UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

GÉNÉRALISATIONS DU GRAND THÉORÈME DE PICARD

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
MATHIEU BOSSÉ

JUIN 2020

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier la personne sans laquelle ce présent document n'aurait jamais pris vie : Steven Lu, mon directeur de recherche. Tu as été, et continues d'être, une grande source d'inspiration pour moi et ce pour plusieurs raisons : principalement ton amour des mathématiques, ton enthousiasme mais surtout ton habileté à garder ton calme face à mes multiples questions, et le tout sans jamais me faire sentir stupide... Très épatant !

Je voudrais aussi remercier les autres étudiants du département, avec lesquels je me suis bien amusé tout au long de mon parcours universitaire. J'espère que vous continuerez à rêver en grand et à vous amuser, mais surtout que vous continuerez à créer dans votre vie les expériences que vous avez vraiment envie de vivre.

Finalement, un gros merci à ma famille pour votre support constant sur tous les plans. À mes parents, je suis pleinement conscient que mes expériences farfelues et mon intensité (et peut-être même ma folie...) ont su vous faire suer à profusion durant toutes ces années. Je crois que c'est en fait des moments comme ceux-ci qui contribuent à tisser nos liens familiaux de plus en plus serrés.

Mention spéciale à Maude pour m'avoir aidé à me procurer le livre maudit : c'est très apprécié ;)

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce mémoire constitue une exploration de la géométrie hyperbolique dans son ensemble, avec une attention particulière sur les généralisations du grand théorème de Picard aux espaces complexes, ainsi que la réciproque de ce théorème pour le complémentaire d'une union finie d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiée dans des espaces compacts.

Afin d'y arriver, nous débuterons par revoir certains résultats d'analyse complexe, incluant le théorème d'Arzelà-Ascoli. Puis, nous introduirons des notions préliminaires en lien avec les fonctions de longueur, les espaces complexes et les applications tangentes. Nous étudierons par la suite la notion d'hyperbolicité, ainsi que celles d'être hyperboliquement complet et relativement complet pour des espaces complexes.

Nous enchaînerons avec la notion importante de plongement hyperbolique, utilisée plus tard pour les généralisations du grand théorème de Picard. Nous regarderons ensuite la notion d'hyperbolicité de Brody, et sa correspondance avec la notion usuelle d'hyperbolicité. Une application importante de cette correspondance en lien avec le complément d'une union finie d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiée dans un espace complexe compact suivra.

Ensuite, nous examinerons la généralisation du grand théorème de Picard aux espaces complexes, ainsi que la traduction du petit et du grand théorème de Picard classique dans notre langage de géométrie hyperbolique. Finalement, nous combinerons tout ce qui aura été fait précédemment pour obtenir la réciproque du grand théorème de Picard pour le complémentaire d'une union finie d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiée dans un espace compacts.

Mots-clés : Géométrie hyperbolique, espaces complexes, hyperbolicité, Kobayashi hyperbolique, Brody hyperbolique, grand théorème de Picard.

INTRODUCTION

Le but de ce mémoire est d'étudier les généralisations du grand théorème de Picard en géométrie hyperbolique dans un contexte assez général : sur des espaces complexes. Pour y arriver, on suivra en grande majorité la structure du livre *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces* (Lang, 1987) de Serge Lang.

Tout d'abord, nous débuterons par faire un petit rappel sur des résultats d'analyse complexe. Puis, on étudiera les propriétés de bases en lien avec la géométrie hyperbolique complexe. En particulier, la notion d'hyperbolicité sera introduite et quelques-unes des propriétés en lien avec la semi-distance de Kobayashi, la semi-distance directement responsable pour la notion d'hyperbolicité, seront explorées. Ce chapitre se termine avec les notions d'être hyperboliquement complet et relativement complet pour des espaces complexes, ainsi que quelques résultats en lien avec ces concepts.

Dans le second chapitre, on introduira un concept crucial pour la suite de notre étude : celui du plongement hyperbolique. Cela se révèlera être un outil puissant pour réussir à généraliser le grand théorème de Picard dans le chapitre suivant. Ensuite, la notion d'être Brody hyperbolique sera introduite, et son équivalence avec la notion usuelle d'hyperbolicité sous certaines conditions sera développée dans le célèbre théorème de Brody. Ce volet se terminera avec une application de ce théorème, sur le complément d'une union finie d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiée dans un espace complexe compact.

Cet ouvrage atteint son point culminant dans le troisième chapitre. Ce dernier débute avec une généralisation du grand théorème de Picard pour les espaces complexes. Une traduction du petit et du grand théorème de Picard dans le langage de la géométrie hyperbolique s'ensuit. Finalement, on utilisera l'application du théorème de Brody explorée dans le chapitre précédent pour donner une réciproque du grand théorème de Picard pour les complémentaires d'unions finies d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiées dans des espaces complexes compacts.

Ce mémoire comporte également une annexe contenant des démonstrations complémentaires pour certains faits sortant un peu du cadre de cette présentation.

Ce mémoire nous permettra ainsi d'avoir une bonne idée du fonctionnement de la base de la géométrie hyperbolique complexe, pour éventuellement pouvoir mieux comprendre les développements plus récents sur le sujet en lien avec les généralisations du grand théorème de Picard, comme par exemple l'article (Lu *et al.*, 2019) qui pousse cette étude à un tout autre niveau.

CHAPITRE I

PROPRIÉTÉS DE BASE

1.1 Notions générales préliminaires

Dans ce mémoire, nous allons travailler dans un contexte un peu plus général que celui des variétés complexes : celui des espaces complexes. Ainsi, au lieu de nous restreindre au contexte usuel de métriques hermitiennes sur des variétés complexes, nous allons plutôt parler de fonctions de longueur sur des espaces complexes, des fonctions mesurant la longueur mais ne satisfaisant pas nécessairement l'inégalité triangulaire. Nous suivrons pour ce chapitre principalement l'approche de (Lang, 1987).

Une certaine familiarité avec les concepts de base en géométrie riemannienne est supposée pour cet ouvrage, voir par exemple (Gallot *et al.*, 2004). Il serait également utile de bien comprendre les fondements de la géométrie complexe, plus spécifiquement le concept de fibré vectoriel complexe et de métrique hermitienne sur une variété complexe. Nous référons le lecteur à l'excellent livre (Griffiths et Harris, 1994) pour cela. De plus, quelques outils tirés de la topologie algébrique seront utilisés, et ces derniers sont bien expliqués par exemple dans (Hatcher, 2000) et (Munkres, 2000). Finalement, une certaine familiarité avec les surfaces de Riemann (variétés complexes de dimension 1), en particulier avec le revêtement universel de ces objets serait un atout (voir (Petersen, 2016)).

1.1.1 Rappels analyse complexe

Nous allons débuter le tout en regardant deux résultats d'analyse complexe, incluant le théorème d'Arzelà-Ascoli, qui nous serons bien utiles dans la démonstration du théorème de Brody au chapitre suivant.

Tout au long de cette sous-section, $\mathcal{F} \subseteq C(X_1, X_2)$ sera un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les applications continues de X_1 vers X_2.

Définition 1.1.1. Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques. On dit que $\mathcal{F}$ est *équicontinue en* $x_0 \in X_1$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f_n(x), f_n(x_0)) < \epsilon, \quad \forall f_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2. L'ensemble $\mathcal{F}$ est dit *équicontinue sur* X_1 s'il est équicontinue pour tout point $x \in X_1$.

Théorème 1.1.3. (Arzelà-Ascoli) Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques compacts. Toute suite $\mathcal{F} \subseteq C(X_1, X_2)$ équicontinue sur X_1 admet une sous-suite qui converge uniformément sur X_1.

Démonstration. Une démonstration est donnée dans l'annexe, voir théorème A.0.2.

□

On se rappel qu'un sous-ensemble est dit relativement compact si sa fermeture est compacte. Ainsi, si $\mathrm{Hol}(\Omega, Z)$ est l'ensemble des applications holomorphes de Ω vers Z, alors on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.4. Supposons que Ω soit un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}$ et (Z, d) une variété complexe munie d'une distance. Soit $\{f_n\} \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega, Z)$ une suite convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une application $f : \Omega \to Z$. Alors :

(i) f est une application holomorphe.

(ii) La suite des différentielles $\{df_n\} \subseteq C(\Omega, TZ)$ converge vers df uniformément sur les compacts de Ω.

Démonstration. La démonstration est faite dans l'annexe, voir théorème A.0.3.

□

1.1.2 Fonctions de longueur

Tout au long de cette sous-section, Z sera une variété réelle et E un fibré vectoriel complexe sur Z.

Définition 1.1.5. Une *fonction de longueur* H sur E est une fonction

$$H : E \to [0, \infty)$$

vers les nombres réels positifs, satisfaisant :

(i) $H(v) = 0$ si, et seulement si, $v = 0$.

(ii) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a que $H(cv) = |c|H(v)$.

(iii) H est continue.

On remarque qu'une fonction de longueur ne satisfait pas nécessairement l'inégalité triangulaire et que la condition (iii) est beaucoup plus faible que la condition habituelle d'être lisse pour une métrique riemannienne ou hermitienne. En particulier, toute variété différentielle admet une fonction de longueur provenant d'une métrique riemannienne, ou bien hermitienne dans le cas complexe.

On voit ainsi que si $K \subseteq Z$ est compact, et que H_1 et H_2 sont des fonctions de longueur sur E, alors H_1 et H_2 sont équivalentes sur K. Autrement dit, il existe des nombres $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que

$$c_1 H_1(v) \leq H_2(v) \leq c_2 H_1(v) \qquad \forall v \in E_p \quad \text{et} \quad \forall p \in E.$$

Ainsi, toutes les fonctions de longueurs sont localement équivalentes. On utilisera le signe habituellement utilisé pour la valeur absolue pour denoter notre fonction de longueur H, c.-à-d. que $H(v) = |v|_H$.

Définition 1.1.6. Une *fonction de semi-longueur* H sur E est une fonction

$$H : E \to [0, \infty)$$

vers les nombres réels positifs, satisfaisant :

(i) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a que $H(cv) = |c| \cdot H(v)$.

(ii) H est semi-continue supérieurement.

Donc, pour une fonction de semi-longueur, on peut avoir que $H(v) = 0$ pour $v \neq 0$ et la condition d'être semi-continue supérieurement est plus faible que la condition de continuité pour une fonction de longueur. Être semi-continue supérieurement pour H signifie que : pour $v \in E$ et $\epsilon > 0$ donnés, il existe un voisinage V de v dans E tel que pour tout $w \in V$, on a que $H(w) < H(v) + \epsilon$.

Définition 1.1.7. Une *distance* sur Z est une application

$$d : Z \times Z \to [0, \infty]$$

satifaisant que $\forall x,\ y,\ z \in Z$:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Si d est une telle application mais satisfait seulement (ii) et (iii), alors on dira que d est une *semi-distance*. Il est donc possible pour une semi-distance que $d(x,y) = 0$ pour $x \neq y$.

En général, une fonction de longueur sur TZ peut être utilisée pour calculer la longueur de courbes dans Z. Ainsi, si $\gamma : [a,b] \to Z$ est une courbe C^1, alors la *longueur de cette courbe* (par rapport à H) est définie par :

$$L_H(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_H \, dt \,.$$

Définition 1.1.8. Un *chemin* entre x et y est une suite finie de courbes C^1 telles que le point final d'une courbe est le point initial de la courbe suivante. La longueur de ce chemin par rapport à H, la fonction de longueur donnée, est simplement la somme de la longueur de chacune de ces courbes.

Ainsi, à partir d'une fonction de longueur H donnée sur le fibré tangent TZ, on peut définir la fonction de *distance correspondante* sur Z comme suit :

$$d_H(x,\ y) = \inf_{\gamma} \{L_H(\gamma)\}$$

où γ représente un chemin quelconque joignant x à y. À priori, on pourrait penser que d_H n'est seulement qu'une semi-distance ... Mais, heureusement pour nous,

nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1.9. Si H est une fonction de longueur, alors d_H est une distance, c.-à-d. que pour $x \neq y$, on a que $d_H(x, y) > 0$.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 5).

$\square$

Théorème 1.1.10. Soit H une fonction de longueur sur TZ. Alors la distance d_H engendre la topologie de Z.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 5).

$\square$

Pour une étude plus approfondie de ces distances, voir par exemple (Kobayashi, 1998, chap. 1, §1).

1.1.3 Applications tangentes

On voudrait maintenant savoir comment les fonctions de longueur réagissent sous l'influence d'une application lisse. Ainsi, soit $f : Y \to Z$ une application lisse entre variétés différentielles de dimensions finies. Alors, f engendre la différentielle

$$df : TY \to TZ$$

et pour $y \in Y$, on a la différentielle de f au point y

$$df(y) : T_yY \to T_{f(y)}Z.$$

On peut également tirer en arrière une fonction de longueur H_Z sur TZ de la façon suivante :

$$(f^*H_Z)(v) = H_Z(df(y)v) \qquad \text{pour } (y,v) \in TY.$$

Le tiré en arrière de la fonction de longueur H_Z sur TZ est une fonction de semi-longueur f^*H_Z sur TY. La fonction f^*H_Z est lisse au même degré que H_Z, et en particulier, comme on a supposée que H_Z est continue, on a aussi que f^*H_Z est continue.

Supposons maintenant qu'on ait des fonctions de longueur H_Y, H_Z données sur TY et TZ respectivement. Alors, pour tout $y \in Y$, on peut définir la norme de $df(y)$ par rapport à ces fonctions de longueur par

$$\|df(y)\| = \sup_{v \in T_yY \setminus \{0\}} \frac{|df(y)v|_{H_Z}}{|v|_{H_Y}}.$$

En particulier, cela signifie que si

$$\|df(y)\| \leq 1 \quad \forall y \in Y, \text{ alors } f^*H_Z \leq H_Y.$$

1.1.4 Espaces complexes

Nous ferons seulement qu'un bref survol du fonctionnement des espaces complexes. Pour ce faire, on suppose que le lecteur a une certaine familiarité avec les faisceaux. Sinon, le chapitre 0 de (Griffiths et Harris, 1994) contient l'information nécessaire à la compréhension de cette sous-section. Il y a plusieurs façon d'aborder ce sujet. Pour ce faire, nous allons suivre l'exposé de (Kobayashi, 2005). Pour plus de détails sur les espaces complexes, nous invitons le lecteur à consulter (Gunning et Rossi, 1965) ou (Grauert et Remmert, 1984).

Définition 1.1.11. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ un ouvert. Alors $U \subseteq \Omega$ est un *sous-ensemble analytique de* Ω si pour tout $p \in U$, il existe V un voisinage ouvert de p dans Ω tel que $U \cap V$ est donné par le lieu d'annulation commun d'un nombre fini $f_1, ..., f_k$ de fonctions holomorphes dans V, c.-à-d. que $U \cap V = \{q \in V : f_1(q) = ... = f_k(q) = 0\}$. En particulier, on voit que U est fermé dans Ω.

Soient Ω et Ω' deux voisinages ouverts d'un point $p \in \mathbb{C}^N$, et U et U' deux sous-ensembles analytiques de Ω et Ω' respectivement. On a que $(\Omega, U) \sim (\Omega', U')$ en p s'il existe un voisinage ouvert $\Omega'' \subseteq \Omega \cap \Omega'$ du point p tel que $U \cap \Omega'' = U' \cap \Omega''$. On a en fait que $\sim$ est une relation d'équivalence, et on appelle une telle classe d'équivalence un *germe analytique en* p. On notera par U_p le germe analytique définit par (Ω, U) en p.

Pour tout point $p \in \mathbb{C}^N$, soit $\mathcal{O}_{N,p}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en p, et $\mathcal{O}_N$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^N$. Soit U un sous-ensemble analytique de $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$. Alors, pour tout $p \in \Omega$, on note par $\mathcal{I}(U_p)$ l'ensemble des germes de fonctions holomorphes sur Ω qui s'annulent sur le germe U_p. En particulier, $\mathcal{I}(U_p)$ est un idéal de $\mathcal{O}_{N,p}$ et si $p \notin U$, on remarque que $\mathcal{I}(U_p) = \mathcal{O}_{N,p}$. On notera par $\mathcal{I}(U)$ le faisceau des idéaux s'annulant sur U, c.-à-d. que $\mathcal{I}(U) = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{I}(U_p)$. On voit que $\mathcal{I}(U)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}_N|_\Omega$.

