir si ça marche. C'est-à-dire, selon elle, faire trois fois trois.

L'explication par L pour convaincre quelqu'un que ça marche est ainsi construite, on est ici sur une argumentation numérique (le nombre total de cases est-il divisible par 3)

> Ch : si tu peux expliquer à quelqu'un pourquoi ça marche, tu lui dirais quoi?
> L : ben, je dirai que ça marche parce que c'est 36, parce que l'aire du carré c'est 36 puis 36 diviser par 3 ça donne 12 puis tu peux rentrer douze comme ça [sous-entendu triminos en forme de L] dans le carré puis tu peux rentrer douze comme ça [sous-entendu triminos en forme de rectangle] dans le carré puis il va toujours y en avoir [sous-entendu le carré sera toujours rempli] puis il ne pas y avoir un comme ça qui n'aura pas (inaudible) [sous-entendu le recouvrement est possible]. (S2 01:42 à 02 :16 V3)

Quant aux élèves A et B, à la question de savoir, si tu avais à dire à quelqu'un d'autre, pour savoir si ça marche ou pas, ce qu'ils lui diraient de regarder, A et B n'arrivent pas à formuler ce qu'ils diraient. Leur argumentation, qui repose sur une visualisation d'une forme intermédiaire qui se répète, est en acte. La prédiction se fait dans l'action, le modèle demeure implicite. Par exemple, l'extrait suivant du verbatim montre les difficultés qu'ils ont à énoncer ce qu'ils diraient.

> Ch : si vous aviez à dire à un ami pour être sûr de voir si ça marche ou si ça ne marche pas, qu'est-ce qu'il faut regarder, qu'est-ce qu'est-ce que tu devrais regarder ?
> B : la hauteur (S2 21: 41)
> Ch : la hauteur? explique-moi. Il faut que je prenne ça [La chercheure présente un rectangle en format papier à B]; Ok! Qu'est-ce qu'il devrait regarder?
> A : la position (S2 21:54)
> Ch : la position? Ok! Mais si on veut le voir vite. À la fin vous étiez bons! Qu'est-ce qu'il faut regarder?
> B : moi c'est la hauteur parce que la hauteur ça donne plus petit mais la largeur ça…[B montre par un signe que la largeur est grande]
> Ch : Ok! mais il suffit de regarder la hauteur pour être sûr que ça rentre?
> B : il y a des cases, des cas c'est la hauteur, des cas c'est la largeur, des cas c'est les deux. (S2 21 : 41 à 22 :20).

4.1.3.3 Au 3e temps : pavage d'un carré privé d'une case avec des triminos

a) Stratégies des élèves

Deux principales stratégies utilisées par les élèves ont été identifiées à savoir les stratégies RA et RC.

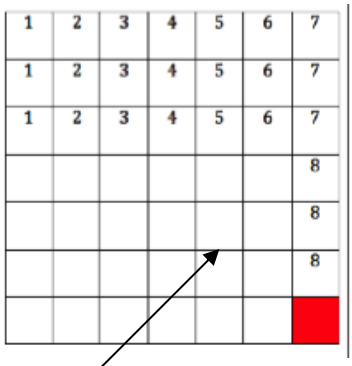
Stratégie RA : amorce de recouvrement, arrêt et anticipation (B, C, J, F, R)

B qui travaille seul (A est absent) choisit assez vite la case du milieu à boucher dans le carré 7 x 7. Il semble visualiser de chaque côté 3 cases (au-dessus de la case bouchée, en dessous, à droite, à gauche) et vérifie avec les triminos de forme rectangulaire puis affirme que ça ne fonctionne pas et qu'il va rester une case. Précisons que l'anticipation de l'élève B est fausse. Pour le trimino en forme de L, B amorce le recouvrement en commençant par les deux dernières lignes du carré 7 x 7 et conclut qu'il va « rester une rangée vide » (Production de l'élève B, p.5).

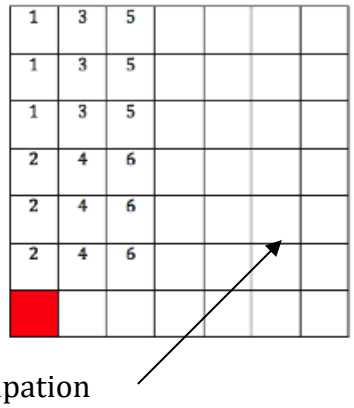
> -Avec le trimino en forme de rectangle :
> « Si on bouche le millieu d'une case de 7 par 7 Sa va pas marcher, parce qu'il va toujours rester une case »
> -Avec le trimino en forme de L :
> « Si on bouche le millieu, il va toujours rester une rangée vide »

Le recouvrement du carré 7 par 7 privé d'une case avec le trimino en forme de rectangle par les élèves C et R se fait de la façon suivante : R amorce le recouvrement en procédant par comptage à l'aide de quatre doigts [forme d'étalon représentant le trimino allongé] et affirme d'abord que le recouvrement du carré n'est pas possible. Un moment de réflexion en regardant de nouveau le carré lui permet de dire que c'est possible. Ainsi, R procède par recouvrement partiel et anticipe par la suite. Il en est de même pour C. Les dessins suivants illustrent les productions des deux élèves.

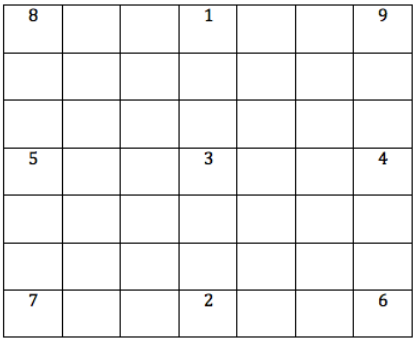
Production de R



Production de C



J recouvre partiellement le carré 7 par 7 à l'aide des triminos allongés et anticipe le résultat en affirmant que le recouvrement du carré 7x7 privé d'une case à la ligne 4 et colonne 7 est possible. Par la suite, J trouve la plupart des cases à boucher où le recouvrement du carré 7 x 7 est possible en procédant par déduction comme l'indique le dessin ci-dessous :



Stratégie RC : recouvrement complet du carré (L, M, Y)

L procède par recouvrement complet avant de conclure que le recouvrement est possible lorsque la case de la ligne 4 et la colonne 5 est bouchée. Ensuite, L trouve la plupart des cases à boucher par déduction où le recouvrement du carré 7 x 7 est possible (voir dessin ci-dessous).

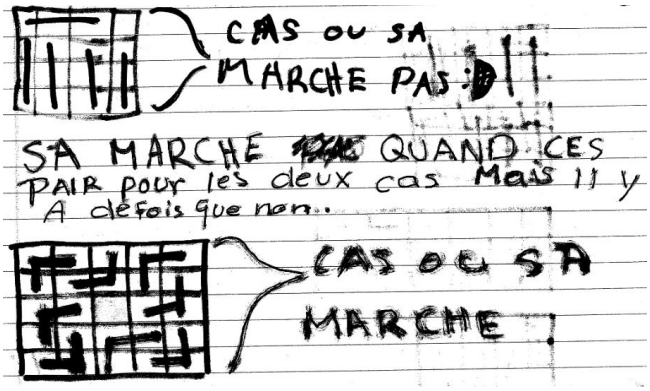
			5			
4			6			3
2			7			1

M recouvre le carré 7 x 7 et Y le carré 5 x 5 jusqu'à ce que le recouvrement soit complet et possible à l'aide des triminos en forme de rectangle pour M et en forme de la lettre L pour Y. M trouve 5 positions où on peut boucher une case qui conduisent à un recouvrement possible du carré 7 x 7. Il en est de même de Y.

Dans ce 3ème temps, pour le carré 7 x 7, cinq élèves (B, C, F, J et R) amorcent donc le recouvrement et anticipent. Trois élèves (L, M et Y) passent par un recouvrement complet pour pouvoir conclure. Plusieurs cas possibles selon la position de la case bouchée sont aussi identifiés pour 4 élèves (J, L, M, Y)

b) Conjectures au 3e temps : pavage d'un carré privé d'une case avec des triminos

Conjecture de J :



Journal du chercheur, page 6.

Seule l'élève J énonce une conjecture[138]. Toutefois, des stratégies explicitées précédemment ou subséquemment se rapprochent de conjectures même si elles ne sont pas formulées comme des conjectures: pour le triminos rectangulaire, si j'ai 3, 3, 3, … (donc un multiple de 3), ça marche.

c) Argumentations au 3e temps : pavage d'un carré privé d'une case avec des triminos

Les argumentations des élèves apparaissent aussi bien dans l'explication de leurs stratégies (visualisation sous-jacente à l'appui (B, C, R, M, Y)) que dans la formulation de leurs conjectures et son exemplification (J).

4.1.3.4 Que faut-il retenir?

Des stratégies diverses et un jeu qui a fonctionné et a forcé une décentration du matériel, une intériorisation du recouvrement (visualisation) pour certains et pour d'autres une visualisation débouchant sur différents possibles. De plus, la confrontation de point de vue a été une source de restructuration ou de réorganisation du discours des élèves. Le tableau 4.4 synthétise les principaux éléments de la section 4.3.

[138] On ne sait toutefois pas d'après sa production si la parité à laquelle réfère l'élève est liée au nombre de cases sur le côté ou au total.

Tableau 4.4 Synthèse des « mathématiques des élèves » aux différents temps de la tâche de pavage de carrés à l'aide de triminos.

Pavage des triminos	**Mathématiques des élèves**	**Codification/Raisonnement**	**Élèves**
1er temps (Carré plein)	Stratégies	**RFI** (Recouvrement forme intermédiaire)	A, J, L
		RA (Amorce du recouvrement, anticipation)	F
		RC (Recouvrement complet)	B, C, J, L, M, R, Y [J, L pour trimino en forme de L]
	Conjectures	Aucune	Tous les élèves
	Argumentations	Raisonnement centré sur le reste (Visualisation géométrique)	A, B, M, Y
		Raisonnement numérique basé sur le reste (quand on divise ou compte par 3)	J, L [pour J, divisibilité par 3 pour certains carrés]
		Raisonnement basé sur la propriété du nombre total (pair) [pour les carrés qui ont un nombre total pair]	J
2e temps (jeu)	Stratégies	**RD** (Recouvrement mettant à profit le nombre de carrés sur un côté)	A, B, R, Y (pour le trimino en forme allongée)
			A, B (pour le trimino en forme de L et allongé)
		RFI	A, B
		RC	R, Y (trimino en forme de L)
			C, M (deux formes de

			triminos, L et allongé)
	Conjectures	Conjecture portant sur la parité/l'imparité du nombre de carré sur un côté	M
	Argumentations	Argument centré sur la visualisation du 3 qui se répète	C, M, R, Y
		Regarder la parité ou l'imparité du nombre	M
		Divisibilité ou non par 3	L
3e temps (carré troué) [A absent]	Stratégie	**RA**	B, R, C, J, F
		RC	L, M. Y
	Conjectures	Des conjectures (implicites) sous-jacentes aux stratégies [un 3 qui se répète 3…]	B, C, R, M, Y
	Argumentations	Visualisation d'un 3 qui se répète sur une dimension (forme allongée); d'une forme intermédiaire	Tous les élèves trouvent plusieurs cases à boucher où c'est possible de recouvrir (carré 7x7) en ayant recours à la déduction (J, L, M, Y)

4.1.4 Évolution en lien avec les différentes variables introduites au fil du temps

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les trajectoires des élèves tout au long de la situation pavage de carrés rendant compte des stratégies adoptées et des conjectures formulées par ces derniers.

Tableau 4.5 Trajectoires des élèves dans les différentes tâches de pavage[139]

Élèves	Stratégies / Conjectures	Pavage de carré/ dominos	Pavage de carré privé d'une case/dominos	Pavage de carré à n'importe quelle case bouchée /dominos	Pavage de carré avec des triminos	Jeu triminos	Pavage de carré privé d'une case avec des triminos
A	Stratégie RA	■	■				Absent
	Stratégie RC						
	Stratégie M						
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI				■	■	
	Stratégie RD					■	
	Conjecture Pnt	■	■	■			
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm						
	Aucune conjecture R				■	■	
B	Stratégie RA						■
	Stratégie RC	■	■	■	■		
	Stratégie M						
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI					■	
	Stratégie RD					■	
	Conjecture Pnt	■	■	■			
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm						

[139] Les couleurs n'apparaissent pas sur toutes les cases. L'idée est de faire ressortir différents profils. Le pavage sur les triminos n'a pas fait l'objet de systématisation compte tenu du temps passé sur les questions précédentes [jeu et pavage à l'aide de triminos d'un carré privé d'une case].

	Aucune conjecture R				■	■	■
C	Stratégie RA						■
	Stratégie RC	■	■	■	■	■	
	Stratégie M						
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI						
	Conjecture Pnt		■				
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm				■		
	Aucune conjecture R	■				■	■
F[141]	Stratégie RA	■			■	Absent	■
	Stratégie RC						
	Stratégie M		■	■			
	Stratégie CA		■	■			
	Stratégie RFI						
	Conjecture Pnt	■	■	■			
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm						
	Aucune conjecture R				■		■
J	Stratégie RA						■
	Stratégie RC	■		■	■	NI	
	Stratégie M		■	■			
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI				■		
	Conjecture Pnt		■	■			
	Conjecture Pnc	■					
	Conjecture Pm						■

[141] Jeu non réalisé

	Aucune conjecture R				■	■	
L	Stratégie RA						
	Stratégie RC	■		■	■	NI	■
	Stratégie M						
	Stratégie CA		■	■			
	Stratégie RFI				■		
	Stratégie RD						
	Conjecture Pnt	■					
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm		■				
	Aucune conjecture R				■	■	■
M	Stratégie RA						
	Stratégie RC	■	■		■	■	■
	Stratégie M						
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI						
	Conjecture Pnt		■	■			
	Conjecture Pnc	■					
	Conjecture Pm					■	
	Aucune conjecture R						■
R	Stratégie RA						■
	Stratégie RC	■	■		■	■	
	Stratégie M						
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI						
	Stratégie RD					■	
	Conjecture Pnt	■	■	■			
	Conjecture Pnc						
	Conjecture Pm						

	Aucune conjecture R				■	■	■
Y	Stratégie RA						
	Stratégie RC	■			■	■	■
	Stratégie M		■	■			
	Stratégie CA			■			
	Stratégie RFI						
	Stratégie RD					■	
	Conjecture Pnt		■	■			
	Conjecture Pnc	■					
	Conjecture Pm						
	Aucune conjecture R				■		■

Légende
Stratégies
RA : amorce de recouvrement, arrêt et anticipation
RC : recouvrement complet du carré
M : une approche mentale du problème (non explicitée)
CA : réinvestissement des connaissances développées antérieurement
RFI : recouvrement forme intermédiaire
RD : recouvrement mettant à profit la dimension
NI : aucune stratégie/aucune conjecture : signifie que la stratégie ou la conjecture n'a pas été identifiée (non explicite).

Conjectures
Pnt : conjecture basée sur la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet
Pnc : la parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases sur un côté
Pm : conjecture mixte intégrant les conjectures Pnt et Pnc

L'analyse transversale des trajectoires d'élèves nous permet de faire ressortir différents profils au regard des stratégies mobilisées et des conjectures élaborées au cours des différents moments du processus de résolution de la situation. Nous reviendrons sur ceux-ci après avoir tracé un portrait global de ce qui ressort.

Six stratégies (RA, RC, M, CA, RFI et RD) sont utilisées par l'ensemble des élèves au cours de la résolution de la situation. La stratégie la plus utilisée est RC (7 élèves sur

9). En revanche, trois élèves utilisent une stratégie mentale (F, J et Y). La majorité des élèves (8 élèves) ont recours à différentes stratégies (au moins 3) dans les différents moments passant ainsi d'une stratégie à une autre. Enfin, deux élèves (J et Y) débutent l'exploration de la situation par la stratégie RC et associent par la suite les autres stratégies. L'élève F n'utilise jamais de recouvrement complet (RC).

En ce qui concerne les conjectures des élèves, tous les élèves utilisent la conjecture Pnt. D'aucuns associent les conjectures Pnt et Pnc aboutissant ainsi à une conjecture mixte (J, L, M et Y). Le jeu, bien qu'ayant fonctionné, ainsi que le dernier moment de l'expérimentation (pavage de carré privé d'une case avec des triminos), n'apportent pas de changement majeur à la formulation de conjectures de la part des élèves (A, B, C, J, L M, R et Y) dans au moins un moment.

Trois profils ressortent de ce regard transversal au plan des stratégies mobilisées tout au long du processus :

Un profil (en jaune dans le tableau) caractérisé par une démarche empirique de recouvrement complet du carré par l'élève pour pouvoir conclure (démarche que l'on retrouve utilisée dans 4 ou 5 des items sur 6). Il y a ici difficulté à se détacher d'une action systématique de recouvrement à l'aide du matériel ou d'un outil intermédiaire (codage rendant compte de ce qui est recouvert à mesure). Six élèves se retrouvent dans ce profil (B, C, L, M, R, Y). Il est toutefois intéressant de noter que certaines variables introduites dans cette situation contribuent à une décentration de l'élève de ce recouvrement complet (le jeu par exemple, ou encore l'introduction du carré privé d'une case).

Un deuxième profil d'élèves (en mauve) se caractérise par le recours à une représentation mentale du problème et une décentration du matériel (amorce de recouvrement qui nous permet ensuite d'anticiper, ou approche mentale du problème). Deux élèves se situent ici (F et J).

Enfin, un troisième profit d'élèves (en vert) se démarque par une flexibilité de l'élève dans le recours à différentes stratégies d'un item à l'autre (Amorce de recouvrement et anticipation, réinvestissement de conjectures énoncées précédemment, recours à une forme intermédiaire dans le cas des triminos). Un élève se retrouve là (A).

Une analyse semblable du point de vue des conjectures nous amène à identifier là aussi trois profils différents : un premier profil (en rouge) se traduisant par le recours à une même conjecture réinvestie d'un item à l'autre. Quatre élèves se retrouvent là (A,B, F. R). Un deuxième profil (en bleu), à l'opposé, témoigne d'une flexibilité de l'élève se traduisant par le recours à différentes conjectures en fonction des items (d'une conjecture énoncée sur le nombre de cases du côté à celle énoncée sur le nombre total, au recours à une conjecture mixte). Quatre élèves se retrouvent là (J, L, M et Y). Enfin un dernier profil (en gris) témoigne de la difficulté à énoncer des conjectures en général, même si l'élève (C) énonce la conjecture Pnt (pavage d'un carré privé d'une case).

Il n'y a pas de lien, enfin, entre ce qui se dégage sur le plan des stratégies et des conjectures, plusieurs élèves appartenant à des profils différents de stratégies se retrouvant dans un même profil de conjectures.

4.1.5. Retour sur les recherches portant sur le pavage de carrés

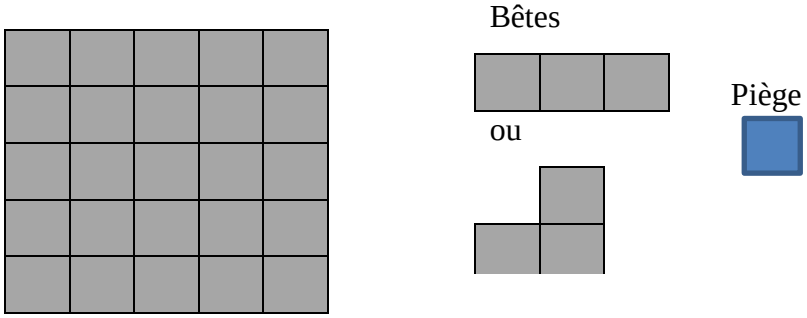
Le pavage de polyminos a été expérimenté par Grenier et Payan (1998, 2003, 2006) puis, entre autres, par Coffin et al. (2006) et Da Ronch (2019).

Le retour sur ces recherches portant sur le pavage des carrés avec la situation que nous avons décrite et expérimentée au 4.1 met l'accent sur les principaux points suivants : (1) les conditions du milieu (situation, matériel, aménagement, …) dans les différents travaux, (2) les élèves ciblés et les conditions des expérimentations, (3) les objets d'analyse de ces recherches et les méthodologies utilisées, (4) ce que ces recherches analysées mettent en évidence au regard de ce que nous relevons dans notre étude.

Les conditions du milieu mises en œuvre dans ces recherches

La situation initiale que nous avons tirée de Grenier et Payan (2003) se présente comme suit : « peut-on, à l'aide de dominos, paver un carré de côté impair, par exemple 7, privé d'une case? (la case pouvant être choisie n'importe où). La tâche est présentée sur un exemple » (voir annexe G). La tâche est donc présentée d'emblée de manière générale, dans sa version la plus complexe (carré privé d'une case, la case pouvant être n'importe où). Celle présentée par Coffin (2006, p.7) parle de pavage de « rectangles privés éventuellement d'une case, avec des triminos en L ». Dans son aménagement, elle s'intitule : la chasse à bête. En voici l'énoncé :

> Sur un territoir donné (ici un rectangle quadrillé), on dispose de « pièges ». Aucune bête ne doit pouvoir pénétrer sur le territoire sans toucher un piège. Une bête est un polymino donné formé de quelques cases.



> L'enjeu est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire (Coffin et al, 2006, p.9).

La tâche est, dans ce cas, contextualisée, et la finalité en est différente [on cherche à disposer le plus petit nombre de pièges, pour que les bêtes puissent pénétrer sur le territoire]. La finalité dans ce cas de la tâche est donc complètement différente de la nôtre. Ici, on est sur un problème d'optimisation.

La situation expérimentée par Da Ronch (2019, p. 49) est présentée comme suit : « Parviendrez-vous à paver intégralement votre cuisine par des pavés de la forme d'un domino — deux cases adjacentes d'un côté — quelle que soit la case laissée libre pour poser un évier? ». Notons que dans son aménagement, Da Ronch (2019, p.49) présente la situation ainsi : « Peut-on paver intégralement la cuisine de taille 5×5 par des dominos, quelle que soit la position de la case laissée libre pour pourvoir poser un

évier? ». On retrouve ici la situation de pavage, plus proche de la nôtre [temps 2 et 3 du pavage de carrés à l'aide de dominos] présentée toutefois sous forme contextualisée. Dans notre expérimentation, la situation de pavage de carrés dans son aménagement est présentée au départ oralement dans les mots des élèves (tu dois pouvoir recouvrir un carré sans laisser de trou,…). De plus, dans un premier temps, nous partons d'un pavage de carré plein (non privé de case). Puis, dans un second temps, de pavage de carrés privé d'une case particulière, et par la suite nous étendons à n'importe qu'elle case. Il s'agit là d'une différence importante dans les conditions du milieu mises en place avec celles mises en œuvre dans les recherches menées sur cette situation. Toutes ces expérimentations, incluant la nôtre, font appel à la manipulation de matériel. De plus, les élèves travaillent soit seuls soit en équipe. Tous ces aspects rejoignent aussi bien les caractéristiques du milieu aménagé dans notre recherche que celles des recherches analysées.

Toutefois, dans notre expérimentation, le matériel (dominos et triminos) mis à la disposition des élèves est en nombre limité en vue de permettre aux élèves de se distancer du matériel.

Les conditions d'expérimentation

Les élèves et étudiants avec lesquels ont eu lieu les expérimentations de Grenier et Payan sont ceux du primaire, mais aussi du secondaire et de l'université. L'expérimentation de Da Ronch implique les élèves de 11 à 14 ans (la catégorie d'élèves n'étant pas précisée). En revanche, celle de Coffin et al. intéresse les élèves de 12 à 15 ans présentant des troubles psychopathologiques qui sont issus de la psychiatrie. Aucune de ces études, sauf celle de Coffin et al. ne concerne donc des élèves identifiés en difficulté, et les élèves auxquels réfère Coffin et al. ne concernent pas le même type de difficultés.

Toutes ces études se sont déroulées sur un long temps, comme la nôtre : dans Grenier et Payan, sur plusieurs séances, Coffin et al. sur un trimestre à raison d'une séance hebdomadaire, l'expérimentation de Da Ronch, sur une semaine. Notre étude s'est déroulée sur trois séances à raison de 75 minutes par séance.

Les méthodologies et objets d'analyse

Les méthodologies utilisées se rapprochent toutefois davantage dans chacun des cas, de l'ingénierie didactique que du Teaching Experiment, faisant appel à des analyses a priori.

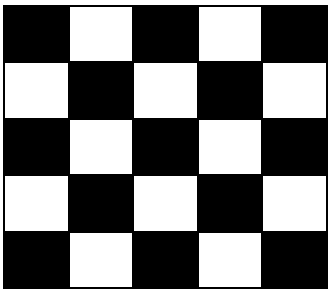
Les expérimentations de Grenier et Payan, Coffin et al et Da Ronch visent à travailler l'idée de conjectures, de contre-exemple, de condition nécessaire et suffisante, de preuve et de modélisation. Celle de Coffin et al., dans son aménagement (chasse à la bête) vise un travail sur l'optimisation. Notre objectif est quelque peu différent puisqu'il est centré sur une exploration des potentialités mathématiques des élèves tout au long de l'exploration de cette situation.

Même si la situation du pavage a fait l'objet de plusieurs expérimentations, nous disposons de très peu de données dans ces publications sur les élèves et ce qu'ils font. Nous reviendrons ici sur quelques-uns des aspects mis en évidence, et qui ne concernent pas nécessairement les élèves.

Quelques aspects mis en évidence par ces études et qu'amenons-nous de différent?

Grenier et Payan (1998, 2003), relèvent que les énoncés des problèmes sont faciles à comprendre par les élèves et qu'ils peuvent les aborder à partir d'un matériel adéquat. La dévolution des problèmes est immédiate. Nous avons été amenés à observer la même chose dans le cas de notre étude. Des stratégies en lien avec ces problèmes peuvent être élaborées à partir de cas simples tels que faire des essais pour le pavage de carrés de côtés 2, 3, 4, …. Les élèves tout au long de la situation du pavage, comme nous l'avons montré dans notre étude, ont effectivement eu recours à des exemples pour avancer dans la résolution de la situation. Cette exemplification sert d'appui à la formulation de conjectures, d'argumentations, ou à une systématisation des cas possibles ou non. Dans l'exemple du carré 5 x 5 (Grenier et Payan, 1998, p. 95), l'expérimentation permet de remarquer que certaines cases « marchent ». En enlevant l'une d'elle, le pavage est possible. La conjecture suivante est par la suite formulée : lorsque la case enlevée appartient à l'ensemble des cases noires (les « bonnes » cases),

il est possible de paver des dominos (voir dessin ci-dessous). Sinon, il semble que ce ne soit pas possible » (Grenier et Payan, 1998, p. 95). Nous nous demandons si la conjecture formulée vient des auteurs ou est le fruit de production des élèves ou étudiants. Aussi Grenier et Payan (1998, p. 95) rapportent que les stratégies de résolution, les difficultés rencontrées lors de différentes expérimentations sont assez proches. Les travaux que nous avons consultés n'indiquent pas ces stratégies et les difficultés observées non plus.



Grenier (2007, p. 5) souligne par ailleurs un élément important face à ce type de situation-problème : « en classe tout problème a une solution, souvent unique ». Or dans la situation (Grenier et Payan, 2003) mentionnée précédemment, « l'existence de solution dépend de la case manquante » (Grenier, 2007, p. 5). Ce type de situation-problème vient donc confronter l'idée que se fait l'élève d'un problème en mathématiques.

La recherche de Da Ronch (2019, p. 47) pointe de son côté « la forte correspondance qui existe entre la démarche expérimentale (DE)[…]et la catégorisation de l'activité mathématique (AM) en termes d'action de l'élève ». Cette catégorisation est décrite par l'expérimentation, le questionnement, la généralisation et la communication.

Se pose aussi, selon Da Ronch (2019, p. 48), « la question de l'écart constaté entre les connaissances a priori visées par la situation et les connaissances perçues a posteriori ». Da Ronch a noté l'engagement des élèves dans la situation de « pavage de la cuisine ». Selon lui « tous les élèves sont arrivés à prouver l'existence d'un pavage pour certaines

positions de la case laissée libre, soit en l'exhibant, soit en effectuant des rotations de la grille déjà pavée afin d'atteindre de nouvelles configurations ». Deux positions d'élèves sont relevées dans le cas où il était impossible de réaliser le pavage : (1) l'élève affirme qu'il n'y pas de solution mais ne le prouve pas; (2) l'élève n'accepte pas la situation où le pavage n'est pas possible et nie l'existence d'un tel pavage.

Cette constatation vient interroger pour nous les conditions du milieu mises en place, et l'intérêt du Teaching Experiment. En effet, les multiples aménagements apportés dans le cas de notre étude montrent comment certains aménagements ont permis un doute chez les élèves [le jeu/confrontation entre deux points de vue différents, intervention du chercheur] et un dépassement de ces positions.

Enfin, en ce qui concerne l'expérimentation de Coffin et al. (2006), les auteurs rapportent qu'après « plusieurs infructueux essais avec 7 pièges, les élèves sont convaincus que l'optimum est 8 ». Comment les élèves peuvent-ils prouver que « l'on ne peut pas avec 7 pièges »? Les auteurs affirment que, selon les élèves, « les échecs successifs suffisent et l'argumentation n'apparaît pas nécessaire, surtout pour ceux qui ont des difficultés à se dissocier de l'objet ». Dans notre étude, nous avons aussi relevé les difficultés de certains élèves à se distancer du matériel. Nous notons cependant que les potentialités des élèves ont été manifestes (stratégies, conjectures et argumentations, voir section 4.1).

4.2 Situation-problème « Pied de géant »

Le développement du « Teaching Experiment », tel qu'il s'est constitué dans l'action, rend compte, dans ce cas, de trois moments : (1) Résolution du problème du géant et production d'une affiche (destinée à d'autres élèves) rendant compte de la résolution; confrontation à d'autres affiches produites par des élèves fictifs (présentant des approches différentes) sur lesquelles se prononcer [voir annexe H-1]; (2) introduction d'une situation intermédiaire présentant une feuille dessinée où apparaissent différents personnages, une partie étant cachée pour 2 d'entre eux, l'élève doit retrouver la taille des personnages cachés partiellement. Cette situation est suivie d'une nouvelle

résolution du problème du géant [voir annexe H-2]; (3) résolution d'un nouveau problème demandant de retrouver la taille d'un panneau publicitaire (sa longueur et sa hauteur) à partir d'une photo dans laquelle on voit ce panneau (les 4 personnes d'un quatuor y sont représentés) ainsi que 3 des personnages réels photographiés devant ce panneau. [voir annexe H-3].

Nous avons décidé, après analyse de la situation intermédiaire (H-2), sous l'angle des résolutions mises de l'avant par les élèves, de ne pas retenir celle-ci. Rappelons quelle était l'intention de cette situation introduite en cours de teaching experiment. Elle souhaitait solliciter une réflexion sur la dimension proportionnelle, alors que les élèves n'avaient pas vraiment mobilisé celle-ci dans le cas du problème du géant, les rapports entre grandeurs n'ayant pas en général été pris en compte sauf exception. Or cette situation intermédiaire n'a nullement permis cette réflexion. Elle a sollicité principalement, comme on peut le voir dans ce qui suit, un jeu de devinette n'ayant souvent rien à voir avec les mathématiques.

À titre d'exemples, L suppose que Michael (un des personnages caché, dont on ne voit que les bottes) est le père de famille, et selon elle, généralement dans les familles le père est plus grand que la mère, donc il est plus grand que Françoise qui est supposée être la mère de famille (personnage sur le dessin ayant un bébé dans les bras). Ici une certaine logique du quotidien est invoquée pour estimer la taille de Michael. Dans d'autres cas (Y et M), on mesure la taille (en centimètres) sur le dessin en s'appuyant sur certains indicateurs de l'illustration, tel le fait que les pieds arrivent tous au même niveau : Albert mesure 11 cm, de la tête aux pieds, ces derniers étant au même niveau que ceux des autres personnages. Pour d'autres élèves (par exemple J), il est difficile de trouver la taille de Michael parce qu'elle ne sait pas où celle-ci s'arrête. Ce jeu de devinette, lorsqu'on entre sur des relations numériques, ce qui est extrêmement rare (cas de F et B) s'appuie sur une mise en ordre des personnages du point de vue de la taille (Barbara, Benjamin, Lise, Françoise), Albert venant en ordre après Benjamin,

Michael après Françoise (ses bottes étant plus grandes). En mesurant sur le dessin les tailles des personnages non cachés (4,5 cm, 6,5 cm, 10,5 cm et 12,5 cm), et en constatant un écart de 2cm de l'un à l'autre, les élèves en déduisent que Albert mesure 8,5cm et Michael 14,5cm.

L'analyse de la situation montre ainsi que l'entrée dans le problème relève davantage (pour 6 élèves sur 8) de la logique du quotidien ou d'indicateurs donnés par l'image (pieds au même niveau, mise en ordre des personnages). Dans le cas où les élèves entrent sur une relation numérique entre les tailles (2 élèves, F et B), cette dernière, additive, est déduite de la suite des mesures de personnages placés en ordre croissant. Il est possible a posteriori de voir les limites de cette situation intermédiaire telle que construite. On y perçoit en effet une suite de personnages, tous au même niveau d'appui, qui pousse à une mise en ordre des personnages et à une relation entre leurs tailles, davantage additive que multiplicative.

Quoi qu'il en soit, le problème du géant, redonné aux élèves en janvier longtemps après la passation de cette situation intermédiaire, viendra confirmer que cette celle-ci n'a eu aucun impact. Les solutions au problème du géant, expérimenté avant les vacances des fêtes, ne changeront pas.

Nous nous concentrerons donc dans ce qui suit sur l'analyse des « mathématiques des élèves » aux deux situations pied de géant (première situation, voir H-1) et panneau publicitaire (troisième situation, voir H-3) et leurs aménagements.

4.2.1 Résolution du problème initial du pied de géant

Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant?

Dans un premier temps, nous analysons les productions des élèves sous deux angles : le processus de résolution de la situation en dyade ou individuellement (les stratégies mises en œuvre) et les argumentations que les dyades ou l'élève apportent. Les itinéraires empruntés par les élèves nous ont permis d'identifier différentes tentatives que nous allons décrire en détails en mettant un accent sur les moments importants[142] et en illustrant au besoin leurs démarches ou leurs gestes par des photos. Les élèves étaient amenés à rédiger une première affiche sur la base de leurs productions puis une deuxième affiche après avoir analysé les solutions d'autres élèves fictifs. Ces deux activités constituaient des tâches propices pour susciter les argumentations des élèves.

4.2.1.1 Différentes stratégies ressortant de l'analyse des démarches et des affiches

Analyse des stratégies durant le moment 1 : résolution du problème et production de la première affiche

La première séance (résolution du problème initial et production de la première affiche associée) a permis de mettre en évidence six types de stratégies de résolution

[142] Notons que dans cette situation-problème, les élèves ont eu recours à plusieurs tentatives de résolution, ce qui fait qu'ils apparaissent, au plan de l'analyse, dans plusieurs stratégies.

différentes que nous présentons dans les lignes qui suivent. Notons que A est absent au moment 1.

Stratégie 1 : Géant indispensable (GI). Il y a ici nécessité pour l'élève de voir le géant (au complet) pour pouvoir trouver sa taille (Élève R)

Ainsi, au départ, R affirme ne pas comprendre la question et semble ennuyée par celle-ci comme en témoignent ses questionnements et cette communication avec sa co-équipière (C). Le malaise va peu à peu se préciser : une donnée indispensable, le géant, n'est pas là, comme on peut le voir dans ses propos

> R : *Mais je ne comprends pas la question.*
> C : Il faut savoir ce que …c'est quoi la taille du géant.
> R : *Mais comment tu peux savoir*, c'est quoi la taille du géant.
> C : [inaudible]
> R : *Tu ne vois même pas tout le géant* (S1 03 : 57à 04 : 08)
> C : C'est-à-dire qu'on aperçoit une partie de la jambe.
> R : Mais *c'est ça on nous demande quelle est la taille de ce géant mais on ne voit pas ce géant là.* Je ne comprends pas la question!
> C : Il faut savoir c'est quoi la taille de géant là. Elle ne comprend pas la question. (SP2 S1 04 : 34).
> […]
> R : OK! *Comment chercher la taille du géant si je ne vois pas le géant?* (S1 5 : 56). *Comment tu veux que je cherche la taille du géant si je ne vois pas tout le géant* (S106 : 15).
> C : Estime (SP2 S1 06 : 23).
> R : Je ne comprends rien, je ne sais pas ce que je fais (SP2 S1 06 : 54).

Le verbatim qui précède met bien évidence la nécessité pour R de voir le géant au complet sur la photo pour pouvoir estimer quelle est sa taille. Autrement dit, il est impossible pour elle d'estimer la taille d'un objet (ici la taille du géant) sans voir au complet cet objet.

Stratégie 2: Mesurage de certaines caractéristiques du géant (MCG) (Élèves R, C, J et L)

La démarche de résolution des élèves va donner lieu à plusieurs tentatives successives que nous essayons de caractériser dans ce qui suit.

- *Tentative 0 : Au départ, une centration sur le géant et ce qu'on voit de lui* : Les élèves se centrent, dans ce cas, sur le pied du géant (celui qui est visible dans la photo, sans prendre en compte la taille des personnes qui sont à côté du pied du géant). Ils essaient alors d'imaginer la taille que pourrait avoir le géant à partir de la taille de son pied et de sa jambe. On entre ainsi sur la résolution par les caractéristiques visibles du géant, auxquelles les élèves ont accès.
- *Tentative 1 : mesurage de la taille du pied*

  Par exemple, C trouve la taille de ce pied en mesurant sur la photo sa longueur, en ayant recours pour cela à une réglette cuisenaire orange et de petits cubes. Elle arrive à 24 cm en supposant que chaque cube vaut 1 cm d'arête.
- *Tentative 2 (qui sera finale) : Mesurage de la taille du pied et de la jambe*

  Les deux élèves (C et R) amorcent chacune un ensemble de mesurages : par exemple, C et R mesurent le pied et la demi-jambe du géant à l'aide de petits cubes et de deux réglettes (l'une orange et l'autre rouge). Elles trouvent 48 cm. R suppose alors que la réglette orange mesure 24 cm. C fait le calcul associé 24 cm + 24 cm = 48 cm (qui correspond pour elles à la taille du pied et de la demi-jambe du géant). C mesure aussi la demi-jambe du géant avec un ruban et trouve 10 cm (SP2 S1 9 : 34, vidéo 1). De même, R détermine de nouveau la mesure du pied du géant et de la demi-jambe à l'aide de la réglette rouge et du ruban et trouve 20 cm (mesure demi jambe 10 cm + mesure pied du géant 10 cm).

  C rapporte pour l'équipe dans un premier temps que la taille du géant est 20 cm (elle induit de ces mesures qu'elle vient de prendre la taille du géant). Dans cette façon de fonctionner, *la taille mesurée sur la photo = taille réelle*, on ne fait pas de distinction entre taille sur la photo et taille réelle; et, de plus, la taille du géant est identique à la partie visible sur la photo (mesure du pied + mesure de la demi-jambe).

  À la question du chercheur de savoir si la taille du géant est de 20 cm, C affirme que c'est 20 cm ou 20 m, un glissement qu'elle effectue automatiquement (les deux élèves

ignorent la correspondance entre les deux unités, comme le confirmeront les réponses aux questions que le chercheur leur posera par la suite). La mesure obtenue est définie en mètres (mais ce mètre n'a pas de signification réelle au regard du mesurage en cm initialement donné, une signification de l'ordre de grandeur de cette unité pas vraiment présente). Le chercheur, insistant à savoir si c'est 20 cm ou 20 m, les deux élèves répondent 20 m et expliquent comment elles trouvent 20 m comme en témoigne le verbatim ci-dessous.

> Ch : Est-ce que vous avez fait des calculs? Comment avez-vous fait pour trouver 20 m?
> R : Moi j'ai estimé.
> C : Puisque ça [C montre la réglette] ça mesure 10 cm […] puis on fait les deux [cela suppose 10 cm +10 cm = 20 cm] (SP2 S1 12 : 35, vidéo 1).

R revient sur ce 20 cm qui représenterait la mesure de la jambe du géant.

En fin de compte, cette mesure correspond et est interprétée comme la mesure de la partie visible (caractéristiques visibles : jambe et pied) sur la photo du géant.

Deux autres élèves, J et L, se retrouvent dans cette catégorie au début de leur démarche de résolution. Elles prennent en effet comme points de référence les mesures de la taille du pied et de la botte du géant. Ainsi, dans sa première tentative, J mesure la longueur du pied et la hauteur de la botte du géant à l'aide d'une réglette et de petits cubes utilisés comme étalons puis par la suite à l'aide d'un ruban (S1 4 : 54 à 5: 08, vidéo 1). Elle trouve 13 pour la mesure du pied et 11,3 pour la demi-jambe (l'unité n'étant pas précisée). L, quant à elle, mesure la longueur du pied et la hauteur de la botte du géant à l'aide d'un ruban (SP2 S1 3 : 40 à 4 : 20, vidéo 1), trouvant respectivement environ 14 et 11. Ces mesures seront alors combinées de toutes sortes de façons pour trouver la taille du géant (c'est comme s'il fallait à tout prix opérer sur les nombres que l'on trouve, comme on le fait habituellement en maths, des opérations qui ici n'ont aucun sens) : elle propose ainsi de trouver la longueur du pied du géant plus la longueur de sa jambe [sous-entendu la botte] fois « le reste de son corps » [sous-entendu le corps du

géant]. De son côté, J parle de longueur fois largeur (mesure du pied du géant fois mesure de sa botte).

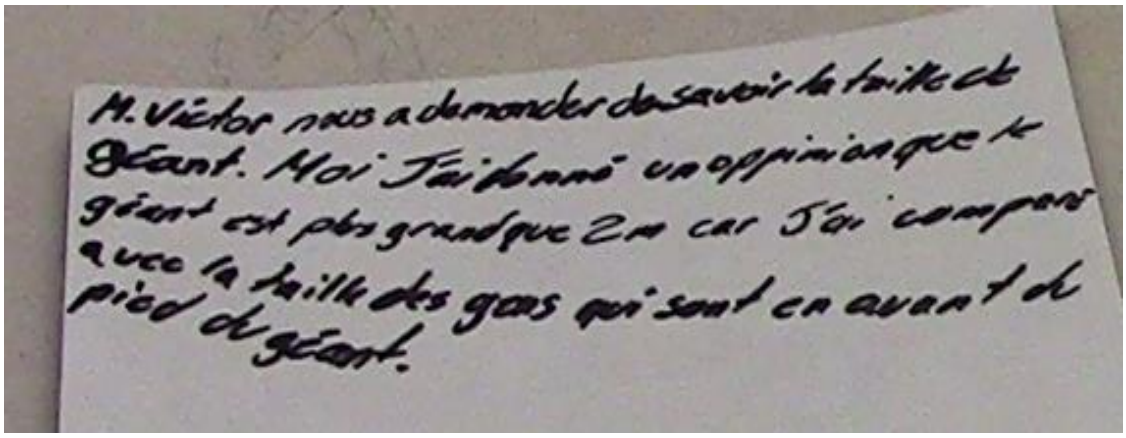
Dans la deuxième tentative, un retour se fait sur le mesurage de certaines caractéristiques du géant, un mesurage dont on ne peut toutefois tirer parti. Ainsi J et L mesurent avec un ruban le pied de géant (trouvent 14 voire 13, l'unité de mesure n'étant pas précisée (SP2 S1 8 : 25), et la hauteur de la jambe (trouvant 11,3). L pense ainsi que la jambe mesure 11,3 et s'intéresse à d'autres mesures que l'on devrait également savoir (les mesures des cuisses et des côtes, etc.) mais se demande comment faire (celles-ci n'étant pas visibles sur la photo). Par la suite, elles ne se servent pas de ces mesures pour trouver la taille du géant.

Stratégie 3 : Comparaison géant homme (CGH). La taille du géant est obtenue approximativement par comparaison avec la taille d'un homme (F). L'élève donne ici une idée simplement de l'ordre de grandeur du géant (c'est plus que…).

- *Prise en considération de la mesure de la taille d'un homme (ordre de grandeur)* : L'élève réfère à la taille des hommes sur la photo et à la taille réelle d'un homme qu'il connaît (en l'occurrence ici son frère). F pense que le géant devrait être plus grand que 2 m puisque les personnes présentes sur la photo mesurent environ 1 ou 2 m. L'extrait du verbatim ci-dessous illustre les propos de F.

  Ch : qu'est ce qui t'a permis de trouver que ces hommes-là c'est environ 1m ou 2m?
  F : Mon frère est grand comme eux. Mon frère mesure 1m quelque chose. Puis il a quasiment la même taille que ces gens-là. C'est pour ça que j'ai dit ça (S1 8 : 10).
  Ch : Ok.

- *La taille du géant est établie par comparaison avec la taille d'un homme* comme le montrent l'affiche qu'il a produite et les propos qu'il a tenus lors de la résolution



Ch : Si tes amis te demandent mais comment tu as trouvé, tu es arrivé à dire que le géant est plus grand que 2 m, tu dis quoi?
F : J'ai comparé avec la taille de ces gens-là (pointe les gens sur la photo devant le pied de géant) (S1 14 : 47 à 15 : 07).

Stratégie 4 : Une taille du géant comme produit de la taille de l'homme par un certain facteur (PTH). Une taille du géant qu'on tente de déduire, dans ce cas, à partir de la taille d'un homme en multipliant cette dernière par un certain coefficient (J et L). Ce coefficient multiplicatif ne peut toutefois être déterminé précisément.

Identification de relations entre certaines grandeurs

Ainsi les élèves J et L vont amorcer leur résolution, à ce stade (voir stratégie 2) en identifiant des relations entre certaines grandeurs.

J propose que l'on mesure l'humain et qu'on multiplie par quelque chose (S1 9 : 56). Une relation multiplicative est établie entre la taille de l'homme et la taille du géant. J semble aussi établir un lien entre la taille des personnes sur la photo et le pied du géant [sous entendu la jambe du géant]**.** « Un humain c'est genre la taille du pied » (S1 10 : 21). Une correspondance est donc établie entre la taille de l'homme et la hauteur de la botte (sur la photo).

Stratégie finale

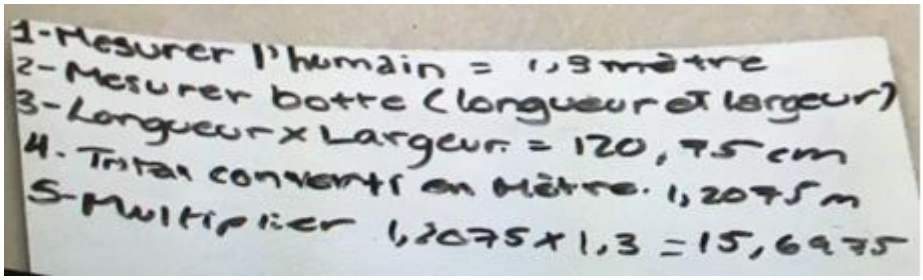
L'idée intuitive est qu'un géant est tant de fois plus qu'un homme (une relation multiplicative entre les deux grandeurs).

- Elles mesurent la taille des hommes sur la photo avec un ruban (trouvent 11,4, l'unité étant non précisée) puis abandonnent cette mesure (S1 10 : 44).
- Donnent alors une mesure associée à la taille de l'homme sur la photo : 1,3 m (S1 11:42). Puis, elles déduisent que la jambe du géant mesure 1,3 m.
- La taille du géant est obtenue à partir de la taille de l'homme (qui correspond, voir le verbatim ci-dessous, à la jambe du géant) en multipliant celle-ci par un certain nombre.
- Mais quel nombre?

L'extrait du verbatim ci-dessous traduit le blocage des élèves pour trouver ce coefficient multiplicatif :

> L : l'humain mesure à peu près 1m3 genre. La jambe du géant 1m3 exact…1m3 la longueur de la botte du géant… on doit multiplier 1m3 fois mais là fois quoi? (S1 12 : 14 à 13 : 54).

- Les élèves sont donc incapables de trouver ce nombre. Elles vont alors faire sur le dessin des mesures et calculs qui n'ont pas de sens, exemple multiplier la mesure de la hauteur par la largeur de la botte… (voir démarche ci-dessous). Ce résultat est traité comme le coefficient multiplicatif qu'elles recherchaient, sans qu'il y ait réellement de sens à ceci :



Comme on l'aura compris, 120,75 = 11,5 x 10,5. [largeur de la botte qu'elles ont mesurée x longeur].

Stratégie 5 : Report de la taille de la botte sur la photo prise comme étalon (RTB). Mesurage de sa propre taille par report, en prenant comme unité la hauteur d'une botte, ce qui permet de trouver la mesure de la taille du géant (en ajustant le nombre de reports considéré alors) (Élève B).

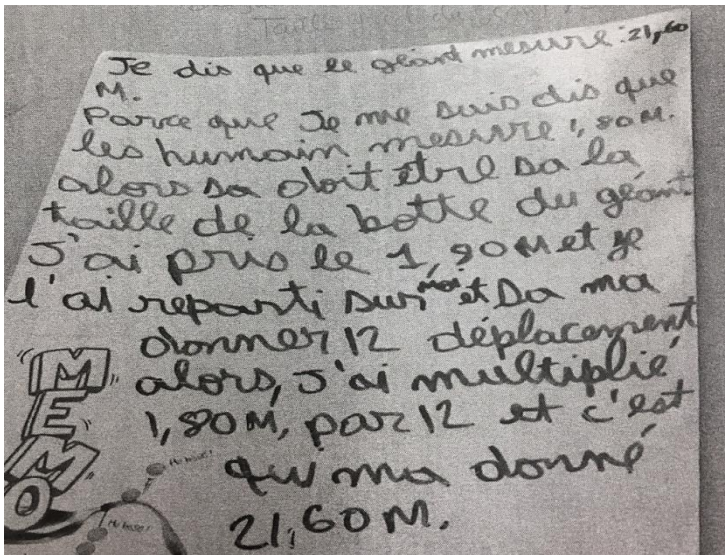
Mesurage de la taille de la botte : L'élève mesure sur la photo la hauteur de la botte du géant (en utilisant une règle graduée); il arrive à 13 et conclut que la hauteur de la botte est de 13 mètres (la taille mesurée sur la photo est considérée de fait comme la taille réelle, on ne fait pas de distinction entre taille sur la photo et taille réelle) (S1 04 :48 à 05 :15).

- *Nombre de reports nécessaires pour trouver sa propre taille à partir de cet étalon* : L'élève reporte l'écartement qui correspond à la mesure qu'il vient de prendre (la hauteur de la botte) sur lui-même c'est-à-dire qu'il prend cet écart (extrémité de la mesure identifiée par son doigt) et le reporte sur lui-même. Il arrive à 10 (10 reports d'une botte prise ici comme un étalon) (S1 06 : 10 à 07 : 30).

  B essaie d'expliquer sa stratégie comme le montre l'extrait du verbatim ci-dessous :

  > Ch : C'est quoi que tu disais là, je n'ai pas compris.
  > B : Ici ça va être le pied ici la jambe. Ici à ici [B mesure la hauteur de la botte]. J'essayai de le mettre sur mon pied [reproduit le même écartement sur sa jambe, en partant de son pied] puis jusqu'à ma tête [reporte cet écartement jusqu'à sa tête], je fais la réponse fois quelque chose (SP2 S1 04 : 47 à 05 : 15).

  - *Estimation du nombre de reports qu'on devrait faire dans le cas du géant* : le résultat précédent étant associé à une personne particulière, lui-même dans ce cas, l'élève va ajuster ce nombre de reports dans le cas du géant (un géant c'est beaucoup plus dira-t-il). Il décide alors de prendre 13 fois au lieu de 10 (ce qui lui donne la taille du géant lorsqu'il redonne à la botte la mesure qu'il lui avait trouvée). La taille d'un homme correspond à la taille de la botte (c'est un élément de la stratégie de l'élève).



Note : la hauteur de la botte sur la photo sert ici en fait d'unité de mesure pour mesurer sa propre hauteur et en déduire, par comparaison, celle du géant (qui mesurera beaucoup plus avec la même unité).

Stratégie 6 : Rapport multiplicatif établi entre le géant et son pied (et donc entre le géant et l'homme) (R_pGH). Une relation est, dans ce cas, établie entre le pied du géant et la taille des personnes, ainsi que entre la taille du géant et son pied (qui correspond à peu près à la taille d'une personne) (Élève M)

Nous reprenons ici la démarche de l'élève M pour illustrer cette stratégie.

- *Une relation est établie entre la taille du pied du géant et la taille d'une personne sur la photo (qui est approximativement la même)* :

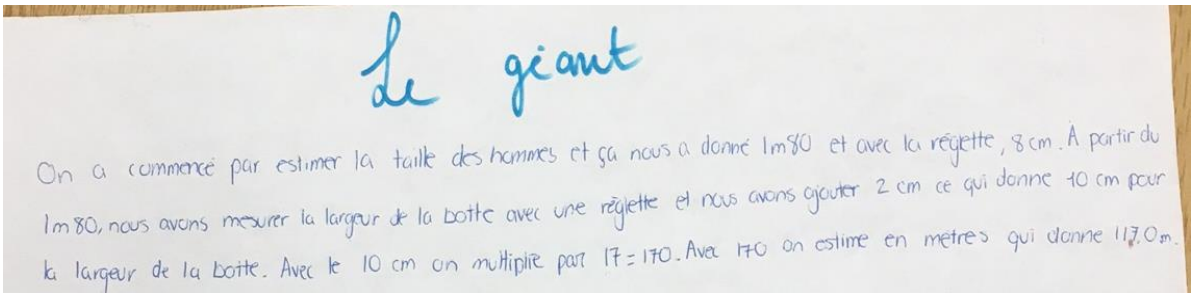
M voit sur la photo, et ce avant toute résolution, que le pied de géant est à peu près égal aux tailles des personnes. Elle dira en effet, quand on lui demandera de redire le problème qui est posé, dans ses mots :

> Ch : Est-ce que vous pouvez me dire dans vos mots quel est le problème?
> M : Mais il faut savoir la taille du géant à partir du pied qu'on voit qui est à peu près égal à des personnes (SP2 S1 02 : 07 à 21, vidéo 1)

- *Une mesure est ensuite associée à la taille usuelle d'un homme (et par conséquent du pied, ici considéré dans le sens de sa base, de sa longueur)* : elle précisera, d'elle-même, les deux mesures.

  M : On va dire le pied [elle pointe la longueur du pied du géant] mesure 1,80m […], ça [elle pointe la longueur du pied sur le dessin] genre les personnes mesurent 1,80m, on les tourne [pour avoir une longueur qu'on peut comparer à la longueur du pied] et on ajoute [sous-entendu la longueur n'est pas tout à fait la même] puis on fait la même chose (SP2 S1 04: 34 à 54, vidéo 1)

- *Des mesures plus précises du pied sont prises en référence à cette hauteur de l'homme* (qui n'est pas tout à fait la même que celle du pied) : Elle mesure (1) la hauteur de l'homme sur la photo en ayant recours tout d'abord à une unité non conventionnelle, la réglette orange (sa hauteur fait une réglette). Elle va alors mesurer cette réglette avec la règle graduée et ramener ainsi la mesure de la hauteur de l'homme sur la photo en cm (elle arrive à 8 cm). (2) cette double référence (réglette, d'une part, règle graduée, d'autre part) va être utilisée pour mesurer la longueur du pied (une réglette orange plus 2 réglettes blanches, soit 10 cm) et la hauteur de la botte prise ici en la suivant en diagonale (1 réglette orange+ 1 réglette rouge+ 1 réglette blanche, soit 11 cm).
- *À la recherche du nombre de fois que cet étalon (la hauteur d'un homme) entre dans la taille d'une personne :* elle simule avec ses doigts, en prenant l'écartement d'une réglette, des reports de cet écartement (pris comme étalon) sur sa propre personne, en allant des pieds à la tête; elle arrive à 13 (reports)
- *Un ajustement à ce nombre est apporté pour tenir compte du fait qu'il s'agit d'un géant et non d'une personne normale :* Au lieu d'utiliser 13, dans le cas du géant, il faudra utiliser un nombre plus grand (en l'occurrence ici elle prendra 17)
- *La taille du géant est alors obtenue en multipliant la longueur de son pied (trouvé précédemment) par ce facteur multiplicatif* : 10 cm x 17 = 170 cm. L'interaction avec Y conduit M à écrire 117 m, résultat qui vient sans doute de 11 x 17 m.


Le géant

On a commencé par estimer la taille des hommes et ça nous a donné 1m80 et avec la réglette, 8 cm. À partir du 1m80, nous avons mesurer la largeur de la botte avec une réglette et nous avons ajouter 2 cm ce qui donne 10 cm pour la largeur de la botte. Avec le 10 cm on multiplie par 17 = 170. Avec 170 on estime en metres qui donne 117,0 m.

Note : la mesure réelle de la hauteur d'un homme qu'elle avait en tête au départ n'a pas été reprise par la suite. On peut faire l'hypothèse sans doute que les différentes étapes qui ont suivi lui ont fait perdre de vue cette donnée de départ, ainsi c'est la taille de l'homme sur la photo et non la taille réelle qui sera réinvestie dans son raisonnement par la suite.

Notons que Y bien que présent à cette séance ne s'est pas engagé dans la résolution de la situation-problème. Sa stratégie n'a donc pas été identifiée.

Le tableau suivant synthétise les stratégies successives utilisées par les élèves durant toute la résolution du problème.

Tableau 4.6 Stratégies successives des élèves dans la résolution du problème de géant au moment 1

Élèves / Stratégies	R	C	J	L	F	B	M	Y	A
GI	X							Rien (pas fait)	Absent
MCG	X	X	X	X					
CGH					X				
PTH			X	X					
RTB						X			
R_pGH							X		

GI : Géant indispensable
MCG : Mesurage de certaines caractéristiques du géant
CGH : Comparaison géant homme
PTH : Une taille du géant comme produit de la taille de l'homme
RTB : Report de la taille de la botte prise comme étalon
R_pGH : Rapport multiplicatif établi entre le géant et son pied (et donc entre le géant et l'homme).

