UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA COMPLEXITÉ DES IMMANANTS

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ÉTIENNE TÉTREAULT

OCTOBRE 2019

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

On étudie dans ce texte les immanants, qui sont des polynômes de degré n en n^2 variables définis en fonction des caractères du groupe symétrique. Par exemple, le déterminant et le permanent sont des immanants. Aussi, dans un article datant des années 70, Valiant proposa une première étape pour résoudre le problème **P** vs **NP**, appelée hypothèse de Valiant ou problème **VP** vs **VNP**, et qui est de montrer que le permanent ne peut être calculé aussi efficacement que le déterminant. Après avoir rappelé quelques notions de la théorie de la représentation, on fait une courte introduction à la théorie de Valiant. Puis, on étudie le stabilisateur des immanants, pour ensuite considérer leur utilité pour résoudre le problème **VP** vs **VNP**. On considère également une autre technique pour résoudre l'hypothèse de Valiant, appelée théorie géométrique de la complexité, et on voit comment on pourrait utiliser les immanants dans cette théorie.

Mots-clés : immanants, hypothèse de Valiant, **VP** vs **VNP**, déterminant vs permanent, théorie géométrique de la complexité

INTRODUCTION

Un des problèmes les plus célèbres en informatique théorique est le fameux problème **P** vs **NP**. Il consiste à déterminer si, pour un problème donné, pouvoir rapidement vérifier une solution est équivalent à pouvoir trouver rapidement cette solution. Par exemple, étant donné un ensemble fini d'entiers relatifs, il est facile de dire si, pour un sous-ensemble donné, la somme des éléments est nulle ; mais on ne connaît pas d'algorithme rapide pour trouver un tel sous-ensemble. Est-ce que cet algorithme est impossible à trouver, ou bien l'humain ne l'a pas encore découvert ? Bien que la majorité des gens ayant étudié ce problème croit qu'il s'agit de la première option, une preuve de cela semble encore hors de portée avec les connaissances actuelles.

Dans les années 1970, L. Valiant proposa un analogue algébrique à ce problème, appelé par analogie le problème **VP** vs **VNP**, ou hypothèse de Valiant. Il s'agit de considérer l'espace des polynômes, et de déterminer si le fait de pouvoir rapidement calculer le coefficient de n'importe quel monôme est équivalent à pouvoir évaluer rapidement ce polynôme en n'importe quel point. Il montra par la suite que ceci est équivalent à déterminer si on peut évaluer rapidement le permanent de n'importe quelle matrice. Ce résultat peut sembler surprenant, car le permanent ressemble beaucoup au déterminant, et on sait que ce dernier peut se calculer rapidement.

Pour démontrer cette conjecture, il faut tenter de voir ce qui différencie la vitesse de calcul du déterminant et du permanent. Pour ce faire, Hartmann et Bürgisser, entre autres, proposèrent de considérer une généralisation de ceux-ci, les immanants. On peut donc tenter de déterminer quels immanants se calculent rapidement, et pour lesquels cela devient aussi dur que pour le permanent.

Le premier chapitre est un rappel sur la théorie de la représentation. On fait d'abord un résumé de la théorie en général, puis on étudie de façon plus approfondie les représentations du groupe symétrique. On traite ensuite des caractères du groupe symétrique, essentiel à l'étude des immanants, puisque ces derniers sont définis en fonction de ces caractères. Pour terminer, on traite également des représentations du groupe général linéaire, et de leurs liens avec celles du groupe symétrique, qui passe par la dualité de Schur-Weyl.

Au deuxième chapitre, on considère d'abord le déterminant et le permanent comme des suites de polynômes, variant selon la taille de la matrice. Puis, on définit formellement l'ensemble **VP** des suites de polynômes se calculant rapidement, comme le déterminant, et l'ensemble **VNP** des suites de polynômes dont on peut rapidement connaître le coefficient d'un monôme donné. Ensuite, on définit ce que signifie être complet pour ces ensembles, et on constate que le permanent l'est pour **VNP**. Par la suite, on considère deux problèmes directement reliés à l'hypothèse de Valiant, soit la complexité déterminantielle et la théorie géométrique de la complexité.

Pour le troisième chapitre, on définit d'abord les immanants, pour ensuite les caractériser en tant que points dans l'espace des polynômes homogènes de degré n à n^2 variables. Puis, on cherche à savoir quelles transformations linéaires sur les matrices préservent les immanants, et on les trouve entièrement pour la majorité des immanants. On considère ensuite plusieurs suites d'immanants, que l'on énonce (et démontre dans certains cas) être soit dans **VP**, soit être **VNP**-complètes. Finalement, on traite de la complexité déterminantielle des immanants et comment utiliser ces derniers dans la théorie géométrique de la complexité, deux sujets qui n'ont été que très peu étudiés jusqu'à maintenant.

CHAPITRE I

THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION

Ce chapitre est un rappel de certaines notions fondamentales de la théorie de la représentation, en particulier celle du groupe symétrique et du groupe général linéaire, sur les nombres complexes. Toutes les notions et les résultats sont classiques, et les détails et preuves peuvent se trouver dans tout bon livre d'introduction à cette théorie, par exemple dans (Fulton et Harris, 2004).

1.1 Définitions et propriétés

Soit G un groupe et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Une *représentation* de G sur V est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

qui associe à chaque $g \in G$ un automorphisme de V. Lorsque ρ est clair dans le contexte, on dit que V est une représentation de G, ou que G a une *action* linéaire sur V. Aussi, pour $g \in G$ et $v \in V$, on note $g \cdot v$ plutôt que $\rho(g)(v)$.

Si V et W sont deux représentations de G, on dit qu'une application linéaire $\Phi : V \longrightarrow W$ est un *morphisme de représentations* de G si le diagramme suivant commute pour tout $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\Phi"] & W \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout $v \in V$, on a $g \cdot \Phi(v) = \phi(g \cdot v)$. On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ l'ensemble des morphismes de représentations de G allant de V vers W.

On dit que U est une *sous-représentation* de V si $U \subseteq V$ et s'il est *stable* par l'action de G, *i.e.* $g \cdot u \in U$ pour tout $u \in U$. Une représentation V est dite *irréductible* si $V \neq \{0\}$ et si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même. Les morphismes entre deux représentations irréductibles sont particulièrement intéressants :

Lemme 1.1.1 (Lemme de Schur)**.** *Soient V et W deux représentations irréductibles d'un groupe G et $\Phi : V \longrightarrow W$ un morphisme de représentations. Alors, soit Φ est le morphisme nul, soit c'est un isomorphisme.*

On dit que V est *décomposable* s'il existe deux sous-représentations $U, U' \subseteq V$ telles que $U, U' \neq V$ et $V = U \oplus U'$; sinon, elle est dite *indécomposable*. On voit tout de suite que toute représentation irréductible est indécomposable. La réciproque n'est pas toujours vraie, mais elle l'est pour les représentations du groupe général linéaire et des groupes finis ; on dit que ces groupes sont *réductifs*. Pour ces groupes, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. *Pour toute représentation V d'un groupe réductif G, il existe une unique décompositon de V en somme directe de représentations irréductibles (à isomorphisme et ordre des facteurs près).*

Donc, pour bien comprendre ces groupes, il faut d'abord étudier leurs représentations irréductibles, et ensuite savoir comment décomposer toute représentation en irréductibles.

Soit V une représentation d'un groupe G et W une représentation d'un groupe G'. Alors, le produit tensoriel $V \otimes W$ est une représentation du groupe $G \times G'$, en posant pour tout $g \in G$, $g' \in G'$, $v \in V$ et $w \in W$:

$$(g, g') \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g' \cdot w).$$

Cette construction est très utile pour étudier les représentations d'un produit de groupes :

Proposition 1.1.3. *Si G, G' sont deux groupes réductifs, alors toute représentation irréductible de $G \times G'$ est isomorphe au produit tensoriel d'une représentation irréductible de G et d'une représentation irréductible de G'.*

Cette proposition s'utilise souvent avec le résultat suivant :

Proposition 1.1.4. *Soit V un espace vectoriel qui est à la fois une représentation de G et de G'. Si l'action des deux groupes commutent, i.e. $g \cdot (g' \cdot v) = g' \cdot (g \cdot v)$ pour tout $v \in V$, $g \in G$ et $g' \in G'$, alors V est une représentation de $G \times G'$.*

Pour la suite de cette section, on ne considère que le cas des groupes finis. Pour étudier la représentation de ces groupes, un des meilleurs outils est le *caractère*. Il s'agit de la fonction $\chi = \chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui associe à chaque élément de g sa trace (en tant qu'automorphisme de V). Le caractère possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.5. *Soient V, W des représentations d'un groupe fini G et $g, h \in G$. Alors :*

1. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$;
2. $\chi_V(1) = \dim(V)$;
3. $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$;

4. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$;

5. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W$.

Une fonction qui possède la première propriété est dite *centrale*. Si G est un groupe fini, on peut munir l'espace C_G des fonctions centrales du produit scalaire suivant. Pour α et β dans C_G, on pose :

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)\overline{\beta(g)}.$$

Ce produit scalaire est particulièrement important pour l'étude des caractères :

Théorème 1.1.6. *Soient V des représentations d'un groupe fini G. Alors :*

1. *$\langle\chi_V,\chi_V\rangle = 1$ si et seulement si V est irréductible ;*
2. *Il existe exactement une représentation irréductible par classe de conjugaison de G (en particulier, leur nombre est fini) ;*
3. *Si $\{V_1, ...V_k\}$ est l'ensemble des représentations irréductibles de G, alors toute représentation V se décompose de la forme $\bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{m_i}$, avec $m_i = \langle\chi_{V_i},\chi_V\rangle$, et on appelle m_i le nombre de copies de V_i dans V ;*
4. *Les caractères irréductibles (i.e. associés aux représentations irréductibles) forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales ;*
5. *Si $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{m_i}$, alors $\chi_V = \sum_{i=1}^{k} m_i\chi_{V_i}$.*

On a donc un bon outil pour décomposer une représentation en sous-représentations irréductibles. Aussi, on remarque qu'une fonction centrale est un caractère si et seulement si elle s'écrit avec des coefficients entiers naturels dans la base des caractères irréductibles.