Considérons maintenant le faisceau quotient $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}(U)$. Sa fibre en $p \in \Omega$ est donnée par $\mathcal{O}_{N,p}/\mathcal{I}(U_p)$. En particulier, elle est nulle pour $p \notin U$. On appelle $\mathcal{O}_U := (\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}(U))|_U$ le *faisceau des germes de fonctions folomorphes sur* U. Une section du faisceau $\mathcal{O}_U$ au-dessus d'un ouvert $V \subseteq U$ est appelée une *fonction holomorphe* sur V.

Définition 1.1.12. Soit Y un espace topologique séparé (Hausdorff) et $\mathcal{O}_Y$ un sous-faiceau du faisceau des germes de fonctions continues sur Y. Le duo $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est appelé un *espace complexe* si pour tout point $y \in Y$, il existe U un voisinage ouvert de y tel que U est un sous-ensemble analytique d'un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$, et que $\mathcal{O}_Y|_U$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur le sous-ensemble analytique U. Ainsi, pour tout sous-ensemble ouvert $U \subseteq Y$, les sections continues de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de U sont donc par définition les *fontions holomorphes* sur U. Pour alléger le texte, on écrira parfois Y au lieu de $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Définition 1.1.13. Une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces complexes est dite *holomorphe* si $f^*(\mathcal{O}_{Y,f(p)}) \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$ pour tout $p \in X$, c.-à-d. que si g est une fonction holomorphe dans un un voisinage de $f(p) \in Y$, alors $g \circ f$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de $p \in X$.

Définition 1.1.14. Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un espace complexe, $X \subseteq Y$ et $\mathcal{I}$ le faisceau des fonctions holomorphes de Y qui s'annulent sur X. Si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans Y et un nombre fini de fonctions holomorphes $f_1, ..., f_r$ définies sur V telles que $X \cap V = \{q \in V : f_1(q) = ... = f_r(q) = 0\}$, alors on a dira que $(X, (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})|_X)$ est un *sous-espace complexe* de $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

On voit ainsi qu'un sous-espace complexe est lui-même un espace complexe, et que tout ouvert $U \subseteq Y$ d'un espace complexe Y est en fait un sous-espace complexe de $(Y, \mathcal{O}_Y)$. En pratique, on dira seulement que X est un sous-espace de l'espace complexe Y au lieu de dire que $(X, (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})|_X)$ est un sous-espace complexe de l'espace complexe $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

En particulier, une variété complexe est un espace complexe, mais le contraire n'est pas nécessairement vrai ! En effet, un espace complexe n'est pas nécessairement lisse en tout point, c.-à-d. qu'il peut avoir des singularités, comme en témoigne l'exemple suivant.

Exemple 1. L'espace complexe $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^3 - w^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ n'est pas une variété complexe.

Dans notre étude, nous aurons éventuellement besoin de mesurer des distances sur des espaces complexes. On voudrait ainsi pouvoir généraliser la notion de fonction de longueur à des espaces complexes. Il y a plusieurs façons de faire ceci. Nous allons suivre l'approche de (Lang, 1987).

Soit Y un espace complexe quelconque. Pour nous, on supposera toujours qu'il existe un plongement global $p : Y \to (Z, H)$, où $p(Y)$ est un sous-espace fermé d'une variété complexe Z, munie d'un fonction de longueur H sur son fibré tangent. On ne perd pas de généralité en supposant cela, car il existe toujours un tel plongement pour les espaces complexes qu'on rencontre en pratique. De plus, si Y possède une base d'ouvert dénombrable (ce qu'on suppose normalement), alors Z peut être choisie de sorte qu'elle en possède une aussi. On regardera ainsi une *application holomorphe* entre deux espaces complexes $f : X \to Y$ comme étant en fait une application holomorphe entre deux variétés complexes.

Remarque 1.1.15. Si X est un sous-espace complexe d'un espace complexe Y, alors X est localement fermé. Par contre, on remarque que $\overline{X}$, sa fermeture dans Y, n'est pas nécessairement un sous-espace complexe ! En effet, son comportement à la frontière peut être très étrange. Ainsi, il est nécessaire de définir une application holomorphe vers $\overline{X}$ comme étant une application holomorphe dans Y pour laquelle son image est contenue dans $\overline{X}$.

Un peu plus tard, nous aurons aussi besoin de prendre la norme des dérivées pour des applications holmorphes $f : \mathbb{D} \to Y$, où Y est un espace complexe. Pour ce faire, on prendra en fait la norme des dérivées pour l'application holomorphe vue comme étant une application entre variétés $p \circ f : \mathbb{D} \to Z$, puis nous ferons comme nous avons fait dans les sections précédentes. De plus, heureusement pour nous, le théorème suivant nous dit que nous n'avons pas à nous soucier du choix spécifique d'un tel plongement.

Théorème 1.1.16. Localement dans un voisinage d'un point dans un espace complexe, deux plongements dans $\mathbb{C}^N$ sont localement biholomorphes.

Démonstration. (Fischer, 1976, p. 18)

□

Les constructions concernant les fonctions de longueur et les distances engendrées par de telles fonctions étudiées plus tôt sont également valides pour les espaces complexes. Nous invitons le lecteur à consulter (Lang, 1987, chap.0, §2) pour voir les détails sur le sujet. En particulier, la topologie d'un espace complexe Y est toujours engendrée par la distance engendrée par la fonction de longueur provenant de la variété complexe Z. On remarque en particulier que si X est un sous-espace relativement compact de Y, le choix de fonction de longueur n'est pas important, car toutes les fonctions de longueur sont équivalentes sur $\overline{X}$, la fermeture de X dans Y.

1.2 Normes hyperboliques

Pour une étude plus détaillée des fondements de base pour la norme hyperbolique par les moyens d'analyse complexe, on invite le lecteur a consulter (Krantz, 2004, chap. 1, §5). Nous allons maintenant regarder brièvement la norme hyperbolique (appelée aussi la norme de Poincaré) sur différents espaces. Ces normes sont celles données par le tenseur métrique de Poincaré sur ces espaces.

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité. Rappelons nous tout d'abord qu'une section globale non nulle du fibré tangent $T\mathbb{D}$ est donnée par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$, et donc que le fibré tangent de $\mathbb{D}$ est canoniquement trivial, c.-à-d. qu'on a l'identification $T\mathbb{D} = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Donc, si $z \in \mathbb{D}$ et $v \in T_z\mathbb{D}$, on peut en fait considérer v comme étant un nombre complexe. On peut également faire une identification similaire pour les autres espaces sur lesquels nous étudierons la norme hyperbolique. Avec ceci en tête, on a que la *norme hyperbolique* (ou fonction de longueur, ou métrique) de $\mathbb{D}$ est donnée par

$$|v|_{\mathrm{hyp},z} = \frac{|v|_{\mathrm{euc}}}{1-|z|^2} = \frac{|v|}{1-|z|^2},$$

où $|.|_{\mathrm{euc}} = |.|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}$. Au lieu de $\mathbb{C}$ on écrit parfois $\mathbb{C}_z$ pour spécifier la métrique hyperbolique sur $\mathbb{C}$ au point z de $\mathbb{D}$. On note que pour $z = 0$, la métrique hyperbolique et la métrique euclidienne sont les mêmes. De plus, nous écrirons $|v|_{\mathrm{hyp}}$ pour dénoter la norme hyperbolique sur $T\mathbb{D} = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

Similairement, soit $r > 0$ et $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < r\}$ le disque centré à l'origine de rayon r, $z \in \mathbb{D}_r$ et $v \in T_z\mathbb{D}_r = \mathbb{C}$. La *norme hyperbolique* (sur $\mathbb{D}_r$) est définie par

$$|v|_{\mathrm{hyp},r,z} = \frac{r|v|_{\mathrm{euc}}}{r^2-|z|^2} = \frac{|v/r|_{\mathrm{euc}}}{1-|z/r|^2} = \frac{|v/r|}{1-|z/r|^2}.$$

On remarque ainsi que la dilatation par r (multiplication par r) $m_r : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_r$ préserve la norme hyperbolique. C'est-à-dire que, $\forall z \in \mathbb{D}$, on a que

$$\left(\,|m_r'(z)v|_{\mathrm{hyp},r,m_r(z)} =\right) \;\; |rv|_{\mathrm{hyp},r,rz} = |v|_{\mathrm{hyp},z} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

Soit maintenant le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, y > 0\}$, $z \in \mathbb{H}$ et

$v \in T_z\mathbb{H} = \mathbb{C}$. Alors, la *norme hyperbolique* (sur $\mathbb{H}$) est donnée par

$$|v|_{\text{hyp},\mathbb{H},z} = \frac{|v|}{y}.$$

Finalement, soit $\mathbb{D}^*$ le disque unité épointé, $z \in \mathbb{D}^*$ et $v \in T_z\mathbb{D}^* = \mathbb{C}$. La *norme hyperbolique* (sur $\mathbb{D}^*$) est définie par

$$|v|_{\text{hyp},\mathbb{D}^*,z} = \frac{2|v|}{|z||\log(|z|^2)|}.$$

Exemple 2. L'application holomorphe $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ définie par $h(z) = \exp(iz)$ préserve la norme hyperbolique. En effet, $h(z) = e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$ et $h'(z) = ie^{iz} = ih(z)$. Alors, en utilisant le fait que $y > 0$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a que

$$|h'(z)v|_{\text{hyp},\mathbb{H},h(z)} = \frac{2|ih(z)v|}{|h(z)||\log(e^{-2y})|} = \frac{2|v|}{|-2y|} = \frac{|v|}{y} = |v|_{\text{hyp},\mathbb{D}^*,z}.$$

Le contexte devrait toujours faire en sorte que ce soit clair quelle norme est utilisée. Habituellement, sauf mention contraire, pour un disque ce sera la norme hyperbolique.

1.2.1 Automorphismes du disque et lemme de Schwarz-Pick

On va maintenant étudier comment se comporte la norme hyperbolique du disque sous l'influence d'applications holomorphes. On commence par regarder le groupe d'automorphismes de $\mathbb{D}$. On se rappelle ainsi les résultats suivants :

Théorème 1.2.1. Tout automorphisme $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est de la forme suivante :

$$h(z) = \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad |\lambda| = 1,\ a \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. (Bonavero et Demailly, 2005, p. 51).

□

Corollaire 1.2.2. Pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ il existe un automorphisme $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que $h(0) = z_0$.

Démonstration. Il suffit de prendre $h(z) = \lambda(z-a)/(1-\overline{a}z)$ avec $\lambda = 1$ et $a = -z_0$.

□

On arrive maintenant à un résultat classique en analyse complexe :

Lemme 1.2.3. (Lemme de Schwarz-Pick) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe. Alors on a que :

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2},$$

avec égalité si, et seulement si, f est un automorphisme de $\mathbb{D}$.

Démonstration. (Bonavero et Demailly, 2005, p. 52).

□

Soit maintenant $f : \mathbb{D} \to Z$ une application holomorphe vers une variété complexe munie d'une fonction de longueur H (sur TZ). Alors, on a une application tangente linéaire pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$df(z) : T_z\mathbb{D} = \mathbb{C}_z \to T_{f(z)}Z.$$

On remarque que $T_z\mathbb{D}$ est muni de la norme hyperbolique et que $T_{f(z)}Z$ a sa fonction de longueur H. Donc chacun de ces espaces tangents complexes a sa propre norme, et on peut ainsi définir la norme de l'application linéaire $df(z)$ par

$$\|df(z)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(z)v|_H}{|v|_{\text{hyp},z}}.$$

Définition 1.2.4. On dit qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces complexes munis des semi-distances d, d' *décroît les distances* si

$$d'(f(x), f(\tilde{x})) \leq d(x, \tilde{x}) \quad \text{pour tout } x, \tilde{x} \in X.$$

On peut ainsi reformuler le lemme de Schwarz-Pick de la façon suivante :

Corollaire 1.2.5.

(i) Une application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ décroît la norme hyperbolique, c.-à-d. que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a que

$$|f'(z)v|_{\text{hyp},f(z)} \leq |v|_{\text{hyp},z} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

(ii) Un automorphisme $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ préserve la norme hyperbolique, c.-à-d. que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a que

$$|h'(z)v|_{\text{hyp},h(z)} = |v|_{\text{hyp},z} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

Remarque 1.2.6. Si on regarde la norme hyperbolique sur $\mathbb{D}_r$ avec $r \neq 1$, ce corollaire reste valide pour les applications holomorphes et automorphismes de $\mathbb{D}_r$ vers $\mathbb{D}_r$.

1.3 Kobayashi hyperbolique

Définition 1.3.1. Maintenant, soit Y un espace complexe. Soit $x, y \in Y$. On considère une suite d'applications holomorphes

$$f_i : \mathbb{D} \to Y, \qquad i = 1, ..., m$$

et de points p_i, $q_i \in \mathbb{D}$ tels que $f_1(p_1) = x$, $f_m(q_m) = y$, et

$$f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1}).$$

On additionne ensuite les distances hyperboliques (la distance hyperbolique est la distance engendrée par la norme hyperbolique $|.|_{\text{hyp}}$) entre p_i et q_i, et on prend ensuite l'infimum parmis tous les choix possibles de tels f_i, p_i, q_i pour définir la *semi-distance de Kobayashi* comme suit :

$$d_Y(x, y) = \inf \sum_{i=1}^{m} d_{\text{hyp}}(p_i, q_i).$$

De plus, on voit que d_Y satisfait les propriétés d'une distance, sauf le fait qu'on peut avoir que $d_Y(x, y) = 0$ si $x \neq y$. Ainsi, d_Y est une semi-distance en général.

Définition 1.3.2. Le chemin obtenu en prenant les images des géodésiques de p_i à q_i est appelé un *chemin de Kobayashi.* La somme $\sum d_{\text{hyp}}(p_i, q_i)$ nous donne la *longueur du chemin* (ou longueur de Kobayashi si la précision est nécessaire).

Si Y n'est pas connexe, alors pour x, y dans des composantes différentes, on pose $d_Y(x, y) = \infty$. Le résultat suivant découle facilement à partir de la définition de notre semi-distance.

Corollaire 1.3.3. Si Y est connexe, alors il existe un chemin de Kobayashi dans Y reliant x à y, et donc $d_Y(x, y)$ est fini.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 16).

□

Définition 1.3.4. Soit Y un espace complexe. On dit que Y est *hyperbolique* (parfois appelé Kobayashi hyperbolique) si la semi-distance d_Y est une distance. Cela est signifie que si $x \neq y$ dans Y, alors $d_Y(x, y) > 0$.

Remarque 1.3.5. Il est clair directement par construction que la semi-distance de Kobayashi que d_Y est en fait la plus grande semi-distance sur Y telle que chaque application holomorphe $f : \mathbb{D} \to Y$ décroît les distances.

En utilisant cette remarque, on obtient directement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.6. Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux espaces complexes. Alors f décroît les distances pour les semi-distances de Kobayashi, c.-à-d. que pour tout $x, \tilde{x} \in X$, on a que $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq d_X(x, \tilde{x})$.

Lemme 1.3.7. Si X est un sous-espace d'un espace complexe hyperbolique Y, alors X est hyperbolique et $d_Y \leq d_X$ sur X.

Démonstration. On utilise le théorème précédent avec l'inclusion $i : X \to Y$ et le fait que Y est hyperbolique. On voit donc que si $x, \tilde{x} \in X$ et que $x \neq \tilde{x}$,

$$d_X(x, \tilde{x}) \geq d_Y(i(x), i(\tilde{x})) = d_Y(x, \tilde{x}) > 0.$$

□

Exemple 3. Pour $\mathbb{C}$, on a que $d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = 0$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. En particulier, $\mathbb{C}$ n'est pas (Kobayashi) hyperbolique. Effectivement, pour $z_1 \neq z_2$ dans $\mathbb{C}$, prenons $r > |z_2 - z_1|$ et posons $q = (z_2 - z_1)/r$. Alors, on a que $q \in \mathbb{D}$ et que $rq = z_2 - z_1$. Donc, l'application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = rz + z_1$ est telle que $f(0) = z_1$ et $f(q) = z_2$. On obtient ainsi que $d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \leq d_{\text{hyp}}(0, q)$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ le segment définie par $\gamma(t) = tq$. La longueur hyperbolique de ce segment joignant 0 à q est

$$L_{\text{hyp}}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\text{hyp},\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{|q|}{1 - |tq|^2}\, dt = \frac{|q|}{2} \log\left(\frac{1 + |q|}{1 - |q|}\right).$$

Alors, lorsque $r \to \infty$, on a que $q = (z_2 - z_1)/r \to 0$ et donc $L_{\text{hyp}}(\gamma) \to 0$. Maintenant, comme la distance hyperbolique est par définition la borne inférieure pour la longueur hyperbolique de tous les chemins joignant 0 à q, on obtient que $d_{\text{hyp}}(0, q) \leq L_{\text{hyp}}(\gamma)$. D'où $d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = 0$.