Ce tableau fait apparaître des différences importantes entre les élèves, dont les stratégies vont de la difficulté à estimer la taille du géant en l'absence de ce géant (R au tout début de la démarche) à la prise en compte d'un rapport multiplicatif entre certaines grandeurs (trois élèves seulement J, L et M). Dans ce problème, peu d'élèves perçoivent donc la structure multiplicative des relations entre les grandeurs. La majorité des élèves (5 élèves) se placent dans un tout autre registre, celui des mesures : allant de la simple prise en compte des mesures de parties visibles (dont on ne sait quoi faire par la suite) (2 élèves R, C), à une comparaison approximative entre les mesures de la taille d'un homme normal et d'un géant permettant d'estimer son ordre de grandeur (F), ou encore à une mesure des tailles d'un homme (et du géant) utilisant un étalon pris comme unité de mesure (écartement correspondant à la hauteur de la botte sur la photo (B)). À cette étape, on peut donc dire que *deux registres de travail* ou cadres (Douady, 1984) sont observés : celui de la mesure, majoritaire (R, C, F, B) mettant en oeuvre (1) un simple mesurage de données à l'aide d'outils conventionnels (règle graduée) ou non (réglettes), ces données devant être visibles, explicites, pour pouvoir trouver leur mesure (R,C); (2) une idée de comparaison à la base de l'estimation d'une grandeur par rapport à une autre (F, B. M); (3) une idée de report d'un certain étalon, à la base de la mesure d'une certaine grandeur (B. M). D'autres élèves (J, L, M) se placent dans un registre numérique et établissent un rapport multiplicatif entre des grandeurs, sans pouvoir mener à bout nécessairement le raisonnement (ex de J et L, mais aussi jusqu'à un certain point de M). Enfin, il est possible d'observer chez certains élèves (J et L) le passage, au cours de la résolution, d'un registre à l'autre (MCG à PTH).

Analyse des arguments et des stratégies au moment 2 : réaction aux solutions d'élèves fictifs et retour sur la première affiche.

Signalons que la partie sur les solutions fictives des élèves n'a pas été traitée par L et que J est absente au moment 2.

Les élèves avaient à se prononcer sur six solutions d'élèves fictifs, dont une qui ne fonctionne pas (celle de Marie) et une incomplète (celle de Jean) qu'on leur demandera de compléter (voir annexe H-1/3ème phase)

L'analyse des vidéos révèle un engagement des élèves pour approuver ou non les solutions proposées, *en essayant de clarifier ces solutions, en relevant ce qui marche et ce qui ne fonctionne pas [c'est ici que vont s'expliciter des arguments]*. Deux grandes catégories ressortent de notre analyse : d'une part, les élèves qui émettent des objections sur les solutions des élèves sans apporter de modifications majeures aux démarches initiales proposées (majorité des élèves) et, d'autre part, les élèves qui réinvestissent cette réflexion pour améliorer leurs solutions (cas de B).

Les paragraphes qui suivent retracent les **arguments avancés** par les élèves en dyade ou individuellement. Nous revenons également sur les stratégies initiales développées par les élèves et les modifications apportées, s'il y a lieu.

Élèves qui vont émettre des objections aux solutions des élèves, sans apporter, par la suite, de modifications majeures à leur démarche initiale. La majorité des élèves sont dans cette catégorie. Il s'agit des élèves C, R, L, A, F, M et Y.

Analyse des arguments amenés (sur les solutions fictives)

- Des arguments relatifs aux unités de mesure utilisées et à leur conversion [4 élèves C, R, A, F]

C et R relèvent dans les solutions proposées : (1) une incohérence au niveau de la conversion d'unités de mesure : par exemple dans la solution de Marie on dit que la demi-jambe mesure 9,7 cm (9,7 m). A et F relèvent, comme C et R, que la mesure trouvée 9,7 cm n'est pas équivalente à 9,7 mètres, mais vont plus loin. Ce qui devrait

être écrit, selon eux, en tenant compte de la conversion est 1cm = 0,01m et 9,7 cm = 0,097 m.

- Des arguments relatifs à ce qu'on mesure (C, R)

C et R émettent un questionnement sur la nature des mesures effectuées : sont-elles attachées à des personnes spécifiques (sur la photo) ou générales (n'importe quel homme)? Elles mentionnent ainsi dans les solutions proposées, qu'il y a un élément positif avancé par l'équipe 1, c'est que la taille d'un homme est estimée à 1,80 m. Cependant, comme C et R le font remarquer, les élèves de l'équipe 1 ne mentionnent pas s'il s'agit des hommes sur la photo ou de n'importe quel homme.

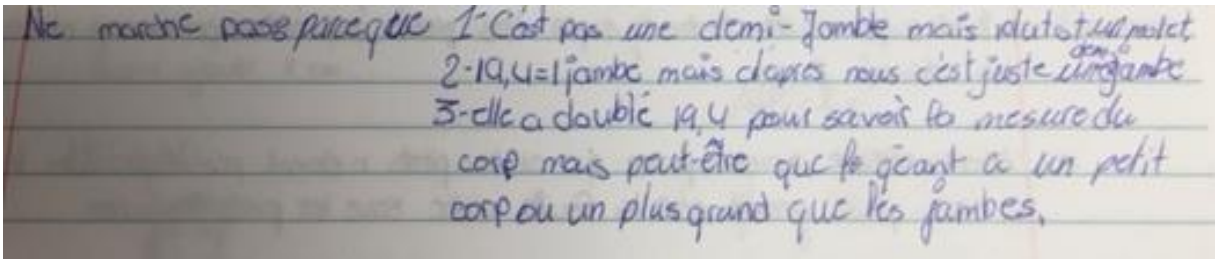
- Une prise en compte (une donnée qui n'était pas là précédemment dans leurs solutions) de la taille d'un homme (1,80 m) (C, R, A, F)

A et F prennent en compte la taille des personnes sur la photo et soutiennent que leur taille est de 1,80 m comme le confirme l'extrait du verbatim ci-dessous :

> Ch : je reviens encore sur la question : comment il [Jean] est arrivé à trouver que la taille du pied du géant est 1,80 m? Qu'est-ce qu'il a fait, selon vous?
> A : les personnes qui sont là mesurent genre à peu près 1,80.
> Ch : les personnes c'est 1,80?
> A : les adultes. (SP2 S2 17 : 56)

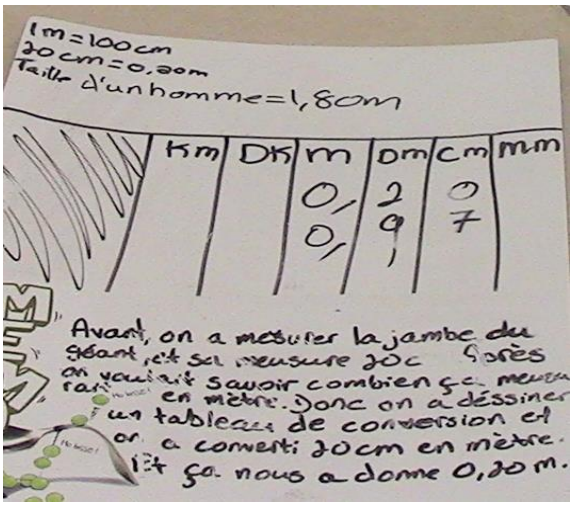
- Des arguments mettant en jeu un ordre de grandeur (M, Y, B)

M et Y rapportent, tout comme B le fera, que la démarche de Marie ne tient pas la route. Ainsi, ils relèvent en particulier qu'elle ne devait pas écrire 9,7 m + 9,7 m = 19,4 m (pour une jambe en entier en partant de la taille de la demi-jambe, 9,7m) puisqu'il se peut que le géant ait de longues jambes; ou encore écrire que 19,4 + 19, 4 = 38,8 pour un corps entier, puisqu'il se peut que le géant ait un petit corps, comme en témoigne la production ci-dessous des deux élèves :



Stratégies mises de l'avant par ces élèves, après réflexion sur ces solutions

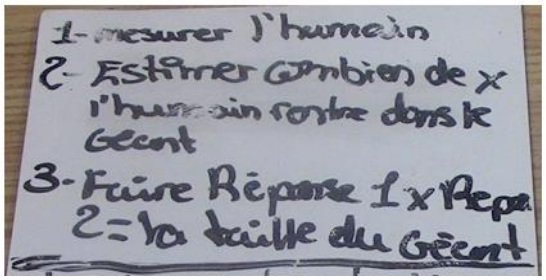
Bien que relevant des incohérences dans certaines démarches proposées par des élèves fictifs, ces élèves n'apportent pas en général de modification à leur affiche initiale. Les modifications des élèves bien que pertinentes sont réinvesties partiellement dans l'élaboration de leur affiche. Elles ne changent pas réellement la stratégie initiale.
Ainsi C et R font référence dans leurs arguments à propos des solutions, à la taille d'un homme qui est de 1,80 m mais cette nouvelle donnée n'est pas vraiment prise en compte par la suite. La stratégie demeure la même (MCG) comme on peut le voir dans l'affiche ci-jointe. Le seul ajout est purement technique (un tableau de conversion est ajouté pour transformer les 20 cm en mètres).



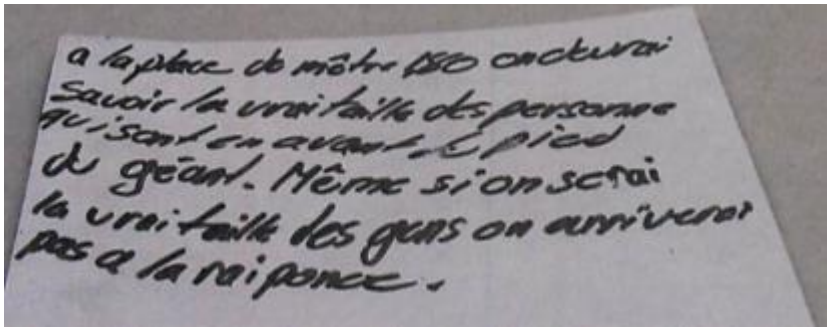
De manière contrastée, L, va au contraire considérer cette donnée (taille des hommes) et l'intégrer à sa stratégie initiale : on n'est plus seulement sur la taille de l'homme

mesurée sur la photo mais bien sur la taille de l'homme réel. La stratégie demeure toutefois la même (PTH)

La démarche ainsi proposée par L se présente comme suit :



Les élèves A[143] et F n'apportent pas de modifications à leur affiche initiale comme le témoigne la production ci-dessous (CGH) :



Il en est de même de M et Y (R_pGH).

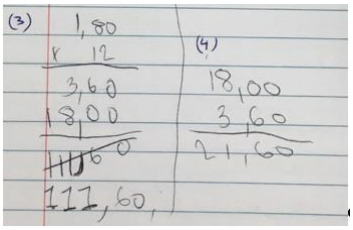
Un seul élève, après le retour sur les solutions fictives, modifie sa s*tratégie initiale (B)*

Rappelons ici la stratégie initiale de B (RTB) : B a pris l'écartement correspondant à la taille de la botte, comme étalon, pour mesurer sa taille (il trouve tant de reports), ajustant ensuite ce nombre approximatif de reports dans le cas du géant (qui a une taille plus grande). Quelques éléments importants à relever qui ont conduit B à la rédaction de son deuxième texte : B récupère la solution de Jean (solution incomplète qui démarrait de la façon suivante : « Bien en fait j'ai vu sur la photo qu'il y avait des hommes et un pied de géant. Je sais que la taille d'un homme ça peut être entre 1,80 m et 1,90 m. Donc le pied de géant, sa taille doit être environ 1,80 m environ car… ».

[143] Rappelons que A était absent au moment 1.

Ainsi B s'intéresse pour la première fois à l'homme sur la photo contrairement au premier moment où dans sa stratégie, il ne se préoccupait pas des deux hommes sur la photo [voir extrait ci-dessous]

> « Je dis que le géant mesure 111,60 m Parce que Je me suis dit que les humain mesure 1,80 m alors sa doit être sa la taille de la botte du géant [il fait clairement le lien ici entre la hauteur de la botte et la taille des humains]. J'ai pris le 1,80 m et je l'ai reporté sur moi et sa ma donner 12 déplacement alors, J'ai multiplié 1,80 m par 12 et c'est ce qui m'a donné 21,60 m »



La nouvelle affiche témoigne d'une stratégie qui diffère d'un simple report de la botte (RTB), mais prend en compte la relation entre cette taille de la botte et la taille de l'homme La taille du géant est obtenue en multipliant la taille de l'homme par un certain facteur (PTH).

Que retenir de cette section?

Les modifications observées, suite aux réflexions sur les solutions d'élèves fictifs, sont des modifications de surface (ajout de la donnée taille de l'homme par exemple, ou ajout technique de conversions,….) sans que fondamentalement la stratégie ne change pour la majorité des élèves. Le cas de B est ici intéressant car *l'introduction d'une variable didactique (solution de Jean* mettant en évidence les hommes présents sur la photo et leur taille) va faire bouger l'élève : d'une stratégie mobilisée dans un cadre de mesure (mesure de sa taille en utilisant un étalon qui est celui de la hauteur d'une botte, par report de cette unité) à une stratégie combinant un cadre de mesure et un cadre numérique (report d'un certain étalon, qu'on met en correspondance sur un plan numérique, avec la taille d'un homme).

Enfin rappelons ici qu'au terme de la situation intermédaire (voir H-2), le probléme du géant a de nouveau été proposé aux élèves à résoudre. Le problème de départ dans ses différentes phases (voir H-1) avait été expérimenté avant les vacances de Noël avec les élèves. La situation intermédiaire a été expérimentée avec les élèves au retour des fêtes, en janvier, et donc lorsque le problème du géant est redonné aux élèves, il s'est écoulé plusieurs semaines. Tous les élèves conserveront la même stratégie, et ne changeront rien à ce qu'ils avaient fait.

Revenons maintenant sur ce qui ressort de l'analyse de la première situation (H-1) au plan des difficultés des élèves.

4.2.1.2 Difficultés qui ressortent de l'analyse des démarches dans le problème de géant

À travers ce qui précède, les différentes tentatives de résolution de l'élève tout au long du processus, les gestes qui sont faits, ce qui est dit, les traces laissées par l'élève, plusieurs difficultés ressortent (liées à la mesure) :

- la difficulté d'imaginer la mesure de l'objet sans la présence de cet objet (voir l'élève R) et l'élève C qui ne s'attarde qu'aux mesures des parties visibles du géant;
- une difficulté de différentier mesure sur le dessin et mesure réelle (voir les élèves C, R, B);
- une signification du nombre obtenu comme résultat de ce mesurage, en termes d'unité de mesure, pas toujours claire : on glisse de centimètre à mètre comme si c'était la même chose (voir les élèves C, R et B) ou l'unité de mesure n'est pas précisée (voir J et L).

D'autres difficultés apparaissent également au cours de cette résolution, notamment dans le calcul (voir B au moment 2, traces de l'élève), mais aussi dans le sens que les élèves accordent aux actions menées avec ces mesures (voir par exemple L et J qui

combinent les mesures obtenues de toutes sortes de façon pour avoir la taille du géant, des combinaisons qui n'ont pas réellement de sens).

Par ailleurs, les différentes stratégies mises en évidence précédemment (GI, MCG, CGH) pointent la difficulté à établir un rapport mutiplicatif entre les grandeurs et à établir différentes relations (rapports) nécessaires à la résolution (exemple entre la taille de l'homme et la botte sur le dessin, entre cette grandeur de la botte et la grandeur du géant).

4.2.2 Autour du problème du panneau publicitaire

Le nouveau problème posé aux élèves était le suivant : J'ai pris une photo d'un panneau publicitaire qui annonçait un concert de musique en Chine lors d'une tournée d'un groupe de musique. Peux-tu retrouver, à partir de cette photo, quelles étaient les dimensions du panneau, sa longueur, sa hauteur? (voir annexe H-3 pour le protocole plus précis)

Le problème avait la spécificité d'être construit, tout comme le précédent, sur une photo. Trois des personnages réels sont ici présents devant le panneau publicitaire représentant le groupe.

4.2.2.1 Différentes stratégies ressortant de l'analyse des démarches

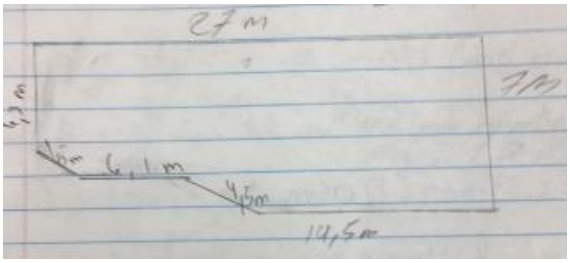
Un premier constat peut être fait au regard de cet énoncé qui met en jeu une structure semblable à celle du problème du géant. La variété des stratégies utilisées dans le cadre de ce nouveau problème est en effet beaucoup moins étendue que dans le cas du problème du géant. Trois stratégies ressortent de l'analyse des démarches des élèves :

Stratégie 1 : Mesure directe sur la photo de certaines caractéristiques du panneau (MCP). Trois élèves adoptent cette stratégie (B, F, C).

Dans ce cas, les élèves mesurent directement les dimensions (longueur et hauteur) du panneau publicitaire sur la photo, à l'aide d'unités non conventionnelles ou conventionnelles. Ce mesurage direct ne prend nullement en compte les personnages réels présents sur la photo, il s'agit d'un simple exercice de mesurage des dimensions d'un panneau. De plus dans ce cadre, aucune distinction n'est faite entre la mesure du panneau réel et la mesure de ce panneau sur la photo.

La stratégie de départ des élèves B et F consiste ainsi à mesurer directement les dimensions (longueur [base de l'affiche] et hauteur du panneau publicitaire) sur la photo, avec une règle graduée en cm, dm et mm et à reporter les mesures obtenues sur un dessin représentant l'affiche [la partie cachée de l'escalier n'étant pas prise en compte].

Voici le dessin produit par B et F.



C quant à elle, mesure la hauteur du panneau publicitaire à l'aide d'une réglette vert clair et de 3 petits cubes en bois (la réglette vert clair correspond à 4 petits cubes, ce qui va lui donner 7) et mesure la longueur du panneau à l'aide de 2 réglettes brunes (correspondant chacune à 9 petits cubes) d'une réglette vert clair et de 3 cubes (ce qui correspond à 27), ce qui lui donne pour la hauteur : 7 m (C interprète le nombre obtenu 7 comme étant 7 m) et la largeur : 27 m. C établit automatiquement qu'une réglette orange de 10 (cubes) correspond à 10 m et que 7 petits cubes correspondent à 7 m.

Stratégie 2 : report de la taille d'un des musiciens, prise comme étalon (RTM).
Trois élèves sont ici (M, Y, L).

Les élèves s'appuient ici sur (1) la taille d'un membre du groupe, qu'ils supposent être 1,80 m. Cette mesure est prise comme étalon et reportée sur la hauteur du panneau; dans le cas de la largeur, ils s'appuient sur (2) la largeur du visage d'un membre du groupe sur la photo (pris comme étalon) et reportée sur la largeur du panneau (Élèves M et Y).

Cette stratégie est utilisée par M et Y qui considèrent comme étalon la taille supposée 180 cm ou 1,80 m d'un membre du groupe, puis cherchent la hauteur du panneau en faisant dans un premier temps les calculs 180 x 2 (deux fois le report de la hauteur du personnage) et un peu plus (le un peu plus correspond au tiers de la hauteur) donc 180/3 ce qui donne (180 x 2) + 60 = 420.
Les élèves mesurent ensuite avec un ruban le visage d'un membre du groupe sur la photo (largeur) et arrivent à 120. La largeur du panneau est obtenue en faisant 120 x 10 (le nombre de fois qu'il faut reporter cette largeur pour retrouver la largeur du panneau) = 1200 unités.
L amorce sa démarche en considérant la taille d'un membre du groupe (1,80 m) comme étalon, représenté par un morceau de ficelle. Pour calculer la longueur du panneau, L procède ainsi : 1,80 x 8 où 8 est le nombre de morceaux de ficelles qu'il a fallu reporter sur la longueur. Elle trouve 5,40 m (difficultés de calcul) au lieu de 14,4 m. En ce qui

concerne la hauteur du panneau, L considère la taille d'un membre du groupe sur la photo comme étalon mesurée à l'aide d'une ficelle (1,5 unités) et reporte cet étalon sur la hauteur de l'affiche deux fois et affirme qu'il reste un petit quelque chose. Finalement, L trouve : 1,5 + 1,85 = 3, 65 au lieu de 3,35 (erreur là aussi de calcul)

Stratégie 3 : Rapport multiplicatif panneau visage (R_pPV). Cette stratégie est utilisée par les élèves B, F, L, M et Y.

Cette stratégie s'appuie sur les indices fournis aux élèves (hauteur ou largeur réelle du visage d'un membre du groupe de musique). La largeur (hauteur) correspondantes sur la photo du visage est prise alors comme étalon. On recherche le nombre de fois que cet étalon entre dans la hauteur ou la largeur de l'affiche. Ce nombre de reports est ré-investi pour retrouver la longueur et hauteur réelles du panneau.

Les élèves B et F obtiennent la hauteur du panneau publicitaire à partir de la hauteur du visage d'un membre du groupe sur la photo (prise comme point de référence, comme étalon) et recherchent le nombre de fois que cet étalon entre dans la hauteur de l'affiche : 5 fois. Ce nombre est alors réinvesti pour trouver la hauteur réelle du panneau : 5 x 24 cm = 120 cm, où 24 cm est la hauteur réelle du visage de ce membre. On voit apparaître un raisonnement proportionnel implicitement mis en œuvre : le facteur multiplicatif qui correspond au nombre de reports de la hauteur du visage sur la photo permettant d'obtenir la hauteur du panneau publicitaire reste le même pour les dimensions réelles. B et F tiennent le même raisonnement pour le calcul de la largeur du panneau : 22 (nombre de reports dans ce cas de la hauteur du visage) x 24 cm = 528 cm.

L utilise la démarche suivante pour calculer la largeur du panneau : 25 (nombre de reports du visage) x 24 = 580 au lieu de 600 cm (erreur de calcul).

Quant à M et Y, ils procèdent ainsi : Calcul de la hauteur du panneau : 24 cm (hauteur réelle du visage) + 24 cm +… (on répète 24 un certain nombre de fois) = 24 x nombre

de ronds [sous-entendu nombre de reports]. Il en est de même de la largeur : 17 + 17 +…= 17 x nombre de reports.

Signalons que pour la résolution du problème sur le panneau publicitaire, les élèves J et R étaient absentes et A ne participe plus à l'expérimentation.

On retrouve également présentes certaines difficultés identifiées précédemment dans le problème du géant :
-difficulté à dissocier mesure sur le dessin et mesure réelle (C, F, B);
-pas de prise en compte des personnages réels sur la photo (C, F, B);
-difficultés de calcul (L).

4.2.3 Comparaison des stratégies

Nous résumons dans le tableau ci-dessous (voir tableau 4.7) les différentes stratégies utilisées par les élèves en lien avec les deux situations.

Qu'est-ce qui ressort des différentes stratégies utilisées par les élèves dans la résolution des deux situations?
La structure multiplicative est davantage perçue dans le 2^{e} problème que dans le 1er. Dans la situation « pied de géant », on ne voit pas le géant et le nombre qui permet de retrouver sa taille (coefficient multiplicatif) à partir d'une autre donnée n'est pas direct. En revanche, dans la situation du panneau publicitaire, le panneau est visible à partir de la photo, et permet de retrouver le nombre de reports nécessaires (établissant la relation entre les grandeurs). Il y a plus d'implicites dans la situation pied de géant que dans la panneau publicitaire, entre autre, la taille d'un homme n'est pas donnée (la taille de l'homme est implicite). Le chercheur intervient, dans le panneau publiciatire, dans l'information donnée aux élèves sur la taille du visage d'un des membres (donnée aux élèves en cours de route). Dans le pied de géant, il n'y a pas d'intervention du chercheur.

La majorité d'élèves (B, F, L, M, Y) passent du registre de mesure au registre numérique dans le problème du panneau publicitaire en prenant en charge la structure multiplicative du problème, ce qui est moins le cas dans le problème du géant: celle-ci est davantage visible dans le 2ème problème (panneau publicitaire). Pour ces élèves, un raisonnement proportionnel implicite est mis en jeu.

Tableau 4.7 Stratégies des élèves dans la résolution du problème de géant et du panneau publicitaire.

Élèves[144]	**Stratégies (problème pied de géant)**		**Stratégies (problème du panneau publicitaire)**	**Comparaison des stratégies**
	Moment 1 (RP et production affiche)	**Moment 2 (réactions solutions fictives et retour affiche)**		
B	RTB (report de la taille de la botte)	PTH (produit de la taille de l'homme qui correspond à la hauteur de la botte)	-MCP (mesure des caractéristiques du panneau) puis RpPV (rapport multiplicatif panneau visage) / un coefficient multiplicatif qui est conservé pour les dimensions réelles	Il est possible de voir l'évolution intra-problème (à l'intérieur de la 1ère situation) sous l'effet dans ce cas des conditions du milieu [présence de la taille réelle de l'homme dans la solution fictive]. Il passe d'une résolution menée dans un cadre de mesure uniquement (report de la taille de la botte dans la situation 1; mesure directe des dimensions du panneau dans la situation 2) à une résolution dans un registre numérique prenant en charge la structure multiplicative

[144] L'élève A est présent au 2e moment mais n'est pas engagé dans la résolution du problème sur la taille du géant.

				du problème (PTH; RpPV)
F	CGH (comparaison taille du géant, taille de l'homme, approximations)	CGH (même stratégie)	-MCP (mesure directe des dimensions) puis RpPV (rapport entre le panneau et le visage)	On observe dans ce cas une différence (inter-problème) dans les stratégies utilisées dans les deux problèmes : simple comparaison de mesures dans le premier cas, raisonnement mettant en jeu la conservation du coefficient multiplicatif dans l'autre cas.
C	MCG Mesure certaines caractéristiques visibles du géant sans pouvoir déduire la taille	Même stratégie qu'au moment 1, ajout d'un tableau de conversion	MCP Mesure de la hauteur et de la longueur du panneau (sur la photo)	Elle aborde la mesure directe des dimensions sur le panneau (MCP) dans la situation 2.
R	GI -Nécessité de voir le géant pour pouvoir trouver sa taille MCG	Même stratégie qu'au moment 1	Absente	R passe de GI (nécessité de voir le géant pour trouver sa taille) à MCG. Dans tous les cas, elle est centrée sur les caractérisiques visibles du géant.
J	-MCG -PTH (on cherche à multiplier 1,8 m par quelque chose)[145].	Absente	Absente	À l'intérieur du problème 1, J passe de MCG à PTH (une taille du géant comme produit de la taille de l'homme en multipliant cette dernière par un certain coefficient)
L	-MCG -PTH Identification de la grandeur	PTH (même stratégie)	RTM (report de la taille d'un musicien) puis R_pPV. Considère 1,80 m la taille d'un	L perçoit la structure multiplicative dans les deux problèmes. Toutefois elle ne peut trouver le coefficient

[145] J est absente au moment 2 et à la séance sur la résolution du problème du panneau publicitaire.

	qu'on cherche. On cherche à multiplier 1m3 (mesure botte du géant) par quelque chose		membre du groupe comme étalon représenté par un morceau de ficelle; multiplie par 8 (nombre de morceaux de ficelle qu'on reporte)	multiplicatif dans le 1er cas, ce qu'elle peut faire dans le problème du panneau publicitaire..
M	R_pGH Relation établie entre le pied du géant (sa longueur) et la taille d'un homme. Un calcul de la taille du géant est établi à partir de la mesure de son pied (qui correspond à peu près à la taille d'une personne) en le multipliant par un coefficient [nombre de reports pour obtenir la taille d'un homme régulier, ajusté]	Pas de modification à sa démarche initiale R_pGH	RTM puis R_pPV	La structure multiplicative est perçue dans les deux cas. Dès le départ, M établit une relation entre le pied du géant et la taille d'un homme puis calcule la taille du géant en multipliant cette mesure par un facteur multiplicatif (17) (R_pGH). La taille du panneau est obtenue en faisant la hauteur supposée du membre du groupe (ou largeur du visage) multipliée, par le nombre de reports nécessaire de cet étalon (RpPV).
Y	Est présent mais n'est pas engagé dans la résolution du problème, de sorte qu'aucune stratégie n'a pu être identifiée.	Accepte la démarche de M	RTM et R_pPV	La taille du panneau est obtenue en faisant la hauteur supposée du membre du groupe (ou largeur du visage) par le nombre de reports nécessaires de cet étalon (hauteur ou largeur). La structure multiplicative est perçue dans le problème 2.

4.2.4 Un retour sur ce qui se construit dans cette situation-problème

L'analyse des démarches des élèves a montré la construction par les élèves de connaissances opératoires qui prennent la forme de propositions vraies (dans l'action) que Vergnaud appelle théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1990). Vergnaud (2007, p. 8) affirme qu'un « théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie dans l'activité » par un élève en situation de résolution de problème. L'élève n'est pas nécessairement en mesure d'expliciter ou de justifier le théorème-en-acte (Grenier, 2007) mais il le mobilise en acte. L'élève a aussi recours en action, en situation de résolution de problème, à des conceptualisations que Vergnaud nomme des concepts-en-acte. Ces derniers sont les matériaux nécessaires pour construire les théorèmes-en-acte (Vergnaud, 2007). Les notions de théorème en acte et concept en acte sont des « invariants opératoires » qui permettent « d'identifier et de reconnaître les objets, leurs propriétés, leurs relations, et leurs transformations » (Vergnaud, 2007, p. 7). Ces invariants opératoires constituent une des composantes d'un schème. Dans Construction des savoirs, obstacles et conflits (Vergnaud, 1989), Vergnaud (1989, p. 39) définit ainsi la notion de schème : « On appelle schème l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations ». Le fond de la connaissance, pour Vergnaud, est dans ces schèmes d'action (dans ce que fait le sujet et pas seulement, ni peut-être principalement, dans ce qu'il dit, dans ses déclarations). On peut, par exemple, parler de schème de dénombrement, un schème qui va se manifester dans différentes situations faisant appel au comptage de petites collections. Ce schème repose sur certains concepts en acte (correspondance un à un entre l'élément dénombré et le nombre associé, concept de cardinalité) et théorèmes en acte (par exemple, le cardinal de la réunion de deux collections disjointe est la somme des cardinaux de chacune des collections).

Les invariants opératoires d'un schème (théorèmes en acte, concepts en acte) sont les éléments permettant à l'enfant de sélectionner l'information pertinente et de la traiter.

Dans la présente section, nous faisons un retour sur ce qui se construit dans les situations « pied de géant » et « panneau publicitaire » en lien avec les démarches des élèves, en nous appuyant pour cela sur ces notions de « concepts-en-acte et / ou de « théorème-en-acte », qui nous permettent de mettre en évidence ce qui se construit chez les élèves dans le problème, et qui est de l'ordre de l'implicite (de l'action).

Prémisses d'un raisonnement proportionnel / d'une conceptualisation de la structure multiplicative

Concept en acte : L'idée d'une structure multiplicative apparaît dans le raisonnement des élèves, dans le cas du problème du géant (PTH pour J, L au moment 1, PTH au moment 2 pour B, Rp GH pour M). Elle apparaît aussi dans le problème du panneau (RpPV pour L, F, B, M et Y). En effet, les élèves postulent qu'on obtient la grandeur du géant en multipliant une certaine grandeur (la hauteur de la botte ou la hauteur d'un homme par exemple) par un certain coefficient, ou qu'on obtient la hauteur du panneau en multipliant la hauteur du visage par un certain coefficient. L'extrait du verbatim ci-dessous illustre cette conceptualisation-en-acte, à travers les propos de F expliquant une démarche à B pour trouver la hauteur du panneau publicitaire à partir de la hauteur du visage.

> Ch : Frédéric, c'est lui. Le musicien qui est là. La hauteur du visage réel, son vrai visage là dans la vraie vie, c'est ça.
> F : c'est vrai ou estimé. Celui qui est là ou dans l'image ?
> Ch : Dans l'image, son visage dans la réalité là. Si je prends une photo de Victor, il va paraître petit sur la photo mais son vrai visage mesure 24 cm.
> F : […]on sait que ça fait 24 cm. Comme tu as fait avec le truc du géant [F s'adresse à B]. On va le multiplier
> Ch : Allez-y. C'est quoi ton idée F ?
> F : Mon idée c'est mesurer la tête dans l'image qu'on voit. Puis là on fait par exemple, si c'est 1, on ferait par exemple 1 comme on a fait avec la taille du géant, ça fait 1, 2, 3 jusqu'à par exemple ici 5.
> Ch : oueh
> F : Là on sait que c'est son visage c'est 24 cm, maintenant on va faire le nombre de fois, fois 24 cm. (SP2 S3 09:04 à 10:50 vidéo 2)

On observe aussi cette conceptuailsation-en-acte chez M qui, pour calculer la hauteur du panneau, procède comme suit : 24 cm + 24 cm +…= 24 x nombre de ronds [sous-entendu nombre de reports]. Il en est de même de la largeur : 17 + 17 + …= 17 x nombre de reports.

L'idée d'une conceptualisation d'une structure multiplicative est aussi exprimée dans le discours de l'élève L. En effet, elle affirme : « une ficelle : 24 cm. J'ai compté combien de fois ça rentrait (25 fois). J'ai fait 25 x 24 = 580. Ça m'a donné 530 »

Théorème en acte : On retrouve aussi l'idée (implicite) mise en action par certains élèves (stratégie RpGH, rapport géant homme, et RpPV, rapport panneau visage) d'un rapport constant entre certaines grandeurs.

Par exemple pour le géant : Le rapport entre la hauteur de la mi-jambe et la taille d'un homme est égal au rapport entre la hauteur de la botte (du géant) et sa taille (voir M).

Pour le panneau : Le rapport entre la hauteur de la face du musicien sur la photo et la hauteur du panneau sur la photo est égal au rapport entre la hauteur de la face et la hauteur de l'affiche réellement (voir M).

Prémisses d'une idée implicite d'échelle

Concept-en-acte : Une notion d'échelle est implicitement en jeu à travers la distinction (et association) entre mesure sur le dessin et mesure dans la réalité d'un même objet (exemple taille d'une personne). L'extrait du verbatim suivant illustre ce concept-en-acte :

> Ch : Tu vas m'expliquer comment tu as trouvé 5 mètres 40 (longueur du panneau publicitaire).
> L : Ben j'ai coupé 30 bouts de ficelle pour que ça fasse plus vite. Là, j'ai genre mesuré, en premier j'ai mesuré, les 30 bouts de ficelle. Je vois combien de fois le monsieur (sur la photo correspond à un bout de ficelle) rentre là. C'est quoi la tête du monsieur.

> Ch : Le bout de ficelle, ça représente quoi, selon toi ?
> L : *Ça représente la taille du monsieur. Ça représente genre 180.*
> Ch : Comment tu l'as fait ici, c'est ça?
> L : Ça représente 180. Là, j'ai fait, j'ai coupé les bouts de ficelle, j'ai fait un bout de ficelle, ensuite un autre, ensuite un autre, on déplace jusqu'à ce que ça fasse 8 bouts de ficelles en tout qui rentrent. Là, j'ai fait 8 x 180, ça m'a donné 540. (SP2 S307 : 30 à 8 :31, vidéo 2)

On retrouve également ceci pour F qui fait comme si x cm sur la photo représentait x m dans la réalité comme en témoigne l'extrait du verbatim ci-dessous :

> F : On a fait comme si ça c'était 1 m [F considère 1 cm = 1 m].
> Ch : Ok. Tu fais comme si, ce qui est là, le 1 ici.
> F : Si on était dedans, si on aurait une vraie règle de 1 m,
> Ch : Ok!
> F : On mesurait comme ça. Ce qu'on a fait.
> Ch : Tu t'es dit le 1 ici, je fais comme si c'était 1 m. C'est ça ?
> F : Oueh.
> Ch : Mais tu sais que ce n'est pas un mètre.
> F : oueh (SP2 S3 : 07 : 32 à 08 : 02, vidéo 2)

Des construits aussi par rapport à la mesure

Théorème en acte : la propriété suivante est mise en action: le résultat de la mesure d'une grandeur à l'aide d'un certain étalon donné (grandeur qu'on reporte) varie en fonction de la grandeur à mesurer (exemple : le report ne sera pas toujours le même, pour F ce sera 10 fois, pour un adulte comme Victor ce sera plus, pour le géant ce sera beaucoup plus) comme en témoigne l'extrait du verbatim suivant :

> F : […]Il, parlant de B, a multiplié le 12 par le 1,80 ce qui a donné le 21, 60 m
> Ch : Est-ce que c'est une méthode qui marche selon toi ?
> F : Dépendant de la baisse. Non pas vraiment.
> Ch : Pourquoi?
> F : Parce que comme par exemple, là c'est un adolescent, si on prendrait par exemple M. Victor, combien de fois ça ferait 1,80, ça ferait plus que 12 (SP2 S3 07 : 54 à 08 : 27).

(voir aussi B dans le problème du géant (sa stratégie RTB): il reporte un certain étalon sur sa hauteur, arrive à un certain nombre de reports, en déduit que ce nombre de reports

sera plus grand pour le géant).

Comment ces résultats de notre étude se comparent-ils aux travaux de recherche menés par le passé sur le problème de géant?

4.2.5. Retour sur les recherches portant sur le pied de géant

Le problème du pied de géant, repris dans notre étude, est tiré, comme nous l'avons précisé au chapitre 3, de Rauescher et Adjiage (2014). Nous revenons ici sur cette recherche menée par des didacticiens des mathématiques et qui a donné lieu à plusieurs publications (Rauescher, Adjiage, Beliaeva, 2009; Adjiage, Rauscher, 2012; Rauescher, Adjiage, 2014). Ce retour permettra de mettre en lien les résultats des analyses que nous avons présentées précédemment, dans le cas du pied de géant, avec les résultats de Rauscher et Adjiage.

Rappelons tout d'abord le contexte de cette recherche, quelque peu différent du nôtre.

Dans les recherches de Adjiage et Rauscher, l'expérimentation prend place dans des classes régulières du primaire, des classes de CM2 (enfants de 10-12 ans), provenant de différents milieux, dont certains en zone prioritaire (Rauscher et al., 2009). Dans ces expérimentations, jamais les auteurs ne ciblent spécifiquement des élèves identifiés en difficulté. Il s'agit donc d'une première différence importante avec le contexte de notre étude.

Par ailleurs, la méthodologie mise de l'avant dans les études de Adjiage et Rauscher en est une d'ingénierie didactique. Une séquence autour de ce problème a été mise à l'épreuve dans es classes, s'étalant sur six séances, dont l'analyse va s'appuyer, comme dans toute ingénierie didactique, sur une confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Il ne s'agit donc nullement d'une méthodologie de recherche qui prend forme autour des « mathématiques des élèves », s'articulant sur celles-ci pour mieux en comprendre le dynamisme en interaction avec un certain milieu.

Enfin, le focus de cette ingénierie didactique est également différent du nôtre. La tâche du géant est ici conçue comme une tâche de modélisation, et on s'intéresse aux progrès réalisés par les élèves dans cette tâche de modélisation. L'analyse prend appui, pour cela, sur le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques (ETM) (Kuzniak, 2011) pour rendre compte du référentiel utilisé par les élèves (empirique et théorique) dans cette modélisation.

Un dernier parallèle avec les conditions mises en place, de part et d'autre, est intéressant à considérer pour cette comparaison. La production et l'utilisation par les élèves d'écrits réflexifs joue en effet un rôle important dans les conditions mises en place par Adjiage et Rauscher, l'hypothèse des auteurs étant qu'une pratique consistant à partager et reprendre les écrits de pairs, tout au long de la séquence, aide les élèves à développer les modalités du processus de modélisation. En d'autres termes, l'accent est mis sur le processus de modélisation par les élèves, et les conditions mises en place pour favoriser le développement de ce processus de modélisation portent sur la production écrite de textes de résolution par les élèves, ainsi que le partages de ces textes avec leurs pairs.

Nous retrouvons là une des conditions du milieu mise en place dans notre propre étude : on y retrouve en effet la rédaction d'une affiche par les élèves (en dyade) présentant la solution trouvée à d'autres amis (voir annexe H-1, 2ème phase); on y retrouve aussi la confrontation, par la suite, à d'autres textes produits par des élèves fictifs (voir annexe H-1, 3ème phase). Rappelons ici que ces affiches présentant des solutions différentes ont été construites sur la base des expérimentations réalisées par Adjiage et Rauscher (2012) et des stratégies que les chercheurs avaient mises en évidence.

Dans le milieu que nous avons aménagé, la production écrite des élèves joue donc un rôle important tout comme dans les études de Adjiage et Rauscher.

Que dire maintenant des résultats des travaux de Rauscher et Adjiage? Viennent-ils éclairer certains de nos résultats?

Les caractéristiques du problème du géant, telles qu'élaborées dans l'analyse a priori des chercheurs (Rauscher, Adjiage, 2014*)*, nous apparaissent intéressantes à reprendre pour comprendre comment certaines conditions du milieu ont pu jouer sur les stratégies des élèves :

- Aucun nombre n'est fourni dans l'énoncé;
- Résoudre ce problème nécessite de faire des hypothèses : taille d'un des hommes de la photo, proportions du géant, taille d'un pied d'homme…
- La réponse dépend des hypothèses et de la précision des mesures et des mesurages (stature d'un homme, semelle du géant,…);
- Personne ne connaît la « bonne » réponse, ni les élèves, ni le maître, ni les chercheurs;
- La réponse ne peut être qu'une estimation ou une fourchette (p. 4).

On perçoit bien dans nos analyses comment ces caractéristiques ont pu jouer, notamment la nécessité d'avoir recours à des hypothèses. On retrouve en effet le recours à une hypothèse établie sur la taille d'un homme dans plusieurs stratégies [voir la stratégie 3 (CGH-comparaison géant homme), la stratégie 4 (PTH-une taille du géant comme produit de la taille d'un homme) et la stratégie 6 (R_pGH-rapport multiplicatif entre le géant et son pied)].

On voit apparaître aussi des hypothèses sur les proportions du géant (par rapport à l'homme, à son pied). Ainsi dans la stratégie 5) (RTB), on fait l'hypothèse que si le nombre de reports d'un certain étalon, la hauteur de la botte, est de tant pour arriver à la taille de l'homme, son report pour la taille du géant sera plus (voir B). Ou encore dans la stratégie 4 (PTH), une taille du géant est établie en multipliant la taille d'un homme par un certain coefficient, ou encore dans la stratégie 6, un rapport multiplicatif est établi entre la taille du géant et son pied.

Cette analyse a priori ne rend toutefois pas compte de caractéristiques autres qui ont joué sur le processus de résolution des élèves, comme le montrent nos résultats. Ainsi la condition « géant partiellement visible » apparaît une des conditions du milieu ayant joué sur le processus de résolution des élèves identifiés en difficulté : la visualisation du géant dans son entier est indispensable pour pouvoir rendre compte de sa taille (GI-stratégie 1, élève R), l'élève entre sur la résolution par les caractéristiques visibles du géant (MCG-stratégie 2, élèves C, J, L) . Cette condition ne ressort pas dans l'analyse de Rauscher et Adjiage, pas plus que ne ressortait le recours à un ordre de grandeur approximatif de la taille du géant, permettant d'échapper à cette condition d'une visibilité complète du géant sur l'image (CGH-stratégie 3, élève F).

L'analyse des premières productions des élèves à l'aide des Espaces de Travail Mathématiques personnels (Rauscher, Adjiage, 2014) fait ressortir des éléments qu'il nous semble intéressant également de mettre en parallèle avec nos analyses.

L'analyse des chercheurs se centre ici sur six textes de résolution qui sont représentatifs de l'ensemble de la classe. L'étude de ces six cas permet de dégager trois grandes approches :

• Un découpage du corps du géant en segments plus ou moins adaptés au calcul de la taille du géant (par exemple mesure de la demi-jambe visible et du pied, à partir desquels on évalue la taille des segments invisibles : autre demi-jambe, bras ; mesure de la jambe entière à partir de la mesure de la demi-jambe en doublant, mesure du corps à partir de la mesure de la jambe en doublant ; ou encore mesure de la taille en additionnant la tête, le ventre et la jambe considérés comme équivalents).

On ne retrouve pas une telle façon de faire dans notre étude, où 4 élèves (sur les 8, élèves R dans un 2^{e} temps C, J, L) vont s'attarder au mesurage de certaines parties visibles du corps du géant (voir stratégie 2-MCG : mesurage de certaines

caractéristiques du géant, le pied et la jambe) sans toutefois extrapoler à partir de ceci la mesure des parties invisibles et du géant.

• Un étalonnage imaginé du corps du géant indépendamment de ses parties. On retrouve ici chez Rauscher et Adjiage (2014) deux des cas analysés.

Voici un exemple de tel texte de résolution.

A mon avis la taille du géant est de 144 m [erreur de placement de virgule] Moi j'ai dit qu'il fallait faire 9 × 1,60 car 1,60 est la taille d'un homme et 9 çà veut dire 9 hommes

On retrouve cette idée de comparaison à un étalon qui serait la taille de l'homme dans notre propre étude (voir par exemple les stratégie 3 (comparaison géant homme), 4 (une taille du géant comme produit de la taille de l'homme) ou encore 5 (mesure de la taille du géant obtenu en ajustant le nombre de reports considéré)

• La recherche d'un coefficient de dilatation de l'homme au géant

La taille du géant fait à peu près 5,40 m car la taille d'un homme mesure environ 1 m80 puis je multiplie par 3,5 180 ×.....= 500 180 × 2 = 360 ×1,5 = 540

Cette recherche d'un coefficient multiplicatif est visible dans notre étude dans les stratégie 4 (une taille du géant comme produit de la taille de l'homme), et 6 (un rapport multiplicatif établi entre la taille du géant et l'homme via son pied).

Ainsi certains éléments communs ressortent, comme nous le montre ce qui précède, mais les stratégies diffèrent aussi sur certains points dans les deux études. La référence, pour ceux qui restent polarisés sur le géant, montre ainsi que dans un cas (Rauscher et Adjiage, 2014), on a recours à des théorèmes-en-acte liant la mesure du géant à ses parties : la taille du géant est égale à la somme de la mesure de certains segments du corps (pieds, jambes, bras) ; le corps est formé de trois parties considérées comme

équivalentes (tête, ventre, jambe) pour le calcul de la taille du géant. Dans l'autre cas (Mouboli, cette thèse), les élèves restent focalisés sur la partie visible du géant sans pouvoir en déduire la taille (stratégie 1), mesurent ces parties visibles sans pouvoir en induire la taille du géant (stratégie 2).

De plus, on observe que pour sortir de la photo et accéder aux dimensions réelles, dans les deux études, les élèves :

Soit substituent directement les mètres aux centimètres. Rauscher et Adjiage parlent ici d'un référentiel empirique qui est le suivant : « sur la photo on mesure en cm, dans la

réalité on mesure en m ». Le changement d'échelle d'une feuille de papier au réel se fait ainsi en substituant directement les mètres aux centimètres. On retrouve effectivement ceci pour plusieurs élèves (C, R, B).

Soit prennent en compte un élément extérieur au géant (un des hommes de la photo), estiment sa taille réelle et la mettent en rapport avec celle du géant. On retrouve ceci avec la stratégie produit de la taille d'un homme (PTH) (J, L, B au moment 2); comparaison géant homme (CGH).

Le travail de mesurage de certaines grandeurs identifiées par les élèves se fait principalement, dans le cas de la recherche de Rauscher et Adjiage, à l'aide de ce qu'ils appellent le double décimètre (règle graduée), alors que dans Mouboli (cette thèse), on observe le recours par les élèves à des unités non conventionnelles (réglettes Cuisenaire, écart entre deux doigts reproduisant un étalon, etc) qui seront ensuite transformées en cm, puis en mètres dans le passage aux dimensions réelles. Il faudrait ici mieux connaître les conditions mises en place dans l'ingénierie didactique (outils mis à la disposition de l'élève) pour pouvoir conclure sur cette différence qui illustre une diversité d'approches plus grande dans notre cas dans les mesures effectuées.

4.3. Analyse de la situation-problème « Défi climat »

Cette situation-problème (SP) en est une de type scolaire[146]. Elle s'inspire en effet directement d'une situation-problème expérimentée en milieu scolaire, en secondaire 1, dans le cadre des évaluations[147] de la compétence 1. Son aménagement a été toutefois modifié pour permettre, *dans un premier temps*, une entrée progressive de l'élève dans le contexte : introduction du projet dans lequel l'école a décidé de s'impliquer. Aucun nombre n'est fourni à cette étape sauf celui associé à l'objectif que l'école s'est donné, celui de réduire de 1 million de kilos la quantité de CO2 (voir annexe I, protocole première partie).

Les informations numériques, utiles à la réalisation du projet, sont fournies *dans un deuxième temps* (voir annexe I, 2ème partie), non pas d'un bloc et par écrit, comme c'était le cas dans l'épreuve initiale, mais dans 3 enveloppes que l'élève peut ouvrir à sa guise et manipuler :

D1 (dossier 1) : répartition des élèves qui participent à défi climat (information donnée sous forme de diagramme circulaire; répartition donnée en %);

D2 (dossier 2) : comparaison entre le nombre d'employés et le nombre d'élèves qui participent à Défi climat (présenté sous forme de tableau);

D3 (dossier 3) : quantité de CO2 économisée;

- D3 (1) : par geste fait par personne (sous forme de tableau);
- D3 (2) : par type de récupération (sous forme de tableau);
- D3 (3) : quantité d'appareils électroniques portés à recycler (sous forme d'histogramme).

[146] L'analyse de cette situation et des raisons qui nous ont conduit aux choix retenus, dans son aménagement et son contenu, a été menée au chapitre 3. Nous ne faisons ici que rappeler ses différentes parties.

[147] Nous n'avons pas les résultats de ces évaluations.

Le contenu de certaines informations a par ailleurs été légèrement modifié par rapport à la situation initiale : formulation complète en mots du taux de CO2 récupéré par kg (dossier 3(2); formulation complète en mots des relations quantitatives entre le nombre d'employés et le nombre d'élèves participant au projet (dossier 2); graduation incomplète des axes dans l'histogramme (dossier 3(3)); et information manquante dans le tableau (dossier 3(2)) (voir annexe I, protocole 2ème partie).

Notons enfin que dans la situation-problème proposée, il y avait *une dernière tâche* qui consistait à planifier, si l'objectif n'était pas atteint, les achats qui permettraient d'atteindre celui-ci (réduire de 1 million de kg la quantité de CO2), en tenant compte d'un certain nombre de contraintes, notamment un budget de 8500 $ pour assurer les différentes dépenses liées au projet (voir annexe I, protocole, 3ème partie). Trois dossiers sont alors remis aux élèves.

Dossiers remis aux élèves

D4 : matériel à acheter (supports à vélos, gourdes d'eau réutilisables, bacs à compostage et arbres de différents types);
D5 : prix de la quincaillerie (prix incluant les taxes);
D6 : prix des arbres chez le pépiniériste.

Rappelons que la résolution de cette SP s'est étalée sur 4 séances.
Comment aborder l'analyse de cette situation, de nature quelque peu différente de celles qui précèdent? L'étude menée par Lajoie et Bednarz (2016) sur la notion de situation-problème, telle qu'elle apparaît dans le programme des années 2000 et les documents associés, pointe certains choix qui sous-tendent la construction de ces SP scolaires : présence de plusieurs données, de plusieurs contraintes, de divers modes de représentation, d'un énoncé très long en mots. La complexité annoncée par le programme, qui caractérise ces SP, réside ainsi surtout, comme le montrent les auteures, dans la gestion de multiples données et contraintes apparaissant tout au long de l'énoncé, bien davantage que dans des exigences fortes sur le plan conceptuel (voir

pour une analyse précise de cette complexité mise de l'avant en lien avec une SP, Lajoie, Bednarz, 2016).

Cette analyse a priori s'applique à la SP initiale « défi climat ». En effet, bien que plusieurs connaissances mathématiques soient mobilisées dans la situation proposée (pourcentages, fractions, nombres décimaux, taux, lecture de diagrammes circulaires ou d'histogrammes, calculs mettant en jeu différentes opérations), la situation ne mobilise, pour une grande part, qu'une mise en fonctionnement technique de ces connaissances[148], la résolution globale se ramenant à une résolution de sous-problèmes relativement simples. Il y a ainsi 4 sous-problèmes :

sous-problème 1 : calcul du nombre d'élèves faisant un geste spécifique (décodage du diagramme circulaire, calcul de pourcentage);

sous-problème 2 : calcul du nombre d'employés faisant un geste spécifique (calcul d'un pourcentage ou d'une fraction d'un nombre);

sous-problème 3 : quantité de CO2 économisée par les participants par le recyclage : multiplication et addition

sous-problème 4 : décodage de l'histogramme, multiplication et addition, puis totaL

Sa complexité réside surtout dans la gestion des multiples données et contraintes.

Pour tenir compte de cette complexité particulière aux SP de type scolaire, notre analyse va prendre un chemin quelque peu différent de celui pris antérieurement pour les autres types de situations (pavage de carrés; pied de géant). Nous abordons l'analyse suivant deux dimensions :

[148] Les modifications apportées à la situation initiale induisent une certaine réflexion locale dans l'interprétation, par exemple, de l'histogramme (il ne s'agit pas juste d'un simple décodage) ou le repérage de l'opération à effectuer (pas nécessairement immédiat).

(1) la gestion, d'une part, des données multiples fournies (la manière dont l'élève se retrouve dans ces données, les traite, les met ou non en lien).

(2) les stratégies plus précises, d'autre part, développées par les élèves dans la résolution de chacun des sous-problèmes (liés au traitement de données particulières).

Cette analyse permettra ainsi de dégager la trajectoire de résolution suivie par chacune des dyades, ou triades[149] ou des élèves individuellement pour se retrouver dans le dédale de données et les stratégies plus précises de résolution aux principales étapes de cette trajectoire, faisant apparaître à cette occasion les construits développés par les élèves dans cette résolution, ainsi que les difficultés rencontrées.

Nous reprenons ci-dessous les éléments qui se dégagent de l'analyse pour chacune des dyades, avant de revenir plus globalement sur les résultats.

4.3.1 Analyse de la dyade J et L dans la situation Défi climat (vont-ils pouvoir atteindre l'objectif de réduire de 1 million la quantité de CO2?)

4.3.1.1 Reconstruction de la trajectoire de la gestion des données fournies par les élèves[150] :

Nous reprenons dans les encadrés les grandes lignes de la trajectoire.

D2 (très bref/ information lue mais pas vraiment traitée à ce stade)

L regarde très brièvement le dossier 2 (tableau entre le nombre d'employés et le nombre d'élèves), comme on peut le voir dans ce qu'elle dit, mais cette information n'est pas vraiment reprise.

> L : « ¨Ça c'est le nombre d'employés par rapport au nombre d'élèves » (SP3, S1 15 : 45 à 15 : 49, vidéo1).

[149] La participation des élèves en triade n'est intervenue qu'à une occasion.

[150] Nous reviendrons plus précisément sur le traitement qu'elles font de ces étapes. À ce stade, nous ne faisons qu'énoncer la manière dont sont gérées les données.

D3 (2) : long temps sur une information du dossier 3 (tableau relatif à la quantité de CO2 économisée pour les différents types de récupération) / travail sur ce tableau

L et J vont travailler très longtemps sur ce tableau, en l'interprétant et en cherchant à transformer certaines des données[151] (SP3 S1 14: 40 à 23: 57 (vidéo 1) et 00: 01 à 03: 58 (vidéo 2) verbatim p 7 à 10).

D1 : long temps sur le dossier 1 (répartition des élèves qui participent à Défi climat) / travail qualitatif en contexte s'éloignant du dossier 1

L et J vont extrapoler des modifications possibles dans le contexte, les informations n'étant pas traitées pour elles-mêmes (SP3 S1 03 : 58 à 09 : 55 (vidéo 2), verbatim p 10 à 13)

Retour à D3 (2) provoqué par le chercheur/travail de nouveau sur le tableau (SP3 S1 09 : 55 à 18:43 vidéo 2), verbatim p 13 à 17)

L et J reviennent de nouveau sur la signification des informations contenues dans ce tableau.

D2 est regardée pour la 1ère fois (verbatim p. 17, fin de la page) et un lien est établi entre les informations du dossier 2 et du dossier 1

L : C'est la comparaison entre le nombre d'élèves qui font le vélo….
J : Attends. Je crois ça ici (diagramme du dossier 1) ça va avec ça (dossier 2)
[…] ouais, tchek, le nombre d'employés
L : Ça va avec ça (brandit le diagramme du dossier 1)
J : C'est ce que je te dis
L : Tu dis que ça va avec ça
[….]

[151] Voir plus loin le travail des élèves J et L sur le tableau relatif à la quantité de CO2 économisée pour les différents types de récupération.

J : Parce que ici ça dit le nombre d'employés qui vont en vélo est le tiers du nombre d'élèves allant à l'école en vélo. Et là (réfère au diagramme circulaire) on dit que les élèves qui viennent à l'école en vélo c'est 15% (SP3 S1 18 : 25 à 19 : 14, vidéo 2).

Puis un lien est fait entre deux informations fournies dans le dossier 3 (verbatim, fin de la page 18) : D3 (3), l'histogramme, et D3 (2), le tableau, dans lequel il manque le nombre de kg d'appareils électroniques portés à recycler

L : Ça (L pointe l'histogramme) ça va avec ça (informations sur la récupération, pointe le tableau D3 (2)
Ch : Ça veut dire que ça va avec ça. Pourquoi?
J : Parce que ici (J s'adresse à L), ici (montre l'histogramme) ça veut dire les vieux appareils électroniques et ça dit consoles de jeux, portables, imprimantes et ordinateurs, c'est un diagramme, puis ici (elle pointe le tableau, la ligne vieux appareils électroniques portés à recycler)
[….]
J : Ça dit que ça c'est en kilogrammes, tu fais juste calculer (SP3 S1 20 : 05 à 20 : 38, vidéo 2).

Des liens entre les informations fournies dans les différents dossiers se tissent ainsi progressivement, et on commence à percevoir l'enchaînement de ce qu'il y aura à faire (verbatim p. 19)

L : […] c'est comme si c'étaient des petits groupes (elle fait des catégories). Il faut trouver la réponse, non mais attends. Ça c'est un petit groupe (information du dossier 2 et diagramme circulaire du dossier 1), ça c'est un petit groupe (histogramme et tableau de récupération avec entre autres les vieux appareils). On trouve la réponse de ce petit groupe (histogramme et vieux appareils du tableau), on trouve la réponse de ce petit groupe (diagramme circulaire et dossier 2) puis grâce à la réponse de ces petits groupes, on va trouver ça (la quantité de CO2 économisée avec ces gestes sur toute l'année (…) (SP3 S1 20 : 50 à 21 : 05).