Soit H un sous-groupe de G. Si V est une représentation de H, on peut construire une représentation W de G issue de V, appelée la *représentation induite* et notée

$W = \mathrm{Ind}_H^G(V)$. Pour ce faire, on considère l'ensemble G/H des classes à gauche de G modulo H et on choisit un représentant g_i pour chaque classe à gauche. On pose alors $W = \bigoplus_i g_i V$. Pour tout $g \in G$ et tout indice i, il existe un h_i et un indice $j(i)$ tels que $gg_i = g_{j(i)}h_i$, et on a l'action suivante :

$$g \cdot \sum_i g_i v_i = \sum_i g_{j(i)}(h_i \cdot v_i).$$

Aussi, pour W une représentation de G, on a la *restriction* de V aux éléments de H, qui est notée $V = \mathrm{Res}_H^G(W)$. Ces deux notions peuvent aussi être considérées pour les caractères de ces représentations. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.1.7 (Réciprocité de Frobenius). *Soit W une représentation d'un groupe fini G, H un sous-groupe de G et V une représentation de H. Alors,*

$$\langle \chi_W, \mathrm{Ind}_H^G(\chi_V)\rangle = \langle \mathrm{Res}_H^G(\chi_W), \chi_V\rangle.$$

Ce sont donc des notions adjointes pour le produit scalaire (et plus généralement, ce sont des foncteurs adjoints).

Soit

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles des éléments d'un groupe fini G. Il est à remarquer que $\mathbb{C}[G]$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}^G$, l'espace des fonctions de G à valeur dans $\mathbb{C}$. On peut en faire une représentation de G, en définissant, pour tout $h \in G$:

$$h \cdot \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g (hg).$$

On appelle cette représentation la *représentation régulière à gauche* de G. Si on définit plutôt que

$$h \cdot \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g (gh^{-1}),$$

on obtient alors une représentation isomorphe appelée *représentation régulière à droite*. Comme les deux actions donnent des représentations isomorphes, on parle souvent de *la* représentation régulière. Son caractère est facile à calculer :

$$\chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on considère les deux actions simultanément, $\mathbb{C}[G]$ devient une représentation de $G \times G$, car les deux actions commutent. En utilisant le caractère et le théorème 1.1.6, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.1.8. *Si G est un groupe fini, toutes les représentations irréductibles V_i apparaissent* $\dim(V_i)$ *fois dans la représentation régulière. En tant que représentation de $G \times G$, on a la décomposition suivante :*

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i V_i \otimes V_i.$$

Toutes les représentations irréductibles de G apparaissent donc dans sa représentation régulière. On fait de $\mathbb{C}[G]$ une algèbre, qui est *l'algèbre du groupe*, en étendant de façon bilinéaire la multiplication de G.

1.2 Représentations du groupe symétrique

Le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ s'obtient en considérant l'opération de composition entre les *permutations* de $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ (*i.e* les bijections de $[n]$ dans $[n]$). On rappelle que toute permutation peut se décomposer en un produit de cycles disjoints. Si la décomposition en cycles disjoints d'une permutation contient m_i cycles de longueur i, on note $(1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n})$ sa *structure cyclique*. Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont la même structure cyclique.

Les structures cycliques sont en bijection avec les *partages* de n. Un partage d'un entier n est une suite $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq 1$ et

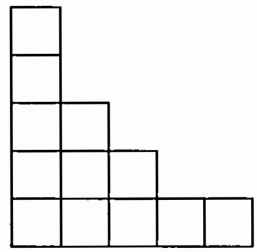

Figure 1.1 Diagramme de Ferrers du partage $(5, 3, 2, 1, 1)$

$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n$. On note $\lambda \vdash n$ le fait que λ est un partage de n, ou parfois $|\lambda| = n$. Lorsque cela ne porte pas à confusion, on omet les virgules entre les termes de λ. Les λ_i sont les *parts* de λ, et le nombre de ses parts est la *longueur* de λ, notée $\ell(\lambda)$.

Chaque partage $\lambda = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)$ de n peut être représenté par son *diagramme de Ferrers*. Ce diagramme est composé de n *cases* (*i.e.* des éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$), qui sont tous les couples (a, b) tels que $1 \leq b \leq k$ et $1 \leq a \leq \lambda_b$. La i^e *ligne* du diagramme est l'ensemble des cases telles que $b = i$, et la j^e *colonne* est l'ensemble des cases telles que $a = j$. On utilise souvent la notation λ autant pour désigner un partage que son diagramme.

Le partage *conjugué* de λ, noté λ', est le partage dont le diagramme est composé des cases (b, a) pour chaque case (a, b) de λ.

Un *tableau de Young* de forme $\lambda \vdash n$ est une application bijective $\tau : \lambda \longrightarrow [n]$ qui associe à chaque case de λ un nombre de $\{1, 2, ..., n\}$. Un tableau de Young de forme λ est dit *standard* si ses lignes et ses colonnes sont strictement croissantes, donc si $\tau(a, b) < \tau(a', b)$ quand $a < a'$ et si $\tau(a, b) < \tau(a, b')$ lorsque $b < b'$.

Pour τ un tableau de Young standard de forme $\lambda \vdash n$, on a les sous-ensembles de $\mathfrak{S}_n$ suivants :

$$P_\tau = \{g \in \mathfrak{S}_n \mid g \text{ préserve les lignes de } \tau\}, \quad \text{et}$$

$$Q_\tau = \{g \in \mathfrak{S}_n \mid g \text{ préserve les colonnes de } \tau\}.$$

À ces sous-ensembles, on associe les éléments suivants de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:

$$a_\tau = \sum_{p \in P_\tau} p; \qquad b_\tau = \sum_{q \in Q_\tau} \operatorname{sgn}(q) q; \qquad c_\tau = a_\tau b_\tau = \sum_{\substack{p \in P_\tau \\ q \in Q_\tau}} \operatorname{sgn}(q) pq.$$

Les c_τ sont appelés *symétriseurs de Young*. Leur importance est soulignée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Pour tout tableau standard τ, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_\tau^2 = kc_\tau$. Le sous-espace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\tau$, engendré par c_τ par multiplication à droite dans l'algèbre du groupe, est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Deux représentations irréductibles $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\tau$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_{\tau'}$ sont isomorphes si et seulement si τ et τ' sont des tableaux de Young standards de même forme λ ; on note alors V_λ cette représentation. Il existe autant de copies de V_λ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ que de tableaux standards.*

Par la proposition 1.1.8, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2. *La dimension de V_λ est égale au nombre de tableaux de Young standards de forme λ.*

On a considéré la multiplication à droite des symétriseurs de Young, mais on obtient un théorème équivalent en multipliant à gauche. Si on multiplie la représentation régulière de chaque côté, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.2.3. *Soient τ, τ' deux tableaux de Young standards et $c_\tau, c_{\tau'}$ leur symétriseur de Young respectif. Alors :*

1. *Si τ et τ' n'ont pas la même forme, $c_\tau \cdot \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_{\tau'} = \{0\}$;*
2. *$c_\tau \cdot \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\tau = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\tau$.*

Par le corollaire 1.2.2, on a une interprétation combinatoire de la dimension de V_λ. Cependant, établir une liste exhaustive de ces tableaux de Young devient difficile lorsque n est grand. Une formule beaucoup plus efficace pour calculer ce nombre s'énonce comme suit. Pour chaque case x de λ, la *longueur d'équerre* de x, notée $h(x)$, est le nombre de cases qui : soit se trouvent à droite de x sur la même ligne, soit se trouvent au-dessus de cette case dans la même colonne, soit est la case elle-même. Avec cette définition, on a la formule suivante :

Théorème 1.2.4 (Formule des équerres). $\dim(V_\lambda) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{x\in\lambda} h(x)}$.

Parmi les représentations importantes de $\mathfrak{S}_n$, on a d'abord la *représentation triviale* $V_{(n)}$, de dimension 1, définie en posant $\sigma \cdot x = x$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in V_{(n)}$. On a aussi la *représentation signature* $V_{(1^n)}$, elle aussi de dimension 1, pour laquelle $\sigma \cdot x = \mathrm{sgn}(\sigma)x$. Comme ces représentations sont de dimension 1, elles sont nécessairement irréductibles. On a également *l'action naturelle* de $\mathfrak{S}_n$ sur les vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées, donc

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, ..., x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Cette représentation n'est pas irréductible. En effet, les vecteurs de la forme $(x, x, ..., x)$ forment clairement un sous-espace stable. En considérant le produit scalaire usuel, le complément orthogonal de ce sous-espace est la *représentation standard*. Cette sous-représentation de $\mathbb{C}^n$ est constituée des vecteurs tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.5. *La représentation standard est irréductible et isomorphe à $V_{(n-1,1)}$. Son complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ est isomorphe à la représentation triviale, i.e.* $\mathbb{C}^n \cong V_{(n-1,1)} \oplus V_{(n)}$.

On a vu que que le produit tensoriel de deux représentations de $\mathfrak{S}_n$ est une représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. En considérant la représentation restreinte à la diagonale de ce groupe (*i.e.* les éléments de la forme (σ, σ)), le produit tensoriel devient une représentation de $\mathfrak{S}_n$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.6. $V_\lambda \otimes V_{(1^n)} = V_{\lambda'}$.

En particulier, $V_{(2,1^{n-2})}$ est isomorphe au produit tensoriel de la représentation standard et de la représentation signature.

1.3 Caractères du groupe symétrique

Les caractères sont un outil puissant pour aider à trouver la décomposition en irréductibles d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$. Pour V_λ une représentation irréductible, on note χ_λ son caractère. Pour les représentations ci-haut, on peut facilement calculer que :

Proposition 1.3.1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\text{fix}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) = i\}$ le nombre de points fixes (i.e. cycles de longueur 1) de σ. Alors :*

1. $\chi_{(n)}(\sigma) = 1$;
2. $\chi_{(1^n)}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$;
3. $\chi_{\mathbb{C}^n}(\sigma) = \text{fix}(\sigma)$;
4. $\chi_{(n-1,1)}(\sigma) = \text{fix}(\sigma) - 1$;
5. $\chi_{(2,1^{n-2})}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\,(\text{fix}(\sigma) - 1)$;
6. $\chi_{\lambda'}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\chi_\lambda(\sigma)$.

