

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE NOUVELLE IDENTITÉ DE FLUCTUATION POUR UN PROCESSUS
DE LÉVY OBSERVÉ À DES INSTANTS DE POISSON

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MAMADOU ALIOU BA

DÉCEMBRE 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Mes premiers mots de remerciement vont à l'endroit de mon superviseur Jean-Francois Renaud, professeur à l'Université du Québec à Montréal, qui m'a apporté une aide précieuse tout au long de ce travail, par ses commentaires toujours pertinents, ses encouragements et sa disponibilité. Le fruit de ce travail n'est rien d'autre que le résultat de son soutien financier constant et surtout de sa démarche très pédagogique.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du personnel du Département de mathématiques pour l'environnement de travail et les enseignants pour les cours de pointes fournis. Je remercie également tous les collègues du laboratoire informatique pour les moments de partage, et particulièrement Félix Locas avec qui j'ai eu à faire ce parcours.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit des professeurs Etienne Pardoux (Université Aix-Marseille, France), Loïc Chaumont (Université d'Angers, France) et Ahmadou Bamba Sow (Université Gaston Berger, Sénégal) pour m'avoir recommandé dans ce programme.

Enfin, je remercie ma famille pour les prières, les encouragements et le soutien inconditionnel depuis mon enfance et sans laquelle rien de ceci ne serait arrivé.

Je dédie ce travail à tous les enseignants qui ont eu à participer à ma formation.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I RAPPELS SUR LES PROCESSUS DE LÉVY SANS SAUT POSITIF	3
1.1 Généralités sur les processus de Lévy	3
1.1.1 Définitions et lien avec les lois infiniment divisibles	4
1.1.2 Exemples de processus de Lévy	6
1.1.3 Propriétés des sauts	8
1.1.4 Propriétés probabilistes	9
1.2 Processus de Lévy sans saut positif et fonctions d'échelle	10
1.2.1 Exposant de Laplace et inverse à droite	10
1.2.2 Les fonctions d'échelle	11
1.3 Identités de fluctuation	12
CHAPITRE II PROBLÈME DE PREMIER PASSAGE DANS UN IN- TERVALLE POUR UN SNLP OBSERVÉ À DES INSTANTS DE POIS- SON	16
2.1 Énoncés des résultats principaux	18
2.2 Résultats intermédiaires	22
2.3 Preuves des résultats principaux	24
2.3.1 Preuve du Théorème 4	24
2.3.2 Suite de la preuve du Théorème 4	31
2.3.3 Preuve du Corollaire 1	36
2.3.4 Preuve du Corollaire 2	37
2.4 Annexe	40
RÉFÉRENCES	42

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'intéresse principalement à un problème de la ruine du joueur généralisée. Plus précisément, on considère un processus de Lévy sans saut positif X , aussi appelé SNLP (*Spectrally Negative Lévy Process*, en anglais). On suppose que ce processus est observé à des instants aléatoires de sauts d'un processus de Poisson d'intensité λ qui est indépendant de X . On définit ainsi, pour $a < b$, la variable aléatoire

$$T_{(a,b)} = \min\{T_i^\lambda > 0 : X_{T_i^\lambda} \in (a, b)\},$$

qui est le premier instant de Poisson où l'on observe le processus X dans l'intervalle (a, b) . En particulier, $T_{(-\infty, 0)}$, est le premier instant de Poisson où l'on observe le processus en dessous de 0, ce qui correspond aussi à l'instant de la *ruine parisienne exponentielle*. On s'intéresse à la loi conjointe de $(T_{(a,b)}, X_{T_{(a,b)}})$. Plus précisément, pour $0 \leq b \leq c$, $a \geq 0$ et $x \leq c$, on trouve une expression explicite pour

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right],$$

où $X_0 = x$ et

$$\tau_{-a}^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < -a\} \text{ et } \tau_c^+ = \inf\{t \geq 0 : X_t > c\}.$$

Ce résultat principal généralise plusieurs identités de (Albrecher *et al.*, 2016) et de (Palmowski *et al.*, 2020).

INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, un bon nombre des mathématiciens se sont intéressés à l'étude des processus de Lévy. Connus au début sous le nom de processus à accroissements indépendants et stationnaires, le nom "processus de Lévy" est devenu plus courant, et ceci en l'honneur du mathématicien français Paul Lévy. Si cette famille de processus a porté le nom de Lévy, de grands mathématiciens ont contribué à leur étude parmi lesquels on peut citer de Finetti, Khintchine, Kolmogorov et Itô. Deux références qui sont importantes sur le sujet sont (Bertoin, 1996) et (Kyprianou, 2014).

Si autant de chercheurs se sont penchés sur les processus de Lévy, c'est sans doute dû à leur présence dans plusieurs domaines d'applications des probabilités. Ils sont par exemple utilisés en finance, dans la tarification et la couverture de produits dérivés ; voir par exemple le livre de (Cont et Tankov, 2004). On les retrouve aussi en assurance, plus particulièrement en théorie de la ruine, où le processus modélise le surplus associé à un portefeuille d'assurés. À cela, on peut ajouter la modélisation de l'évolution de particules, utilisée entre autres en biologie et en épidémiologie.

Dans ce mémoire, on considère un problème plus général que celui considéré par (Albrecher *et al.*, 2016) dans le but de généraliser leur Théorème 3.1. Comme eux, on considère un SNLP que l'on observe à des instants de sauts d'un processus de Poisson. En d'autres mots, les instants d'observations sont séparés par des temps aléatoires exponentiels qui sont indépendants entre eux et indépendants du processus. Ainsi, pour ces SNLPs observés à des instants aléatoires de Poisson,

on a obtenu une nouvelle identité de fluctuation en augmentant le nombre de régions et de barrières. Notons qu'une identité semblable est déjà apparue dans le manuscrit de (Palmowski *et al.*, 2020) pour la tarification d'options américaines. Comme expliqué dans (Albrecher *et al.*, 2016), on peut aussi voir les observations continues comme endogènes et celles aléatoires comme exogènes. Ainsi, pour une compagnie d'assurance, les observations continues sont effectuées à l'interne par les gestionnaires et les observations aléatoires discrètes sont effectuées par les actionnaires et/ou les régulateurs. Cette dernière interprétation revient aussi en théorie de la fiabilité ou dans l'analyse d'un inventaire de produits.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Le premier chapitre est essentiellement constitué de généralités sur les processus de Lévy, de propriétés probabilistes et analytiques, et de quelques identités de fluctuation en observation continue. Le second chapitre contient notre résultat principal, suivi de quelques corollaires ainsi que des résultats intermédiaires.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LES PROCESSUS DE LÉVY SANS SAUT POSITIF

Dans ce chapitre, des notions élémentaires de la théorie sur les processus de Lévy seront présentées. Une attention particulière sera accordée aux propriétés des processus de Lévy sans saut positif. Ce sont des notions indispensables pour la compréhension des preuves qui suivront. On aura deux parties. La première partie portera sur des généralités sur les processus de Lévy, des propriétés sur les trajectoires ainsi que des propriétés probabilistes. La deuxième partie sera constituée de quelques définitions de fonctions et d'identités de fluctuation en temps continu qu'on utilisera au Chapitre 2. Les définitions de bases présentées dans ce chapitre proviennent de (Kyprianou, 2014) et de (Kuznetsov *et al.*, 2012).

1.1 Généralités sur les processus de Lévy

On fixe ici, et pour le reste, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel nos processus et variables aléatoires seront définis. Dans ce chapitre, on désigne par $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, la filtration engendrée par le processus X .

1.1.1 Définitions et lien avec les lois infiniment divisibles

Définition 1 (Processus de Lévy). *Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit processus de Lévy s'il satisfait aux conditions suivantes :*

1. *ses trajectoires sont càdlàg, c'est-à-dire continues à droite, pour tout $t \geq 0$, et avec limites à gauche, pour tout $t > 0$;*
2. *$\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ presque sûrement (p.s.);*
3. *ses accroissements sont indépendants et stationnaires :*
 - a) *pour tout $s < t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante du processus $\{X_u, 0 \leq u \leq s\}$;*
 - b) *pour tout $s < t$, la variable $X_t - X_s$ possède la même loi que X_{t-s} .*

La loi de X , quand $X_0 = x$, est notée par \mathbb{P}_x et l'espérance correspondante par \mathbb{E}_x . On écrit \mathbb{P} et \mathbb{E} quand $x = 0$.

La prochaine définition porte sur l'exposant caractéristique d'une variable aléatoire. Mais bien avant cela rappelons qu'une variable aléatoire Y possède une *loi infiniment divisible* si, pour tout $n \geq 1$, il existe n variables aléatoires variables indépendantes et identiquement distribuées, $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ telles que :

$$Y \stackrel{\text{loi}}{=} Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}.$$

À partir de cette définition, on voit que, pour tout $t > 0$, la variable X_t appartient à la famille des lois infiniment divisibles. Ceci provient du fait que, pour tout $n \geq 1$, on peut écrire

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \dots + (X_t - X_{(n-1)t/n})$$

et que X a des accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 2 (Exposant caractéristique). *Soit X un processus de Lévy. On appelle*

exposant caractéristique la fonction Ψ telle que, pour tout $t \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} [e^{i\theta X_t}] = e^{-t\Psi(\theta)}.$$

On remarque que cette fonction Ψ est l'exposant caractéristique de la variable aléatoire X_1 . Cette fonction caractérise entièrement la loi du processus. Le théorème qui suit donne une forme explicite de l'exposant caractéristique d'un processus de Lévy.

Théorème 1 (Formule de Lévy-Khintchine).