Exemple 4. Sur $\mathbb{D}$, la distance hyperbolique et la distance de Kobayashi sont les mêmes, donc en particulier $\mathbb{D}$ est hyperbolique ! En effet, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ il suffit de prendre le chemin de Kobayashi $f_1(z) = z$, $p_1 = z_1$ et $q_1 = z_2$ pour obtenir directement que $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leq d_{\text{hyp}}(f_1(p_1), f_1(q_1)) = d_{\text{hyp}}(z_1, z_2)$. Pour l'autre direction, on utilise le corollaire 1.2.5 et l'inégalité triangulaire pour voir que

$$d_{\text{hyp}}(z_1, z_2) \leq \sum d_{\text{hyp}}(f(p_i), f(q_i)) \leq \sum d_{\text{hyp}}(p_i, q_i).$$

Il ne reste plus qu'à prendre l'infimum sur tous les chemins de Kobayashi pour obtenir que $d_{\text{hyp}}(z_1, z_2) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$.

Remarque 1.3.8. En fait, la norme hyperbolique sur autres les espaces étudiés dans la section 1.2, c.-à-d. pour $\mathbb{H}$, $\mathbb{D}^*$, et $\mathbb{D}_r$ avec $r \neq 1$, et leurs distances de

Kobayashi respectives sont aussi égales.

Lemme 1.3.9. Soient X et Y deux espaces complexes. Pour $x, \tilde{x} \in X$ et $y, \tilde{y} \in Y$ on a que

$$d_X(x, \tilde{x}) + d_Y(y, \tilde{y}) \geq d_{X \times Y}((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) \geq \max\{d_X(x, \tilde{x}), d_Y(y, \tilde{y})\}.$$

En particulier, si X et Y sont hyperboliques, alors $X \times Y$ l'est aussi.

Démonstration. (Kobayashi, 2005, p. 47).

□

Exemple 5. Soit $\mathbb{D}^k = \mathbb{D} \times ... \times \mathbb{D}$ un poly-disque, alors

$$d_{\mathbb{D}^k}((x_1, ..., x_k), (y_1, ..., y_k)) = \max_i d_{\mathbb{D}}(x_i, y_i).$$

En particulier, le poly-disque $\mathbb{D}^k$ est hyperbolique.

Démonstration. (Kobayashi, 2005, p. 47).

□

Lemme 1.3.10. La semi-distance de Kobayashi est continue.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 17).

□

Théorème 1.3.11. Soit Y un espace complexe hyperbolique. Alors, d_Y définie la topologie de Y.

Démonstration. (Kobayashi, 1998, p. 60).

□

Proposition 1.3.12. Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux espaces complexes. Si Y est hyperbolique et que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U tel que $f^{-1}(U)$ est hyperbolique, alors X est hyperbolique.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 23).

□

Théorème 1.3.13. Soit Y un espace complexe et $\pi : \tilde{Y} \to Y$ un revêtement de Y. Alors $\tilde{Y}$ est hyperbolique si, et seulement si, Y est hyperbolique.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\tilde{Y}$ est hyperbolique. Soient $x, y \in Y$ tels que $d_Y(x, y) = 0$. Soit $\tilde{x} \in \tilde{Y}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$. Comme π est un revêtement, c'est en particulier une application holomorphe. On remarque ainsi que n'importe quel chemin de Kobayashi γ_i joignant x à y peut être relevé à un chemin de Kobayashi de $\tilde{x}$ à $\tilde{y_i}$ tel que $\pi(\tilde{y_i}) = y$, et que sa longueur de Kobayashi reste la même. Maintenant, comme $d_Y(x, y) = 0$, on peut trouver une suite de chemins γ_n de x à y dont la longueur de Kobayashi tend vers 0. Cela nous donne une suite $\tilde{y_n}$ dans $\tilde{Y}$ telle que $d_{\tilde{Y}}(\tilde{y_n}, \tilde{x}) \to 0$. Alors, comme $\tilde{Y}$ est hyperbolique, le théorème 1.3.11 nous dit alors que $\tilde{y_n} \to \tilde{x}$. De plus, on sait que π est continue, et donc que $\pi(\tilde{y_n}) \to \pi(\tilde{x})$. Comme $\pi(\tilde{x}) = x$ et que $\pi(\tilde{y_n}) = y$ pour tout n, on obtient bien que $x = y$.

($\Leftarrow$) Supposons que Y est hyperbolique. Par la définition d'un revêtement, on sait que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U de y dans Y et un ensemble discret D (donc hyperbolique) tel que $\pi^{-1}(U) \approx U \times D$. Comme $U \subseteq Y$, le lemme 1.3.7 nous dit que U est hyperbolique. De plus, on sait que le produit d'espaces hyperboliques est hyperbolique, et donc que $U \times D$ est hyperbolique. Finalement, la proposition 1.3.12 nous donne que $\tilde{Y}$ est hyperbolique !

$\square$

Utilisons ce résultat pour étudier l'hyperbolicité de 3 exemples.

Exemple 6. $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est hyperbolique, car le théorème d'uniformisation de Riemann nous dit que son revêtement universel est $\mathbb{D}$.

Exemple 7. Toute surface de Riemman compacte de genre ≥ 2 est hyperbolique. En effet, on sait par le théorème d'uniformisation de Riemann qu'une telle surface de Riemann est uniformisée par $\mathbb{D}$, qui on sait est hyperbolique. Le théorème précédent nous donne ainsi le résultat voulu.

Exemple 8. $\mathbb{C}^*$ n'est pas hyperbolique, car $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ définie par $\pi(z) = \exp(z)$ est un revêtement, et qu'on a montré que $\mathbb{C}$ n'est pas hyperbolique dans l'exemple 3.

1.3.1 Hyperboliquement et relativement complet

Définition 1.3.14. Soit Y un espace complexe. On dit que Y est *hyperboliquement complet* si Y est hyperbolique et complet par rapport à d_Y (donc si chaque suite de Cauchy par rapport à d_Y converge).

Définition 1.3.15. Soit Y un espace complexe. Alors Y est *localement hyperboliquement complet* si pour tout $y \in Y$, il existe U un voisinage hyperboliquement complet de y.

Proposition 1.3.16. S'il existe une application biholomorphe $f : X \to Y$ entre deux espaces complexes, alors

(i) X est hyperbolique si, et seulement si, Y est hyperbolique.

(ii) X est hyperboliquement complet si, et seulement si Y est hyperboliquement complet.

Démonstration. On va montrer (i) et (ii) en même temps.
($\Leftarrow$) Supposons que Y est hyperboliquement complet. En particulier, Y est hyperbolique. Soit $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$. Comme f est bijective, on a que $f(x) \neq f(x')$ dans Y. Alors,

$$0 < d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x'),$$

et donc X est bien hyperbolique. De plus, comme f^{-1} est holomorphe, on remarque que pour $f(x), f(x') \in Y$, on a en fait que

$$d_X(x, x') = d_X(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x').$$

Ainsi, $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$, c.-à-d. que f préserve les distances de Kobayashi !

Soit $\{x_n\} \subseteq X$ une suite de Cauchy par rapport à d_X. Alors, $d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq d_X(x_n, x_m) \to 0$, c.-à-d. que $\{f(x_n)\}$ est une suite de Cauchy dans Y. Alors, il existe un point $y' \in Y$ tel que $d_Y(f(x_n), y') \to 0$. On a donc que $x = f^{-1}(y') \in X$ et

$$d_X(x_n, x) = d_X(f^{-1}(f(x_n)), f^{-1}(y')) \leq d_Y(f(x_n), y') \to 0.$$

D'où X est hyperboliquement complet. Le même raisonnement nous donne l'autre direction.

□

Définition 1.3.17. Soient X, Y deux espaces complexes et $f : X \to Y$ une application. On dit que (X, f) est *relativement complet* dans Y si X est hyperbolique et que pour chaque suite de Cauchy $\{x_n\}$ par rapport à d_X dans X, on a que la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers un certain point dans Y.

Il est important de noter ici que la convergence dans Y dépend seulement de la topologie sur cet espace, et donc ne dépend pas du choix particulier d'une fonction de distance engendrant cette topologie.

Sauf mention contraire, si X est un sous-espace complexe d'un espace complexe Y, alors on prendra notre application comme étant $i : X \to Y$, l'inclusion de X dans Y. On dira alors simplement que X est relativement complet dans Y, sans spécifier l'application utilisée.

Proposition 1.3.18. Soient X et Y deux espaces complexes et d une fonction de distance sur Y génerant la topologie de Y. Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe. Supposons également que :

(i) (X, f) est relativement complet dans Y.

(ii) f décroît les distances de d_X à d.

(iii) $\forall y \in Y$, il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(U)$ est hyperboliquement complet.

Alors X est hyperboliquement complet.

Remarque 1.3.19. Si X est un sous-espace complexe de Y, alors la condition (iii) de la proposition précédente signifie que X est Y*-localement hyperboliquement complet.*

Démonstration. (Lang, 1987, p. 27).

□

Théorème 1.3.20.

(i) Les disques et les poly-disques sont hyperboliquement complets.

(ii) Les produits finis d'espaces hyperboliquement complets sont hyperboliquement complets.

(iii) Un sous-espace complexe fermé d'un espace hyperboliquement complet est hyperboliquement complet.

(iv) Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux espaces complexes. Si Y est hyperboliquement complet et que, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(U)$ est hyperboliquement complet, alors X est hyperboliquement complet.

(v) Soit $\pi : \tilde{Y} \to Y$ un revêtement. Alors Y est hyperboliquement complet si et seulement si $\tilde{Y}$ est hyperboliquement complet.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 27).

□

Exemple 9. $\mathbb{H}$ est hyperboliquement complet. Effectivement, soit l'application $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, appelée la transformation de Cayley dans la littérature, définie par $f(z) = (z-i)/(z+i)$. Clairement f est holomorphe, et elle est également bijective (voir lemme A.0.4). De plus, son inverse $f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ donné par $f^{-1}(z) = i(1+z)/(1-z)$ est également holomorphe, et donc f est biholomorphe. Finalement, en combinant le fait que $\mathbb{D}$ est hyperboliquement complet (par (i) du théorème précédent) et la proposition 1.3.16 (ii), on obtient bien le résultat voulu.

Exemple 10. $\mathbb{D}^*$ est hyperboliquement complet. En effet, en utilisant le revêtement $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ donné par $\pi(z) = \exp(iz)$ et l'exemple précédent, on obtient directement le résultat voulu grâce au point (v) du théorème précédent.

Lemme 1.3.21. Soit Y un espace complexe hyperboliquement complet, et soit $f : Y \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors le sous-ensemble ouvert Y_f consistant des points $y \in Y$ tel que $f(y) \neq 0$ est hyperboliquement complet.

Démonstration. Quitte à multiplier f par un petit nombre positif (ce qui laisse invariant notre sous-ensemble Y_f), on peut supposer que f envoie Y dans $\mathbb{D}$. Soit $\{y_n\}$ un suite de Cauchy dans $U := Y_f = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}$.

Comme $U \subseteq Y$, le lemme 1.3.7 nous dit que $d_Y \leq d_U$ sur U. On obtient ainsi que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy par rapport à d_Y. Ainsi, comme Y est hyperboliquement complet, cette suite converge par rapport à d_Y vers un certain point $y' \in Y$. En d'autres termes, cela signifie que $d_Y(y_n, y') \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme Y est hyperbolique, on sait que d_Y définie la topologie de Y, et donc $y_n \to y'$. De plus, comme f est continue, on sait également que $f(y_n) \to f(y')$. On sait que $d_{\mathbb{D}}$ est continue par rapport à la topologie de $\mathbb{D}$, et donc on a $d_{\mathbb{D}}(f(y_n), f(y')) \to 0$. Reste à voir que $y' \in U$.

On observe tout d'abord que $f|_U : U \to \mathbb{D}^*$. Encore une fois, comme $\mathbb{D}^* \subseteq \mathbb{D}$, on a que $d_{\mathbb{D}} \leq d_{\mathbb{D}^*}$. On obtient ainsi les inégalités

$$d_{\mathbb{D}}(f(y_n), f(y_m)) \leq d_{\mathbb{D}^*}(f(y_n), f(y_m)) \leq d_U(y_n, y_m) \to 0,$$

et l'inégalité de droite tend vers 0 lorsque $m, n \to \infty$.

Ainsi, on a que $\{f(y_n)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{D}^*$ par rapport à $d_{\mathbb{D}^*}$. On sait également, par l'exemple 10, que $\mathbb{D}^*$ est hyperboliquement complet. Ainsi, cette suite converge vers un point $p \in \mathbb{D}^*$. Mais, puisque $d_{\mathbb{D}} \leq d_{\mathbb{D}^*}$, on doit avoir que $\{f(y_n)\}$ converge vers le même point par rapport à $d_{\mathbb{D}}$. Alors, $f(y') = p \neq 0$, et donc on a bien que $y' \in U$.

Finalement, comme d_U est continue par rapport à la topologie de U, on a que $d_U(y_n, y') \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ceci conclut notre démonstration.

$\square$

CHAPITRE II

PLONGEMENT ET THÉORÈME DE BRODY

À partir de maintenant, nous aurons besoin de mesurer les dérivées sur un espace complexe quelconque Y. Ainsi, pour le reste de cet ouvrage, on considérera Y comme étant un sous-espace fermé d'une certaine variété complexe Z donnée, et les normes des dérivées sur Y pourront être mesurées en termes d'une fonction de longueur H donnée sur TZ.

2.1 Plongement hyperbolique

Nous allons débuter ce chapitre en introduisant la notion de plongement hyperbolique. Elle nous sera très utile pour la suite des choses, en particulier pour généraliser le grand théorème de Picard.

Définition 2.1.1. Soient X un sous-espace d'un espace complexe Y et $\overline{X}$ la fermeture de X dans Y. Alors, on dit que X est *hyperboliquement plongé dans* Y si pour tout $x \neq y$ dans $\overline{X}$ il existe U et V des voisinages ouverts dans $\overline{X}$ de x et y respectivement tels que $d_X(U \cap X, V \cap X) > 0$.

Remarque 2.1.2. La d_X-distance entre deux ensembles A et B est donnée par :

$$d_X(A, B) = \inf\{d_X(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Théorème 2.1.3. Soient X un sous-espace d'un espace complexe Y. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) X est hyperboliquement plongé dans Y.

(ii) X est hyperbolique, et si $\{x_n\}, \{y_n\}$ sont deux suites dans X convergeant respectivement vers les points $x, y \in \overline{X} \setminus X$, alors on a que $d_X(x_n, y_n) \to 0$ implique que $x = y$.

(iii) Soient deux points $x, y \in \overline{X}$ et $\{x_n\}, \{y_n\}$ deux suites dans X telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Si $d_X(x_n, y_n) \to 0$ alors $x = y$.

(iv) Il existe une fonction de longueur H sur TZ telle que

$$f^*(H) \ \leq \ |.|_{\text{hyp}} \qquad \forall f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X).$$

Démonstration. (Lang, 1987, p. 33).

□

Remarque 2.1.4. La condition (iv) nous dit que toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \to X$ décroît les distances de $d_{\mathbb{D}}$ à la distance d_H. De plus, comme la semi-distance de Kobayashi d_X est par construction la plus grande semi-distance sur X telle que chaque application holomorphe $f : \mathbb{D} \to X$ décroît les distances, on a que $d_H(x, y) \leq d_X(x, y) \ \ \forall x, y \in X$. On peut résumer le tout en disant que la condition (iv) nous donne que l'inclusion $i : X \to Y$ décroît les distances de d_X à la distance d_H.

Corollaire 2.1.5. Soit Y un espace complexe. Alors Y est hyperbolique si, et seulement si, Y est hyperboliquement plongé dans lui-même.

Démonstration. Le résultat est immédiat en examinant la définition de la condition (ii) du théorème précédent.

□

Proposition 2.1.6. Soit X un sous-espace relativement compact d'un espace complexe Y. Si X est hyperboliquement plongé dans Y, alors X est relativement complet dans Y.

Démonstration. Soit $\{x_n\} \subseteq X$ une suite de Cauchy par rapport à d_X. La remarque 2.1.4 nous donne alors que $d_H(x_n, x_m) \leq d_X(x_n, x_m) \to 0$. Ainsi $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\overline{X}$ par rapport à d_H. Comme $\overline{X}$ est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ et $x \in \overline{X}$ tels que $d_H(x_{n_k}, x) \to 0$.