Dans le cas général, ces calculs sont beaucoup plus complexes. On cherche plutôt une formule facile à utiliser, c'est-à-dire une formule par laquelle on peut calculer directement $\chi_\lambda(\sigma)$ pour deux partages λ et σ (en considérant que le partage σ correspond aux permutations de $\mathfrak{S}_n$ de structure cyclique σ). Frobenius (Frobenius, 1900) a le premier donné une telle formule. Afin de la décrire, on rappelle que le *déterminant de Vandermonde* est défini comme le produit

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j),$$

où $\boldsymbol{x}$ est l'ensemble de k variables $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$. En considérant que λ et $\delta = (k-1, k-2, ..., 0)$ sont des vecteurs d'entiers, on note $\boldsymbol{x}^{\lambda+\delta}$ le monôme

$$\boldsymbol{x}^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+k-1} x_2^{\lambda_2+k-2} ... x_k^{\lambda_k}.$$

On rappelle aussi le polynôme symétrique nommé *somme de puissances*

$$p_\sigma(\boldsymbol{x}) = p_{\sigma_1}(\boldsymbol{x}) \ldots p_{\sigma_\ell}(\boldsymbol{x}), \qquad \text{avec} \quad p_j(\boldsymbol{x}) = x_1^j + \ldots + x_k^j.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.3.2 (Formule de Frobenius). *Pour tous partages λ et σ de n, on a*

$$\chi_\lambda(\sigma) = \Delta(\boldsymbol{x}) p_\sigma(\boldsymbol{x}) \big|_{\boldsymbol{x}^{\lambda+\delta}},$$

où $f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}^{\lambda+\delta}}$ signifie que l'on prend le coefficient de $\boldsymbol{x}^{\lambda+\delta}$ dans $f(\boldsymbol{x})$.

La beauté de cette formule réside entre autre dans le fait qu'elle fait intervenir le produit de deux polynômes simples et bien connus. On souligne qu'il n'est pas nécessaire de calculer complètement le produit. Il suffit en fait de ne regarder que les combinaisons qui contribuent au coefficient voulu. Par contre, cette formule devient clairement difficile à utiliser pour de grandes valeurs de n.

Une formule plus efficace pour calculer les caractères est la *règle de Murnaghan–Nakayama* (Murnaghan, 1937). Elle découle directement de la formule de Frobenius. Pour la décrire, il faut d'abord rappeler ce qu'est un *ruban* d'un partage λ. Il s'agit d'un sous-diagramme simplement connexe de λ qu'on peut entièrement parcourir en passant d'une case (a, b) à une case voisine ne pouvant être que l'une des cases $(a-1, b)$ ou $(a, b+1)$ et qui ne contient jamais en même temps les 4 cases (i, j), $(i-1, j)$, $(i, j+1)$ et $(i-1, j+1)$.

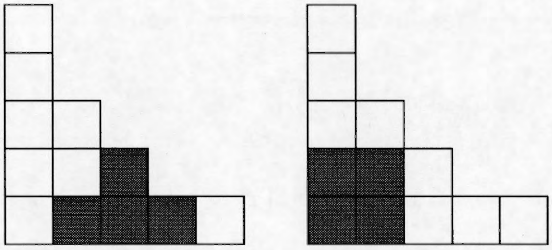

Figure 1.2 Exemples de sous-ensembles qui ne sont pas des rubans (en rouge) du partage $(5,3,2,1,1)$.

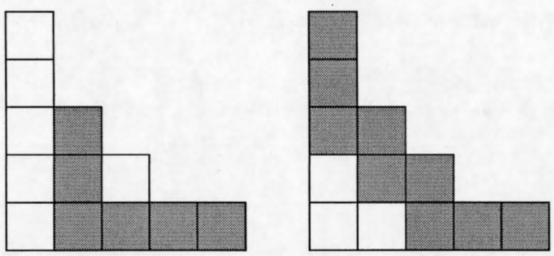

Figure 1.3 Exemples de rubans (en vert) du partage $(5,3,2,1,1)$; le second est dans $R((5,3,2,1,1),9)$.

On appelle *hauteur* d'un ruban ξ, noté $\mathrm{ht}(\xi)$, le nombre de lignes occupées par ξ dans λ moins 1. On note $R(\lambda, k)$ l'ensemble des rubans de $\lambda \vdash n$ qui sont de longueur k et tels que $\lambda \setminus \xi$ (la différence ensembliste des diagrammes) est le diagramme d'un partage de $n-k$. Aussi, si on a un partage $\sigma = (\sigma_1\sigma_2...\sigma_k)$, on note $\sigma \setminus \sigma_1 = \sigma_2\sigma_3...\sigma_k$ le partage obtenu à partir de σ en enlevant la première part. On peut alors énoncer la forme récursive de la règle de Murnaghan-Nakayama :

Corollaire 1.3.3 (Règle de Murnaghan-Nakayama). *Soient λ, σ des partages de n. Alors, la valeur de χ_λ, le caractère de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ associée à λ, évalué en une permutation de structure cyclique σ est*

$$\chi_\lambda(\sigma) = \sum_{\xi \in R(\lambda,\sigma_1)} (-1)^{\mathrm{ht}(\xi)} \chi_{\lambda\setminus\xi}(\sigma \setminus \sigma_1).$$

Cette règle permet un calcul très rapide des caractères. Il est à noter que la formule est valide peu importe l'ordre dans lequel on écrit les parts de σ.

1.4 Représentations du groupe général linéaire

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Pour cet exposé, on ne considère que les représentations polynomiales de $\mathrm{GL}(V)$. Les représentations polynomiales irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ sont étroitement liées à celles de $\mathfrak{S}_n$. Soit $V^{\otimes n}$ la n^e puissance tensorielle de V. Cet espace est à la fois une représentation de $\mathrm{GL}(V)$ et de $\mathfrak{S}_n$. Pour $g \in \mathrm{GL}(V)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit les actions suivantes sur $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$:

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) = gv_1 \otimes gv_2 \otimes \ldots \otimes gv_n;$$
$$\sigma \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

On peut étendre de façon linéaire l'action de $\mathfrak{S}_n$ à une action de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, donc en particulier à une action des symétriseurs de Young c_τ. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et τ un tableau standard de forme $\lambda \vdash n$, où $\ell(\lambda) \leq \dim(V)$. Alors, le sous-espace $c_\tau \cdot V^{\otimes n}$ est une représentation polynomiale irréductible de $\mathrm{GL}(V)$. Deux représentations irréductibles $c_\tau \cdot V^{\otimes n}$ et $c_{\tau'} \cdot V^{\otimes n}$ sont isomorphes si et seulement si τ et τ' sont des tableaux de Young standards de même forme λ ; on note alors $S^\lambda(V)$ cette représentation. Il existe autant de copies de $S^\lambda(V)$ dans $V^{\otimes n}$ que de tableaux standards.*

On remarque que les actions de $\mathrm{GL}(V)$ et de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ commutent. On peut donc voir cet espace comme une représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathrm{GL}(V)$. À l'aide de la proposition 1.1.3, on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.2 (Dualité de Schur-Weyl). *Si V est un espace vectoriel de dimension k, alors en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathrm{GL}(V)$, l'espace $V^{\otimes n}$ se* *décompose de la façon suivante :*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq k}} V_\lambda \otimes S^\lambda(V).$$

Pour le partage $(n) \vdash n$, $S^{(n)}(V) = S^n(V)$ est appelée la n^e *puissance symétrique* de V. Il s'agit du sous-espace de $V^{\otimes n}$ engendré par les vecteurs de la forme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$, que l'on note $v_1 v_2 \ldots v_n$. Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ est une base de V (donc $\dim(V) = k$), alors les éléments de la forme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} w_{\sigma(i_1)} \otimes w_{\sigma(i_2)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(i_n)}$ $(1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n \leq k)$ forment une base de $S^n(V)$. Si a_i est le nombre d'occurence de i dans les indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$, alors on a un isomorphisme entre $S^n(V)$ et l'espace des polynômes homogènes de degré n en k variables donné par

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} w_{\sigma(i_1)} \otimes w_{\sigma(i_2)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(i_n)} \mapsto x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}.$$

C'est bien un isomorphisme, car on obtient ainsi tous les monômes de degré n en k variables une et une seule fois. Donc, on a que

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V)$$

est isomorphe à $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$.

Soit maintenant V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $S^n(V \otimes W)$, qui est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(V \otimes W)$. Mais pour le sous-groupe $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$), que l'on identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V \otimes W)$ par le morphisme de groupes $(A, B) \mapsto A \otimes B$, on a le résultat suivant :

Proposition 1.4.3. *Si V et W sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors en tant que représentation de* $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$, *on a* $S^n(V \otimes W) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^\lambda(V) \otimes S^\lambda(W)$.

Aussi, pour $(1, 1, ..., 1) = (1^n) \vdash n$, on appelle $\Lambda^n(V) = S^{(1,1,...,1)}(V)$ la n^e *puissance extérieure* de V. Cet espace est engendré par les vecteurs de $V^{\otimes n}$ de la forme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}$, que l'on note $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n$. Les éléments de ce sous-espace sont anti-symétriques, c'est à dire que $\sigma \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n) = \operatorname{sgn}(\sigma)(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n)$. L'espace

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V)$$

est appelé *algèbre extérieure* de V.

Pour toute représentation W de $\mathrm{GL}(V)$, on peut définir son *sous-espace de poids trivial*, noté W_0. Ce sous-espace est celui qui est invariant (point par point) par le sous-groupe $\mathrm{T}(V)$ de $\mathrm{GL}(V)$ constitué des automorphismes diagonaux (dans une certaine base choisie) de V et ayant un déterminant de 1. La base choisie n'a pas d'importance, car tous les sous-groupes définis de cette façon sont conjugués, donc isomorphes. Ces sous-espaces se décomposent de la même façon que la représentation.