J reconstitue ainsi les liens entre les différents dossiers. Par exemple, J observe de nouveau que le nombre de kg récupérés dans l'année à partir de vieux appareils électroniques (D3 (2)) n'est pas connu mais les nombres des kilos recueillis apparaissent dans l'histogramme (D3 (3))

4.3.1.2 Analyse des stratégies de résolution dans chacun des « sous-problèmes » (mis en évidence par la trajectoire précédente)

a) Le travail sur le tableau-D3(2) (récupération dans l'école/ nombre de kg récupérés dans l'année/ quantité de CO2 économisée) (verbatim p 7 à 10 et p 13 à 17)

Une stratégie centrée sur la variation des quantités en présence (pour augmenter la quantité de CO2 économisée) : Les élèves, dans ce cas, extrapolent d'autres quantités possibles (autres que celles données dans l'énoncé) de manière à augmenter la quantité de CO2 économisée.

Ainsi L interprète chacun des taux dans le tableau (quantité de CO2 économisée par kg recyclé), compare ces taux entre eux, voyant que 80 kg est le plus haut taux économisé, et extrapole en conséquence sur ce qui serait le plus intéressant à recycler pour économiser encore davantage. Elles entrent dans le contexte réel, dans cette transformation qu'elles essaient de faire (une première emprise du contexte réel).

> L : […] Bon ok ça c'est les récupérations à l'école, pour chaque kilo pour ça, ils économisent 2 kilos de CO2 là, ça (vieux appareils) c'est 80 kilos de CO2, là ils devraient…vieux appareils électroniques à recycler parce que juste pour les vieux appareils électroniques portés à recycler il y a juste 80 kilos de CO2 qui ont été recyclés.
> Ch : Toi ce que tu dis, je veux bien comprendre, tu dis qu'il devrait y avoir plus d'appareils à recycler, pourquoi?
> L : Ben parce que genre de ce qu'on sait maintenant, les appareils qu'on a recyclé, ça fait 80 kilos de CO2.
> Ch : Ah ah!
> L : S'il y en a plus, ça va faire plus (SP3, S1 18: 45 à 19: 54 vidéo1).

J interprète difficilement le taux, comme on le voit dans ce qui suit lors de son interaction avec L. Puis elle cherche à augmenter les quantités déjà connues (données dans le tableau) sans prendre en compte, dans son cas, le taux le plus intéressant.

> J : Je suis mêlée parce qu'ici ça veut dire qu'il faut baisser le CO2.
> L : Mais c'est ça!
> J : Ou augmenter?
> Ch : Baisser

> L : Baisser, ça c'est baisser, baisser. Ça baissait de 80 kilos.
> Ch : Toi tu n'avais pas compris que ça baissait. C'est ça?
> J : Moi je pensais que ça augmentait.
> L : Ça (pointe la ligne des vieux appareils), ça baissait de 80 kilos, ça (pointe la ligne du papier), ça baissait de 2 kilos seulement, et ça (le compostage), ça baissait de 0,8.
> J : Ben c'est ça alors les appareils électroniques. Ben c'est correct, il faudrait augmenter les autres (sous-entendu le papier recyclé et le compostage) (SP3, S1 20 : 12 à 20 : 44, vidéo 1).

Une argumentation va s'en suivre entre les deux élèves autour de ces deux stratégies différentes, jouant sur la variation de différentes quantités en présence : augmenter là où le taux économisé est le plus intéressant versus augmenter les deux quantités connues.

Ainsi J agit sur les quantités *connues* (12000 kg de papier, 900 kg de compost), en faisant varier cette quantité (deux fois plus par ex de papier), pour augmenter la quantité de CO2 économisée (on économise 2 fois plus) versus on augmente, parmi les différentes quantités considérées, la quantité où le taux économisé est le plus intéressant, dans ce cas les vieux appareils (L).

> J : Il faudrait augmenter en kilogrammes les papiers journaux puis le compostage pour que ça donne plus de kilos économisés de CO2.
> Ch : Qu'est-ce que tu veux dire qu'il faudrait plus?
> J : Les appareils c'est correct, ils ont recyclé mais ça ne dit pas combien ils ont récupéré mais ça dit que ça économise 80 kilos.
> Ch : D'accord.
> J : Ici ça dit qu'ils ont récupéré 12 000 kg mais ça économise juste 2 kilos de CO2, ici c'est 900 kg mais ça économise 80 kilos de CO2.
> Ch : Ok toi tu voudrais augmenter quoi?
> J : Ces deux-là (J pointe le papier et le compost)
> Ch : Ah tu voudrais augmenter la quantité qu'on va récupérer. C'est ça ?
> J : ouais
> L : […] mais je me demande comment on va faire pour que ça soit plus parce que tu vois, pour 12 000 kgs, c'est 2 kilos de CO2 de moins
> Ch. Ouais
> L : Si on récupère 24 000 kg ça sera combien de CO2 de moins? Il faudra diviser par 2 aussi?

J : Multiplier, je crois?
L : S'il y a 2 fois, c'est à dire qu'on va faire 2 fois moins, quatre, c'est ça, ça n'avance pas…
Ch : Ok
L : Alors que juste trouve combien de kilogrammes récupérés dans l'année (pointe les vieux appareils), il y a 80 kilos de CO2 de moins…ça serait juste une perte de temps (sous-entendu d'augmenter le papier et le compost) parce que
J : Ben au moins on pourra juste comme augmenter ces deux-là (papier et compost) de 2 fois plus
L : 2 fois plus ça fait 4, 2 fois, fois 2. Ben tu dis 2 fois, 2 fois plus.
J : Regarde c'est 12, 12 x 2 ça fait 24, c'est ça que tu dois faire, de 24 000 puis ça va augmenter de 1 kilo (SP3 S1 22: 33 à 23 : 57, vidéo 1 et SP3 S1 00 : 01 à 00 : 48, vidéo 2).

Difficultés

Dans cette argumentation, le même extrait montre la difficulté de cerner l'effet de la variation d'une quantité sur l'autre (voir L qui parle de diviser) qui apparaît clairement (Quelle opération? Doit-on diviser ou multiplier par 2?) comme le montre l'extrait qui suit :

L : Si on récupère 24 000kg, ça sera combien de CO2 de moins? Il faudra diviser par 2 aussi?
J : Multiplier, je crois? (SP3, S1 00 : 01 à 00 : 09, vidéo 2).

Les questionnements des élèves sur l'opération à effectuer se poursuivent comme le montrent les extraits des verbatim suivants :

L : Ce qui veut dire, moi je pense qu'il faudrait diviser par deux.
J : Mais moi, je ne sais pas si c'est bon, genre, le plus simple faire 2 x 12
[…]
Ch : Tu dis chaque kilo
L : Ça donne 2. Vu que 7 kilos ça donne 2, pourquoi pas juste diviser.
Ch : Y as-tu moyen de le savoir là? Ben essayer de raisonner pour voir si c'est multiplier ou diviser.
L : Attends parce que, là je ne comprends pas vraiment. Là je ne comprends plus rien.
J : Je ne comprends pas ton affaire de diviser.
L : Non, même moi, je ne comprends plus rien. Attends.
Ch : Vous pouvez l'écrire, vous pouvez noter si ça vous aide.

L : Non
J : Mais tiens. [J prend des crayons de couleurs]
Ch : Essayer de vous l'expliquer vous là. Vous le faites avec ça, Ok! Peut-être que ça peut vous aider de l'écrire. Comment on fait pour savoir si c'est multiplier ou diviser ou autre chose, peut-être que c'est autre chose?
J : Parce que ici ça dit que 1 kilogramme égal à 2, alors c'est 12 000. Comme mais moi je comprends que c'est 12 000 puis là comme c'est tout cela comme s'il y aurait 12 kilogrammes que je dois multiplier par 2 parce que 1 kilogramme est égal à 2. (SP3, S1 10:36 à 12 : 08, vidéo 2)

Des théorèmes en acte sous-tendent les propos des élèves (voir extraits qui précèdent)

(1) Plus le taux est élevé (quantité de CO2 économisé par kg d'objet recyclé), plus on augmente la quantité recyclée, et plus la quantité économisée est importante (L)

L : Alors que juste trouve combien de kilogrammes récupérés dans l'année (pointe les vieux appareils), il y a 80 kilos de CO2 de moins…ça serait juste une perte de temps (sous-entendu d'augmenter le papier et le compost)[…] (SP3 S1 22: 33 à 23 : 57, vidéo 1 et SP3 S1 00 : 01 à 00 : 48, vidéo 2).

Quantité d'objets recyclés	Taux CO2/kg	Quantité CO2 économisée
Un choix d'objets en fonction du taux le plus élévé	Plus élévé	Effet sur …

(2) Pour un taux donné, une variation de la quantité d'objets (par ex 2 fois plus) conduit à une variation semblable de la quantité de CO2 économisée (2 fois plus) (J)

J : Il faudrait augmenter en kilogrammes les papiers journaux puis le compostage pour que ça donne plus de kilos économisés de CO2… On pourra juste augmenter ces deux-là (papier et compost) de 2 fois plus (SP3 S1 22: 33 à 23 : 57, vidéo 1 et SP3 S1 00 : 01 à 00 : 48, vidéo 2).

Quantité d'objets recyclés	Taux CO2/kg	Quantité CO2 économisée
2 fois plus	Fixé	2 fois plus

b) Le travail sur le diagramme circulaire (Dossier D1) (p. 10 à 13)

Une stratégie mettant l'accent, dans un premier temps, sur une interprétation qualitative du diagramme et, très vite, une extrapolation en contexte qui sort des données précises données (un bel exemple d'emprise du contexte réel)

L repère la quantité la plus importante sur le diagramme (les élèves qui prennent l'autobus) mais ne cherche nullement à calculer celle-ci.

On essaie alors de jouer, comme on l'a fait précédemment pour le tableau, sur une variation des quantités de manière à augmenter la population qui a recours à ces gestes. Cette interprétation sort complètement du domaine mathématique pour se placer en contexte.

> L Bon! Répartition de 1200 élèves
> […] Heuh! Bon ceux qui prennent l'autobus c'est déjà quand même assez beaucoup mais ils devraient
> Ch. Ils sont où ceux qui prennent l'autobus?
> L Les verts
> Ch. Ok!
> L Mais je pense qu'il faudrait augmenter mais de toute façon, je ne pense pas que ça serve à quelque chose d'augmenter, que ça va servir, ça va servir mais je ne pense pas comment dire pas suffisant mais dans le sens, attendez qu'est-ce que je dis, je ne pense pas que c'est comme ça va être une réussite d'essayer d'augmenter les personnes qui prennent le vélo parce que tu vois il y a plein de paresseux parce qu'ils prennent l'autobus au lieu de prendre le vélo (fait un lien entre ces deux gestes) alors moi je pense qu'on devrait plus essayer d'augmenter le pourcentage des personnes qui utilisent une gourde d'eau (SP3, S1 02 : 45 à 03 : 58, vidéo 2)

Et là les deux élèves vont s'engager à fond dans le contexte pour trouver des moyens d'augmenter les personnes qui utilisent une gourde d'eau (on a complètement quitté les maths).

> L : Comme ça on prendra sous l'heure du midi au lieu de distribuer des jus genre dans de petites boîtes là mettre des jus dans les gourdes puis donner puis dire, ous pouvez les garder puis si vous voulez venir à la cafétéria puis si vous voulez avoir du jus vous devez avoir votre gourde ou en acheter un puis si vous voulez

> de l'eau, au lieu de prendre de l'eau dans les comment on appelle ça? Les abreuvoirs.
> Ch : Les abreuvoirs
> L : Prenez votre gourde, mettez de l'eau dedans, vous pouvez rester avec en classe mais juste battez vous pas avec.
> Ch : Ok!Eh!
> J : Mais moi je dirai que pas enlever les boîtes de jus à la cafétéria parce que ici ça dit, regarde, recycler papier, journaux, cartons
> L : (…) Dire aux professeurs d'interdire les élèves de sortir boire de l'eau (…)
> J : d'amener leur gourde
> L : d'amener leur gourde qu'on leur a donné pour mettre l'eau dedans pour passer toutes les deux périodes avec comme ça on gardera les boîtes de jus pour la cafétéria puis quand ils auront fini au lieu de mettre les boîtes de jus dans la poubelle ils les mettraient dans les boîtes de recyclage mais je sais que les personnes ne vont pas faire ça alors il faudrait mettre genre, alors il faudrait faire, comme genre il faudrait mettre la poubelle à côté du bac de recyclage comme ça les gens ils ne vont pas je sais qu'il n'y a pas de gens assez stupides pour prendre leur plat puis le jeter dans le bac de recyclage alors il faudrait comme avoir comme un surveillant qui dit non ça, ça doit aller dans le bac de recyclage. (Verbatim, J et L p.11 et 12)

Plus tard (2è séance), la quantité de CO2 économisée par les personnes utilisant chaque geste (vélo, autobus et gourde d'eau) sera traitée quantitativement, mettant alors en évidence différentes stratégies.

<u>Calcul du pourcentage en appliquant la règle apprise</u>

Le nombre total d'élèves est donné : 1200 élèves. La répartition des 1200 élèves par geste est donnée en pourcentage à partir d'un diagramme circulaire. J et L se proposent de calculer le nombre d'élèves par geste. Au départ, leur démarche ne semble pas facile. J et L se rappellent avoir vu le pourcentage à l'école primaire, mais ne savent plus comment procéder comme en témoigne l'extrait du verbatim suivant :

> L : Il faut faire 1200 divisé par 75 multiplié par 100? Ou encore c'est le contraire? Je crois que c'est 1200 divisé par 75 multiplié par 100 ou 1200 divisé par 100 multiplié par 75.
> J : Je sais qu'il faut faire division, multiplication mais on ne sait pas comment? (SP3, S2 12 : 22 à 12 : 47, vidéo 2).
> L : Je crois qu'il faut faire 1200 diviser par 100 multiplier par 75.

(SP3, S2 18 : 21 à 18 : 30).
J : Parce que toi tu m'as mêlé un peu. Parce que moi d'habitude, je sais que le diviser par 100, ça va à la fin (SP3 S2 19 : 56 à 20 : 02, vidéo 2).

Enfin de compte, les deux élèves aboutissent au même résultat en procédant ainsi :

1200 / 100 x 75 = 900 (L)
1200 x 75 / 100 = 900 (J)

Une stratégie reposant sur un point de repère [la moitié du diagramme] réinvesti dans le calcul des 75 % et dans l'estimation du 15 % et 10 %.

Comment trouver autrement le nombre 900 [Nombre d'élèves qui prennent l'autobus] sans faire de calculs? Une question posée par le chercheur, sur laquelle J et L vont passer du temps. Les réactions de L illustrent une mobilisation de différents ordres de grandeur.

L propose ainsi une stratégie reposant sur le réinvestissement de la moitié du diagramme circulaire, et de sa division en quatre secteurs égaux : la moitié plus la moitié de cette moitié (pour le calcul du 75%) et un peu plus/ un peu moins que la moitié du quart (pour le 15% et 10%). Les propos qui suivent illustrent clairement cette stratégie.

Ch. : Si je fais ça [L'expérimentateur pose une règle sur le diagramme circulaire en le divisant par deux]. Alors, ceci ça représente quoi?
L : Oh oui oui, ça, ça représente, oh mon Dieu, là, je sais, non on pourrait trouver la moitié de 1200, tu vois, c'est 600, alors ça, c'est comme ça, c'est 600, là ça on pourrait savoir genre, oui c'est ça que je voulais faire tout à l'heure mais à cause de J elle commence à faire des […] on pourrait le faire en 4 parties.
Ch : Ah c'est ce que tu voulais faire?
L : Oueh! [L divise le diagramme circulaire en quatre secteurs égaux]. On sait ça, c'est 600 [Moitié du diagramme]. C'est que là, cette partie, ça, ça vaut 600. C'est que là cette partie, ben genre, exemple moi je ne sais pas que ça vaut 300 là […]
Ch : Alors tu ne sais pas que ça vaut 300. Mais ça tu dis que c'est 600.
L : Ça c'est 600. Alors si ça c'est 600, ça aussi c'est 600 [Moitié du diagramme]. Vu que ça c'est la moitié de ça, ça c'est 300.

> Ch : Ok!
> L : 6, 3, 9 [sous-entendu 600 + 300 = 900]. Puis ça, ça fait 300 aussi ça fait que là 15 %, 10% donc je ferai donc genre comment dire un peu essayer de faire la moitié pas vraiment la moitié parce que 15 % c'est plus grand que 10 alors je me verrai genre 100 je dirai peut-être 180 bye puis 10 % ce serait 120 quelque chose. Parce que genre de toutes façons je sais que 80 + 20 ça donne 100 puis 100, 100, 80, 20. (SP3, S2, 07 :52 à 09 : 38, vidéo 3).

L fait remarquer que 300 peut s'écrire 160 + 140 mais selon elle, ces nombres ne représentent pas respectivement 15 % et 10 % de 1200 comme elle l'exprime ci-dessous :

> L : Je me dis ça pourrait être 160 et 140 [précédemment elle avait suggéré 180 et 120…] parce que 40 + 60 ça donne 100 puis si tu fais 100 + 100 ça donne 200 + 40 + 60 ça donne 300 c'est comme genre la moitié de ça [sous-entendu 600].
> Ch : Finalement le résultat c'est combien? C'est 140 ou 160?
> L : […] Ça peut pas être 140 ici ou160 ici parce que 15 [sous-entendu 15 %] c'est plus grand que ça [10 %] de 5 % alors que 40 et 60 c'est plus grand à peine de 20 %, ça [sous-entendu 10 %] c'est beaucoup plus petit que 140 et ça [sous-entendu 15 %] c'est beaucoup plus grand que 160 (SP3, S2 10 : 43 à 12 : 14, vidéo 3).

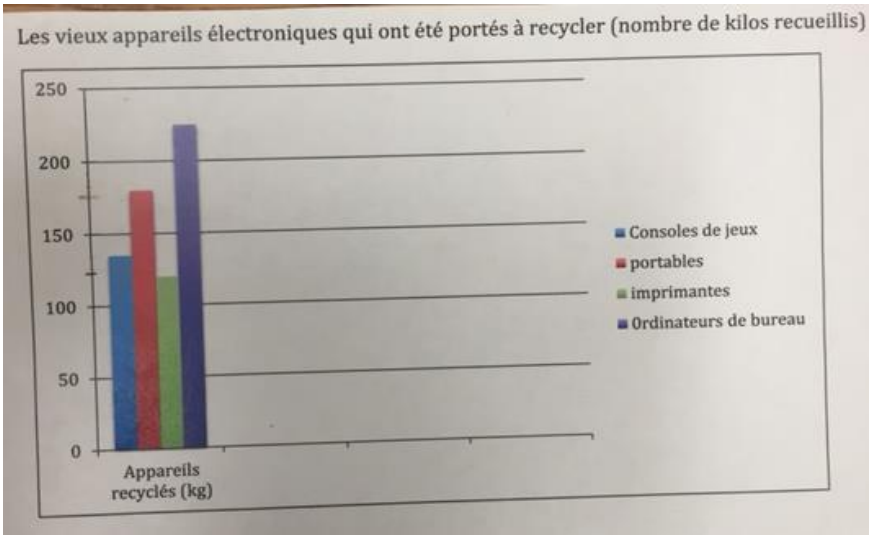
Des théorèmes en acte sous-tendant le travail des élèves (dans ce sous problème sur le diagramme circulaire)

Propriété additive en référence à un même tout : 75 % d'un certain tout c'est comme 50 % et 25 % de ce tout; 10 % et 15 % d'un certain tout c'est comme 25 % de ce tout.

Propriété additive et multiplicative : 75 % d'un certain tout c'est comme 50 % de ce tout et la moitié de 50 %

Comparaison de pourcentages en référence à un même tout : 10% plus petit que (la moitié de 25 %); 15 % plus grand que (la moitié de 25 %)

c) *Le travail sur l'histogramme après avoir établi le lien entre cet histogramme et l'information manquante dans le tableau (D3(2) (p 20 à 23))*

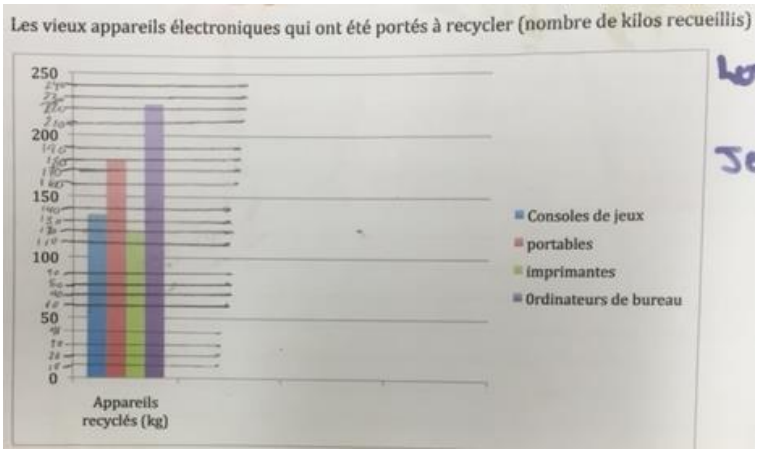


Une stratégie mettant l'accent sur une interprétation de la graduation de l'axe et la construction d'une sous-graduation

J donne un sens, dans un premier temps, à la graduation sur l'axe, ce qui lui permet d'interpréter certaines des quantités représentées (portables, ordinateurs de bureau) pour lesquelles l'ordre de grandeur est facile à repérer.

> J : Ben comme ici c'est comme un diagramme, c'est sur des bonds de 50, et là on a juste à trouver le kilogramme au total de ces quatre-là (quatre quantités représentées)
> Ch. D'accord…
> J : Ici (pointe le bâton des portables), je sais que c'est 175
> Ch. Comment tu le sais?
> J : Parce que c'est au milieu
> Ch. Le rose là, tu dis le bâton rose?
> J : Oui le rose, c'est la moitié, la moitié de 50 c'est 25
> Ch. Ok, eh donc ça ferait 175? (J acquiesce de la tête)
> Ch. C'est quoi ça les roses?
> J : Les portables
> Ch. Les portables, ok
> J : Le mauve ici ça ferait 225
> Ch. C'est quoi le mauve?
> J : Les ordinateurs de bureau.
> Ch. Ok comment tu vois que c'est 225?
> J : C'est au milieu (entre 200 et 250) (SP3, S1 22 : 31 à 23:25, vidéo 2).

J va alors faire apparaître une sous-graduation, qu'elle va construire, pour pouvoir donner un sens aux autres quantités représentées comme le montrent sa production et les extraits du verbatim, pages 21 et 22 ci-dessous.



J : Aussi on pouvait faire avec une règle
Ch : Ok! Eh!
J : On pouvait essayer de diviser […], le diviser en 5 parties
Ch : D'accord
J : Puis chaque partie ça va être 10.
Ch : Ok! Eh! Tu veux dire la graduation qui est ici là, tu la diviserais en 5 parties c'est ça? Vas-y. En as-tu une règle? On l'a eue.
L : C'est quoi une règle de quoi, 30 cm ou 15?
J : 15
L : On va faire 15, 15, 30
J : Mais c'est petit. Je peux le faire.
Ch : Oui, oui, vas-y. Tu peux le faire dessus.
L : Je ne comprends pas. Tu fais quoi?
Ch : Oui ce serait important que L comprenne.
J : Tu vois ici c'est de bonds de 50. C'est genre comme division par
L : par 10
J : Oui par 10 ça va donner 10x5. Ça ici on je vais le couper en 5.
L : Tu as coupé?
J : Mais pas couper
L : Tu as rajouté de 5?
Ch : Ben elle a rajouté des traits.
L : Des traits de 5?.
J : Ouais comme des bonds de 10 comme ça?
L : OK! Eh! Et là 1, 10, 20, 30

> J : Et puis là ce serait facile de voir.
> Ch : Ok! Eh!
> L : Ok! Eh! OK! C'est une très bonne idée, 200 ça se rapproche de 250 puis là ils nous disent 200, 250, comment tu vas faire quand ça va faire 10, 20, 40, 50 alors qu'ici ils nous disent que genre c'est 225? Non mais dans ce sens que, genre, tu dis que tu vas faire de bonds de 10, c'est bon mais sur le diagramme c'est écrit exemple si je prends l'ordinateur de bureau il y a 225 % des ordinateurs de bureaux qui ont été apportés au recyclage.
> J : Ouais.
> L : Si tu fais exemple 0, 10, 20, 40, 50, ça va pas arriver à 225?
> J : Ben c'est parce que là je vais juste faire 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bla, bla. Puis c'est comme ça. Mais ça je l'ai déjà trouvé le mauve puis le rose, portables, ça c'est pas un problème […].
> (Extrait verbatim, p. 21 et 22).

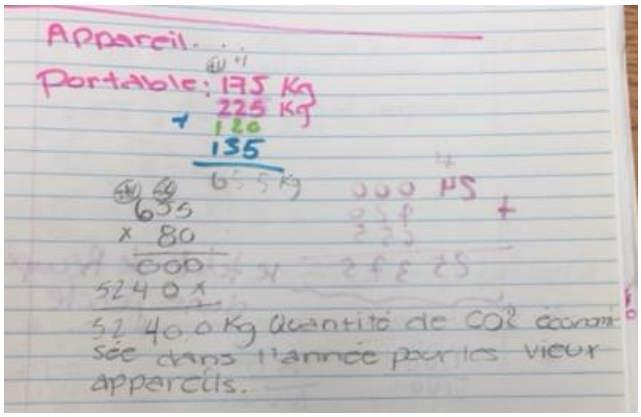
On perçoit dans cet extrait que l'initiative vient dans ce cas de J, L tentant de comprendre la démarche de J qu'elle s'appropriera progressivement.

d) Le réinvestissement des résultats précédents dans le calcul global

J et L réinvestissent les résultats précédents (travail sur l'histogramme) dans le calcul du nombre de Kg récupérés dans l'année pour les vieux appareils électroniques portés à recycler comme en témoigne l'extrait du verbatim et la production de la dyade ci-dessous.

> J : Alors maintenant on va juste calculer tout ça [sous entendu tous les appareils portés à recycler] (Extrait verbatim, p. 23).

Production de J et L



Les deux élèves aboutissent aux résultats suivants qui correspondent à :

Consoles de jeux : 135 Kg, portables : 175 Kg, imprimantes : 120 Kg et ordinateurs de bureau : 225 Kg

Le calcul précédent qui a abouti au résultat 655 kg (le total), l'exploitation judicieuse des éléments du dossier D3 (2) vont alors permettre à J et L de trouver pour chaque récupération dans l'école la quantité de CO2 économisée comme en témoigne l'extrait du verbatim suivant :

> J : Chaque kg permet d'économiser 80 kg de CO2 […]. Je crois qu'on doit faire 655 fois 80. (SP3, S2 08 : 26 à 09 : 21). […] 1200 x 2 après on fait 900 x 0,8 pour trouver les papiers journaux, les cartons (sous-entendu quantité de CO2 économisée) […] (SP3 S2 18 :41 à 18 : 49, vidéo 1).

Les élèves font des opérations et obtiennent les résultats suivants que nous résumons dans un tableau.

Récupération/Transport	Opérations	Quantité de CO2 économisée en kg dans l'année
Vieux appareils	655 x 80	52 400
Papier, cartons, journaux et bouteilles	12 000 x 2	24 000
Compostage de jardin	900 x 0,8	720

Transport à vélo	240 x 900	216 000
Transport en autobus	1080 x 650	702 000
Usage de gourde d'eau réutilisable	230 x 10	2 300
Total		997 420

Ensuite les élèves font 1 000 000 - 997420 = 2580 kilos de CO2. Il reste donc 2680 kilos à trouver à partir des arbres à acheter.

4.3.1.3 Analyse de l'exploitation par les élèves de nouvelles données [de manière à atteindre l'objectif fixé : réduire de 1 million de kg la quantité de CO2 produite]

Stratégie pour le choix des supports à vélos

La démarche de J qui travaille seule[153] pour le choix des supports à vélo consiste à trouver, pour chaque modèle, le nombre de groupes nécessaires pour placer tous les vélos (addition répétée), en contrôlant, dans les cas où cela n'arrive pas juste, la signification de ce qui reste (places manquantes ou places en trop).

Pour le modèle A : elle fait les sommes successives (8+8+…) pour trouver 240, autrement dit elle cherche combien de 8 (places disponibles dans un support à vélos) répétés donnent 240 (nombre des personnes qui vont à vélo). Puis elle écrit 8 x 30 =240. Ce résultat est réinvesti dans le calcul du prix :
125$ (prix d'un support) x 30 = 3750 $ comme elle l'explique dans l'extrait ci-dessous :

> J : J'ai choisi le modèle A parce que sur ma calculatrice j'ai fait 8 + 8 + 8 + 8 puis là j'ai calculé combien de 8 je mettais jusqu'à tant que ça donne 240 puis là ça m'a donné 8 ben 30 huit. Alors j'ai fait 8 fois 30 ça m'a donné 240 places. Ben, je vais acheter 30 supports à vélo avec le modèle A qui est disponible de 8 places, alors j'ai fait 8 fois 30, ça m'a donné 240 places. J'ai fait 125 x 30 parce que je vais acheter 30 modèles, ben 30 supports là et là ça va donner 3750 $.
> Ch : Ok! (SP3 S3 20 :00 à 20 : 52, vidéo 3).

[153] L était absente à cette séance.

Il faut noter ici que sa première stratégie, lors de l'entrée dans la tâche, avait été de faire 8 x 240 (difficulté à reconnaître l'opération d'emblée). On observe donc un réajustement : en travaillant en terme d'addition répétée, elle contrôle le sens.

Pour le modèle B, le raisonnement est semblable. Elle essaie de se rapprocher de 240 en effectuant le produit de 11 (nombre de places du modèle) par 22 qui donne 242 (11 x 22 = 242). Selon elle, il y aurait deux places en trop. Puis, elle fait : 11 x 21 = 231. Il manquerait 9 places. *Elle contrôle ainsi le sens de ce qu'elle fait dans le contexte.*

Pour le modèle C, J s'engage dans le même raisonnement que précédemment, c'est-à-dire 18 x 13=234 places (6 places de moins) et 18 x 14 = 252 places (12 places en trop).

Finalement, elle choisit le modèle A (125 $ x 30 = 3750 $) éliminant ainsi les modèles B et C. Son choix repose sur le nombre de supports qui peuvent prendre exactement 240 personnes qui vont à vélo en se remémorant la contrainte en lien avec le budget alloué à l'école (8500 $ pour les différentes dépenses liées au projet).

L qui était absente (au moment où J avait fait ce qui précède) propose de diviser 240 par 8 au lieu de faire 8 + 8 + 8… comme elle l'exprime à J

> L : Pourquoi tu n'as pas divisé 240 divisé par 8?
> J : Parce que je n'avais pas eu l'idée.
> L : Si j'étais là, ça aurait été très facile.
> Ch : Tu aurais fait 240 par 8.
> L : Ouais! 240 divisé par 8, ça m'aurait donné 30. Tu n'aurais pas été obligé de faire 8 + 8 + 8 infinis jusqu'à 30.
> Ch : D'accord, mais ce n'est pas grave, vos deux idées sont bonnes. (SP3 S4 08 :01 à 08 :28, vidéo 1).

<u>Stratégie pour le choix des gourdes d'eau</u>

La stratégie pour le choix des gourdes d'eau est la même que celle des supports à vélo. Un choix guidé par l'idée de trouver le nombre exact de personnes qu'on peut rejoindre avec chaque lot. En effet, elle procède ainsi : Modèle 1 : 15 lots de gourdes x 16 = 240

(il y a 10 en trop) et 15 x 15 = 225 (il en manque 5) car il y a 230 personnes qui utilisent les gourdes d'eau. Pour le modèle 2, elle fait 10 lots de gourdes x 23 = 230 et 28 $ x 23 = 644$.

Trois éléments ressortent (au regard de ces sous-problèmes semblables) :

- *Différentes stratégies :* addition répétée (nombre de groupes de personnes permettant de rejoindre tant de personnes) (J); reconnaissance de l'opération : division (L);
- *Un contrôle sur l'activité de résolution :* (J) donne un sens en termes de surplus ou manque;
- *Un choix (entre les modèles)* guidé par un nombre exact à atteindre (240 personnes) et non par le prix (le plus avantageux).

Stratégie pour le choix des arbres

-Le repère d'une information manquante

J repère qu'il manque une information dans les données du problème. L'extrait du verbatim traduit ce questionnement de J:

> J : […] Mais ici parce que ici ça dit.
> Ch : Ouais!
> J : Des arbres pour pouvoir atteindre l'objectif.
> Ch : Ouais!
> J : Mais ça dit pas combien de kilogrammes ça donne un arbre.
> Ch : Combien de kilogrammes de quoi?
> J : Comme à chaque arbre, ça donne combien de kilogrammes parce qu'on a besoin :encore d'environ 3 000 kilogrammes […].
> Ch : Ouais, est-ce qu'il y a quelque chose qui manque?
> J : Ouais!
> Ch : Et quoi? Quoi exactement?
> J :Qu'ils nous disent combien de kilogramme vaut chaque arbre.
> Ch : […] Mais de kilogrammes de quoi?
> J : De compostage! Pas de compostage. De CO2.
> Ch : Ah ça c'est très bien, L tu suis ce que J dit. (SP3 S4 09 : 22 à 10 : 38, vidéo 2).

Une fois cette information acquise, la première stratégie que proposent J et L est celle de trouver la quantité de CO2 que permet de réduire un groupe de 4 arbres (2,8 kg x4 (groupe de 4 arbres) = 11,2 kg de CO2), puis de diviser 2580 kg (correspondant à la quantité de CO2 qui manque pour atteindre l'objectif fixé) par 11,2 pour trouver le nombre d'arbres qu'il faudrait planter : 230, 357143.

Elles rejettent le résultat trouvé, car les élèves s'attendaient à trouver un quotient entier comme précédemment pour les supports à vélos. On voit l'influence du contexte car, il semble que, selon elles, pour avoir la « bonne » réponse, la division de 2580 par 11,2 doit donner un quotient entier. Les interactions suivantes entre J et L témoignent de l'embarras des deux élèves.

> J : Alors ce que je voulais faire c'était 2580 divisé par 11,2 mais ça n'a pas marché.
> L : Hein! hein!
> J : […] Alors essaie toi aussi de trouver 11, 2 tu dois faire, fois combien pour que ça te donne 2580.
> L : Eh ben c'est 2580 divisé par 11,2.
> J : C'est ça que j'ai fait, ça n'a pas marché.
> L : Attend [L prend la calculatrice] 2580 divisé par 11,2. Ouche!
> (SP3 S4 15 :35 à 16 : 22, vidéo 2).

Elles s'engagent alors dans une nouvelle stratégie : J propose de trouver le nombre de kilogrammes de CO2 qu'on récupérerait pour chaque type d'arbre en divisant 2580 (quantité totale à récupérer pour atteindre l'objectif) par 4 (nombre de types d'arbres) ce qui donne 645 kilogrammes de CO2 pour un nombre de type d'arbres. Ensuite, elles divisent 645 par 2,8 pour trouver le nombre d'arbres nécessaires (230, 357143) en sachant que chaque arbre produit 2,8 kg de CO2. Ensuite, elles décident d'arrondir à 231 (on observe ici un ajustement du contrôle exercé par les élèves sur cette résolution, qui conduit non plus à rejeter la réponse obtenue mais à l'arrondir pour tenir compte du fait qu'il s'agit d'un nombre d'arbres). Ensuite, elles font le prix de chaque arbre multiplié par le nombre d'arbres en tenant compte de la contrainte budgétaire qui est de 8500 $ couvrant toutes les dépenses liées au projet.

4.3.2 Analyse de la dyade B et F dans la situation Défi climat

4.3.2.1 Reconstruction de la trajectoire de la gestion des données fournies par les élèves

D1 (très bref/ information lue mais pas vraiment traitée à ce stade)

B et F lisent ensemble le contenu du dossier 1 (répartition des élèves qui participent à Défi climat) et remettent le contenu dans l'enveloppe.

D2 (très bref/ information lue mais non traitée à ce stade)

Comme pour le dossier 1, B et F lisent ensemble le contenu du dossier 2 (tableau entre le nombre d'employés et le nombre d'élèves) et remettent le contenu dans l'enveloppe.

D3 (très bref/ information lue mais non traitée à ce stade)

B amorce la lecture du dossier 3 (SP3, S1 22 : 00 à 22 : 33, vidéo 1) et F la poursuit (SP3, S1 23 : 17 à 23 : 57, vidéo 1).

À priori les informations ne semblent pas être abordées à ce stade dans leur ensemble par B. et F. En effet, ils lisent les contenus de chaque dossier et les remettent dans les enveloppes.

Un lien entre certaines informations est amorcé

Plus tard, pour la première fois, les trois dossiers D1, D2 et D3 sont analysés simultanément par F (SP3, S1 03 :11 vidéo 2), et il établit un lien entre les informations des dossiers 1 et dossier 2 comme le montre l'extrait du verbatim suivant :

> Ch : Ouais, tu m'as l'air, tu as une idée?
> F : Oui mais parce que ici [F pointe le dossier 1] c'est écrit répartition des 1200 élèves, je suppose qu'il y a 1200 élèves et ici [F pointe le dossier 2] il disait que le nombre d'employés qui vont en vélo est le tiers du nombre d'élèves allant à l'école en vélo puis d'abord on peut faire comme il y a 15 %, il faut faire des calculs mathématiques pour savoir le nombre de personnes qui utilisent le vélo (SP3, S1 04:30 à 04:58, vidéo 2).

Reconstruction de la situation: une interprétation/gestion de données faisant apparaître les liens

À la deuxième séance[154], un retour est fait sur la situation. F fait des liens entre différentes données de façon très claire :

- entre le diagramme sur les élèves qui participent à défi climat (D1) et le tableau sur les employés qui y participent (D2) (lien entre les informations des dossiers 1 et dossier 2);

- entre le tableau gestes faits par chacun /quantité de CO2 économisée (D3 (1)) et le diagramme permettant de trouver le nombre d'élèves faisant ces gestes (D1), et le tableau permettant de trouver le nombre d'employés faisant ces gestes (D2).

L'extrait du verbatim suivant appuie ce que dit l'élève F et montre qu'il fait ces liens.

(SP3 S2 07 : 44 à 10 : 43, vidéo 1)

> Ch : Ce que tu me dis F c'est que si tu as ça [la ch pointe le diagramme circulaire (dossier 1)], tu peux trouver ça [Tableau comparaison nombre d'élèves et nombre d'employés de l'école (dossier 2)]
> F : Parce que, ici, ils disent que le nombre d'employés est le tiers du nombre d'élèves qui vont à vélo, puis ici [F pointe le diagramme circulaire] c'est écrit répartition des 1200 élèves qui participent à Défit Climat
> Ch : Ouais!
> F : Donc je veux savoir combien d'élèves utilisent le vélo pour savoir après le tiers.
> Ch : Ok! Toi tu dis ça [diagramme circulaire et tableau nombre d'élèves et nombre d'employés] ça va ensemble, ça va m'aider de les mettre ensemble?
> F : Oui [F acquiesce de la tête]
> […]
> Ch : Qu'est ce que tu expliques F, je veux juste comprendre. Qu'
> est-ce que tu lui as expliqué?

[154] Cette partie est prise en charge complètement par F, B est en retrait.

> Ch : Parce que je disais oh, lui il dit qu'il ne comprenait pas, j'ai expliqué ici ils disent combien pour une personne, s'ils disent par exemple le vélo combien de CO2 il va utiliser, combien de kg.
> Ch : Ok
> F : Et là, c'est ça que je lui ai expliqué. Donc là j'ai dit par exemple si on sait combien de personnes prennent le vélo, le nombre d'élèves multiplié par 900 kg ça va nous donner combien ils ont économisé de CO2.

4.3.2.2 Analyse des stratégies de résolution dans chacun des « sous-problèmes » (mis en évidence par la trajectoire précédente)

a) Sur le tableau quantitité de CO2 économisée par chacun des gestes (D3(1) en lien avec D1 et D2)

L'analyse des stratégies pour la réduction du CO2 montre des entrées différentes dans la tâche.

Transformation de certaines données en présence (non prises pour elles-même) : augmenter le nombre d'élèves qui font un certain geste (F); se donner un nombre de professeurs faisant un certain geste (B)

Ainsi F amorce une analyse des éléments du dossier 1 (diagramme circulaire) en proposant une stratégie. Il observe qu'il y a peu d'élèves qui utilisent une gourde d'eau réutilisable et *propose d'augmenter le nombre d'élèves qui l'utilisent* comme le confirme l'extrait du verbatim suivant :

> F : Mais on a remarqué qu'il n'y a pas beaucoup de personnes qui utilisent une gourde d'eau réutilisable; on devrait augmenter cela (SP3, S1 00 : 23 à 00 : 38, vidéo 2).

Il proposera également d'augmenter le nombre de personnes qui prennent l'autobus.

L'idée implicite de F est que cette augmentation d'élèves contribuerait à réduire la production de CO2.

De son côté, B suppose qu'il y a 20 professeurs, dont 10 qui utilisent le vélo. En multipliant 900 kg par 10 cela lui permettra de trouver la quantité de CO2 économisée pour chaque personne qui utilise le vélo:

> B. : Ici, c'est marqué genre comme pour les personnes, pour chaque prof.
> Ch : Ouais.
> B : Qui utilisent le vélo c'est 900 Kg pour venir à l'école puis après moi je me suis dit que comme si imagine qu'il y a 20 prof puis là comme sur ces 20 profs il y en a 10 qui utilisent le vélo alors là peut-être qu'on allait faire 900 fois 10, ça allait être comme nous donner une somme qui allait nous rapprocher de ce nombre [Réduction de 1 000 000 Kg de CO2] (SP3 03 : 11 à 03 : 42, vidéo 2).

Deux théorèmes en acte sous-tendent les propos de l'élève F.

Plus le nombre d'élèves qui utilisent une gourde d'eau réutilisable est élevé, plus on réduit la production de CO2 (Élève F).

Augmentation du nombre d'élèves	Utilisation gourde	Quantité CO2 économisée
Un choix	Plus élevée	Effet sur réduction CO2

Plus il y a de personnes qui prennent l'autobus, plus la quantité de CO2 économisée en autobus va être grande

Augmentation du nombre de personnes	Transport en autobus	Quantité CO2 économisée
Un choix	Fréquent	Effet sur réduction CO2

b) Travail sur le diagramme circulaire (nombre d'élèves qui font chacun des gestes)

-Une stratégie basée sur un partage égal du tout en 3 groupes; réajustée pour tenir compte de l'ordre de grandeur de chaque groupe par rapport à la moitié

Dans un premier temps, B s'engage dans une division de 1200 élèves par 3 (3 groupes associés aux 3 gestes amène B à partager 1200 en 3). Il va réajuster ce résultat, F réagissant à ce qu'il avance en manifestant son désaccord, et fait alors une estimation du nombre d'élèves de chaque groupe en référant à la moitié (qu'il prend comme point de repère) comme le témoigne le verbatim suivant.

> Ch : B. Qu'est-ce que tu es en train de dire?
> B : Il dit il y a 1200 élèves qui participent [à Défi climat], puis là comme j'ai dit il faut genre comme trouver le nombre d'élèves qui prennent l'autobus. J'ai fait 1200 diviser par 3, ça m'a donné 400, 400 élèves qui prennent l'autobus
> Ch : F que penses-tu de ce qu'il dit?
> F : Ben il n'a pas fini son idée
> Ch : Ah, il n'a pas fini son idée, tu peux continuer? [s'adressant à B]
> B : Mais comme, j'allais faire, j'allais trouver eux qui prennent l'autobus puis après là j'allais essayer de trouver eux qui prennent, qui utilisent une gourde d'eau puis là comme on va dire comme ceux qui prennent l'autobus ça me donnait 400 puis ceux qui prenaient une gourde d'eau ça me donnait genre 200[155] puis là si ça fait comme 400 + 200, ça fait 600. Le reste c'est eux qui viennent à l'école à vélo
> Ch : B! Alors écoute F! Tu dis [s'adressant à B] qu'il y a 400 qui prennent l'autobus. Tu as divisé 1200 par 3. Explique-moi d'où vient le 3? Comment tu es arrivé à diviser 1200 par 3?
> B : Je ne sais pas
> Ch : F qu'en penses-tu?
> F : Je ne sais pas
> B : Ici [B pointe les 3 groupes] il montre qu'il y a juste 3 comme, 3 options, en vélo, l'autobus puis une gourde, c'est ça, il ne peut y avoir un 4^{e} cas, il ne peut y avoir une 4^{e} option si là il nous donne 3 options (SP3, S1 08 : 11 à 14 : 10, vidéo 2).

Finalement, B obtient les résultats suivants par une estimation des grandeurs à partir de points de repère :

Pour le 75 % qui prennent l'autobus : « *la moitié des 1200 élèves c'est 600 et là c'est pas 600, c'est plus que 600* ». Il se donne un nombre approximatif 700.

[155] Voir calculs de l'élève à la page suivante.

Pour le reste (les élèves qui vont à vélo et utilisent une gourde) : il en dénombre 500 en tout (la différence entre 1200 et 700) soit 200 (pour ceux qui utilisent une gourde) et 300 (pour le vélo) s'appuyant de nouveau pour cela sur une estimation des grandeurs en jeu et le point de repère de la moitié. Il conclut en effet que ça ne peut être 250/250 parce que ce n'est pas la moitié. Il va associer 200 au plus petit et 300 au plus grand comme le montre sa production suivante :

> « *75 % des 1200 =700, 10 % des 1200 = 200, 15 % des 1200 = 300. Je me suis dit que 700 est le tiers de 1200 et 10 % c'est 200 et 15 % c'est 300. Alors il y a 300 élèves sur 1200 qui vont en vélo.* » (Production de B, cahier élève, p. 9)

B estime et affirme que 75 % de 1200 correspond à 600 +100 = 700 donc à la moitié plus 100 comme il l'explique à F dans l'extrait du verbatim suivant :

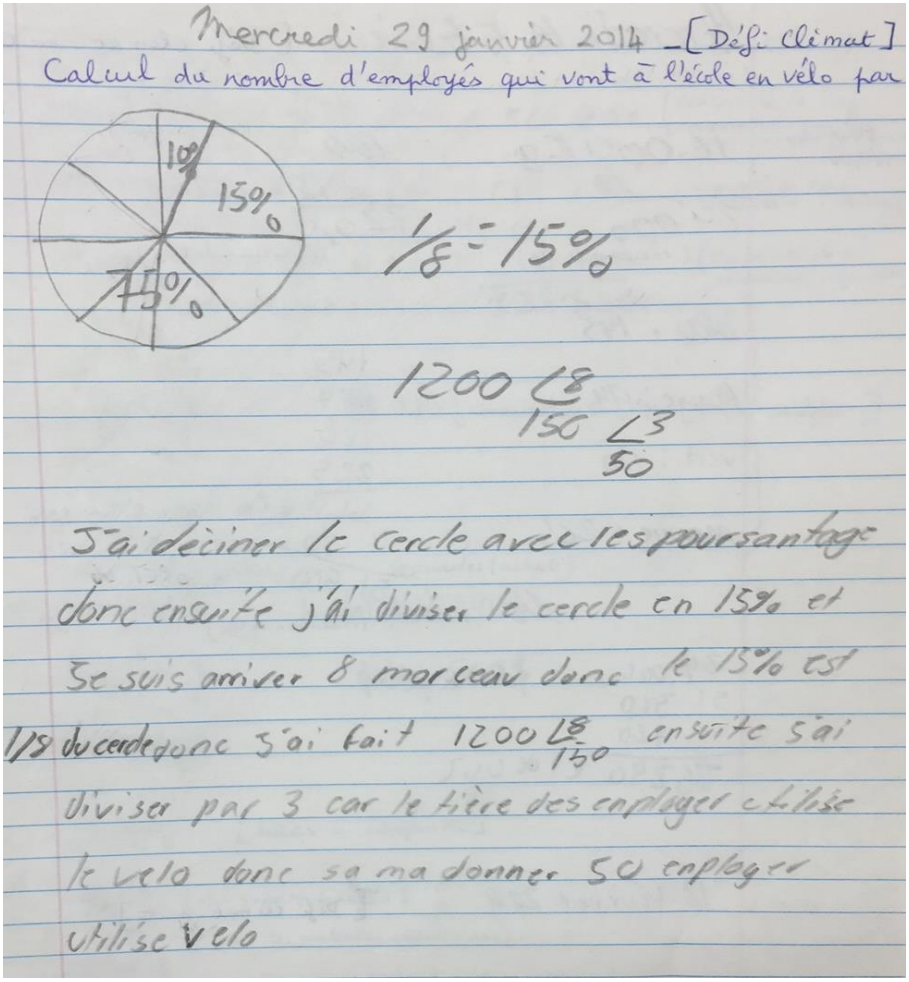
> B : Tchek! La moitié de 1200 c'est 600. [F acquiesce]. Le tiers, comme si on est, on va dire que ça va être 600 où ces deux-là [B pointe 15 % et 10 % de 1200] ça va être 300, 300. Mais je me suis dit non ici c'est 15 [sous-entendu 15 % de 1200] puis ici c'est 10 (10 %), puis là, je me suis dit hein si ça ne peut être 600 alors peut être que ça va être 700 (SP3, S1, 02 : 50 à 03 : 15, vidéo 3).

Une stratégie de F sur le calcul du nombre d'élèves s'appuyant sur la répartition du cercle en parties égales. Il en déduira le nombre d'employés qui font un geste spécifique.

La démarche de F est différente de celle de B sur le calcul du nombre d'élèves qui vont à vélo. F réinvestit le lien qu'il a vu entre deux données différentes mentionnées au départ dans les dossiers D1 (Diagramme sur le nombre d'élèves qui participent au projet) et D2 (Tableau comparant le nombre d'élèves et d'employés faisant chaque geste). Il cherche à trouver le nombre d'élèves qui vont à vélo, car s'il l'obtient, il pourra trouver le nombre d'employés qui vont à vélo (qui est le 1/3 du nombre d'élèves qui vont à vélo).

Pour trouver le nombre d'élèves, F cherche à voir combien de fois la portion (associée à 15 %) va rentrer dans le cercle : sur la base de son dessin, il trouve 8 parties égales.

Il en conclut que 15 % c'est 1/8 de 1200. Chaque subdivision correspondrait à 15 % de 1200 élèves comme en témoigne sa production ci-dessous et sa démarche dans l'extrait du verbatim qui suit.



F effectue le calcul 1200 divisé par 8 pour trouver 150 élèves et conclut que c'est le nombre des élèves qui vont à l'école à vélo.

Comme on l'aura compris à travers la démarche de F, cette répartition en parts « égales » du cercle s'appuie sur une visualisation géométrique (estimation du nombre de morceaux d'une certaine grandeur qui entrent dans le cercle). Elle ne prend pas en compte la valeur réelle de cette part.

F met aussi en évidence le raisonnement suivant pour calculer le nombre d'employés qui vont à l'école à vélo (1) nombre d'élèves qui vont à l'école à vélo : 150; (2) nombre d'employés qui vont à l'école à vélo : 150 / 3 = 50.

Une confrontation de points de vue sur le résultat obtenu s'ensuit sur le calcul du nombre d'élèves qui vont en vélo, forçant une explicitation de sa stratégie par F.

> B : C'est 300 élèves, ça ne peut pas être 50.
> F : C'est 150 élèves, c'est 150 élèves, c'est 150 élèves
> B : Qui vont à vélo? Comment tu as fait?
> F : J'ai fait, qu'est-ce que j'ai fait : les lignes et là j'ai trouvé que ça c'est 1 sur 1 huitième et là après j'ai fait 8 divisé par 1200, 1200 divisé par 8 égale 150 comme c'est le tiers divisé par 3 égale 50. (SP3, S1 04 : 06 à 04 : 45, vidéo 3).

Quelques difficultés apparaissent, dans ce qui précède, au niveau du calcul précis d'un pourcentage, comme le montrent les productions précédentes. F et B se placent davantage dans une estimation de pourcentage (par rapport à des points repère ou une visualisation géométrique d'une certaine part dans le cercle). Le calcul précis de 75 % reste ainsi difficile. Le sens du pourcentage sera re-questionné lors d'une séance subséquente.

D'autres stratégies intéressantes mobilisées[156], après avoir construit un certain sens du pourcentage d'un nombre: un retour sur le diagramme circulaire et le nombre d'élèves qui participent au projet en lien avec les pourcentages

En partant de pourcentages qui ont un sens pour eux, de nouvelles stratégies vont apparaître.

Un calcul du pourcentage en passant par les fractions

[156] Ces stratégies apparaissent après l'intervention du chercheur qui demande 100%, 50%, 25% de quelque chose.

B affirme que 75 % c'est comme 3/4 et l'autre (10 % et 15 %) c'est comme 25 % [sous-entendu 1/4]. Pour trouver plus précisément le nombre d'élèves, il passe alors par 1/4 représentant ainsi 300 élèves. Quant à F, il dit pour 3/4 , 3 fois (Il semble voir en 3/4, 3 fois 1/4), donc 900 élèves.

Autrement dit, pour B sa stratégie repose sur un repère mis en œuvre : 75% c'est comme 3/4. Le calcul est alors complété par F en s'articulant sur un sens de la fraction : 3/4 comme 3 fois 1/4. Pour l'un et l'autre, un sens quotient de la fraction : 1/4 représente 300 élèves (1200/4).

Un calcul du pourcentage par complément

Le calcul sur 10 % d'élèves qui utilisent une gourde d'eau n'est pas aisé, plus difficile à trouver. L'intervention préalable du chercheur amène B et F au résultat suivant : 10 % de 100 élèves = 10 élèves; 10 % de 600 élèves = 60 élèves et 10 % de 1200 élèves =120 élèves.

Le calcul de 15 % d'élèves sera trouvé par complément de deux façons différentes.
B et F procèdent ainsi : 900 + 120 = 1020 (75 % d'élèves + 10% d'élèves = 85% d'élèves). Ainsi : 1200 - 1020 = 180 élèves (100 %-85 % = 15 %).

F propose aussi de faire : 300 - 120 =180 [le 1/4 correspondant au 25 % - 10 %].

c) Des construits mis en oeuvre dans cette tâche

- un ordre de grandeur par rapport à certains repères (3/4, 1/4) (B)
- retrouver une grandeur à partir d'une portion, une manière de trouver la valeur de celle-ci (F) [3/4 c'est 3 fois ¼]
- un passage de la fraction (partie d'un tout) à la fraction (quotient) (F)

Pour F, 1/8 équivaut à diviser par 8.

-Une certaine compréhension conceptuelle de la fraction est en jeu, se manifestant à travers une flexibilité dans le passage d'une notation à l'autre : 1/8 partie d'un tout et la division; ¾ vu comme 3 fois ¼ (F)

- un passage du pourcentage (d'un tout) à la fraction (d'un tout) (B et F pour 75 %, 25 %)

- des théorèmes en acte mis en œuvre dans le calcul sur les pourcentages : 10 % et 15 % c'est comme 25 %; 15 % c'est 100 % moins 75 % moins 10 %; 15 % c'est 25 % moins 10 % (B, F).

Des difficultés

Une répartition non équitable du cercle en 8 parts (ne prenant pas en compte la valeur réelle de la part) (F)

La deuxième séance a aussi révélé des difficultés de conception du sens du pourcentage d'un nombre, difficultés dues au fait que B et F n'avaient pas encore travaillé le pourcentage en classe, bien qu'ils l'aient vu un peu en 5ème et 6ème année, et que, nous dira B, il ait plus ou moins compris sauf la référence à certains pourcentages qui leur révèlent quelque chose : 100 %, 25 %, 50 %, 75 %, comme nous le voyons dans ce qui suit :

Ainsi, F réussit à trouver 50 % de 900 élèves : 450. Il interprète 25 % comme le quart et 75 % comme 3/4 c'est-à-dire 3 fois 1/4. Toutefois, le 20 % du nombre d'élève prenant le vélo sera interprété par F comme 900 /20. B accepte ce résultat.

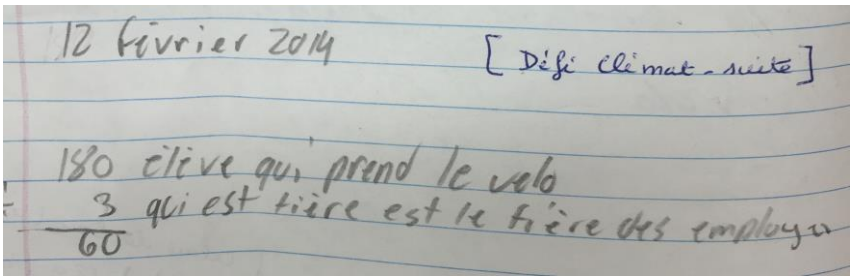
c) *Travail sur le tableau nombre d'employés versus nombre d'élèves (D2)*

Une fraction d'un certain tout associée à un quotient (pour les fractions simples)

Le 1/3 d'un nombre est réinvesti sans problème par les deux élèves. Ils font 180/3 comme le confirme leur production suivante :

300

Production de B et F.

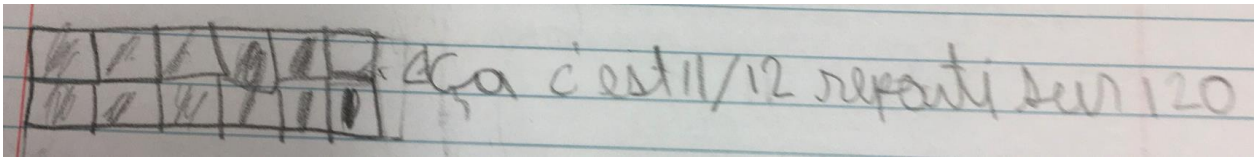


- Des vérifications de calcul mental intéressantes apparaissent à ce propos montrant un contrôle sur le calcul : F calcule mentalement 180/3 et trouve 60 puis vérifie le résultat en procédant ainsi : 60 et 60 égal 120, 120 et 60 égal 180.