Reste seulement à voir que $d_H(x_n, x) \to 0$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\{x_n\}$ est de Cauchy par rapport à d_H, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > N_1,\ d_H(x_n, x_m) < \epsilon/2$. Comme $\{x_{n_k}\}$ converge vers x par rapport à d_H, $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n_k > N_2,\ d_H(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et prenons un certain $n_k > N$, alors $\forall n > N$

$$d_H(x_n, x) \leq d_H(x_n, x_{n_k}) + d_H(x_{n_k}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ainsi on a bien que X est relativement complet dans Y.

□

Théorème 2.1.7. Soit X un sous-espace d'un espace complexe Y. Supposons que :

(i) X est relativement complet dans Y ;

(ii) X est hyperboliquement plongé dans Y ;

(iii) X est Y-localement hyperboliquement complet.

Alors X est hyperboliquement complet.

Démonstration. On remarque tout d'abord que la condition (i) ici correspond à la condition (i) de la proposition 1.3.18, et que la condition (iii) correspond à la condition (iii) de cette même proposition. De plus, la remarque 2.1.4 nous dit que l'inclusion $i : X \to Y$ décroit les distances de d_X à d_H. Alors, il suffit d'appliquer la proposition 1.3.18 pour obtenir le résultat voulu.

□

2.2 Bornes pour la dérivé des applications du disque

Soit Y un espace complexe et $f : \mathbb{D} \to Y$ une application holomorphe. On introduit alors un nouvel outil qui nous sera bien utile :

$$c(f) = c_H(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \|df(z)\|.$$

On remarque qu'il est possible que $c(f) = \infty$. De plus, on définit aussi

$$c(Y) = c_H(Y) = \sup_f c(f) = \sup_f \sup_{z \in \mathbb{D}} \|df(z)\|.$$

où le supremum est pris sur toutes les applications holomorphes $f : \mathbb{D} \to Y$. Il est clair que $c(f) \leq c(Y)$. De plus, on ne perd pas de généralité en prenant le supremum seulement en $z = 0$ dans notre calcul de $c(Y)$, comme en témoigne le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. Soit Y un espace complexe. Alors $c(Y) = \sup_f \|df(0)\|$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{D} \to Y$ une fonction holomorphe. Étant donné $z_0 \in \mathbb{D}$ on sait par le corollaire 1.2.2 qu'on peut trouver un automorphisme $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que $h(0) = z_0$. De plus, on sait par le corollaire 1.2.5(ii) que h préserve la norme hyperbolique, c.-à-d. que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|h'(z)v|_{\mathrm{hyp},h(z)} = |v|_{\mathrm{hyp},z} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

Alors, pour $0 \in \mathbb{D}$, on a que

$$|h'(0)v|_{\mathrm{hyp},z_0} = \frac{|h'(0)||v|}{1-|z_0|^2} = |h'(0)||v|_{\mathrm{hyp},z_0} = |v|_{hyp,0}.$$

En combinant ceci avec le fait que $d(f \circ h) = h'(0)df(z_0)$, on obtient que

$$\|df(z_0)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(z_0)v|}{|v|_{\mathrm{hyp},z_0}} = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|h'(0)||df(z_0)v|}{|v|_{\mathrm{hyp},0}} = \|d(f \circ h)(0)\| \leq \sup_g \|dg(0)\|.$$

En prenant le supremum sur tous les z_0 et les f, on obtient bien l'inégalité $c(Y) = \sup_f \sup_z \|df(z)\| \leq \sup_f \|df(0)\|$. L'inégalité dans l'autre sens est immédiate, ce qui nous donne l'égalité voulue.

□

Lemme 2.2.2. Soient $f : \mathbb{D} \to Y$ holomorphe et $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, alors

$$d_H(f(z_1), f(z_2)) \leq c(f)d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leq c(Y)d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2).$$

Démonstration. Comme $c(f) \leq c(Y)$, la seconde inégalité est claire. Soit maintenant $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ un chemin joignant z_1 à z_2 dans $\mathbb{D}$. Alors $f \circ \gamma$ est une courbe joignant $f(z_1)$ et $f(z_2)$ dans Y. En utilisant directement la définition de la norme différentielle, on voit que

$$|df(\gamma(t))\gamma'(t)|_H = \frac{|df(\gamma(t))\gamma'(t)|_H}{|\gamma'(t)|_{\mathrm{hyp},\gamma(t)}}|\gamma'(t)|_{\mathrm{hyp},\gamma(t)} \leq \|df(\gamma(t))\||\gamma'(t)|_{\mathrm{hyp},\gamma(t)}.$$

Maintenant, comme $\|df(\gamma(t))\||\gamma'(t)|_{\text{hyp},\gamma(t)} \leq c(f)|\gamma'(t)|_{\text{hyp},\gamma(t)}$, en intégrant, on obtient que $L_H(f \circ \gamma) \leq c(f)L_{\text{hyp}}(\gamma)$. Comme $d_H(f(z_1), f(z_2)) \leq L_H(f \circ \gamma)$, on a ainsi que $d_H(f(z_1), f(z_2)) \leq c(f)L_{\text{hyp}}(\gamma)$. Finalement, il suffit de prendre l'infimum sur tous les γ pour obtenir la première inégalité du lemme.

$\square$

Théorème 2.2.3. Soit Y un espace complexe. On a alors que

(i) Si $c(Y)$ est fini, alors Y est hyperbolique.

(ii) Si Y est compact, alors Y est hyperbolique si, et seulement si, $c(Y)$ est fini.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 66).

$\square$

Théorème 2.2.4. Soit X un sous-espace complexe d'un espace complexe Y. On a que

(i) Si $c(X)$ est fini, alors X est hyperboliquement plongé dans Y.

(ii) Si X est relativement compact, alors X est hyperboliquement plongé dans Y si, et seulement si, $c(X)$ est fini.

Démonstration. (Lang, 1987, p. 67).

$\square$

Il est important de noter dans (ii) que si X est relativement compact, alors la finitude de $c(X)$ ne dépend ni de la fonction de longueur H sur Y, et ni même du choix de l'espace complexe Y dans lequel X est plongé et est relativement compact.

2.3 Brody hyperbolique

Définition 2.3.1. Soit Y un espace complexe. On dit que Y est *Brody hyperbolique* si chaque application holomorphe $f : \mathbb{C} \to Y$ est constante.

Définition 2.3.2. Similairement, si X est un sous-ensemble d'un espace complexe Y, on dit que X est *Brody hyperbolique dans* Y si chaque application holomorphe $f : \mathbb{C} \to Y$ telle que $f(Y) \subseteq X$ est constante. Par contre, lorsque le contexte sera clair, on ne fera pas référence à Y : on dira simplement que X est Brody hyperbolique.

Corollaire 2.3.3. Soit Y un espace complexe. Si Y est hyperbolique, alors Y est Brody hyperbolique.

Démonstration. On va montrer la contraposée. Supposons qu'il existe une application $\tilde{f} : \mathbb{C} \to Y$ holomorphe non constante. Soit alors $y_1, y_2 \in \tilde{f}(\mathbb{C}) \subseteq Y$ tels que $y_1 \neq y_2$. Ainsi, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\tilde{f}(z_1) = y_1$ et $\tilde{f}(z_2) = y_2$.

On sait que, par la démonstration de l'exemple 3 au premier chapitre, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, il existe une application holomorphe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telle que $g(0) = z_1$ et $g(q) = z_2$, où q est arbitrairement proche de 0. Alors, $f = \tilde{f} \circ g : \mathbb{D} \to Y$ est une application holomorphe avec $f(0) = y_1$, $f(q) = y_2$ et donc

$$d_Y(y_1, y_2) = \inf \sum_{i=1}^{m} d_{\text{hyp}}(p_i, q_i) \leq d_{\text{hyp}}(0, q).$$

Comme $d_{\text{hyp}}(0, q) \to 0$ lorsque $q \to 0$ (voir démonstration de l'exemple 3), on obtient que $d_Y(y_1, y_2) = 0$ pour $y_1 \neq y_2$.

$\square$

Par contre, la réciproque de ce fait est fausse : il exite des espaces complexes qui sont Brody hyperbolique, mais pas hyperbolique. L'exemple suivant confirme la chose.

Exemple 11. Soit $Y = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |zw| < 1 \text{ et } |w| < 1 \text{ si } z = 0\}$. Alors Y est Brody hyperbolique, mais n'est pas hyperbolique.

En effet, supposons que Y n'est pas Brody hyperbolique, c.-à-d. qu'il existe une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to Y$ non constante. Alors, si on note par p_z la projection dans le plan z, le théorème de Liouville nous dit que $p_z \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ est constante. Donc, il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $p_z \circ f(\mathbb{C}) = z_0$, c.-à-d. $f(\mathbb{C}) \subseteq p_z^{-1}(z_0)$. Si $z_0 \neq 0$, en posant $r = 1/|z_0|$ on a que $p_z^{-1}(z_0) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r\} = \mathbb{D}_r$. Si $z_0 = 0$, on a que $p_z^{-1}(z_0) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\} = \mathbb{D}$. Dans tous les cas, f est une application holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ vers un espace hyperbolique (et donc Brody hyperbolique), ce qui est impossible. Ainsi, Y est bien Brody hyperbolique.

Par contre, Y n'est pas hyperbolique, car $\forall w_0 \in \mathbb{D}$, $d_Y((0,0),(0,w_0)) = 0$. En effet, soit le chemin de Kobayashi (pour $n \geq 2$) définie par $f_1(z) = (z,0)$, $f_2(z) = (1/n, nz)$ et $f_3(z) = (1/2 + z/2, w_0)$, avec $p_1 = p_2 = p_3 = 0, q_1 = 1/n, q_2 = w_0/n$ et $q_3 = -2/n$. Alors

$$d_Y((0,0),(0,w_0)) \leq d_{\text{hyp}}(0,1/n) + d_{\text{hyp}}(0,w_0/n) + d_{\text{hyp}}(0,-2/n).$$

Pour calculer ces distances hyperboliques, par exemple $d_{\text{hyp}}(0,1/n)$, on peut utiliser $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$, le segment joignant 0 à $1/n$ définie par $\gamma(t) = t/n$. Alors

$$d_{\text{hyp}}(0,1/n) \leq \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\text{hyp},\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{|1/n|}{1-|t/n|^2}\, dt = \frac{1}{2n} \log\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right).$$

En faisant le même processus pour les deux autres distances hyperboliques, on obtient que

$$d_Y((0,0),(0,w_0)) \leq \frac{1}{2n}\log\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right)+\frac{|w_0|}{2n}\log\left(\frac{1+|w_0|/n}{1-|w_0|/n}\right)+\frac{1}{n}\log\left(\frac{1+2/n}{1-2/n}\right).$$

On voit que le côté de droit tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, et donc on a bien que $d_Y((0,0),(0,w_0)) = 0$, ce qui conclut cet exemple.

On voudrait savoir dans quel contexte est-ce que cette réciproque est vraie. Le théorème de Brody nous permettra de répondre à cette question. Avant d'explorer ce résultat, nous allons regarder un lemme crucial à l'aide duquel on pourra reparamétriser une application holomorphe $f : \mathbb{D}_r \to X$ dans un sous-espace complexe X par une nouvelle application holomorphe $g : \mathbb{D}_r \to X$ possédant maintenant une borne uniforme sur pour ses dérivées. Cette application sera telle que $g(\mathbb{D}_r) \subseteq f(\mathbb{D}_r)$.

Lemme 2.3.4. (Lemme de reparamétrisation de Brody) Soit X un sous-ensemble d'un espace complexe Y et $f : \mathbb{D}_r \to X$ une application holomorphe.

Posons $c > 0$ et pour $0 \leq t \leq 1$, soit $f_t(z) = f(tz)$.

(i) Si $\|df(0)\| > c$, alors il existe $t < 1$ et un automorphisme $h : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ tels que si on pose $g = f_t \circ h$, alors

$$\sup_{z\in\mathbb{D}_r} \|dg(z)\| = \|dg(0)\| = c.$$

(ii) Si $\|df(0)\| = c$, alors on obtient la même conclusion en permettant $t \leq 1$.

Démonstration. Soit $m_t : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ la multiplication par t. Alors f_t peut se factoriser comme suit :

$$f_t : \mathbb{D}_r \xrightarrow{m_t} \mathbb{D}_r \xrightarrow{f} X.$$

On a ainsi que $f_t = f \circ m_t$, et donc que $df_t(z) = df(tz)m_t'(z) = tdf(tz)$ On obtient donc l'égalité suivante :

$$\|df_t(z)\| = \|df(tz)\| t \frac{1 - |z/r|^2}{1 - |tz/r|^2}. \tag{2.1}$$

En effet, en utilisant la définition de la norme hyperbolique sur $\mathbb{D}_r$ et en se rappelant que $T\mathbb{D}_r = \mathbb{D}_r \times \mathbb{C}$, on a que

$$\|df_t(z)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df_t(z)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,z}} = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|tdf(tz)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,z}} = t \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(tz)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,z}}.$$

On se rappelle qu'ici H est la fonction de longueur donnée sur TZ, où Z est la variété complexe dans laquelle Y est plongé. Ainsi, on observe que

$$|v|_{\mathrm{hyp},r,z} = \frac{|v/r|}{1 - |z/r|^2} = \frac{|v/r|}{1 - |tz/r|^2} \cdot \frac{1 - |tz/r|^2}{1 - |z/r|^2} = |v|_{\mathrm{hyp},r,tz} \frac{1 - |tz/r|^2}{1 - |z/r|^2}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\|df_t(z)\| = t \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(tz)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,tz}} \cdot \frac{1 - |z/r|^2}{1 - |tz/r|^2} = \|df(tz)\| t \frac{1 - |z/r|^2}{1 - |tz/r|^2}.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue ! Posons $s(t) := \sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|df_t(z)\|$. On voudrait voir que s est continue sur $[0, 1)$. Pour ce faire, on aura besoin de l'affirmation suivante :

Affirmation : La fonction $z \to \|df(z)\|$ est continue sur $\mathbb{D}_r$.

En effet, on a que $\sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(z)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,z}} = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(z)v|_H}{|v/r|}(1 - |z/r|^2)$, et donc que

$$\|df(z)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df(z)v|_H}{|v/r|}(1 - |z/r|^2) = r(1 - |z/r|^2) \sup_{v \in \mathbb{S}^1} |df(z)v|_H. \tag{2.2}$$

La dernière égalité est valide car, $\forall a \in \mathbb{C}^*$, l'expression $|df(z)v|_H/|v|$ reste invariante en remplaçant v par av. Maintenant, par définition, la fonction de longueur $H : TZ \to [0, \infty)$ est continue. De plus, comme f est holomorphe et donc en particulier C^1, sa différentielle $df : T\mathbb{D}_r \to TZ$ est continue et donc $\mathbb{D}_r \times \mathbb{S}^1(z, v) \to df(z)v$ est une section continue de TZ. On voit ainsi que $(z, v) \to \|df(z)\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{D}_r$. Le théorème A.0.5 nous donne alors que $\sup_{v \in \mathbb{S}^1} |df(z)v|_H$ est une fonction continue sur $\mathbb{D}_r$. En combinant ceci avec (2.2), on voit que $z \to \|df(z)\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{D}_r$.

L'affirmation au-dessus nous donne que $(t, z) \to \|df(tz)\|$ est continue sur $\{(t, z) : t|z| < r\} \subset [0, \infty) \times \mathbb{C}$. En particulier, elle est continue sur $[0, 1) \times \mathbb{D}_r$. Comme $(t, z) \to t(1-|z/r|^2)/(1-|tz/r|^2)$ est également continue sur $[0, 1)\times\overline{\mathbb{D}_r}$, en utilisant (2.1) on voit que $(t, z) \to \|df_t(z)\|$ s'étend par continuité sur $[0, 1) \times \overline{\mathbb{D}_r}$. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1)$, on a que

$$s(t) = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|df_t(z)\| = \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}_r}} \|df_t(z)\| = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}_r}} \|df_t(z)\|.$$

On applique alors le théorème A.0.5 une seconde fois pour obtenir que $s(t)$ est continue sur $[0, 1)$. Si $t \in [0, 1)$, on observe également que comme $(1-|z/r|^2)/(1-|tz/r|^2)$ s'annule sur le bord $\partial\mathbb{D}_r$, donc $\|df_t(z)\| = 0$ sur $\partial\mathbb{D}_r$ et $\|df_t(z)\|$ prend son maximum à l'intérieur de $\mathbb{D}_r$. En d'autres termes, on a que :

$$s(t) = \max_{z \in \mathbb{D}_r} \|df_t(z)\| \qquad \forall t \in [0, 1).$$

Maintenant, comme $\|df(0)\| > c$, il existe $t_1 \in [0, 1)$ tel que $t_1\|df(0)\| = c$. On observe alors que

$$s(t_1) \geq \|df_{t_1}(0)\| = \|df(t_1 z)\| t_1 \frac{1 - |z/r|^2}{1 - |t_1 z/r|^2}\bigg|_{z=0} = t_1\|df(0)\| = c.$$

La continuité de s nous donne que $s([0, t_1])$ est un intervalle contenant $[s(0), s(t_1)]$.