CHAPITRE II

THÉORIE DE VALIANT

La théorie de la complexité étudie essentiellement la complexité d'un problème informatique. Pour mesurer cette complexité, on cherche à montrer qu'un algorithme résolvant un problème donné nécessite au minimum un certain nombre d'étapes. On considère dans ce texte les problèmes de décision (c'est-à-dire ceux pour lesquels on peut répondre par oui ou par non) et qui varient selon un seul entier n ; on appelle alors cet entier la *taille de l'instance* du problème. Pour un algorithme résolvant un tel problème, il existe une fonction qui associe à chaque entier le nombre d'étapes lorsque l'instance est de taille n. Comme on cherche à avoir des algorithmes qui sont efficaces même lorsque la taille de l'instance est grande, on veut que cette fonction croisse le plus lentement possible.

Dans cette théorie, on considère qu'un algorithme dont le nombre d'étapes est $f(n)$ est rapide si f peut être bornée supérieurement par un polynôme ; on dit alors que l'algorithme s'effectue (au plus) en *temps polynomial*. La classe $\mathbf{P}$ représente les problèmes pour lesquels il existe un algorithme résolvant le problème en temps polynomial, alors que la classe $\mathbf{NP}$ représente les problèmes pour lesquels il existe un algorithme vérifiant si une solution résout le problème par l'affirmative et qui s'effectue en temps polynomial. Il est clair que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. L'un des problèmes les plus célèbres de l'informatique théorique, dont la formulation actuelle est due à S. Cook (Cook, 1971), est de savoir si $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ ou si, comme la majorité le croit, l'inclusion est stricte. Depuis plusieurs années, beaucoup d'approches ont été tentées pour résoudre ce problème. Dans (Valiant, 1979), L. Valiant propose une version plus algébrique de ce problème. Cette version est encore étudiée sous plusieurs angles, dont un est la théorie géométrique de la complexité, proposée par Mulmuley et Sohoni (Mulmuley et Sohoni, 2001). Il s'agit d'une conjecture presque équivalente à celle de Valiant, mais qui permet d'utiliser en plus des arguments de géométrie algébrique.

Dans ce qui suit, on décrit explicitement la théorie de Valiant, on énonce les plus récents résultats de la théorie, et on décrit les bases de la théorie géométrique de la complexité. Un exposé plus complet et contenant tous les résultats est fait par J.M. Landsberg dans les chapitres 1 et 6 de (Landsberg, 2016).

2.1 Hypothèse de Valiant

Le *problème du déterminant* est de déterminer, étant donné une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de taille $n \times n$ et une constante $c \in \mathbb{C}$, si le déterminant de A est c. Ici, la taille de l'instance est la dimension de la matrice. On sait que le déterminant de A peut être calculé en utilisant la formule de Leibniz :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}.$$

Utilisant cette formule pour calculer $\det(A)$ et comparer avec c, on a un algorithme qui prend $n \cdot n! - 1$ étapes (en calculant le nombre d'opérations arithmétiques requises), donc qui ne s'effectue pas en temps polynomial. Cependant, on peut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan (dont on rappelle l'histoire dans (Althoen et McLaughin, 1987)) pour d'abord trianguler la matrice, puis calculer le déterminant en multipliant les éléments diagonaux. On a ainsi un algorithme qui prend au plus n^4 opérations, donc qui s'effectue en temps polynomial. Le problème du déterminant est donc un problème qui est dans **P**.

Pour $X = [x_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de variables de taille $n \times n$, on considère le polynôme $\det_n = \det(X)$ comme un polynôme homogène de degré n à n^2 variables. C'est donc un élément de $S^n\mathbb{C}^{n^2}$, exprimé dans la base canonique $\{x_{ij}\}$ de $\mathbb{C}^{n^2}$. Par ce qui précède, on peut évaluer $\det_n$ en tout point $a \in \mathbb{C}^{n^2}$ en temps polynomial. On souhaite généraliser cette propriété aux autres suites de polynômes pour avoir un analogue algébrique de la classe **P**. Autrement dit, on cherche à déterminer si une suite de polynômes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être évalué en n'importe quel point en temps polynomial. Soit l'anneau

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n,m\in\mathbb{N}} S^n\mathbb{C}^m,$$

qui est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré quelconque et en un nombre de variables fini, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ une suite de tels polynômes. On considère que chaque f_n est homogène, quite à ajouter une variable pour metttre tous les termes au même degré. On note alors $\nu(n)$ le nombre de variables de f_n et $d(n)$ son degré. Autrement dit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \in S^{d(n)}\mathbb{C}^{\nu(n)}$. Soit $t(n)$ le nombre d'opérations arithmétiques requises pour évaluer f_n en n'importe quel point de $\mathbb{C}^{\nu(n)}$ (on peut rendre plus concret ce nombre par la notion de *circuit arithmétique*, définie par exemple dans (von zur Gathen, 1988)). On définit la classe **VP** comme étant l'ensemble des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\nu(n)$, $d(n)$ et $t(n)$ peuvent être bornées supérieurement par des polynômes. Cette définition correspond à l'intuition que l'on peut avoir d'une suite de polynômes pour lesquels l'évaluation en un point se fait en temps polynomial, comme c'est le cas pour $\det_n$. On a ainsi un bon analogue à la classe de problèmes de décision **P**.

Soit $f_n = x^{2^n}$. Alors, la suite (f_n) n'est pas dans **VP**. En effet, bien que l'on puisse le calculer en temps polynomial, son degré 2^n ne peut être borné par un polynôme. Par contre, toute suite de monômes tels que leur dégré et leur nombre de variables sont bornés par des polynômes est dans **VP**. Plus généralement, si une suite (f_n) est telle que son nombre de termes est aussi polynomial en n, alors la suite est dans **VP**, car calculer un tel polynôme comme il est écrit prend un temps polynomial.

Par ailleurs, soit

$$f_n = \sum_{\substack{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n \\ k_1+...+k_n=n}} \binom{n}{k_1 \; ... \; k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n}.$$

En calculant le polynôme sous cette forme, on obtient un nombre d'opérations qui croît de façon exponentielle. Cependant, comme f_n est égal au polynôme $(x_1 + ... + x_n)^n$, alors on peut en fait le calculer avec $n(n-1)$ opérations arithmétiques, et donc $(f_n) \in$ **VP**.

On définit ensuite la classe **VNP** comme étant la classe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\nu(n)$ et $d(n)$ sont bornées par des polynômes et telles qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ **VP** et une fonction $p(n)$ bornée par un polynôme telles que

$$f_n = \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{p(n)}} g_n(x_1, ..., x_{\nu(n)}, \epsilon).$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des suites de polynômes pour lesquelles étant donné un monôme, on peut calculer son coefficient en temps polynomial. L'analogie entre **NP** et **VNP** est beaucoup plus explicite lorsque l'on considère la définition formelle de **NP** donnée par Cook (Cook, 1971).

Un exemple d'une telle suite est le permanent. Le permanent est, tout comme le déterminant, une valeur que l'on peut attribuer à une matrice. Pour une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de taille $n \times n$, son *permanent* est :

$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}.$$

Pour une matrice de variables X de taille $n \times n$, le polynôme $\mathrm{perm}_n = \mathrm{perm}(X)$

est dans $S^n\mathbb{C}^{n^2}$, tout comme c'est le cas pour $\det_n$. On a alors le lemme suivant (Bürgisser, 2013) :

Lemme 2.1.1. *La suite* $(perm_n)$ *est dans* **VNP**.

Preuve. Soit deux matrices de variables de taille $n \times n$, notées $X = [x_{ij}]$ et $\epsilon = [e_{ij}]$. On considère le polynôme suivant :

$$g_n(X, \epsilon) = \underbrace{\left(\prod_{\substack{1 \leq i,j,l,m \leq n \\ i=l \iff j \neq m}} 1 - e_{ij}e_{lm} \right)}_{\alpha(\epsilon)} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right)}_{\beta(\epsilon)} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}e_{ij} \right)}_{\gamma(X,\epsilon)}.$$

Ce polynôme est bien dans **VP**, car on peut remarquer que même naïvement, $\alpha(\epsilon)$ se calcule en $4n^2(n-1)$ opérations. $\beta(\epsilon)$ en $(n+1)(n-1)$ opérations et $\gamma(X, \epsilon)$ en 2 fois plus d'opérations que $\beta(\epsilon)$.

On affirme que si ϵ est une matrice composée uniquement de 0 et de 1 (donc $\epsilon \in \{0,1\}^{n \times n}$), $\alpha(\epsilon)\beta(\epsilon)$ est non-nul si et seulement si ϵ est une matrice de permutation. En effet, on remarque que $\alpha(\epsilon)$ est non-nul si et seulement si il y a au plus un 1 par ligne pour par colonne. En effet, le produit est tel que chaque entrée de ϵ est multpliée par tous les éléments de sa ligne et de sa colonne (sauf elle-même) ; pour qu'aucun des termes ne soit nul, il faut donc que si une entrée de la matrice est 1, ce soit la seule de sa ligne et de sa colonne. Dans le cas de $\beta(\epsilon)$, ce produit est non-nul si et seulement si chaque ligne de ϵ contient au moins un 1. Ces deux conditions réunies donne bien que ϵ doit être une matrice de permutation si $\alpha(\epsilon)\beta(\epsilon)$ est non-nul, et dans ce cas, cette valeur non-nulle est 1.

Finalement, si ϵ représente la matrice de permutation d'une permutation σ, alors on a que $\gamma(X, \epsilon) = x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}...x_{n\sigma(n)}$. Donc, on a que

$$\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^{n \times n}} g_n(X, \epsilon) = \text{perm}_n,$$

ce qui démontre que $(\mathrm{perm}_n) \in$ **VNP**. $\square$

On a **VP** $\subseteq$ **VNP**, car si (g_n) est dans **VP**, alors en posant $g'_n(x_1, ..., x_{\nu(n)}, \epsilon) = \epsilon g_n(x_1, ..., x_{\nu(n)})$ pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, qui ne contient qu'une opération de plus que g_n, alors on a que $g_n = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} g'_n(x_1, ..., x_{\nu(n)}, \epsilon)$, ce qui correspond bien à la définition d'une suite de **VNP**. La conjecture phare de ce texte, qui est l'hypothèse de Valiant, est que cette inclusion est stricte :

Conjecture 2.1.2 (Hypothèse de Valiant). **VP** $\neq$ **VNP**

On a donc une version algébrique de **P** vs **NP**. Certains liens existent entre les conjectures, bien qu'elles ne soient pas équivalentes. Par exemple, si **P** $\neq$ **NP**, alors on aurait **VP** $\neq$ **VNP** lorsque l'on considère les familles de polynômes sur des corps finis. De l'autre côté, si on arrivait à démontrer que **VP** $\neq$ **VNP**, cela ne démontrerait qu'une conjecture plus faible que **P** $\neq$ **NP**, mais ce serait une étape majeure pour répondre à l'hypothèse de Cook.