<u>Des difficultés</u>

Pour des fractions telles 11/12, le calcul comme nous le voyons dans ce qui suit apparait moins aisé.

Ainsi, F cherche à transformer 11/12 en pourcentage mais ne sait pas comment faire.
B illustre 11/12



Il explicite sa pensée en affirmant que l'on prendrait 11 parties sur 12. La partie restante (1 partie) déclenche de nouveau un raisonnement des deux élèves s'articulant sur le pourcentage comme en témoigne l'épisode du verbatim suivant :

F : Un morceau peut être 10 %.
Ch : Ouais
B : Mais si un morceau c'est 10 %
F. : Ça va faire 120 %
B : […] (inaudible)

F : […] Moi ce que je voulais faire, tu vois, il manque un morceau, c'est 10 %. Pour moi, c'est que là, comme il en manque 1, tu fais 10%-100, ça fait 90 % mais ça ne marche pas.
Ch : Pourquoi ça ne marche pas?
F : Mais je ne sais pas.
Ch : Essaie, tu as une idée, 90 % puis ça tu fais quoi avec ça?
B : […] puis comme tu as dit peut-être 10 % c'est 10 puis je faisais comme le 12, le 12^{e} ça donne 120, 120-10 ça donne 110.
F : Ça veut dire qu'il y a 110 employés?
B. : Ouais!
F : 110 employés?
B : Ouais!
Ch : Pourquoi 110 employés?
B : Qui utilisent une gourde
F : Ça se peut
Ch : Ben Ouais, ça se peut non? Mais comment tu as fait pour trouver 110? [Ch s'adresse à B. Mais c'est F qui prend la parole à la place de B]
F : Comme moi j'avais dit que c'était 10%, donc il a calculé en tout, ça fait 120,
Ch : Ouais!
F : Comme il en manque 1, parce que c'est 11/12, il a enlevé 1 donc ça fait 110.
Ch : Ok! Ok! Je comprends. Tu as enlevé 10 en fait. (SP3 S3 17 : 20 à 19 : 00, vidéo 3)

d) Travail sur le tableau sur la récupération à l'école (D3(2)): reconnaissance de l'opération en jeu et conception de la multiplication

B reconnaît l'opération en jeu (la multiplication). En effet B sait qu'il faut faire 12 000 kg x 2 [2kg de CO2 par kg récupéré] (même chose pour les autres données); F parle de division mais se rallie au point de vue de B.

À noter ici, le résultat de 900 x 0,8 = 720,0 qui surprend F du fait que c'est un nombre plus petit que 900. Cela met au jour une certaine conception de la multiplication associée à un résultat devant donner un plus grand nombre.

e) Travail sur l'histogramme (D3(3) : estimation par rapport à un point de repère et utilisation d'une règle graduée pour déterminer la différence avec ce point de repère

La stratégie de F et B consiste à estimer la valeur de chaque quantité représentée en la situant par rapport à un point de repère (la moitié de l'intervalle entre deux graduations identifiées).

-Pour le bleu (Console de jeux) : 145 (c'est bien au-dessus de la moitié entre 100 et 150);

-Pour le vert (Imprimantes) : 120 (moins que la moitié entre 100 et 150);

-Pour le mauve (Ordinateurs de bureau) : 225 (la moitié).

Cette estimation va se préciser, pour F, en ayant recours à la règle graduée comme instrument de mesure.

Au départ, F regarde la bande du diagramme rose et estime celle-ci en référence à la moitié d'une graduation (175 kg) mais il ne semble pas être sûr que c'est la moitié. Il mesure alors, pour s'en assurer, la distance entre deux lignes, trouve 1,5 cm, mesure alors les surplus (bouts dans chaque bâton qui dépassent cette moitié de la graduation). Cette mesure en soi sera réinvestie dans l'interprétation de la quantité représentée comme on le voit dans ce qui suit. Autrement dit, ce surplus ou manque n'est pas interprété par rapport à la graduation globale.

-Pour le rose (Portables) : 174 (car la moitié ce serait 175 et c'est 1 mm en dessous);

La mesure sur la règle est considérée en soi, et non réinterprétée par rapport à un tout [l'intervalle entre deux grandeurs].

f) Le réinvestissement des résultats précédents dans le calcul global

-Les résultats précédents (145, 120, 225, 174) sont mis à profit dans le calcul du nombre total de kg d'appareils recyclés :

Recours à une stratégie de calcul mental et à une estimation de l'ordre de grandeur, montrant un contrôle sur le calcul (pour B). (environ 500 à 600, 500 avec 100, 100, 200 et 100 et 45 et 74 en référence au calcul total d'appareils recyclés).

Calcul sur la calculatrice pour F (664 kg).

-Comme nous l'avons souligné précédemment, F ne perd pas de vue le lien entre les résultats du D3 (3) (travail sur l'histogramme) et D3 (2) (le tableau). En effet, il sait qu'il doit multiplier 664 kg (nombre total de kg d'appareils recyclés) par 80 kg de CO2/appareil recyclé pour trouver la quantité de CO2 réduite avec ces appareils recyclés. Puis ce résultat serait ajouté aux 24 000 kg et 720 kg déjà trouvés. En revanche B perd de vue la structuration de données. En effet, B écrit 24 000 + 664 + 720 dans son cahier puis l'efface après la réaction de F qui dit qu'il y a encore ça : D3 (1) (ce qu'on réduit avec les gestes) qu'on n'a pas calculé.

Puis F calcule tout de suite sur la calculatrice 1000 000 kg moins le résultat du dossier D3 (2) (quantité de CO2 économisée) pour voir si on est loin ou non de l'objectif fixé.

- Il retourne alors à la quantité de CO2 réduite par les 3 gestes : une opération de multiplication est aisément reconnue pour trouver la quantité de CO2 économisée par chaque geste.

F met aussi en œuvre une estimation en action de l'ordre de grandeur du résultat. En effet, ayant calculé 240 x 900 = 216 000 Kg (la quantité de CO2 économisée quand on prend le vélo), il anticipe que l'autre résultat [quantité de CO2 économisée en autobus] va être plus grand car il y a plus de personnes qui prennent l'autobus. Il y en a 900 qui prennent l'autobus (plus que 240 qui prennent le vélo).

-Des stratégies de calcul mental intéressantes apparaissent là encore :

Lorsque le total de la quantité de CO2 économisée 908 790 kg a été trouvée par les deux élèves, il a été demandé aux élèves d'estimer mentalement combien il manquait pour pouvoir atteindre l'objectif (sans faire le calcul sur la calculatrice).

Une reconstruction par compensations successives :

F part de 908 790 et y va par compensation pour retrouver 1 000 000 : 908 790 + ? =1 000 000. Cette compensation va se faire en différentes étapes :

- F part de 90 pour arriver à 100. Il va ajouter 10. Il écrit alors sur sa feuille 10.

- Il est alors à 800, pour arriver à 1 000, il faut ajouter 200. Il écrit alors sur sa feuille 210.

- Il est alors à 9 000, pour arriver à 10 000, va ajouter 1 000. Il écrit alors 1210 et arrive à 81 210.

-Dans la dernière partie (pour arriver à 100 000) il se trompe, écrit d'abord 9 puis change pour 8.

La modélisation du calcul fait se présente ainsi : il part de 908 790 pour arriver à 1 000 000.

908 790 ---→ 908 800 ------→ 909 000 ---→ 910 000 ---------- 1000 000
10 200 1000 80 000

Arrondir pour trouver l'ordre de grandeur :

Quant à B, il se dit si c'était 900 000 au lieu de 908 790, il fait 1 000 000 - 900 000 et trouve 10 000 au lieu de 100 000.

4.3.2.3 Analyse de la création par les élèves de nouvelles données [de manière à atteindre l'objectif fixé : Réduire de 1 million de kg CO2]

Travail sur le choix des supports à vélo et des gourdes

Cet épisode fait apparaître deux démarches diamétralement opposées des élèves F et B pour trouver le coût des supports à vélo et des gourdes d'eau réutilisables.

Démarche de F reposant sur un calcul du prix le plus avantageux

F explicite sa démarche avant de faire les calculs et propose de diviser 240 personnes qui prennent le vélo par le nombre de places contenues dans chacun des modèles de supports à vélos. Ainsi, il ferait 240 diviser par 8, 11 et 18. En divisant 240 par 18, il trouve 13,33. Il arrondit alors au nombre supérieur. À la question pourquoi 14 et pas 13, F affirme qu'il fait toujours cela. C'est plus donc une règle qu'il applique qu'une signification contrôlée de cette façon de faire en lien avec le contexte. Il multiplie ensuite le résultat 14 par 200 $ (prix du modèle C). Il le fera pour les modèles A et B. Il retient alors le modèle le moins cher : modèle C qui nécessite 2800 $.

La réponse sera réinterprétée en contexte, montrant un contrôle sur le sens de ce résultat :

Ayant choisi le modèle C (14 supports à vélo de 18 places), lorsqu'on lui demande si toutes les places seront occupées, il répond clairement que 13 supports seront occupés et qu'un ne sera pas complet. Il semble donc voir dans le contexte ce qui se passe, une démarche pas juste numérique.

Il utilise la même démarche dans l'achat des gourdes réutilisables : trouver le nombre de lots de gourdes de 15 ou 10 et leur coût et choisir le coût le moins cher comme l'indique l'extrait ci-dessous.

> Ch : […] Je ne sais pas à quoi vous êtes arrivés là?
> F : […] les plastiques parce que ça revient moins cher.
> Ch : Ça revient moins cher? Comment tu as fait pour trouver que c'est moins cher?
> F : Moi j'ai fait 230, puisqu'il y a 230 qui prennent la gourde et j'ai divisé par 10 parce que ça va en 10 puis là après, j'ai multiplié par 28 $. Ça m'a donné 644. Et

> là j'ai fait la même chose avec les plastiques, ça m'a revenu moins cher, ça m'a donné 560.
> Ch : Ok. Finalement, vous faites quoi là, vous prenez quoi à date dans tout ça là?
> F : On prend le modèle C et on prend les gourdes en plastique. (SP3 S3 à 10 :46 à 11 :29, vidéo 3).

Autrement dit : 230 personnes utilisent une gourde d'eau : 230/15 =15,33 (Nombre de lots de 15 gourdes) puis F arrondit à 16 et fait ensuite 16 x 35 $ (prix unitaire) = 560 $.

Démarche de B axée sur la logique quotidienne du contexte : appréciation globale des coûts des supports à vélos et choix des gourdes en plastique

Pour B, les supports à vélo du modèle C coûteraient plus chers (200 $ chaque), le modèle A ne contient pas suffisamment de places (8) et donc on prendrait le modèle intermédiaire (B). Cette démarche contextuelle est encore utilisée par l'élève B qui préfère les gourdes en plastique excluant l'achat des gourdes en aluminium invoquant l'idée qu'elles pourraient se casser si elles tombaient et il va falloir en racheter comme le confirme l'extrait du verbatim ci-dessous :

> Ch : Pourquoi tu disais les plastiques toi?
> B : Parce que comme juste en voyant les plastiques quand ça tombe comme ça se casse pas facilement comparé à l'aluminium.
> Ch : Ok. Donc toi ce n'était pas un argument de prix, c'était un argument de qualité.
> B : Parce que s'il y en a comme la moitié qui échappe, on va devoir comme les rendre.
> Ch : On va les acheter. C'est vrai, tu as raison, ça joue aussi dans l'achat. On regarde la qualité (SP3 S3 10 : 11 à 10 : 39, vidéo 3).

Travail sur le choix des arbres

F repère une information manquante dans les données du problème à savoir la quantité de CO2 réduite pour chaque type d'arbre.

<u>Stratégie de F pour l'achat des arbres : différents calculs mettant en évidence un contrôle des différentes données et contraintes.</u>

F travaille seul[157]. Il revient sur le calcul pour tout le matériel : 2800$ + 560 $ + 1125 $ = 4485 $. Notons que 1125 $ est le montant des 5 bacs à composter. Il poursuit la résolution en allant chercher les deux contraintes à contrôler à savoir :

- Le budget dont il dispose (8500 - 4485 = 4015 $)
-Ce qu'il restait à réduire en CO2 : 91210 kg de CO2.

Il envisage d'acheter un arbre de chaque type et de compléter avec les arbres les moins chers (25$) pour avoir un coût total moins cher et acheter le plus d'arbres possibles. Ainsi il trouve le nombre d'arbres au complet qu'il doit acheter pour atteindre une réduction de 91210 kg de CO2. Ce qui donnerait 32575 arbres (91210/2,8 = 32 575 arbres). Il semble surpris du nombre d'arbres qu'il va devoir acheter.

Il décide alors d'acheter 1 épinette bleue du Colorado : 50 $, 1 lilas japonais : 65 $ et 1 érable : 75 $ (les 3 arbres les plus chers) et contrôle clairement l'effet de ces achats sur le budget disponible : 4015 $ -190 $ = 3825 $ et la quantité de CO2 restante : 3 x 2,8 = 8,4 et 91210 - 8,4 = 91201,6 kg.

Le nombre d'arbres restant à acheter : 32 575 - 3 = 32572.

F calcule alors le prix de ces 32 572 thuyas (le type d'arbre jusque là non pris en compte) arrivant à un budget de 814 300 $ et se rend bien compte qu'il est impossible d'atteindre l'objectif avec le budget qu'il a.

4.3.3 Analyse de la triade C, M[158], et R dans la situation Défi climat.

4.3.3.1 Reconstruction de la trajectoire de la gestion des données fournies par les élèves

D1 (consultation très brève/ information lue mais pas vraiment traitée à ce stade)

[157] B est en retrait.

[158] M participe à cette dyade à la séance 1, puis rejoint Y aux autres séances.

Les trois élèves C, M et R regardent le dossier 1 mais ne le traitent pas et disent avoir fini de regarder ce dossier. Le chercheur les invite à consulter les deux autres dossiers.

D2 (Information lue mais non pas traitée à ce stade)

C, M, et R regardent le dossier 2 mais ne le traitent pas.

D3 (Consultation longue/Information lue pas traitée à ce stade)

C, M et R consultent longuement les dossiers D3(1), D3(2) et D3(3) [SP3 S1 22 : 26 à 23 : 27] mais ne les traitent pas.

D1 et D2 (Analyse des dossiers 1 et 2 : calcul du nombre d'élèves et d'employés qui font un geste)

C, M, et R essaient de trouver le nombre d'employés qui font un geste en se donnant des nombres fictifs, ce qui n'aboutit pas à un résultat probant, puis elles décident de trouver le nombre d'élèves qui font un geste.

Par la suite, un réajustement des résultats obtenus à partir des dossiers 1 et 2 est fait par les élèves C et R.

D3 (Analyse des dossiers D3(1) , D3(2) et D3(3) mis en lien avec D1 et D2.

Avant l'analyse de l'histogramme, R propose la démarche suivante : (1) trouver le nombre de kg des vieux appareils qui ont été portés à recycler (ceci exprime un lien implicitement fait entre D3(2) et D3(3) l'histogramme), ensuite (2) calculer le nombre de kilos des gestes faits par chacun (D1 et D2) et enfin (3) le nombre de kilos de récupération à l'école [sous-entendu la quantité de CO2 économisée avec ces gestes] (exprime un lien implicitement fait entre D1, D2 et D3(1)).

4.3.3.2 Analyse des stratégies de résolution dans chacun des « sous-problèmes » (mis en évidence par la trajectoire précédente)

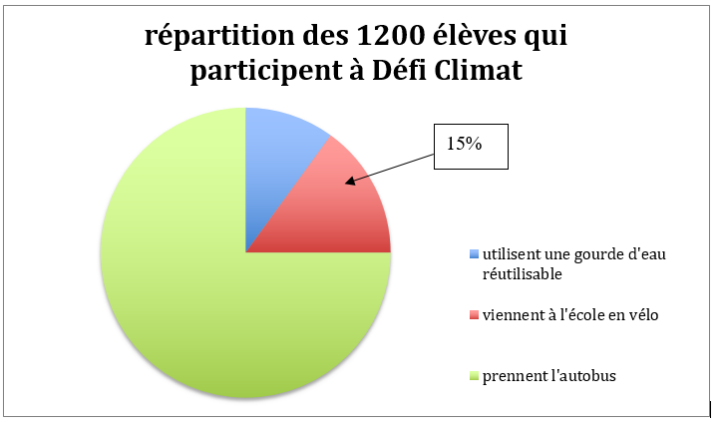
a) Le travail sur le tableau (nombre d'employés/nombre d'élèves) (D2) (en lien avec D1)

Une stratégie qui repose sur l'expression du nombre d'employés en pourcentage à partir des pourcentages donnés dans le diagramme circulaire

Le travail sur le calcul du nombre d'élèves et d'employés prend un temps très long (SP3 S1 00 :01 à à 23: 02 vidéo 2). M propose de trouver le nombre d'élèves et d'employés qui ont fait des actions c'est-à-dire qui utilisent une gourde d'eau réutilisable ou viennent à l'école à vélo ou prennent l'autobus.

Un nombre d'employés exprimé en pourcentage d'un certain tout (contrôlé par l'élève)

M propose à C et R de trouver le tiers du pourcentage d'élèves allant à l'école en vélo qui représente le pourcentage d'employés qui vont en vélo. En effet, M suggère : *« On doit trouver le tiers de ça [M pointe la partie rose du diagramme circulaire (15%)]»* (SP3 S1 02 :18 à 02 :23, vidéo 2).



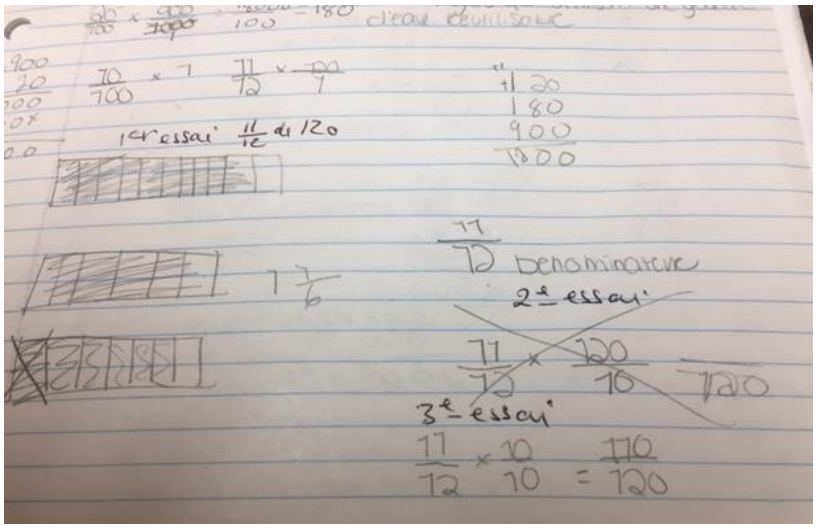
Le tiers de 15 % leur donne 5 % [sous-entendu 5 % de 1200] qui représente, selon elles, le nombre d'employés qui vont en vélo. Dans le cas des employés prenant l'autobus (20% du nombre d'élèves qui le prennent), ce qui suit montre que M saisit bien le tout auquel réfère ce pourcentage :

> M : « 20 % de tout ça [sous-entendu la partie verte du diagramme], ça fait 100 [sous-entendu le nouveau tout 100%];
> R : Mais c'est juste ça! [sous-entendu partie verte du diagramme]
> M : Mais c'est ça, comme ça [M pointe la partie verte (75%)] c'est 100 %, il faut le convertir » (SP3 S2 04 :03 à 04 :18, vidéo 2).

La séance 2 voit la participation uniquement de la dyade C et R, M ayant rejoint l'élève Y. Un retour sur la séance 1 est fait avec des ajustements par les élèves sur le calcul du nombre d'employés qui vont à l'école à vélo : 60 employés (180/3) au lieu de 40 employés (120/3) ainsi que le nombre d'employés (180) qui prennent l'autobus au lieu de 36 obtenus à la première séance.

Le calcul de 11/12 du nombre d'élèves qui utilisent une gourde [120 trouvé précédemment] ne semble pas facile par les élèves C et R. L'élève R aboutit au résultat 110/120 au 3e essai comme en témoigne l'extrait de sa démarche suivante.

Production de R



Deux conceptions émergent du calcul du 11/12 de 120 par R:

Un certain tout (120) partagé en 12 parties dont on prend 11 parties

L'idée dans le 1er essai semble être la division de l'unité (120) en 12 parties (ou bandes de longueur égale (10)) et d'en prendre le 11/12 de 120. Cependant, sur le premier dessin, il apparaît 11 divisions.

Retrouver par calcul la valeur de 11/12 (12x?=120) puis prendre 11 fois cette valeur.

Au 3e essai le résultat 110 est obtenu par R non pas en exploitant l'idée du 1er essai, mais en utilisant les propriétés de la multiplication sur les fractions. En effet, R cherche à trouver un nombre qui multiplié par 12 donne 120 et ce même nombre sera multiplié par 11 pour trouver le résultat cherché comme en témoigne l'extrait suivant :

> Ch : tu as écrit 11 sur 12 fois 120. Qu'est-ce que tu veux avoir, tu peux m'expliquer?
> R : […] Je veux savoir comme 12 fois quoi qui donne 120 comme ça je fais 11 fois quoi qui donne, je fais 11 fois le nombre qui donne 120.
> Ch : Ah! OK! Très bien (SP3 S2 :13 :25 à 13 :45, vidéo 2).

<u>Des difficultés</u>

Des difficultés vont apparaître dans le calcul plus précis de ces pourcentages.

<u>Un pourcentage vu comme un nombre état</u>

R croit que 100 % d'un nombre représentent 100 élèves. Elle se demande alors [pour trouver 75%] : « *75 fois quoi qui donne 100?* » (SP3, S1 06 : 45, vidéo 2).

Un questionnement de R à M confirme cette interprétation : « 75 c'est combien de personnes? » (SP3 S2 11 :01 à 11 : 05) Pour M c'est 15 [sous-entendu 15 % représenterait le nombre d'employés qui vont en autobus]. Ce résultat vient sans doute de 20 % de 75 en faisant allusion au 75 % d'élèves qui prennent l'autobus.

<u>Quelles opérations?/Difficultés à voir ce qu'il y a à faire</u>

C propose que l'on écrive : 75/100 mais ne sait plus quoi faire par la suite. Pour elle, l'opération en jeu est d'abord l'addition « C'est plus : 75 + 25 ». Puis elle propose de

faire une multiplication puis une division et propose de nouveau [pour 20 % de 75 %] « *75 sur 100 fois 20 sur 1* » (SP3, S1 07 : 11 à 07 : 14, vidéo2).

Référent du pourcentage

Par ailleurs, la difficulté qui semble aussi apparaître est celle d'un référent du pourcentage qui semble loin d'être clair comme l'illustre l'extrait du verbatim suivant à propos du 20 % :

> R : Nombre d'autobus pour aller à l'école [sous-entendu nombre d'employés qui prennent l'autobus] […] 36? C'est pas bon ça […], c'est 20 % de 15.
> Ch : C'est 20 % de 15?
> C : Les élèves qui prennent l'autobus c'est 75% [s'adressant à R.]
> R : 20 % de 75 %
> Ch : Qu'est-ce que vous êtes en train de chercher?
> R : Le nombre d'employés qui prennent l'autobus
> Ch : Ah, le nombre d'employés qui prennent l'autobus? Ouais, comment vous le faites?
> C et R : Silence
> Ch : Mais est-ce que vous connaissez le nombre d'élèves qui prennent l'autobus?
> R : Il faut calculer le nombre d'élèves.
> Ch : Mais est-ce que vous ne l'avez pas calculé, le nombre d'élèves qui prennent l'autobus?
> C et R : Silence
> C : Inaudible
> Ch : Comment?
> C : On a écrit 900 élèves.
> Ch : Vous avez dit 900 élèves, donc il y a 900 élèves qui prennent l'autobus? (SP3, S2 14 : 13 à 16 : 00, vidéo 1).

Comme on le voit, cet extrait montre les tergiversations dans les réponses des deux élèves pour en arriver à 20 % de 900.

De plus, il y a un temps relativement long (SP3, S2 16 : 27 à 23 : 56, vidéo 1 et SP3, S2 00 : 01 à 03 : 27, vidéo 2) à travers les interactions entre les deux élèves via le calcul 20/100 x 900/1000 avant d'en arriver au résultat 180 employés (20 % de 900) au lieu de 180 élèves comme l'affirment les deux élèves. Ce temps semble témoigner de la

difficulté à s'approprier le calcul du pourcentage d'un nombre et à avoir le fil conducteur de ce qu'il y a à faire.

Les construits

Il apparaît dans ce qui précède des construits en lien avec le pourcentage et la fraction.

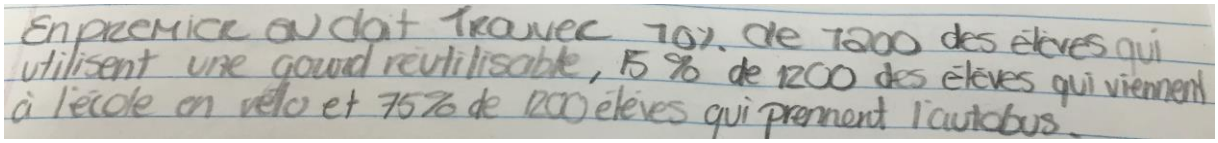
Le pourcentage comme partie d'un tout (pour M)

- Sens du pourcentage en acte : (1) Le 5 % est le tiers de 15 % et le 5 % est vu comme le 5 % de quelque chose [1200 par exemple], (2) 20 % est vu comme 20 % d'un nouveau tout correspondant à 75 % des élèves qu'elle traite bien comme le 100 %
- Sens de la fraction (dans le calcul du 11/12) pour R : comme partie d'un tout (tout partagé en 12 parts, dont on prend 11), comme mesure (je dois reporter quelle valeur 12 fois pour arriver à 120; le 11/12 correspond à 11 fois cette valeur).

b) Travail sur le diagramme circulaire

À la séance 1, M propose que l'on trouve 10 % de 1200, 15 % de 1200 et 75 % de 1200 (SP3 S1 04 : 32 à 04 : 39, vidéo 3).

Production de M

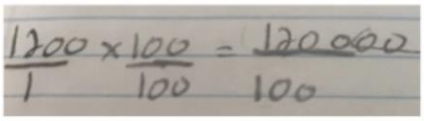


Le calcul de 10 % de 1200 n'est pas facile à trouver comme le prouvent les interactions des élèves R, C et M qui, semble- t-il, cherchent une règle apprise:

R : Tu fais 1200, non tu ne fais pas 1200 en haut. Oui tu fais 1200.
C : 1200 en haut puis 100 en bas?
R : Non
M : Non non non! 1200 un [sous-entendu 1200/1] fois 100 sur 100.

(SP3 S2 08 : 22 à 08 : 42, vidéo 3)

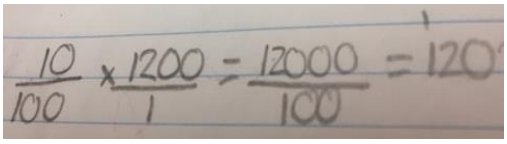
Production de M (écrite par C)



Un pourcentage traité comme partie d'un tout (M.)

M affirme que 1200 élèves représentent 100 % d'élèves. M accorde un sens au pourcentage en termes de partie d'un tout : les 100 % (1200 élèves) et elle prend les 10 % de 1200. Finalement, elle aboutit au résultat ci-dessous :

Production de M



c) Le travail sur l'histogramme (Dossier D3(3))

<u>Une stratégie par C et R sur l'interprétation de l'histogramme : une estimation à partir des graduations</u>

La démarche de C et R consiste à estimer le nombre de kilos recueillis pour les vieux appareils électroniques à partir des graduations de l'axe représentant le nombre de kilos. Les quantités estimées se présentent comme suit en procédant ainsi :

Consoles de jeu : 145 kg (C et R voient sans doute quelque chose proche de 150)

Portables :180 kg (C repère la moitié de la graduation entre 150 et 200 (175) puis estime que c'est 180 (175 + 5)).

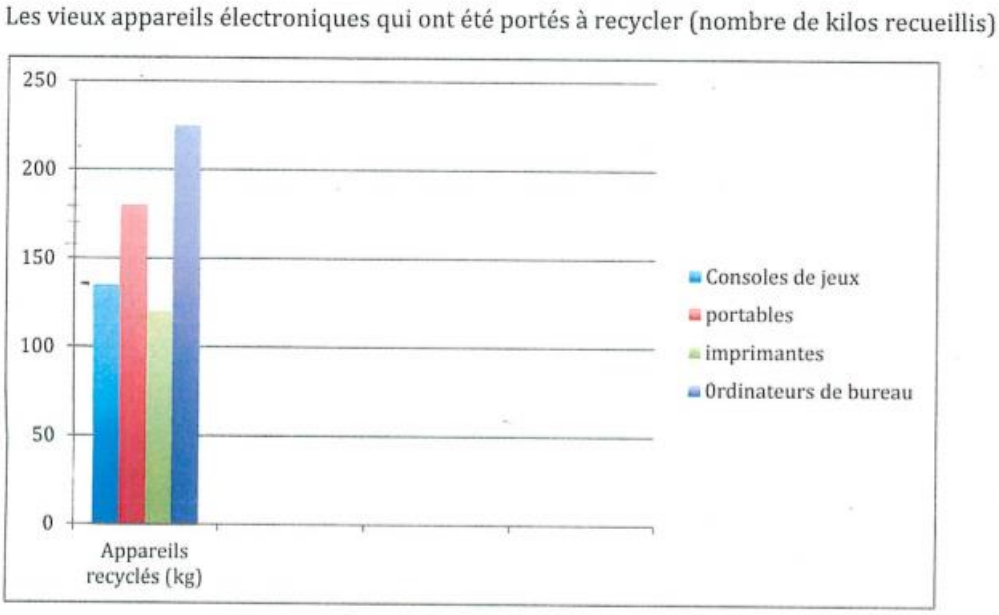
Imprimantes :125 kg (C et R disent que c'est la moitié entre 100 et 150)

Ordinateurs de bureau : 225 kg (C et R disent que c'est la moitié entre 200 et 250).

L'extrait du verbatim ci-dessous appuie notre propos :

> R : Ça c'est la moitié. Le vert c'est 125 [R pointe la moitié de la graduation entre 100 et 150]. La moitié c'est 125.
> C. : Et le mauve? 200.
> R : Ç'est le plus facile à voir. 200 c'est la moitié aussi?
> C : 225. (SP3 S2 21 : 32 à 23 : 57, vidéo 2).

C essaie de graduer l'axe correspondant au nombre de kilos recueillis [voir sa production ci-dessous].



d) Le travail sur le tableau Récupération dans l'école, Quantité de CO2 économisée (D3(2))

L'interprétation et l'analyse du tableau par type de récupération (D3 (2)) par C et R semblent difficiles dans un premier temps. En effet, C et R proposent de faire la somme 12 000 +675 +900 (nombre de kg récupérés dans l'année par respectivement (1) du

papier, des journaux, des cartons et des bouteilles (2) de vieux appareils électroniques (3) du compostage de jardin). Par la suite, R conclut que l'objectif d'obtenir une réduction de 1000 000 de kilos de CO2 n'est pas atteint. L'interaction du chercheur avec C et R permet à R de proposer une démarche pour trouver la quantité de CO2 économisée comme l'illustre l'extrait du verbatim ci-dessous :

> R : On fait ça [R. pointe la quantité de CO2 économisée pour du papier, journaux et cartons] 12000 x 2, 12000 x 12000.
> Ch : 12000 x 12000?
> R: Parce que c'est deux fois chaque bac.
> (SP3 S3 17 : 54 à 18 :08, vidéo 3)

R comprend en effet que pour chaque bac (12000 kg) on économise 2 x 12 000 kg. Ce qui permet à C de trouver 24 000 kg. Le reste de la quantité de CO2 économisée par les vieux appareils et le compostage de jardin est obtenu à partir des produits successifs (675 x 80 puis 900 x 0,8) (voir tableau).

Récupération dans l'école	Nombre de kg récupérés dans l'année	Quantité de C02 économisée
Papier, journaux, cartons, bouteilles déposées dans le bac à recyclage	12 000 kg	Pour chaque kilo recueilli dans le bac à recyclage, on économise 2 kilos de C02
Vieux appareils électroniques portés à recycler		Chaque kilo recueilli permet d'économiser 80 kilos de C02
Compostage de jardin (feuilles, gazon, épluchures de légumes…)	900 kg	Chaque kilo recueilli permet d'économiser 0,8 kilos de C02

e) Réinvestissement des résultats dans le calcul global

Nous résumons ci-dessous la démarche de C et R à partir des résultats qu'ils avaient obtenus précédemment :

Dans un premier temps, C et R récapitulent le nombre de kilos recueillis pour les vieux appareils électroniques au regard de leur analyse de l'histogramme (dossier D3(3)).

Ainsi, elles reportent les données suivantes :

145 kg de consoles de jeu, 125 kg d'imprimantes, 225 kg d'ordinateurs de bureau et 180 kg de portables. Puis, les deux élèves en font le calcul qui aboutit à 675 kg représentant le nombre de kilos recueillis pour les vieux appareils.

Dans un deuxième temps, C et R déterminent la quantité de CO2 économisée à partir des gestes faits par chaque personne sur le transport en vélo à l'école et en autobus ainsi que l'usage d'une gourde d'eau réutilisable (dossier D3(1)). Leur procédure est la suivante :

-Pour le transport en vélo à l'école : 900 kg par personne x 240 = 216 000 kg (240 =180 +60, où 180 et 60 sont respectivement le nombres d'élèves et le nombre d'employés qui viennent en vélo à l'école);

-Pour le transport en autobus :1080 x 650 kg par personne = 702 000 kg (1080 = 900+180, où 900 et 180 sont respectivement le nombre d'élèves et le nombre d'employés qui prennent l'autobus);

-Pour l'usage d'une gourde réutilisable : 230 x 10 = 2 300 kg (230 = 120 + 110, où 120 et 110 sont respectivement le nombre d'élèves et le nombre d'employés qui utilisent une gourde d'eau.

Dans un troisième temps, la récupération dans l'école (Dossier D3(2)) permet à C et R de calculer la quantité de CO2 économisée à partir du nombre de kg récupérés dans l'année :

-Papier, journaux, cartons, bouteilles déposées dans le bac à recyclage :

1 200 kg x 2 = 24 000 kg;

-Compostage de jardin :

900 x 0,8 = 720 kg

-Vieux appareils électroniques portés à recycler :

675 x 80 = 54 000 kg

Enfin, elles procèdent ainsi pour trouver le total de la quantité de CO2 économisée :

54 000	216 000
+24 000	702 000
+ 720	2 300
78 720	920 300

920 300
+ 78 720

999 020 kg

Cette démarche témoigne des potentialités de C et R dans ce réinvestissement, mettant en évidence un contrôle sur l'ensemble des données en jeu et leurs relations, tout au long du processus. En effet, elles tiennent compte des données en lien avec les dossiers D3(2) et D3(3) (voir 1er et 3e temps de la démarche), D1 et D2 en lien avec D3(1) (voir 2ème partie de la démarche), le tout réinvesti dans un tout cohérent.

4.3.3.3 Analyse de la création par les élèves de nouvelles données [de manière à atteindre l'objectif fixé : réduire de 1 million de kg CO2]

a) Travail sur le choix de supports à vélo

Stratégie :

- *Reconnaissance de l'opération (division du nombre de personnes par le nombre de places de chaque modèle);*
- *Un choix guidé par un quotient qui doit être exact.*

C et R cherchent à diviser 220 (nombre de personnes utilisant le vélo) successivement par 8, 11 et 18 (nombre de places disponibles pour chaque modèle). Elles décident de retenir comme résultat, le quotient de la division qui donne un entier. Ainsi, elles

retiennent 20 (quotient entier) supports à vélos, résultat de la division de 220 par 11 correspondant au modèle B. Le prix de revient est de 2800 $ (140 $ x 20). La variante qui consiste à combiner les différents modèles de support à vélos n'est pas prise en compte par C et R quand bien même le chercheur le leur rappelle comme le texte du problème l'indique. Elles trouvent cette façon de faire « compliquée ». Cette variante n'est prise en compte que par M comme nous le verrons dans les pages qui suivent.

b) Travail sur le choix de gourdes d'eau

La stratégie est la même que celle utilisée dans le choix des supports à vélos.

Comme précédemment, C et R choisissent de diviser 230 (nombre de personnes utilisant une gourde d'eau réutilisable) par 10 pour trouver 23 (quotient exact), correspondant au nombre de lots de gourdes de 10 à acheter. Une difficulté à interpréter la signification de la réponse en contexte apparaît comme le montre l'extrait du verbatim suivant :

> C : On a fait 230 divisé par 10, ça nous a donné 23.
> Ch : Donc 230 divisé par 10, ça fait 23. Alors 23 c'est quoi?
> C : Le nombre de gourdes qu'on va prendre.
> R : Non
> C : Mais ça va pas marcher
> R : Mais 10 fois, c'est 10 fois 23.
> C : Ça fait 230.
> Ch : Alors 23, vous dites que c'est le nombre de gourdes qu'il faut prendre?
> C : C'est comme des entiers, on va prendre deux entiers de 10 plus 3. C'est comme des fractions là. On va prendre deux caisses de 10.
> […]
> R : Et deux dizaines. Attends là.
> C : Trois dizaines. Deux fois dix, vingt, plus trois, vingt-trois.
> Ch: Qu'est-ce que vous êtes en train de faire, vous pouvez m'expliquez ce que vous êtes en train de faire, c'est quoi? Est-ce qu'il y a un problème? Qu'est-ce que vous êtres en train de faire? Je vous ai vues tout à l'heure, vous avez écrit 230 divisé par 10, c'est 23 alors je vous ai posé la question 23 c'est quoi?
> R : 23 c'est quoi? [R s'adresse à C.]
> C : C'est le nombre de gourdes qu'on va prendre. [C répond à R.]

> Ch : C'est le nombre de gourdes qu'on va prendre? Donc vous allez prendre 23 gourdes?
> R : Pour 230 personnes ?[R s'adresse à C.] C'est ça que je te dis, ce calcul n'est pas bon. On a besoin de plus de gourdes. On a besoin de 230 gourdes pour les 230 personnes.[…]
> Ch : C'est vous qui avez dit tout à l'heure que les gourdes se vendent en lot de 15 gourdes ou 10 gourdes. En lots de 15 gourdes.
> C : Les lots c'est quoi?
> Ch : Vous ne savez pas c'est quoi les lots? C'est comme les paquets. Un paquet de 15 gourdes ou un paquet de 10 gourdes. Est-ce que vous avez choisi les paquets de 15 gourdes ou les paquets de 10 gourdes?
> R : 10 gourdes.
> Ch : Maintenant il y a combien de gourdes ou combien de paquets parce que ça se vend en lots?
> R : 23 paquets eh eh! Oh Oh il y a 23 paquets de 10 gourdes. (SP3, S3 09 : 30 à 13 : 15 vidéo 3).

Ainsi, elles finissent par conclure qu'il s'agit de 23 lots de 10 gourdes. Puis, elles multiplient 23 par 28 $ pour trouver 644 $ (23 x 28 = 644 $) qui est la dépense totale à effectuer pour 23 lots de 10 gourdes.

c) Travail sur les arbres à acheter

Stratégie de calcul du nombre d'arbres à acheter

Cette partie n'est pas traitée en raison des absences des élèves.

Comme dans les dyades précédents, C et R avaient toutefois mis en évidence qu'il y a une donnée manquante : la quantité de CO2 économisée par chaque arbre; elles l'expriment à travers l'extrait du verbatim suivant :

> R : On ne peut pas calculer ça parce que on n'a pas comme, c'est pas écrit là, la quantité de CO2 qu'on économise en faisant comme les supports à vélo, les gourdes, oh my God […] les arbres.
> Ch : Ah donc ce n'est pas écrit, donc il manque quelque chose, il manque la quantité de CO2
> R : économisée
> Ch : économisée pour [phrase incomplète]
> R : Les arbres et
> (SP3 S3 14 : 40 à 15 : 39 vidéo 2)

4.3.4 Analyse de la dyade Y et M dans la situation Défi climat

À la première séance, Y travaille seul, M le rejoint à la deuxième. Nous présentons d'abord la trajectoire suivie par Y à la première séance puis celle suivie par les deux élèves à la deuxième et à la troisième séance.

4.3.4.1 Reconstruction de la trajectoire de la gestion des données fournies par les élèves

D1 (très bref/ information lue mais pas vraiment traitée à ce stade)

Y lit le contenu du dossier 1 (répartition des élèves qui participent à Défi climat) et place le contenu sur sa table.

D2 (très bref/ information lue mais non traitée à ce stade)

Comme pour le dossier 1, Y lit le contenu du dossier 2 (tableau entre le nombre d'employés et le nombre d'élèves) et place son contenu à côté du contenu du dossier 1.

D3 (Information lue et traitée partiellement : interprétation de l'histogramme)

Y amorce la lecture du dossier 3 (3) sur le recyclage et en même temps interprète les quantités (nombre de kilos recueillis) comme suit : « consoles de jeux à peu près 145, portables 160-180, imprimantes : 120, ordinateurs de bureaux : 240, non 220 » (SP3, S1 14 : 40 à 15 : 19, vidéo 1) puis Y place les dossiers D3(3), D3(1) et D3(2) sur la table.

D2 (Information lue et traitée partiellement en lien avec D1 : calcul du nombre d'élèves et d'employés impliqués dans le projet)

4.3.4.2 Analyse des stratégies de résolution dans chacun des « sous-problèmes » (mis en évidence par la trajectoire précédente

a) Le travail sur l'histogramme (Dossier D3(3))

La stratégie utilisée par Y est l'estimation en référence aux quantités connues identifiées sur la graduation.

La stratégie de M, qui a rejoint Y à la deuxième séance, consiste à estimer en référence à la moitié [de l'intervalle entre deux graduations] les quantités (en kilogrammes) des vieux appareils électroniques à recycler comme le montre l'extrait suivant.

> Ch : Pour les consoles de jeu 225 c'est quoi?
> M : C'est ordinateurs.
> Ch : Ah c'est les ordinateurs. Ok! Ensuite?
> M : 177, c'est portables.
> Ch : C'est portables, Oueh. Imprimantes?
> M : Imprimantes, j'ai pas trouvé.
> Ch : Ah tu n'as pas trouvé. Alors comment tu fais pour les trouver?
> M : Ben je fais la moitié.
> Y : Tu estimes.
> M : C'est ça, j'estime. (SP3 S2 08 : 21 à 08 : 54, vidéo 2).

M trouve ainsi 120 kg pour les imprimantes. Son procédé consiste à trouver mentalement dans un premier temps la valeur (50) de l'écart entre les nombres inscrits sur l'axe vertical et à le diviser par 2 pour trouver 25, puis à obtenir 125 en faisant 100+25. Elle estime alors la valeur des quantités des imprimantes à 120 (valeur proche inférieure à 125). Sa démarche pour estimer est explicite dans le calcul des quantités de portables.

> Ch : Tu as estimé à combien les portables? [CH s'adresse à Y].
> Y : 165.
> Ch : 165
> Y : Ouais.
> Ch : Elle [M] estime à 177 portables donc pour toi tu dis que c'est 165. Ça c'est combien à peu près. Alors regardons un peu qui estime, qui est proche. Ce qui est important [phrase inachevée]
> M : Ok. Ici c'est 175 [sous-entendu moitié de l'écart entre 150 et 200].
> Ch : Ouais.
> M : Alors
> Y : Comment c'est?
> M : Mais parce que.
> Y : Ben tu dis que c'est 175 puis.

> Ch : Elle dit que ça c'est 175. Pourquoi M.?
> M : 150 + 25 ça fait 175; 175 + 25 ça fait 200. Alors c'est la moitié.
> Ch : Alors tu suis ce qu'elle dit. Elle dit que ça c'est 25; donc 175, 200. 25, 25, 50. Donc elle estime autour de 177.
> (SP3 S2 11 :39 à 12 :52, vidéo 2).

b) Travail sur le tableau : quamtité de CO2 économisée (Dossier D3(2))

Stratégie : reconnaissance de l'opération « multiplication »

Y propose une démarche qui consiste à trouver d'abord le nombre de kilos de CO2 recueilli pour le papier, les journaux, les cartons et les bouteilles déposés dans le bac à recyclage [1200 x 2]; puis de faire une somme (« *on doit additionner eux* » : SP3, S2 00 : 11, vidéo 2) pour trouver le nombre total de kilos récupérés à partir des vieux appareils électroniques. Enfin, il se propose de faire la somme du nombre de kilos récupérés pour les vieux appareils et la somme de la quantité de CO2 économisée pour le papier, les journaux, les cartons et les bouteilles. Dans cette démarche, Y perd de vue qu'il faut multiplier le nombre de kilos pour les vieux appareils par 80 kilos de CO2 pour trouver la quantité de CO2 économisée pour les vieux appareils. En revanche, à la question de l'interviewer : « est ce que tu connais le nombre de kilos de gaz carbonique économisé pour les vieux appareils électroniques portés à recycler? » (SP3 S2 05 : 49 à 06, vidéo 2). Y affirme que c'est ça qu'il va faire. Il reconnait alors qu'il faut faire 655kg (nombre de kg récupérés pour les vieux appareils) multiplié par 80 kilos de CO2 pour obtenir 52 400 kilos.

M explique au cours de la deuxième séance comment elle trouve la quantité de CO2 économisée à partir de la récupération dans l'école [papier, journaux, cartons et bouteilles] : 12 000 kg x 2; Vieux appareils électroniques : nombre de kg récupérés (657 kg) multiplié par 80; Compostage de jardin en faisant 900 kg x 0,8.

Difficulté d'interprétation du résultat du calcul en contexte

Le nombre qui découle de ce résultat n'est pas facilement interprété par Y comme en témoigne l'extrait suivant qui traduit:

> Y : C'est 52 400 kilogrammes [655 kg x 80 kg-voir plus haut]
> Ch : Ok. C'est bien. Alors et quoi d'autres? Donc, finalement ceci [L'interviewer pointe l'histogramme (D3 (3)) va avec ça? [Récupération dans l'école D3 (2)].
> Y : Ouais.
> Ch : Ok! On va les mettre de côté. Qu'est-ce que tu viens de trouver?
> Y : Je viens de trouver ça [Y pointe l'élément « Papier, journaux, etc. »]
> Ch : Mais tu as toujours, ouais, c'est-à-dire que tu viens de trouver, quand tu dis ça, c'est quoi?
> Y : C'est mettre le papier et les journaux et cartons et plastiques et les bouteilles dans le bac à recyclage et porter les vieux appareils électroniques désuets […] au reyclage (SP3 S2 09 : 21 à 10 :16, vidéo 2).

En fait, cette difficulté d'interprétation du résultat peut s'expliquer par le fait qu'il doit maîtriser la suite de calculs, se perd dans ceux-ci, et perd alors de vue (dans cette séquence lourde) le contexte.

c) *Travail sur le nombre d'élèves et d'employés impliqués dans le projet (D2)*

Stratégie numérique pour le calcul du nombre d'employés : utilisation de l'opérateur (X par 11/12) et tentative de calcul

Y trouve 110 employés en expliquant qu'il a fait 120 multiplié par 12 et divisé par 11. Mais le résultat du calcul correspond à multiplier 120 par 11 puis diviser par 12.

Difficultés

Pour M, l'interprétation de 11/12 du nombre d'élèves correspondant au nombre d'employés qui utilisent une gourde d'eau ne semble pas aisée. M propose d'abord d'enlever 2 au numérateur et au dénominateur. Ce qui donne 9/10. Elle propose ensuite que l'on gradue 10 en 12 parties.

d) *Travail sur le diagramme circulaire*

Pour 10% de 1200, Y fera 1200/10 = 120, 10% est vu ici comme 10/100 comme nous le verrons dans le verbatim ci-dessous.

Toutefois, le calcul des pourcentages par Y illustre aussi des difficultés. Par exemple le calcul de 75% de 1200 est fait ainsi : 1200/75 = 16.

On observe toutefois chez Y un sens critique par rapport à la réponse obtenue. Y remarque en effet que 75% d'élèves devrait être plus grand que 10% d'élèves comme en témoigne l'extrait ci-dessous.

> Y : Il faut faire 1200 divisé par 75.
> Ch : Ah, il faut faire 1200 divisé par 75? Mais comment tu as fait pour trouver les 10% de 100 élèves?
> Y : Parce que si c'est 100%, donc 10% c'est 10 sur 100.
> […]
> Y : Je peux prendre une calculatrice?
> Ch : Oui tu peux prendre la calculatrice et tu vas m'expliquer.
> (SP3 S1 20 : 21 à 21 : 26, vidéo 3).
> Y : C'est égal à 16.
> Ch : Comment?
> Y : Égal 16
> Ch : C'est égal à 16. Donc tu trouves qu'il y a 16 élèves. Quand tu dis 16 c'est quoi?
> Y : Il y a 16 élèves qui prennent l'autobus.
> Ch : Donc, il y a 16 élèves qui prennent l'autobus.
> Y : Ouais.
> Ch : Maintenant comment tu vas trouver, s'il y a 16 élèves qui prennent l'autobus, est-ce que tu peux trouver le nombre d'élèves qui utilisent une gourde d'eau réutilisable?
> Y : Ouais.
> Ch : Tu fais comment?
> Y : 1200 divisé par 10, 120, c'est impossible. Parce que si 75 % est plus que 10% alors ça ne va pas. (SP3 S1 21 : 42 à 22 : 47, vidéo 3).

e) Travail sur la quantité de CO2 économisée par les personnes qui utilisent le vélo, l'autobus et une gourde d'eau réutilisable (D3(1))

La démarche proposée par M et approuvée par Y est la suivante : nombre de personnes qui utilisent le vélo x 900 + nombre de personnes qui prennent l'autobus x 650 + Nombre de personnes qui utilisent une gourde x 10

f) <u>Réinvestissements des résultats précédents</u>

Le fil conducteur par M est bien articulé (voir SP3 S2 19 : 28 à 19 :47, vidéo 2); elle fait la somme de toutes les quantités trouvées (216 000+…720) pour voir si l'objectif de réduction d'un 1 000 000 kg de CO2 est atteint.

4.3.4.3 Analyse de la création par les élèves de nouvelles données [de manière à atteindre l'objectif fixé : réduire de 1 million de Kg de CO2]

a) Travail sur le choix des supports à vélo à acheter

Stratégie de Y : un choix guidé par un quotient qui doit être exact

La démarche de Y est la suivante : 240 (180 + 160=240 personnes utilisent le vélo) divisé par 8 donne 30. Il faut acheter 30 supports à vélos du modèle A. Les divisions successives de 240 par 11 et 18 ne donnant pas de résultats entiers, Y choisit le modèle A.

Stratégie de M : Combinaison de différents modèles en prenant appui dans un premier temps sur les modules permettant de prendre plus de vélos/ et complétion par les modules dont le nombre de places est un diviseur de ce complément.

La démarche de M est la suivante : 240 personnes utilisent le vélo. Elle tient compte de la possibilité de combiner différents modèles. En effet, elle combine les modèles C et A. Plus spécifiquement elle procède comme suit : pour le modèle C : 240 / 18 = 13, 33…; elle arrondit à 12 supports pour arriver sans doute à un nombre qui est un multiple de 8 [voir verbatim dessus] et trouve 216 places (12 x 18 places) puis elle fait 240-216 = 24 places qu'elle cherche à combler dans le modèle A. Ainsi, elle divise 24 par 8 pour trouver 3 supports de 8 places. Finalement, elle combine le modèle C : 12 x 18 =

216 et le modèle A : 3 x 8 = 24. Elle explique sa démarche dans l'extrait du verbatim suivant :

> Ch : Comment tu es arrivée à 12 supports du modèle C?
> M : Ben en premier, j'ai fait 240 divisé par 18 ça m'a donné 13 points 33.
> Ch : Ah ça t'a donné 13 points.
> M : Alors j'ai soustrait les supports.
> Ch : Ok.
> Y : Tu as soustrait quoi?
> Ch : Tu suis Y. ce qu'elle a fait. Elle a pris, alors les 240 c'est les élèves et le personnel qui vont à vélo. Donc tu as divisé 240 par 18 pour trouver 13 points.
> Y : Trois
> Ch : Ah! Et puis tu as soustrait. Tu dis que
> Y : Elle soustrait quoi?
> M : Il y a 13 supports modèle C, alors je soustrais 1
> Ch : Tu as enlevé 1 pour en faire 12. Ok. Donc en fait il y a 12 supports du modèle C. Tu suis Y ce qu'elle dit? Ensuite?
> M : J'ai fait 12 x 18, 216 + 8 + 8 + 8, 240.
> Ch : Tu as fait 12 x 18 « Pourquoi tu as fait 12 x 18, tu peux m'expliquer?
> M : Parce que 12 c'est le nombre de supports et 18 c'est les places.
> Ch : Ah! Ah! Donc il y a combien de places à ton avis?
> M : 216
> Ch : 216 places.
> M : Et 240-216 ça me donne ce qui manque.
> Y : Y tu as des questions? Est-ce que tu suis ce qu'elle dit.
> M : Fais 240-216 [M. s'adresse à Y]
> Y : 24
> Ch : Oui, ensuite?
> M : 24 divisé par 8
> Y : Trois.
> M : C'est ça. Trois fois huit ça donne 24.
> Ch : Alors les trois c'est quoi?
> M : C'est le nombre de supports à vélo du modèle A (SP3 S3 09 : 25 à 12 : 26, vidéo 3).

Au regard de ce qui précède, M exerce un contrôle en contexte sur les différents calculs effectués. Elle a aussi un regard sur le coût le plus avantageux. M affirme que la démarche de Y est plus simple mais le problème est au niveau du prix. En effet, selon la stratégie de M, on dépenserait 2775 $ (200 x 12 + 125 x 3 = 2775) alors que dans la

stratégie de Y on dépenserait 125 $ x 30 = 3750 $, soit un gain de 975 $ (3750 - 2775) si on choisit sa stratégie.

c) Travail sur le choix des gourdes à acheter

La démarche de M et Y consiste à diviser 230 (nombre de personnes qui utilisent une gourde d'eau) par 15 d'une part et d'autre part à diviser 230 par 10. Le résultat de la première opération ne donnant pas un entier (15,33…), alors ils discriminent cette valeur pour le résultat de la deuxième opération (230/10=23). Puis, ils multiplient 23 par 18 $ pour trouver 280 $ [erreur de calcul].

On perçoit bien ici, pour M, l'influence du milieu : dans un cas (supports à vélo), elle a recours à une combinaison de 2 modèles, dans l'autre cas (gourdes d'eau) à une division prenant en compte un modèle, la division de 230 par 10 donnant rapidement 23.

d) Travail sur les arbres à acheter

Stratégie pour trouver le nombre de kg de CO2 économisée par les 4 types d'arbres :

Dans un premier temps Y et M proposent de trouver le prix de revient des 4 types d'arbres : 50 + 65 + 75 + 25 = 215 $ [lot de 4 arbres].

Stratégie de Y. : le nombre d'arbres est déterminé en fonction du montant d'argent disponible et du coût pour les 4 arbres [une seule contrainte prise en compte, le coût]

Selon Y, les dépenses des supports à vélos, des gourdes et des bacs reviennent à 4030 $. Puis, Y fait la somme : 4030 + 215 = 4245 $. Puis 8500 $ - 4245 $ = 4255$, [somme d'argent correspondant aux achats] et [8500 $ représente le budget dont dispose l'école pour la réalisation du projet]. Y propose alors de dépenser 215 x 19 = 4085 $, montant proche de 4255 $ pour 19 arbres de chaque type.

Stratégie de M : une seule contrainte est prise en compte (quantité de CO2/un contrôle difficile sur les données pertinentes)

M propose de diviser 997 580 par 2, 8 [quantité de CO2 économisée pour chaque arbre] pour avoir la quantité de CO2 restante au lieu de faire (1000 000 - 997580) / 2,8 pour trouver le nombre d'arbres à planter.

4.3.5 Retour sur l'ensemble des résultats

4.3.5.1 Sur la gestion des données multiples par les élèves

Dans l'analyse des démarches des élèves dans la première tâche, il apparaît *une gestion des données focalisant au départ sur chaque type d'informations* [D1, D2 ou D3(1), D3(2), D3(3)] *et donc sur des données traitées localement, indépendamment les unes des autres, avant d'amorcer une mise en lien entre différentes informations* [voir tableau 4.8].

L'analyse de la dernière tâche a révélé différentes stratégies des élèves et la non prise en compte de la combinaison des différents modèles pour les supports à vélos et les gourdes d'eau réutilisables.

Tableau 4.8 Récapitulatif des trajectoires suivies par les élèves

Élèves	Reconstructions des trajectoires suivies à partir de la consultation, de la lecture et de l'analyse des dossiers D1, D2, D3(1), D3(2), D3(3)						
	1er moment	2e moment	3e moment	4e moment	5e moment	6e moment	7e moment
J	D2 lu	D3(2) traité	D1 traité	D3(2) provoqué par chercheur	D2 ⟷ D1	D3(3) ↕ D3(2)	
L	D2 lu	D3(2) traité	D1 traité	D3(2) provoqué par chercheur	D2 ⟷ D1	D3(3) ↕ D3(2)	
B	D1 lu	D2 lu	D3 lu	D3(2) lu			
F	D1 lu	D2 lu	D3 lu	D1, D2, D3 Lien amorcé entre information	D1 ⟷ D2	D3(1 ↕ D1, D2	D3(2) ↕ D3(3)
C	D1 lu	D2 lu	D3(1) D3(2) D3(3) lu	D1 et D2 Analyse de chaque dossier	D3(2) ⟷ D3(3) D1 ⟷ D2 D3(1) ⟷ D1, D2		
R	D1 lu	D2 lu	D3(1) D3(2) D3(3) lu	D3(2) ⟷ D3(3) D1 ⟷ D2 D3(1) ⟷ D1, D2			
M	D1 lu	D2 lu	D3(1) D3(2) D3(3) l	D3(2) ⟷ D3(3) D1 ⟷ D2 D3(1) ⟷ D1, D2			
Y	D1 lu	D2 lu	D3(3) traité	D3(2) ↕ D3(3) traité	D2 ⟷ D1		

Deux profils apparaissent au regard des trajectoires suivies par les élèves à partir de la consultation, de la lecture et de l'analyse des dossiers. Un premier profil qui lit les dossiers selon l'ordre croissant (B, F, C, R, M, Y). Un deuxième profil qui analyse les

dossiers de façon aléatoire (J et L) en amorçant un traitement cherchant à former des liens entre les données. Cette étape de lecture est suivie d'une mise en lien entre les données des différents dossiers.