1. Si Ψ est l'exposant caractéristique d'un processus de Lévy, alors

$$\Psi(\theta) = i\alpha\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2 - \int_{|x|<1} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \Pi(dx) - \int_{|x|\geq 1} (e^{i\theta x} - 1) \Pi(dx) \quad (1.1)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq 0$ et Π mesure sigma-finie appelée mesure de Lévy telle que,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min(1, x^2) \Pi(dx) < \infty. \quad (1.2)$$

2. Inversement, étant donné $\alpha \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq 0$ et Π une mesure sigma-finie satisfaisant (1.2), alors il existe un espace de probabilité sur lequel est défini un processus de Lévy dont l'exposant caractéristique est donné par (1.1).

Le triplet (α, σ, Π) , est appelé *triplet de Lévy* ou encore *triplet générateur* du processus. La forme de (1.1) donne une explication intuitive d'une possible décomposition de tout processus de Lévy. Plus précisément, on a :

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\theta) &= i\alpha\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2, \\ \Psi^{(2)}(\theta) &= \int_{|x|\geq 1} (e^{i\theta x} - 1) \Pi(dx), \\ \Psi^{(3)}(\theta) &= \int_{|x|<1} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \Pi(dx). \end{aligned}$$

À première vue, il semble bien que $\Psi^{(1)}$ est l'exposant caractéristique d'un mouvement brownien avec dérive, $\Psi^{(2)}$ celui d'un processus de Poisson composé et $\Psi^{(3)}$ celui d'un processus de Lévy obtenu comme limite d'une suite de processus de Poisson composés et compensés. Une décomposition due à Lévy-Itô permet de mieux les identifier.

Théorème 2 (Décomposition de Lévy-Itô). *Soit Ψ l'exposant caractéristique donné en (1.1). Alors, il existe un espace de probabilité sur lequel est défini un processus de Lévy $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ admettant ce même exposant caractéristique et où les processus $X^{(1)}, X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont des processus de Lévy indépendants tels que :*

- $X^{(1)}$ est un mouvement brownien avec dérive $-\alpha$ et volatilité σ ,
- $X^{(2)}$ un processus de Poisson composé d'intensité $\Pi(-1, 1)^c$ et de loi des sauts

$$F(dx) = \frac{\Pi(dx)}{\Pi(-1, 1)^c} \mathbf{1}_{(-1, 1)^c}(x),$$

- $X^{(3)}$ une martingale obtenue par la superposition d'une infinité de processus de Poisson composés et compensés.

1.1.2 Exemples de processus de Lévy

Le mouvement brownien standard est défini comme étant un processus stochastique satisfaisant :

1. $B_0 = 0$, presque sûrement ;
2. ses accroissements sont indépendants et stationnaires et suivent une loi normale :
 - (a) pour $s < t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\{B_u, 0 \leq u \leq s\}$;
 - (b) pour $s < t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ a même loi que

$$B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s);$$

3. ses trajectoires $t \mapsto B_t$ sont continues, presque sûrement.

On en déduit que $\mathbb{E}[e^{i\theta B_t}] = e^{-t\frac{\theta^2}{2}}$ et donc on peut identifier son exposant caractéristique,

$$\Psi(\theta) = \frac{\theta^2}{2}.$$

Si on le compare avec (1.1), on voit que $\alpha = 0$ et que $\Pi = 0$.

Un processus de Poisson d'intensité μ est défini comme étant un processus stochastique satisfaisant :

1. $N_0 = 0$, presque sûrement ;
2. ses accroissements sont indépendants et stationnaires et suivent une loi de Poisson :
 - (a) pour $s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ est indépendante de $\{N_u, 0 \leq u \leq s\}$;
 - (b) pour $s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ a même loi que $N_{t-s} \sim \mathcal{P}(\mu(t-s))$;
3. ses trajectoires $t \mapsto N_t$ sont continues à droite avec limite à gauche, presque sûrement.

On déduit que $\mathbb{E}[e^{i\theta N_t}] = e^{\mu t(e^{i\theta} - 1)}$ et donc on peut identifier son exposant caractéristique,

$$\Psi(\theta) = \mu(1 - e^{i\theta}).$$

Si on le compare avec (1.1), on voit que $\alpha = 0$, $\sigma = 0$ et donc il n'y a pas de composante brownienne. La mesure de Lévy est donnée par $\Pi(dx) = \mu\delta_1(x)$, où δ_1 est la mesure de Dirac en 1.

On donne ces deux exemples juste pour montrer la richesse des processus de Lévy, dans le sens où ces deux processus ont beaucoup de différences ; N est à valeur

dans \mathbb{N} , à trajectoires croissantes, et discontinues alors que B est à valeur dans \mathbb{R} , à trajectoires continues et non monotones. D'autres exemples de processus de Lévy sont le processus de Poisson composé, le processus gamma, les processus stables, inverse gaussien, \dots . Mieux encore, toute combinaison linéaire finie de processus de Lévy indépendants reste encore un processus de Lévy.

Pour plus de détails sur ces processus, voir (Kyprianou, 2014).

1.1.3 Propriétés des sauts

Nous abordons ici plusieurs notions, à savoir l'activité du processus, la variation des trajectoires et la régularité.

Activité du processus. On dit qu'un processus de Lévy est à *activité finie* si le nombre moyen de sauts par unité de temps est fini, ce qui veut dire que $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$. Dans le cas contraire, on dira que le processus est à *activité infinie*. De la relation (1.2), il découle que, pour tout $\epsilon > 0$, $\Pi(-\epsilon, \epsilon)^c < \infty$. Ce qui fait que si $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, alors le processus de Lévy est une somme indépendante d'un mouvement brownien avec dérive et d'un processus de Poisson composé, d'intensité $\Pi(\mathbb{R})$.

Variation du processus. On dira qu'un processus est à *variation finie* (respectivement *infinie*) si ses trajectoires sont presque sûrement à variation finie (respectivement *infinie*) sur tout intervalle de temps fini. Étant donné que le mouvement brownien est à variation infinie, en sa présence, un processus de Lévy sera toujours à variation infinie. Cependant s'il n'y a pas de mouvement brownien ($\sigma = 0$), il se peut que le processus soit à variation infinie, causée par la présence d'une "infinité de petits sauts". En fait on pourrait montrer qu'un processus de Lévy est à variation finie si et seulement si $\sigma = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \min(1, |x|) \Pi(dx) < \infty$. La question sur la variation du processus est importante surtout pour les problèmes de passage de barrières.

Rappelons aussi que, pour tout processus de Lévy de triplet (α, σ, Π) ,

- si $\alpha \geq 0$, $\Pi(-\infty, 0) = 0$ et $\int_0^\infty \min(1, x)\Pi(dx) < \infty$, alors X est croissant presque sûrement et est appelé *subordonateur*,
- si $\Pi(0, +\infty) = 0$ (resp. $\Pi(-\infty, 0) = 0$), alors X est un processus de Lévy sans saut positif (resp. processus de Lévy sans saut négatif), ou *processus de Lévy spectralement négatifs* (resp. *processus de Lévy spectralement positifs*).

Pour la suite, on s'intéresse aux processus de Lévy spectralement négatifs. Afin d'éviter les trivialités, on ignore les processus de Lévy décroissants.

1.1.4 Propriétés probabilistes

On rappelle qu'un processus stochastique est *markovien* si, pour tout $s, t \geq 0$ et pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in B \mid X_t).$$

Ceci veut dire que le comportement futur du processus, étant donné toute l'information du passé, ne dépend que du présent. Une première propriété est que tout processus de Lévy est un processus markovien. On a aussi cette relation très importante qui porte le nom de *l'homogénéité spatiale*,

$$(X, \mathbb{P}_x) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X + x, \mathbb{P}).$$

Rappelons qu'un temps d'arrêt τ , est une variable aléatoire à valeur dans $[0, \infty)$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On définit aussi la tribu \mathcal{F}_τ par

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Tout processus de Lévy est un processus de *Markov fort* et on a le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit X un processus de Lévy et τ un temps d'arrêt. Définissons le processus $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t; t \geq 0\}$ par*

$$\tilde{X}_t = X_{t+\tau} - X_\tau, \quad t \geq 0.$$

Alors, sur $\{\tau < \infty\}$, le processus \tilde{X} est un processus de Lévy, indépendant de \mathcal{F}_τ et a la même distribution que X .

En particulier, on a la propriété de Markov forte qui est un outil fondamental dans la preuve des identités de fluctuation :

$$\mathbb{P}(X_{\tau+s} \in B \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}(X_{\tau+s} \in B \mid X_\tau).$$

Rappelons aussi que si W_1 est une variable aléatoire et si W_2 est une autre variable aléatoire indépendante de $\sigma(W_1)$, alors pour toute fonction f borélienne, on a

$$\mathbb{E} \left[f(W_1, W_2) \middle| \sigma(W_1) \right] = \mathbb{E} [f(w, W_2)] \Big|_{w=W_1} \quad (1.3)$$

1.2 Processus de Lévy sans saut positif et fonctions d'échelle

1.2.1 Exposant de Laplace et inverse à droite

Pour un SNLP avec triplet caractéristique (γ, σ, Π) , son exposant de Laplace est défini par $\psi(\theta) := \ln \mathbb{E}[e^{\theta X_1}] = -\Psi(-i\theta)$ et est donné par :

$$\psi(\theta) = \gamma\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{\theta x} - 1 - \theta x \mathbf{1}_{(-1,0)}(x)) \Pi(dx).$$

Cette fonction ψ est infiniment différentiable, strictement convexe et est telle que $\psi(0) = 0, \lim_{\theta \rightarrow \infty} \psi(\theta) = +\infty$ et $\psi'(0) \in [-\infty, \infty)$. Ceci permet de définir son

inverse à droite $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ donné par $\Phi(q) = \sup \{\theta \geq 0 : \psi(\theta) = q\}$, tel que

$$\psi(\Phi(q)) = q, \quad q \geq 0.$$

1.2.2 Les fonctions d'échelle

Les fonctions d'échelle jouent un rôle central dans la théorie des fluctuations des processus de Lévy spectralement négatifs. On définit une famille de fonctions $\{W^{(q)}, q \geq 0\}$, $W^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ telle que, pour tout $q \geq 0$, $W^{(q)}(x) = 0$ si $x < 0$, sinon $W^{(q)}$ est l'unique fonction positive, continue et strictement croissante dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\theta) - q}, \quad \theta > \Phi(q). \quad (1.4)$$

Si on note $d := \gamma + \int_0^1 x \Pi(dx)$, alors la valeur initiale de $W^{(q)}$ est donnée par

$$W^{(q)}(0) := \lim_{x \downarrow 0} W^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{si } \sigma = 0 \text{ et } \int_0^1 x \Pi(dx) < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a aussi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = \frac{1}{\psi'(0+)} \text{ si } \psi'(0+) > 0,$$

où $W(x) := W^{(0)}(x)$ est simplement appelé fonction d'échelle. Il est toujours possible de passer d'une q -fonction d'échelle $W^{(q)}(x)$ à une fonction d'échelle $W(x)$ via un changement de mesure.