Une des stratégies utilisées pour s'attaquer au problème **P** vs **NP** est de trouver un problème de **NP** qui est au moins aussi difficile que tous les autres (on dit alors que ce problème est **NP**-complet (NP-complete problem, 2018)). Ainsi, si on montre qu'un tel problème est dans **P**, alors tous les problèmes de **NP** sont dans **P**, donc **P** = **NP**. On cherche un équivalent à cette technique pour les suites de polynômes de **VP** et **VNP**, afin de résoudre notre conjecture que l'on appelle, par analogie, le problème **VP** vs **VNP**. Voici d'abord quelques définitions.

On dit qu'un polynôme $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_m]$ est une *réduction* d'un polynôme $g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_k]$ s'il existe des *fonctions affines* (*i.e.* des polynômes de degré au plus un) $y_1(x_1, ..., x_m), ..., y_k(x_1, ..., x_m)$ telles que $f = g(y_1, ..., y_k)$. On note alors $f \leq g$. Malgré cette notation, " $\leq$ " n'est pas une relation d'ordre ; elle est bien réflexive et transitive, mais pas antisymétrique. Aussi, on dit qu'une suite de polynômes

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une réduction de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une fonction $p(n)$ bornée par un polynôme telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq g_{p(n)}$. On note également $(f_n) \leq (g_n)$.

Par exemple, x^d est une réduction de tout polynôme homogène $f(x_1, ..., x_m)$ de degré d tel que la somme des coefficients n'est pas nulle. En effet, on a que $x^d = f(ax, ax, ..., ax)$, où a est la racine d^e de l'inverse de la somme des coefficients. On a aussi que pour tout entier n, $\det_{n-1} \leq \det_n$, en posant les variables supplémentaires dans $\det_n$ égales à 0, sauf x_{nn} que l'on pose égale à 1. On a également que la suite $(x_1x_2...x_n)$ est une réduction des suites $(\det_n)$ et (perm_n). Cela peut se remarquer en considérant les matrices diagonales.

Les classes **VP** et **VNP** sont stables par réduction. En effet, on a le lemme suivant (Bürgisser, 2000) :

Proposition 2.1.3. *Soit $(g_n) \in$ **VP** (respectivement $(g_n) \in$ **VNP**) et (f_n) une suite de polynômes telle que $(f_n) \leq (g_n)$. Alors, $(f_n) \in$ **VP** (resp. $(f_n) \in$ **VNP**).*

Pour **VP** et **VNP**, on dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *complète* pour cette classe si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fait partie et si pour toute autre suite (g_n) de cette classe, on a $(g_n) \leq (f_n)$. On a également le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.4. *Soient $(f_n), (g_n) \in$ **VNP** des suites de polynômes, où (f_n) est **VNP**-complète. Alors, $(f_n) \leq (g_n)$ si et seulement si (g_n) est également **VNP**-complète.*

On remarque qu'avec ces définitions, on a bien que si une suite de polynômes est **VNP**-complète et est dans **VP**, alors on a **VP** = **VNP**. Pour utiliser cette technique, il faut bien sûr avoir une suite qui est complète pour **VNP**. Une telle suite est le permanent. En effet, bien qu'il soit très semblable au déterminant (ils ont les mêmes coefficients au signe près), on ne connaît pas d'algorithme polynomial pour l'évaluer en un point quelconque. Le résultat suivant, dû à Valiant et qui se démontre en utilisant la théorie des graphes (Valiant, 1979), est à la base toute cette théorie :

Théorème 2.1.5. *La suite* $(\mathrm{perm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **VNP**-*complète.*

On a donc une reformulation de l'hypothèse de Valiant en terme du permanent :

Conjecture 2.1.6. $(\mathrm{perm}_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathbf{VP}$.

C'est cette formulation, ainsi que le fait que $\det_n$ soit dans **VP** (bien qu'on ne sache pas si cette suite est **VP**-complète), qui constituent la base de la théorie de Valiant.

2.2 Complexité déterminantielle

Soit $f \in S^n\mathbb{C}^m$ un polynôme homogène de degré n en m variables, et soit $L : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{k\times k}$ une application affine. On dit que L est une *expression déterminantielle de f de taille k* si $f = \det_k \circ L$. Ceci est équivalent à dire que f est une réduction de $\det_k$. On définit alors la *complexité déterminantielle* de f, noté $\mathrm{cd}(f)$, comme étant le plus petit entier k tel qu'il existe une expression déterminantielle de f de taille k. En d'autres termes, $\mathrm{cd}(f)$ est le plus petit k tel qu'il existe une matrice de taille $k\times k$ dont les entrées sont de la forme $a_0+\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ $(a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbb{C})$ et dont le déterminant est f. On peut se demander si la complexité déterminantielle est toujours définie. Valiant a montré (Valiant, 1979) que la réponse à cette question est positive :

Proposition 2.2.1. *Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$ *et tout polynôme homogène* $f \in S^n\mathbb{C}^m$, *il existe un entier* $k \in \mathbb{N}$ *et une application affine* $L : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{k\times k}$ *tels que* $f = \det_k \circ L$.

Donc, tout polynôme de $\mathcal{H} = \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} S^n\mathbb{C}^m$ peut s'écrire comme le déterminant d'une matrice. Par exemple, si $f = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 \in S^3\mathbb{C}^6$, alors on a que

$$f = \det \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce qui veut dire que $\mathrm{cd}(f) \leq 5$. Trouver une telle matrice peut être une tâche ardue. Cependant, on voit que pour tout $f \in \mathcal{H}$, on doit avoir $\deg(f) \leq \mathrm{cd}(f)$. En effet, chaque terme du déterminant d'une matrice de taille $k \times k$ est de degré au plus k, et une application affine sur les variables d'un polynôme n'augmente pas son degré. Donc, dans le cas $f = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6$, on a $3 \leq \mathrm{cd}(f) \leq 5$. Pour déterminer sa complexité déterminantielle, il faut une façon de déterminer si une matrice de taille inférieure à celle ci-haut et dont le déterminant est f existe, ce qui n'est pas évident a priori.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ une suite de polynômes. On peut alors calculer la suite de nombres naturels $(\mathrm{cd}(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$. Comme on a que $f_n \leq \det_{\mathrm{cd}(f_n)}$, on remarque que si $(\mathrm{cd}(f_n))$ peut être bornée supérieurement par un polynôme, alors (f_n) est une réduction du déterminant, donc dans **VP**. En supposant que **VP** $\neq$ **VNP**, cela implique la conjecture suivante :

Conjecture 2.2.2. *La suite* $(\mathrm{cd}(\mathrm{perm}_n))$ *ne peut être bornée supérieurement par un polynôme.*

Cette hypothèse plus faible serait équivalente à la conjecture 2.1.2 si $(\det_n)$ était **VP**-complet, car cela impliquerait que la suite $(\mathrm{cd}(f_n))$ soit bornée par un polynôme pour toute suite $(f_n) \in$ **VP** ; mais on ne sait pas si cela est vrai ou non. On peut définir une sous-classe de **VP** pour laquelle ($\det_n$) est une suite complète, qui se nomme $\mathbf{VP}_{ws}$, et qui se définit en utilisant la notion de circuit arithmétique faiblement asymétrique (ou *weakly skew circuit*), d'abord définie dans (Toda, 1992). Donc, la conjecture 2.2.2 est équivalente à :

Conjecture 2.2.3. $\mathbf{VP}_{ws} \neq \mathbf{VNP}$.

Bien que ce soit une conjecture moins forte que l'hypothèse de Valiant, ce serait déjà une avancée majeure dans le domaine ; selon J.M. Landsberg, «[...] ce serait de loin le résultat le plus significatif depuis les débuts de la théorie de la complexité» [1]. On sait que si $n \geq 3$, alors $\text{cd}(\text{perm}_n) > n$, et on ne connaît que les valeurs de la complexité déterminantielle de perm_2 et perm_3. Pour perm_2, alors on a évidemment que $\text{cd}(\text{perm}_2) = 2$, car c'est un polynôme de degré 2, et on a clairement que le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} x_{11} & -x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

est perm_2. Pour perm_3, on a $\text{cd}(\text{perm}_3) = 7$, car on peut montrer que la plus petite matrice pour laquelle perm_3 est le déterminant est

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_{33} & x_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{13} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{13} & 0 & x_{23} \\ x_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En général, pour perm_n, on a $\frac{n^2}{2} \leq \text{cd}(perm_n) \leq 2^n - 1$ (Mignon et Ressayre, 2004), (Grenet, 2011). Encore selon Landsberg, trouver une borne inférieure de

1. Traduction libre de (Landsberg, 2015), page 4

degré 3 «serait déjà un grand accomplissement» [2], bien que l'on serait encore loin de répondre à la conjecture 2.2.3. La difficulté majeure est le fait qu'on ne connaît aucune technique générale et efficace permettant de prouver que la matrice que l'on trouve est de taille minimale.

2.3 Géométrie et complexité

Cette partie n'est qu'une introduction à la théorie géométrique de la complexité. Pour voir les plus récentes avancées de cette théorie, voir (Landsberg, 2015).

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $\det_n$ et perm_n sont des éléments de l'anneau $S^n\mathbb{C}^{n^2}$. On veut étudier ces espaces d'un point de vue plus géométrique. On remarque d'abord que l'on a $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, donc on peut considérer $\det_n$ et perm_n comme des éléments de $S^n(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$. Ce point de vue est utile pour étudier leurs symétries, comme on le fait à la section 3.3.