Comme $s(0) = 0$ et que $0 \leq c \leq s(t_1)$, on voit que c est contenu dans $s([0, t_1])$, et donc qu'il existe $t_0 \in [0, t_1]$ tel que $s(t_0) = c$. En particulier, on a que $t_0 < 1$.

Ici $t_0 < 1$, donc $s(t_0)$ est le maximum de $\|df_{t_0}(z)\|$ sur $\mathbb{D}_r$. Il existe donc $z_0 \in \overline{\mathbb{D}_r}$ tel que $c = s(t_0) = \|df_{t_0}(z_0)\|$. On peut alors trouver $h : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ un automorphisme tel que $h(0) = z_0$. En posant $g = f_{t_0} \circ h$, il ne reste plus qu'à montrer que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|dg(z)\| = \|dg(0)\| = c.$$

Mais ceci est relativement simple ! On sait par la remarque 1.2.6 que tout automorphisme $h : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ préserve la norme hyperbolique, c.-à-d. que pour tout $z \in \mathbb{D}_r$, on a

$$|h'(z)v|_{\mathrm{hyp},r,h(z)} = |v|_{\mathrm{hyp},r,z} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

Avec ce fait, on voit que

$$\|dg(z)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|h'(z)||df_{t_0}(h(z))v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,z}} = \sup_{v \in \mathbb{C}^*} \frac{|df_{t_0}(h(z))v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r,h(z)}} = \|df_{t_0}(h(z))\|,$$

et donc que $\|dg(0)\| = \|df_{t_0}(h(0))\| = \|df_{t_0}(z_0)\| = c$. On ainsi que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|dg(z)\| = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|df_{t_0}(h(z))\| = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} \|df_{t_0}(z)\| = c,$$

ce qui conclut la démonstration pour la partie (i).

Pour la partie (ii), on doit montrer que $s(t) \to s(1)$. On va tout d'abord montrer que $s(t)$ est croissante sur $[0, 1]$. En effet, soit $t_1 < t_2 < 1$. Alors, il existe $z_1 \in \mathbb{D}_r$ tel que $s(t_1) = \|df_{t_1}(z_1)\|$. Prenons $z_2 = t_1 z_1 / t_2$. Alors $t_2 z_2 = t_1 z_1$, $z_1 > z_2$, et on voit que

$$t_1 \frac{1 - |z_1/r|^2}{1 - |t_1 z_1/r|^2} < t_2 \frac{1 - |z_2/r|^2}{1 - |t_2 z_2/r|^2}.$$

On obtient alors que $s(t_1) = \|df_{t_1}(z_1)\| < \|df_{t_2}(z_2)\| \leq s(t_2)$. De plus, comme le facteur $t(1-|z/r|^2)/(1-|tz/r|^2)$ est plus petit que 1 si $t<1$ et qu'il est égale à 1 en $t=1$, on obtient en fait que $s(t)$ est croissante jusqu'en $t=1$.

Ainsi, pour montrer que $s(t) \to s(1)$, il suffit de montrer que

$$\sup_{0\leq t<1} s(t) \geq s(1) = \sup_{z\in\mathbb{D}_r} \|df(z)\|.$$

Soit maintenant $z \in \mathbb{D}_r$. On observe que pour $t \in (|z|/r, 1)$, le point $w = z/t$ est dans $\mathbb{D}_r$. On a que $tw = z$ et, en utilisant (2.1), on voit que

$$s(t) \geq \|df_t(w)\| = \|df(tw)\| t\frac{1-|w/r|^2}{1-|tw/r|^2} = \|df(z)\| t\frac{1-|z/tr|^2}{1-|z/r|^2}.$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient que $\sup_{0\leq t<1} s(t) \geq \|df(z)\|$. Ceci est vrai pour tout $z \in \mathbb{D}_r$, et donc en prenant le supremum sur $\mathbb{D}_r$ on obtient bien que

$$\sup_{0\leq t<1} s(t) \geq \sup_{z\in\mathbb{D}_r} \|df(z)\| = s(1).$$

On a deux cas à considérer : si $s(1)$ est fini ou non. Si $s(1) < \infty$, on a que s est une fonction continue et croissante sur $[0,1]$, et donc $s([0,1]) = [s(0), s(1)] = [0, s(1)]$. Comme $s(1) \geq \|df(0)\| = c$, on a que $c \in s([0,1])$, et ainsi il existe un $t_0 \in [0,1]$ tel que $s(t_0) = c$. Si $s(1) = \infty$, alors $s([0,1)) = [0,\infty)$. Alors, dans ce cas, on voit directement que $c \in s([0,1))$, et donc il existe un $t_0 \in [0,1)$ tel que $s(t_0) = c$. Finalement, il suffit de faire comme à la fin de la démonstration de la partie (i) pour obtenir le résultat voulu.

$\square$

2.3.1 Théorème de Brody

Nous avons maintenant développé les outils adéquats pour voir quand est-ce que Brody hyperbolique implique (Kobayashi) hyperbolique. Nous saurons la réponse à cette question en regardant le résultat principal de ce chapitre : le théorème de Brody. Ce dernier est considéré comme étant les deux théorèmes suivants combinés ensemble.

Théorème 2.3.5. Soit X un sous-espace relativement compact d'un espace complexe Y. Si $\overline{X}$ est Brody hyperbolique dans Y, alors il existe un voisinage ouvert de $\overline{X}$ dans Y qui est hyperbolique.

Théorème 2.3.6. Soit X un sous-espace relativement compact d'un espace complexe Y. Supposons que X n'est pas hyperboliquement plongé dans Y (c'est le cas si X n'est pas hyperbolique). Alors, il existe une suite d'applications holomorphes

$$g_n : \mathbb{D}_{r_n} \to X$$

définient sur des disques de rayons r_n croissant vers l'infini et qui converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ vers une application holomorphe

$$g : \mathbb{C} \to \overline{X},$$

satisfaisant :

$$\|dg_n(0)\|_{\text{euc}} = 1, \quad r_n = \sup_{z \in \mathbb{D}_{r_n}} \|dg_n(z)\|,$$

$$\|dg(0)\|_{\text{euc}} = 1 = \sup_{z \in \mathbb{C}} \|dg(z)\|_{\text{euc}} .$$

Remarque 2.3.7. Ici, comme la norme pour $dg_n(z)$ est par rapport à la norme hyperbolique sur $\mathbb{D}_{r_n}$ et que la norme pour $dg(0)$ est par rapport à la norme euclidienne standard sur $\mathbb{C}$, on va utiliser le sous-indice euc pour éviter toute confusion. Mais, dans les deux cas, la fonction de longueur sur l'image est notre H donnée.

Démonstration. On démontrera ici les théorèmes 2.3.5 et 2.3.6 en même temps, en suivant les grandes lignes de la démonstration de (Lang, 1987, chap. 3, p. 70).

On va raisonner par contraposition. Supposons ainsi qu'il n'existe pas de voisinage ouvert de $\overline{X}$ dans Y qui soit hyperbolique. Soit $\{U_n\}$ une suite décroissante de voisinages ouverts de $\overline{X}$ dans Y tels que $\bigcap U_n = \overline{X}$ (comme X est relativement compact, c'est bien possible de trouver une telle famille de voisinages en prenant par exemple $U_n = \{p \in Z \mid d_H(X,p) < {}^1\!/\!{}_n\} \bigcap Y$), et tels que $\overline{U_n}$ est compact pour tout n. En effet, $\overline{U_n}$ est compact car Y est localement un sous-espace fermé d'une variété complexe Z de dimension finie, et donc d'une variété localement compacte. En particulier, ceci implique que toutes les boules pour la distance d_H sont précompactes.

Ainsi, par le théorème 2.2.3 (i), on a que $c(U_n) = \infty$ pour tout n. On a donc qu'il existe une suite d'applications holomorphes

$$f_n : \mathbb{D} \to U_n \quad \text{telle que} \quad \|df_n(0)\| \to \infty \ \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Quitte à prendre une sous-suite, on suppose que $\|df_n(0)\|$ croît strictement vers l'infini. Posons maintenant $r_n = \|df_n(0)\|$ et $\tilde{f}_n : \mathbb{D}_{r_n} \to U_n$ par $\tilde{f}_n(z) = f_n(z/r_n)$. Comme $|v|_{\mathrm{hyp},r_n,0} = r_n^{-1}|v| = r_n^{-1}|v|_{\mathrm{hyp},1,0}$ on voit que

$$\|d\tilde{f}_n(0)\| = \sup_{v\in\mathbb{C}^*} \frac{|d\tilde{f}_n(0)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},r_n,0}} = \sup_{v\in\mathbb{C}^*} \frac{r_n^{-1}|df_n(0)v|_H}{r_n^{-1}|v|_{\mathrm{hyp},1,0}} = \sup_{v\in\mathbb{C}^*} \frac{|df_n(0)v|_H}{|v|_{\mathrm{hyp},1,0}} = r_n.$$

Grâce à la deuxième partie du lemme de reparamétrisation, on alors peut trouver une fonction holomorphe $g_n : \mathbb{D}_{r_n} \to U_n$ telle que

$$\|dg_n(0)\|_n = \sup_{z\in\mathbb{D}_{r_n}} \|dg_n(z)\|_n = r_n.$$

Pour simplifier la lecture de cette démonstration, on écrira $\mathbb{D}_n$ au lieu de $\mathbb{D}_{r_n}$, et $\|dg_n(z)\|_n$ pour dénoter la norme hyperbolique sur le disque de rayon r_n.

Maintenant, comme $|v|_{\mathrm{hyp},r_n,0} = r_n^{-1}|v|$, on voit que $\|dg_n(0)\|_n = r_n\|dg_n(0)\|_{\mathrm{euc}}$, et donc que $\|dg_n(0)\|_{\mathrm{euc}} = 1$.

Soit $m \geq 1$ et $n > m$. Comme $\|dg_n\| := \sup_{z\in\mathbb{D}_n} \|dg_n(z)\| \leq r_n$ on voit que, pour tout $z \in \mathbb{D}_n$ et tout $v \in \mathbb{C}$, on a

$$|dg_n(z)v|_H \leq \|dg_n\||v|_{\mathrm{hyp},r_n,z} \leq r_n|v|_{\mathrm{hyp},r_n,z} = r_n\frac{|v/r_n|}{1-|z/r_n|^2} = \frac{|v|}{1-|z/r_n|^2}. \quad (2.3)$$

Si $z \in \overline{\mathbb{D}_m}$ on a que $1 - |z/r_n|^2 \geq 1 - (r_m/r_{m+1})^2 > 0$, et donc si on pose $c_m = 1/(1 - (r_m/r_{m+1})^2)$, alors on voit que, pour tout $n > m$, on a

$$|dg_n(z)v|_H \leq c_m|v| \qquad \forall z \in \overline{\mathbb{D}_m} \qquad \forall v \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, étant donné $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}_m}$, soit $\gamma : [0,1] \to \overline{\mathbb{D}_m}$ le segment joignant z_1 à z_2, c.-à-d. $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$. Comme $\gamma(t) \in \overline{\mathbb{D}_m}$, pour tout $n > m$, on a

$$|d(g_n \circ \gamma)(t)|_H = |dg_n(\gamma(t))\gamma'(t)|_H \leq c_m|\gamma'(t)| = c_m|z_2 - z_1|.$$

Comme $g \circ \gamma$ est un chemin joignant $g(z_1)$ à $g(z_2)$, on obtient en intégrant que

$$d_H(g_n(z_1), g_n(z_2)) \leq \int_0^1 |d(g_n \circ \gamma)(t)|_H \, dt \leq c_m|z_2 - z_1|.$$

Comme c'est vrai pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}_m}$ et tout $n > m$ cela montre que la suite $\{g_n|_{\overline{\mathbb{D}_m}}\}_{n>m}$ est équicontinue sur $\overline{\mathbb{D}_m}$. De plus, comme les fonctions g_n, $n > m$ prennent leurs valeurs dans le compact $\overline{U_m}$, on peut utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli (théorème 1.1.3). On va maintenant extraire une sous-suite convergente par un procédé diagonal. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on construit par récurrence sur m des sous-suites $\{g_{n_{m,k}}\}_{k\geq 0}$ de $\{g_n\}_{n\geq 0}$ de telle sorte que

(i) $n_{m,k} > m$ (et donc $g_{n_{m,k}}$ est définie sur $\overline{\mathbb{D}_m}$) ;

(ii) $\{g_{n_{m+1,k}}\}_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $\{g_{n_{m,k}}\}_{k\geq 0}$;

(iii) $g_{n_{m,k}}$ converge uniformément vers une fonction $g^{(m)}$ sur $\overline{\mathbb{D}_m}$ lorsque $k \to \infty$.

Par construction, on a bien que si $n > m$ alors $g^{(n)} = g^{(m)}$ sur $\overline{\mathbb{D}_m}$. De plus, $g^{(m)}$ prend ses valeurs dans $\cap_k U_{n_{m,k}} = \overline{X}$. On peut alors définir une fonction $g : \mathbb{C} \to \overline{X}$ par $g = g^{(m)}$ sur $\overline{\mathbb{D}_m}$. Comme les fonctions holomorphes $g_{n_{m,k}}$ convergent uniformément vers $g^{(m)}$ (sur $\overline{\mathbb{D}_m}$, donc en particulier sur les compacts de $\mathbb{D}_m$), le théorème 1.1.4 (i) nous donne que $g^{(m)}$, et donc g, est holomorphe sur $\mathbb{D}^m$. On a donc que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Pour tout $m \geq 0$, $\{g_{n_{k,k}}\}_{k\geq m}$ est une sous-suite de $\{g_{n_{m,k}}\}_{k\geq 0}$ et donc elle converge uniformément vers $g^{(m)} = g$ sur $\overline{\mathbb{D}_m}$. Tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$ est contenu dans $\mathbb{D}_m$ dès que m est assez grand. Alors, on voit que la sous-suite diagonale $g_{n_{k,k}} : \mathbb{D}_{n_{k,k}} \to U_{n_{k,k}}$ converge vers g uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Ainsi, quitte à la remplacer par la sous-suite $\{g_{n_{k,k}}\}_{k\geq m}$ on peut ainsi supposer que la suite $g_n : \mathbb{D}_n \to U_n$ converge vers g uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Reste seulement à voir que g n'est pas constante.

En utilisant la deuxième partie du théorème 1.1.4, on obtient que $\|dg_n(z) - dg(z)\|_{\text{euc}} \to 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Maintenant, pour tout $z \in \mathbb{D}_n$ et $v \in \mathbb{C}$, (2.3) nous donne que $|dg_n(z)v|_H \leq |v|/(1-|z/r_n|^2)$ et donc $\|dg_n(z)\|_{\text{euc}} \leq 1/(1-|z/r_n|^2)$. Si on fixe z et $n \to \infty$, on obtient que $\|dg_n(z)\|_{\text{euc}} \leq 1$ pour tout

$z \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, pour $z = 0$ on a $1 = \|dg_n(0)\|_{\text{euc}} \to \|dg(0)\|_{\text{euc}}$. On voit ainsi que

$$\|dg(0)\|_{\text{euc}} = 1 = \sup_{z \in \mathbb{C}} \|dg(z)\|_{\text{euc}},$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 2.3.6. De plus, comme $dg(0) \neq 0$, on voit que g n'est pas constante. On a donc une fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \to X$ qui n'est pas constante, et ainsi X n'est pas Brody hyperbolique. Ceci complète la démonstration du théorème 2.3.5.

□

Une conséquence directe du théorème 2.3.5 et du corollaire 2.3.3 est le théorème suivant :

Théorème 2.3.8. Soit Y un espace complexe compact. Alors Y est Brody hyperbolique si, et seulement si, Y est hyperbolique.