Lemme 1. *Pour tout $q \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(c) < \infty$, on a*

$$W^{(q)}(x) = e^{cx} W_c^{(q-\psi(c))}(x), \quad x \geq 0,$$

où $W_c^{(q)}$ est la q -fonction d'échelle sous la mesure \mathbb{P}^c et qui est telle que

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^c}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{cX_t - \psi(c)t}.$$

L'indice c fait référence à la nouvelle mesure et X est toujours un SNLP sous cette nouvelle mesure. En particulier pour $c = \Phi(q)$ on a

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W_{\Phi(q)}(x) \quad (1.5)$$

et son exposant de Laplace est donné par $\theta \mapsto \psi(\Phi(q) + \theta) - q$. Il vient donc que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W_{\Phi(q)}(x) = \frac{1}{\psi'(\Phi(q))}. \quad (1.6)$$

On remarquera que cette limite est infinie si on a $q = \psi'(0+) = 0$. Rappelons aussi qu'il existe un lien entre la variation du processus et sa fonction d'échelle $W^{(q)}$ évaluée en 0.

Lemme 2. *Pour tout $q \geq 0$, $W^{(q)}(0) = 0$ si et seulement si X est à variation infinie.*

1.3 Identités de fluctuation

Il existe une riche théorie sur les identités de fluctuation et plusieurs des résultats qui suivent peuvent être retrouvés dans (Kyprianou, 2014).

À partir des fonctions d'échelle définies précédemment, d'autres fonctions auxiliaires sont apparues par la suite. Pour $q, \theta \geq 0$, on définit

$$Z^{(q)}(x, \theta) := e^{\theta x} \left(1 - \psi_q(\theta) \int_0^x e^{-\theta y} W^{(q)}(y) dy \right), \quad x \geq 0 \quad (1.7)$$

avec $\psi_q(\theta) = \psi(\theta) - q$ et $Z^{(q)}(x, \theta) = e^{\theta x}$ si $x \leq 0$. En particulier $Z^{(q)}(x, 0) = Z^{(q)}(x) := 1 + q \int_0^x W^{(q)}(y) dy$. Notons que cette nouvelle fonction $Z^{(q)}(x, \theta)$ est réapparue avec (Albrecher *et al.*, 2016).

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit les temps de premier passage, au niveau de la barrière a , par

$$\begin{aligned} \tau_a^- &:= \inf\{t \geq 0 : X_t < a\}, \\ \tau_a^+ &:= \inf\{t \geq 0 : X_t > a\}, \end{aligned}$$

avec la convention que $\inf \emptyset = \infty$.

On rappelle ces deux identités pour des observations en temps continu. Soit $q, \theta \geq 0$. Pour $x \leq a$, on a

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_a^+}; \tau_a^+ < \tau_0^- \right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \quad (1.8)$$

$$\mathbb{E}_x [e^{-q\tau_0^- + \theta X_{\tau_0^-}}; \tau_0^- < \tau_a^+] = Z^{(q)}(x, \theta) - W^{(q)}(x) \frac{Z^{(q)}(a, \theta)}{W^{(q)}(a)}, \quad (1.9)$$

où $\mathbb{E}_x[X; A] := \mathbb{E}_x[X \mathbf{1}_A]$ pour une variable aléatoire X et un événement A .

Remarque 1. *Quand un SNLP, partant de $x > a$, entre dans $(-\infty, a)$, il peut le faire soit de façon continue ($X_{\tau_a^-} = a$), soit par saut ($X_{\tau_a^-} < a$), sur l'événement $\{\tau_a^- < \infty\}$. Le seul cas où on peut avoir $X_{\tau_a^-} = a$ c'est quand le processus est à variation infinie. Cependant un SNLP rampe toujours vers le haut et donc franchit les barrières supérieures de façon continue. Ainsi on a $X_{\tau_a^+} = a$ sur l'événement $\{\tau_a^+ < \infty\}$, i.e pour $x \leq a$, $\mathbb{P}_x(X_{\tau_a^+} = a, \tau_a^+ < \infty) = 1$.*

Dans le lemme qui suit, on rappelle deux identités très utiles et qui interviendront juste après.

Lemme 3 (Albrecher *et al.* (2016)). *Soit $a, \theta, p, q \geq 0$, on a :*

$$(p - q) \int_0^a W^{(p)}(a - x) W^{(q)}(x) dx = W^{(p)}(a) - W^{(q)}(a), \quad (1.10)$$

$$(p - q) \int_0^a W^{(p)}(a - x) Z^{(q)}(x, \theta) dx = Z^{(p)}(a, \theta) - Z^{(q)}(a, \theta). \quad (1.11)$$

Pour prouver ce lemme il suffira de prendre la transformée de Laplace des deux côtés. Comme (Loeffen *et al.*, 2014), on introduit les fonctions suivantes : Pour

$p, q \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x) &:= W^{(p+q)}(x) - q \int_0^a W^{(p+q)}(x-z)W^{(p)}(z)dz, \\ &= W^{(p)}(x) + q \int_a^x W^{(p+q)}(x-z)W^{(p)}(z)dz,\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_a^{(p,q)}(x, \theta) &:= Z^{(p+q)}(x, \theta) - q \int_0^a W^{(p+q)}(x-z)Z^{(p)}(z, \theta)dz, \\ &= Z^{(p)}(x, \theta) + q \int_a^x W^{(p+q)}(x-z)Z^{(p)}(z, \theta)dz.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Dans (Loeffen *et al.*, 2014), (1.13) est défini pour $\theta = 0$. Une autre définition est apparue avec (Palmowski *et al.*, 2020), avec un p et q particulier, la définition que nous proposons est donc plus générale. Les égalités (1.12) et (1.13) sont obtenues respectivement à l'aide de (1.10) et (1.11). On remarquera aussi que $\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x) = W^{(p)}(x)$ si $x \leq a$, en particulier $\mathcal{W}_a^{(p,q)}(a) = W^{(p)}(a)$. Il en est de même que $\mathcal{Z}_a^{(p,q)}(x, \theta) = Z^{(p)}(x, \theta)$ si $x \leq a$ et que $\mathcal{Z}_a^{(p,q)}(a) = Z^{(p)}(a, \theta)$.

Une combinaison du Lemme 2.1 de (Loeffen *et al.*, 2014) et des fonctions définies dans (1.12) et (1.13) permettent d'obtenir le lemme technique suivant.

Lemme 4. *Soit $p, q, \theta \geq 0$. Pour $a \leq b$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[e^{-p\tau_a^-} W^{(q)}(X_{\tau_a^-} - y); \tau_a^- < \tau_b^+ \right] \\ = \mathcal{W}_{a-y}^{(q,p-q)}(x-y) - W^{(p)}(x-a) \frac{\mathcal{W}_{a-y}^{(q,p-q)}(b-y)}{W^{(p)}(b-a)},\end{aligned}\quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[e^{-p\tau_a^-} Z^{(q)}(X_{\tau_a^-} - y, \theta); \tau_a^- < \tau_b^+ \right] \\ = \mathcal{Z}_{a-y}^{(q,p-q)}(x-y, \theta) - W^{(p)}(x-a) \frac{\mathcal{Z}_{a-y}^{(q,p-q)}(b-y, \theta)}{W^{(p)}(b-a)},\end{aligned}\quad (1.15)$$

et

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_x \left[e^{-p\tau_b^-} \mathcal{W}_a^{(p,q)}(X_{\tau_b^-}); \tau_b^- < \tau_c^+ \right] \\
&= \mathcal{W}_a^{(p,q)}(x) - q \int_b^x W^{(q)}(x-z) \mathcal{W}_a^{(p,q)}(z) dz \\
& - \frac{W^{(p)}(x-b)}{W^{(p)}(c-b)} \left(\mathcal{W}_a^{(p,q)}(c) - q \int_b^c W^{(q)}(c-z) \mathcal{W}_a^{(p,q)}(z) dz \right). \quad (1.16)
\end{aligned}$$