Touefois, après cette permière phase où les dossiers sont lus et non traités à ce stade, on observe chez les élèves une mise en lien établie entre certaines informations; permettant d'anticiper, et ce avant tout traitement, que certaines données vont contribuer à en trouver d'autres : par exemple, le nombre d'employés connaissant le nombre d'élèves, pour un geste donné (lien établi entre D1 et D2), la quantité de CO2 économisée par geste (lien établi entre D3(1) et D1, D2), la quantité d'appareils électroniques recyclés et la quantité de CO2 économisée (lien établi entre D3(2) et D3(3)).

Presque tous les élèves[159] établissent l'un ou plusieurs de ces liens, à un moment donné de ce parcours, lors de cette première tâche :

-lien établi entre D1 et D2 : 7 élèves (J, L, F, C, M, R, Y);

-lien établi entre D3(3) et D3(2) : 7 élèves (J, L, C, M, R, F, Y);

-lien établi entre D3(1) et D1, D2 : 4 élèves (F, C, M, R).

Cette analyse révèle ainsi le réseau qui se construit chez les élèves entre les différentes informations comme des pièces d'un casse-tête qui s'emboîtent progressivement.

4.3.5.2 Sur les différentes stratégies mobilisées dans les différents sous-problèmes

a) Travail sur le diagramme circulaire

[159] B en dyade avec F reste à ce stade en retrait, et laisse F prendre en main les choses.

Tableau 4.9 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du diagramme circulaire

Différentes stratégies	Élèves							
	F	B	J	L	C	R	M	Y
Extrapolation en contexte [on fait varier les quantités pour augmenter la population qui a recours à ces gestes]			✓ (1)[160]	✓ (1)				
Estimation des grandeurs en se référent à des points de repère		✓	✓ (3)	✓ (3)				
Utilisation d'une règle apprise pour le calcul du %			✓ (2)	✓ (2)	✓	✓	✓	
Retrouver le cercle à partir d'un des morceaux illustré	✓							
Passage par la fraction	✓	✓					✓	✓

Ce tableau fait apparaître quatre stratégies de calcul des pourcentages : un recours à une règle apprise [qu'on a de la difficulté à se rappeler et dont on mesure mal le sens] : pour 5 élèves; une estimation en ayant recours à des points de repère (la moitié du cercle, 75% c'est plus que la moitié, un peu plus que la moitié du quart, 10% un peu moins que la moitié du quart), stratégie utilisée par 3 élèves; le passage par la fraction pour 4 élèves (exemple 10% de 1200 c'est 10/100 de 1200, ou 1200/10); une reconstruction de tout à partir d'un des morceaux représentant un pourcentage pour savoir combien de fois il entre dans le cercle (1 élève). Par ailleurs, on observe une emprise du contexte dans 2 cas (J, L) où ces derniers cherchent à transformer les données en présence et non à calculer le pourcentage donné dans un premier temps.

<u>Plusieurs difficultés sont mises en évidence à propos de ce calcul du pourcentage</u>

[160] Ce sont des stratégies dans l'ordre où elles sont utilisées.

-une règle graduée utilisée, comme nous l'avons vu précédemment, dont le sens leur échappe (75% de 1200 devient par exemple 1200/75 pour Y; 20% de 900 devient 900/20 pour F et B; Faut-il diviser par 100 et multiplier ensuite par le nombre ou l'inverse : pour J et L).

-une répartition non-équitable du cercle en 8 parts, lorsqu'il s'agit de reconstruire le tout à partir d'un morceau (pour savoir combien de 15% il y a dans le cercle, voir F).

Des construits sont aussi mis en évidence dans cette tâche

-Un passage du pourcentage d'un nombre à la fraction d'un nombre (et à la fraction quotient) (exemple du 10%).

-Un contrôle sur un ordre de grandeur par rapport à certains repères (voir l'exemple de Y, 75% de 1200 devrait être plus grand que 15%; voir aussi B, J, L).

-Des théorèmes en acte sont aussi mis en œuvre :

Proporiété additive du pourcentage : 75% de …c'est comme 50% de …et 25% de…10% et 15% de …c'est comme 25% de …(J, L, B, F).

Propriété additive et multiplicative : 75% de…c'est comme 50% de …et la moitié de 50% de …(J, L).

Comparaison des pourcentages en référence à un même tout : 10% c'est plus petit que la moitié de 25%, 15% c'est un peu plus que cette moitié.

b) Travail sur l'histogramme

Tableau 4.10 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse de l'histogramme

Différentes stratégies	Élèves							
	F	B	J	L	C	R	M	Y
Interprétation de la graduation et construction d'une sous-graduation	✓		✓	✓				
Estimation par rapport à un point de repère (moitié de l'intervalle entre deux grandeurs) et utilisation d'une règle graduée (pour la différence)	✓	✓						
Estimation à partir des graduations de l'axe					✓	✓	✓	✓

Ce tableau fait apparaître trois stratégies différentes :une estimation de la quantitté à partir des données correspondant aux graduations (4 élèves), une estimation plus précise faisant intervenir d'autres points de repère (2 élèves), la construction d'une sous-graduation par trois élèves.

Cette analyse met en évidence un contrôle exercé par l'élève dans cette interprétation et l'utilisation d'un ordre de grandeur.

Des difficultés apparaissent également, dans le sens accordé à la sous-graduation, le nombre obtenu sur la règle graduée étant traité dans l'absolu et non par rapport à un tout (voir F).

c)Travail sur le tableau « nombre de kilos récupérés, quantité de CO2 » [D3(2)]

Tableau 4.11 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du tableau « nombre de kilos récupérés, quantité de CO2 »

Stratégies\ Élèves	F	B	J	L	C	R	M	Y
Variation des quantités en présence pour augmenter la quantité réduite de CO2 (peu importe la valeur des taux)			x					
Variation des quantités en présence pour lesquelles le taux unitaire est le plus haut, de manière à réduire au maximum la quantité de CO2				x				
Reconnaissance de l'opération de multiplication et calcul	x	x			x	x	x	x

On retrouve essentiellement dans ce sous-problème une stratégie principale. La majorité des élèves reconnaissent en effet l'opération à effectuer (6 élèves) et font les calculs associés. Dans quelques cas, la stratégie met en œuvre une variation des données en présence pour permettre d'atteindre une réduction de plus de CO2 (2 élèves). Le travail qualitatif se fait alors en contexte (on joue sur les quantités en présence en fonction ou non du taux unitaire). L'emprise du contexte réel se manifeste pour ces deux élèves.

Des construits prenant la forme de théorèmes-en-acte (explicitant une variation)

> Plus le taux est élevé, et plus on augmente la quantité recyclée, plus la quantité de CO2 économisée est importante.
>
> Pour un taux donné, une variation de la quantité recyclée conduit à une variation semblable de la quantité de CO2 économisée.

Difficultés

Même si majoritaire, la reconnaissance de l'opération apparaît parfois non aisée, comme nous le montrent les extraits où il est question parfois de division plutôt que de multiplication (voir L et F au départ). On voit aussi apparaître une conception de la multiplication associée à une opération donnant un résultat plus grand (voir F). Enfin des difficultés d'interprétation du résultat du calcul sont présents dans un cas, l'élève confronté à la lourdeur de la séquence des différents calculs, perd de vue à quoi correspond ce calcul (voir Y).

d) Travail sur le tableau «nombre d'élèves, nombre d'employés» (D2)

Tableau 4.12 Stratégies utilisées par les élèves dans l'analyse du tableau «nombre d'élèves, nombre d'employés»

Stratégies\ Élèves	F	B	J[162]	L[163]	C	R	M	Y
Une fraction (1/3) associée à un quotient (diviser par 3)	x	x						
Le nombre d'employés est exprimé en % à partir des pourcentages donnés dans le diagramme circulaire (1/3 de 15% devient 5% de 1200, on cherche le 20% du 75%)					x	x	x	
Un certain tout (120) partagé en 12 parties égales, et dont on prend 11 parties						x		
Utilisation de l'opérateur x 11/12 et tentative de calcul								x

[162] NI : strtatégie non identifiée.

[163] NI : strtatégie non identifiée.

L'analyse des stratégies montre que la résolution dépend ici des nombres en présence (ex 1/3 versus 11/12). Différentes stratégies ressortent faisant appel au sens de la fraction comme quotient (1/3 est associé à diviser par 3), partie d'un tout (120 partagé en 12 parties dont on en prend 11) ou opérateur (x 11/12). Dans un des cas on passe par les pourcentages pour essayer de trouver le nombre d'employés à partir du nombre de départ d'élèves (M).

Des construits ressortent de cette analyse

Un sens de la fraction en acte, comme nous pouvons le voir à travers ce qui précède (quotient, partie d'un tout, opérateur)

Un sens également (pour M) du pourcentage en acte : 1/3 de 15% = 5% (du tout initial, 1200); 20% (d'un nouveau tout qui est en fait 75% de 1200).

Les difficultés apparaissent dans le calcul plus précis, pour les fractions, du 11/12 de (F, B, Y, R) et dans le calcul des pourcentages (C, R). Ainsi 20% de 75% devient 75/100 x 20/1 (C, R) ou encore 11/12 de… est calculé en multipliant par 12 et en divisant par 11 (Y) ou on ne sait comment calculer cela (F, B, R).

e) Travail sur le tableau pour chacun des gestes, quantité de CO2 économisée (D3(1))

Tableau 4.13 Stratégies des élèves dans l'analyse du tableau « gestes faits par chacun, quantité de CO2 économisée »

Stratégies\ Élèves	F	B	J	L	C	R	M	Y
Transformation des données en présence (non prises en compte pour elles-mêmes)	x	x						
Reconnaissance de l'opération de multiplication et calcul			x	x	x	x	x	x

Ce sous-problème donne lieu à une seule stratégie, majoritairement les élèves reconnaissant dans ce cas l'opération à faire. À signaler toutefois, là encore tout comme pour D3(2), l'emprise du contexte réel : deux élèves (F, B) essaient de transformer les données pour que plus de gens (élèves et employés) fassent un certain geste (utiliser des gourdes, prendre l'autobus,…).

Leur raisonnement fait apparaître un théorème-en-acte :

Plus le nombre d'élèves qui utilisent une gourde d'eau réutilisable est élevé, plus on réduit la production de CO2. Plus il y a de personnes qui prennent l'autobus, plus la quantité de CO2 économisée va être grande.

f) Réinvestissement des résultats dans le calcul global

Pour tous les élèves, les résultats intermédiaires trouvés précédemment sont réinvestis dans le calcul global de la quantité de CO2 économisée.

On observe toutefois dans ce réinvestissement :

- Des liens mis à profit pour 4 élèves, les élèves ne perdant pas de vue la structuration des données et les liens entre elles lors de ces calculs (J, L, F, M)
- Une perte de vue de la structuration des données au fur et à mesure qu'on avance dans les calculs (B)
- Le recours, dans certains cas, à des stratégies de calcul mental ou à un ordre de grandeur montrant un contrôle sur le calcul (B, F)

g) Choix des supports à vélo et des gourdes d'eau

On retrouve dans ce sous-problème trois stratégies de résolution :

- Le recours à une division (nombre de places de vélo nécessaires divisé par le nombre de places par support) (L, F, B, C, R)
- Le recours à une addition répétée (on cherche combien de fois on doit répéter un certain nombre de places d'un support à vélo pour retrouver le nombre de vélos total à placer) (J)

- Le recours à une combinaison de deux regroupements (places disponibles combinant deux supports) permettant de placer un certain nombre de vélos) (M)

L'analyse fait ressortir, par ailleurs, que le choix de modèle de support à vélos, ou de lot de gourdes d'eau réutilisable *est guidé par différents arguments*:

- Un quotient exact auquel on devrait arriver (J, L, C, R)
- Le prix le plus avantageux (F)
- Une logique quotidienne (tel matériel est mieux, sinon ça va se casser, on va devoir en racheter) (B)
- Un choix combinant deux modèles, permettant de répondre aussi au prix le plus avantageux (M)

Une remarque, en lien avec cette stratégie de M, sur l'influence du milieu :

L'utilisation de deux modèles combinés est visible dans le cas du sous-problème des vélos et non dans celui des gourdes, dans ce cas les nombres en présence, 230 gourdes au total et lot de 10 gourdes orientent rapidement vers une division de 230 par 10 pour trouver le nombre de lots.

On observe enfin une *difficulté* à interpréter, pour deux élèves (C, R), la signification de la réponse obtenue en contexte (ce qu'on obtient est associé à un nombre de vélos ou gourdes et non à un nombre de supports ou lots).

h)Travail autour des arbres en tenant compte de la double contrainte (quantité de CO2 à atteindre et budget à respecter)

Tableau 4.14 Stratégies des élèves autour des arbres à acheter

Stratégies\ Élèves	F	B	J	L	C	R	M	Y
Une stratégie centrée sur le prix de revient des 4 types d'arbres (prix pour un groupe de 4 arbres), le calcul du nombre de groupes qu'on peut acheter en fonction du montant restant disponible, puis le calcul de la quantité de CO2 ainsi économisée.	x							x
Une stratégie centrée sur la quantité de CO2 que permet de réduire un groupe de 4 arbres, puis le calcul			x	x			x	

du nombre d'arbres nécessaire à partir de la quantité de CO2 qui reste à réduire.								
On trouve la quantité de CO2 qu'on doit réduire pour chaque groupe d'arbres à partir de la quantité totale, puis la quantité par arbre (en divisant par 4)			x	x				
Non identifié (élèves absents ou en retrait, la prise en charge étant faite par l'autre élève de la dyade)		x			x	x		

L'analyse fait ici ressortir trois stratégies différentes, en fonction de l'entrée dans le sous-problème (prix ou quantité de CO2 économisée), s'appuyant sur une prise en compte d'un regroupement de 4 arbres, et la reconnaissance dans chacun des cas des opérations associées.

On observe clairement dans cette partie le contrôle exercé en contexte par plusieurs élèves sur les différentes données et contraintes (quantité de CO2 qui reste à économiser, quantité de CO2 que permet de réduire un arbre, montant dont on dispose pour les achats) (voir J, L, F, Y).

Difficultés

Dans certains cas, ce contrôle apparaît difficile, l'élève se centrant alors sur une seule des contraintes, la quantité de CO2 pour réduire la différence avec la quantité de CO2 à économiser) (voir M).

L'analyse des résultats dans la situation- problème Défi climat a pris, on l'a vu dans ce qui précède, une forme différente des deux autres. Elle a cherché à prendre en compte la gestion que les élèves faisaient des données de la situation, révélatrice de la représentation qu'ils se font de ces données et de leurs liens, avant tout calcul. Elle a pris forme aussi dans un ensemble de petits sous-problèmes où se manifestent des stratégies de résolution, des construits dans certains cas et des difficultés. Nous reviendrons maintenant de manière transversale sur l'ensemble de ces résultats.

CHAPITRE V

INTERPRÉTATION

Le présent chapitre traite de l'interprétation des résultats découlant de l'analyse des productions orales et écrites des élèves, lors de la résolution d'une situation-recherche (pavage d'un carré) et de deux situations-problèmes (problème du géant et défi climat) expérimentées[164]. Elle prend son ancrage dans une perspective qui aborde les potentialités et les difficultés sous l'angle de l'interaction de l'élève avec un certain « milieu », en regard des conditions avec lesquelles interagit l'élève. Cette interprétation s'articule autour de trois questions[165] qui sous-tendent notre recherche à savoir :

- Quelles potentialités manifestent les élèves identifiés en difficulté dans la résolution de différents types de situations-problèmes mathématiques?
- À quelles difficultés sont-ils confrontés dans ces différentes situations?
- Comment les caractéristiques de ces situations viennent-elles interférer avec le processus de résolution par ces élèves (par exemple le contexte, le type de situation, les variables didactiques mises en œuvre dans l'aménagement proposé)?

[164] Le panneau publicitaire est une sous-question de la SP pied de géant qui a été présentée aux élèves dans le déroulement du Teaching Experiment (voir chapitre 3).

[165] Il est nécessaire d'examiner la première question avant les deux autres. Les analyses réalisées au chapitre IV montrent en effet la richesse de ce qui ressort en termes de stratégies et construits dans chacune des situations. Ce retour permettra de mieux comprendre par la suite comment les caractéristiques des situations ont pu jouer sur ces potentialités.

Comme nous l'avons déjà souligné, les recherches sur les élèves en difficulté portent majoritairement sur les difficultés des élèves, leurs « faiblesses » et leurs « lacunes ». Ce discours d'anomalies ou de carences est encore présent dans les interventions auprès d'élèves identifiés en difficulté comme nous l'avons mentionné aux sous-sections 2.1.1 et 2.1.2. De nombreux chercheurs (Berdonneau, 2006; Brousseau, 1983, 1989 et 2009; Coffin *et al.,* 2006; DeBlois, 2001; Dias, 2006; Giroux et Ste-Marie, 2006; Lemoyne, 1989; Mary et Squalli (à paraître); Mary, Squalli et Schmidt, 2008; Mary et Theis, 2007) ont adopté une posture différente mettant l'accent sur les potentialiés des élèves et l'aménagement des conditions du milieu qui pourraient favoriser l'apprentissage des élèves. Notre démarche tout au long de cette recherche rejoint celle de ces chercheurs.

5.1 Quelles potentialités manifestent les élèves identifiés en difficulté dans la résolution de différents types de situations-problèmes mathématiques? Retour sur notre première question de recherche

Les situations analysées (situation-recherche et situations-problèmes) ont révélé les potentialités des élèves en rapport avec ces trois types de situations. Ces potentialités apparaissent avant tout dans le processus de résolution des trois situations mentionnées précédemment par les élèves, à travers l'investissement des élèves dans la situation, les stratégies élaborées et les construits qui s'y manifestent et qui prennent différentes formes (conjectures, théorèmes-en-acte et concepts-en-acte). Elles se manifestent par ailleurs, pour une des situations, dans la gestion des données multiples fournies, la manière dont l'élève organise ces données, les traite et les met ou non en lien (cas de la 3^{e} situation défi climat).

5.1.1 Potentialités des élèves identifiés en difficulté : qu'est-ce qui ressort sur le plan du processus de résolution par les élèves?

Un regard transversal sur les productions d'élèves, dans les trois situations expérimentées, permet de dégager des éléments émergents d'une situation à l'autre. Il s'agit de :

- un engagement des élèves dans la résolution de la situation et un maintien de cet engagement tout au long du processus;
- une variété de trajectoires, de stratégies, d'argumentations traduisant les potentialités des élèves;
- une variété de trajectoires à mettre en lien avec les conditions du « milieu »;
- des construits (théorèmes-en-acte, concepts-en-acte et conjectures).

5.1.2 Un engagement des élèves dans la résolution de la situation

Un engagement des élèves se dégage de l'ensemble des situations proposées qui au départ n'incitent pas l'élève au calcul et à l'utilisation immédiate d'une opération ou de règles. La première situation, le pavage de carrés, incite en effet à une entrée géométrique, qui va se traduire par le recours à un recouvrement complet ou partiel du carré à l'aide de dominos ou triminos, le recours à différentes traces pointant les cases utilisées pour le recouvrement, ou encore à une représentation mentale du pavage. Dans le pied de géant, les données numériques sont absentes. Enfin, dans la situation Défi climat, la première étape ne comporte aucune donnée numérique (excepté l'objectif à atteindre). Les trois situations facilitent ainsi une entrée autre dans la tâche qu'un calcul et une utilisation de nombres en présence. C'est un premier constat important : il y a un engagement cognitif dans la tâche que l'on peut observer dans chacune des situations proposées mais également un maintien dans cet engagement tout au long du Teaching Experiment. Or, il s'agit là pour les élèves en difficulté d'un enjeu important relevé, entre autres, par Lemoyne (1989) et Perrin-Glorian (1993). Ce maintien d'engagement des élèves s'observe à travers la recherche des pistes de solution par les élèves, leur questionnement sur des manières de résoudre les situations proposées et la construction des stratégies de résolution dans l'action.

Qu'est ce qui explique cet engagement des élèves?

(1) Le type de tâches proposées : on est sur des tâches non routinières (au sens d'une tâche non familière dont la solution n'apparaît pas d'emblée et dont la résolution ne repose pas sur l'application de procédures) mais plutôt sur des situations « ouvertes » dans lesquelles différentes entrées sont possibles. On reviendra plus précisément par la suite sur l'influence de ce milieu dans l'engagement des élèves.

(2) Les conditions générales de l'expérimentation favorisent également cet engagement. Nous avons indiqué aux élèves, au tout début de l'expérimentation, que notre rôle n'était pas de les juger et de les évaluer mais plutôt de travailler avec eux la résolution de toutes sortes de problèmes mathématiques un peu différents de ce qu'ils font en classe, leur donnant une position de co-chercheurs[166]. Les écrits de Schubauer-Leoni et Grossen (1993) montrent bien l'influence de ce contrat expérimental. Ils étaient comme des élèves chercheurs, des ressources importantes et travailleraient en dyade. On sollicitait leur aide.

Cet engagement se traduit par diverses solutions riches élaborées (voir chapitre 4, les différentes stratégies élaborées), une explicitation par les élèves de leur raisonnement et une argumentation à l'appui de ceux-ci dans le pavage de carrés (voir section 4.1), les arguments développés à l'appui du fait que tel ou tel pavage fonctionne ou non, la systématisation des différents pavages possibles ou non lorsqu'une case est bouchée, les affiches élaborées par les élèves en dyade illustrent cet engagement. On observe également, dans ce cas, une entrée sur une argumentation de ce qu'ils avancent, par exemple dans le jeu à propos du pavage du carré, et également des construits (formulation de conjectures par les élèves). Cet engagement des élèves a aussi été observé dans la situation pied de géant, à travers leur questionnement et leurs diverses tentatives de recherche de solution de la situation proposée (voir chapitre 4, sous-

[166] Tel que l'explicite le protocole établi avec eux au début « Vous allez être un peu comme nos co-chercheurs parce que nous on veut comprendre à quoi vous pensez dans votre tête, ce que vous faites quand vous faites des problèmes, la manière dont vous pensez…et c'est vous qui êtes le mieux placés pour nous le dire…Vous avez, c'est sûr, beaucoup de choses à nous apprendre… »

section 4.2). De même, dans la situation défi climat, les élèves ont été amenés à faire des liens entre les données des différents dossiers, et ont proposé des stratégies de résolution dans les différents sous-problèmes (voir section 4.3). L'engagement des élèves dans les situations proposées semble ainsi rejoindre d'autres études menées par Berdonneau (2006), Coffin et al. (2006), Dias (2006), Mary et al. (2008), Mary et Theis (2007), Mary et Squalli (à paraître) et Lemoyne (1989) qui observaient un tel engagement de la part d'élèves identifiés en difficulté. En revanche, nos analyses montrent que cet engagement ne concerne pas nécessairement toujours tous les élèves et n'est pas toujours constant. Ainsi, certains élèves ne s'engagent pas à la première séance de la situation-problème pied de géant (voir section 4.2.1.1, le cas de Y lors de la 1ère séance). B se place en retrait lors de la 1ère séance de Défi climat (le travail sur les différents dossiers est surtout pris en charge par F dans la dyade (B, F)). Dans le réinvestissement des résultats intermédiaires dans le calcul global ou encore le choix des arbres (Défi climat), ce sera à nouveau F qui prendra en charge l'ensemble de la démarche, B se plaçant en retrait.

5.1.3 Une variété de trajectoires

Dans le processus de résolution des différentes situations, les élèves s'engagent de différentes façons, en empruntant différentes stratégies et en apportant des arguments pour soutenir leurs démarches (voir sections 4.1, 4.2 et 4.3).

Dès l'entrée dans la situation (pavage de carrés à l'aide de dominos), différentes stratégies ressortent : recouvrement complet, recouvrement partiel et anticipation, s'appuyant sur différents supports de résolution (recours au matériel qu'on déplace; recours à différentes traces permettant de contrôler le recouvrement en l'absence de matériel suffisant -exemple pointage par deux, trait réunissant deux cases; représentation mentale du recouvrement). Les argumentations vont prendre appui par ailleurs sur différents registres (numérique-comptage par deux, divisibilité; géométrique-reste exprimé en termes d'une case) mais aussi une visualisation (exemple du recouvrement de la bordure qui permet de conclure (voir section 4.1). De plus, les

conjectures énoncées le sont sur des cas spécifiques, mais pour certains déjà de manière générale (voir section 4.1). On observe donc dès cette première phase de la situation des potentialités chez les élèves à travers : les manières même d'aborder la résolution (différentes stratégies), les différents registres de travail sur lesquels elles s'appuient (numérique, géométrique, visualisation), les différents modes de support utilisés (matériel, traces écrites, mental), le passage à une généralisation dans l'explicitation des conjectures.

L'évolution par la suite (pavage d'un carré avec une case bouchée) fait apparaître : un détachement du matériel (passage à une représentation mentale), un réinvestissement des connaissances développées précédemment dans la nouvelle situation et une restructuration de ces connaissances (par exemple les conjectures énoncées précédemment vont être reprises et modifiées), différents registres de travail qui s'enrichissent (exemple du registre géométrique : transformation quand on bouche une case, déduction des positions possibles de la case pour que ça marche ou non par symétrie), le passage à une généralisation (conjecture formulée de façon générale), le recours à des contre-exemples et une systématisation des cas possibles ou non.

L'exploration de la situation « Pied de géant » par les élèves, montre également la fécondité du processus de résolution. En effet, les élèves s'y engagent en utilisant *six stratégies différentes témoignant de différentes entrées dans le problème et de différents registres de résolution, et d'une flexibilité dans le passage d'un registre à l'autre***.** Nous revenons ici sur ces différentes dimensions qui illustrent la fécondité du processus de résolution par les élèves :

(1) Différentes entrées dans le problème associées à différentes stratégies :

- Une entrée par le géant : il y a ici nécessité pour l'élève de voir le géant (au complet) pour pouvoir trouver sa taille. La visualisation du géant y apparaît centrale.
- Par certaines caractéristiques du géant : sa taille et la hauteur de sa botte.

- Une entrée par une unité de mesure (la hauteur de la botte) : La démarche s'appuie ici sur un report de la taille de la botte prise comme étalon. Sa propre taille (celle de l'élève) est ainsi mesurée par report, en prenant comme unité la hauteur d'une botte, et en conséquence on trouve la mesure de la taille du géant (en ajustant le nombre de reports considéré alors).
- Une entrée par une comparaison entre le géant et l'homme (comparaison externe) : la taille du géant est soit obtenue approximativement par comparaison avec la taille d'un homme (c'est plus que…), révélant une anticipation de l'ordre de grandeur du résultat à obtenir par les élèves, soit déduite à partir de la taille d'un homme en multipliant cette dernière par un certain coefficient.
- Une entrée par une comparaison entre la botte/le pied et le géant (comparaison interne) : un rapport multiplicatif est établi entre le géant et son pied (et donc entre le géant et l'homme).

(2) Différents supports sont investis dans la démarche qui viennent soutenir leurs démarches : matériel (ruban à mesurer, réglettes, recours à des unités non conventionnelles); traces écrites (par exemple du report ou des comparaisons entre grandeurs); mental (anticipation de l'ordre de grandeur de la taille du géant).

(3) Différents registres de résolution sont utilisés par les élèves à savoir le registre de la mesure, un registre numérique et visuel (visualisation de la taille de chacun).

(4) Une flexibilité dans le passage de l'un à l'autre est aussi observée au cours de la résolution du problème, dans le passage entre certaines caractéristiques de la mesure de certaines caractéristiques du géant à une taille du géant comme produit de la taille de l'homme (3 élèves); passage d'une stratégie mobilisée dans un registre de mesure de sa taille en utilisant un étalon qui est celui de la hauteur d'une botte, par report de cette unité, à une stratégie combinant un registre de mesure et un registre numérique (report d'un certain étalon, qu'on met en correspondance sur un plan numérique, avec la taille d'un homme) (un élève). Une flexibilité donc dans le raisonnement de certains

élèves, élément central par rapport à la littérature sur les élèves identifiés en difficulté (Bednarz, 2009).

En somme, la diversité des stratégies, des entrées dans le problème (rapport taille de l'homme et du géant, botte comme étalon pour mesurer la taille de l'homme, rapport entre le géant et son pied, etc), des différents supports utilisés (matériel, trace écrite, représentation mentale de l'ordre de grandeur), des différents registres (mesure, numérique, visuel), du passage entre ces registres illustrent les potentialités des élèves dans le processus de résolution de la situation.

Ainsi, de la nécessité de voir le géant au complet à la possibilité d'imaginer celui-ci et de trouver sa taille sans voir ce géant, de même que dans le calcul de sa taille de différentes façons, une idée principale est mise à l'avant : le géant est plus grand que les élèves qui explorent la situation, que les deux hommes sur la photo, que le chercheur ou la chercheure, *une idée d'anticipation d'un ordre de grandeur*. Les *procédures de calcul de sa taille varient* d'une dyade (ou d'un élève) à l'autre. On voit apparaître, dans ce calcul, entre autres, l'influence des savoirs scolaires sur les élèves : d'abord sur le mesurage de la taille du pied et de la jambe du géant (report d'un étalon, recours à la règle graduée avec différentes erreurs de mesurage) en partant des caractéristiques visibles du géant et, d'autre part, sur le mesurage de la taille d'un des hommes sur la photo, ou d'eux-mêmes ou du chercheur réel (avec un étalon pris en référence). Enfin, peu d'élèves (3 élèves), dans cette situation, perçoivent au départ la structure multiplicative des relations entre les grandeurs.

Rappelons ici que la situation H2 n'a pas été incluse dans l'analyse pour les raisons que nous avaons précisées au chapitre 4 (section 4.2).

L'exploration de la situation du Panneau publicitaire par les élèves voit apparaître *moins de stratégies, moins d'entrées différentes dans le problème* que dans la situation pied de géant. Cependant, elle met en évidence des productions fécondes des élèves. En effet, la majorité d'élèves mettent à profit l'idée de report soulevée lors de la

résolution de la situation Pied de géant puis la structure multiplicative dans la résolution du problème. Pour plusieurs élèves (5 élèves), un raisonnement proportionnel implicite est mis en évidence. Par exemple, pour calculer la hauteur (largeur du panneau), les élèves choisissent un étalon (hauteur du visage d'un musicien) et cherchent le nombre de fois que cet étalon entre dans la hauteur de l'affiche. À partir de la mesure réelle du visage, ils vont alors en déduire la hauteur de l'affiche.

Ainsi, les élèves perçoivent plus la structure multiplicative dans le Panneau publicitaire que dans le Pied de géant, réinvestissant les idées de mesure, de report d'un étalon et de rapport multiplicatif entre les grandeurs.

Différents registres de travail (numérique, géométrique, visualisation mentale, registre de mesure) sont également manifestes dans ce sous-problème Panneau publicitaire. De même, différents supports sont utilisés (dessin du panneau, matériel : réglettes, ruban à mesurer, traces écrites du report).

En ce qui concerne la situation « Défi climat », les élèves s'engagent progressivement dans la résolution d'abord en prenant appui sur le contexte du problème, et en empruntant des trajectoires d'entrées différentes dans la gestion des données fournies (organisation et exploitation de ces données). Dans l'analyse des dossiers, il y a un phénomène de va-et-vient qui se dégage (voir 4.8 tableau récapitulatif des trajectoires), preuve de la reconnaissance des liens entre les différents dossiers (par exemple entre D1 et D2, D3(1) et D1-D2) et à l'intérieur d'un même dossier (par exemple D3(2) et D3(3)). Ce problème, différent des deux autres, met en jeu une « complexité » qui s'exprime au travers de la quantité d'informations présente dans l'énoncé, du nombre d'étapes à mettre en œuvre, quelque chose plus près de la SP de type scolaire usuelle. La variété des entrées et trajectoires prend donc une forme différente, elle est davantage associée à une analyse des données et de leurs liens pour amorcer la résolution et ce avant tout calcul. Les trajectoires suivies (voir section 4.3) par les élèves s'articulent autour des points suivants : (1) la lecture des dossiers sans que les élèves les traitent immédiatement, (2) un regard plus attentif des dossiers par les élèves dans un système

de va-et-vient. Dans cette lecture des dossiers, certains élèves vont s'attarder plus longtemps sur certaines informations, amorçant une interprétation de celles-ci. Ainsi, la dyade (J, L) cherchera, à propos du tableau D3(2), à transformer certaines données en contexte de manière à réduire davantage encore la quantité de CO2. De la même façon, Y s'engagera dans l'interprétation de l'histogramme (D3(3)), en amorçant une estimation des quantités en présence à partir des graduations.

Ce travail montre que nous ne sommes pas seulement sur une lecture des données en présence, mais sur une première interprétation, qualitative et quantitative, des données en présence.

Enfin l'analyse révèle, après cette première lecture des dossiers et de leur contenu, une mise en lien par les élèves entre les différentes informations, montrant que se tisse progressivement chez les élèves une « carte » des relations entre les données. La majorité d'élèves établissent à cette étape des liens entre les dossiers D1 et D2 (8 élèves), entre D3 (2) et D3 (3) (5 élèves) et, enfin, entre D3 (1) et (D1 et D2) (5 élèves). Ainsi, même si pour plusieurs élèves (6 élèves), la lecture des dossiers (sans qu'il y ait traitement) s'est faite dans l'ordre D1, D2, D3, on voit apparaître une variété dans le traitement des dossiers par la suite : interprétation qualitative de D3(2) dès l'étape de lecture (J, L), interprétation quantitative de D3(3) (pour Y) dès cette lecture, lien établi entre D1 et D2 puis entre D3(1) et D1-D2 (pour B, F), lien entre D1 et D2 puis entre D3(3) et D3(2) (pour J, L), ou encore entre seulement D1 et D2 (pour Y), ou toutes les données (pour C, M, R).
Cette analyse illustre les potentialités des élèves dans la construction d'une première représentation de la situation intégrant les différentes données du problème.

Il convient d'ajouter quelque chose sur la résolution : si variété il y a dans les stratégies de résolution élaborées (voir section 4.3), elle apparaît dans les sous-problèmes présentant une certaine ouverture (par exemple l'interprétation de l'histogramme où la

graduation de l'axe est partielle, le choix des supports à vélo ou encore le choix des gourdes). Le travail toutefois sur le diagramme circulaire et les tableaux, notamment celui portant sur la quantité de CO2 économisée en lien avec le recyclage des objets, feront apparaître plusieurs construits en lien avec certains concepts mathématiques spécifiques, le pourcentage, la fraction, la variation au regard d'un certain taux. On est ici surtout par ailleurs, sauf pour la question de l'histogramme, essentiellement dans un registre numérique.

Dans ce qui précède, il est déjà possible de voir l'influence qu'exerce le « milieu » (Brousseau, 1988) avec lequel interagit l'élève, à la fois dans son engagement mais également au travers des différentes trajectoires de résolution mises en place. Revenons davantage, à cette étape, sur ce concept de milieu que nous avons clarifié à la sous-section 2.1.4, pour aller plus loin.

Rappelons que dans une situation, l'élève interagit avec un système qu'il cherche à « comprendre et à maîtriser » (Brousseau, 1988, p.321). Ce système est appelé « milieu ». Le milieu, comme le précise Perrin-Glorian (1994) est « tout ce avec quoi l'élève interagit, que ce soient des problèmes, des objets ou des individus » (p.107). Le milieu peut n'avoir ni enseignant ni un autre élève (Perrin-Glorian, 1994).

Comment ce milieu a-t-il joué dans le processus de résolution des élèves?

5.1.4 Une variété de trajectoires à mettre en lien avec les conditions du milieu

Une influence du « milieu » dans l'engagement et le processus de résolution des élèves

Un premier élément mérite d'être mentionné dans ce processus de résolution des élèves : ils s'appuient sur le matériel mis à leur disposition à l'occasion pour explorer la situation-recherche (dominos ou triminos, rappelons-le, donnés en nombre restreint), le problème du Pied de géant et du Panneau publicitaire, dans ce cas pour réaliser des mesures (réglettes, ficelle, ruban à mesurer), ce qui offre pour des élèves en difficulté un outil susceptible de les aider et propice à leur engagement (Dias, 2006, Mary et al.,

2008, Berdonneau, 2006); les enveloppes mises à leur disposition dans le cas de Défi climat, dans la gestion des données[167]. Par exemple, on voit apparaître deux entrées dans le processus de résolution de la situation-recherche par les élèves au tout début du Teaching Experiment: une entrée qui repose sur l'utilisation systématique du matériel, qu'ils vont déplacer pour pouvoir tout recouvrir avec le matériel qu'ils ont à leur disposition (cette voie est empruntée par tous les élèves sauf un) et une autre entrée qui prend appui initialement sur le matériel mais est suivie d'un détachement du matériel (un élève a recours à cette démarche dès le début). La première voie utilisée par la majorité d'élèves révèle l'attachement des élèves au matériel, ce qui semble les sécuriser et la deuxième entrée traduit au contraire que le matériel est au départ un levier qui permet par la suite à l'élève d'avoir le contrôle dans la résolution de la situation par, entre autres, une visualisation mentale accessible. On observera par la suite une distanciation vis-à-vis du matériel en lien avec un certain milieu antagoniste avec lequel interagit l'élève : matériel en nombre restreint obligeant à adopter d'autres stratégies qu'un recouvrement complet avec les dominos (ils iront alors vers le recours à un codage : trait unissant deux cases, pointage par deux, etc.), jeu de recouvrement de rectangles avec des triminos de différentes formes (Peut-on paver ou non avec une telle pièce?) obligeant à une anticipation de la conclusion sans réaliser le pavage au complet concrètement. Medici, Ricci et Rinaldi (2008) relèvent que « le matériel permet un gain de temps considérable dans les essais et offre une représentation concrète : l'élève se lance volontiers dans une manipulation pour résoudre un problème, cherche […] et arrive ainsi à une solution » (p. 545). Mais est-ce toujours le cas? Ces auteurs reconnaissent qu'un transfert « de la manipulation du matériel à la résolution au niveau mathématique » est nécessaire. Dans notre cas, l'analyse en termes

[167] Les enveloppes comme matériel n'ont pas ici tout à fait la même fonction que dans le cas du Pavage de carrés ou du Pied de géant, où ils sont des outils pour amorcer la résolution ou en permettre la réalisation. Touefois, le fait de pouvoir déplacer ces enveloppes et leur contenu jouera un rôle dans la construction d'une représenation du problème par les élèves. Ainsi, D2 sera placé à coté de D1, D3(3) sera déplacé à côté de D3(2), D3(1) sera déplacé à côté de D1 et D2. Ces gestes significatifs de mises en lien sont en quelque sorte permis par le matériel.

des conditions mises en place pour permettre une évolution est essentielle (ce détachement et cette visualisation mentale, cette anticipation va se faire en lien avec la modification du milieu mis en place).

Notre analyse des productions d'élèves dans la situation-recherche montre en effet que la majorité des élèves s'accrochent au matériel au départ, mais comme le matériel est en nombre limité, on voit ici se développer d'autres outils (traces témoignant de différents types de codage, représentation mentale, recouvrement partiel servant d'amorce au raisonnement) venant appuyer la résolution de la situation. Le milieu (ici le matériel insuffisant) oblige les élèves à adopter d'autres supports à leur résolution. Les arguments invoqués vont également bouger, par exemple dans la situation « pavage du carré privé d'une case », l'argumentation va s'appuyer sur le nombre total des cases et sur le nombre de cases sur le côté alors qu'initialement elle reposait sur le nombre de cases au complet. D'autres vont travailler sur le nombre total de cases et non plus sur la dimension (nombre de cases sur un côté), ce qui conduit à une progression à l'intérieur de la situation. De même, le passage de dominos aux triminos (aménagement du milieu) débouche sur une visualisation différente du recouvrement à l'aide de formes intermédiaires (rectangles formés de 2 triminos en forme de L emboîtés). Il y a aménagement du « milieu » qui conduit les élèves à une conclusion différente de la première.

Enfin le jeu proposé aux élèves a été un cadre propice pour forcer l'argumentation des élèves et partant l'explication de leurs stratégies, en s'appuyant sur une visualisation, des représentations mentales débouchant sur d'autres possibles. Par exemple, lorsque le rectangle 9 x 4 a été pigé au cours du jeu, l'élève B systématise le recouvrement et met à profit la dimension 3 dans la largeur 4 puis dans l'autre dimension 9 (voir section 4.1.3.1, stratégie RD) pour conclure que le recouvrement est possible avec des triminos en forme de rectangle. La même stratégie est utilisée par B pour le rectangle 9 x 3.

Que peut-on dire par ailleurs sur ce milieu dans le cas de Pied de géant et de Défi climat?

Une entrée à mettre en lien avec le fait qu'aucune donnée numérique n'est fournie au départ dans les deux cas; conduisant à une orientation sur les grandeurs en présence et leur comparaison (Pied de géant), à une orientation vers le contexte (Défi climat). Dans le cas de Défi climat, l'introduction des données dans différentes enveloppes (D1, D2, D3) oriente vers une gestion/mise en lien de ces données comme nous l'avons vu précédemment (milieu qui oblige à se retrouver, voir section 4.3).

Dans les différentes situations, *une autre caractéristique du milieu va être importante, mettant en jeu trois types d'interactions* : (1) élèves/élèves (2) élèves/élèves fictifs et (3) élèves/chercheurs. Les interactions élèves/élèves interviennent, dans le cas de la situation Pavage de carrés, dans la situation du jeu, par exemple, chaque élève pige une forme dans une enveloppe (carré ou rectangle), les élèves sont amenés à se prononcer sans utiliser le matériel sur le fait que le recouvrement est possible ou non. L'autre élève doit dire si la prédiction est bonne ou non avant la vérification. Cette situation va donner lieu à des avis contradictoires (voir 4.1.3.1, A et B pour le recouvrement 6 x 6). Ces points de vue contradictoires vont forcer une explicitation des stratégies des deux élèves et déboucher sur leur évolution. Il en est de même dans le cas de Défi climat (voir la discussion du résultat de la réponse de l'opération de la division de 2580 par 11,2 qui selon les élèves J et L doit donner un quotient exact, SP3 S4 15 : 35 à 16 :22, vidéo 2); voir aussi la discussion sur le choix de l'opération à faire dans le cas de D3(2). Des interactions entre élèves et élèves fictifs ont été mises en place dans le cas du problème du géant après que ceux-ci aient proposé une solution à la situation. Ces interactions conduisent par la suite à un changement de point de vue (voir 4.2.1.1). On constate de plus une évolution dans les solutions des élèves, modifications mineures dans certains cas (C, R, L, F, M, Y) et majeures dans un cas (B). En effet, les solutions des élèves fictifs viennent enrichir sa solution et l'amène à percevoir la structure multiplicative du problème (voir section 4.2.1.1).

L'interaction avec le chercheur intervient dans la situation du pavage du carré où on bouche une case et également, à l'occasion, dans la situation Défi climat. Il y a ainsi dans le pavage une confrontation avec le chercheur sur ce qui est avancé par l'élève

(voir par exemple les élèves F, A, B, C et R qui changent de points de vue suite à l'interaction avec le chercheur, S1 10 : 52, S2 20 : 25 à 35 V1, S2 21 : 41 à 22 : 20). Dans le cas de Défi climat, l'intervention sur le coup du chercheur dans le cas du diagramme circulaire (D1), à propos des pourcentages, va également conduire à un changement de stratégie (voir J, L), d'une stratégie centrée sur l'utilisation d'une règle dont le sens leur échappe, à l'utilisation d'un ordre de grandeur par rapport à des points de repère. On observe aussi ceci dans le cas du calcul global (voir F, B). Ainsi, les interactions avec le chercheur, la ressource des pairs (interaction avec l'autre élève, avec des élèves fictifs) ont agi et conduit à une réorganisation et des changements de discours par des élèves.

5.1.1.4. Une variété de construits : conjectures, théorèmes-en-acte et concepts-en-acte

Dans la sous-section 5.1.1, les potentialités des élèves ont été abordées à partir de l'engagement des élèves et à travers leurs stratégies tout au long du processus de résolution des différentes situations, en mettant en évidence le dynamisme de ce développement en lien avec les conditions du milieu. Ces potentialités s'expriment aussi à travers les construits qu'ils élaborent dans ces situations : les conjectures formulées explicitement ou non dans la situation-recherche, le réinvestissement des connaissances antérieures mobilisées (conjectures construites dans une sous-question mises à profit dans une autre) en lien avec le pavage d'un carré; les théorèmes-en-acte et concepts-en-acte mobilisés dans les situations-problèmes (Pied de géant et Défi climat). C'est ce que nous allons examiner maintenant.

Il ressort de l'analyse des constructions d'élèves dans la résolution de la situation-recherche trois types de conjectures à 4 moments différents.

(a) une conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet (5 élèves);

(b) une conjecture associée à la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases sur un côté [sur une dimension] (3 élèves parmi les 5);

(c) une conjecture mixte intégrant les deux conjectures précédentes (un élève parmi les 5). Cet élève réinvestit les deux premières conjectures en les combinant pour aboutir à une conjecture mixte. Cette nouvelle conjecture est le fruit du raisonnement de l'élève qui n'est pas statique mais au contraire évolutif.

À travers ces trois types de conjecture, s'exprime un lien entre une connaissance mathématique (parité ou imparité d'un nombre) et les arguments qui permettent d'anticiper les recouvrements possibles ou non : il suffit que le nombre des cases (au complet ou sur un côté) soit pair (ou impair) pour que le recouvrement par les dominos soit possible (ou impossible). On observe aussi une restructuration de ces conjectures dans certains cas ; on ne prend plus par exemple celle sur la dimension, quand le carré est privé d'une case, car cette dimension change en fonction des lignes et colonnes, l'autre conjecture est alors davantage adaptée. De plus, cette conjecture va être exprimée, dans certains cas, de manière générale et non sur des cas spécifiques (8 élèves)

On observe, par ailleurs, une surgénéralisation de ces conjectures à d'autres cas de figure : Le même raisonnement est utilisé par les élèves pour le pavage de n'importe quel carré, privé d'une case, sans tenir compte de la position de cette case. La complexité de changer de point de vue a déjà été soulevée dans certains travaux de recherche sur les élèves en difficulté (Perrin-Glorian, 1993).

Le travail des élèves, dans le cas du pavage du carré privé d'une case, va également s'appuyer sur une exemplification, et notamment le recours à des contre-exemples pour appuyer le fait que le pavage ne fonctionne pas toujours (4 élèves).

On assiste aussi dans quelques cas à une systématisation de tous les cas possibles et non possibles en fonction de la position de la case bouchée, un processus important sollicité dans l'activité mathématique.

Dans les situations « Pied de géant » et « Défi climat », les construits mathématiques ne se présentent pas en terme de conjectures, de processus (généralisation, recours à des contre-exemples, exemplification, systématisation des cas possibles ou non). Elles s'expriment davantage, en terme de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte. Les

construits, dans le cas du pavage de carrés s'expriment ainsi à travers de processus mathématiques alors que dans les deux dernières situations, ils portent sur un contenu mathématique et vont s'exprimer à travers des conceptualisations et théorèmes-en-acte, qui montrent les potentialités sur le plan des apprentissages mathématiques de ces élèves.

En ce qui concerne la situation Pied de géant et le Panneau publicitaire, deux concepts-en- acte et deux théorèmes-en-acte (voir sous-section 4.2.4) émergent des raisonnements d'élèves. On assiste aux prémisses d'une conceptualisation en formation. En ce sens, cela nous ramène aux potentialités qui se développent dans de tels problèmes. Ces derniers permettent à l'élève de s'engager dans une telle investigation (plutôt que sur une procédure à appliquer). Voyons ce qu'il en est.

Concepts-en-acte

Une conceptualisation d'une structure multiplicative apparaît à travers les prémisses d'un raisonnement proportionnel. Par exemple, les élèves postulent qu'on obtient la grandeur du géant en multipliant une certaine grandeur (la hauteur de la botte ou la hauteur d'un homme par exemple) par un certain coefficient, ou qu'on obtient la hauteur du panneau en multipliant la hauteur du visage par un certain coefficient.

Aussi on retrouve les prémisses d'une idée implicite d'échelle : prise en compte de la mesure sur le dessin et dans la réalité, distinction et association entre les deux.

Théorèmes-en-acte

- *Idée implicite d'un rapport constant entre certaines grandeurs*

Par exemple pour le géant : Le rapport entre la hauteur de la mi-jambe et la taille d'un homme est égal au rapport entre la hauteur de la botte (du géant) et sa taille. Pour le panneau : Le rapport entre la hauteur de la face du musicien sur la photo et la hauteur du panneau sur la photo est égal au rapport entre la hauteur de la face et la hauteur de l'affiche réellement.

- *Relation entre la mesure d'une grandeur et la mesure de l'étalon*

La propriété suivante est mise en action : Le résultat de la mesure d'une grandeur à l'aide d'un certain étalon donné (grandeur qu'on reporte) varie en fonction de la grandeur à mesurer.

Situation Défi climat

Contrairement à ce qui précède, comme nous l'avons vu au chapitre 4, (voir section 4.2) on est sur une multitude de petits concepts associés à différents sous-problèmes. Le découpage en plusieurs sous-problèmes est carctéristique du type de situation ici présentée, davantage de type scolaire (multiples sous-problèmes, chacun travaillant différents types de contenus, mais pas liés sur un plan conceptuel). Nous dégageons les différents construits qui sous-tendent les propos des élèves dans ces différents problèmes.

Théorèmes-en-acte

Les élèves formulent des théorèmes-en-acte (voir 4.3). L'élément central qui émerge des deux premiers théorèmes-en-actes est **le concept de co-variation**.

(1) Plus le taux est élevé (quantité de CO2 économisé par kg d'objet recyclé), plus on augmente la quantité recyclée, alors plus la quantité économisée est importante.
(2) Pour un taux donné, une variation de la quantité d'objets (par exemple 2 fois plus) conduit à une variation semblable de la quantité de CO2 économisée (2 fois plus) ou encore (du même ordre) :

    -Plus le nombre d'élèves qui utilisent une gourde d'eau est élévé, plus on réduit la production de CO2

    -Plus il y a des personnes qui utilisent l'autobus, plus la quantité de CO2 économisée va être grande.

    Des théorèmes-en-acte ont également trait au pourcentage :

(3) Des **propriétés du pourcentage** sont mises à profit en acte. Ainsi, la propriété additive et multiplicative en lien avec 75 % d'un certain tout est interprétée comme 50 % de ce tout et la moitié de 50 % de ce tout; 10 % et 15 % c'est comme 25 % d'un même tout; 15 % c'est 100 % moins 75 % moins 10 % d'un même tout; 15 % c'est 25 % moins 10 % d'un même tout.

Concepts-en-acte

Les concepts en acte ont trait avant tout au pourcentage et au sens de la fraction.

-Différents sens de la fraction-en-acte (dans le calcul du 11/12) : comme partie d'un tout (tout partagé en 12 parts, dont on en prend 11), comme mesure (je dois reporter quelle valeur 12 fois pour arriver à 120; le 11/12 correspond à 11 fois cette valeur).

De plus, une certaine flexibilité dans le passage d'une notation à l'autre est en jeu : 1/8 vu comme un tout divisé par 8; 3/4 vu comme 3 fois 1/4.

-Sens du pourcentage-en-acte
En référence à un certain tout : par exemple, 20 % d'un nouveau tout correspondant à 75 % des élèves, que l'élève traite bien comme un nouveau tout de référence (100%).

Aussi, une **estimation d'un ordre de grandeur** est mise en contribution par les élèves. Par exemple, la comparaison de pourcentages en référence à un même tout : 10 % plus petit que (la moitié de 25 %); 15 % plus grand que (la moitié de 25 %). Cet ordre de grandeur s'exprime aussi par rapport à 3/4, 1/4, ou encore dans le regard critique exercé sur le calcul du 75 % d'un tout qui devient plus grand que 10 % de ce tout.

Enfin, il y a une **flexibilité** dans le passage d'une écriture à l'autre. Par exemple, un passage du pourcentage (d'un tout) à la fraction (d'un tout) (pour 75 %, 25 %).

Par ailleurs, on observe également, dans le cas de l'histogramme, une interprétation accordée par les élèves à la graduation. La construction d'une sous-graduation par deux d'entre eux, témoigne d'une conceptualisation-en-acte de la grandeur (associée à l'intervalle entre deux graduations).

Le regard transversal que nous avons jeté sur les potentialités des élèves dans chacune des situations, à travers le processus de résolution au regard des conditions du milieu permet de mieux cerner la richesse de chacune des situations élaborées et leur portée. Manifestement les « mathématiques des élèves » (Steffe, Thompson, 2000) ne sont pas les mêmes dans chacune des situations, nous y reviendrons plus loin.

Tableau 5.1. Les « mathématiques des élèves » déployées dans chacune des situations expérimentées

Potentialités en termes de	Pavage de carrés	Pied de géant	Panneau publicitaire	Défi climat
Stratégies et entrées dans le problème	Variété de stratégies (recouvrement empirique, recours à un codage, représentation mentale; conjectures réinvesties) Variété d'entrées (par la surface recouverte, par la dimension, par une conjecture déjà élaborée)	Variété de stratégies (six) Multitude/richesse d'entrées dans le problème (géant, caractéristiques du géant, étalon, comparaison externe ou interne entre grandeurs)	Stratégies moins variées (trois) Moins d'entrées différentes Mais reconnaissance dans ce cas de la structure multiplicative (plus facile)	Différentes entrées dans la gestion des données; Va et vient dans l'analyse des dossiers mettant en évidence des liens. Relativement pauvre du point de vue des stratégies de résolution (sauf dans quelques sous-problèmes (ex histogramme où la graduation est partielle, support à vélo et gourdes d'eau avec choix possibles)
	-Formulation de conjectures -Passage à une généralisation (à des conjectures énoncées de façon générale au-delà du cas	-Anticipation ordre de grandeur (du géant) -Raisonnement qualitatif (dans la comparaison des grandeurs)	Reconstruction des dimensions du panneau à partir des dimensions du visage	-Contrôle exercé sur les données et leurs liens dans les calculs et le réinvesstissement -Information manquante repérée;

Processus mathématiques mobilisés	spécifique), exemplification, recours à des exemples -Passage à une représentation mentale (du pavage) -Validation des conjectures (dans de nouveaux cas) -Réinvestissement des conjectures et restructuration de celles-ci -Systématisation des cas (possibles ou non)	-Visualisation (du géant) -Reconstruction mentale (du géant en l'absence de celui-ci) -Estimation de la taille réelle (de l'homme)		-Contrôle en contexte du résultat obtenu (exemple dans supports à vélo, gourdes) -Estimation (dans le diagramme circulaire, l'histogramme)
Supports mobilisés dans la résolution	Une variété de supports sollicités : Matériel, traces écrites (permettant de contrôler le recouvrement en l'absence de matériel), représentation mentale.	-Matériel (ruban à mesurer, réglettes) -Traces écrites (du report ou de comparaisons) - Mental	-Dessin (de la forme du panneau) -Matériel (réglettes, règle à mesurer) -Traces écrites (du report)	Déplacement des données (dans les enveloppes) et des enveloppes elles-mêmes pour les mettre en lien Traces écrites (des calculs), de la portion reportée dans le diagramme de sous-graduation dans l'histogramme
Registres de travail	Différents registres de travail mobilisés : Numérique, géométrique, visualisation Des registres de travail qui s'enrichissent (ex du géométrique	-Différents registres de travail mobilisés : -numérique -mesure -visualisation -Flexibilité dans le passage d'un registre à l'autre	Différents registres de travail mobilisés : -numérique -géométrique -mesure -visualisation	Essentiellement registre numérique

	dans la systématisation)			
Des construits	Une variété de construits : -3 types de conjectures -restructurées dans de nouveaux cas (ex carré privé d'une case)	Prémisses d'un raisonnement proportionnel Conceptualisation-en-acte d'une structure multiplicative; De la notion d'échelle -Thérorème-en-acte : Rapport constant entre certaines grandeurs -Variation de la mesure d'une grandeur en fonction de l'étalon	-Reconnaissance de la structure multiplicative -Raisonnement proportionnel implicite-en-acte (rapport constant entre certaines grandeurs)	Des construits associés aux sous-problèmes Sens de la fraction -en-acte (partie d'un tout, mesure) Flexibilité dans le passage d'une notation à l'autre (fraction, division) Sens du % en acte Partie d'un tout Propriétés + et x du % Estimation de l'ordre de grandeur du % Flexibilité dans le passage d'une notation à l'autre (% d'un tout, fraction) Théorèmes en acte liés à la co-variation

Le tableau précédent met clairement en évidence les potentialités développées par les élèves dans chacune des situations. Celles-ci se manifestent dans les manières même d'aborder les problèmes (stratégies et entrées dans le problème, supports mobilisés, registres de travail) mais également dans la richesse mathématique qui s'y déploie, prenant la forme de processus mis en œuvre, de conceptualisation en acte, de théorèmes-en-acte et de conjectures élaborées.

Nous nous attarderons, dans ce qui suit, à la gestion des données, dans le cas de Défi climat, et sur les potentialités qui se manifestent dans ce cas.

Nous avons déjà montré précédemment comment les élèves établissent des liens entre les différentes données, avant toute résolution (voir section 4.3).

5.1.1.5 Gestion de données multiples et contraintes, cas de la situation Défi climat

Cette gestion de données ne se pose pas dans le cas des deux premières situations (Pavage de carrés et Pied de géant). Défi climat est à l'origine une SP de type scolaire (voir chapitre 3). C'est sur l'aspect gestion de données que nous revenons pour mieux comprendre dans ce cas les potentialités, pas du même ordre que dans les autres situations, et les exigences pour l'élève.