On a une action naturelle de $g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})$ sur un polynôme $f \in S^n(\mathbb{C}^{n^2})$, en définissant $g \cdot f = f \circ g^T$. Avec cette action, on définit l'ensemble

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot f = \{g \cdot f \mid g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})\} \subseteq S^n(\mathbb{C}^{n^2})$$

des polynômes pouvant être obtenus de f par changement linéaire des variables. Aussi, il est à remarquer que pour tout $m \leq n$ et $k \leq n^2 - 1$, on peut associer à chaque polynôme $\tilde{f} \in S^m(\mathbb{C}^k)$ un unique polynôme $f \in S^n(\mathbb{C}^{n^2})$. En effet, soit n'importe quelle inclusion $i : \mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ et ℓ un élément de la base de $\mathbb{C}^{n^2}$ qui n'est pas dans $i(\mathbb{C}^k)$. Alors, on pose $f = \ell^{n-m}\tilde{f}$, en utilisant i pour inclure les variables de $\tilde{f}$ dans celles de f. En appliquant tout cela au déterminant, on a le lemme suivant :

---

2. Ibid.

Lemme 2.3.1. *Soit f un polynôme homogène de degré m en k variables, avec $m \leq n$ et $k \leq n^2 - 1$. Alors, on a que* $\mathrm{cd}(f) \leq n$ *si et seulement si* $\ell^{n-m} f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot \det_n$.

On a donc la forme équivalente de la conjecture 2.2.3 :

Conjecture 2.3.2. *Il n'existe pas de polynôme $n = n(m) \in \mathbb{N}[m]$ tel que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a* $\ell^{n-m}\mathrm{perm}_m \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot \det_n$.

On veut utiliser les outils de la géométrie algébrique et de la théorie de la représentation pour étudier cette nouvelle version de notre conjecture. À cette fin, on considère $[\det_n]$ et $[\mathrm{perm}_m]$ comme points de l'espace projectif $\mathbb{P}S^n(\mathbb{C}^{n^2})$, où l'action d'un endormorphisme $X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})$ envoie un point $[f]$ de cet espace projectif sur $X \cdot [f] = [X \cdot f]$, en considérant comme non-définis les cas où $X \cdot f = 0$ (le point $[0]$ n'étant pas dans l'espace projectif). Pour utiliser la théorie de la représentation des groupes, il nous faudrait un groupe, mais $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})$ n'en est pas un. Cependant, en notant $\overline{X}$ la fermeture d'une partie X de $\mathbb{P}S^n(\mathbb{C}^{n^2})$, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.3. $\overline{\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]} = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]}$.

Cela découle essentiellement du fait que $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2})$ est un ouvert dense de $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})$. On note que la fermeture de l'orbite d'un élément par un groupe linéaire selon la topologie euclidienne est la même que celle selon la topologie de Zariski (voir par exemple (Borel, 2012)). En particulier, cela signifie que cette fermeture est une variété projective.

De la même façon que $\mathrm{cd}(f)$ permet de caractériser les éléments de $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]$, on veut obtenir une caractérisation des polynômes appartenant à la fermeture. Par la proposition précédente, ces éléments sont exactement ceux de la variété algébrique $\overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2})) \cdot [\det_n]}$. On définit pour cela la *complexité déterminantielle au bord* d'un polynôme homogène $f \in \mathcal{H}$, notée $\overline{\mathrm{cd}}(f)$, comme étant le plus petit entier δ tel qu'il existe une suite de polynômes $(f_t)_{t>0}$ avec $\mathrm{cd}(f_t) = \delta$ pour tout $t > 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} f_t = f$.

On a que tout comme $\mathrm{cd}(f)$, $\overline{\mathrm{cd}}(f)$ est bornée inférieurement par le degré de f. Comme on peut prendre $f_t = f$ pour tout t, on a clairement $\overline{\mathrm{cd}}(f) \leq \mathrm{cd}(f)$. Les deux valeurs ne sont cependant pas toujours égales.

Par exemple, soient les polynômes de $S^3\mathbb{C}^9$ suivants :

$$\begin{aligned} f_t &= 8t^2x_4x_5x_6 - 2t^2x_4x_8^2 - 2t^2x_5x_9^2 - 2t^2x_6x_7^2 + 2t^2x_7x_8x_9 \\ &\quad + 2x_1^2x_4 + 2x_2^2x_5 + 2x_3^2x_6 + 2x_1x_2x_7 + 2x_2x_3x_8 + 2x_1x_3x_9 \\ f_0 &= 2x_1^2x_4 + 2x_2^2x_5 + 2x_3^2x_6 + 2x_1x_2x_7 + 2x_2x_3x_8 + 2x_1x_3x_9 \end{aligned}$$

Il est clair que $\lim\limits_{t\to 0} f_t = f_0$, d'où le choix de notation. Cependant, si on pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & -x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad S = \begin{bmatrix} 2x_6 & x_8 & x_9 \\ x_8 & 2x_5 & x_7 \\ x_9 & x_7 & 2x_4 \end{bmatrix}.$$

Alors, on peut remarquer que $f_t = \dfrac{\det(A + tS)}{t} = \det\left(\dfrac{A}{t^{1/3}} + t^{2/3}S\right)$. Cependant, la matrice $\dfrac{A}{t^{1/3}} + t^{2/3}S$ n'est pas définie lorsque $t = 0$, et on peut montrer (Hüttenhain et Lairez, 2016) que l'on ne peut écrire f_0 sous la forme d'un déterminant d'une matrice de taille 3×3. Donc, $\overline{\mathrm{cd}}(f_0) = 3 < \mathrm{cd}(f_0)$.

On a que si $\overline{\mathrm{cd}}(f) = n$, alors c'est la limite d'une suite de polynômes qui appartiennent à $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot \det_n$. Par la définition de la fermeture d'un ensemble, le lemme 2.3.1 et la proposition 2.3.3, on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Soit $f \in S^m\mathbb{C}^k$ un polynôme homogène. Alors, $\overline{\mathrm{cd}}(f) \leq n$ si et seulement si $[\ell^{n-m}f] \in \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]}$.*

On peut donc poser une nouvelle conjecture, en lien avec celle de Valiant :

Conjecture 2.3.5 (Mulmuney-Sohoni). *Il n'existe pas de polynôme $n = n(m) \in \mathbb{N}[m]$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $[\ell^{n-m}\mathrm{perm}_m] \in \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]}$.*

Cette conjecture fut d'abord étudiée par Mulmuley et Sohoni (Mulmuley et Sohoni, 2001). Si elle est vraie, cela implique clairement que l'hypothèse de Valiant est aussi vraie. C'est donc une conjecture plus difficile à prouver, mais l'avantage est que nous avons plus d'outils pour l'étudier. Pour utiliser davantage la géométrie, on considère les ensembles suivants de $\mathbb{P}S^n(\mathbb{C}^{n^2})$, qui sont des variétés projectives :

$$Det_n = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]};$$
$$Perm_n^m = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\ell^{n-m}\mathrm{perm}_m]}.$$

On a alors la conjecture suivante, et qui est équivalente à la conjecture 2.3.5 :

Conjecture 2.3.6. *Il n'existe pas de polynôme $n = n(m) \in \mathbb{N}[m]$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $Perm_n^m \subseteq Det_n$.*

On peut tenter d'utiliser la complexité déterminantielle au bord pour mieux comprendre cette conjecture. Cependant, il est encore plus difficile de trouver cette valeur que de trouver la complexité déterminantielle. En particulier, on ne connaît même pas la valeur de $\overline{\mathrm{cd}}(\mathrm{perm}_3)$. On cherche donc un autre moyen pour pouvoir décrire $Perm_n^m$ et Det_n. Cependant, il est très difficile de déterminer exactement quels éléments font partie de la fermeture d'une orbite.

On a simplement les résultats suivants. D'abord, $Det_2 = Perm_2^2 = \mathbb{P}S^2(\mathbb{C}^4)$, l'espace entier. Un résultat récent (Hüttenhain et Lairez, 2016) permet de comprendre la frontière de Det_3. Plus précisément, elle est constituée de l'orbite du déterminant des matrices de trace nulle et de l'orbite du polynôme f_0 ci-haut. Ces composantes sont aussi présentes dans les autres Det_n (en utilisant une généralisation de f_0), mais il en existe probablement d'autres lorsque $n \geq 4$. Vu la difficulté de décrire ces surfaces, on considère leurs anneaux de fonctions, qui sont des représentations de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2})$. On peut donc également utiliser la théorie de la représentation pour mieux comprendre Det_n et $Perm_n^m$.

CHAPITRE III

IMMANANTS

Dans le chapitre précédent, on a considéré l'hypothèse de Valiant, qui tente par plusieurs approches de montrer que le permanent est beaucoup plus difficile à calculer que le déterminant. Ces polynômes sont la somme de termes de la forme $\prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et ayant comme coefficient 1 ou -1. Pour le déterminant, le coefficient de chaque terme correspond au signe de σ, qui est aussi le caractère de σ pour la représentation signature de $\mathfrak{S}_n$. Dans le cas de perm_n, il est toujours égal à 1, tout comme le caractère de la représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$. On veut généraliser cette construction afin d'associer un polynôme à chaque représentation de $\mathfrak{S}_n$: l'immanant de la représentation. Dans ce chapitre, on en donne la définition explicite, pour ensuite situer ces polynômes en tant que points de $S^n(\mathbb{C}^{n^2})$. On étudie ensuite les symétries de ces points par rapport à l'action de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2})$. Puis, on considère les suites d'immanants qui sont dans **VNP**, et on en classe certaines comme étant dans **VP** ou comme étant **VNP**-complètes. Finalement, on tente de comprendre comment utiliser les immanants pour mieux comprendre la complexité déterminantielle et la théorie géométrique de la complexité.

3.1 Définitions et exemples

Soit V une représentation de $\mathfrak{S}_n$, et soit χ_V le caractère de cette représentation. On appelle *immanant* de la représentation, noté $\mathcal{I}_V$, le polynôme de $S^n(\mathbb{C}^{n^2})$ suivant :

$$\mathcal{I}_V = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_V(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}.$$

Dans le cas où V_λ est une représentation irréductible de type $\lambda \vdash n$, on note son immanant $\mathcal{I}_{V_\lambda}$ par imm_λ. On sait que toute représentation de $\mathfrak{S}_n$ est une somme directe de représentations irréductibles et que le caractère d'une somme directe de représentations est la somme des caractères de ces représentations. Donc, tout immanant est une combinaison linéaire (à coefficients entiers) des imm_λ. Plus précisément, si $V = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda^{\oplus a_\lambda}$, alors $\mathcal{I}_V = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda \mathrm{imm}_\lambda$. Pour cette raison, il suffit dans notre contexte de ne considérer que les immanants de représentations irréductibles. Littlewood et Richardson (Littlewood et Richardson, 1934), qui furent les premiers à considérer ces polynômes, ne les ont ailleurs définis que pour le cas irréductible.