CHAPITRE II

PROBLÈME DE PREMIER PASSAGE DANS UN INTERVALLE POUR UN SNLP OBSERVÉ À DES INSTANTS DE POISSON

Dans ce chapitre, on présente les principaux résultats obtenus. Le problème se pose de la manière suivante : on considère un SNLP, $X = \{X_t, t \geq 0\}$, qui est observé à des instants aléatoires de sauts d'un processus de Poisson, de paramètre $\lambda > 0$, qui est indépendant de X . Plus précisément, les instants d'observations aléatoires sont séparés par des variables aléatoires exponentielles $e_\lambda^{(i)}$ de moyenne $1/\lambda$, où $\{e_\lambda^{(i)}, i \geq 1\}$ est indépendant de X . Avec cette paramétrisation on remarquera qu'en faisant tendre λ vers l'infini, on fait tendre le temps d'inter-arrivées vers 0 et donc vers une observation continue du processus. Soit $\{T_i^\lambda, i \geq 1\}$ les instants de sauts du processus de Poisson. Précisons ici que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est la filtration complète engendrée par le processus X et les instants de sauts $\{T_1^\lambda, T_2^\lambda, \dots\}$, alors que $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ désigne la filtration engendrée par X . On définit, pour $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

$$T_{(a,b)} := \min\{T_i^\lambda > 0 : X_{T_i^\lambda} \in (a, b)\},$$

qui est le premier instant de Poisson où l'on observe le processus X dans l'intervalle (a, b) . Avec cette définition, si $a = -\infty$ et $b = 0$ on retrouve la définition du T_0^- de (Albrecher *et al.*, 2016). Dans la suite, on s'intéresse à la loi conjointe de $(T_{(a,b)}, X_{T_{(a,b)}})$. Expliquons tout d'abord notre problème de premier passage à

léger la notation, on a omis le λ . L'objectif principal est d'observer le processus dans l'intervalle $(0, b)$ à un instant aléatoire de Poisson avant qu'il ne quitte l'intervalle $(-a, c)$. Tant qu'on n'a pas observé le processus dans $(0, b)$ à un instant de Poisson et qu'on n'a pas franchi une des barrières $-a$ et c , on le laisse évoluer. Pour la situation de la Figure 2.1, à l'instant T_1 , la trajectoire est observée en dehors de la région $(0, b)$ sans être sortie de la région $(-a, c)$. À l'instant T_2 , la trajectoire n'est toujours pas revenue dans l'intervalle $(0, b)$. Entre les instants T_2 et T_3 , le processus est repassé dans la région $(0, b)$ mais n'y était plus à l'instant T_3 . Les choses peuvent bien continuer ainsi sans qu'on observe le processus dans $(0, b)$. Avec la trajectoire que nous avons dans cette figure, T_4 est le premier instant aléatoire de Poisson où l'on a observé le processus dans $(0, b)$ sans avoir franchi les barrières $-a$ et c . Si T_4 était venu plus tard, disons à la place de T_5 , alors la trajectoire aurait déjà franchi la barrière c et entré dans la région $[c, \infty)$. Par exemple, si elle n'avait pas franchi c , on peut voir qu'elle a touché la barrière $-a$ en venant du haut. Alors si le processus est à variation infinie, cela veut dire qu'on a franchi instantanément $-a$. Par contre si le processus est à variation finie, cela prendra un temps strictement positif avant de franchir $-a$. Alors la trajectoire peut retourner dans $(-a, c)$ et on pourra attendre la prochaine observation de Poisson.

2.1 Énoncés des résultats principaux

Dans cette section, on présente les nouveaux résultats obtenus dans ce mémoire. On fait aussi le lien avec d'autres identités déjà présentes dans la littérature. Voici le résultat principal de ce mémoire.

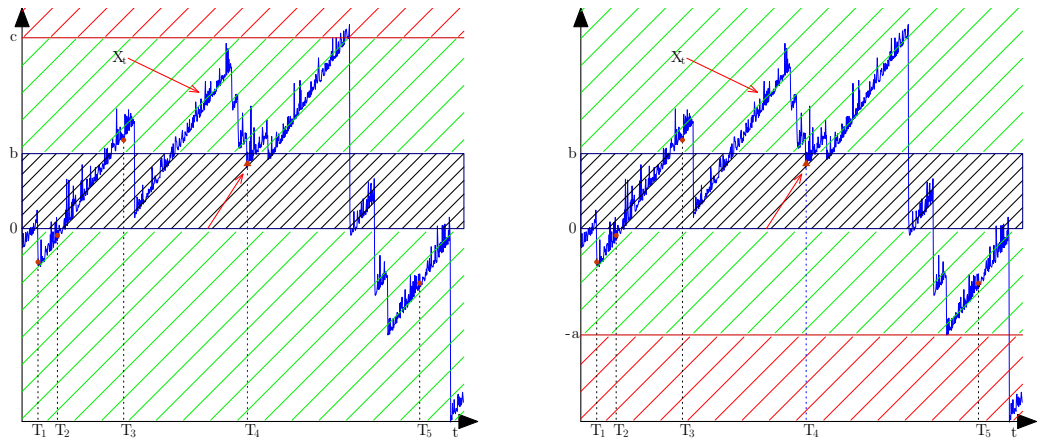
Théorème 4. *Pour $0 \leq b \leq c, a \geq 0, q, \theta \geq 0$ et $x \leq c$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right] \\ = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta) \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

où

$$\begin{aligned} L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) &:= e^{\theta b} Z^{(q)}(x-b, \theta) - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta), \\ \mathcal{N}_{b,a}^{(q,\lambda)}(x) &:= \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(x) - \lambda \int_b^x W^{(q)}(x-z) \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(z) dz. \end{aligned}$$

À partir du Théorème 4, il est possible d'obtenir d'autres identités. Remarquons que dans la Figure 2.1, il est possible d'envoyer la barrière du bas vers $-\infty$. Ceci aura pour conséquence de supprimer la restriction sur le fait que si le processus entre dans $(-\infty, -a)$ on arrête tout. Ainsi, le processus pourra évoluer dans toute la région $(-\infty, c)$. Il est aussi possible de conserver la barrière d'en bas et de supprimer celle d'en haut : il suffit d'envoyer la barrière du haut vers l'infini. Dans ce cas, le processus pourra évoluer dans toute la région $(-a, \infty)$. Ces deux cas particuliers sont illustrés dans la Figure 2.2. Remarquons aussi qu'il est possible de supprimer les deux barrières. Pour cela, il suffit d'envoyer simultanément la barrière d'en bas vers $-\infty$ et celle du haut vers ∞ . Ainsi, le processus pourra évoluer sur tous les réels. Pour plus d'illustrations, voir la Figure 2.3.



(a) Cas avec seulement une barrière
supérieure

(b) Cas avec seulement une barrière
inférieure

Figure 2.2: Cas avec seulement une barrière

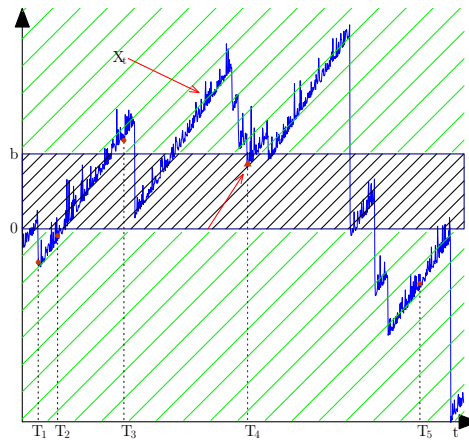


Figure 2.3: Cas sans barrière

À partir du Théorème 4, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 1. (i) Pour $0 \leq b \leq c$, $q, \theta \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_c^+ \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta) \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \Phi(q))}{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \Phi(q))} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

(ii) Pour $a, b \geq 0$, $q, \theta \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_a^- \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - M^{(q,\lambda)}(b, \theta) \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{H_a^{(q,\lambda)}(b)} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} M^{(q,\lambda)}(b, \theta) &:= \frac{\psi_q(\theta)}{\theta - \Phi(q)} [e^{(\theta - \Phi(q))b} - 1] - \lambda \int_0^b e^{-\Phi(q)y} Z^{(q+\lambda)}(y, \theta) dy, \\ H_a^{(q,\lambda)}(b) &:= 1 + \lambda \int_0^b e^{-\Phi(q)(y+a)} \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(y+a) dy. \end{aligned}$$

(iii) Pour $0 \leq b$, $q, \theta \geq 0$ et $x \leq b$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \infty \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - M^{(q,\lambda)}(b, \theta) \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \Phi(q))}{N^{(q,\lambda)}(b, \Phi(q))} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

où

$$N^{(q,\lambda)}(b, \Phi(q)) := \psi'(\Phi(q)) + \lambda \int_0^b e^{-\Phi(q)y} Z^{(q+\lambda)}(y, \Phi(q)) dy.$$

Corollaire 2. (i) Pour $c, a \geq 0$, $q, \theta \geq 0$ et $x \leq c$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \tau_a^- \wedge \tau_c^+ \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{-\theta a} L^{(q,\lambda)}(x+a, a; \theta) - e^{-\theta a} L^{(q,\lambda)}(c+a, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

(ii) Pour $c \geq 0, q, \theta \geq 0$ et $x \leq c$,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \tau_c^+ \right] = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[Z^{(q)}(x, \theta) - Z^{(q)}(c, \theta) \frac{Z^{(q)}(x, \Phi(q + \lambda))}{Z^{(q)}(c, \Phi(q + \lambda))} \right]. \quad (2.6)$$

(iii) Pour $q, \theta \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \infty \right] = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[Z^{(q)}(x, \theta) - \frac{\psi_q(\theta) [\Phi(q + \lambda) - \Phi(q)]}{\lambda(\theta - \Phi(q))} Z^{(q)}(x, \Phi(q + \lambda)) \right]. \quad (2.7)$$

Remarque 2. Bien que notre objectif principal était de généraliser le Théorème 3.1 dans (Albrecher et al., 2016), on a pu en même temps généraliser des résultats dans (Palmowski et al., 2020). En effet, les identités (2.2) et (2.4) correspondent respectivement à celles des Théorèmes 4.1 et 4.2 obtenus dans (Palmowski et al., 2020). L'identité (2.5) correspond au Théorème 1.2 dans (Baurdoux et al., 2016). Les identités (2.6) et (2.7) correspondent respectivement à (15) et (14) dans (Albrecher et al., 2016).

2.2 Résultats intermédiaires

Avant d'effectuer la preuve du Théorème 4 et celles des Corollaires 1 et 2, voici quelques résultats intermédiaires.