Les potentialités des élèves en lien avec l'organisation ou la gestion des données dans la phase de résolution du problème apparaît dans les aspects suivants :

-Un lien est établi par les élèves entre les calculs intermédiaires et ce que l'on cherche à atteindre (une quantité de CO2 économisée). Les élèves ne sont pas juste sur un calcul fait l'un après l'autre, des liens sont faits en cours de traitement et ils exercent en ce sens un certain contrôle sur l'activité (ici la résolution de la situation Défi climat) dans laquelle ils sont engagés.
-Un réinvestissement des résultats intermédiaires est fait dans le calcul global. Par exemple, on fait la somme de toutes les quantités trouvées (216 000 +…720) pour voir si l'objectif de réduction de 1 000 000 kg de CO2 est atteint.
-Un contrôle est aussi exercé sur les données, les contraintes à respecter au regard du contexte. Ainsi, dans la stratégie sur le choix des supports à vélo, J cherche à trouver pour chaque modèle, le nombre de groupes nécessaires pour placer tous les vélos, en contrôlant, dans les cas où cela n'arrive pas juste, la signification de ce qui reste (places manquantes ou places en trop). De même, dans ses calculs, elle se rappelle de la contrainte en lien avec le budget alloué à l'école (8500 $ pour les différentes dépenses liées au projet). On observe la même chose pour le choix des gourdes réutilisables, ou encore plus tard le choix des arbres.
-La plupart des élèves repèrent une information manquante dans le problème (6 élèves).

-Des stratégies de calcul mental intéressantes sont aussi relevées ainsi qu'un recours à une vérification chez certains élèves. Par exemple, 908 790 Kg est la quantité de CO2 trouvée par B et F qui devra être économisée. Il a été demandé aux élèves d'estimer mentalement combien il manquait pour pouvoir atteindre l'objectif de 1 000 000. La quantité initiale est 908 790. À partir de cette quantité, F va procéder par compensation pour retrouver 1 000 000 : 908 790 + ? = 1 000 000 (voir section 4.3.2.1). De même, pour effectuer le calcul 180/3, F calcule mentalement 180/3 et trouve 60 puis procède ainsi à des fins de vérification : 60 et 60 égal 120, 120 et 60 égal 180.

Les travaux sur la résolution de problème montrent que ces stratégies (les aspects évoqués précédemment) sont souvent absentes chez les élèves dits novices (faibles en résolution de problèmes) (Hanin, 2018). Les résultats précédents tendent ainsi à montrer que les élèves exercent un certain contrôle sur le processus de résolution.

5.2 À quelles difficultés les élèves sont-ils confrontés dans ces différentes situations? Retour sur notre deuxième question de recherche

Nous avons mentionné à la section 2.1 trois perspectives prises par les chercheurs et intervenants dans les travaux menés auprès d'élèves identifiés en difficulté (voir aussi Rajotte, Giroux et Voyer, 2014). Comme nous l'avons déjà relevé aux sous-sections 2.1.3 et 2.1.5, notre perspective face aux difficultés d'apprentissage en mathématiques rejoint les travaux menés en didactique des mathématiques qui conçoivent davantage une difficulté comme la manifestation d'une certaine connaissance et d'un processus en formation. Il résulte de ce point de vue que les difficultés auxquelles sont confrontées les élèves ne peuvent être considérées de façon absolue et se présentent à l'occasion dépendamment des savoirs et des situations (voir section 5.3); elles sont considérées dans l'interaction de l'élève avec un certain milieu. L'élève « apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres […]. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage » (Brousseau, 1988, p.59). C'est sous l'angle de la mise en relation de l'élève avec les conditions de ce milieu avec lesquelles il interagit

que nous allons interpréter les difficultés des élèves. Nous mettons en évidence, à cette occasion, ce que nous appelons des difficultés « locales ». Nous entendons par là des difficultés qui sont attachées à certaines conditions mises en place dans la situation. Cette difficulté apparaît en effet dans la mesure où une certaine caractéristique du milieu est en jeu. Si cette caractéristique n'est pas présente, si on la supprime, on ne voit pas apparaître cette difficulté. Autrement dit, il est possible dans ce cas de jouer éventuellement sur cette condition pour qu'une adaptation s'opère chez l'élève, de sorte qu'une réponse nouvelle se mette en place. L'exemple du pied de géant est ici parlante : le fait de ne percevoir qu'une partie du géant va être à la source d'une des difficultés. D'autres difficultés ne sont pas locales, en ce sens qu'elles ne sont pas liées à des conditions sur lesquelles il est possible d'agir dans la situation. L'exemple des difficultés de calcul est ici parlante dans la mesure où pouvoir opérer est davantage un outil mis en œuvre pour trouver le résultat (dans Pied de géant, Panneau publicitaire, Défi climat) mais n'est pas une caractéristique centrale de la situation sur laquelle on agit.

Situation recherche pavage de carrés

Il ressort de l'analyse une difficulté, pour certains élèves, à se détacher du matériel et une tendance chez plusieurs élèves à généraliser une « règle » qu'ils viennent d'établir, une proposition considérée comme vraie. Développons un peu ces deux aspects.

L'attachement au matériel est sans doute à lier au contrat dans lequel on place l'élève au départ : peut-on recouvrir un carré avec du matériel (dominos), les carrés et les dominos étant fournis? Pour certains élèves, il faut suffisamment de matériel pour pouvoir répondre à cette question, et plusieurs vont être attachés au recouvrement complet du carré avec le matériel. Les conditions introduites (nombre limité de matériel) agissent toutefois sur cette entrée matérielle pour produire des adaptations. En effet, les élèves déplacent graduellement le matériel existant pour poursuivre le recouvrement et conclure ainsi en passant, dans certains cas, par un codage qui

témoigne déjà d'une première adaptation. Puis, plus loin au cours du Teaching Experiment, le jeu force le détachement des élèves du matériel. L'exemple de B est instructif à ce propos en voyant comment jouent les conditions du milieu dans son processus de résolution. En effet, on voit que B passe d'un recouvrement à l'aide des triminos (en forme de L et allongés) sur une base empirique à une stratégie qui met à profit la dimension 3 du trimino (rectangle 1 x 3 pour la forme allongée; rectangle 2 x 3 formé par 2 dominos en forme de L). On est ici clairement, dans le cas de cet attachement au matériel, sur une difficulté locale.

La tendance des élèves à généraliser, une proposition jugée vraie [par exemple, on peut recouvrir le carré si le nombre total de cases est pair, on ne peut le recouvrir s'il est impair] se manifeste dans leurs conclusions sur le pavage d'un carré privé d'une case avec des dominos, recouvrement non possible pour un carré pair [il y a ici une case en moins, et le nombre devient impair] et possible pour un carré impair peu importe la position de la case bouchée. Le pavage du carré privé d'une case permet toutefois à certains élèves de passer du nombre total de cases (carré plein) à la dimension (plus à même de rendre compte de la case bouchée), conduisant à une adaptation. Ici le milieu (case bouchée) influe sur la conclusion de l'élève (voir section 4.1.2.5). On est là aussi dans le cas de cette tendance à généraliser une proposition jugée vraie sur une difficulté locale.

Situation problème Pied de géant/Panneau publicitaire

Les situations pied de géant et panneau publicitaire font ressortir trois domaines où des difficultés apparaissent : la proportionnalité (la reconnaissance en acte d'un rapport constant entre certaines grandeurs permettant de trouver la taille du géant ou de l'affiche), le mesurage, le calcul sur les nombres obtenus. Le premier élément, c'est-à-dire la proportionnalité, est l'aspect central du milieu avec lequel est appelé à jouer l'élève, la mesure et le calcul étant des outils pour pouvoir trouver réellement la taille du géant ou du panneau publicitaire. Ce sont des connaissances auxiliaires. L'enjeu

n'est pas à ce niveau. Ce qui est davantage en jeu, c'est la notion de proportionnalité et d'échelle (mesure sur le dessin versus mesure réelle qui est observée dans le pied de géant et le panneau publicitaire).

Sur la proportionnalité, une difficulté à établir un rapport multiplicatif entre les grandeurs est mise en évidence à travers les stratégies. Un constat de plus grande facilité à reconnaître celle-ci dans le cas du panneau publicitaire (5 élèves) que dans le pied de géant (3 élèves, dont un pouvant établir précisement ces rapports) peut toujours être fait. L'idée d'un coefficient de proportionnalité [botte-taille] peu importe la personne n'est en effet pas développée par les élèves dans la situation pied de géant, alors que ce coefficient hauteur du visage/hauteur de l'affiche est mis en œuvre dans le panneau publicitaire. On peut s'interroger sur les conditions du milieu qui sont différentes dans l'un et l'autre cas et qui pourraient expliquer cette entrée : présence de toutes les données dans l'un, le panneau publicitaire [on voit toute l'affiche, on voit tous les personnages à côté de l'affiche, rien n'est caché]; absence du géant dans l'autre cas [on ne voit que la botte et il faut imaginer le géant]. La difficulté à concevoir cette proportionnalité dans le premier cas et non dans le deuxième peut-elle s'expliquer par les conditions mises en place dans l'un et l'autre cas, ou encore est-ce l'influence de la première résolution sur la deuxième qui est en jeu? Nous ne pouvons répondre à cette question mais il y a là quelque chose d'intéressant à creuser sans doute.

Par ailleurs, deux difficultés locales sont ici mises en évidence : la difficulté d'imaginer la mesure du géant sans la présence de ce géant (pour 2 élèves), la difficulté de différencier mesure sur le dessin et mesure réelle (pour 3 élèves). Cette difficulté est bien liée à une condition du milieu, dans le premier cas, un géant présenté en partie sur la photo (on ne voit que sa botte). On peut d'ailleurs percevoir comment cette condition a pu jouer puisque, dans le cas du panneau publicitaire, cette difficulté n'est pas du tout présente. Dans le 2ème cas (difficulté à différencier mesure sur le dessin et mesure réelle), elle est liée à la présence d'un dessin dans les deux problèmes. C'est l'une des

plus grandes difficultés liées à la notion d'échelle, implicitement en jeu dans le problème. Comme nous l'avons montré au 4.2.5, cette difficulté peut être interprétée comme un référentiel empirique auquel se rattache l'élève (sur la photo on mesure en centimètre, dans la réalité on mesure en mètres).

Plusieurs difficultés liées au mesurage (ici outil pour résoudre la tâche) ressortent également : déterminer ce que l'on mesure (élève L);

Les difficultés des élèves portent aussi sur la signification du nombre obtenu comme résultat de ce mesurage. Ainsi les élèves substituent les mètres aux centimètres obtenus dans ce mesurage (1 cm devient 1 m), le chiffre sur l'instrument de mesure (ruban), peu importe la graduation utilisée est vu comme 1 mètre. La signification de la graduation/de l'instrument gradué sont autant de difficultés rencontrées par les élèves. Ces difficultés liées au mesurage et à l'utilisation de la règle graduée ont été soulevées dans d'autres contextes par Bednarz et Dufour-Janvier (1984). Il est à noter que dans le milieu auquel est confronté l'élève, rien ne permet de favoriser la mise en place d'une adaptation, ces connaissances sur la mesure étant ici considérées comme des connaissances auxiliaires (la mesure est ici un outil), non centrales dans la tâche dont la fonction première est le raisonnement proportionnel.

C'est également le cas pour les difficultés provenant des calculs. Par exemple, B effectue l'algorithme de la multiplication suivant : 1,80 fois 12 donne 111,60. Il a bien le contrôle sur les produits (2 x 1,80) et (10 x 1,80) qui donnent respectivement 3,60 et 18,00. En revanche dans la somme (3,60 + 18,00), il effectue bien mentalement 8 + 3 = 11. Il écrit le 11 et ne transforme pas dans cette addition les 10 unités en 1 dizaine. Par la suite, B identifie son erreur et modifie son résultat 111,60 en 21,60. Comme on le voit, la difficulté ici est accesoire en lien avec un savoir scolaire, l'addition de deux nombres. Ce n'est pas un élément central de la situation-problème. C'est une difficulté liée à l'outil. On la retrouve aussi ailleurs (pied de géant, panneau publiciatire, …). Les conditions du milieu mises en place ne permettent pas de faire évoluer cette difficuté.

On observe, par ailleurs, dans certains cas (J, L) et (C,R) l'utilisation de calculs sur les nombres, n'ayant aucun rapport avec le problème (stratégies de résolution « de surface ») (voir section 4.2.1.1, stratégie finale). On observe ici un phénomène de « suspension de construction de sens » : idée en fait que l'élève quitte le contexte pour ne se centrer que sur les nombres et en faire quelque chose (Hanin, 2018). Ces observations rejoignent ceux du cas Gaël (voir sous-section 2.1.2), où cette dernière amorce sa résolution de problème en utilisant immédiatement la somme de deux nombres donnés dans la situation sans chercher à savoir la signification d'une telle opération.

Situation-problème Défi climat

L'analyse des productions d'élèves et les interactions avec les chercheurs ont révélé trois grands types de difficultés des élèves qu'il importe de mentionner aux fins de notre interprétation.

(1) Difficultés dans la gestion des données, exigées clairement par le milieu dans lequel est placé l'élève

Nous avons vu que les élèves établissaient graduellement des liens entre les différentes données, lorsqu'on leur présentait au tout début du problème les différents dossiers. Les difficultés ne sont donc pas tant là que par la suite au moment où ils auront à traiter ces données et à opérer dessus. La complexité de la gestion de ces données va en effet apparaître dans la séquence lourde de calculs successifs à effectuer. Certains élèves perdent alors en effet de vue la structuration des données, lors notamment du réinvesstissement des calculs intermédiaires (voir Y) ou dans le travail sur le choix des arbres (voir M). On observe dans ce cas un contrôle difficile sur les données pertinentes et les différentes contraintes pour arriver à l'objectif de réduction de la quantité de CO2.

Cette lourdeur de la gestion des données conduit également à une interprétation difficile du résultat de ces calculs en contexte (Y, C, R). On ne sait plus très bien quelle est la signification de ce résultat (gourdes ou lots de gourdes? quantité de CO2? prix?).

On peut qualifier ces difficultés de locales car ces dernières sont fortement liées aux conditions mises en lien dans le milieu (nombre de données, de contraintes, de calculs nécessaires, de sous-problèmes).

(2) Difficultés conceptuelles

Les difficultés conceptuelles ressortent dans l'exploitation par les élèves du diagramme avec les pourcentages (du nombre d'élèves qui participent au projet), les tableaux du nombre d'employés par rapport au nombre d'élèves, de la variation de quantité de CO2 économisée (avec les gestes faits par chacun d'une part et d'autre part avec la récupération dans l'école) ainsi que dans l'histogramme représentant les quantités de CO2 (recueillies avec les vieux appareils électroniques).

D'abord, la difficulté de donner un sens au pourcentage d'un nombre apparaît dans le processus d'interprétation du diagramme circulaire. Rappelons ici que le concept de pourcentage n'avait pas encore été travaillé en classe.

Le calcul du pourcentage en appliquant une règle apprise il y a longtemps sans doute ne semble en effet pas facile d'accès (Y, F, B, J, L)[168]et on voit clairement que le sens de cette règle leur échappe. L'interaction des élèves et du milieu (ici par le biais des questions posées par le chercheur)[169] permettra aux élèves de trouver un résultat sans

[168] Voir L par exemple ici :
L : Il faut faire 1200 divisé par 75 multiplié par 100? Ou encore c'est le contraire? Je crois que c'est 1200 divisé par 75 multiplié par 100 ou 1200 divisé par 100 multiplié par 75.
J : Je sais qu'il faut faire division, multiplication mais on ne sait pas comment? (SP3, S2 12 :22 à 12 :47, vidéo 2).
L : Je crois qu'il faut faire 1200 diviser par 100 multiplier par 75 (SP3, S2 18 :21 à 18 :30).

[169] Ch. : Si je fais ça [L'expérimentateur pose une règle sur le diagramme circulaire en le divisant par deux]. Alors, ceci ça représente quoi?

faire de calcul, en ayant recours à une stratégie reposant sur un point de repère (la moitié du diagramme circulaire) réinvesti dans le calcul de 75 % de 1200 et dans l'estimation du 15 % et 10 % de 1200. Une certaine conception du pourcenatge ressort de cette occasion : 100% est associé à 100 (2 élèves : C et R) ou encore le référent de ce pourcentage n'est pas clair (pour ces mêmes élèves).

Dans le tableau exprimant la variation de CO2 économisée en fonction de la quantité recueillie, on observe également une conception de la multiplication par les élèves qui exprime l'idée d'un résultat débouchant sur un plus grand nombre. Par exemple, le résultat 900 x 0,8 = 720 surprend F du fait que le nombre trouvé est plus petit que 900. La reconnaissance de l'opération dans ce cas ne va donc pas de soi pour certains élèves[170]. Dans le tableau sur le nombre d'employés par rapport au nombre d'élèves,

---

L : Oh oui oui, ça, ça représente, oh mon Dieu, là, je sais, non on pourrait trouver la moitié de 1200, tu vois, c'est 600, alors ça, c'est comme ça, c'est 600, là ça on pourrait savoir genre, oui c'est ça que je voulais faire tout à l'heure mais à cause de J elle commence à faire des […] on pourrait le faire en 4 parties.
Ch : Ah c'est ce que tu voulais faire?
L : Oueh! [L divise le diagramme circulaire en quatre secteurs égaux]. On sait ça, c'est 600 [Moitié du diagramme]. C'est que là, cette partie, ça, ça vaut 600. C'est que là cette partie, ben genre, exemple moi je ne sais pas que ça vaut 300 là […]
Ch : Alors tu ne sais pas que ça vaut 300. Mais ça tu dis que c'est 600.
L : Ça c'est 600. Alors si ça c'est 600, ça aussi c'est 600 [Moitié du diagramme]. Vu que ça c'est la moitié de ça, ça c'est 300.
Ch : Ok!

[170] L : Si on récupère 24 000kg, ça sera combien de CO2 de moins? Il faudra diviser par 2 aussi?
J : Multiplier, je crois? (SP3, S1 00:01 à 00:09, vidéo 2). […]
J : Parce que ici ça dit que 1 kilogramme égal à 2, alors c'est 12 000. Comme mais moi je comprends que c'est 12 000 puis là comme c'est tout cela comme s'il y aurait 12 kilogrammes que je dois multiplier par 2 parce que 1 kilogramme est égal à 2. (SP3, S1 10:36 à 12 :08, vidéo 2)

des difficultés vont apparaître en lien avec 11/12 (d'un certain tout). Pour calculer ce 11/12, on va alors chercher à transformer cette fraction en pourcentage, sans trop savoir comment faire cela (1 élève, F), à dessiner 11/12 en interprétant la partie restante comme un pourcentage (10%) transformé en nombre absolu (10) (1 élève, B). Le recours à une règle dont on maîtrise mal le sens apparaît également dans ce cas comme pour le pourcenatge (ainsi Y multipliera par 12 puis divisera par 11).

En ce qui concerne l'histogramme, nous avons noté la difficulté à interpréter la sous-graduation des axes de l'histogramme par certains élèves. Par exemple, L confond le nombre de sous-graduations et la valeur de l'intervalle associée à cette sous-graduation (voir 4.3) ou encore la mesure sur la règle (1 mm) est considérée en soi et pas par rapport à l'intervalle entre deux graduations (F). Cette explicitation de la difficulté est à mettre en lien avec les conditions du milieu : le choix dans ce cas de présenter une graduation partielle de l'axe qui permet de voir apparaître cette difficulté. Il s'agit d'une difficulté locale (dans la situation-problème originale, proveanant du Ministère, une telle difficulté n'apparaîtra pas).

En somme, nous avons noté une interprétation difficile du taux, la difficulté à cerner l'effet de la variation d'une quantité sur l'autre et l'opération associée, des difficultés associées au sens accordé au pourcentage au sens de la fraction 11/12, au sens de la graduation sur l'axe. Il y a aussi en jeu la reconnaissance de l'opération à faire, une conception de la multiplication sous-jacente : quand on multiplie un nombre par un autre nombre on obtient un plus grand nombre. Quand on divise un nombre par un autre, on obtient un plus petit.

(3) Difficultés de calcul (Ici il n'y a pas de rétroaction possible du milieu) se manifestant dans les opérations (algorithmes de calcul, voir 4.3).

Un recours à des règles qu'on applique se manifeste à cette occasion par exemple toujours arrondir au nombre supérieur (sans qu'on ne contrôle le sens de ceci nécessairement, voir F)

Le tableau ci-dessous pose un regard transversal sur les difficultés des élèves en regard des conditions du milieu dans chacune des situations.

Tableau 5.2 Regard transversal sur les difficultés des élèves au regard du milieu dans chacune des situations expérimentées

Les situations	Difficultés observées	Conditions du milieu favorisant une adaptation/évolution
Pavage de carrés	Difficulté à se détacher du matériel (qu'on peut qualifier de difficulté locale)	-Matériel en nombre limité -Jeu (où l'élève doit anticiper s'il va pouvoir recouvrir ou non sans le faire)
	Tendance à surgénéraliser une proposition considérée comme vraie qu'ils viennent d'établir (qu'on peut qualifier de difficulté locale)	-Passage du carré plein au carré privé d'une case et variation de la position de la case
Pied de géant /panneau publicitaire	Difficultés de reconnaissance de la structure multiplicative (reconnaissance en acte d'un rapport constant entre certaines grandeurs). Confusion entre mesure sur le dessin et mesure réelle (notion implicite d'échelle) (difficulté locale)	Plus facile dans le cas du panneau publicitaire (des conditions du milieu différentes entre les deux situations) On pourrait imaginer certaines conditions du milieu (exemple personnage réel présent)
	Difficulté à imaginer la mesure de l'objet sans la présence de l'objet (locale)	Influence du milieu (exemple du panneau publicitaire)
	Difficultés liées au mesurage (signification du résultat de la mesure, déterminer ce que l'on mesure)	Aucune rétroaction à ce niveau (on est sur des connaissances auxiliaires/outils)
	Difficultés opératoires liées aux calculs sur les nombres (connaissances auxiliaires/outils)	Aucune rétroaction à ce niveau (on est sur des connaissances auxiliaires)

	Stratégie de « résolution de surface » pour certains élèves/ phénomène de suspension de sens (on opère sur des nombres sans lien avec le contexte)	
Défi climat	Gestion des données (difficultés apparaissant dans le traitement de celles-ci) (difficultés locales)	Exigées clairement par le milieu dans lequel est placé l'élève
	Difficultés conceptuelles : sens du pourcentage, de la fraction Conception de la multiplication Interprétation de la graduation dans l'histogramme) (difficulté locale)	Interventions du chercheur[171] provoquant une adaptation (ex de la difficulté à calculer 75 %, 15 % de …à un ordre de grandeur établi par rapport à la moitié du diagramme) Graduation partielle de l'axe permettant que s'explicite cette difficulté
	Difficultés opératoires liées aux calculs	Aucune rétroaction du milieu (on est sur des connaissances auxiliaires)

5.3 Comment les caractéristiques des situations proposées viennent-elles interférer avec le processus de résolution par ces élèves? Retour sur notre troisième question de recherche

5.3.1 Influence du contexte

Nous avons déjà mentionné à la sous-section 3.2.1 que les études sur les élèves identifiés en difficulté révèlent l'emprise possible du contexte sur la résolution pour cette catégorie d'élèves. Trois types de contextes (mathématique, fantaisiste et réaliste) ont été choisis pour notre expérimentation en vue d'explorer leur emprise possible sur la résolution des situations par les élèves en difficulté. À cette fin, nous avons retenu les situations « Pavage du carré » à contexte purement mathématique, le problème « Pied de géant » à contexte fantaisiste, avec son sous-problème « affiche » à contexte

[171] Cette intervention a été ponctuelle, dans le cas d'une dyade. Dans l'ensemble, on est ici plus dans le cas où il n'y a aucune rétroaction du milieu (on est sur des connaissances auxiliaires).

réaliste (introduit en cours de teaching experiment) et « Défi climat » à contexte réaliste. Le deuxième sous-problème (Panneau publicitaire) qui portait sur la recherche des dimensions d'un panneau publicitaire étant différent du problème « Pied de géant » sur le contexte, nous l'avons isolé pour la discussion sur cet aspect. Rappelons que les critères de choix de ces situations, entre autres, le contexte auquel réfère la situation-problème ont été clarifiés à la sous-section 3.2.1. La situation « Pavage de carrés » qui réfère à un contexte mathématique implique des objets mathématiques (carrés de différentes dimensions, recouvrement d'une surface à l'aide de dominos et triminos). La situation « Pied de géant » quant à elle est à contexte fantaisiste. En effet, la référence à un géant est « le fruit de l'imagination » et « sans fondement dans la réalité » (MEQ, 1988, p. 27). Enfin, la situation « Défi climat » et « Panneau publicitaire » est à contexte réaliste (susceptible de se réaliser). L'analyse des situations a permis de mettre en évidence l'emprise possible de ces contextes sur la résolution par les élèves identifiés en difficulté.

À la sous-section 5.1.1., nous avons relevé les potentialités des élèves dans la résolution de différentes situations-problèmes. Comment ces potentialités se traduisent-elles au regard des différents contextes?

Rappelons qu'au chapitre 1, tableau 1.1, nous avons analysé que les situations porteuses de potentiel mettent en évidence souvent un contexte mathématique. En effet, de nombreux travaux en didactique des mathématiques montrent le potentiel dont regorgent certaines situations à contexte mathématique (Berdonneau, 2006; Coffin *et al*, 2006; Grenier et Payan, 2003; Mary, Squalli et Schmidt, 2008). La situation-recherche « Pavage des carrés », à contexte purement mathématique, s'est avérée riche pour permettre à l'élève de s'engager dans le processus de résolution et d'y développer une variété de stratégies, une activité mathématique prenant la forme de processus : élaboration de conjectures, généralisation (au-delà du cas spécifique), exemplification, recours à des contre-exemples, systématisation des cas possibles ou non (voir tableau

5.1). L'analyse de cette situation nous a permis de voir que les élèves se sont engagés donc dans une activité mathématique. Le contexte mathématique n'était pas un obstacle au développement des potentialités de l'élève. La SR expérimentée a abouti à des conjectures, des argumentations à l'appui de ces conjectures et une systématisation des possibles (voir 5.1.2) montrant bien la richesse de ce contexte mathématique (voir tableau 5.1). L'élève s'y engage puisqu'il y a peu de prérequis notionnels.

La situation « Pied de géant » est une SP à contexte fantaisiste. Elle conduit les élèves à entrer dans celle-ci en essayant de se représenter un géant non visible, certains essayant de se l'imaginer (sa taille) par rapport à la longueur de la classe. Le défi en jeu n'était toutefois pas au niveau du contexte. Cette SP revêt en effet une complexité conceptuelle, différente de celle dont parle le MELS, où la complexité repose sur la gestion de multiples données (énoncé long et lourd, plusieurs domaines mathématiques en jeu, parfois un passage d'un registre à l'autre, et plusieurs concepts et processus en jeu). Cette complexité conceptuelle, dans le cas du Pied de géant, a trait à la proportionnalité. Comme nous l'avons mentionné au 4.2.5, la résolution de ce problème s'appuie sur des hypothèses telle que par exemple : la taille d'un des hommes de la photo, les proportions du géant relativement aux proportions d'un homme (voir 4.2.5). Dans la logique du quotidien, on peut se demander si les proportions du géant sont les mêmes que les proportions des hommes sur la photo. Cette situation, ouverte, sans données numériques, a permis différentes entrées dans le problème et l'amorce de plusieurs tentatives de résolution (voir tableau 5.1).

Cependant, le MELS (2003) bien que recommandant les différents contextes évoqués précédemment, met l'accent sur l'utilisation des situations-problèmes, à contexte réel ou réaliste dans le programme d'études de l'école québecoise (Lajoie et Bednarz, 2016). Il en est de même de certaines recherches portant sur des interventions conduites en classe auprès des élèves qui visent une compétence adaptative en résolution de problème (Hanin, 2018). L'argument invoqué pour privilégier des problèmes réalistes

est alors celui du phénomène de « suspension de construction de sens par les élèves », c'est-à-dire l'idée que les élèves ne retiennent que des traits de surface (les nombres, les opérations, etc.) et ne tiennent pas compte du contexte pour interpréter les résultats. On cherche ici à faire en sorte que ces élèves prennent davantage en compte le contexte dans leur résolution, et c'est cet argument qui sous-tend pour les chercheurs, l'intérêt d'avoir recours à des contextes réels ou réalistes. Ces situations à contexte réel ou réaliste sont-elles toutefois exemptes de difficultés de la part des élèves?

Cotnoir (2010, p. 221) relève qu'un contexte réaliste est un contexte dont l'origine est la « vie de tous les jours ». Quel rôle joue ce contexte dans le processus de raisonnement par l'élève? Dans la situation « Défi climat » à contexte réaliste, les élèves amorcent progressivement leur entrée dans la résolution de la situation-problème en relevant les gestes à faire pour réduire la quantité de CO2. Ainsi, le contexte réaliste a permis aux élèves de s'engager dans le processus de résolution de la situation-problème. Toutefois l'emprise du contexte dans la recherche de la solution par les élèves va se faire sentir, et pas nécessairement de manière aidante. Logique quotidienne et logique mathématique vont ici interférer. Par exemple, les élèves (J, L) vont chercher à augmenter la quantité de CO2 économisée, extrapolent d'autres quantités possibles (autres que celles données dans l'énoncé) de façon à augmenter la quantité de CO2 économisée. Les choix sont ainsi influencés par la logique du quotidien. Ainsi dans le cas des supports à vélo, comme le modèle C coûte plus cher que les modèles A et B et que le modèle A ne contient que 8 places, le choix va se faire sur le modèle B. Le matériau va également interférer : les gourdes en plastique sont préférées aux gourdes en aluminium au motif que celles en aluminium pourraient se casser si elles tombaient (voir l'élève B). Comme on le voit, la logique du quotidien qui parfois ne correspond pas à la logique mathématique constitue une composante importante dans le raisonnement de l'élève. On l'aura compris, le contexte réaliste, dans ce cas, n'est pas nécessairement un levier à cette compréhension profonde pour les élèves mais peut bel et bien être un frein. Il importe de rappeler que cette influence

du contexte a déjà été soulevée par certains auteurs (Perrin-Glorian, 1993, Gellert, 2009, Theis et Gagnon, 2010) et par nous (voir à ce sujet, la section 1.4.2). Ils montrent que le contexte réel ou réaliste n'est pas nécessairement un apport dans l'apprentissage de l'élève. Au regard de ces travaux, il apparaît que la logique mathématique et la logique du quotidien peuvent être en conflit.

5.3.2 Influence du type de situation

Rappelons que trois types de situations différentes étaient proposées aux élèves choisies sur la base de quatre critères (voir section 3.2.1). Une situation-recherche à contexte mathématique (Pavage de carrés, situation non marquée scolairement) et deux situations-problème, la première non marquée scolairement[172] avec deux sous-problèmes, l'un à contexte fantaisiste (Pied de géant) et l'autre à contexte réaliste (Panneau publicitaire) et la deuxième plus marquée scolairement, à contexte réaliste (Défi climat).

L'engagement des élèves dans les trois situations se manifeste, entre autres, par la mise en œuvre de stratégies de résolution qui tend à montrer l'influence du non marquage scolaire des situations (Lemoyne, 1989). Par exemple, pour défi climat, la situation n'est pas en effet présentée comme dans un cadre scolaire. On peut faire l'hypothèse ici que la manière dont la situation a été mise en route a permis cet engagement et l'entrée dans différentes manières de gérer les données (via les enveloppes), même si la mise en lien n'a pas été faite dès le départ.

Par ailleurs, l'analyse des stratégies des élèves et des construits dans chacun des cas tend à montrer que les trois situations ne sollicitent pas les mêmes « mathématiques des élèves » comme on peut le voir dans le tableau 5.1 qui rend compte des potentialités de chacune d'entre elles après analyse. Ainsi certaines situations apparaissent plus

[172] Le concept de marquage scolaire d'une situation a été développé au chapitre 3, section 3.2.1 (voir Lemoyne, 1989)

pauvres que d'autres sur le plan conceptuel et sur le plan de l'activité mathématique. C'est le cas de la SP de type scolaire (Défi climat) versus les deux autres (Pavage et Pied de géant) dans la mesure où ce qui est sollicité dans cette situation est davantage de l'ordre de la gestion des données et de la mise en œuvre de savoirs mathématiques locaux dans les différents sous-problèmes (pourcentage, fraction, variation de la quantité de CO2, lecture d'un histogramme, calculs), sans liens les uns avec les autres. En revanche, les deux autres situations (pied de géant et pavage de carrés) travaillent plus la dimension conceptuelle (Pied de géant) et les processus mathématiques, ou encore une activité mathématique riche (Pavage de carrés), de nombreux processus y étant sollicités (conjectures, généralisation, systématisation, exemplification, contre-exemples, visualisation, représentation mentale, etc.). Les registres de travail, les supports mobilisés, dans chacune des situations, montrent également des potentialités différentes déployées faisant ressortir la pauvreté relative de Défi climat qui sollicite essentiellement un travail dans un registre numérique.

Cette analyse met ainsi clairement en évidence la différence de potentialités mathématiques développées dans les trois types de situations, ces dernières n'allant pas chercher les mêmes construits et n'ayant pas la même richesse potentielle sur le plan du développement mathématique dans un contexte de Teaching Experiment.

Hormis les potentialités manifestées par les élèves, les difficultés observées dans leur processus de résolution ne sont pas non plus les mêmes dans les trois situations (voir tableau 5.2). Par exemple, dans la situation-recherche pavage de carrés, les difficultés des élèves, dans ce cas locales, attachées aux conditions mises en œuvre dans la situation, résident d'une part, dans la tendance à généraliser et, d'autre part, dans l'attachement au matériel. En modifiant le milieu, une adaptation se produit permettant un dépassement des difficultés. La situation pied de géant a, somme toute, déstabilisé les élèves habitués aux énoncés qui obéissent au format classique des problèmes scolaires qui contiennent des nombres perceptibles dans le texte ou qui sont nommés

explicitement dans le problème. Toutefois, malgré le manque de nombres dans le texte, les élèves se sont engagés dans la recherche en proposant différentes stratégies et solutions. Le format non usuel du problème (problème sans données numériques, on ne retrouve pas de problèmes de ce type en contexte scolaire) provoque une véritable démarche d'investigation (ils formulent des hypothèses sur la taille d'un des hommes sur la photo, la taille possible du géant, la taille d'un homme dans la réalité, la taille du pied du géant, etc). Les élèves font aussi des anticipations de l'ordre de grandeur du géant et pour certains font appel, à leur façon, au concept de proportionnalité. Bien entendu ce concept n'est pas soulevé par les élèves de façon explicite, on a ici les prémisses d'un raisonnement proportionnel avec tout ce qu'il présente de difficultés.

Dans le premier sous-problème (Pied de géant), l'idée de proportionnalité explicite, d'un rapport qui est conservé n'est en effet pas évoqué par les élèves bien qu'une proportionnalité implicite soit mise en action par trois élèves dont un explicitement. En revanche, l'idée de report sert de base à leur raisonnement et va avoir une influence sur certains élèves (F par exemple) et sera réinvesti dans le deuxième sous-problème (Panneau publicitaire). Dans les deux problèmes (Pied de géant et Panneau publicitaire), la notion implicite d'échelle est en jeu, donnant lieu à une difficulté (confusion entre mesure sur le dessin et mesure réelle) mise en évidence également dans les travaux Rauscher Adjiage.

L'évolution à l'intérieur d'un même problème s'observe dans ce sous problème « panneau publicitaire ». Par exemple, bon nombre d'élèves passent d'une résolution menée dans un registre de mesure uniquement, à une résolution dans un registre numérique qui prend en charge la structure multiplicative du problème. Ce qui n'est pas le cas dans la résolution du problème « Pied de géant » où peu d'élèves perçoivent la structure multiplicative dans le problème.

Enfin, la situation Défi climat fait principalement appel à des savoirs scolaires. On voit apparaître des difficultés liées à la gestion des données, dans le traitement de celles-ci

(séquence lourde, on perd le fil directeur). Quelques difficultés apparaissent en lien avec le pourcentage, la fraction, le sens donné à la multiplication ou la graduation sur l'axe.

Enfin, dans Pied de géant, Panneau publicitaire et Défi climat, des difficultés opératoires liées aux calculs sur les nombres ressortent.

La situation-recherche (SR) et les deux situations-problèmes (SP), avec ses deux sous-problèmes pour le géant, nous ont permis de percevoir l'intérêt de varier les situations, au regard non seulement des contextes mais des types de situation. L'analyse des potentialités et difficultés, dans chacune d'elles met clairement en évidence qu'elles ne sollicitent pas les « mêmes mathématiques » de la part des élèves.

5.3.3 Influence des variables didactiques

Comme nous l'avons déjà mentionné à la section 3.2.2.1, on appelle variable didactique d'un problème ou d'une situation, une variable pouvant être modifiée par le chercheur et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, modéliser les situations dans une perspective didactique (Brousseau, 1986).

Certains travaux (Brousseau, 1981) mentionnent l'influence d'une variable didactique sur le raisonnement des élèves. Par exemple, le puzzle ou casse-tête de Brousseau (1981) à l'annexe F s'inscrit dans une démarche de la prise en compte de variables didactiques dans l'aménagement du problème proposé[173].

[173] Dans le passage des structures additives aux structures associées à la construction des décimaux, différentes variables didactiques peuvent être considérées dans l'aménagement de la situation : par exemple, dans la consigne en lien avec la construction de modèles semblables plus grands « le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction », (Brousseau, 1981, p. 70), cette règle représente une variable didactique. Brousseau (1981) rappelle que les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 cm à toutes les dimensions du modèle. Dans la recherche d'une

Nous avons déjà abordé indirectement l'influence de certaines variables didactiques à travers l'analyse des potentialités et des difficultés, en lien avec certaines conditions du milieu (par exemple la présence du matériel, les interactions élèves-élèves, l'introduction de productions d'élèves fictifs, l'intervention du chercheur dans certains cas, etc.). Nous revenons maintenant globalement sur les variables didactiques introduites dans chacune des situations, soit au cours du Teaching Experiment, de manière à mettre en évidence comment ces dernières ont pu jouer.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les variables didactiques identifiées dans les trois situations (voir le protocole de chacune des situations en annexes H, I et J).

Tableau 5.3 Variables didactiques identifiées dans les trois situations expérimentées

Situations	Variables didactiques
Pavage de carrés Introduction de matériel (dominos, triminos, en nombre limité)	-Restriction des matériaux (dominos, triminos) dans le pavage -Extension du recouvrement de carrés (par des dominos) à des carrés privés d'une case : -Recouvrement de n'importe quel *carré privé d'une case (à la position L2C2*) à l'aide de dominos -Recouvrement de carré privé d'une case *à n'importe quelle position* à l'aide de dominos -Extension du pavage de carrés à d'autres formes (*triminos de deux formes différentes*) -Introduction du *jeu (anticipation du recouvrement possible)* -Extension du pavage de carrés de différentes formes : carrés, rectangles (à l'aide de dominos, triminos) aux carrés privés d'une case
Pied de géant	-Ne pas voir le géant, ne pas avoir les données numériques -Introduction de solutionss d'élèves fictifs différentes de celles de l'élève (de solutions qui ne fonctionnent pas, de solutions incomplètes

solution, Brousseau souligne que l'observation des dimensions du modèle pourrait amener les élèves à conclure que 5 + 4 = 9 et 5 + 2 = 7 et donc trouver trois segments de mesure a, b et c tels que :
a + b = c et donc f(a) + f(b) = f(c) où f est une application linéaire. On a f(5) + f(4) = f(9) = 63/4. En effet, f(5) = 5 x (7/4) et f(4) = 7 car l'image de 1 est 7/4. En divisant 4 en 4 parties, on divise 7 en 4 parties aussi.

	-Introduction de personnages dessinés (H2) [en cours du Teaching Experiment][174] - Introduction d'un sous-problème de même structure (panneau publicitaire) [en cours du Teaching Experiment]
Défi climat	-Introduction du projet sans présentation de nombres -Communication des informations avec des nombres placées dans trois dossiers (présence de trois enveloppes) -Pour chacun des sous-problèmes, certaines variables didactiques ont guidé les choix retenus : graduation incomplète des axes (histogramme), formulation en mots des taux, relations dans les tableaux [D3(2) et D3(1), D2], donnée manquante (dans les données portant sur les arbres).

Les variables didactiques identifiées dans les situations expérimentées ont-elles influé sur le processus de résolution des élèves? L'analyse précédente qui a permis de dégager les potentialités de chacune des situations et les difficultés mobilisées dans chacune d'entre elles au regard des conditions du milieu donne déjà une réponse à cette question (voir tableaux 5.1 et 5.2). On y voit, entre autres, l'influence de certaines conditions qui favorisent un dépassement de la difficulté et une adaptation (voir tableau 5.2). Nous reviendrons brièvement sur l'influence des variables didactiques dans chacune des situations.

Situation recherche

Nous avons déjà montré précédemment comment a joué le fait qu'on ait un matériel en nombre limité, dans la construction par exemple de traces écrites par les élèves permettant de rendre compte du recouvrement.

[174] Rappelons ici que cette situation intermédiaire n'as pas été retenue au niveau de l'analyse, nous avons précisé pourquoi précédemment.

Dans la situation initiale, dans un premier temps, le carré n'est pas privé d'une case. Dans un second temps, la variable didactique introduite vient modifier le carré (recouvrement de n'importe quel carré à l'aide de dominos) à un carré privé d'une case. Cela se fera tout d'abord sur un cas spécifique (« priver le carré, quelque soit le carré, d'une case à la ligne 2 et la colonne 2 ») puis ceci sera étendu à n'importe quelle position (« on s'intéresse à n'importe quel carré privé d'une case »). Peut-on recouvrir un carré privé d'une case avec les dominos? Peut-on trouver tous les endroits où ça peut marcher, ceux où ça ne marcherait pas? Ces variables didactiques visent à voir jusqu'où l'élève identifié en difficulté peut aller dans l'extension du problème initial à de nouvelles questions, dans le changement de point de vue et dans le prolongement de la situation. Puis la situation est maintenant étendue (nouvelle variable didactique) à d'autres formes servant au recouvrement (triminos au lieu de dominos, triminos de différentes formes). La même logique sous-tend les variations apportées à la tâche de recouvrement par des triminos de deux formes différentes (carrés de différentes grandeurs, carré privé d'une case, variation de la position de cette case). Ce sont bien des variables didactiques « dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations des apprentissages » (Brousseau, 1982, p. 47). Les effets de ces variables ont-elles influencé profondément les apprentissages des élèves et imprégné leurs conceptions et leurs visions?

Autour des carrés privés d'une case spécifique (ligne 2, colonne 2)

L'analyse des différentes stratégies et conjectures des élèves, ainsi que leurs argumentations, a permis de mettre en évidence l'évolution des « mathématiques des élèves ». Les élèves ont été amenés sous l'effet de la variable didactique (carré privé d'une case L2C2) :

- à se détacher du matériel (7 élèves). Ce détachement du matériel vient de l'idée que pour le carré 8 x 8 (carré ayant un nombre de cases pair), le recouvrement est possible par les dominos alors qu'il est impossible lorsqu'une case (ligne 2, colonne 2) est

bouchée, parce que le carré devient impair (l'élève réinvestit ici les connaissances qu'il vient de développer et n'éprouve plus le besoin de passer par un recouvrement complet). La modification de la variable (priver le carré d'une case L2C2) change donc le point de vue de quatre élèves en les amenant à se décentrer du matériel.

- Cette variable didactique les amène aussi à réinvestir les conjectures formulées et en construire de nouvelles. Ainsi les élèves argumentent en s'appuyant sur ce qui a été avancé dans la séance antérieure et construisent de nouvelles conjectures. Par exemple, l'élève L travaille maintenant sur la parité du nombre total de cases et de la dimension. De même, J, M et Y sont centrés sur le nombre total (et non plus sur la dimension). Ce changement pour J, M et Y vient du fait que la forme n'est plus un carré plein. Comme on l'aura compris la variable influe sur le raisonnement des élèves.

Autour des carrés privés de n'importe quelle case

Les élèves ont eu tendance à réinvestir les connaissances antérieures en généralisant la conjecture qu'ils avaient formulée antérieurement à toute case bouchée, quelle que soit sa position. Comme les carrés 5 x 5 et 7 x 7 sont impairs, le recouvrement de ces carrés par les dominos est possible quel que soit l'endroit où la case est bouchée parce que, comme l'affirme l'un d'eux : « ça reste toujours un nombre pair ». L'introduction de cette variable didactique n'a donc pas vraiment d'effet sur le changement de conclusion par l'élève.

C'est ici la confrontation par le chercheur (introduite en cours de Teaching Experiment) à ce qu'avance l'élève qui aura un impact. Par exemple, le chercheur propose aux élèves C et R de boucher la ligne 2 et la colonne 1 pour vérifier si l'on peut recouvrir le carré 7 x 7. Une interaction avec ces élèves les a conduits à conclure qu'il est impossible de le recouvrir, même si le nombre total de cases est pair. De même, l'élève M sur l'intervention du chercheur à une séance a affirmé que le recouvrement du carré 5 x 5 privé d'une case à la ligne 2 et colonne 1 n'est pas possible. Comme on le voit,

le changement de la variable didactique (carrés privés de n'importe quelle case, avec confrontation du chercheur à l'occasion) a modifié les conclusions des élèves.

Une nouvelle variable didactique est introduite : l'extension du recouvrement à n'importe quelle forme et l'introduction du jeu. Celui-ci force tout d'abord une décentration du matériel ce que nous verrons effectivement à l'œuvre dans les stratégies des élèves (voir section 4.1.3.2). De plus, de nouvelles stratégies apparaissent (voir section 5.1.1.3, voir notamment le recours à un recouvrement mentalement avec une forme intermédiaire un rectangle formé de deux dominos en forme de L dont l'une des dimensions est 3). Le jeu force donc une décentration du matériel et l'élaboration de nouvelles stratégies. De même, l'extension du recouvrement du carré à des triminos de deux formes différentes et du carré privé d'une case par des triminos (deux autres variables didactiques) apportent des modifications dans les stratégies des élèves, leur explicitation et la formulation des conjectures (voir section 4.1.3.3). D'une forme de triminos à une autre (forme allongée à forme en L) et d'une forme de figure à une autre (carré à rectangle) des changements aussi bien de stratégies que d'argumentation s'opèrent à l'intérieur d'une même situation. Signalons enfin que la confrontation des élèves est également un élément qui a joué dans l'évolution des stratégies (voir ici exemple de F et B dans le jeu). Les deux élèves arrivaient ici à des conclusions différentes face au recouvrement possible d'un rectangle à l'aide des triminos, et l'explicitation des arguements a permis de mettre en évidence deux visualisations différentes possibles de la forme intermédiaire (rectangle 2 x 3 versus 3 x 2).

Qu'en est-il de l'influence des variables didactiques dans la situation Pied de géant?

Le géant, dont on ne voit qu'une partie sur la photo, est une variable didactique qui a eu une influence sur la stratégie élaborée (voir R).

Dans ce sous-problème « Pied de géant », une des variables didactiques consiste à une confrontation à des solutions différentes de celle présentée par l'élève (solutions

d'élèves fictifs présentant des approches différentes de celle de l'élève, solution qui ne fonctionne pas et solution amorcée que les élèves doivent poursuivre). Ceci a permis aux élèves (dans certains cas) d'expliciter leur argumentation et de susciter d'autres solutions possibles. Ainsi, nous mentionnons par exemple la réaction de l'élève B lorsque nous avons introduit la solution de Jean mettant en évidence les hommes présents sur la photo et leur taille. En effet, B modifie sa stratégie qui au départ est mobilisée dans un cadre de mesure (mesure de sa taille en utilisant un étalon qui est celui de la hauteur d'une botte, par report de cette unité) à une stratégie combinant un registre de mesure et un registre numérique (report d'un certain étalon, qu'on met en correspondance sur un plan numérique, avec la taille d'un homme).

Le problème du panneau publicitaire est un problème faisant appel, comme pied de géant au concept de proportionnalité mais un peu différent du point de vue des données (tout est ici visible sur la photo); toutes les données sont là mais il ne met pas en jeu de données numériques, tout comme c'était le cas pour pied de géant. Le problème Panneau publicitaire est un sous-problème créé en cours de Teaching Experiment. Il peut donc être considéré comme une variable didactique, arrivant après la situation inermediaire H-2. On observe en effet une différence des stratégies dans les deux problèmes dans la prise en compte du rapport constant entre deux grandeurs. La reconnaissance de la structure multiplicative par les élèves semble plus facile pour les élèves que dans le cas du problème de géant. Ensuite, dans ce sous-problème, une autre variable didactique est introduite, elle consiste à « donner un indice sur la mesure réelle d'une partie (visage) ou de la taille complète d'un des musiciens (voir H-3) alors qu'au départ elle n'est pas donnée ». L'influence de cette variable prolonge alors l'idée que les élèves ont eue en amorçant une solution sur la base de cette donnée choisie comme étalon.

Situation Défi climat

Les variables didactiques dans cette situation sont dans un premier temps « introduire le projet sans présenter de nombres » et dans un second temps « donner des informations avec des nombres », et ce avec le support de dossiers présentés sous forme d'enveloppes. Les idées en arrière sont, d'une part, d'engager les élèves dans une situation moins marquée scolairement (Lemoyne, 1989) et, d'autre part, d'éviter de les focaliser dès le départ dans une démarche qui ferait appel aux opérations à effectuer. Pour les élèves identifiés en difficulté, il s'agit là des défis importants qui se posent à eux. En effet, comme nous l'avons relevé aux sections 1.4.1 et 1.4.5, les situations non marquées scolairement semblent favoriser l'engagement d'élèves identifiés en difficulté (Lemoyne, 1989). De plus, les élèves identifiés en difficulté sont souvent à la recherche d'algorithmes et de règles dans une démarche de résolution de problème (Perrin-Glorian, 1993). Cette première variable didactique a conduit effectivement à un engagement dans la tâche prenant en compte le contexte de la situation, et ce avant toute résolution.

Il importe de relever qu'un choix d'organisation nous a amené à placer les données dans trois enveloppes dans la deuxième étape de résolution de la situation alors qu'initialement les données étaient données en bloc (dans la situation scolaire dont elle s'est inspirée). Nous pouvons considérer cela comme une variable didactique. Nous pensons que cette variable didactique a conduit à un travail sur les données et leurs liens (observable dans la manipulation des enveloppes), comme le met en évidence l'analyse de la gestion des données des élèves à cette étape (voir tableau 4.8 et ce qui ressort).

De plus, la présentation de l'histogramme (choix de ne pas placer de graduation complète sur l'axe) permet d'avoir notamment deux entrées par les élèves dans son exploitation : une entrée reposant sur une estimation par rapport à un point de repère, une « entrée » reposant sur le recours à une sous-graduation qui vaut 10 unités chacune (10 x 5 = 50). Cette variable didactique ne conduit pas à une entrée unique comme

c'était le cas dans le problème de départ dont il est issu mais plutôt à plusieurs possibles.

La variable didactique « formulation en mots des taux » a-t-elle pu jouer sur la reconnaissance de l'opération qui est apparaue relativement aisée chez les élèves?

Par ailleurs, une donnée prévue au départ a été manquante dans l'énoncé de la situation-problème (variable didactique que nous avons été amenés ainsi à considérer). Elle peut aussi être considérée comme une variable didactique puisque l'absence de cette donnée a permis à six élèves de se rendre compte qu'ils ne pouvaient pas poursuivre la résolution de la situation sans cette donnée.

L'introduction de variables didactiques dans chacune des situations, plus ou moins importantes selon les cas (on observe en effet davantage de variables didactiques introduites dans la première situation ou des ajustements plus locaux dans Défi climat par exemple) met en évidence l'influence qu'elles ont eue dans le processus d'adaptation des élèves et l'évolution de leurs « mathématiques ».

CONCLUSION

Rappelons qu'au terme de cette thèse, un objet de recherche s'est clarifié portant sur les potentialités et les difficultés des élèves de classes régulières identifiés en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Nous dégageons à travers les lignes qui suivent les contributions de notre recherche en revenant plus spécifiquement : (1) sur la méthodologie et l'intérêt qu'elle présente, (2) la variété des situations et ce qu'elle éclaire, ainsi que (3) sur l'apport plus spécifique de chacune des situations, notamment par rapport aux études déjà réalisées sur le pavage de carrés et pied de géant. Nous reviendrons enfin sur les limites de cette recherche, sur ses retombées et ses prolongements.

Contributions de cette recherche

Une méthodologie qui donne à la recherche auprès d'élèves identifiés en difficulté une certaine originalité

Rappelons tout d'abord que la plupart des recherches que nous avons citées, et qui portent sur des élèves identifiés en difficulté d'apprentissage, ont eu recours à une méthodologie « d'ingénierie didactique » (Artigue, 1989), mettant en jeu l'élaboration de situations en lien avec l'apprentissage de différents contenus mathématiques. Des analyses préalables des concepts en jeu, des raisonnements clés, des conceptions des élèves, servent à penser les situations qui s'appuient sur des choix didactiques argumentés et justifiés. Sont ici étudiées, dans le cadre de ces ingénieries, les dépendances entre connaissances élaborées par les élèves et situations. Les *analyses a priori et a posteriori* des conduites des élèves dans ces situations constituent l'instrument de l'observation scientifique mise en place pour observer un certain nombre de phénomènes didactiques. L'approche retenue dans cette thèse, le Teaching Experiment, propose une orientation et une méthodologie différentes, qui donnent à

cette recherche une certaine originalité. Il ne s'agit pas en effet de confronter, comme c'est le cas dans l'ingénierie didactique, une analyse a posteriori à une analyse a priori. Par l'approche méthodologique du Teaching Experiment, le chercheur a accès, comme nous le montrent bien les résultats précédents (voir chapitres 4 et 5), à un matériau riche rendant compte des mathématiques des élèves-en-développement, et ce en interaction avec un certain milieu. Ce milieu, lui aussi, bouge dans un processus d'adaptation du chercheur à ce qui émerge au fil du temps : la situation proposée, ses aménagements anticipés, se modifient en cours de route pour pousser plus loin ces mathématiques de l'élève. Ainsi par exemple, plusieurs des aménagements du milieu ont été pensés en cours de route, en fonction de ce qui se passait : c'est le cas du jeu, dans la situation-recherche Pavage de carrés, qui conduira à un détachement du matériel de la part des élèves; c'est le cas des interventions du chercheur, dans le pavage de carrés privés d'une case, qui provoqueront un déséquilibre de la part de l'élève et des adaptations dans les conjectures élaborées (cas possibles ou non). C'est le cas aussi du panneau publicitaire, dans la situation-problème Pied de géant, qui fera apparaître une meilleure perception de la structure multiplicative chez les élèves. C'est le cas finalement de certaines interventions du chercheur, dans la situation-problème Défi climat, qui permettront de voir émerger le sens que l'élève accorde au pourcentage ou le contrôle qu'il exerçe sur le calcul. Ces aménagements entre les séances, ou sur le coup, dans l'action, sont possibles dans le cadre de cette approche méthodologique. Rappelons que le Teaching Experiment imbrique entrevue clinique et interventions du chercheur, ce qui permet de saisir le champ des possibles de la part de l'élève. En ce sens, pour revenir à la signification que nous donnions au concept de potentialités au chapitre 2 (voir section 2.2), cette approche méthodologique nous donne accès au dynamisme des potentialités de l'élève, et constitue une entrée privilégiée intéressante pour la recherche sur les élèves identifiés en difficulté. Le but n'est pas juste d'avoir accès aux mathématiques de l'élève à un moment donné et d'en prendre une photo, l'intention est de documenter l'évolution de ces potentialités en lien avec certaines conditions du milieu. Cette approche méthodologique permet d'entrer sur l'action de l'élève, et ce

sur un long temps. Ce dynamisme de la construction des « mathématiques des élèves » en interaction avec les conditions mises en place, est mis en évidence dans cette thèse, dans l'analyse des stratégies développées par les élèves, des construits élaborés, et des argumentations qui les sous-tendent. Cette approche méthodologique nous apparaît en ce sens très prometteuse, pour les recherches avec les élèves identifiés en difficulté, parce qu'elle s'éloigne d'un portrait souvent figé de ces élèves pour entrer sur une modélisation (par le chercheur) des potentialités des élèves, non de manière statique, mais dynamique, permettant ainsi véritablement, comme le montre bien cette thèse, d'en saisir toute la richesse.

Une deuxième contribution importante : une variété de situations et l'éclairage qu'elle apporte

Le programme d'études québécois met l'accent sur l'importance d'avoir recours à une variété de situations dans la résolution de problèmes en mathématiques. Différentes balises ont ainsi été précisées au fil du temps pour rendre compte de cette variété possible : problèmes variés pratiques pour éviter la monotonie et l'ennui, dans la première moitié du 20è siècle; variété de problèmes qui s'expriment à travers les types de contexte (réels, réalistes, fantaisistes, purement mathématiques), le nombre de solutions, l'adéquation des données fournies, ou encore les modes de présentation, dans le programme des années 80 (voir Lajoie et Bednarz, 2012); référence au contexte élargi dans le programme des années 2000 renvoyant notamment aux autres disciplines et aux domaines généraux de formation (voir Lajoie et Bednarz, 2016). Faire varier les problèmes, même si les balises sont précisées, est ainsi pris dans les différents programmes d'études comme un allant de soi pour travailler la résolution de problèmes en mathématiques. Cette nécessité de varier les problèmes n'est jamais fondée, en montrant, par exemple, l'apport qu'une telle variation a pour l'apprentissage mathématique des élèves. Qu'en est-il vraiment?