Les immanants sont donc une généralisation du déterminant et du permanent, tel que mentionné au début de ce chapitre. En effet, pour la représentation signature $V_{(1^n)}$, on a $\mathrm{imm}_{(1^n)} = \det_n$. Aussi, pour la représentation triviale $V_{(n)}$, on a $\mathrm{imm}_{(n)} = \mathrm{perm}_n$. On veut savoir à quoi ressemble les autres immanants.

D'abord, l'immanant le plus simple est celui de la représentation régulière $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, bien qu'elle ne soit pas irréductible. En effet, $\chi_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]}(\sigma)$ vaut $n!$ si σ est l'élément neutre et 0 sinon. Donc, on a que

$$\mathcal{I}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} = n! x_{11} x_{22} \ldots x_{nn}.$$

Ensuite, le plus petit immanant irréductible qui n'est pas le déterminant ou le permanent est $\mathrm{imm}_{(21)}$. Par la proposition 1.3.1, $\chi_{(21)}(\sigma) = \mathrm{fix}(\sigma) - 1$, d'où

$$\mathrm{imm}_{(21)} = 2x_{11}x_{22}x_{33} - x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{21}x_{32}.$$

En général, par la même proposition, on a les immanants suivants :

$$\mathrm{imm}_{(n-1,1)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\mathrm{fix}(\sigma) - 1)\, x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\dots x_{n\sigma(n)},$$

$$\mathrm{imm}_{(2,1^{n-2})} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,(\mathrm{fix}(\sigma) - 1)\, x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\dots x_{n\sigma(n)}.$$

D'autres exemples apparaissent dans la suite.

3.2 Immanants et représentations

Dans cette section, on suit essentiellement l'approche de Ke Ye dans (Ye, 2012).

Les immanants sont des polynômes homogènes de degré n à n^2 variables; on peut donc les considérer comme des points de $S^n(\mathbb{C}^{n^2})$. Aussi, on sait que $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Pour distinguer les deux copies, on note E la première et F la seconde. Par isomorphisme, il existe des bases de E et de F, que l'on note respectivement $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$, pour lesquelles on identifie $e_i \otimes f_j$ à x_{ij}, la base canonique de $\mathbb{C}^{n^2}$. De cette façon, les immanants peuvent être considérés comme des points de $S^n(E\otimes F)$. L'avantage de cet approche est qu'il y a de nombreux groupes qui agissent sur cet espace.

Action de $\mathfrak{S}_n$ sur E et F : Comme ce sont des espaces vectoriels de dimension n, alors on a que $\mathfrak{S}_n$ agit sur E et F en permutant les éléments de la base, c'est-à-dire que $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$ et $\sigma \cdot f_j = f_{\sigma^{-1}(j)}$.

Action de $\mathrm{GL}(E \otimes F)$ sur $S^n(E \otimes F)$: On utilise l'action de $\mathrm{GL}(E \otimes F)$ qui fait de $S^n(E \otimes F)$ une représentation irréductible de ce groupe.

Action de $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$ sur $S^n(E\otimes F)$: Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$. On considère le produit tensoriel $A \otimes B$, qui est une transformation linéaire inversible de $E \otimes F$. On construit ainsi un morphisme de groupes $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F) \to \mathrm{GL}(E \otimes F)$ qui envoie (A, B) sur $A \otimes B$. On définit alors l'action de $(A, B) \in \mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$ sur $S^n(E \otimes F)$ comme étant l'action de $A \otimes B \in \mathrm{GL}(E \otimes F)$. En considérant $A \otimes B$ comme une matrice (en utilisant les bases $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$), on a qu'au niveau des variables X, la transformation $(A \otimes B) \cdot X$ (où X est considéré comme un vecteur de $E \otimes F$) est équivalente à AXB, où X est ici considéré comme une matrice de variables.

Action de $\mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)$ sur $S^n(E \otimes F)$: Soit le sous-groupe $\mathrm{T}(E)$ de $\mathrm{GL}(E)$, constitué des automorphismes diagonaux de déterminant 1 dans la base $\{e_i\}$ de E. En construisant $\mathrm{T}(F)$ de la même façon pour la base $\{f_j\}$, on forme le sous-groupe $\mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)$ de $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$. On définit alors l'action de $(T_E, T_F) \in \mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)$ sur $S^n(E \otimes F)$ comme étant l'action de $T_E \otimes T_F \in \mathrm{GL}(E \otimes F)$.

Action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur $S^n(E \otimes F)$: On peut considérer $\mathfrak{S}_n$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ (et de $\mathrm{GL}(F)$) en associant une permutation σ à sa matrice de permutation P_σ, où $P_\sigma = [p_{ij}]$ est telle que $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$. On a alors un morphislme $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(E \otimes F)$ qui envoie (σ, τ) sur $(P_\sigma)^{-1} \otimes P_\tau$. On définit alors l'action de $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur $S^n(E \otimes F)$ comme étant l'action de $(P_\sigma)^{-1} \otimes P_\tau \in \mathrm{GL}(E \otimes F)$. Il est à noter que l'on a cette action est différente de l'action de $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$ restreinte à $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, puisque l'on prend l'inverse de la première composante. Au niveau des variables, on a $(\sigma, \tau) \cdot x_{ij} = x_{\sigma(i),\tau(j)}$.

Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $S^n(E \otimes F)$: Soit le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ constitué des éléments diagonaux, c'est-à-dire de la forme (σ, σ). Ils forment un sous-groupe qui est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$. On définit alors l'action de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ comme étant l'action de $(\sigma, \sigma) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, donc comme étant l'action de $(P_\sigma)^{-1} \otimes P_\sigma \in \mathrm{GL}(E \otimes F)$. Au niveau des variables, on a $\sigma \cdot x_{ij} = x_{\sigma(i),\sigma(j)}$.

Action de $\mathbb{Z}_2$ sur $S^n(E \otimes F)$: On considère la transposée, qui est l'automorphisme T de $E \otimes F$ qui envoie $e \otimes f$ sur $f \otimes e$. Il s'agit d'une transformation linéaire invertible, donc c'est un élément de $\mathrm{GL}(E \otimes F)$. On construit un groupe dont les éléments sont la transposée et l'identité, et qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. On définit alors l'action de $\{0,1\} \in \mathbb{Z}_2$ comme étant l'action de $\{Id, T\} \in \mathrm{GL}(E \otimes F)$. Au niveau des variables, on a $0 \cdot x_{ij} = x_{ij}$ et $1 \cdot x_{ij} = x_{ji}$.

Toutes ces actions permettent de caractériser les immanants comme points de $S^(E \otimes F)$. On a d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit* imm_π *($\pi \vdash n$) un immanant. Alors, l'action de* $\mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)$ *sur ce point de $S^n(E \otimes F)$ est triviale.*

Preuve. Soit $(A, B) \in \mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)$. On a donc

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

avec $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ et $\prod_{i=1}^{n} b_i = 1$. Par la discussion qui précède, pour connaître l'effet de (A, B) sur les variables, il suffit de calculer AXB. On a :

$$AXB = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1b_1x_{11} & a_1b_2x_{12} & \cdots & a_1b_nx_{1n} \\ a_2b_1x_{21} & a_2b_2x_{22} & \cdots & a_2b_nx_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1x_{n1} & a_nb_2x_{n2} & \cdots & a_nb_nx_{nn} \end{bmatrix}$$

Donc, au niveau des variables, on a que $(A,B)\cdot x_{ij} = a_ib_jx_{ij}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(A,B)\cdot \mathrm{imm}_\pi &= (A,B)\cdot \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma)x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)} \\ &= (A,B)\cdot \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_ib_{\sigma(i)}x_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)} \\ &= \mathrm{imm}_\pi\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{T}(E)\times\mathrm{T}(F)$ agit trivialement sur un immanant. □

Ce lemme est équivalent à dire que l'on a $\mathrm{imm}_\lambda \in (S^n(E\otimes F))_0$, le sous-espace de poids trivial de $S^n(E\otimes F)$ en tant que représentation de $\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F)$. On peut mieux en comprendre la raison par le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *L'ensemble* $\{x_{1\sigma(1)}...x_{n\sigma(n)} \mid \sigma\in\mathfrak{S}_n\}$ *est une base de l'espace* $(S^n(E\otimes F))_0$.