Lemme 5. Si $a \leq x \leq b$, $q, \theta \geq 0$ et e_λ une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ indépendante du processus X , alors on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qe_\lambda + \theta X_{e_\lambda}}; e_\lambda < \tau_a^- \wedge \tau_b^+ \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{\theta x} - e^{\theta a} Z^{(q+\lambda)}(x-a, \theta) + [e^{\theta a} Z^{(q+\lambda)}(b-a, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q+\lambda)}(x-a)}{W^{(q+\lambda)}(b-a)} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Démonstration. Remarquons que

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\lambda < \tau_a^- \wedge \tau_b^+\}} \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right] - \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\lambda > \tau_a^- \wedge \tau_b^+\}} \right].$$

En conditionnant sur la valeur de \mathbf{e}_λ , on montre que

$$\left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right] = \frac{\lambda e^{\theta x}}{\lambda - \psi_q(\theta)}. \quad (2.9)$$

On aura à supposer que θ est tel que $\psi_q(\theta) < \lambda$. Cependant il est mentionné dans (Albrecher *et al.*, 2016) que le résultat peut être prolongé de façon analytique pour tout $\theta \geq 0$.

Pour la deuxième espérance, en appliquant la propriété de Markov forte au temps $\tau_a^- \wedge \tau_b^+$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\lambda > \tau_a^- \wedge \tau_b^+\}} \right] &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_a^- \wedge \tau_b^+)} \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\lambda > \tau_a^- \wedge \tau_b^+\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_a^- \wedge \tau_b^+}} \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-(q+\lambda)(\tau_a^- \wedge \tau_b^+)} \mathbb{E}_{X_{\tau_a^- \wedge \tau_b^+}} \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-(q+\lambda)\tau_a^-} \mathbf{1}_{\{\tau_a^- < \tau_b^+\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_a^-}} \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right] \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-(q+\lambda)\tau_b^+} \mathbf{1}_{\{\tau_b^+ < \tau_a^-\}} \right] \mathbb{E}_b \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (2.9), la propriété d'homogénéité spatiale et les identités (1.9) et (1.8) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\lambda > \tau_a^- \wedge \tau_b^+\}} \right] &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left\{ e^{\theta a} \left(Z^{(q+\lambda)}(x - a, \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{W^{(q+\lambda)}(x - a)}{W^{(q+\lambda)}(b - a)} Z^{(q+\lambda)}(b - a, \theta) \right) + e^{\theta b} \frac{W^{(q+\lambda)}(x - a)}{W^{(q+\lambda)}(b - a)} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Comme on peut le remarquer, il est possible d'obtenir facilement deux autres identités avec ce résultat en faisant tendre l'une ou l'autre des barrières vers l'infini.

Le lemme suivant interviendra dans la preuve des corollaires.

Lemme 6. Pour $p, q, \theta \geq 0$ et $a, b, x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} Z^{(p+q)}(x, \Phi(p)), \quad (2.10)$$

$$\frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_b^{(p+q,-q)}(x, \Phi(p)), \quad (2.11)$$

$$e^{-\theta a} \mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x+a, \theta) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{L^{(p,q)}(x, a; \theta)}{W^{(p)}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} M^{(p,q)}(a, \theta). \quad (2.13)$$

La preuve de ce lemme est en annexe.

2.3 Preuves des résultats principaux

Dans cette section, on va prouver les résultats principaux que nous avons obtenus. La Figure 2.1 sera utile pour comprendre les étapes dans la preuve du théorème principal.

2.3.1 Preuve du Théorème 4

Démonstration. On fait la preuve de ce théorème dans le cas où le processus X est à variation finie. Fixons $0 \leq b \leq c$, $a \geq 0$, $q, \theta \geq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, définissons

$$f(x, \theta) = \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right].$$

Si $x < -a$ ou $x > c$, $f(x, \theta) = 0$, car on aura déjà franchi une des barrières à $t = 0$.

Si $x \in [-a, 0)$, alors X est dans une région dans laquelle il peut bien évoluer. Mais ce qui nous intéresse c'est la région $(0, b)$, c'est là où on veut l'observer aux instants de Poisson. Donc on va utiliser la propriété forte de Markov pour régénérer le processus en 0 pourvu que $\tau_0^+ < \tau_{-a}^-$.

En remarquant que $\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^-\} \subset \{\tau_0^+ < \tau_{-a}^-\}$ et en utilisant la propriété forte de Markov au temps τ_0^+ , on a

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+, \tau_0^+ < \tau_{-a}^- \mid \mathcal{F}_{\tau_0^+}^X \right] \right], \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^+} \mathbf{1}_{\{\tau_0^+ < \tau_{-a}^-\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_0^+}} \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right] \right], \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^+} \mathbf{1}_{\{\tau_0^+ < \tau_{-a}^-\}} \right] \mathbb{E} \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right]. \end{aligned}$$

On remarquera qu'à la deuxième égalité, que $X_{\tau_0^+}$ n'est pas aléatoire et vaut 0, c'est pour ça qu'on a pu sortir l'espérance qui est à l'intérieur.

D'où, si $x \in [-a, 0)$,

$$f(x, \theta) = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^+}; \tau_0^+ < \tau_{-a}^- \right] f(0, \theta) = \frac{W^{(q)}(x+a)}{W^{(q)}(a)} f(0, \theta), \quad (2.14)$$

où la deuxième égalité est obtenue en utilisant (1.8) avec la propriété d'homogénéité spatiale. Si $x < -a$, alors $W^{(q)}(x+a) = 0$, donc (2.14) reste vrai pour tout $x < 0$.

Si $x \in [0, b)$, il y a trois possibilités :

- (1) soit l'exponentielle sonne et que X n'est toujours pas sorti de $[0, b)$;
- (2) soit X sort par dessous de 0 avant que l'exponentielle ne sonne et sans franchir b ;
- (3) soit X sort par dessus de b avant que l'exponentielle ne sonne et sans franchir 0.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+, \mathbf{e}_\lambda < \tau_b^+ \wedge \tau_0^- \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+, \tau_b^+ < \mathbf{e}_\lambda \wedge \tau_0^- \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+, \tau_0^- < \mathbf{e}_\lambda \wedge \tau_b^+ \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans la première espérance de (2.15), si $\mathbf{e}_\lambda < \tau_b^+ \wedge \tau_0^-$, alors $T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+$ devient certain et $T_{(0,b)} = \mathbf{e}_\lambda$. Pour les deux autres espérances de (2.15), étant donné que X sort de $[0, b)$, on va appliquer la propriété forte de Markov pour régénérer le processus à nouveau. Par régénérer, on entendra la création d'une nouvelle copie du processus qui a encore les mêmes propriétés. Ainsi on a,

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}}; \mathbf{e}_\lambda < \tau_b^+ \wedge \tau_0^- \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^+} \mathbf{1}_{\{\tau_b^+ < \tau_0^-\}} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\tau_b^+ < \mathbf{e}_\lambda\}} \left| \mathcal{F}_{\tau_b^+}^X \right. \right] f(b, \theta) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, \theta) \mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \mathbf{e}_\lambda\}} \left| \mathcal{F}_{\tau_0^-}^X \right. \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

Si on a pu sortir $f(X_{\tau_b^+}, \theta)$ de la deuxième espérance, on ne peut pas le faire pour $f(X_{\tau_0^-}, \theta)$ dans la troisième espérance car $X_{\tau_0^-}$ est aléatoire. Mais du fait que $X_{\tau_0^-} < 0$, et en utilisant (1.3) et (2.14), il vient

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\mathbf{e}_\lambda + \theta X_{\mathbf{e}_\lambda}}; \mathbf{e}_\lambda < \tau_b^+ \wedge \tau_0^- \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-(q+\lambda)\tau_b^+}; \tau_b^+ < \tau_0^- \right] f(b, \theta) \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-(q+\lambda)\tau_0^-} W^{(q)}(X_{\tau_0^-} + a); \tau_0^- < \tau_b^+ \right] \frac{f(0, \theta)}{W^{(q)}(a)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

En utilisant (2.8) pour la première espérance de (2.16), (1.8) pour la deuxième et (1.14) pour la dernière, on a

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{\theta x} - Z^{(q+\lambda)}(x, \theta) + [Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q+\lambda)}(x)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \\ &\quad + \frac{W^{(q+\lambda)}(x)}{W^{(q+\lambda)}(b)} f(b, \theta) + \left[\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(x+a) - W^{(q+\lambda)}(x) \frac{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \frac{f(0, \theta)}{W^{(q)}(a)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On remarquera que l'égalité (2.17) est vraie pour tout $x < 0$ aussi, et donc pour tout $x < b$.