Ainsi, en combinant ce dernier théorème avec le théorème 2.2.3 (ii), on obtient :

Théorème 2.3.9. Soit Y un espace complexe compact. Alors Y est Brody hyperbolique si, et seulement si, $c(Y)$ est fini.

2.3.2 Applications du théorème de Brody

On va maintenant voir une belle application du théorème de Brody faisant intervenir le complément d'une hypersurface analytique D dans un espace complexe Y, pour ensuite élargir notre contexte encore plus. Avant tout, on va regarder la définition d'une hypersurface analytique, ainsi que trois résultats qui nous serviront par la suite dans la démonstration des résultats qui nous intéressent.

Définition 2.3.10. Une *hypersurface analytique* D d'un espace complexe Y est un sous-espace fermé de Y qui est localement donnée par le lieu d'annulation d'une seule fonction holomorphe non triviale. En d'autres termes, pour tout point $p \in D$, il existe V un voisinage ouvert de p dans Y tel que $D \cap V = \{q \in V : f(q) = 0\}$ pour certaine fonction holomorphe f sur V. En particulier, D est un sous-espace complexe fermé de Y.

Corollaire 2.3.11. Soit Y un espace complexe et D une hypersurface analytique de Y. Alors $Y \setminus D$ est Y-localement hyperboliquement complet.

Démonstration. On se souvient que pour nous, Y est un sous-espace fermé d'une variété complexe Z donnée. Alors, pour tout $y \in Y$, on peut trouver V un voisinage de y dans Y tel que V est un sous-espace fermé du poly-disque $\mathbb{D}^N$, et tel que $D \cap V = \{q \in V : f(q) = 0\}$ pour certaine fonction holomorphe f sur V (en prenant $f \equiv 0$ si $D \cap V = \emptyset$). Alors, le théorème 1.3.20 (iii) nous donne que V est hyperboliquement complet.

De plus, la fonction continue f est définie sur un sous-ensemble fermé de $\mathbb{D}^N$, et donc elle est bornée. En appliquant le lemme 1.3.21 sur V, on obtient que $V_f = (Y \setminus D) \cap V$ est hyperboliquement complet dans V. Ainsi, $Y \setminus D$ est bien Y-localement hyperboliquement complet.

$\square$

Lemme 2.3.12. Soit X un sous-espace fermé d'un espace complexe Y. Soit U un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{C}$. Soit $g : U \to Y$ holomorphe. Si $g^{-1}(X)$ ne consiste pas de points isolés, alors $g(U) \subseteq X$.

Démonstration. Soit $\{z_n\}$ une suite dans $g^{-1}(X)$ qui converge vers un certain $z \in U$. Soit V un voisinage ouvert de $g(z)$ dans Y sur lequel X est définie par le lieu d'annulation commun d'un nombre fini de fonctions holomorphes f_i, où $i = 1, ..., n$.

Soit U_0 une composante connexe de $g^{-1}(V)$ telle que $z_n \in g^{-1}(V)$ lorsque n est très grand (en particulier on obtient que $z \in U_0$ car $\mathbb{C}$ est Hausdorff). Alors, lorsque n est très grand, $f_i \circ g(z_n) = 0$ pour tout z_n, car $g(z_n) \in V \cap X$. Comme $\{z_n\}$ n'est pas un ensemble discret et que $f_i \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, le théorème des zéros isolés s'applique. On obtient ainsi que $f_i \circ g(z) = 0$ pout tout $z \in U_0$, et donc que g envoie U_0 dans X. On a donc réussi à trouver un certain ouvert connexe qui est contenu dans U et envoyé dans X par g.

Comme X est fermé dans Y par hypothèse, on a ainsi que pour tout W ouvert de U avec $g(W) \subseteq X$, on a aussi $g(\overline{W}) \subseteq X$ (où $\overline{W}$ est la fermeture de W dans U, voir le corollaire A.0.6 dans l'annexe pour une preuve de ce fait). De plus, si $z \in \overline{W}$, alors z est un point limite d'éléments de W, et donc on sait qu'il exisite un voisinage ouvert de z envoyé dans X par g par la première partie de cette preuve.

Ainsi, on obtient récursivement que les sous-ensembles ouverts de U envoyés dans X par g sont ordonnés par inclusion et donc, par les arguments qui précèdent, on doit avoir que l'élément maximal est U au complet.

$\square$

Lemme 2.3.13. Soit D une hypersurface analytique d'un espace complexe Y et U un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$. Soit $g_n : U \to Y \setminus D$ une suite d'applications holomorphes, convergent uniformément vers g. Alors soit $g(U) \subseteq D$ ou $g(U) \subseteq Y \setminus D$.

Démonstration. Si $g(U) \cap D = \emptyset$, alors directement $g(U) \subseteq Y \setminus D$.

Sinon, supposons par absurde que $g(U) \nsubseteq D$. Alors, par le lemme précédent,

$g^{-1}(D)$ consiste de points isolés. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $g(z_0) \in D$. Soit $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ un petit cercle centré en z_0 tel que $g(\mathbb{S}_\epsilon(z_0)) \subseteq Y \setminus D$. On note qu'un tel cercle existe puisque $g^{-1}(D)$ consiste de points isolés.

On prend $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ assez petit de sorte que $g(\mathbb{S}_\epsilon(z_0)) \subseteq V$, où V est un petit voisinage ouvert de $g(z_0)$, sur lequel D est définie par l'ensemble des points de Y satisfaisant $f = 0$, pour une certaine application holomorphe f sur V. Alors, les zéros de $f \circ g$ sont discrets sur $g^{-1}(V)$ et on peut prendre $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ de sorte que $f \circ g$ n'ait pas de zéros sur $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$. On pourra ainsi appliquer le principe de l'argument.

Si on note par $Z(f \circ g_n, \mathbb{S}_\epsilon(z_0))$ le nombre de zéros de $f \circ g_n$ dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$, le principe de l'argument nous donne que

$$Z(f \circ g_n, \mathbb{S}_\epsilon(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_\epsilon(z_0)} d \log(f \circ g_n).$$

On peut également faire le même processus pour g au lieu de g_n, car $g_n(U) \subseteq Y \setminus D$ et donc $f \circ g_n$ n'a aucun zéro dans tout U, en particulier aucun zéro sur $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ et seulement des zéros discrets dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ (aucun zéro dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ en fait). Ainsi le principe de l'argument s'applique également. Comme les g_n convergent uniformément vers g, on peut interchanger la limite et l'intégrale et on obtient que

$$\lim_{n \to \infty} Z(f \circ g_n, \mathbb{S}_\epsilon(z_0)) = Z(f \circ g, \mathbb{S}_\epsilon(z_0)).$$

De plus, g_n envoie l'intérieur de $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ en dehors de D, et donc n'a pas de zéro dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$. Alors $f \circ g$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$ également. Ceci est une contradiction, car $g(z_0) \in D$ et z_0 est dans $\mathbb{S}_\epsilon(z_0)$. Donc, dans ce cas, on obtient bien que $g(U) \subseteq D$.

$\square$

Nous sommes désormais bien équipé pour étudier le fameux résultat tant attendu en lien avec le complément d'une hypersurface analytique dans un espace complexe compact.

Théorème 2.3.14. Soit D une hypersurface analytique d'un espace complexe compact Y.

(i) Si $Y \setminus D$ n'est pas hyperboliquement plongé dans Y, alors il existe une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to Y$ telle que $g(\mathbb{C}) \subseteq D$ ou $g(\mathbb{C}) \subseteq Y \setminus D$, et

$$\|dg(0)\|_{\mathrm{euc}} = 1 = \sup_{z \in \mathbb{C}} \|dg(z)\|_{\mathrm{euc}}.$$

(ii) Si D et $Y \setminus D$ sont Brody hyperboliques, alors $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans Y, et est également hyperboliquement complet.

Démonstration. Supposons que $Y \setminus D$ n'est pas hyperboliquement plongée dans Y. Comme $\overline{Y \setminus D} = Y$ et que Y est compact, on a que $Y \setminus D$ est relativement compact. Ainsi, le théoreme 2.3.6. nous donne l'existence d'une suite d'applications holomorphes

$$g_n : \mathbb{D}_{r_n} \to Y \setminus D \qquad \text{avec } r_n \to \infty$$

telle que

$$\|dg_n(0)\|_{\mathrm{euc}} = 1 \quad \text{et} \quad r_n = \sup_{z \in \mathbb{D}_{r_n}} \|dg_n(z)\|.$$

De plus, ce même théorème nous donne en plus que $\{g_n\}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to Y$ non constante, satisfaisant

$$\|dg(0)\|_{\mathrm{euc}} = 1 = \sup_{z \in \mathbb{C}} \|dg(z)\|_{\mathrm{euc}}.$$

Reste seulement à voir si l'image de g peut intersectée D ! Pour ce faire, il nous suffit d'appliquer le lemme 2.3.13. On a bien qu'il est possible d'appliquer ce lemme dans notre contexte. En effet, pour tout sous-ensemble compact $K \subseteq \mathbb{C}$, il existe U un ouvert connexe borné tel que $K \subseteq U \subseteq \overline{U}$ avec $\overline{U}$ fermé et borné dans $\mathbb{C}$, et donc compact.

Ainsi, on a convergence uniforme des g_n sur $\overline{U}$, et en particulier sur U. On peut appliquer le résultat sur U, et ensuite restreindre sur $K \subseteq U$. On obtient (si $g(\mathbb{C}) \cap D \neq \emptyset$) que pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, si $g(K) \subseteq D$ alors $g(\mathbb{C}) \subseteq D$ (cette implication est facile à voir par absurde). On a donc réussi à prouver (i).

On remarque aussi que la contraposée de (i) nous donne également que si D et $Y \setminus D$ sont Brody hyperboliques, alors $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans Y. Il reste donc seulement à voir que Y est hyperboliquement complet pour conclure la démonstration de (ii).

On sait, comme souligné dans le corollaire 2.3.11, que $Y \setminus D$ est Y-localement hyperboliquement complet. De plus, comme $\overline{Y \setminus D} = Y$ est compact, on obtient en appliquant la proposition 2.1.6 que $Y \setminus D$ est relativement complet dans Y. Finalement, on applique le théorème 2.1.7 pour obtenir que $Y \setminus D$ est hyperboliquement complet, ce qui conclut notre preuve !

$\square$

En pratique, on rencontre parfois le cas où D n'est pas Brody hyperbolique. Il nous faudra ainsi être en mesure de travailler dans un contexte un peu plus large.

Définition 2.3.15. Soit $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ l'union finie d'hypersurfaces analytiques. On dit que D est *hyperboliquement stratifiée* si $(\bigcap_{j \in J} D_j) \setminus (\bigcup_{k \in I \setminus J} D_k)$ est Brody hyperbolique $\forall J \subseteq I$.

Théorème 2.3.16. Soit D un sous-espace complexe fermé d'un espace complexe compact Y. Supposons que D soit l'union d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques $D_1, ..., D_m$ et que D est hyperboliquement stratifiée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $Y \setminus D$ est Brody hyperbolique.

(ii) $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans Y.

(iii) $c(Y \setminus D)$ est fini.

Démonstration. Comme $\overline{Y \setminus D} = Y$ et que Y est compact, on a que $Y \setminus D$ est relativement compact dans Y. Ainsi, le théorème 2.2.4 (ii) nous donne directement que les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes. Il nous suffit donc de montrer que (i) $\iff$ (ii) pour conclure notre preuve.

$(i) \implies (ii)$: Cette preuve est en fait la même que celle du théorème 2.3.14 (i), avec comme seul ajout le fait qu'on doit maintenant s'amuser à faire de la combinatoire avec les indices de D.

$(ii) \implies (i)$: Comme $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé, on a en particulier que $Y \setminus D$ est hyperbolique, et donc Brody hyperbolique.

□

CHAPITRE III

GRAND THÉORÈME DE PICARD

3.1 Généralisation selon Kwack

On se souvient que le grand théorème de Picard nous dit que si f est une fonction holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ ayant une singularité essentielle en 0, alors son image $f(\mathbb{C})$ est soit le plan complexe au complet ou soit le plan complexe moins un seul point du plan. Ce résultat peut être reformulé comme suit : chaque application holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ possède une singularité effaçable en 0. Cela signifie donc que f se prolonge à une application holomorphe $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{CP}^1$.

Définition 3.1.1. Soit X un sous-espace d'un espace complexe Y. On dit que X *satisfait la propriété grand Picard dans* Y, ou que *la propriété grand Picard est vraie pour* X *dans* Y, si toute application holomophe $f : \mathbb{D}^* \to X$ se prolonge à une application holomorphe de $\tilde{f} : \mathbb{D} \to Y$. Lorsque le contexte est clair, nous ometterons la référence à Y et dirons simplement que X satisfait la propriété grand Picard ou que la propriété grand Picard est vrai pour X.

On remarque que si X est relativement compact, alors la propriété grand Picard ne dépend pas de l'espace complexe Y dans lequel X est plongé et est relativement compact.

Explorons maintenant l'extension du grand théorème de Picard faite par Kwack

(Kwack, 1969). On utilisera les notations et en partie la structure de la démonstration de (Lang, 1987, chap.2, §1).

Soient X un sous-espace d'un espace complexe Y et une application holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to X$. On est intéressé à savoir si cette application se prolonge holomorphiquement à l'origine. On cherche donc les conditions pour que f ait un singularité effaçable en 0.

Théorème 3.1.2. (Théorème de Kwack) Soient X un sous-espace d'un espace complexe Y et une application holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to X$. Alors, on a les implications $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ pour les conditions suivantes :

(i) X est hyperboliquement plongé dans Y, et il existe une suite $\{z_k\}$ dans $\mathbb{D}^*$ telle que $z_k \to 0$ et $\{f(z_k)\}$ converge vers un point $y \in \overline{X}$.

(ii) X est hyperboliquement plongé dans Y, et il existe une suite de nombres positifs $\{r_k\}$ qui décroit vers 0, telle que si $\mathbb{S}_{r_k}$ est le cercle de rayon r_k centré à l'origine, alors $f(\mathbb{S}_{r_k})$ converge vers un certain $y \in \overline{X}$.

(iii) L'application f se prolonge à une application holomorphe dans un voisinage de 0, c.-à-d. f a un singularité effaçable en 0.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$: Supposons que X est hyperboliquement plongé dans Y et qu'on ait une suite $\{z_k\}$ dans $\mathbb{D}^*$ tel que $z_k \to 0$ et $f(z_k) \to y$, avec $y \in \overline{X}$. Posons $r_k = |z_k|$.

L'idée ici est de montrer que pour tout voisinage V de y dans Y, les images $f(\mathbb{S}_{r_k})$ sont contenues dans V lorsque k est suffisament grand. On sait que, comme Y est un sous-espace fermé d'une variété complexe Z donnée, on peut trouver un voisinage Ω de y dans Z qui est biholomorphe à un poly-disque. Ce voisinage est donc hyperbolique, et l'intersection de Ω avec tout ouvert de Y contenant y forme un voisinage de y, et un sous-espace hyperbolique de Y. Ainsi, tout voisinage V de y dans Y contient un voisinage hyperbolique et relativement compact U, c.-à-d. que y admet une base de voisinages hyperboliques et relativement compacts. Sachant cela, il suffit de montrer le résultat voulu pour un tel voisinage.