Quelques chercheurs ont souligné l'importance de cette variation des situations dans la construction de connaissances mathématiques chez les élèves (Giroux 2013; Giroux et Ste Marie, 2006) en mettant en évidence que la variation des tâches, des situations proposées aux élèves contribuent à élargir le caractère d'utilité d'une connaissance. Notre recherche est une autre contribution à l'éclairage de cet effet de la variation. Trois situations y ont été expérimentées dont les caractéristiques spécifiques sont une concrétisation de ce que peut vouloir dire varier les situations. Or ces trois situations sollicitent clairement chez les élèves une variété de potentialités (voir tableau 5.1). L'activité mathématique de la part des élèves apparaît, dans les trois cas, de nature fort différente : développement de processus mathématiques caractéristiques d'une activité de recherche mathématique dans la situation Pavage de carrés (formulation de conjectures, généralisation, exemplification, recours à des contre-exemples, systématisation des cas possibles ou non, etc.); développement d'une conceptualisation (liée à la proportionnalité) dans la situation-problème Pied de géant, se manifestant à travers des théorèmes-en-acte et concepts-en-acte; mise en lien entre des données multiples, puis travail sur une suite de petits concepts, dans la situation-problème Défi climat, se manifestant à l'occasion à travers des concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. Chacune des situations fait donc appel à des mathématiques des élèves fort différentes, dont la richesse n'est pas du tout du même ordre. En ce sens, cette recherche est une contribution importante à l'avancement de connaissances sur la question de la variation des situations et son influence. Elle permet notamment de mieux voir les différences entre ce que sollicite une situation-problème de type scolaire, proche de ce que les élèves rencontrent dans le système scolaire québécois (cf. Défi climat) et les autres situations (Pavage de carrés et Pied de géant, voir tableau 5.1). Les situations de type non scolaire semblent offrir à l'élève la possibilité d'avancer dans la situation sans exigence de prérequis. Elles sollicitent de plus une activité mathématique riche (conceptualisation, différentes entrées, variété de stratégies, développement de conjectures, généralisation, visualisation, représentation mathématique, etc.). L'enjeu ne réside pas, dans celles-ci, dans l'application de savoirs scolaires, qui du reste sont

des outils mathématiques, mais dans le développement de stratégies, d'argumentations, de réflexions qui peuvent déboucher sur une construction conceptuelle (cas du pied de géant) ou de nouvelles questions mathématiques (cas du pavage de carrés).

Ainsi, on le voit dans ce qui précède, ce n'est pas tant le caractère d'utilité d'une connaissance qui est en jeu dans cette variation des situations et des tâches (Giroux, 2013), mais bien la richesse et complémentarité des mathématiques travaillées dans ces situations. Cette première entrée dans l'exploration de la variation des situations et leur impact nous semble importante à poursuivre pour fonder davantage le choix de cette variation dans l'enseignement des mathématiques.

Une troisième contribution : une documentation du processus de résolution d'élèves identifiés en difficulté dans chacune des situations

Ce qui frappe a posteriori au regard de l'analyse, ce sont les potentialités que les résultats observés font ressortir de la part d'élèves identifiés en difficulté en lien avec les conditions mises en place dans chacune des situations (voir chapitre 4 et sous section 5.1.1). Les expérimentations réalisées, dans notre recherche, sur le pavage de carrés et le pied de géant ont mis en évidence à cet égard des résultats importants. Elles viennent confirmer, tout d'abord, la fécondité de ces deux situations pour l'apprentissage des mathématiques, ce que nous révélaient déjà les recherches menées sur ces problèmes (Grenier, 2007; Rauscher et Adjiage, 2014), et ce dans le cas d'élèves identifiés en difficulté d'apprentissage. Rappelons en effet que les recherches conduites sur le problème de géant et la situation du pavage ont été menées, pour la très grande majorité d'entre elles, dans des classes régulières. Il y a donc là en soi un premier résultat important. Nous avons en effet observé, comme cela avait été le cas dans ces études, une dévolution des problèmes (Brousseau, 1998) immédiate chez les élèves. De plus nous y avons observé différentes entrées dans le problème, différentes stratégies, supports à la résolution, registres de résolution, construits sollicités chez les élèves (voir tableau 5.1), témoignant des potentialités développées dans ces situations. Ainsi

dans le cas du pavage de carrés, des stratégies sont élaborées à partir de cas simples, tels que faire des essais empiriquement avec le matériel, en ayant recours à des traces, ou mentalement. Cette exemplification sert d'appui à la formulation de conjectures, d'argumentations ou à une entrée sur les cas possibles ou non possibles. Ou encore dans le cas du problème du géant, le recours à une hypothèse sur la taille d'un homme, à une comparaison entre certaines grandeurs, ou au mesurage à l'aide d'un certain étalon permettent d'avancer dans la résolution du problème.

Nos résultats mettent enfin en évidence des conditions du milieu qui sont apparues déterminantes dans l'évolution des élèves. Ainsi, dans le cas du pavage de carrés, certains aménagements ont permis une distanciation notable du matériel et une anticipation du résultat du recouvrement (possible ou non). Le matériel en nombre limité, caractéristique que l'on ne retrouvait pas nécessairement dans les études précédentes, a mis en évidence une difficulté locale observée au départ chez certains élèves, mais en même temps qui a permis de la dépasser dans certains cas (en ayant recours à des traces écrites). Il en est de même du jeu introduit en cours de route, qui a joué un rôle important dans cette évolution : capacité à se représenter mentalement le recouvrement, en faisant appel à des formes intermédiaires, flexibilité dans la visualisation de positions différentes de ces formes intermédiaires, etc. De la même façon, dans le cas du pied de géant, certaines conditons du milieu se sont avérées déterminantes, notamment le recours aux écrits réflexifs des élèves (affiche produite par les élèves pour rendre compte de leurs solutions à d'autres, utilisation d'écrits d'élèves fictifs), rejoignant en cela les études passées (Rauscher et Adjiage, 2014). De plus, la présence d'un géant partiellement visible, a conduit à des stratégies non identifiées dans les études précédentes. La nécessité de le voir est une des conditions du milieu ayant influé sur le processus de résolution de certains élèves alors que pour les élèves de classes régulières, la question de voir le géant pour trouver sa taille ne se posait pas. En ce sens, le problème du panneau publicitaire, introduit en cours de route, révèle que cette difficulté n'est plus présente et donc qu'il s'agit bien d'une difficulté

locale. D'autre part, cet aménagement du milieu (par l'introduction d'un nouveau problème) a permis de mettre en évidence que la structure multiplicative du problème est davantage perçue dans ce dernier cas.

Nos résultats permettent ainsi de mettre en évidence des conditions du milieu qui apparaissent fécondes sur le plan du développement des potentialités, dans chacun des cas.

Revenons maintement sur la situation Défi climat qui, elle, n'a pas fait l'objet d'étude spécifique par des chercheurs. Nous ne disposons pas non plus des évaluations régulières des élèves sur cette situation dans sa présentation classique. Les aménagements apportés par nous à cette situation scolaire ont porté sur l'entrée dans le problème (aucune introduction de nombres à cette étape sauf l'objectif à atteindre), l'introduction par la suite de dossiers (sous forme d'enveloppes) présentant les données, et quelques modifications portant sur l'histogramme, la formulation des taux ou des relations entre les données, l'introduction d'une donnée manquante à la dernière étape. Notre analyse de la situation met en évidence des résultats importants (voir tableau 5.1), entre autres : différentes entrées dans la gestion des données avec, dans l'analyse des dossiers, une sorte de va et vient mettant en relief des liens; un contrôle exercé sur les données et leurs liens dans les calculs intermédiaires et le réinvestissement dans le calcul global; des construits associés aux sous-problèmes (flexibilité dans le passage d'une notation à l'autre -fraction, division; % d'un tout, fraction d'un tout; sens du % en acte, estimation par rapport à des points de repère, des théorèmes en acte liés à la co-variation). Notre regard dans l'analyse de cette situation a ainsi porté sur la construction des stratégies et des construits des élèves et non sur leur réussite au problème (comme le fait habituellement l'évaluation de cette situation-problème en contexte scolaire). Il y a là une différence de regard qui serait à analyser de plus près : jusqu'à quel point la réussite au problème des élèves identifiés en

difficulté est-elle un indicateur des apprentissages mathématiques développés par les élèves?

Ces différentes contributions ouvrent sur des retombées possibles de ces travaux pour la recherche (nous y reviendrons dans les prolongements), pour la pratique enseignante, voire pour l'institution (MELS)

Retombées possibles à la fois pour la pratique et l'institution

Sur le plan de la pratique enseignante, les résultats de nos analyses le montrent, il pourrait être intéressant de proposer aux élèves d'autres types de situations-problèmes que celles de types scolaires, ces dernières sollicitant des mathématiques différentes chez les élèves (développement d'une activité mathématique au sens de la recherche mathématique, ou travail de conceptualisation) ou encore à repenser leur aménagement, dans le cas des situations scolaires. En ce sens, ces différentes situations-problèmes et les conditions mises en place pourraient être réinvesties par les enseignants et enseignantes du secondaire, à condition d'en préciser sans doute les intentions. Ce sont des situations porteuses pour l'apprentissage et peuvent êtres des pistes de réflexion intéressantes pour la pratique. Notons tout de même que le déroulement des situations demande beaucoup d'investissement de la part des enseignants, et qu'elles demandent donc un accompagnement. Il ne s'agit nullement d'un matériel qu'on peut utiliser et appliquer tel quel sans réflexion.

Dans le cas de Défi climat, plus proche des situations que les enseignants expérimentent déjà, les résultats de cette recherche suggèrent des pistes intéressantes pour eux. En effet, ils mettent en évidence que dans le cas des situations-problèmes de type scolaire, des aménagements de la situation peuvent être pensés pour ouvrir sur une exploitation plus riche pour les élèves: du point de vue de la gestion des données, souvent complexe dans ces situations, et du point de vue de l'activité mathématique sollicitée. Ainsi le fait de séparer les données dans 3 enveloppes, et de ne pas entrer directement sur les

calculs, met en évidence la possibilité qu'il y a alors pour l'élève de se centrer sur les données et leurs relations, et ce avant tout calcul. Cette mise en lien sera réinvestie, on le voit dans nos analyses, dans la résolution par la suite, en assurant un certain contrôle de l'élève sur ce qui se passe. Par ailleurs, des aménagements mineurs apportés à la situation de départ peut permettre une entrée plus riche mathématiquement dans les sous-problèmes, on peut percevoir ceci dans le cas de l'histogramme. Il est donc possible, dans le contexte de situations-problèmes de type scolaire, de revoir les aménagements proposés, de modifier certaines données ou formulations, pour faire en sorte que ces situations présentent un travail mathématique plus riche pour les élèves. Il y a là une piste intéressante à exploiter pour les praticiens ou les concepteurs des programmes ou évaluations au Ministère de l'Éducation.

Les résultats de nos travaux pourraient ainsi être diffusés, dans cette perspective, auprès d'autres enseignants et enseignantes ainsi que d'orthopédagogues préoccupés par les questions d'apprentissage et d'intervention auprès d'élèves identifiés en difficulté.

Enfin, les institutions au premier plan le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec devrait repenser le format actuel des situations-problèmes, en proposant différents types de situations-problèmes qui impliqueraient les élèves comme nous l'avons déjà mentionné dans des activités mathématiques riches et variées sous différents angles, notamment dans les processus de résolution en touchant à différentes dimensions (construction conceptuelle, activité mathématique, gestion des données et réinvestissement de savoirs mathématiques, etc). Enfin, un autre élément est à considérer dans cette diffusion vers l'institution. Dans le programme de mathématiques du primaire au secondaire, le ministère de l'Éducation insiste en effet sur la nécessité de proposer aux élèves des situations à contexte réel. Or nos travaux apportent un éclairage intéressant à ce sujet et viennent relativiser la prépondérance de ce contexte dans la résolution de problèmes : le contexte réel pourrait-il constituer aussi

un frein? Le recours à un contexte mathématique (cas du pavage) et fantaisiste (pied de géant) pourraient-ils constituer un tremplin intéressant à considérer?

Limites de notre recherche

Le travail réalisé dans cette recherche, à l'aide du Teaching Experiment, se rapproche de l'étude de cas. Elle a impliqué peu d'élèves (8 élèves identifiés en difficulté d'apprentissage) et a permis une étude en profondeur des potentialités des élèves sur un nombre petit de situations (trois) dont les contours et les aménagements ont été précisés. Notons que l'expérimentation réalisée faisait appel à quatre situations-problèmes (les trois reprises dans cette thèse et une autre non reprise ici) choisies sur la base de quatre critères mentionnés à la section 3.2.1. La quantité de données recueillies nous a obligé à ne choisir que trois situations-problèmes aux fins de notre analyse, la quatrième situation-problème expérimentée n'ayant pu être analysée en profondeur. De même, nous aurions pu étendre l'analyse des données recueillies à d'autres situations-problèmes de type scolaire, expérimentées par écrit dans le groupe classe et dont nous avions recueilli les données. La comparaison de ces données, avec celles collectées dans les trois SP expérimentées, aurait pu être intéressante. Elle fera partie des prolongements possibles de cette thèse. Enfin, le choix des élèves identifiés en difficulté a été fait principalement sur la base des critères du MELS, entre autres, avoir moins de 60 % en mathématiques et en se basant sur les observations de l'enseignant régulier de la classe. Nous aurions pu sélectionner les élèves à partir d'autres critères définis spécifiquement par nous, ce qui aurait exigé la mise en place d'autres outils méthodologiques. La petite quantité de situations, d'élèves, les critères qui ont guidé le choix des élèves identifiés en difficulté, la mise de côté de certaines données (sur une autre situation, sur les résultats des élèves dans la résolution de situations problèmes scolaires passées en classe) sont autant d'aspects qui pourraient être considérés comme une limite de cette recherche. Quel est dès lors le statut de nos résultats?

L'intérêt des travaux d'une recherche comme celle-ci réside, nous précise Proulx (2019) dans « la génération de nouvelles idées, de nouvelles façons de faire, de nouvelles occasions de donner un sens, de nouvelles avenues à explorer, etc. » (Proulx, 2019, p. 63). Autrement dit, c'est le caractère générique de la recherche qui, dans ce cas, est mis à l'avant plan (sa générativité) et non sa généralisation. C'est cette dimension générique qu'il convient effectivement de mettre de l'avant au regard de nos résultats. En effet, comme nous l'avons mis en évidence précédemment, ces derniers apportent des perspectives nouvelles aussi bien sur la méthodologie utilisée (TE) que sur la résolution de problèmes par des élèves identifiés en difficulté (nouvelles connaissances produites par cette recherche sur les stratégies, construits des élèves et leur évolution notamment), ansi que sur les situations et conditions du milieu mis en place dans l'émergence et le développement des potentialités des élèves. C'est en ce sens que la recherche et ses résultats sont porteurs de « générativité ». Il y a là « une façon de concevoir les recherches (et leurs résultats) en se centrant non pas sur l'état immuable et fixé des recherches, mais plutôt sur leurs possibles, sur leurs futurs » (Proulx, 2019, p. 65). Comme le souligne Proulx (2019, p. 64), « cette générativité, de plus, dépend du chercheur […], elle vit dans le monde des possibles du chercheur, elle est relative à ce chercheur qui perçoit les possibilités, qui voit ces idées générées ». Les conditions du milieu (pensées par le chercheur en cours de route), dont font partie les interventions du chercheur, les potentialités des élèves mises en évidence, dans leur dynamisme, en interaction avec ce milieu sont porteuses d'idées nouvelles, de prolongements possibles, tout comme l'est la fécondité de l'approche de recherche retenue (TE) auprès d'élèves identifiés en difficulté.

Prolongements

Cette recherche a de nombreux prolongements possibles. D'abord, les résultats de nos travaux de recherche nous conduisent à la nécessité d'entrer dans une analyse fine de la notion de variété, en s'appuyant sur des caractéristiques fondées (balises guidant le

choix des situations, conditions mises en place et rationnel qui guide, mathématiques des élèves sollicitées) qui permettent d'en percevoir les potentialités. Il importe donc d'analyser les conduites des élèves en lien avec une variété de situations, pour mieux comprendre les effets de cette variation de situations : celles qui sont prometteuses, celles qui le sont moins, les aspects complémentaires qu'elles permettent de couvrir. À ce titre, les caractéristiques suivantes, les types de situations explorées (situation-recherche, situation de type scolaire, situation-problème autre), le contexte auquel réfère la situation, s'avèrent des éléments fondamentaux dont il faudrait poursuivre l'investigation. Nous envisageons de continuer à explorer une variété de situations-problèmes pour mieux étayer ce concept de variété souvent développé dans les curriculums sous l'angle du contexte ou d'autres aspects, sans pour autant que cette variété soit fondée (voir Lajoie, Bednarz, 2012, 2016). Il nous semble en effet nécessaire de mieux comprendre ce que travaille chacune de ces situations pour en cerner les potentialités et complémentarités du point de vue des mathématiques des élèves.

Par ailleurs, les résultats de notre recherche semblent montrer que les potentialités et difficultés des élèves se développent en interaction avec un certain milieu. Par exemple, le fait de « jouer » sur les variables didactiques, c'est-à-dire de modifier dans l'action certaines variables didactiques (exemple du pavage de carrés où on a joué sur de multiples variables pour penser la progression et en cours de route) mais aussi dans l'expérimentation de la situation (cas du problème du panneau publicitaire) a permis de voir des changements significatifs dans les constructions et les raisonnements d'élèves. Il nous semble important de poursuivre cette investigation sur d'autres situations de manière à mettre en évidence les aménagements féconds du point de vue des apprentissages des élèves.

Enfin, à la lumière de ces différentes études (études de cas multiples), un enrichissement a posteriori du concept de potentialités pourra en émerger.

ANNEXE A –Planification de Sandra dans la situation-problème un voyage à Disney

Voyage à Disney

Nous sommes déjà à la fin du mois de mai et tes économies vont bon train.

L'objectif est d'amasser 800 $ pour ton séjour, 290 $ pour le billet d'avion et 87,50 $ pour ton passeport. = 1177.5 pour le voyage

Consulte les tableaux suivants et planifie ton emploi du temps pour le mois de juin afin d'avoir le montant requis pour le grand départ.

Travaux effectués au mois d'avril et mai

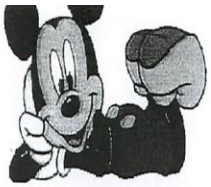
SOURCES DE REVENUS	DESCRIPTION
Livrer à bicyclette	➢ 28 et 30 avril livraison pour le dépanneur « Du Coin » ➢ Distance parcourue : 50 000 m par jour ➢ Salaire : 0,95 $ par km
Enlever des roches	➢ 6 mai : Enlever des roches dans le champ de M. Picard ➢ Salaire : 65 $ ➢ N'oublie pas que 2 de tes amis t'accompagnaient, donc sois équitable.
Entretenir des pelouses	➢ 4 terrains entretenus ➢ Salaire : 20 $/terrain
Distribuer des publisacs	➢ Salaire : 308,00 $ ➢ Puisque tu n'étais pas seul, tu recevras seulement le septième de cette somme.

Total = 2460$

Travaux possibles pour le mois de juin

SOURCES DE REVENUS POSSIBLES	DESCRIPTION
Laver des vitres	➢ Les lundis soirs de ton choix (durée : 4h00) ➢ Seulement une maison par soir ➢ 90 $/maison ➢ $\frac{2}{9}$ devra être déduit pour payer les produits nettoyants
Garder des enfants	➢ 5 $/heure Voici les choix possibles : ➢ Tous les mardis soirs de 17h00 à 22h00 ➢ Tous les jeudis soirs de 16h00 à 21h00 ➢ Les 10 et 17 juin de 9h00 à 16h00 ➢ Les 4 et 18 juin de 10h00 à 16h00
Nettoyer des parcs	➢ 4,15 $ par sac ➢ Tous les samedis et dimanches (journées complètes) 8h ➢ Possibilité de ramasser 9 sacs de déchets par jour
Laver des voitures	➢ Le 25 juin de 9h00 à 16h00 7h ➢ 3 voitures à l'heure ➢ 10,25 $ par voiture ➢ 10 % du total servira pour payer le matériel
Peindre des cabanons	➢ Les dimanches de ton choix de 8h00 à 18h00 ➢ 135 $ par jour ➢ Le cinquième pour payer la peinture

JUIN 2011



dimanche	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
			1 Congé	2	3	4 * Garder des enfants
5 * Peindre des cabanons 8h00 à 16h00	6 * Laver des vitres	7 Congé	8	9	10 * Garder des enfants de 9h à 16h	11 Congé
12 * Peindre des cabanons	13 * Laver des vitres	14 Congé	15	16	17 * Garder des enfants de 9h à 16h	18 Garder des enfants
19 * Peindre des cabanon	20 * Laver des vitres	21 Congé	22	23	24 Congé	25 * Laver des voitures de 9h à 16h
26 * Peindre des cabano	27 * Laver des vitres	28 Congé	29	30		

ANNEXE B

Exemples de problèmes pour chercher

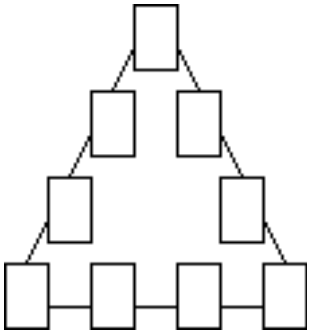
1. Triangle magique

Un triangle magique est proposé aux élèves (Niveau C.M.1, quatrième année de l'enseignement élémentaire). Le problème consiste à « remplir les cases avec des jetons numérotés de 1 à 9 de manière à obtenir la même somme sur chacun des côtés du triangle » (Berdonneau, 2006, p. 3).

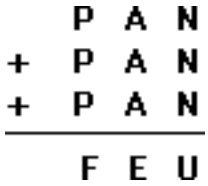
2. **Cryptarithme (niveau C.M.1-C.M.2, 4e/5e années primaire)**

On dispose, en trois exemplaires, de cartons numérotés de 1 à 9 qu'il faut utiliser pour remplacer chaque lettre par un chiffre (une même lettre étant toujours remplacée par le même chiffre et deux lettres différentes correspondant à deux chiffres différents) de telle manière que l'opération soit correcte (Berdonneau, 2006, p. 3)

Triangle magique



Cryptarithme



ANNEXE C

Exemple de situation élaborée à partir des données collectées par les élèves (tirée de Mary et Theis, 2007)

- Les étapes de réalisation ont été les suivantes :
- Collecter les données;
- Formuler des questions à partir des données compilées (cf. tableau ci-dessous);
- Répondre à certaines questions posées en utilisant un moyen approprié;
- Communiquer ces réponses en utilisant une représentation graphique ou autre.

Extrait du tableau des données compilées (Mary et Theis, 2007)

Élève	Mois de naissance	Sexe	Lunettes	Couleur de cheveux	Moyen de transport	Nombre d'heures de télévision
1	février	g	non	bruns	auto	13
2	avril	g	non	bruns	Auto scolaire	5 1/2
3	avril	g	oui	blonds	Bus scolaire	23
4	mai	f	non	bruns	Auto scolaire	9 1/2
5	juillet	g	non	châtains	Auto scolaire	24
6	mars	g	non	noirs	Auto scolaire	10
7	décembre	g	non	noirs	Auto scolaire	52

Voici quelques-unes des questions formulées par les élèves rapportées par Mary et Theis (2007, p. 596).

> La moyenne d'âge selon les élèves ? Combien de personnes qui prennent le train ? Combien de personnes entre les deux classes ? Quelle est la différence de moyenne entre la classe de Céline (nom fictif) et la classe de Michèle (nom fictif) dans les heures de télévision ? Qui est le plus maniaque de télévision ? Combien de kilomètres parcourons-nous ensemble pour venir à l'école ? Pourquoi ça prend plus de temps à certaines personnes pour se rendre à l'école si elles font moins de kilomètres ?

Deux questions sont retenues à la suite d'une discussion en grand groupe. Elles s'énoncent ainsi:

1. Est-ce que les enfants qui portent des lunettes écoutent plus la télévision que les autres? (Port de lunettes/nombre d'heures de télévision)
2. Est-ce que les garçons ont les cheveux plus foncés que les filles ? (Sexe/couleur des cheveux) (Mary et Theis, 2007, p. 584).

ANNEXE D

Différentes situations proposées aux élèves s'appuyant sur une dimension expérimentale

Premier exemple : suite de nombres de 0 à 80 (tiré de Mary et al., 2008, p. 8)

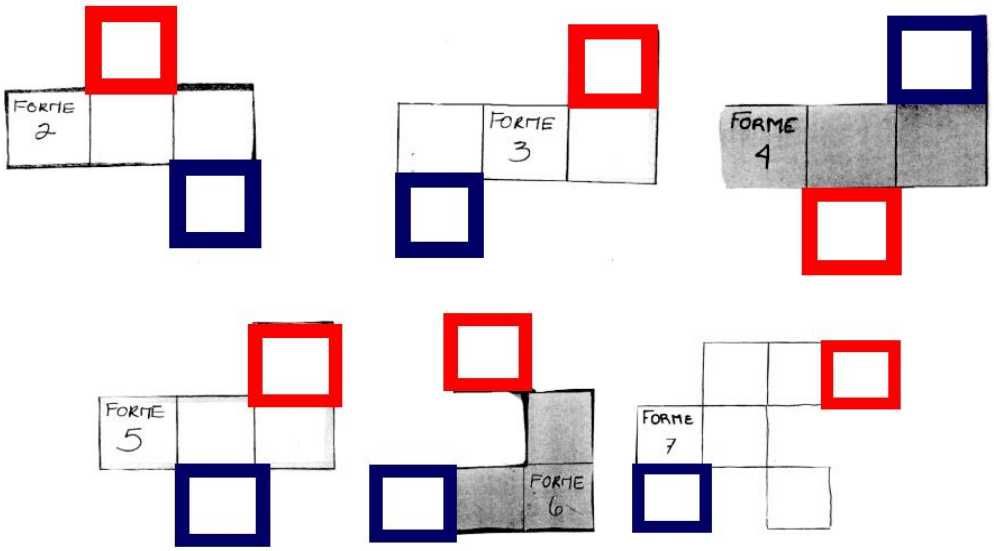
Matériel mis à la disposition des élèves

Les élèves ont une grille de 8 lignes et 10 colonnes qui contiennent une suite des nombres de 0 à 80.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
			24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	7878	79	80

Puis on propose aux élèves différentes formes de *pentaminos*[175] dans la tâche.

[175] Dessin extrait de Mary, C., H. Squalli et S. Schmidt (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage: contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés. J. M. Bisaillon et N. Rousseau. Québec, Presses de l'Université du Québec**:** 169-192.



Les dimensions des carrés des formes de pentaminos ressemblent à celles de la grille. Les carrés rouges et bleus qui sont creux permettent de lire les nombres de la grille. La situation proposée aux élèves se compose de trois tâches (Ibid, p.9):

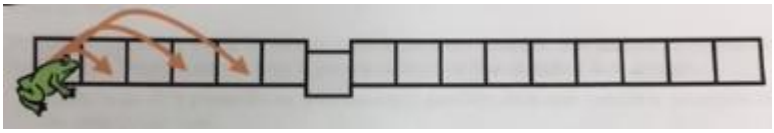
> 1) pour une forme donnée et sans la grille, prédire le nombre qui va apparaître dans la case d'arrivée (carré bleu) connaissant le nombre de la case de départ (carré rouge); 2) comparer des formes pour déterminer celle qui est la plus difficile pour réaliser la tâche de prédiction; 3) construire la forme la plus difficile. La première tâche consiste en un jeu où les élèves doivent prédire le résultat sans la grille. Ceci vise la formulation d'une règle générale pour une forme donnée. Les deuxième et troisième tâches ont comme objectif d'amener les élèves à se détacher de la répétition des expériences puis à envisager une règle générale pour l'ensemble des formes présentées.

ANNEXE E

Exemples de situations-recherches

Premier exemple : jeu de la grenouille (tiré de Coffin et al., 2006, p.8)

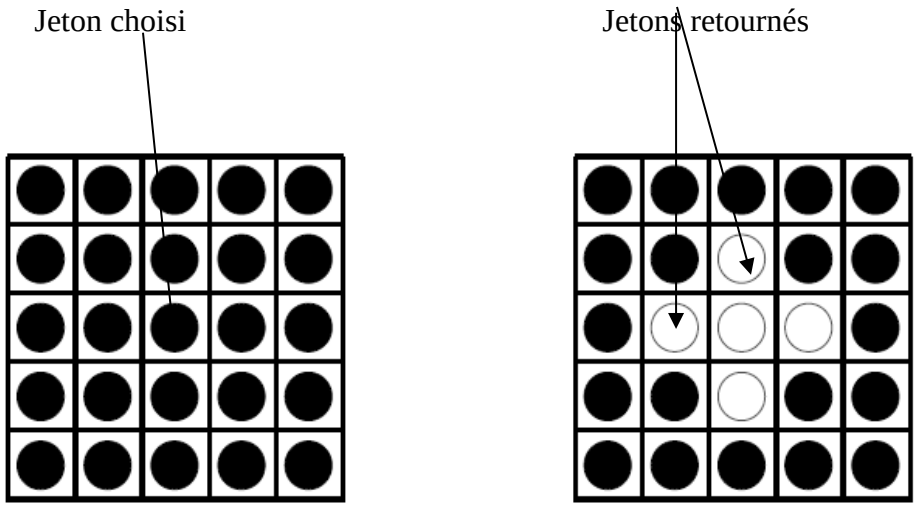
> On place une grenouille sur une bande de longueur fixée. Les joueurs jouent alternativement en déplaçant la grenouille toujours dans le même sens. La grenouille peut faire des sauts de longueur donnée (par exemple, des sauts de longueur 1 ou 2, ou encore 1, 3 ou 4,…). Le joueur qui fait le premier sortir la grenouille de la bande a gagné.



En ce qui concerne le premier jeu, Coffin et al. (2006) observent que les élèves éprouvent de la difficulté à voir une stratégie gagnante. Autrement dit, la difficulté vient de la compréhension et de l'identification d'une stratégie gagnante : ils remarquent que le premier joueur peut gagner pour les sauts de longueur 1, 2, 4, 5 et 7 et qu'il perd pour les sauts de longueur 3 et 6 donc pour les multiples de 3. Mais, les élèves n'ont pas l'idée de construire deux bandes parallèles pour leur permettre de trouver une stratégie gagnante (Coffin et al., 2006). Il est à noter que dans cette expérimentation, certains élèves identifient « les situations perdantes » (Coffin et al., 2006, p. 9).

Deuxième exemple (tiré de Coffin et al., 2006, p. 12)

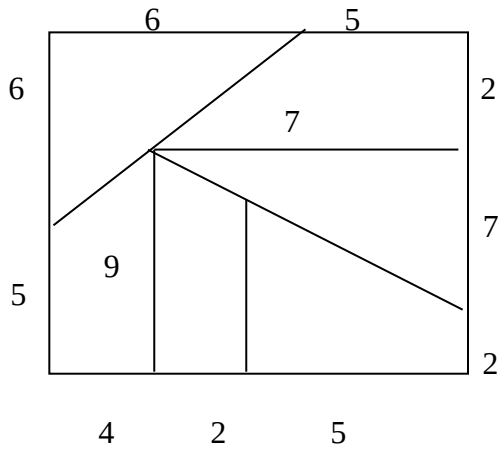
Sur une grille carrée, des jetons à double face (noire et blanche) sont disposés face noire visible. Le but du jeu est de les mettre tous sur la face noire en appliquant la règle suivante : lorsque l'on choisit un jeton alors lui-même et ses voisins (nord, sud, est, ouest) sont retournés.



ANNEXE F

Exemple de situation-problème: le casse tête (Brousseau, 1981)

> Voici des puzzles[…]. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle (Brousseau, 1981, p. 70).



Différentes variables didactiques[176] prises en compte dans l'aménagement de la situation

[176] On appelle variable didactique d'un problème ou d'une situation une variable, pouvant être modifiée par le chercheur et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, modéliser les situations dans une perspective didactique (Brousseau, 1986).

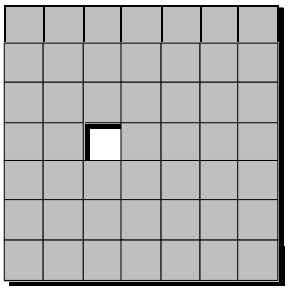
Le travail se déroule en équipe (chaque membre de l'équipe ayant à agrandir un morceau du casse-tête de manière à provoquer un conflit). De plus, l'enseignant choisit des nombres (passage de 4 à 7) de manière à provoquer l'erreur additive.

ANNEXE G

Situation-recherche en classe (SRC) : le pavage (tirée de Grenier et Payan, 2003)

Situation-recherche initiale: le pavage (SRC tirée de Grenier et Payan, 2003)

Peut-on, à l'aide de dominos, paver un carré de côté impair, par exemple 7, privé d'une case? (la case pouvant être choisie n'importe où). La tâche est présentée sur un exemple.



ANNEXE G-1

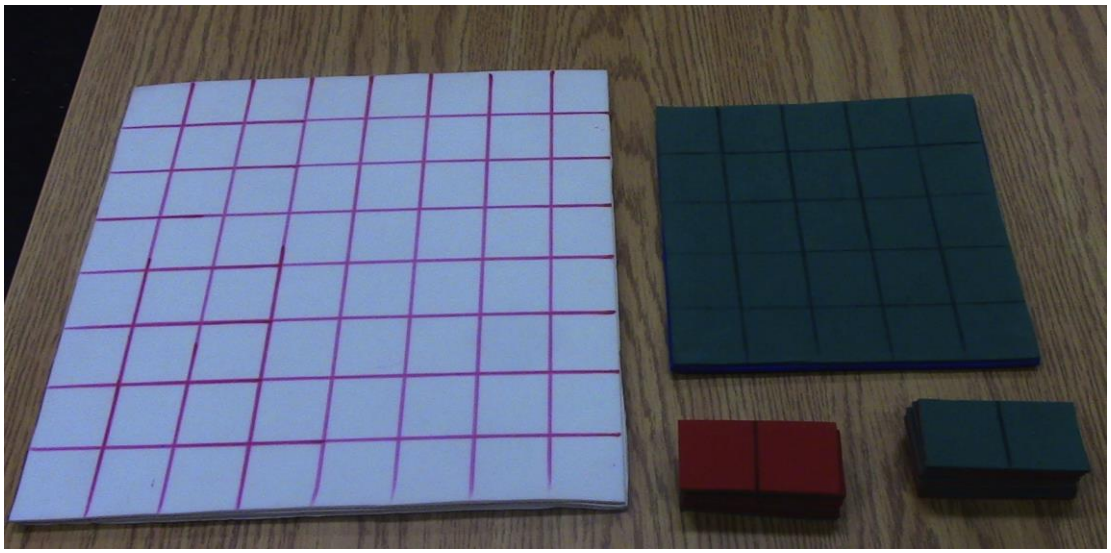
Teaching Experiment : le pavage d'un carré par des dominos

Protocole prévu

Séance 1

1. **La tâche suivante est donnée oralement aux deux élèves : Peut-on recouvrir n'importe quel carré à l'aide de dominos ?** (la tâche est expliquée dans les mots des élèves pour être compréhensible : tu dois pouvoir recouvrir un carré sans laisser de trou, tout doit être recouvert…et ce qu'on cherche à savoir c'est si on va pouvoir recouvrir ainsi avec des dominos n'importe quel carré, peu importe sa grandeur)

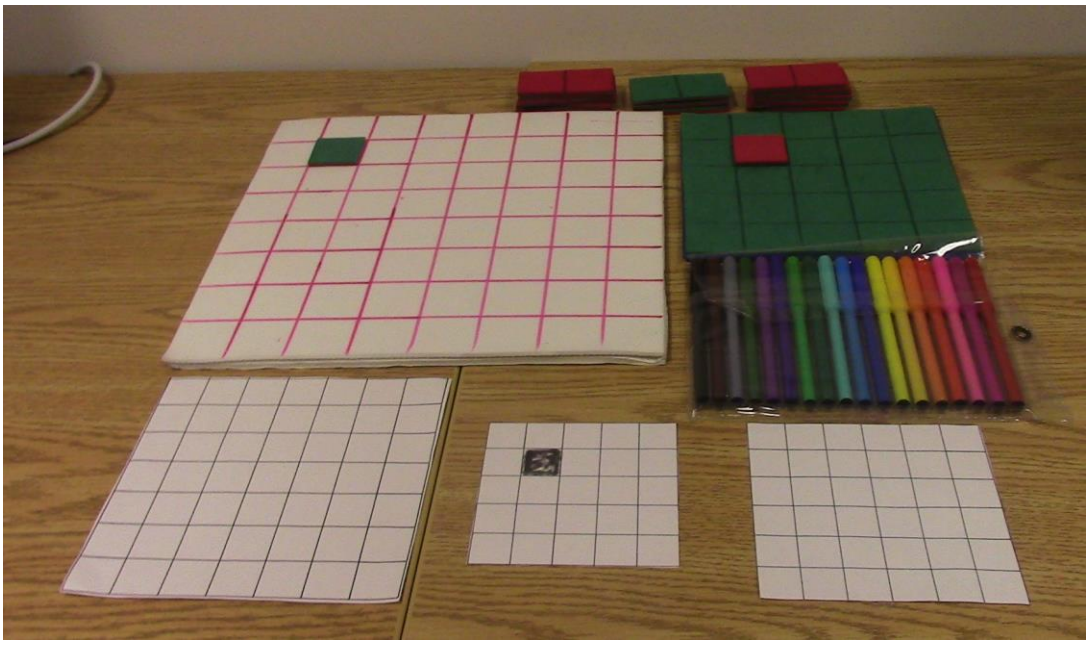
- On demande aux élèves dans un premier temps de nous redire dans leurs mots le problème (s'ils avaient à le présenter à quelqu'un d'autre pour qu'ils comprennent le problème, qu'est-ce qu'ils leur diraient ?)
- Exploration individuelle du problème : Ok je vous laisse y penser seul un moment …*On leur donne le matériel (voir photo ci-dessous)* tu vois je te donne ici des carrés, un grand et un petit, et des dominos pour que tu puisses commencer à y penser …



- Les mettre ensemble pour échanger sur ce qu'ils ont trouvé : est-ce que tu penses toi que l'on va pouvoir recouvrir ces carrés avec des dominos ? et toi ? Explique-moi… Si vous aviez à vous entendre sur ça et expliquer à quelqu'un d'autre ce que vous avez trouvé, qu'est-ce que vous lui diriez ?
- Et est-ce que tu penses que ça va marcher encore si je prends un autre carré plus petit? et un autre plus grand? … ? (*mettre à leur disposition d'autres carrés prédécoupés 4x4 ; 5x5 ; 7x7 avec des crayons de couleur* …pensez-y)
- Est-ce que ça va toujours fonctionner ? Oui, non ? Dans quels cas à ton avis ça va fonctionner ? dans quel cas non ? Peux-tu m'expliquer? (là encore les laisser y penser au besoin à deux/ voir s'ils vont arriver à une conjecture).

2. **Maintenant on va changer un peu le jeu…je décide de boucher une des cases de la grille, tu vois le carré est privé d'une case, par exemple on va boucher celle-là, on ne peut plus l'utiliser (on bouche la case de la ligne 2/ colonne 2). Penses-tu que tu vas pouvoir recouvrir n'importe quel carré ainsi privé d'une case avec des dominos ?**

Les laisser y penser en mettant à leur disposition le matériel (carrés donnés initialement privés d'une case ; dominos ; carrés découpés où on a bouché une case ; crayons de couleur)

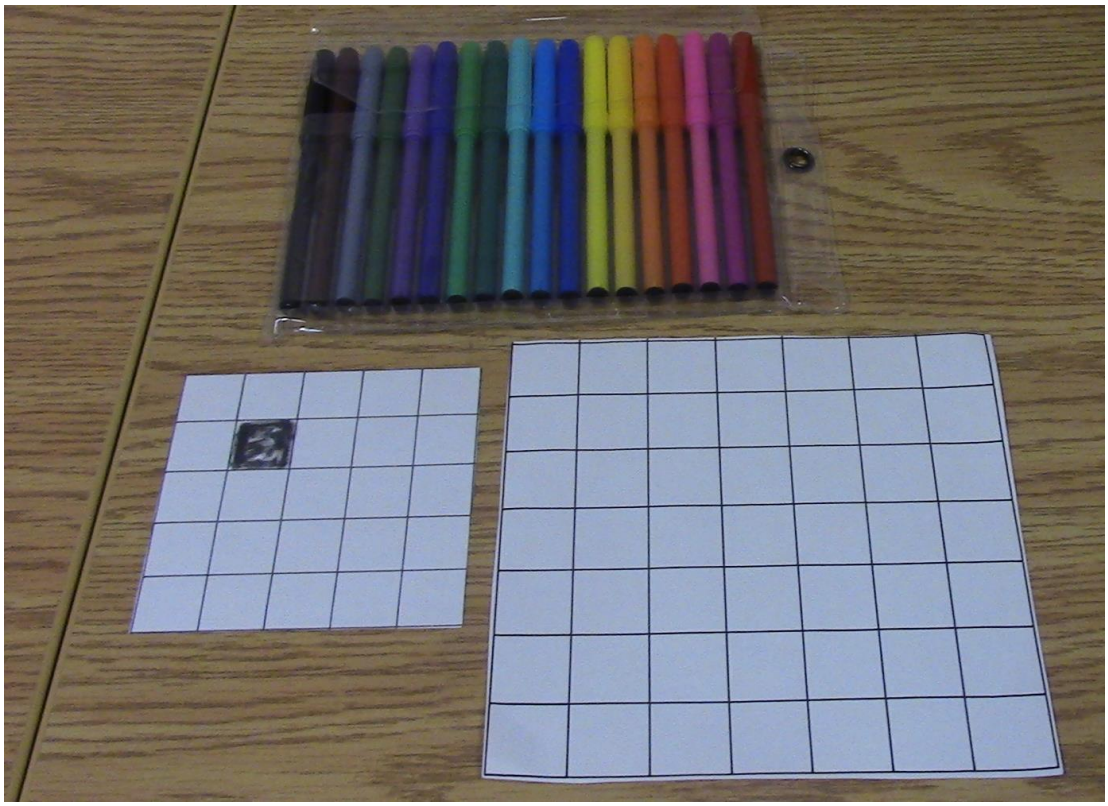


Qu’est-ce que tu dirais ? Est-ce que ça marche tout le temps ? Dans quels cas ça marche ? Dans quels cas ça ne marchera pas ? Explique moi ?....Est-ce que c’est la même chose que tout à l’heure ?

3. **Repartir des cas qui marchent (ex carré 5x5 ; case bouchée à la ligne 2, colonne2) et leur dire : et si je bouche une case ailleurs au lieu d’ici, est-ce que ça va encore marcher ?**

Peux-tu trouver tous les endroits où ça peut marcher ?

Les laisser y penser en équipe…leur donner le matériel et plusieurs carrés impairs sur papier, avec crayons de couleur). Il faut que vous trouviez tous les endroits où on peut boucher une case et où ça va marcher, pour lesquels on pourrait recouvrir alors le carré privé d’une case avec les dominos.



Et est-ce que tu peux me dire où ça ne marcherait pas ? (si on bouche quelle case ?)

4. S'il reste du temps, leur demander de noter dans leur cahier ce à quoi ils sont arrivés….

ANNEXE G-2

Teaching Experiment : le pavage d'un carré par des triminos

Protocole prévu

Séance 2

1. **Petit retour sur ce qu'ils ont fait la semaine dernière**

Intention : voir ce qu'ils ont retenu, et amorcer la suite (cette dernière étant le prolongement de l'exploitation de cette situation-recherche)

Est-ce que tu te rappelles ce que l'on a fait la semaine dernière ?

Et à quoi on était arrivé ?

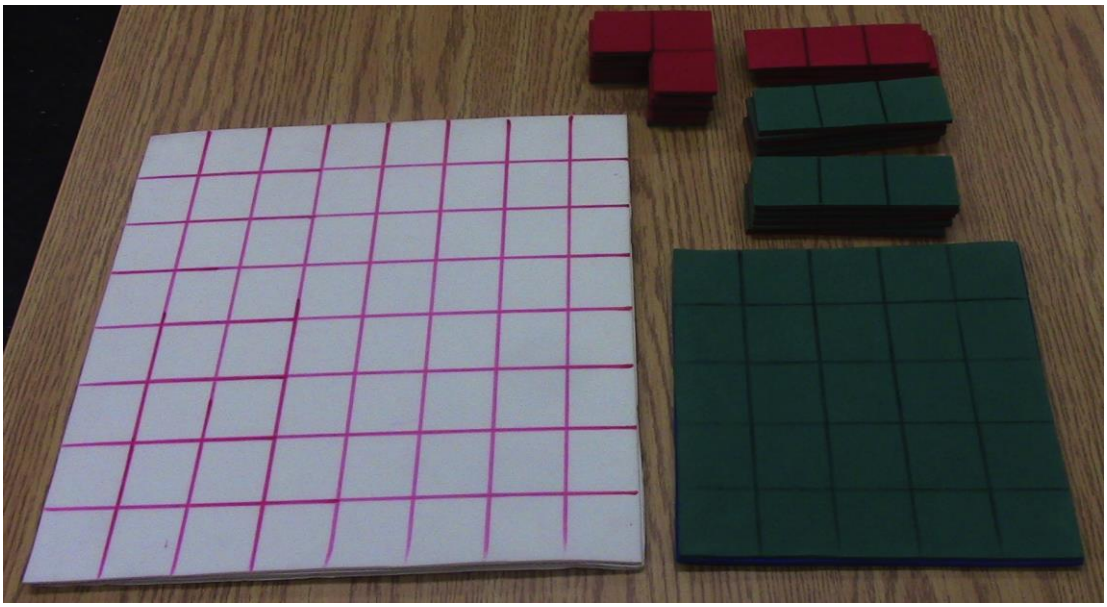
2. Peut-on toujours paver, à l'aide de triminos, un carré de taille quelconque ?

Mise en situation : Au lieu d'essayer de couvrir mon carré avec des dominos, cette fois on se demande si on pourrait faire la même chose avec des triminos.

Tu vois on a ici deux triminos de formes différentes. Est-ce que tu sais pourquoi on appelle ça des triminos ? Est-ce qu'il y aurait d'autres formes possibles qui seraient aussi des triminos ?

Il faut essayer de voir si on va pouvoir recouvrir un carré (peu importe sa grandeur) avec des triminos qui ont tous la même forme ?

Matériel mis à leur disposition : Je te donne toutes sortes de carrés de différentes grandeurs et des triminos…



À toi d'y penser

Les laisser explorer individuellement / observer ce qu'ils font…

Retour en groupe (interventions possibles)

- Peux-tu expliquer à ton ami ce que tu as fait et ce que tu as trouvé ?
- Montrer un carré 4x4 (en cachant une partie)…et dans ce cas-ci est-ce que ça va marcher ou pas? Peux-tu prédire combien de cases ne seront pas recouvertes ? C'est le mieux que tu peux faire ? ça va être quoi le minimum de cases qui ne pourront pas être recouvertes ?

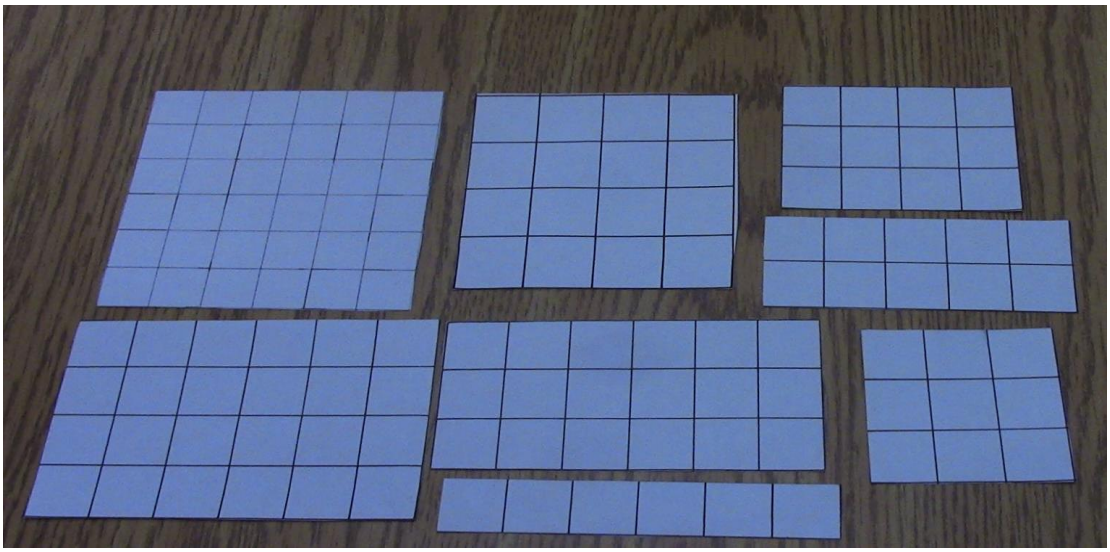
3. Prolongement

Intention sous-jacente : se construire une image mentale du pavage, anticiper ce qui va se passer sans le matériel

À organiser sous forme de jeu

On pige chacun son tour une forme dans l'enveloppe (différentes formes ont été mises dans l'enveloppe, des carrés mais aussi des rectangles).Tu dois prédire si tu vas pouvoir la couvrir ou pas avec un trimino de la forme 1, de la forme 2 (sans le faire avec le matériel, tu y penses dans ta tête). ….on vérifie, si ta prédiction est bonne tu gagnes un point. L'autre a le droit de dire, et ce avant qu'on vérifie, si ta

prédiction selon lui est bonne ou non et de rectifier, et si c'est lui qui a raison, il gagne alors un point. Celui qui gagne est celui qui va avoir les meilleures prédictions.



S'assurer avant de commencer qu'ils ont bien compris les règles du jeu.

Puis on complète le jeu.

- Retour après le jeu : si tu veux convaincre un ami que ça va fonctionner sans le faire au complet, qu'est-ce que tu lui dirais de regarder ?

Intention sous-jacente : développer une argumentation/ explication

4. On repart du carré 5x5 (matériel) et on leur pose cette fois directement la question

Essaie de voir si on peut recouvrir ce carré privé d'une case avec un trimino de la forme 1 ? avec un trimino de la forme 2 ?

C'est toi qui choisis où tu mets la case qu'on ne peut utiliser…essaie de trouver celles pour lesquelles ça fonctionne, celles pour lesquelles ça ne fonctionnerait pas …

Les laisser explorer la situation individuellement, leur demander de noter dans leur cahier ce qu'ils ont trouvé…

Retour (en groupe)

- Peux-tu expliquer à ton ami ce que tu as trouvé….tu ne dois pas juste donner la réponse, tu dois aussi le convaincre que ça marche ou pas
- Hier j'ai donné ce problème là à deux élèves de secondaire 1 dans une classe, qui étaient chacun convaincus de trouver la bonne réponse au problème. Le premier élève m'a répondu que ça fonctionne si le trou (la case qu'on utilise pas est au milieu). Le deuxième élève m'a répondu que ça fonctionne si le trou est dans un coin du carré (montrer les deux solutions d'élèves sur un carré 10 par 10). Qui a raison tu penses ? Explique moi…

5. Leur demander pour finir d'inventer un autre problème qu'on pourrait donner à la classe en utilisant des pentaminos… Les laisser y penser et écrire leur problème

(s'il reste du temps) Est-ce que tu sais ce que c'est des pentaminos ? Peux-tu trouver toutes les formes de pentaminos que l'on peut faire ?

ANNEXE G-3

Teaching Experiment : le pavage d'un carré (conjectures formulées par des élèves)

Protocole prévu

Séance 3

Voir au début s'ils ont pensé à un problème qu'on pourrait poser aux autres élèves de la classe…

1. J'ai expérimenté avec d'autres élèves de secondaire 1 la situation que vous avez travaillé avec nous depuis deux semaines, où il faut recouvrir un carré avec des dominos, ou des triminos de différentes formes. Ils ont trouvé toutes sortes de prédictions. Je te les ai amenées.

On peut toujours recouvrir un carré pair avec des dominos	D'accord _____ Pas d'accord ____	Si tu n'es pas d'accord, qu'aurait-il dû écrire?
On peut jamais recouvrir un rectangle impair avec des dominos	D'accord _____ Pas d'accord ____	Si tu n'es pas d'accord, qu'aurait-il dû écrire?
Si on bouche une case d'un carré impair, on peut toujours le recouvrir avec des dominos	D'accord _____ Pas d'accord ____	Si tu n'es pas d'accord, qu'aurait-il dû écrire?
Les rectangles que j'ai dessinés peuvent toujours être recouverts avec des triminos en forme de	D'accord _____ Pas d'accord ____	Si tu n'es pas d'accord, qu'aurait-il dû écrire?
Les rectangles que j'ai dessinés peuvent toujours être recouverts avec des triminos en forme de	D'accord _____ Pas d'accord ____	Si tu n'es pas d'accord, qu'aurait-il dû écrire?

Est-ce que tu peux me dire si leurs prédictions sont bonnes ou non. Tu me dis si tu es d'accord ou non avec eux, et si tu n'es pas d'accord tu me dis ce qu'ils auraient dû écrire.[177]

Intention sous-jacente : revenir indirectement sur la situation-recherche exploitée depuis le début, mais surtout les mettre en situation de se prononcer sur des conjectures qui ont été formulées par des élèves fictifs et de formuler eux mêmes d'autres conjectures

2. Revenir sur ce qui précède : 3ème prédiction, il se peut ici qu'ils arrivent à des contradictions ; 4ème prédiction leur demander de continuer les dessins…d'en trouver d'autres où ça marcherait/ un autre où ça ne fonctionnerait pas….s'ils avaient à énoncer une prédiction qui marcherait toujours ils diraient quoi…. ; 5ème prédiction : il se peut ici qu'ils arrivent à des contradictions/points de vue opposés…en dessiner d'autres (poursuivre le dessin) où ça marcherait encore…un autre où ça ne marcherait pas…énoncer une prédiction qui marcherait toujours

Est-ce que tu pourrais en formuler une autre toi de prédiction qu'on pourrait faire ?

Écris la

Échanger leurs feuilles : demander à l'autre de dire si elle fonctionne ou non

3 On repart du carré 5x5 (matériel) et du carré 7x7 (fait à partir du carré 8x8) et on leur pose cette fois directement la question- Chacun travaille ici sur un carré différent

Essaie de voir si on peut recouvrir ce carré privé d'une case avec un trimino de la forme 1? avec un trimino de la forme 2?

[177] L'expérimentation précédente a mis en évidence que les élèves avaient parfois de la difficulté à dire pourquoi ça fonctionnait ou non, autrement qu'en le faisant et en voyant si ça fonctionne ou non. En amenant des réponses fictives, l'idée est de forcer les élèves à se prononcer sur des conjectures et à voir jusqu'où ils peuvent aller dans l'argumentation.

C’est toi qui choisis où tu mets la case qu’on ne peut utiliser…

Essaie de trouver celles pour lesquelles ça fonctionne …

Les laisser explorer la situation individuellement, leur demander de noter dans leur cahier ce qu’ils ont trouvé et de montrer sur leur dessin pourquoi ça marche ou non

Retour (en groupe)

- Peux-tu expliquer à ton ami ce que tu as trouvé dans le cas de ce carré….. Comme vous n’aviez pas la même chose, et que l’autre ne l’a pas fait, tu ne dois pas juste donner la réponse mais tu dois arriver à convaincre ton ami pourquoi ça marche…(alterner, prendre un résultat de l’un, un résultat de l’autre)/ au besoin leur demander à deux s’il est possible d’en trouver d’autres, les laisser y penser
- Hier j’ai donné ce problème là à deux élèves de secondaire 1 dans une classe, qui étaient chacun convaincus de trouver la bonne réponse au problème. Le premier élève m’a répondu que ça fonctionne si le trou (la case qu’on n’utilise pas est au milieu). Le deuxième élève m’a répondu que ça fonctionne si le trou est dans un coin du carré (montrer les deux solutions d’élèves sur un carré 10 par 10). Qui a raison tu penses ? Explique moi…Il faut que l’on puisse voir vite pourquoi ça marche ou non…(les laisser en équipe sur la tâche)

ANNEXE H

Situation-problème initiale : pied du géant (tirée de Rauscher et Adjiage, 2012, 2014)

Situation-problème initiale : pied du géant

Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant?

ANNEXE H-1

Teaching Experiment : pied du géant

Protocole prévu

1) **1ère phase : les élèves prennent connaissance du problème, explorent librement sa résolution en dyade**

Intention : observer les premières investigations, ce qui se dit, comment les élèves envisagent la résolution du problème, comment ils en débattent librement….

- Prendre connaissance du problème : donner l'énoncé du problème aux deux élèves avec la photo du géant…les laisser d'abord le lire et leur demander de redire dans leurs mots quel est le problème

Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant?

-

Puis les laisser explorer la résolution : vous devez essayer de trouver ensemble quelle est la taille du géant…énoncer toutes les idées que vous avez qui permettraient d'avancer sur la résolution éventuelle de ce problème

Du matériel est mis à leur disposition sur la table : l'énoncé du problème, des instruments possibles de mesure ou de report (ruban à mesurer, réglettes de différentes longueurs, efface…)

Des repères importants dans l'observation : à prendre bien en note (s'assurer que la vidéo capte bien ces informations)

-la gestuelle (s'ils font signer de mesurer quelque chose, identifient des parties du corps, etc.),

-les traces dessinées (s'ils tracent des segments, identifient un report, etc)

-un mesurage empirique (par exemple sur lui-même ou sur l'autre élève, …).

- un repérage de données nécessaires : il est possible que les élèves se donnent un nombre pour la mesure de la taille d'un homme (ou de son pied, ou d'autres éléments) en fonction de ce qu'ils connaissent ; ou encore qu'ils demandent à l'interviewer une information (en disant par exemple je ne sais pas combien mesure l'homme ici) ou qu'il semble vouloir quelque chose (lui demander alors : qu'est-ce que tu veux savoir ? pourquoi tu veux savoir ça ? lui donner alors l'information qu'il demande)

2) 2ème phase : rédaction d'une affiche à deux présentant la solution trouvée à d'autres amis

- Une fois l'investigation bien engagée…leur demander de rédiger une affiche qui présente à d'autres élèves la solution à laquelle ils sont arrivés (amener une ardoise blanche avec crayons correspondant) : votre affiche va être donnée à des amis d'une autre classe par la suite, et il faut qu'ils comprennent clairement quelle est la

solution que vous proposez pour trouver la taille du géant et ce qui vous a permis de dire cela

-Retour sur ce qu'ils ont proposé, explication de leur solution/ questionnement, confrontation adaptée à la solution proposée

Intention : semer le doute (relativement à des éléments de la solution) pour pousser plus loin le raisonnement, recadrer, enrichir le référentiel qu'ils mobilisent dans cette résolution

Des exemples de questions/ interventions possibles :

- remise en question de représentations possibles du corps utilisées dans la solution : ces parties du corps ont-elles toujours la même mesure ? Est-ce qu'en additionnant la longueur de ces parties, on va trouver la taille ? ce qui est vrai ici est-il vrai tout le temps, pour tout corps humain, à tout âge ?
- questionnement taille sur la photo/ taille réelle : est-ce que 1 cm sur la photo correspond à 1 cm dans la réalité ? Est-ce que la taille sur la photo c'est la même que la taille réelle ? (avoir ici à disposition une photo d'une personne, en l'occurrence l'interviewer)
- Arriver avec une solution d'un autre élève (qui ne fonctionne pas) et voir ce qu'ils vont en dire…(voir solution de Marie)
- Arriver avec une amorce de solution proposée par un autre élève (approche différente de la leur), leur demander de poursuivre…peux-tu continuer ce qu'il a commencé (voir solution de Jean), le faire au besoin avec d'autres élèves.