Pour $x = 0$, et en remarquant que $Z^{(q+\lambda)}(0, \theta) = 1$ dans (1.7), on a

$$\begin{aligned} f(0, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q+\lambda)}(0)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \\ &\quad + \frac{W^{(q+\lambda)}(0)}{W^{(q+\lambda)}(b)} f(b, \theta) + \left[\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(a) - W^{(q+\lambda)}(0) \frac{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \frac{f(0, \theta)}{W^{(q)}(a)}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(a) = W^{(q)}(a)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(0, \theta) \left[\frac{W^{(q+\lambda)}(0)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \frac{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)}{W^{(q)}(a)} \right] &= \\ \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q+\lambda)}(0)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] &+ \frac{W^{(q+\lambda)}(0)}{W^{(q+\lambda)}(b)} f(b, \theta). \end{aligned}$$

Comme X est à variation finie, alors $W^{(q+\lambda)}(0) > 0$ (Lemme 2). On a alors

$$f(0, \theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q)}(a)}{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)} \right] + f(b, \theta) \frac{W^{(q)}(a)}{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)}. \quad (2.18)$$

En combinant (2.18) et (2.17) on a

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{\theta x} - Z^{(q+\lambda)}(x, \theta) + [Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}] \frac{W^{(q+\lambda)}(x)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \\ &\quad + \frac{W^{(q+\lambda)}(x)}{W^{(q+\lambda)}(b)} f(b, \theta) + \left[\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(x+a) - W^{(q+\lambda)}(x) \frac{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)}{W^{(q+\lambda)}(b)} \right] \\ &\quad \times \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[\frac{Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}}{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)} + \frac{f(b, \theta)}{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)} \right]. \end{aligned}$$

Après un calcul direct, on obtient pour $x < b$

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} [e^{\theta x} - Z^{(q+\lambda)}(x, \theta)] \\ &\quad + \frac{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(b+a)} \left[\frac{\lambda [Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}]}{\lambda - \psi_q(\theta)} + f(b, \theta) \right]. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Si $x \in [b, c)$, alors le processus peut revenir dans $(0, b)$ de deux manières. La première est que X saute vers le bas et atterrisse directement dans l'intervalle

$[-a, 0]$ (s'il descend sous $-a$, alors l'indicatrice sera nulle) pour revenir ensuite dans $(0, b)$ en rampant vers le haut. La deuxième est que X saute directement dans $(0, b)$; dans ce cas, le processus ne peut ramper vers le bas car il est à variation finie. Ainsi, en appliquant la propriété de Markov forte au temps τ_b^- , on a

$$f(x, \theta) = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} f(X_{\tau_b^-}, \theta); \tau_b^- < \tau_c^+ \right].$$

Comme on sait que $X_{\tau_b^-} < b$ (variation finie), on peut utiliser (2.19) pour avoir

$$\begin{aligned} f(x, \theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} & \left\{ \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^- + \theta X_{\tau_b^-}}; \tau_b^- < \tau_c^+ \right] \right. \\ & - \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} Z^{(q+\lambda)}(X_{\tau_b^-}, \theta); \tau_b^- < \tau_c^+ \right] \\ & + \frac{\left[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b} + \frac{\lambda - \psi_q(\theta)}{\lambda} f(b, \theta) \right]}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b+a)} \\ & \left. \times \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(X_{\tau_b^-} + a); \tau_b^- < \tau_c^+ \right] \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de l'homogénéité spatiale de X , on a

$$\begin{aligned} f(x, \theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} & \left\{ \mathbb{E}_{x-b} \left[e^{-q\tau_0^- + \theta(X_{\tau_0^-} + b)}; \tau_0^- < \tau_{c-b}^+ \right] \right. \\ & - \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} Z^{(q+\lambda)}(X_{\tau_b^-}, \theta); \tau_b^- < \tau_c^+ \right] \\ & + \frac{Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b} + \frac{\lambda - \psi_q(\theta)}{\lambda} f(b, \theta)}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b+a)} \\ & \left. \times \mathbb{E}_{x+a} \left[e^{-q\tau_{b+a}^-} \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(X_{\tau_{b+a}^-}); \tau_{b+a}^- < \tau_{c+a}^+ \right] \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (1.9), (1.15) et (1.16) on obtient

$$\begin{aligned}
f(x, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left\{ e^{\theta b} Z^{(q)}(x - b, \theta) - e^{\theta b} W^{(q)}(x - b) \frac{Z^{(q)}(c - b, \theta)}{W^{(q)}(c - b)} \right. \\
&\quad - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta) + W^{(q)}(x - b) \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta)}{W^{(q)}(c - b)} \\
&\quad + \left. \frac{[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b} + \frac{\lambda - \psi_q(\theta)}{\lambda} f(b, \theta)]}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b + a)} \right. \\
&\quad \times \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(x + a) - \lambda \int_{b+a}^{x+a} W^{(q)}(x + a - z) \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z) dz \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{W^{(q)}(x - b)}{W^{(q)}(c - b)} \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c + a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c + a - z) \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z) dz \right] \right] \right\}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

On pose $x = b$ pour isoler $f(b, \theta)$. Si $x = b$, alors

$$\begin{aligned}
f(b, \theta) &= \frac{f(b, \theta)}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b + a)} \left\{ \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b + a) - \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(c - b)} \right. \\
&\quad \times \left. \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c + a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c + a - z) \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z) dz \right] \right\} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left\{ e^{\theta b} Z^{(q)}(0, \theta) - e^{\theta b} W^{(q)}(0) \frac{Z^{(q)}(c - b, \theta)}{W^{(q)}(c - b)} - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(b, \theta) \right. \\
&\quad + W^{(q)}(0) \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta)}{W^{(q)}(c - b)} + \frac{[Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}]}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b + a)} \\
&\quad \times \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b + a) - \lambda \int_{b+a}^{b+a} W^{(q)}(b + a - z) \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z) dz \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(c - b)} \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c + a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c + a - z) \mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z) dz \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(b, \theta) = Z^{(q+\lambda)}(b, \theta)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{f(b, \theta)W^{(q)}(0)}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b+a)W^{(q)}(c-b)} \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c+a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c+a-z)\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z)dz \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left\{ \frac{W^{(q)}(0)(\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta) - e^{\theta b})}{W^{(q)}(c-b)} - \frac{Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) - e^{\theta b}}{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b+a)} \right. \\ & \left. \times \frac{W^{(q)}(0)}{W^{(q)}(c-b)} \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c+a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c+a-z)\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z)dz \right] \right\}. \end{aligned}$$

Comme X est à variation finie, on a

$$\begin{aligned} f(b, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{\theta b} - Z^{(q+\lambda)}(b, \theta) \right. \\ & \left. + \left(\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta) - e^{\theta b} Z^{(q)}(c-b, \theta) \right) \frac{\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(b+a)}{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(c+a)} \right]. \quad (2.21) \end{aligned}$$

En combinant (2.20) et (2.21), on a

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left\{ e^{\theta b} Z^{(q)}(x-b, \theta) - e^{\theta b} W^{(q)}(x-b) \frac{Z^{(q)}(c-b, \theta)}{W^{(q)}(c-b)} \right. \\ & \left. - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta) + W^{(q)}(x-b) \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta)}{W^{(q)}(c-b)} \right] \\ & + \left[\frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta) - e^{\theta b} Z^{(q)}(c-b, \theta)}{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(c+a)} \right] \\ & \times \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(x+a) - \lambda \int_{b+a}^{x+a} W^{(q)}(x+a-z)\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z)dz \right. \\ & \left. - \frac{W^{(q)}(x-b)}{W^{(q)}(c-b)} \left[\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(c+a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c+a-z)\mathcal{W}_a^{(q, \lambda)}(z)dz \right] \right\}, \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{\theta b} Z^{(q)}(x-b, \theta) - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta) \right. \\ & \left. - \left(e^{\theta b} Z^{(q)}(c-b, \theta) - \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \theta) \right) \frac{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(c+a)} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q, \lambda)}(x, b; \theta) - L^{(q, \lambda)}(c, b; \theta) \frac{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a, a}^{(q, \lambda)}(c+a)} \right]. \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de (2.1) quand X est à variation finie. \square

Dans cette première partie de la preuve, on a supposé que le processus est à variation finie pour isoler $f(0, \theta)$ et $f(b, \theta)$. On sait que tout processus à variation infinie est limite d'une suite de processus à variation finie. Ainsi on peut utiliser la même approche que (Loeffen *et al.*, 2014) ou (Guérin et Renaud, 2016) pour compléter la preuve. Une approche différente est utilisée dans (Albrecher *et al.*, 2016) et (Palmowski *et al.*, 2020). Leur approche consiste à utiliser la notion de mesure potentielle pour calculer $f(0, \theta)$. Cependant ils ont utilisé quelques lemmes intermédiaires.

2.3.2 Suite de la preuve du Théorème 4

Nous utilisons les mêmes arguments que (Loeffen *et al.*, 2014) et (Guérin et Renaud, 2016) pour étendre (2.1) vers un SNLP à variation infinie. La preuve est basée sur un argument de limite. Soit X un SNLP à variation infinie. Il est connu, de [(Bertoin, 1996), page 210], qu'il existe une suite de SNLPs à variation finie $(X^n)_{n \geq 1}$, telle que, pour $t > 0$,

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sup_{s \in [0, t]} |X_s^n - X_s| = 0$$

presque sûrement. En d'autres mots, $(X^n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers X , sur tout intervalle de temps fermé et borné. Alors, pour tout $n \geq 1$, on désignera par ψ_n et Φ_n l'exposant de Laplace et son inverse associés à $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$. On désigne aussi par $W_n^{(q)}$, $Z_n^{(q)}$, $\mathcal{W}_{a,n}^{(q,\lambda)}$, $\mathcal{Z}_{b,n}^{(q+\lambda,-\lambda)}$ les fonctions d'échelle correspondantes.

Pour $n \geq 1$, on définit aussi

$$\begin{aligned} \tau_{a,n}^- &:= \inf\{t \geq 0 : X_t^n < a\}, \\ \tau_{c,n}^+ &:= \inf\{t \geq 0 : X_t^n > c\}, \\ T_{(0,b),n} &:= \min\{T_i^\lambda > 0 : X_{T_i^\lambda}^n \in (0, b)\}. \end{aligned}$$

Comme nous avons déjà prouvé le Théorème 4 dans le cas à variation finie, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n; T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + q - \psi_n(\theta)} \left[L_n^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - L_n^{(q,\lambda)}(c, b; \theta) \frac{\mathcal{N}_{b+a,a,n}^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a,n}^{(q,\lambda)}(c+a)} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} L_n^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) &:= e^{\theta b} Z_n^{(q)}(x-b, \theta) - \mathcal{Z}_{b,n}^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta), \\ \mathcal{N}_{b,a,n}^{(q,\lambda)}(x) &:= \mathcal{W}_{a,n}^{(q,\lambda)}(x) - \lambda \int_b^x W_n^{(q)}(x-z) \mathcal{W}_{a,n}^{(q,\lambda)}(z) dz. \end{aligned}$$

On va donc prendre la limite des deux côtés de (2.22).