Soit donc U un voisinage hyperbolique de y tel que sa fermeture $\overline{U}$ est compacte. Alors, pour montrer (ii), il nous suffit de montrer que

$$f(\mathbb{S}_{r_k}) \subseteq U \qquad \text{lorsque } k \text{ est assez grand.}$$

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, pour k arbitrairement grand, il existe un point $z_k' \in \mathbb{S}_{r_k}$ tel que $f(z_k') \notin U$. On se souvient que la distance associée à la fonction de longueur sur Y (provenant de la variété complexe Z) définie la topologie de Y et est continue. On peut ainsi s'arranger pour prendre z_k' tel que $f(z_k')$ soit dans la frontière $\overline{U} \setminus U$. En particulier, comme la frontière est compacte, en passant a une sous-suite on peut supposer que $f(z_k')$ converge vers un point $y' \in \overline{X}$. De plus, comme $f(z_k')$ est dans un ensemble fermé, on sait que le point limite est dans cet ensemble, en particulier que $y' \notin U$ et donc que $y \neq y'$. De plus, comme nous savons que f décroît les semi-distances de Kobayashi, on a l'inégalité suivante :

$$d_X(f(z_k), f(z_k')) \leq d_{\mathbb{D}^*}(z_k, z_k').$$

Soit maintenant, comme dans l'exemple 2 du chapitre 1 , l'application holomorphe $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ définie par $h(z) = \exp(iz)$, qui on sait préserve la distance hyperbolique. On voudrait calculer la longueur hyperbolique de $\mathbb{S}_{r_k}$ dans $\mathbb{D}^*$. Ainsi, comme $h(z) = e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$, on remarque que le segment $x \in [0, 2\pi]$ avec y constante dans $\mathbb{H}$ est envoyé sur le cercle de rayon e^{-y} dans $\mathbb{D}^*$. Dans notre cas, on voudrait un segment qui soit envoyé sur $\mathbb{S}_{r_k}$. Ainsi, pour k suffisamment grand, on prend le segment $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{H}$ définie par $\gamma(t) = t - i\log(r_k)$. Alors,

$L_{\text{hyp},\mathbb{H}}(\gamma) = L_{\text{hyp},\mathbb{D}^*}(\mathbb{S}_{r_k})$, et donc la longueur hyperbolique de $\mathbb{S}_{r_k}$ dans $\mathbb{D}^*$ est donnée par

$$d_{\mathbb{D}^*}(z_k, z_k') \leq L_{\text{hyp},\mathbb{D}^*}(\mathbb{S}_{r_k}) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|_{\text{hyp},\mathbb{H},\gamma(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-\log(r_k)}\, dt = \frac{-2\pi}{\log(r_k)}.$$

De plus, on a que $-2\pi/\log(r_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$, et donc que $d_X(f(z_k), f(z_k')) \leq d_{\mathbb{D}^*}(z_k, z_k') \to 0$. Comme X est hyperboliquement plongé dans Y par hypothèse, ceci est une contradiction avec la condition (iii) du théorème 2.1.3.

$(ii) \implies (iii)$: Supposons que X est hyperboliquement plongé dans Y et qu'il existe une suite $\{r_k\} \subseteq (0, \infty)$ qui décroit vers 0, telle que $\{f(\mathbb{S}_{r_k})\} \to y$, où y est un point de $\overline{X}$.

Encore une fois, U est un voisinage hyperbolique de y, contenu dans une carte locale de Z qui est biholomorphe à un poly-disque dans $\mathbb{C}^N$, tel que $\overline{U}$, sa fermeture dans Y, est compacte et contenue dans ce poly-disque. Il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f(\mathbb{D}_c^*) \subseteq U$.

En effet, ceci qui montrera que, en utilisant l'identification avec le poly-disque dans $\mathbb{C}^N$, les fonctions de coordonnées de f sont bornées près de 0. Ainsi, en appliquant le théorème de prolongation de Riemann à chaque fonction de coordonnées, on obtiendra bien que 0 est une singularité effaçable.

Supposons par absurde qu'il n'existe pas de tel c. Alors, il existe $\{c_k\} \subseteq (0, 1)$ tendant vers 0 telle que $f(\mathbb{D}_{c_k}^*) \nsubseteq U$ pour tout k. Quitte à prendre une sous-suite de notre suite de départ $\{r_k\}$, on peut supposer que $f(\mathbb{S}_{r_k}) \subseteq U$ et que $r_k < c_k$ pour tout k. On définit alors a_k et b_k par

$$a_k = \inf\{r < r_k : f(\mathbb{S}_{r'}) \subseteq U,\ \forall r' \in [r, r_k]\},\ b_k = \sup\{r > r_k : f(\mathbb{S}_{r'}) \subseteq U,\ \forall r' \in [r_k, r]\}.$$

Comme f est continue et que $\mathbb{S}_{r_k}$ est compact, on sait qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que f envoie l'anneau $\{z \in \mathbb{D}^* : r_k - \epsilon \leq |z| \leq r_k + \epsilon\}$ dans U. Ces nombres a_k et b_k existent donc bien et on a que $a_k < r_k < b_k$. On remarque également que $b_k < c_k$, et donc que $b_k \to 0$!

Ainsi, par construction, l'anneau $A_k = \{z \in \mathbb{D}^* : a_k < |z| < b_k\}$ est le plus grand anneau autour de $\mathbb{S}_{r_k}$ satisfaisant $f(A_k) \subseteq U$. Soient maintenant $\mathbb{S}_{a_k}$ et $\mathbb{S}_{b_k}$, les deux cercles bornant l'anneau ouverte A_k. Alors

$$f(\mathbb{S}_{a_k}) \subseteq \overline{U} \quad \text{et} \quad f(\mathbb{S}_{b_k}) \subseteq \overline{U},$$

et en particulier les images de ces deux cercles ne sont pas contenues dans U. On a ainsi que les longueurs hyperboliques des deux cercles de rayon a_k et b_k tendent vers 0 lorsque $k \to \infty$ et comme f décroît les distances de $d_{\mathbb{D}^*}$ à d_X, on obtient les d_X-diamètres de $f(\mathbb{S}_{a_k})$ et de $f(\mathbb{S}_{b_k})$ tendent vers 0. De plus, comme X est hyperboliquement plongé dans Y, la remarque 2.1.4 nous dit que ceci est également le cas pour les d_H-diamètres. Maintenant, comme $\overline{U}$ est compact, quitte à prendre une sous-suite, on suppose que $f(\mathbb{S}_{a_k})$ et $f(\mathbb{S}_{b_k})$ convergent vers des points y' et y'' respectivement, sur la frontière $\overline{U} \setminus U$. Alors, en particulier, on a que $y' \neq y$ et $y'' \neq y$. Soit w_k un point sur $\mathbb{S}_{r_k}$, donc $w_k \to y$ lorsque $k \to \infty$.

Soit $f = (f_1, ..., f_N)$ les fonctions de coordonnées de f, vue comme une application de U dans $\mathbb{C}^N$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\lim_{k\to\infty} f_1(\mathbb{S}_{a_k}) = y_1' \neq 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} f_1(\mathbb{S}_{b_k}) = y_1'' \neq 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} f_1(w_k) = y_1 = 0.$$

Alors, à partir d'un certain k_0 et pour tout $k \geq k_0$, on a que

$$f_1(w_k) \notin f_1(\mathbb{S}_{a_k}) \cup f_1(\mathbb{S}_{b_k}).$$

En d'autres termes, $f_1(w_k)$ n'est pas dans l'image des deux cercles $\mathbb{S}_{a_k}$ et $\mathbb{S}_{b_k}$ sous f_1. On peut alors trouver V_k un voisinage simplement connexe de $f_1(\mathbb{S}_{a_k}) \cup f_1(\mathbb{S}_{b_k})$ qui n'intersecte pas un petit disque dans $\mathbb{C}$ centré en 0.

Soient maintenant $z = (z_1, ..., z_N)$ les fonctions de coordonnées sur $\mathbb{C}^N$ telles que $f_1 = z_1 \circ f$. On a donc que $z_1 - f_1(w_k)$ ne s'annule pas sur $f(\mathbb{S}_{a_k})$. Ainsi, avec ce que nous avons fait au-dessus et pour k suffisament grand, on applique le principe de l'argument sur V_k et on trouve que :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{a_k}} d\log(z_1 \circ f - f_1(w_k)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\mathbb{S}_{a_k})} d\log(z_1 - f_1(w_k)) = 0$$

et similairement avec $\mathbb{S}_{b_k}$ au lieu de $\mathbb{S}_{a_k}$. Mais, on a également que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_k} d\log(z_1 - f_1(w_k)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{b_k}} d\log(z_1 - f_1(w_k)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{a_k}} d\log(z_1 - f_1(w_k))$$

$$= \text{ le nombre de zéros de } z_1 \circ f - \text{ le nombre de poles de } z_1 \circ f \text{ dans l'anneau } A_k$$

$$\geq 1 \text{ (car ces fonctions n'ont pas de poles, et au moins un zéro en } w_k\text{).}$$

Cette contradiction conclut la démonstration du théorème.

$\square$

Remarque 3.1.3. Pour (i) du théorème de Kwack, la condition à propos de l'existence de la suite $\{z_k\}$ est automatiquement satisfaite si X est relativement compact dans Y.

Avec cette remarque, le théorème de Kwack nous donne directement le corollaire suivant, qui nous sera très utile pour la suite des choses.

Corollaire 3.1.4. Soit X un sous-espace relativement compact de Y. Si X est hyperboliquement plongé dans Y, alors X satisfait la propriété grand Picard.

3.1.1 Théorèmes de Picard classiques

Le petit théorème de Picard classique nous dit que si une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non constante, alors son image $f(\mathbb{C})$ omet au plus une valeur du plan complexe. Il peut être reformulé comme suit : il n'existe pas d'application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Dans notre langage, le petit théorème de Picard se traduit de la façon suivante :

Théorème 3.1.5. (Petit théorème de Picard) $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est Brody hyperbolique.

Démonstration. On sait par l'exemple 6 au chapitre I que $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est hyperbolique, et donc Brody hyperbolique.

$\square$

Maintenant, comme rappelé au début de ce présent chapitre, le grand théorème de Picard classique est donné par le théorème suivant. Avec ce que nous avons fait jusqu'à présent, démontrer ce théorème sera relativement simple.

Théorème 3.1.6. (Grand théorème de Picard) Chaque application holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ possède une singularité effaçable en 0, c.-à-d. que f se prolonge à une application holomorphe $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{CP}^1$.

Démonstration. Le petit théorème de Picard nous dit que $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est Brody hyperbolique, et clairement $\{0, 1, \infty\}$ une hypersurface analytique Brody hyperbolique de l'espace complexe compact $\mathbb{CP}^1$.

En appliquant le théorème 2.3.14 (ii), on obtient que $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{CP}^1$. De plus, comme $\overline{\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}} = \mathbb{CP}^1$ est compact, le corollaire 3.1.4 nous dit que la propriété grand Picard est vraie pour $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

□

3.2 Grand Picard pour les ouverts de Zariski d'un espace compact

Nous voici maintenant arrivé au point culminant de ce mémoire. Nous allons améliorer le théorème 2.3.16 en y ajoutant une propriété supplémentaire : celle que le complémentaire dans un espace complexe compact d'une union d'hypersurfaces analytiques hyperboliquement stratifiée satisfait la propriété grand Picard.

Théorème 3.2.1. Soit D un sous-espace complexe fermé d'un espace complexe compact Y. Supposons que D soit l'union d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques $D_1, ..., D_m$ et que D est hyperboliquement stratifiée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $Y \setminus D$ est Brody hyperbolique.

(ii) $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans Y.

(iii) $c(Y \setminus D)$ est fini.

(iv) $Y \setminus D$ satisfait la propriété grand Picard.

Démonstration. Par le théorème 2.3.16, on sait que les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Ainsi, il sera suffisant de montrer que (iv) implique (i) et que

(ii) implique (iv) pour finaliser la démonstration de ce théorème.

$(iv) \implies (i)$: On va montrer la contraposée. Supposons ainsi que $Y \setminus D$ n'est pas Brody hyperbolique. Alors, il existe une application holomorphe $h : \mathbb{C} \to Y \setminus D$ non constante. Soit maintenant l'application holomophe $g : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \exp(1/z)$ et $f = h \circ g$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "h"] & Y \setminus D \\ \mathbb{D}^* \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en utilisant $r = 1/z$ on voit que

$$\lim_{z\to 0^+} (z-0)^k g(z) = \lim_{z\to 0^+} z^k \exp(1/z) = \lim_{r\to\infty} \frac{\exp(r)}{r^k} = \infty,$$

et donc que $z^k g(z)$ n'est jamais bornée près de $z = 0$. En particulier, $g(z)$ possède une singularité essentielle en $z = 0$. Alors, pour tout $\epsilon \in (0{,}1)$, le théorème de Casorati-Weierstrass nous donne que $g(\mathbb{D}^*_\epsilon)$ est dense dans $\mathbb{C}$. Alors, on a que $f(\mathbb{D}^*_\epsilon) = h \circ g(\mathbb{D}^*_\epsilon)$ est dense dans $h(\mathbb{C})$. De plus, comme h n'est pas constante, $h(\mathbb{C})$ contient deux points distincts y et y'.

Maintenant, la densité de $f(\mathbb{D}^*_\epsilon)$ dans $h(\mathbb{C})$, nous donne que, pour tout $\epsilon \in (0,1)$, on peut trouver z_ϵ et z'_ϵ dans $\mathbb{D}^*_\epsilon$ tels que $d_H(f(z_\epsilon), y) < \epsilon$ et $d_H(f(z'_\epsilon), y') < \epsilon$. Ainsi, lorsque $\epsilon \to 0$ on a que les deux suites $\{z_\epsilon\}$ et $\{z'_\epsilon\}$ convergent vers 0, que

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(z_\epsilon) = y \quad \text{et que} \quad \lim_{\epsilon\to 0} f(z'_\epsilon) = y'.$$

Finalement, le fait que $y \neq y'$ montre que $f(z)$ ne se prolonge pas continuement à $z = 0$. Ainsi, l'application holomorphe $f : \mathbb{D}^* \to Y \setminus D$ ne peut pas avoir de prolongement holomorphe à $\mathbb{D}$, c.-à-d. que $Y \setminus D$ ne satisfait pas la propriété grand

Picard.

$(ii) \implies (iv)$: Supposons que $Y \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans Y. Comme $\overline{Y \setminus D} = Y$ et que Y est compact, on a que $Y \setminus D$ est relativement compact. Ainsi, le corollaire 3.1.4 nous donne directement que la propriété grand Picard est vraie pour $Y \setminus D$.

$\square$

CONCLUSION

La géométrie hyperbolique complexe est un domaine magnifique qui a encore un énorme de potentiel de recherche. Ce mémoire ne représente seulement qu'une petite partie de ce sujet incroyablement riche. La lecture du chapitre IV au chapitre VIII de (Lang, 1987) pourrait être une avenue intéressante pour ceux voulant approfondir encore plus leur étude dans cette direction.

ANNEXE A

DÉMONSTRATIONS COMPLÉMENTAIRES

La proposition suivante sera utilisée dans la démonstration du théorème d'Arzelà-Ascoli.

Proposition A.0.1. Soit (X, d) espace métrique compact. Alors X est séparable et complet.

Démonstration. Montrons tout d'abord que X est séparable, c.-à-d. qu'il existe une suite dense dans X. Comme X est compact, il existe un nombre fini de boules $B_{n^{-1}}(x') = \{x \in X : d(x, x') < 1/n\}$ qui recouvrent X, et ce $\forall n \in \mathbb{N}$. On voit ainsi que la suite $\{x_k\}$ composée du centre de ces boules $\forall n \in \mathbb{N}$ est dense dans X.

Montrons maintenant que X est complet. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy. Comme X est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ et $x \in X$ tels que $d(x_{n_k}, x) \to 0$. Reste seulement à voir que $d(x_n, x) \to 0$. Soit $\epsilon > 0$.

Comme $\{x_n\}$ est de Cauchy, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > N_1$, $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$.

Comme $\{x_{n_k}\}$ converge vers x, $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n_k > N_2$, $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et prenons un certain $n_k > N$. Alors $\forall n > N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ainsi on a bien que $d(x_n, x) \to 0$, c.-à-d. que X est complet.

□

Théorème A.0.2. (Arzelà-Ascoli) Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques compacts. Toute suite $\mathcal{F} \subseteq C(X_1, X_2)$ équicontinue sur X_1 admet une sous-suite qui converge uniformément sur X_1.

Démonstration. On remarque tout d'abord par la proposition A.0.1 que, comme X_1 et X_2 sont compacts, ils sont également séparables et complets. Soit alors $\{x_k\}$ une suite de points dense dans X_1 et une suite $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Nous allons extraire une sous-suite convergente à chaque point x_k par procédé diagonal.

On a que $\{f_n(x_1)\}_{n\geq 0}$ est une suite de point dans l'espace compact X_2, et donc elle admet sous-suite convergente $\{f_{n_{1,k}}\}_{k\geq 0}$ telle que $d_2(f_{n_{1,k}}(x_1), x_1') \to 0$ pour un certain point $x_1' \in X_2$. La suite de points $\{f_{n_{1,k}}(x_2)\}_{k\geq 0}$ est également une suite de point de X_2, et donc elle admet sous-suite convergente $\{f_{n_{2,k}}\}_{k\geq 0}$, telle que $d_2(f_{n_{2,k}}(x_2), x_2') \to 0$ pour un certain point $x_2' \in X_2$. Ainsi, en procédant par récurrence, on trouve des sous-suites $\{f_{n_{m,k}}\}_{k\geq 0}$ de $\{f_n\}_{n\geq 0}$ telles que

(i) $\{f_{n_{m+1,k}}\}_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $\{f_{n_{m,k}}\}_{k\geq 0}$;

(ii) $d_2(f_{n_{m,k}}(x_m), x_m') \to 0$ pour un certain $x_m' \in X_2$.