Solution de Marie

À mon avis le géant mesure 38,8 m. Car déjà la taille de la demi-jambe mesure 9,7 cm (9,7m). Donc j'ai fait 9,7m + 9,7m = 19,4m et ça fait une jambe en entier.

J'ai fait 19,4 +19,4 = 38,8 et ça fait un corps entier.

Solution de Jean

Bien en fait j'ai vu sur la photo qu'il y avait des hommes et un pied de géant.

Je sais que la taille d'un homme ça peut être entre 1,80m et 1,90m.

Donc le pied du géant, sa taille doit être 1,80m environ car….

Continue

3) 3ème phase : leur donner 4 textes produits par des élèves (bien choisis, présentant des approches différentes) sur lesquels ils vont devoir se prononcer

Intention : favoriser l'explicitation de leur argumentation, ouvrir sur d'autres solutions possibles

Solution de l'équipe 1

Comment on a fait ? On sait que la taille d'un homme c'est 1,80m et on sait que si on prend un objet qui va à la moitié du mollet et qu'on le reporte, ça fera 6 fois

Donc ça va faire pareil pour le géant

1,80 x 6 = 10, 80. Le géant mesure 10,80m.

Solution de l'équipe no 2

Il faut d'abord voir sur la photo combien mesure le pied d'un homme et le pied du géant. Je prends un objet qui fait la longueur du pied, puis après qu'on s'est choisi un objet on regarde combien de fois il rentre dans le bonhomme, et ça donne environ 6.

Donc ça va faire pareil pour le géant, 6 x 1,80 = 10,80m

Solution de l'équipe 3

Il faut d'abord voir sur la photo et voir jusqu'où vont les hommes sur la jambe du géant et ça va jusqu'au mi-mollet

donc on imagine qu'on est le géant et on prend un objet qui va jusqu'à la moitié d'un mollet puis après qu'on s'est choisi un objet qui va jusqu'à la moitié d'un mollet on

regarde combien de fois il rentre dans le géant (nous) et ça donne pour tout le monde environ 6 et 7.

Réponse du problème : 6 x 1,80 = 10,80

7 x 1,80 = 12,60

Le géant mesure entre 10,80 m et 12,60 m.

Solution de l'équipe 4

Un homme pour vrai mesure 1,80m et sur la photo je l'ai mesuré il fait environ 10 cm. Ça en prend 18 comme sur la photo …

Si je mesure le pied du bonhomme sur la photo, ça en prend 6 pour avoir toute sa taille. Donc ce sera pareil pour le géant. La taille du géant sur la photo est donc 10 cm x 6 = 60 cm.

La taille du géant réel dans le parc est : 60 cm x 18 = 1080 cm

- Vous devez noter ce qui est bien dans chacun de ces textes, et ce qui manque pour comprendre la solution (si on avait à présenter cette solution à d'autres élèves, il faut qu'ils la comprennent, que ce soit clair comment ils peuvent arriver à la taille du géant et ce qui leur a permis de dire cela). Trouves-tu que leur solution fonctionne ? Pourquoi tu dis ça ?

-Leur redonner la solution qu'ils avaient rédigée précédemment, leur demander s'ils la trouvent toujours aussi claire, pourquoi ? Qu'est-ce qu'ils changeraient ? Qu'est-ce qu'ils ajouteraient ? …

- Pourrais-tu présenter une solution différente de celle-ci ?

ANNEXE H-2

Teaching Experiment : pied du géant (suite)

Réajustements apportés au protocole prévu initialement, suite à l'expérimentation de la première séance

1) **Montrer une feuille dessinée où apparaissent différents personnages, une partie est cachée par un carton pour deux des personnages : pour l'un d'entre eux, seules les bottes sont visibles ; pour l'autre, seul le visage est visible.**

Avec ce que tu as sur le dessin, tu devrais pouvoir retrouver la taille des personnages que l'on ne voit pas complètement, dont une partie est cachée (tu as tout ce qu'il faut pour pouvoir retrouver leur taille, où ils vont arriver)

Intention sous-jacente : solliciter une réflexion sur la dimension proportionnelle (qu'ils n'ont pas vraiment mobilisé dans le problème du géant, les rapports n'ayant pas en général été pris en compte sauf exception)

Albert Lise Françoise Benjamin Barbara Michael

Matériel mis à leur disposition : bouts de ficelle (pour éviter les difficultés de mesurage observées chez les élèves en lien avec les mesures traditionnelles lors de la première séance ; on s'attarde davantage ici au processus de report éventuel s'il est réinvesti)

a) Commencer par un des personnages (celui par exemple où on ne voit que la tête) : À eux de retrouver le personnage entier, la taille qu'il peut avoir….On leur demande de le dessiner dans leur cahier (l'important ce n'est pas l'apparence, à quoi il ressemble, mais de trouver sa taille approximative, jusqu'où il va aller).

Observer ce que font les élèves, leur demander de nous dire ce qu'ils ont fait pour le retrouver.
On vérifie en découvrant le personnage... A t-il la même taille à peu près que celui que j'ai dessiné? Pourquoi ? Et si cela ne fonctionne pas, pourquoi à ton avis?

b) Tu as une autre chance…essaies maintenant de trouver la taille de celui-ci (celui où on ne voit que les bottes). Quelle taille peut-il avoir ? À toi de le dessiner…

Observer ce que font les élèves, les réajustements éventuels avec ce qu'ils ont fait précédemment

Une fois fait, on vérifie en découvrant le personnage dessiné….est-ce que cela fonctionne? A t-il la même taille que celui que j'ai dessiné? Pourquoi?

Interventions possibles :

Dans le cas où les élèves y vont au hasard, donner un indice : moi juste avec la tête de chacun, je suis capable de retrouver la taille de chacun des personnages…comment je fais tu penses ? Vas y dessine m'en un autre de personnage toi, juste à partir d'une tête que je te donne…et si je te donne juste les bottes ? (on dessine une tête, des bottes…à eux de dire à quoi va ressembler à leur avis ce personnage)

2) Redonner le problème du géant qu'ils ont résolu avant les vacances des fêtes, voir si spontanément ils vont réinvestir ce qu'ils viennent de faire.

Interventions possibles

- Est-ce que ce que tu viens de faire peut t'aider ?

- Quels sont les indices dont tu as besoin pour pouvoir retrouver la taille du géant dans le parc d'attraction ?

- Leur redonner leur solution et leur demander s'ils changeraient quelque chose à ce qu'ils avaient fait ? qu'est-ce que tu changerais ? Pourquoi ?

ANNEXE H-3

Teaching Experiment : Panneau publicitaire

Nouveau problème présenté aux élèves (affiche d'un groupe de musique)

intention sous-jacente : voir les réinvestissements que les élèves vont opérer

J'ai pris une photo d'une affiche très grande, impressionnante qui annonçait un concert de musique en Chine lors d'une tournée d'un groupe de musique (leur montrer l'affiche). Peux-tu retrouver, à partir de cette photo, quelles étaient les dimensions de l'affiche, sa longueur, sa hauteur?

Matériel mis à leur disposition prioritairement : ficelle/ciseaux (pour éviter les difficultés de mesurage qu'ils ont) ; autre matériel également disponible (mais de façon moins évidente mis en évidence : ruban à mesurer, réglettes de différentes longueurs)

- Voir spontanément ce qu'ils vont faire

Interventions possibles (après les avoir laissé exploré spontanément le problème)

-Si tu as besoin d'indices, s'il te manque des choses, tu peux me le demander, j'ai des indices que j'ai cachés dans mon enveloppe

-S'ils ne demandent rien, au bout d'un certain temps, leur donner un indice qu'on sort de l'enveloppe (il y a trois indices: taille **réelle** du visage d'un des musiciens, sa largeur ; La hauteur réelle du visage; la taille du musicien debout). On sort un indice qu'on leur donne

Observer alors ce qu'ils font.

Retour

-Alors quelle est la hauteur de l'affiche à ton avis? sa longueur? sa hauteur? Comment as-tu fait pour la trouver, explique moi.

Et si je t'avais donné cet indice (on sort un autre indice de l'enveloppe), est-ce qu'on aurait pu aussi le trouver? Comment aurais tu fait pour le trouver?

Et avec ce dernier indice, est-ce qu'on aurait pu aussi le trouver? Comment?

ANNEXE I

Teaching Experiment : défi climat

Cette situation, qui part de la situation-problème expérimentée en milieu scolaire en secondaire 1 dans le cadre des évaluations sur la compétence 1, a été repensée dans son aménagement et son contenu spécifique[178].

Protocole prévu[179]

1ère partie

Donner la situation suivante aux élèves, les laisser prendre connaissance de celle-ci.

Un vaste projet d'école pour aider à contrer les changements climatiques

On a besoin de ton aide !

Ton école a décidé, cette année, de faire sa part dans la lutte aux changements climatiques en participant au projet Défi climat. Ce projet vise à réduire au maximum la production de gaz carbonique, un gaz nocif pour l'environnement.

[178] Nous n'avons pas eu l'autorisation de diffuser la situation défi climat dans son contenu intial.

[179] Les ajustements dans ce cas ne sont pas comme tels sur le protocole mais davantage dans l'exploitation sur le coup de certains aspects en fonction de ce qui s'est passé chez les élèves en lien avec les pourcentages et les fractions…

L'école s'est fixée comme objectif de réduire une certaine quantité de production de CO2.

Une vaste campagne de sensibilisation a été organisée.

Tu es en charge, avec ton ami, de la coordination de ce projet.

a) Demander de redire dans leurs mots la situation pour voir ce qu'ils en ont compris.

Les faire parler autour de celle-ci : as-tu déjà entendu parler des changements climatiques? Est-ce que tu sais ce que c'est ? Est-ce que tu sais ce qu'est le gaz carbonique-C02 ? En quoi est-il mauvais pour l'environnement ? Qu'est-ce qui produit ce gaz carbonique ? Que peut-on faire pour réduire ce gaz carbonique ?etc

Intention sous-jacente : voir un peu ce qu'ils pensent, les plonger dans le contexte de la situation, voir ce qu'ils comprennent de la situation globale

b) On pose alors les questions suivantes:

-Ça implique quoi, selon toi, coordonner ce projet.

-Si tu avais à organiser le travail, comment t'y prendrais-tu ?

Intention sous-jacente: la situation à ce stade est ouverte, il s'agit de cerner les actions que les élèves voient qu'ils pourraient entreprendre, à quels aspects pensent-ils ? Ciblent-ils des actions qui peuvent aider à réduire cette quantité de C02 ?

c) De quelles informations aurais-tu besoin pour pouvoir voir si ce projet est réalisable ou non, si on peut atteindre l'objectif que l'école s'est fixée de réduire la quantité de C02 ?

Intention : voir si les élèves vont préciser des données dont ils auraient besoin pour répondre à cette question, et lesquelles ?

2ème partie :

On a identifié, pour t'aider à avancer dans la coordination du projet, certains gestes que les élèves et le personnel de l'école ont retenu et qui aident à la réduction de gaz carbonique (on leur donne ce qui suit, écrit sur papier):

- venir en vélo à l'école durant l'automne et le printemps,
- prendre l'autobus (plutôt que l'auto) pour aller à l'école,

- mettre son eau ou son jus dans une gourde réutilisable,
- mettre le papier, les journaux, les cartons, le plastique, les bouteilles dans le bac à recyclage,
- porter les vieux appareils électroniques désuets (consoles de jeux, portables, ordinateurs, imprimantes…) au recyclage
- pratiquer le compostage dans la cour d'école (y mettre les feuilles, le gazon coupé, les détritus de légumes…)

Des sous-équipes se sont mises au travail, sous ta direction, et t'ont ramené les informations que tu as demandées, qui peuvent t'être utiles. L'école va t-elle pouvoir atteindre son objectif de réduire de 1million de kilos la quantité de gaz carbonique?

Trois dossiers sont donnés dans des enveloppes (résultats du travail des sous-équipes)

Dossier 1 : informations sur les élèves qui participent au projet (une enveloppe portant ce titre avec les informations qui figurent plus loin fournies à l'intérieur)

Dossier 2 : informations sur le personnel qui participent au projet (voir plus précisément ce qui suit pour voir ce qui s'y retrouve à l'intérieur)

Dossier 3 : informations sur la récupération (voir plus précisément ce qui suit pour voir ce qui s'y retrouve à l'intérieur)

Dans le dossier 1, on retrouve un diagramme circulaire avec le pourcentage d'élèves qui font un geste particulier :

Dans le dossier 2, on trouve l'information suivante :

On a comparé le nombre d'élèves et le nombre d'employés de l'école (professeurs, direction, employés) qui participent au projet

	Nombre d'employés qui participent par rapport au nombre d'élèves
vont à l'école en vélo	Le nombre d'employés qui vont en vélo est le tiers du nombre d'élèves allant à l'école en vélo
Prennent l'autobus pour aller à l'école	Le nombre d'employés qui prennent l'autobus correspond à 20% du nombre d'élèves qui prennent l'autobus
Utilisent une gourde d'eau réutilisable	Le nombre d'employés qui utilisent une gourde d'eau est le 11/12 du nombre d'élèves qui utilisent une gourde

Dans le dossier 3, on trouve les informations suivantes (données sur 3 morceaux de papier différents) :

D3 (1) : gestes faits par personne

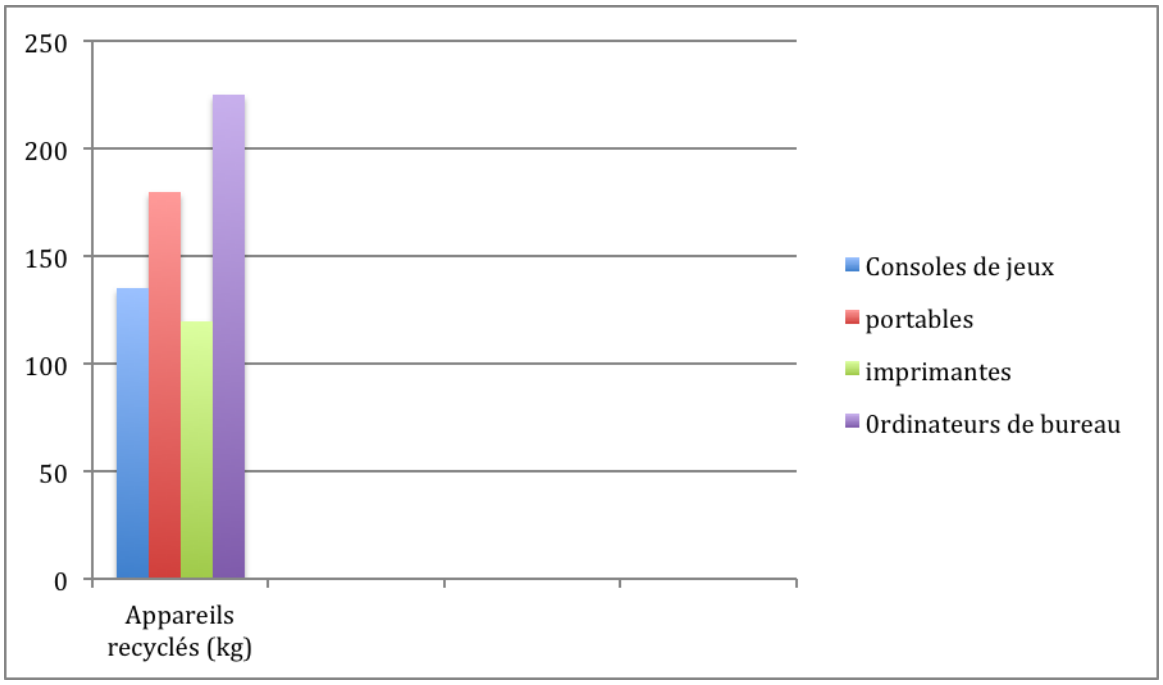
Les gestes faits par chacun	Quantité de C02 économisée avec ces gestes sur toute l'année
Transport en vélo à l'école	900 kg pour chaque personne qui utilise le vélo
Transport en autobus	650 kg pour chaque personne qui prend l'autobus
Se servir d'une gourde d'eau réutilisable	10 kg pour chaque personne qui utilise une gourde

D3 (2) : récupération dans l'école

Récupération dans l'école	Nombre de Kg récupérés dans l'année	Quantité de C02 économisée
Papier, journaux, cartons, bouteilles déposées dans le bac à recyclage	12 000 Kg	Pour chaque kilo recueilli dans le bac à recyclage, on économise 2 kilos de C02
Vieux appareils électroniques portés à recycler		Chaque kilo recueilli permet d'économiser 80 kilos de C02
Compostage de jardin (feuilles, gazon, épluchures de légumes…)	900 kg	Chaque kilo recueilli permet d'économiser 0,8 kilos de C02

D3 (3) : quantité d'appareils électroniques portés à recycler.

Les vieux appareils électroniques qui ont été portés à recycler (nombre de kilos recueillis)



a) Les laisser explorer la tâche….
b) Avant de calculer, leur demander de nous dire ce qu'ils ont l'intention de faire (leur demander de ne pas calculer tout de suite mais de nous dire ce qu'ils feraient sans calculer…)
c) Les laisser ensuite compléter les calculs (demander avant qu'ils ne fassent un calcul d'anticiper au besoin l'ordre de grandeur)
d) Alors l'école va t-elle être capable avec tout ça d'atteindre son objectif de réduire de 1 millions de kilos la production de gaz carbonique?

3) 3ème étape :

Reposer la question : a t-on été capable ou non d'atteindre notre objectif de réduire de 1 million de Kg la quantité de gaz carbonique avec tous ces gestes?

On ne baisse pas les bras car chaque geste compte, on peut faire mieux !

(donné oralement) Après consultation des élèves et du personnel, l'école décide d'entreprendre la plantation d'arbres autour de l'école pour pouvoir atteindre son objectif. Elle dispose d'un budget de 8500$ afin d'assurer les différentes dépenses liées à ce projet

Comme coordonnateur du projet, tu dois aider à planifier les achats pour l'atteinte de cet objectif. Afin de pouvoir le faire, la directrice t'a remis un certain nombre d'informations.

NOTE : une information est manquante (quantité de CO2 que permet d'économiser chaque arbre) permettant de voir si les élèves percevront cette information manquante dans le problème[180].

On remet ici trois dossiers

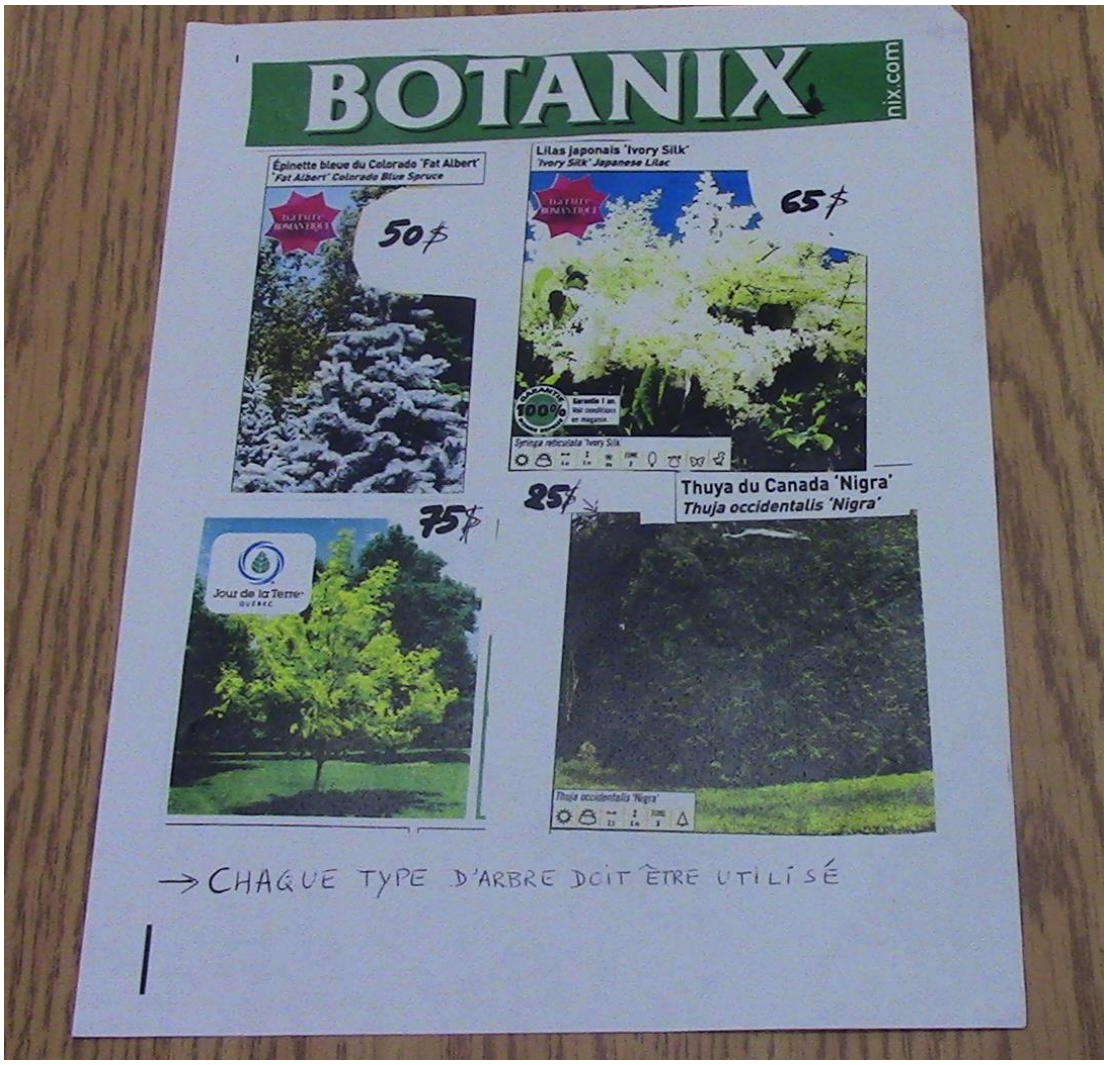
Dossier 4 : matériel à acheter (donné dans une enveloppe)

- Des supports à vélos : il faut en acheter en quantité suffisante afin d'avoir au moins assez de places pour les élèves et les employés qui ont choisi ce moyen de transport.
- Une gourde pour chaque élève et employé qui choisit d'utiliser une gourde d'eau réutilisable.
- Puisque l'école fera du compostage, il faut acheter l'équipement nécessaire. On estime avoir besoin de 5 bacs.
- Des arbres pour pouvoir atteindre l'objectif.

Dossier 5 : quincaillerie (tous les prix incluent les taxes; des informations fournies sur des feuilles séparées)

Dossier 6 : prix des arbres chez le pépiniériste.

[180] Un ajustement en cours de route apparu, cette information manquante était au départ involontaire mais compte tenu de ce qui s'est passé avec une équipe, l'intérêt de la laisser absente nous est apparu intéressant, certains élèves voyant qu'une information manquait, d'autres non.


BOTANIX
nix.com
Épinette bleue du Colorado 'Fat Albert'
'Fat Albert' Colorado Blue Spruce
50$
Lilas japonais 'Ivory Silk'
'Ivory Silk' Japanese Lilac
65$
Syringa reticulata 'Ivory Silk'
85$
Thuya du Canada 'Nigra'
Thuja occidentalis 'Nigra'
75$
Jour de la Terre
QUÉBEC
Thuja occidentalis 'Nigra'
→ CHAQUE TYPE D'ARBRE DOIT ÊTRE UTILISÉ

ANNEXE J

Formulaire de consentement

Formule de consentement pour les enseignants et enseignantes

J'ai pris connaissance du projet de recherche dirigé par Victor Mouboli, étudiant au doctorat, de l'université du Québec à Montréal.

Nature de la participation

J'ai été informé(e) des buts de ce projet et de la démarche qui y est proposée. Essentiellement, le projet vise à mieux comprendre le processus de résolution de situations-problèmes par les élèves en difficulté en mathématiques de secondaire 1. La démarche qui m'est proposée, dans la participation à cette recherche, consiste en un recueil des copies des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques dans mes groupes, lors de la résolution de la situation-problème expérimentée en fin d'année scolaire à des fins d'évaluation[181].

Principe de confidentialité et protection de l'anonymat

J'ai été informé(e) que ces données serviront à l'analyse des stratégies des élèves, de leurs raisonnements, de leur engagement dans la tâche, de leurs difficultés, et que des précautions liées au principe de confidentialité et de protection de l'anonymat seront prises en lien avec ces données.

Ces précautions consistent essentiellement à supprimer le nom et prénom de l'élève sur la copie, et à substituer ce nom et prénom par un symbole (exemple élève A, B…) ou encore par un nom fictif, pour conserver le caractère confidentiel ou l'anonymat. Si

[181] Cette démarche n'a pas été prise en compte dans l'expérimentation.

une de ces copies contenait une idée risquant de repérer l'identité de l'élève, cette idée serait exclue de la retranscription à des fins de présentation ou publication.

Cet anonymat sera préservé tout au long de l'analyse et dans les présentations et publications faisant état des résultats. Les copies des élèves, une fois traitées, seront détruites.

ANNEXE K

Déroulement de l'expérimentation

Élèves	SR1 (Situation recherche)			SP2 (Problème du géant)			SP3 (Défi climat)			
	S1	S2	S3	S1	S2	S3	S1	S2	S3	S4
Bambou	12[182] 11 13	19 11 13	03 12 13	10 12 13	15 01 14	22 01 14	29 01 13	05 02 14	13 02 14	A
Ficus	16 11 13	23 11 13	30 11 13	17 12 13	15 01 14	22 01 14	29 01 14	05 02 14	13 02 14	19 02 14
Jacinthe	13 11 13	27 11 13	11 12 13	18 12 13	08 01 14	A	28 01 14	06 02 14	11 02 14	18 02 14
Lavande	13 11 13	27 11 13	11 12 13	18 12 13	08 01 14	21 011 4	28 01 14	06 02 14	A	18 02 14
Cappucine	21 11 13	28 11 13	05 12 13	12 12 13	16 01 14	23 01 14	03 02 14	13 02 14	13 03 14	
Rose	21 11 13	28 11 13	05 12 13	12 12 13	16 01 14	A	03 02 14	13 02 14	13 03 14	
Mandarine	09 04 14	16 04 14	22 04 14	23 04 14	28 04 14	30 04 14	03 02 14	17 02 14	24 02 14	
Yucca	15 04 14	16 04 14	22 04 14	23 04 14	28 04 14	30 04 14	10 02 14	17 02 14	24 02 14	

[182] Les nombres en colonnes désignent respectivement le jour, le mois et l'année. La lettre A désigne l'absence de l'élève.

S1 : séance 1; S2 : séance 2; S3 : séance 3

ANNEXE L

Formulaire d'information et de consentement destiné aux parents (participant mineur)

«Analyse de la résolution de situations-problèmes par des élèves en difficultés d'apprentissage en mathématiques : difficultés et potentialités»

IDENTIFICATION

Responsable du projet : Mouboli Victor
Programme d'enseignement : Doctorat en éducation
Adresse courriel : **mouboli.victor@courrier.uqam.ca**
Téléphone : 514 728 1365

BUT GÉNÉRAL DU PROJET ET DIRECTION

Votre enfant est invité à prendre part à un projet de recherche visant à mieux comprendre les difficultés que les élèves de secondaire 1 rencontrent dans la résolution de différentes situations-problèmes en mathématiques mais aussi à cerner le potentiel de ces élèves.

Ce projet de recherche est réalisé dans le cadre d'une thèse de doctorat en éducation sous la direction de Mme Nadine Bednarz, professeur émérite au département de mathématiques à l'UQÀM. Elle peut être jointe au (514) 987-3000 poste 3012 ou par courriel à l'adresse : descamps-bednarz.nadine@uqam.ca.

La directrice adjointe de l'école de votre enfant, Mme Élisabeth Noury, ainsi que son professeur, Sané Mamadou, ont également donné leur accord à ce projet.

La contribution de votre enfant à ce projet favorisera l'avancement des connaissances dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques au secondaire.

PROCÉDURE(S) OU TÂCHES DEMANDÉES À VOTRE ENFANT

Avec votre permission et l'accord de votre enfant, il sera invité, une fois par semaine, à résoudre des situations-problèmes, en dehors des heures de classe, et à travailler en petit groupe de 2 élèves sur des manières de résoudre ces problèmes. Nous comptons également filmer votre enfant dans ses interactions avec l'enseignant-chercheur et avec l'autre élève. Cette période d'observation aura lieu du 6 janvier 2014 au 12 avril 2014. Elle a pour but de mieux comprendre les démarches qu'utilise votre enfant et ses forces pour résoudre différents types de situations. Les séances auront lieu dans un local de son école, de 16heures à 17 heures 15.

AVANTAGES ET RISQUES D'INCONFORT

Il n'y a pas de risque associé à la participation de votre enfant à ce projet. Les activités proposées à votre enfant sont semblables à celles qu'il rencontre dans un travail de classe ordinaire en mathématiques où il est appelé à résoudre des problèmes durant l'année. Elles viennent prolonger et approfondir ce travail. Néanmoins, soyez assuré que le responsable du projet demeurera attentif à toute manifestation d'inconfort chez votre enfant durant sa participation. Qu'est ce qui sera offert à votre enfant en cas de malaise ?

Le chercheur essaiera d'installer un climat relationnel agréable avec votre enfant, qui le (ou la) met à l'aise, et s'efforcera au cours de l'expérimentation de valoriser ce qu'il (ou elle) fait, en le (ou la) traitant comme un(e) ''partenaire'' de la recherche, une personne qui nous apprend des choses de manière à enlever cette barrière du jugement possible qu'il (ou elle) peut ressentir. En cas de difficulté à communiquer, l'accent sera mis davantage sur les actions de votre enfant, ce qu'il fait, les traces de ce qu'il laisse sans insister trop fortement sur le langage et l'explication. En cas de réaction/malaise de l'élève face au fait d'être filmé, la caméra sera arrêtée et le chercheur prendra des notes après coup dans le journal de bord pour essayer de reconstituer ce qui s'est passé.

ANONYMAT ET CONFIDENTIALITÉ

Il est entendu que les renseignements recueillis auprès de votre enfant sont confidentiels et que seuls, le responsable du projet et sa directrice de recherche et son co-directeur auront accès aux enregistrements vidéos, aux contenus des transcriptions et aux productions (traces) de votre enfant. L'ensemble du matériel de recherche sera conservé sous clé par le chercheur responsable, pour la durée totale du projet. Les enregistrements vidéo, les transcriptions, les formulaires de consentement et les productions de votre enfant seront détruits 5 ans après les dernières publications.

PARTICIPATION VOLONTAIRE

La participation de votre enfant à ce projet est volontaire. Cela signifie que même si vous consentez aujourd'hui à ce que votre enfant participe à cette recherche, il demeure entièrement libre de ne pas participer ou de mettre fin à sa participation en tout temps sans justification ni pénalité. Vous pouvez également retirer votre enfant du projet en tout temps.

Votre accord à participer implique également que vous acceptez que le responsable du projet puisse utiliser aux fins de la présente recherche les renseignements recueillis dans les articles, la thèse, les conférences et communications scientifiques à la condition qu'aucune information permettant d'identifier votre enfant ne soit divulguée publiquement à moins d'un consentement explicite de votre part et de l'accord de votre enfant.

COMPENSATION

Votre enfant ne sera pas compensé directement. Sa contribution est offerte à titre gratuit. Sur demande, un résumé des résultats de recherche vous sera transmis au terme du projet.

DES QUESTIONS SUR LE PROJET OU SUR VOS DROITS?

Vous pouvez contacter le responsable du projet pour des questions additionnelles sur le déroulement du projet. Vous pouvez également discuter avec la directrice de recherche des conditions dans lesquelles se déroulera la participation de votre enfant et de ses droits en tant que participant(e) de recherche.

Le projet auquel vous allez participer a été approuvé au plan de l'éthique de la recherche avec des êtres humains. Pour toute question ne pouvant être adressée à la directrice de recherche ou pour formuler une plainte ou des commentaires, vous pouvez contacter le Président du Comité d'éthique de la recherche pour étudiants (CÉRPÉ), par l'intermédiaire de son secrétariat au numéro (514)-987-3000 # 1646 ou par courriel à : (savard.josee@uqam.ca).

REMERCIEMENTS

Votre collaboration et celle de votre enfant sont importantes pour la réalisation de ce projet et nous tenons à vous en remercier.

AUTORISATION PARENTALE

En tant que parent ou tuteur légal de , je reconnais avoir lu le présent formulaire de consentement et consens volontairement à ce que mon enfant participe à ce projet de recherche. Je reconnais aussi que le responsable du projet a répondu à mes questions de manière satisfaisante, et que j'ai disposé de suffisamment de temps pour discuter avec mon enfant de la nature et des implications de sa participation. Je comprends que sa participation à cette recherche est totalement volontaire et qu'il peut y mettre fin en tout temps, sans pénalité d'aucune forme, ni justification à donner. Il lui suffit d'en informer un membre de l'équipe. Je peux également décider, pour des motifs que je n'ai pas à justifier, de retirer mon enfant du projet.

J'autorise mon enfant à participer à ce projet sur la résolution de situation-problème en mathématiques : OUI NON

J'accepte que mon enfant soit filmé durant les séances: OUI NON

Signature de l'enfant : Date :

Signature du parent/tuteur légal : Date :

Nom (lettres moulées) et coordonnées :

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques du projet et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du resonsable du projet : Date :

Nom (lettres moulées) et coordonnées :

Un exemplaire du formulaire d'information et de consentement signé doit être remis au participan

RÉFÉRENCES

Ackermann, E. (1995). Construction and transference of meaning through form. Dans Steffe, L. P. et Gale, J. (dir.), *Constructivism in education* (p. 341-354). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

ADOQ (1992). *La difficulté d'apprentissage selon…* « Dépliant » « s.l. »

American Psychiatric Association. (1994). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders DSM-IV*. (4 éd.). Washington : American Psychiatric Association.

Anadón, M. (2007). *La recherche participative : multiples regards*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Arcavi, A. et Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving : the case of Israeli elementary school projects. *ZDM Mathematics Education, 39*(5), 355–364.

Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. Villeurbanne : Université Claude Bernard Lyon I.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, no S6 (1989), 124-128. http://www.numdam.org/article/PSMIR_1989___S6_124_0.pdf

Artigue, M. et Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie, 76*, 69-88.

Artigue, M. et Houdemont, C. (2007). Problem solving in France : Didactic and curricula perspectives. *ZDM Mathematics Education, 39*(5), 365–382.

Astolfi, J.-P., Darot, É., Ginsburger-Vogel, Y. et Toussaint, J. (1997). *Mots-clés de la didactique des sciences Repères, définitions, bibliographies*. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : J. Vrin.

Barry, S. (2009). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire I.* (Thèse de doctorat). Université du Québec à Montréal, Montréal. http://www.archipel.uqam.ca/2218/.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation, 20*(1), 175-198.

Beaudry, G. (1950). Arithmétique. Dans Vinette, R. (dir.), *Méthodologie spéciale* (p. 341-482). Montréal : Le Centre de Psychologie et Pédagogie.

Bednarz, N. (1996). Language activities, conceptualization and problem solving : the role played by verbalization in the development if mathematical thought by young children. Dans Mansfield, H. M., Pateman, N. H. et Bendarz, N. (dir.), *Mathematics for Tomorrow's young children : international perspectives on curriculum* (p. 228-239). Dordrecht : Kluwer.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for reasonings and notations developed by students. Dans Stacey, K., Chick, H. et Kendal, M. (dir.). Proceedings of the Twelfth ICME Study Conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra (p. 69-78). Vol 1. Victoria, Australie: Université de Melbourne. Récupéré de https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/35000

Bednarz, N. (2009). Analysis of a Collaborative Research Project : A Researcher and a Teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(1), 1-24.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, 33, 5-31.

Bednarz, N., Garnier, C. (1989). *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. Ottawa: Éditions Agence d'Arc inc.

Bednarz, N., Garnier, C. (1989). Introduction. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir). *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (p. 13-30), Ottawa: Éditions Agence d'Arc inc.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Lajoie, C., Théorêt, M. et Poirier, L. (2006). Défis posés par l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en milieu défavorisé. Dans EMF (dir.), Colloque *Espace mathématique francophone*, EMF 2006. Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/5914/5390/4201/EMF2006_GT7_Bednarz.pdf

Bednarz, N. et Larochelle, M. (1994). À propos du constructivisme et de l'éducation. *Revue des sciences de l'éducation,* XX(1), 5-20.

Bednarz, N. et Saboya, M. (2006). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire. Dans Giroux, J. et Gauthier, D. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Hommage à Gisèle Lemoyne* (p. 139-166). Montréal : Éditions Bande Didactique.

Bélanger, M. (1991). Les erreurs en arithmétique un siècle de présomption américaine. *Petit x, 26*, 49-71.

Berdonneau, C. (2006). Le « coffre à problèmes » : un dispositif d'apprentissage à la résolution de « problèmes pour chercher », son intérêt face à des élèves en difficulté, en particulier pour des enfants à haut potentiel intellectuel. Dans Bednarz, N. et Mary, C. (dir.), Colloque *Espace mathématique francophone*, EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. (GT 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/4714/5390/4206/EMF2006_GT7_Berdonneau.pdf

Blum, W. et Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-38.

Bonotto, C. (2010). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(3), 18-32.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141.

Boutin, G. (2008). *L'entretien de recherche qualitatif.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Brossard, M. et Wargnier, P. (1992-1993). Rôle de certaines variables contextuelles sur le fonctionnement cognitif des élèves en situation scolaire. *Bulletin de Psychologie,* t. XL VI, n° 412, .703-710.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans Vanhamme, J. et Vanhamme, W. (dir.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique.* Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre (p. 101-117). Louvain-la-Neuve, Belgique : Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*(1), 11-58.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1982). Ingénierie didactique: d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, 39-60.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. *Recherche en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans Bednarz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits : Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (p. 41-63). Montréal : CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques: 1. Structure et fonctionnement du système didactique Dans Noirfalise, R. et

Perrin-Glorian, M.-J. (dir.), *Actes de la VIII École d'été de didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne* (p. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques : didactiques des mathématiques, 1970-1990*. Paris : la Pensée sauvage.

Brousseau, G. (2009). *Le cas de Gaël revisité (1999-2009)*. hal-00582620, version 1, Mérignac : Institut universitaire de formation des maîtres (IUFM) - Aquitaine. Université Montesquieu - Bordeaux IV. Récupéré de http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/

Brueckner, L. J. (1930). Tools and Technique of Diagnosis in Arithmetic. *Educational Outlook, IV (May, 1930),* 200-209.

Charnay, R. (1987). Apprendre (par) la résolution de problèmes. *Grand N, 42*, 21-29.

Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N, 51*, 77-83.

Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire le temps-- des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

CIEAEM. (1988). *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. Compte rendu de la 39e Rencontre internationale de la CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) tenue à Sherbrooke, Canada, du 27 juillet au 1er août 1987 = The role errors play in the learning and teaching of mathematics*. Sherbrooke : Editions de l'Universite de Sherbrooke.

Clements, M.A. (Ken). (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1-21.

Coffin, F., Dupraz, M., Manin, S. et Payan, C. (2006). "Maths à modeler" : situations-recherche pour l'enseignement des mathématiques auprès d'enfants présentant des troubles psychopathologiques. Dans Bednarz, N. et Mary, C. (dir.). *Espace mathématique francophone*, EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. (GT 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/5914/5390/4232/EMF2006_GT7_Coffin.pdf

Cohn, R. (1968). Developmental dyscalculia. *Pediatric Clinics of North America, 15*(3), 651-668.

Confrey, J. (1994). « Voix et perspective » : à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes. *Revue des sciences de l'éducation, XX*(1), 115-133.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. Dans Conne, F. et Lemoyne, G. (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 31-69). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Conne, F. et Lemoyne, G. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance*, *53*(2), 181-196. doi : 10.3917/enf.532.0181 Récupéré de http://www.cairn.info/revue-enfance-2001-2-page-181.htm

Cotnoir, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours*. (Maîtrise). Université de Sherbrooke.

Crémieux, C., Jakob, P. et Mousseau, M.-J. (1994). Regard didactique sur les productions scolaires en histoire-géographie. *Revue Française de Pédagogie, 106*(1), 47-54. Récupéré de http://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1994_num_106_1_1272

CSDM. (2007). *Rapport annuel d'évaluation : année 2006-2007*. Montréal : Commission scolaire de Montréal (CSDM). Récupéré de http://csdm.ca/wp-content/blogs.dir/6/files/Rapport_annuel_evaluation-2006-2007.pdf

Da Ronch, M. (2019). Un problème de pavage : entre jeu et activité mathématique, *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé)*, n°231, 46-55.

DeBlois, L. (2001). *4 dizaines et 10 unités font 410, pourquoi?* Montréal : Éditions Bande didactique.

Dias, T. (2006). Expérimenter en mathématiques pour relever le défi de l'adaptation. *Colloque Espace mathématique francophone*, EMF 2006 (thème 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/9014/5390/4237/EMF2006_GT7_Dias.pdf

Dolz, J. et Ollagnier, E. (2002). *L'énigme de la compétence en éducation*. Bruxelles : De Boeck-Université.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*(1), 77-110.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques une réalisation dans tout le cursus primaire.* (Thèse de doctorat d'État en didactique des mathématiques). Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Paris VII, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665.

Drouin, A.-M. et Astolfi, J.-P. (1987). Milieu. *Aster, 3*, 73-109.

Dufour-Janvier, B. et Bednarz, N. (1989). Situations conflictuelles expérimentées pour faire face à quelques obstacles dans une approche constructiviste de l'arithmétique au primaire. Dans Bednarz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des savoirs Obstacles et conflits : Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (p. 315-333). Montréal : CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Dumas-Carré, A., Goffard, M. et Gil-Pérez, D. (1992). Difficultés des élèves liées aux différentes activités cognitives de résolution de problèmes. *Aster, 14*, 53-75.

EMF 2006, Bednarz, N. et Mary, C. (dir.). (2006). *Espace mathématique francophone*, EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Genève : Université de Genève. Récupéré de http://emf.unige.ch/index.php/emf-2006/

EMF 2009, Kuzniak, A. et Sokhna, M. (dir.). (2009). *Espace mathématique francophone*, EMF 2009 : Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Genève : Université de Genève. Récupéré de http://emf.unige.ch/index.php/emf/

EMF 2012, Dorier, J.-L. et Coutat, S. (dir.). (2012). *Espace mathématique francophone*, EMF2012. Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21 siècle. Genève : Université de Genève. Récupéré de http://emf.unige.ch/index.php/actes-emf-2012/

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux et Niestle.

Fayol, M. (2003). La compréhension : évaluation, difficultés et interventions. Communication présentée à la Conférence de consensus sur l'enseignement de

la lecture à l'école primaire, les 4 et 5 décembre 2003. Récupéré de https://www.cndp.fr/bienlire/01-actualite/document/fayol.pdf

Fischer, J.-P. (2009a). Présentation du dossier "La dyscalculie développementale" *ANAE : Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant, 21, tome 2*(102), 115-116. Récupéré de https://www.anae-revue.com/app/download/4691994564/Pr%C3%A9sentation+N%C2%B0102+Dyscalculie.doc?t=1484051919

Fischer, J.-P. (2009b). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *ANAE : Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant, 21, tome 2*(102), 117-133.

Gellert, U. (2009). Zur Explizierung Strukturierender Prinzipien Mathematischer Unterrichtspraxis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(2), 121-146.

Giroux, J. (2005). *Moi, je sais compter loin, loin*. Montréal : Éditions Bande didactique.

Giroux, J. (2010). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Dans Freiman, V., Roy, A. et Theis, L. (dir.). *Actes de colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2010* (p. 148-158). Moncton, NB : Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec. Récupéré de http://turing.scedu.umontreal.ca/gdm/documents/ActesGDM2010.pdf.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et Didactique*, *7*(1), 59-86.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, H. Squalli. L. Theis et L. Deblois (Eds.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 11-44). Québec : PUQ

Giroux, J. et Ste-Marie, A. (2006). Maillage de situations didactiques faisant appel à des environnements informatisés et conventionnels dans des classes d'adaptation scolaire. Dans Giroux, J., Gauthier, D. et Lemoyne, G. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (p. 35-63). Montréal : Éditions Bande didactique.

Glaeser, G. (1973). *Le livre du problème : Fascicule 1, pédagogie de l'exercice et du problème*. Lyon : CEDIC.

Glasersfeld, E. von (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. Dans P. Jonnaert et D. Masciotra (dir.). *Constructivisme, choix contemporains: hommage à Ernst von Glasersfeld* (p. 292-317). Québec : Presses de l'Université du Québec

Goos, M., Galbraith, P. et Rensaw, P. (2000). A money problem: a source of insight into problem solving action. *International Journal for Mathematics Teaching*. Récupéré de http://www.cimt.org.uk/journal/pgmoney.pdf

Grenier, D. (2007). *Théorie des champs conceptuels et conception : notes de cours, Master2 R et P IC2A.* Université Grenoble Alpes, Département de Didactique des sciences.

Grenier, D. et Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques, 18*(1), 59-99.

Grenier, D. et Payan, C. (2003). Situations de recherche en «classe», essai de caractérisation et proposition de modélisation. Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2002 (p. 189-203). Paris : IREM de Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

Hanin, V. (2018). *Une approche tridimensionnelle de la résolution de problèmes mathématiques chez les élèves en fin d'enseignement primaire* (Doctoral dissertation, UCL-Université Catholique de Louvain).

Hitt, F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. Dans Guiménez, J., Fitz Simons, G. et Hahn, C. (dir.). 54e rencontre de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-54) (p. 351-359). Vilanova i la Geltrú, Espagne : CIEAEM

Houdement, C. (1999). Le choix de problèmes pour la résolution de problèmes. *Revue Grand N.*

Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris : Presses Universitaires de France.

Inhelder, B., Garcia, R., Vonèche, J. (1977). *Épistémologie génétique et équilibration. Hommage à Jean Piaget.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes (France) : Presses universitaires de Rennes.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. Dans Silver, E. A. (dir.), *Teaching and learning mathematical problem solving multiple research perspectives* (p. 1-15). Hillsdale, N.J : L. Erlbaum.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago and London: The University of Chicago Press.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(2), 178-213. Récupéré de http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2012.679992

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et Francophonie, XLII*(2), 7-23. Récupéré de http://www.acelf.ca/c/revue/pdf/EF-42-2-007_LAJOIE.pdf

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXI^e siècle au Québec : rupture ou continuité? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16 (1),* 1-27. DOI : 10.1080/14926156.2014.993443, http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Landry, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez des élèves du secondaire.* (Thèse de doctorat en éducation). Université du Québec à Montréal, Montréal.

Le Boterf, G. (1997). *De la compétence à la navigation professionnelle*. Paris : Editions d'Organisation.

Le Boterf, G. (1999). *Compétence et navigation professionnelle*. (2^e éd.). Paris : Éditions d'Organisation.

Lemoyne, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse : les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repères, essais en éducation* (12), 79-101.

Lemoyne, G. (1996). La recherche en didactique des mathématiques au Québec : rétrospectives et perspectives. *Bulletin AMQ, 36*(3), 31-40.

Lemoyne, G. et Bisaillon, N. (2006). Conception et réalisation de recherches sur l'enseignement des mathématiques dans les classes intégrant des élèves en difficulté Dans Giroux, J. et Gauthier, D. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : hommage à Gisèle Lemoyne* (p. 9-34). Montréal : Éditions Bande Didactique.

Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. *Éducation et Francophonie, XXXI*(2), 13-44.

Lesh, R. et Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. Dans Frank K. Lester, J. (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 763-804). Charlotte, NC : Information Age Pub.

Lunkenbein, D. (1985). La résolution de problèmes et le processus d'apprentissage en mathématique. *Instantanés mathématiques : Le point sur... La résolution de problèmes, 21*(Numéro spécial D), 5-9.

Maréchal, C. (2010). *Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé : une analysse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition.* (Thèse de doctorat). Université de Genève, Genève. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00609830.

Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier Grenoble 1, Grenoble.

Mary, C. et Squalli, H. (2014). L'activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (éd.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques: regard didactique* (p.163-186), Québec : PUQ.

Mary, C. et Squalli, H. (accepté). Chapitre 1: *Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : Fondements épistémologiques et didactiques,* Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : Quels enjeux et quelles perspectives ?* Montréal : Les éditions JFD.

Mary, C., Squalli, H., Roy, P. et Turgeon, S. (2011). Intervenir auprès des élèves à risque. Le développement professionnel des compétences, un pas sur la bonne

voie! *Vie pédagogique, 158*(Juin), 27-29. Récupéré de http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/bs2043482

Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage: contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. Dans Bisaillon, J. M. et Rousseau, N. (dir.), *Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés* (p. 169-192). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Mary, C. et Theis, L. (2007). Les élèves à risque dans des situations-problèmes statistiques: stratégies de résolution et obstacles cognitifs. *Revue des sciences de l'éducation, XXXIII*(3), 579-599.

Mason, J., Burton, L. et Stacey, K. (1994). *L'esprit mathématique*. Mont-Royal, Québec : Modulo.

Meirieu, P., Bourdillon, F. et Lenoble, É. (2010). Le modèle médical en éducation, la meilleure et la pire des choses: Entretien avec Philippe Meirieu. *Les Tribunes de la santé, 28*(3), 83-85.

Medici, D., Ricci, F., et Rinaldi, M. G. (2008). Travailler avec du matériel, gain ou perte de temps. *Bulletin de l'APMEP, 477*, 543-548.

MELS. (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire 2e cycle. Document de travail aux fins de validation*. Québec: Gouvernement du Québec.

MELS. (2007a). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)*. (2007–07-00523). Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/adaptation_serv_compl/19-7065.pdf

MELS. (2007b). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math

MELS. (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire et primaire*. Québec : Ministère de l'éducation, Gouvernement du Québec. Récupéré de

http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeformation/pdf/prform2001.pdf

MELS. (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Ministère de l'éducation, Gouvernement du Québec. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/pdf/chapitre061v2.pdf

MEQ. (1980). *Programme d'études, Primaire.* Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'éducation, Direction des programmes, Service du primaire.

MEQ. (1988). *Guide pédagogiques, primaire, mathématique, Résolution de problèmes, Orientation générale : fascicule K*. Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'éducation, Direction générale des programmes, Direction de la formation.

MEQ. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.

MEQ. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, éducation prescolaire, enseignement primaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Mercier, A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. Dans Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D. et Tiberghien, A. (dir.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 145-169). Grenoble : La Pensée sauvage.

Morf, A. (1994). Une épistémologie pour la didactique : spéculations autour d'un aménagement conceptuel, *Revue des sciences de l'éducation,* XX(1), 29

Mouboli, V. (2004). *L'apprentissage de la géométrie plane: exploration des erreurs d'élèves des classes de 3e du secondaire au Gabon.* (Essai de maîtrise). Université Laval.

Nesher, P., Hershkovitz, S. et Novotne, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 52*(2), 151-176.

Ngono, B. (2006). Pratiques de professeurs des écoles enseignant les matématiques en ZEP : exemples d'adaptations de resssources à destination des élèves, mis en évidence des effets potentiels sur leur activité mathématique. Dans Bednarz, N. et Mary, C. (dir.), *Espace Mathématique Francophone*, EMF2006 :

L'enseignement des mathématiques face aus défis de l'école et des communautés. (GT 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/1714/5390/4247/EMF2006_GT7_Ngono.pdf

Newman, M.A. (1977). An analysis of sith-grade pupils errors on written mathematical tasks. Dans Clements, M. A. (Ken) et Foyster, J. (dir.), *Research in Mathematics Education in Australia Papers presented to the 1st conference of MERGA* (p.239-258). Melbourne : MERGA.

Perrenoud, P. (1997). *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherche en didactique des mathématiques, 13*(1), 5-118.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994a). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de classes faibles. *Paris, Petit x* (35), 5-40.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994b). Théorie des situations didactiques : naissance, développements, perspectives. Dans Artigue, M. (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (p. 97-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality*. New-York : Humaities Press.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement*. Paris : Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1976). *Le comportement, moteur de l'évolution*. Paris : Gallimard, collection Idées.

Polya, G. (1945). *How to solve it : A new aspect of mathematical method*. Princeton, USA : Princeton University Press.

Proulx, J. (2019). Recherches qualitatives et validités scientifiques. *Recherches qualitatives, 38*, (1), 53–70. https://doi.org/10.7202/1059647ar

Radford, L. (2011). *Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation*. Toulouse : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse.

Rajotte, T., Giroux, J., et Voyer, D. (2014). Les difficultés des élèves du primaire en mathématiques, quelle perspective d'interprétation privilégier?. *McGill Journal of Education/Revue des sciences de l'éducation de McGill*, *49*(1), 67-87.

Ratsimba-Rajohn, H. (1992). *Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction.* (Thèse de doctorat). Université Rennes I, Rennes http://www.theses.fr/1992REN10156.

Rauscher, J-C. et Adjiage, R. (2012). Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. Actes du colloque Espace de Travail Mathématique 3. Montréal, 24, 25, 26 Octobre 2012.

Rauscher, J.-C. et Adjiage, R. (2014). Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17* (4-1), 41-64.

René de Cotret, S. et Fiola, A. (2006). Une adaptation de l'environnement informatisé "Bouchons les trous" pour des élèves en difficulté d'apprentissage. Dans Giroux, J. et Gautier, D. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Hommage à Gisèle Lemoyne* (p. 113-138). Montréal : Éditions Bande Didactique.

René de Cotret, S. et Giroux, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts). *Éducation et Francophonie*, *XXXI*(2), 155-175.

Rey, B. (2011). Situations et savoirs dans la pratique de classe. *Recherches en éducation. Revisiter la notion de situation : approches plurielles*, *12*(novembre), 35-49. Récupéré de http://www.recherches-en-education.net/

Rice, J.M. (1902). « Educational Research : A Test in Arithmetic », *Forum* XXXIV, 281-97.

Robardet, G. (1990). Enseigner les sciences physiques à partir de situations-problèmes. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, *720*, 17-28.

Roditi, E. (2003). Les interactions Professeur-Élèves. Communication présentée à la 12e École d'été de Didactique des Mathématiques de l'ARDM, Corps, France, du 20 au 29 août 2003.

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur*

l'activité mathématique chez les élèves du secondaire. (Thèse de doctorat). Université du Québec à Montréal, Montréal

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. Dans Lemoyne, G. et François, C. (dir.), *Le cognitif en mathématiques* (p. 327-352). Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Salin, M.-H. (2006). A la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques. Dans Giroux, J. et Gauthier, D. (dir.), *Difficultés d'enseigement et d'apprentissage des mathématiques Hommage à Gisèle Lemoyne* (p. 195-217). Montréal : Éditions Bande Didactique.

Saljo, R. et Wyndhamn, J. (1987). The formal setting context for cognitive activities : An empirical study of arithmetic operations under conflicting premisses for communication. *European Journal of Psychology of Education*, *2*(3), 233-245.

Savoie-Zajc, L. (2000a). *Innovations pédagogiques*. Hull: Université du Québec à Hull.

Savoie-Zajc, L. (2000b). La recherche qualitative/interpétative en éducation. Dans Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 171-198). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando : Academic Press.

Schubauer-Leoni, M. L., Grossen, M. (1993). Negotiating the meaning of questions in didactic and experimental contracts. *European Journal of Psychology of Education, Vol 8* (4), 451-471.

Schubauer-Leoni, M.L. et Ntamakiliro, L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 87-113.

Steffe, L.P. (1983). The teaching experiment in a constructivist research program. Dans Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollack, H. et Suydam, M. (dir.), *Proceedings of the fourth international congress on mathematical education* (p. 469-471). Boston, MA : Birkhauser.

Steffe, L.P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. Dans von Glasersfeld, E. (dir.), *Radical constructivism in mathematics education* (Vol. 7, p. 177-194, Mathematics Education Library). Boston, MA : Kluwer Academic Press.

Steffe, L.P. et Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. Dans Lesh, R. et Kelly, A. E. (dir.),

Research design in mathematics and science education (p. 267-307). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Theis, L. et Gagnon, N. (2010). Enjeux et limites de la contextualisation en enseignement des mathématiques: points de vue d'une praticienne et d'un chercheur. *Bulletin de l'AMQ, 50*(4), 59-65.

Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.P., Koudogbo, J. et Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire? *Education et francophoni*e, *42*, 158-172.

Vaivre-Douret, L. (2019). *Caractéristiques développementales de l'enfant à « hautes potentialités » et compréhension de trajectoires vers la dépression à l'âge scolaire en primaire et au collège.*

Van Hout, A. (2001). Dyscalculies développementales. *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, 139-170.

Vannetzel, L., Eynard, L.-A. et Meljac, C. (2009). Dyscalculie : une rencontre difficile. Étude d'une population d'enfants consultant dans un centre de référence pour troubles des apprentissages. *Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant, 21*(102), 135-144.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Dans Bednarz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des savoirs Obstacles et conflits : Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (p. 33-40). Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation.

Vergnaud, G. (2007). Représentation et activité: deux concepts étroitement associés. *Recherches en éducation, 4*, 9-22.

Vergnaud, G. (1990). Problem solving and concept-formation in the learning of mathematics. *Learning and instruction: European research in an international context*, *2*, 399-413.

Wilson, J.W., Fernandez, M.L. et Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. Dans Wilson, P. S. (dir.), *Research Ideas for the Classroom : High School Mathematics* (p. 57-78). New York : MacMillan.

Xenofontos, C. et Andrews , P. (2008). Teachers' beliefs about mathematical problem solving, their problem solving competence and the impact on instruction: A

case study of three Cypriot primary teachers. Communication présentée au 11th *International Congress on Mathematical Education* (ICME 11), sous le thème Study Group 19 (Research and development in problem solving in mathematics education). 6-13 juillet 2008, Monterrey, Mexico