On s'intéresse d'abord à la convergence du terme de droite. Si X^n converge uniformément vers X sur tout intervalle de temps compact, il en découle la convergence des transformées de Laplace des variables aléatoires. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\theta) = \psi(\theta), \quad \text{pour tout } \theta.$$

Ceci combiné avec (1.4), impliquent que la transformée de Laplace de $W_n^{(q)}$ converge vers celle de $W^{(q)}$ c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n^{(q)}(x) = W^{(q)}(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Puisque la fonction $x \rightarrow W_n^{(q)}(x)$ est continue, alors elle atteint ses maxima sur tout compact. Donc, en utilisant (1.7) et le théorème de convergence dominée, on a aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^{(q)}(x, \theta) = Z^{(q)}(x, \theta), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

De même on obtient également que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{a,n}^{(q,\lambda)}(x) = \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(x)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{b,n}^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta) = \mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \theta).$$

On en conclut que $L_n^{(q,\lambda)}$ et $\mathcal{N}_{b,a,n}^{(q,\lambda)}$, convergent respectivement vers $L^{(q,\lambda)}$ et $\mathcal{N}_{b,a}^{(q,\lambda)}$, quand n tend vers l'infini et par conséquent on a aussi la convergence du terme de droite de (2.22) vers celui de (2.1).

On s'intéresse maintenant à la partie de gauche. La convergence de $\tau_{-a,n}^-$ (resp $\tau_{c,n}^+$) vers τ_{-a}^- (resp τ_c^+) a été prouvée par (Loeffen *et al.*, 2014). Fixons $t > 0$. À partir de la convergence uniforme on a pour $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon) \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N(\epsilon)$, on a $\sup_{s \in [0,t]} |X_s^n - X_s| < \epsilon$. Donc, pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$T_{(-\epsilon, b+\epsilon)} \leq T_{(0,b)} \leq T_{(\epsilon, b-\epsilon)}$$

et

$$T_{(-\epsilon, b+\epsilon)} \wedge t \leq T_{(0,b),n} \wedge t \leq T_{(\epsilon, b-\epsilon)} \wedge t, \quad (2.23)$$

pour n suffisamment grand.

Pour s'en convaincre, prenons par exemple l'inégalité de gauche dans (2.23). Pour tout $T_i^\lambda \leq t$, si $X_{T_i^\lambda}^n \in (0, b)$ alors $X_{T_i^\lambda} \in (-\epsilon, b+\epsilon)$. L'inégalité de droite s'obtient de la même manière en changeant les rôles de X et X^n .

Ainsi en remarquant que $T_{(-\epsilon, b+\epsilon)} \wedge t \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} T_{(0,b)} \wedge t$ et que $T_{(\epsilon, b-\epsilon)} \wedge t \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} T_{(0,b)} \wedge t$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{(0,b),n} \wedge t = T_{(0,b)} \wedge t, \quad \mathbb{P}_x\text{- presque sûrement .}$$

Maintenant remarquons que, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|X_{T_{(0,b),n} \wedge t}^n - X_{T_{(0,b)} \wedge t}| \leq |X_{T_{(0,b),n} \wedge t}^n - X_{T_{(0,b),n} \wedge t}| + |X_{T_{(0,b),n} \wedge t} - X_{T_{(0,b)} \wedge t}|. \quad (2.24)$$

Alors, pour n suffisamment grand, le premier terme de droite tend vers 0 par la convergence uniforme de X^n . Pour le deuxième terme, observons que si $t < T_{(0,b)}$ cela veut dire que $X_{T_i^\lambda} \geq b$ ou $X_{T_i^\lambda} \leq 0$ pour tout $T_i^\lambda \leq t$. Donc, de la convergence uniforme de X^n , pour tout $\epsilon > 0$, et pour n assez grand, $X_{T_i^\lambda}^n \geq b - \epsilon$ ou $X_{T_i^\lambda}^n \leq \epsilon$, respectivement. En faisant tendre ϵ vers 0, alors on voit que $T_{(0,b),n} > t$ car $X_{T_i^\lambda}^n \geq b$

ou $X_{T_i^\lambda}^n \leq 0$. Donc $T_{(0,b),n} \wedge t = T_{(0,b)} \wedge t = t$. Si $T_{(0,b)} \leq t$, alors il existe un $T_i^\lambda \leq t$ tel que $0 < X_{T_i^\lambda} < b$. Par conséquent pour ce même T_i^λ pour tout $\epsilon > 0$ et pour n assez grand on a

$$-\epsilon < -\epsilon + X_{T_i^\lambda} < X_{T_i^\lambda}^n < X_{T_i^\lambda} + \epsilon < b + \epsilon.$$

D'où $X_{T_i^\lambda}^n \in (-\epsilon, b + \epsilon)$. En faisant tendre ϵ vers 0, $X_{T_i^\lambda}^n \in (0, b)$. Donc $T_{(0,b)} = T_i^\lambda = T_{(0,b),n}$ et par conséquent $T_{(0,b),n} \wedge t = T_{(0,b)} \wedge t$. Ainsi, \mathbb{P}_x -presque sûrement

$$X_{T_{(0,b),n} \wedge t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X_{T_{(0,b)} \wedge t},$$

ce qui implique que le terme gauche de (2.24) tend vers 0. Donc, pour tout $t > 0$, on a que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-q(T_{(0,b),n} \wedge t) + \theta X_{T_{(0,b),n} \wedge t}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} \wedge t < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} \\ = e^{-q(T_{(0,b)} \wedge t) + \theta X_{T_{(0,b)} \wedge t}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} \wedge t < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}} \end{aligned}$$

ou encore que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} \\ = e^{-q(T_{(0,b)}) + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}}, \quad (2.25) \end{aligned}$$

\mathbb{P}_x -presque sûrement.

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient que

$$\begin{aligned}
& \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} - e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \right| \\
& \leq \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} - e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} \right| \\
& + \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} - e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}} \right| \\
& + \left| e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}} - e^{-q(T_{(0,b)}) + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \right| \\
& = \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} \geq t\}} \right| \\
& + \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} - e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}} \right| \\
& + \left| e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} \geq t\}} \right| \\
& \leq e^{\theta b} \left(\mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} \geq t\}} + \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} \geq t\}} \right) \\
& + \left| e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+ \wedge t\}} - e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \wedge t\}} \right|. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant d'abord t assez grand dans (2.26) et en utilisant (2.25) pour n suffisamment grand, la partie droite de (2.26) tend vers 0. D'où, \mathbb{P}_x -presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} = e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}}.$$

Remarquons aussi, que

$$0 \leq e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} \leq e^{\theta b}.$$

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b),n} + \theta X_{T_{(0,b),n}}^n} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b),n} < \tau_{-a,n}^- \wedge \tau_{c,n}^+\}} \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \right].$$

D'où la convergence du terme de gauche de (2.22) vers celui de (2.1). Ce qui complète la preuve.

2.3.3 Preuve du Corollaire 1

Démonstration. Pour prouver (2.2), il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_c^+ \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right].$$

En effet, puisque

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ = \tau_c^+, \quad \text{presque sûrement}$$

et

$$0 \leq e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}} \mathbf{1}_{\{T_{(0,b)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}} \leq e^{\theta b}, \quad \text{presque sûrement,}$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée. D'où,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,b)} + \theta X_{T_{(0,b)}}}; T_{(0,b)} < \tau_c^+ \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, b; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta) \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)} \right]. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{W^{(q)}(a)} \frac{W^{(q)}(a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)},$$

donc en utilisant (2.11) on obtient que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(x+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)} = \frac{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(x, \Phi(q))}{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \Phi(q))},$$

ce qui achève la preuve de (2.2).

Pour prouver (2.3), on va prendre la limite quand c tend vers l'infini dans (2.1).

Remarquons tout d'abord que,

$$\frac{L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)} = \frac{L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta)}{W^{(q)}(c)} \frac{W^{(q)}(c)}{W^{(q)}(c+a)} \frac{W^{(q)}(c+a)}{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)}.$$

En utilisant l'égalité (10) dans Loeffen *et al.* (2014), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a) &= \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(c+a) - \lambda \int_{b+a}^{c+a} W^{(q)}(c+a-z) \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(z) dz \\ &= W^{(q)}(c+a) + \lambda \int_a^{b+a} W^{(q)}(c+a-z) \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(z) dz,\end{aligned}$$

ce qui fait que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(q,\lambda)}(c+a)}{W^{(q)}(c+a)} = 1 + \lambda \int_0^b e^{-\Phi(q)(y+a)} \mathcal{W}_a^{(q,\lambda)}(y+a) dy.$$

Pour prouver (2.4), il suffit de prendre la limite quand c tend vers l'infini dans (2.2). Remarquons que,

$$\frac{L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta)}{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \Phi(q))} = \frac{L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta)}{W^{(q)}(c)} \frac{W^{(q)}(c)}{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \Phi(q))}.$$

Ainsi, en utilisant (2.13), on a

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{L^{(q,\lambda)}(c, b; \theta)}{\mathcal{Z}_b^{(q+\lambda, -\lambda)}(c, \Phi(q))} = \frac{M^{(q,\lambda)}(b, \theta)}{\psi'(\Phi(q)) + \lambda \int_0^b e^{-\Phi(q)y} Z^{(q+\lambda)}(y, \Phi(q)) dy}.$$

□

2.3.4 Preuve du Corollaire 2

Démonstration. Remarquons que, sur l'événement $\{T_{(-a,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+\}$, on a $T_{(-\infty,0)} = T_{(-a,0)}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right] \\ = \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-a,0)} + \theta X_{T_{(-a,0)}}}; T_{(-a,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right]. \quad (2.27)\end{aligned}$$