En particulier, $d_2(f_{n_{m,k}}(x_j), x_j') \to 0$ pour tout $j \leq m$. Ainsi, on obtient que la sous-suite diagonale $\{f_{n_{k,k}}\}_{k\geq 0}$ converge pour tout x_k. Quitte à la remplacer par la sous-suite $\{f_{n_{k,k}}\}_{k\geq 0}$ on peut supposer que la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge pour tout x_k.

Soit $\epsilon > 0$ et $x \in X_1$. Comme $\{f_n\}$ est équicontinue, il existe un $\delta > 0$ tel que $d_1(x, x_k) < \delta$ implique que $d_2(f_m(x), f_m(x_k)) < \epsilon/3$, et ce pour tout $f_m \in \{f_n\}$. Comme $\{f_n(x_k)\}_{n\geq 0}$ converge, on a en particulier qu'elle est de Cauchy, et donc qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > N$, $d_2(f_m(x_k), f_n(x_k)) < \epsilon/3$. Finalement, comme $\{x_k\}$ est dense dans X_1, il existe un x_k tel que $d_1(x, x_k) < \delta$. Alors, dans ce contexte, on obtient que

$$d_2(f_m(x), f_n(x)) \leq d_2(f_m(x), f_m(x_k)) + d_2(f_m(x_k), f_n(x_k)) + d_2(f_n(x_k), f_n(x)) < \epsilon.$$

Ainsi, $\{f_n(x)\}$ est de Cauchy dans X_2 pour tout $x \in X_1$. Comme X_2 est complet, on a que cette suite est convergente. On obtient alors que $\{f_n\}$ converge point par point vers une application $f : X_1 \to X_2$. On va maintenant montrer que cette application f est continue.

Soit $\epsilon > 0$ et $p \in X_1$. Prenons U_p un voisinage de p tel que $d_2(f_n(p), f_n(x)) < \epsilon$ pour tout $x \in U_p$ (un tel voisinage existe car $\{f_n\}$ est équicontinue sur X_1). Fixons $x \in U_p$. Alors, comme $\{f_n\}$ converge vers f, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_1$, $d_2(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, et $\forall n > N_2$, $d_2(f(p), f_n(p)) < \epsilon$. En prenant $n > \max\{N_1, N_2\}$, on a que

$$d_2(f(p), f(x)) \leq d_2(f(p), f_n(p)) + d_2(f_n(p), f_n(x)) + d_2(f_n(x), f(x)) < 3\epsilon.$$

Alors f est continue en p. Montrons que $f_n \rightrightarrows f$ sur X_1, c.-à-d. que la convergence est uniforme.

Soit $\epsilon > 0$ et $p \in X_1$. Prenons alors U_p, le voisinage de p choisi comme plus haut, tel que, pour tout $x \in U_p$, $d_2(f_n(x), f_n(p)) < \epsilon$ et $d_2(f(p), f(x)) < 3\epsilon$. Comme $\{f_n\}$ converge vers f, pour tout $p \in X_1$, il existe $N_p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_p$,

$d_2(f_n(p), f(p)) < \epsilon$. Alors, pour tout $x \in U_p$ et $n > N_p$,

$$d_2(f_n(x), f(x)) \leq d_2(f_n(x), f_n(p)) + d_2(f_n(p), f(p)) + d_2(f(p), f(x)) < 5\epsilon.$$

Comme X_1 est compact, il peut être recouvert par un nombre fini de ces U_p, disons U_{p_i} avec $i = 1, ..., k$. Alors, si $n > \max\{N_{p_i}\}$, on a que $d_2(f_n(x), f(x)) < 5\epsilon$, pour tout $x \in X_1$. Ainsi, on a bien que $f_n \rightrightarrows f$ sur X_1.

$\square$

Théorème A.0.3. Supposons que Ω soit un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}$ et (Z, d) une variété complexe munie d'une distance. Soit $\{f_n\} \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega, Z)$ une suite convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une application $f : \Omega \to Z$. Alors :

(i) f est une application holomorphe.

(ii) La suite des différentielles $\{df_n\} \subseteq C(\Omega, TZ)$ converge vers df uniformément sur les compacts de Ω.

Démonstration. Regardons tout d'abord le cas où Z est un ouvert de $\mathbb{C}^N$. Soit $\Delta \subseteq \Omega$ un triangle fermé. On a que $f_n = (f_n^1, ..., f_n^N)$, où $f_n^i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes. Le théorème intégral de Cauchy nous donne alors que, pour tout $i = 1, ..., N$,

$$\int_{\partial\Delta} f_n^i(z)\, dz = 0.$$

Comme $\partial\Delta$ est compact, on a que $f_n \rightrightarrows f$ sur $\partial\Delta$. Alors, si $f = (f^1, ..., f^N)$, la convergence uniforme nous donne que, pour tout $i = 1, ..., N$

$$\int_{\partial\Delta} f^i(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n^i(z)\, dz = 0.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Morera pour obtenir que f^i est holomorphe sur Ω. Ainsi, f est bien holomorphe sur Ω, ce qui prouve (i).

Montrons maintenant que $df_n \rightrightarrows df$ sur les compacts de Ω. Soit $\Omega_r = \{z \in \Omega : \overline{\mathbb{D}_r(z)} \subseteq \Omega\}$. Soit $K \subseteq \Omega$ un compact. Alors, il existe $r > 0$ tel que $K \subseteq \Omega_r$, et donc il suffit de montrer que $df_n \rightrightarrows df$ sur Ω_r.

Affirmation : Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, pour tout $r > 0$ et tout $z \in \Omega_r$, on a que

$$|F'(z)| \leq \frac{2}{r} \sup_{w \in \Omega_{r/2}} |F(w)|.$$

En effet, remarquons tout d'abord que pour tout $z \in \Omega_r$, $\overline{\mathbb{D}_{r/2}(z)} \subseteq \Omega_{r/2}$, et donc $\mathbb{S}_{r/2}(z) \subseteq \Omega_{r/2} \subseteq \Omega$. Alors, la formule intégrale de Cauchy nous dit que pour tout $z \in \Omega_r$,

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{r/2}(z)} \frac{F(w)}{(w-z)^2} dw.$$

De plus, pour $w \in \mathbb{S}_{r/2}(z)$, on a que $|w - z| = r/2$. On obtient alors que

$$|F'(z)| \leq \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sup_{w \in \mathbb{S}_{r/2}(z)} |F(w)| \cdot \text{Longeur}(\mathbb{S}_{r/2}(z)) \leq \frac{2}{r} \sup_{w \in \Omega_{r/2}} |F(w)|,$$

ce qui nous donne bien l'affirmation voulue.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\overline{\Omega_{r/2}} \subseteq \Omega$ est compact (car $\overline{\Omega}$ est compact, donc borné), alors il existe $N = N(r, \epsilon)$ tel que pour tout $n > N$,

$$\sup_{w \in \Omega_{r/2}} |f_n^i(w) - f^i(w)| \leq \max_{w \in \overline{\Omega_{r/2}}} |f_n^i(w) - f^i(w)| = |f_n^i(w_0) - f^i(w_0)| < \frac{\epsilon r}{2},$$

pour un certain $w_0 \in \overline{\Omega_{r/2}}$. On sait alors par l'affirmation que pour tout $n > N$, et tout $z \in \Omega_r$,

$$|(f_n^i(z))' - (f^i(z))'| < \frac{2}{r} \frac{\epsilon r}{2} = \epsilon.$$

D'où $df_n \rightrightarrows df$ sur Ω_r, ce qui complète la démonstration dans le cas où Z est un ouvert de $\mathbb{C}^N$!

Soit maintenant (Z, d) une variété complexe quelconque. Étant donné $z_0 \in \Omega$, soit V une carte locale holomorphe de $f(z_0)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(f(z_0)) = \{z \in Z : d(z, f(z_0)) < \epsilon\} \subseteq V$. Comme f est la limite uniforme de fonctions continues, alors f est continue. En particulier, il existe U un voisinage de z_0 tel que $\overline{U}$ est compact et $d(f(z_0), f(z)) < \epsilon/2$ pour tout $z \in U$. Comme $\overline{U}$ est compact, il existe $m \geq 1$ tel que $\forall n \geq m$, $d(f_n(z), f(z)) < \epsilon/2$ pour tout $z \in \overline{U}$. Alors, pour tout $n \geq m$, et $z \in U$,

$$d(f_n(z), f(z_0)) \leq d(f_n(z), f(z)) + d(f(z), f(z_0)) < \epsilon.$$

Ainsi $f_n(z) \in B_\epsilon(f(z_0)) \subseteq V$. En d'autres termes, toutes les suites d'applications $\{f_n|_U\}_{n \geq m}$ prennent valeurs dans la carte locale V, Ce qui nous ramène au cas des suites à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{C}^N$.

$\square$

Le corollaire suivant est utilisé dans l'exemple 9 au chapitre 1.

Lemme A.0.4. L'application $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ définie par $f(z) = (z - i)/(z + i)$ est bijective.

Démonstration. Injectivité : si $f(z) = f(w)$, alors $(z-i)/(z+i) = (w-i)/(w+i)$, et on obtient facilement en isolant que $z = w$.

Surjectivité : soit $z = x + iy \in \mathbb{D}$. On cherche $w \in \mathbb{H}$ tel que $z = f(w) = (w-i)/(w+i)$. En isolant on trouve que $w = i(1+z)/(1-z)$ fonctionnerait, mais est-ce que ce w est dans $\mathbb{H}$? Il suffit de voir que $\mathrm{Im}(w) > 0$. On sait que

$$w = i\frac{1+x+iy}{1-x-iy} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{-2y}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{1-y^2-x^2}{(1-x)^2+y^2}.$$

On remarque qu'on a pas de problème ici car $z \in \mathbb{D}$, donc $(1-x)^2 > 0$ et $y^2 \geq 0$. On a alors que

$$\mathrm{Im}(w) > 0 \iff 1 - y^2 - x^2 > 0 \iff 1 > |z|^2.$$

Comme, $z \in \mathbb{D}$, on sait que $1 > |z|^2$, et donc on a bien $w \in \mathbb{H}$.

$\square$

Le théorème suivant est utilisé dans la démonstration du lemme de reparamétrisation de Brody au chapitre 2.

Théorème A.0.5. Soient T et Z des espaces topologiques où Z est compact. Si $F(t,z) : T \times Z \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(t) = \max_{z \in Z}\{F(t,z)\}$ est également continue.

Démonstration. Pour $t \in T$ fixé, on a $F(t,z) : \{t\} \times Z \to \mathbb{R}$ avec $\{t\} \times Z$ compact, et donc le maximum existe et $f(t)$ est bien définie !

Soit $\{t_n\}$ une suite dans T avec $t_n \to \tilde{t}$ lorsque $n \to \infty$, pour un certain $\tilde{t} \in T$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on choisit $z_n \in Z$ comme suit :

$$f(t_n) = \max_{z \in Z}\{F(t_n, z)\} = F(t_n, z_n).$$

Comme Z est compact, il existe une sous-suite $\{z_{n_k}\}$ convergente avec $z_{n_k} \to z_0$ lorsque $k \to \infty$, pour un certain $z_0 \in Z$.

Si $f(\tilde{t}) = F(\tilde{t}, \tilde{z})$ pour un certain $\tilde{z} \in Z$, alors par continuité de F :

$f(\tilde{t}) \geq F(\tilde{t}, z_0) = \lim_{k\to\infty} F(t_{n_k}, z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \sup f(t_{n_k}).\circledast$

Comme F est continue, alors $\forall k, \exists V_k$ un voisinage de $(\tilde{t}, \tilde{z})$ tel que

$$F(t, z) + \frac{1}{k} \geq F(\tilde{t}, \tilde{z}), \quad \forall (t, z) \in V_k.$$

Comme $t_{n_k} \to \tilde{t}$ lorsque $k \to \infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n_k \geq N$,
$\{t_{n_k}\} \times Z$ intersecte $V_k \subset T \times Z$. Ainsi, $\exists z_k \in Z$ tel que

$$F(t_{n_k}, z_{n_k}) + \frac{1}{k} \geq F(t_{n_k}, z_k) + \frac{1}{k} \geq F(\tilde{t}, \tilde{z}).$$

$$\begin{aligned}\implies \lim_{k\to\infty} \inf F(t_{n_k}, z_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty} \inf \left(F(t_{n_k}, z_{n_k}) + \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \inf F(\tilde{t}, \tilde{z}) = F(\tilde{t}, \tilde{z}) = f(\tilde{t}). \circledast\circledast\end{aligned}$$

Ainsi, par $\circledast$ et $\circledast\circledast$, on obtient que

$$f(\tilde{t}) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}).$$

Ceci montre que chaque suite $\{t_n\}$ avec $t_n \to \tilde{t}$ lorsque $n \to \infty$ possède une sous-suite $\{t_{n_k}\}$ avec $f(t_{n_k}) \to f(\tilde{t})$ lorsque $k \to \infty$.

Ceci nous donne que f est continue en $\tilde{t}$. En effet, par absurde, supposons que f n'est pas continue en $\tilde{t}$.

Alors, $\exists \epsilon > 0 | \forall \delta > 0, \exists t_{n_k} \in T$ tels que $|t_{n_k} - \tilde{t}| < \delta$ et $|f(t_{n_k}) - f(\tilde{t})| \geq \epsilon$.

Prenons $\delta = \dfrac{1}{n_k}$. Alors, $|t_{n_k} - \tilde{t}| < \dfrac{1}{n_k}$ et $|f(t_{n_k}) - f(\tilde{t})| \geq \epsilon$, c.-à-d. que $t_{n_k} \to \tilde{t}$ et

$f(t_{n_k}) \nrightarrow f(\tilde{t})$, lorsque $k \to \infty$! Contradiction.

Finalement, comme notre choix de $\tilde{t} \in T$ est arbitraire ici, on conclut ainsi que f est continue sur T au complet !

$\square$

Le fait suivant est utilisé dans la preuve du lemme 2.3.12 :

Corollaire A.0.6. Soient X un sous-espace fermé d'un espace complexe Y et U un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{C}$. Soit $g : U \to Y$ une application holomorphe. Alors pour tout ouvert W tel que $W \subseteq U$ et $g(W) \subseteq X$, on a aussi que $g(\overline{W}) \subseteq X$ (où $\overline{W}$ est la fermeture de W dans U, et non dans $\mathbb{C}$).

Démonstration. Comme $g(W) \subseteq X$, alors $W \subseteq g^{-1}(g(W)) \subseteq g^{-1}(X)$.

$\implies \overline{W} \subseteq \overline{g^{-1}(X)} = g^{-1}(X)$ (car g continue + X fermé $\implies g^{-1}(X)$ fermé).

$\implies g(\overline{W}) \subseteq g(g^{-1}(X)) \subseteq X$.

D'où $g(\overline{W}) \subseteq X$.

$\square$

RÉFÉRENCES

Bonavero, L. et Demailly, J.-P. (2005). *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann*. Récupéré de `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/variable_complexe.pdf`.

Fischer, G. (1976). *Complex analytic geometry*. Springer Lecture Notes, Vol. 538, Springer-Verlag, Berlin.

Gallot, S., Hulin, D. et Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry* (3^e éd.). Springer-Verlag, Berlin.

Grauert, H. et Remmert, R. (1984). *Coherent Analytic Sheaves* (1^{re} éd.). Springer-Verlag, Berlin.

Griffiths, S. et Harris, J. (1994). *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc.

Gunning, R. C. et Rossi, H. (1965). *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Hatcher, A. (2000). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.

Kobayashi, S. (1998). *Hyperbolic Complex Spaces*. Springer-Verlag, Berlin.

Kobayashi, S. (2005). *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings* (2^e éd.). World Scientific Publishing Co.

Krantz, S. G. (2004). *Complex Analysis : the Geometric Viewpoint* (2^e éd.). The Mathematical Association of America.

Kwack, M. H. (1969). Generalizations of the big picard theorem. *Annals of Mathematics*, *90*(1), 9–22.

Lang, S. (1987). *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*. Springer-Verlag, New York.

Lu, S., Sun, R. et Kang, Z. (2019). Nevanlinna theory on moduli space and the big picard theorem. *arXiv preprint arXiv :1911.02973*.

Munkres, J. (2000). *Topology* (2^e éd.). Prentice Hall, Inc.

Petersen, P. (2016). *Riemannian Geometry* (3e éd.). Springer International Publishing.