En utilisant (2.1), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(0,a)} + \theta X_{T_{(0,a)}}}; T_{(0,a)} < \tau_0^- \wedge \tau_c^+ \right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, a; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c, a; \theta) \frac{N_{a,0}^{(q,\lambda)}(x)}{N_{a,0}^{(q,\lambda)}(c)} \right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x, a; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c)} \right]. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Ainsi, une application de (2.28) permet d'écrire,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x+a} \left[e^{-qT_{(0,a)} + \theta X_{T_{(0,a)}}}; T_{(0,a)} < \tau_0^- \wedge \tau_{c+a}^+ \right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x+a, a; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c+a, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} \right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'homogénéité spatiale, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x+a} \left[e^{-qT_{(0,a)} + \theta X_{T_{(0,a)}}}; T_{(0,a)} < \tau_0^- \wedge \tau_{c+a}^+ \right] \\
&= e^{\theta a} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-a,0)} + \theta X_{T_{(-a,0)}}}; T_{(-a,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau (2.28), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-a,0)} + \theta X_{T_{(-a,0)}}}; T_{(-a,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right] \\
&= e^{-\theta a} \mathbb{E}_{x+a} \left[e^{-qT_{(0,a)} + \theta X_{T_{(0,a)}}}; T_{(0,a)} < \tau_0^- \wedge \tau_{c+a}^+ \right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[e^{-\theta a} L^{(q,\lambda)}(x+a, a; \theta) - e^{-\theta a} L^{(q,\lambda)}(c+a, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} \right].
\end{aligned}$$

Ceci combiné avec (2.27), permet d'obtenir (2.5).

De même, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \tau_c^+ \right] \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_{(-\infty,0)} + \theta X_{T_{(-\infty,0)}}}; T_{(-\infty,0)} < \tau_{-a}^- \wedge \tau_c^+ \right] \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^{-\theta a}}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[L^{(q,\lambda)}(x+a, a; \theta) - L^{(q,\lambda)}(c+a, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} \right].
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} = \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} = \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{W^{(q+\lambda)}(a)} \frac{W^{(q+\lambda)}(a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)},$$

donc, en utilisant (2.10), il vient que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} = \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} = \frac{Z^{(q)}(x, \Phi(q+\lambda))}{Z^{(q)}(c, \Phi(q+\lambda))}.$$

Ensuite, vu que

$$e^{-\theta a} L^{(q, \lambda)}(x+a, a; \theta) = Z^{(q)}(x, \theta) - e^{-\theta a} \mathcal{Z}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a, \theta),$$

en utilisant (2.12), il vient que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\theta a} L^{(q, \lambda)}(x+a, a; \theta) = Z^{(q)}(x, \theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} & \left[e^{-\theta a} L^{(q, \lambda)}(x+a, a; \theta) - e^{-\theta a} L^{(q, \lambda)}(c+a, a; \theta) \frac{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(x+a)}{\mathcal{W}_a^{(q+\lambda, -\lambda)}(c+a)} \right] \\ & = \frac{\lambda}{\lambda - \psi_q(\theta)} \left[Z^{(q)}(x, \theta) - Z^{(q)}(c, \theta) \frac{Z^{(q)}(x, \Phi(q+\lambda))}{Z^{(q)}(c, \Phi(q+\lambda))} \right]. \end{aligned}$$

Pour prouver (2.7), on va faire tendre c vers l'infini dans (2.6), ce qui revient à calculer

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{Z^{(q)}(c, \theta)}{Z^{(q)}(c, \Phi(q+\lambda))}.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{Z^{(q)}(c, \theta)}{Z^{(q)}(c, \Phi(q+\lambda))} & = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{Z^{(q)}(c, \theta)}{W^{(q)}(c)} \frac{W^{(q)}(c)}{Z^{(q)}(c, \Phi(q+\lambda))} \\ & = \frac{q - \psi(\theta) \Phi(q+\lambda) - \Phi(q)}{\Phi(q) - \theta} \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

□

2.4 Annexe

Voici maintenant la preuve du Lemme 6.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{W^{(p)}(x+a) + q \int_a^{x+a} W^{(p+q)}(x+a-z)W^{(p)}(z)dz}{W^{(p)}(a)} \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{W^{(p)}(x+a) + q \int_0^x W^{(p+q)}(x-y)W^{(p)}(y+a)dy}{W^{(p)}(a)} \\
&= e^{\Phi(p)x} + q \int_0^x e^{\Phi(p)y}W^{(p+q)}(x-y)dy \\
&= e^{\Phi(p)x} + q \int_0^x e^{\Phi(p)(x-z)}W^{(p+q)}(z)dz \\
&= \left[e^{\Phi(p)x} \left\{ 1 - \psi_{p+q}(\Phi(p)) \int_0^x e^{-\Phi(p)z}W^{(p+q)}(z)dz \right\} \right],
\end{aligned}$$

où, à la troisième égalité on utilise (1.5) et (1.6). Ce qui achève la preuve(2.10).

De même, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} &= \frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} - q \int_{b+a}^{x+a} W^{(p)}(x+a-z) \frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(z)}{W^{(p)}(a)} dz \\
&= \frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} - q \int_b^x W^{(p)}(x-y) \frac{\mathcal{W}_a^{(p,q)}(y+a)}{W^{(p)}(a)} dy.
\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant (2.10) et (1.13) on obtient

$$\frac{\mathcal{N}_{b+a,a}^{(p,q)}(x+a)}{W^{(p)}(a)} \rightarrow \mathcal{Z}_b^{(p+q,-q)}(x, \Phi(p)), \quad a \rightarrow \infty,$$

ce qui complète la preuve de (2.11).

En utilisant (1.13), on a

$$\begin{aligned}
& e^{-\theta a} \mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x+a, \theta) \\
&= e^{-\theta a} \left[Z^{(p)}(x+a, \theta) + q \int_0^a W^{(p)}(x+a-z) Z^{(p+q)}(z, \theta) dz \right] \\
&= e^{-\theta a} Z^{(p)}(x+a, \theta) + q \int_{-\infty}^0 W^{(p)}(x-y) e^{-\theta a} Z^{(p+q)}(y+a, \theta) \mathbf{1}_{[-a,0]} dy.
\end{aligned}$$

Or, d'après (1.7),

$$e^{-\theta a} Z^{(q+\lambda)}(x+a, \theta) = e^{\theta x} \left[1 - \psi_{q+\lambda}(\theta) \int_0^{x+a} e^{-\theta y} W^{(q+\lambda)}(y) dy \right],$$

donc on a $e^{-\theta a} Z^{(q+\lambda)}(x+a, \theta) \leq e^{\theta x}$. De plus, en utilisant (1.4), on obtient $e^{-\theta a} Z^{(q+\lambda)}(x+a, \theta) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\theta a} \mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x+a) = 0,$$

ce qui achève la preuve de (2.12).

Pour prouver (2.13), remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{L^{(p,q)}(x, a; \theta)}{W^{(p)}(x)} &= \frac{e^{\theta a} Z^{(q)}(x-a, \theta) - \mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x, \theta)}{W^{(p)}(x)} \\
&= \frac{e^{\theta a} Z^{(q)}(x-a, \theta)}{W^{(p)}(x-a)} \frac{W^{(p)}(x-a)}{W^{(p)}(x)} - \frac{\mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x, \theta)}{W^{(p)}(x)},
\end{aligned}$$

ce qui fait que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L^{(p,q)}(x, a; \theta)}{W^{(p)}(x)} = \frac{\psi_p(\theta)}{\theta - \Phi(p)} [e^{(\theta - \Phi(p))a} - 1] - q \int_0^a e^{-\Phi(p)y} Z^{(p+q)}(y, \theta) dy,$$

où, à la dernière étape, on a utilisé le fait que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{Z}_a^{(p+q,-q)}(x, \theta)}{W^{(p)}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z^{(p)}(x, \theta) + q \int_0^a W^{(p)}(x-z) Z^{(p+q)}(z, \theta) dz}{W^{(p)}(x)} \\
N^{(p,q)}(a, \theta) &:= \frac{\psi_p(\theta)}{\theta - \Phi(p)} + q \int_0^a e^{-\Phi(p)y} Z^{(p+q)}(y, \theta) dy.
\end{aligned}$$

Le cas où $\theta = \Phi(p)$, on le verra comme limite.

RÉFÉRENCES

- Albrecher, H., Ivanovs, J. et Zhou, X. (2016). Exit identities for Lévy processes observed at Poisson arrival times. *Bernoulli*, *22*(3), 1364–1382.
- Baurdoux, E. J., Pardo, J. C., Pérez, J. L. et Renaud, J.-F. (2016). Gerber-Shiu distribution at Parisian ruin for Lévy insurance risk processes. *J. Appl. Probab.*, *53*(2), 572–584.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*. Cambridge University Press.
- Cont, R. et Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Guérin, H. et Renaud, J.-F. (2016). Joint distribution of a spectrally negative Lévy process and its occupation time, with step option pricing in view. *Advances in Applied Probability*, *48*(1), 274–297.
- Kuznetsov, A., Kyprianou, A. E. et Rivero, V. (2012). *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes*. Springer.
- Kyprianou, A. E. (2014). *Fluctuations of Lévy processes with applications - Introductory lectures*. Universitext. Springer, Heidelberg.
- Loeffen, R. L., Renaud, J.-F. et Zhou, X. (2014). Occupation times of intervals until first passage times for spectrally negative Lévy processes. *Stochastic Processes and their Applications*, *124*(3), 1408–1435.

Palmowski, Z., Pérez, J. L. et Yamazaki, K. (2020). Double continuation regions for American options under Poisson exercise opportunities. *arXiv :2004.03330*.