Preuve. Soit $x_{i_1j_1}...x_{i_nj_n}$ un monôme de degré n en n^2 variables. On a alors :

$$(A,B)\cdot x_{i_1j_1}...x_{i_nj_n} = (A,B)\cdot\prod_{k=1}^{n} x_{i_kj_k} = \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}b_{j_k}x_{i_kj_k}.$$

Donc, un tel monôme est dans $S^n(E\otimes F))_0$ si et seulement si $\prod_{k=1}^{n} a_{i_k}b_{j_k} = 1$ pour tout $(A,B)\in\mathrm{T}(E)\times\mathrm{T}(F)$. Ceci ne peut arriver que si les suites $(i_1,...,i_n)$ et

$(j_1, ..., j_n)$ comprennent chaque nombre de 1 à n. Dans un tel cas, il existe $\rho, \tau \in \mathfrak{S}_n$ tel quel $(\rho(i_1), ..., \rho(i_n)) = (\tau(j_1), ..., \tau(j_n)) = (1, ..., n)$. Par commutativité, $x_{i_1 j_1} ... x_{i_n j_n} = x_{\rho(i_1)\rho(j_1)} ... x_{\rho(i_n)\rho(j_n)} = x_{1\rho(j_1)} ... x_{n\rho(j_n)}$. En notant $\sigma = \rho\tau^{-1}$, on a donc bien que $x_{i_1 j_1} ... x_{i_n j_n} = x_{1\sigma(1)} ... x_{n\sigma(n)}$. Finalement, on vérifie facilement qu'un polynôme est dans $(S^n(E \otimes F))_0$ si et seulement s'il ne contient que des monômes de cette forme, donc ils forment bel et bien une base de cet espace. $\square$

Avec ce lemme, on peut mieux comprendre $(S^n(E \otimes F))_0$ en tant que représentation, grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *L'espace $(S^n(E \otimes F))_0$ est une représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, et on a un isomorphisme de représentations $(S^n(E \otimes F))_0 \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes V_\lambda$.*

Preuve. Il faut d'abord montrer que $(S^n(E \otimes F))_0$ est stable par l'action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. Par le lemme 3.2.2, on sait que les éléments de la forme $x_{1,\sigma(1)} ... x_{n,\sigma(n)}$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, forment une base de $(S^n(E \otimes F))_0$. Soit $(\lambda, \tau) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. On remarque d'abord que par commutativité des variables, $x_{1,\sigma(1)} ... x_{n,\sigma(n)} = x_{\lambda^{-1}(1),\sigma\lambda^{-1}(1)} ... x_{\lambda^{-1}(n),\sigma\lambda^{-1}(n)}$. Donc, l'action de (λ, τ) sur un tel élément est :

$$\begin{aligned}
(\lambda, \tau) \cdot x_{1,\sigma(1)} ... x_{n,\sigma(n)} &= (\lambda, \tau) \cdot x_{\lambda^{-1}(1),\sigma\lambda^{-1}(1)} ... x_{\lambda^{-1}(n),\sigma\lambda^{-1}(n)} \\
&= x_{\lambda\lambda^{-1}(1),\tau\sigma\lambda^{-1}(1)} ... x_{\lambda\lambda^{-1}(n),\tau\sigma\lambda^{-1}(n)} \\
&= x_{1,\tau\sigma\lambda^{-1}(1)} ... x_{n,\tau\sigma\lambda^{-1}(n)}.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ envoie un élément de la base de $(S^n(E \otimes F))_0$ sur un autre élément de la base. Par linéarité, cela montre que $(S^n(E \otimes F))_0$ est stable par l'action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, donc il s'agit d'une représentation de ce groupe.

Ensuite, il faut montrer que $(S^n(E \otimes F))_0 \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes V_\lambda$. Par la proposition 1.1.8, On sait qu'en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, on a un isomorphisme

$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes V_\lambda$. Il suffit donc de montrer qu'il y a un isomorphisme de représentations entre $(S^n(E \otimes F))_0$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Par définition, $\mathfrak{S}_n$ est une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Soit alors l'application $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to (S^n(E \otimes F))_0$ qui envoie σ sur $x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$. Comme il s'agit d'une bijection entre les bases, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il faut montrer que c'est aussi un isomorphisme de représentations. Soit $(\lambda, \tau) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, où λ agit à droite sur $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ et τ agit à gauche. On a alors $(\lambda, \tau) \cdot \sigma = \tau\sigma\lambda^{-1}$. Comme on vient de montrer que $(\lambda, \tau) \cdot x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)} = x_{1,\tau\sigma\lambda^{-1}(1)} \dots x_{n,\tau\sigma\lambda^{-1}(n)}$, cela démontre que l'application est compatible avec l'action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$, donc c'est bien un isomorphisme de représentations. On a donc bien $(S^n(E \otimes F))_0 \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes V_\lambda$. □

Donc, on peut décomposer $(S^n(E \otimes F))_0$ comme une somme directe de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. Cependant, les restrictions de ces représentations irréductibles au sous-groupe diagonal $\mathfrak{S}_n$ ne sont pas irréductibles. Mais on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.4. *L'action de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* imm_π *est triviale.*

Preuve. On a que le caractère est constant sur les classes de conjugaison, ce qui signifie que si l'on a deux permutations $\sigma, \nu \in \mathfrak{S}_n$ qui sont conjuguées, alors $x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)}$ et $x_{1\nu(1)} \dots x_{n\nu(n)}$ ont le même coefficient. Il suffit donc de montrer que pour tout $\lambda, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\lambda \cdot x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)} = x_{1\nu(1)} \dots x_{n\nu(n)}$, où ν est un conjugué de σ. Mais l'action de λ est l'action de (λ, λ), et en regardant la preuve de la proposition 3.2.3, on voit que $(\lambda, \lambda) \cdot x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)} = x_{1,\lambda\sigma\lambda^{-1}(1)} \dots x_{n,\lambda\sigma\lambda^{-1}(n)}$. En posant $\nu = \lambda\sigma\lambda^{-1}$, on a bien le résultat voulu. □

Autrement dit, les immanants sont contenus dans une copie de $V_{(n)}$ dans $S^n(E \otimes F)_0 \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes V_\lambda$, considéré comme une représentation de $\mathfrak{S}_n$. On veut donc identifer les représentations triviales qu'elle contient. La proposition suivante permet justement de le faire :

Proposition 3.2.5. *En tant que représentation de $\mathfrak{S}_n$, $V_\lambda \otimes V_\lambda$ contient une et une seule copie de $V_{(n)}$, la représentation triviale.*

Preuve. Soit χ le caractère de $V_\lambda \otimes V_\lambda$, χ_λ celui de V_λ et $\chi_{(n)}$ le caractère de la représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$. Pour montrer la proposition, on sait de la théorie des caractères qu'il suffit de montrer que $\langle \chi, \chi_{(n)} \rangle = 1$. Comme le produit tensoriel de deux représentations correspond au produit des caractères, on a que $\chi = \chi_\lambda^2$. On sait également que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\chi_{(n)}(\sigma) = 1$. En rappelant que les caractères de $\mathfrak{S}_n$ sont à valeurs dans les réels, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi_{(n)} \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma) \overline{\chi_{(n)}(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda^2(\sigma) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \\
&= \langle \chi_\lambda, \chi_\lambda \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

On a donc bien qu'il n'y a qu'une copie de la représentation triviale dans $V_\lambda \otimes V_\lambda$. □

On note $\mathfrak{C}_\lambda$ cette unique représentation triviale contenue dans $V_\lambda \otimes V_\lambda$. On conclut à l'aide des résultats qui précèdent que $\mathrm{imm}_\pi \in \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathfrak{C}_\lambda$. Mais le théorème suivant permet d'être beaucoup plus précis :

Théorème 3.2.6. *Pour tout $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on a que* $\mathrm{imm}_\pi \in \mathfrak{C}_\pi$.

Preuve. D'abord, en tant que point de $S^n(E \otimes F) \subseteq (E \otimes F)^{\otimes n} \cong E^{\otimes n} \otimes F^{\otimes n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}_\pi &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma) x_{1\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma)(e_1\otimes f_{\sigma(1)})\ldots(e_n\otimes f_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} (e_{\tau(1)}\otimes f_{\sigma\tau(1)})\otimes\ldots\otimes(e_{\tau(n)}\otimes f_{\sigma\tau(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma)\left(\bigotimes_{i=1}^n e_{\tau(i)}\right)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^n f_{\sigma\tau(i)}\right),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due à l'isomorphisme naturel $(E\otimes F)^n \cong E^n\otimes F^n$. On sait que $\mathrm{imm}_\pi \in \bigoplus_{\lambda\vdash n}\mathfrak{C}_\lambda$, et on vérifie facilement que l'intersection de cette somme directe et de $S^\pi(E)\otimes S^\pi(F)$ est exactement $\mathfrak{C}_\pi$. Donc, pour prouver le théorème, il suffit de montrer que $\mathrm{imm}_\pi \in S^\pi(E)\otimes S^\pi(F)$. Pour ce faire, il faut montrer que pour tout $\lambda\vdash n$ tel que $\lambda\neq\pi$, on a $(c_\lambda\otimes c_\lambda)\cdot\mathrm{imm}_\pi = 0$, où c_λ est un symétriseur de Young associé à un tableau standard de forme λ. En fait, comme $(c_\lambda\otimes c_\lambda) = (c_\lambda\otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id}\otimes c_\lambda)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, il est suffisant de montrer que $(\mathrm{Id}\otimes c_\lambda)\cdot\mathrm{imm}_\pi = 0$.

On rappelle que $c_\lambda = \sum_{\substack{p\in P_\lambda\\ q\in Q_\lambda}} \mathrm{sgn}(q)pq$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}\otimes c_\lambda)\cdot\mathrm{imm}_\pi &= (\mathrm{Id}\otimes c_\lambda)\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma)\left(\bigotimes_{i=1}^n e_{\tau(i)}\right)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^n f_{\sigma\tau(i)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi_\pi(\sigma)\left(\bigotimes_{i=1}^n e_{\tau(i)}\right)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^n c_\lambda\cdot f_{\sigma\tau(i)}\right) \\
&= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\left(\bigotimes_{i=1}^n e_{\tau(i)}\right)\otimes\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi_\pi(\sigma)\bigotimes_{i=1}^n\left(\sum_{\substack{p\in P_\lambda\\ q\in Q_\lambda}}\mathrm{sgn}(q)pq\right)\cdot f_{\sigma\tau(i)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\bigotimes_{i=1}^{n} e_{\tau(i)} \right) \otimes \left(\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\sigma) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\sigma\tau q^{-1} p^{-1}(i)} \right)$$

Donc, en montrant que pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\displaystyle\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\sigma) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\sigma\tau q^{-1} p^{-1}(i)} = 0$, on obtient le résultat voulu. En posant $\alpha = \sigma\tau$ et en regroupant les coefficients, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\sigma) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\sigma\tau q^{-1} p^{-1}(i)} &= \sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda \\ \alpha \in \mathfrak{S}_n}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\alpha\tau^{-1}) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\alpha q^{-1} p^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda \\ \alpha \in \mathfrak{S}_n \\ \alpha q^{-1} p^{-1} = \gamma}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\alpha\tau^{-1}) \right) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\gamma(i)} \\
&= \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\gamma p q \tau^{-1}) \right) \bigotimes_{i=1}^{n} f_{\gamma(i)}
\end{aligned}$$

Avec ce calcul, on voit que pour prouver le théorème, il suffit de montrer que pour tout $\tau, \gamma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\gamma p q \tau^{-1}) = 0.$$

Les caractères sont des fonctions centrales, et $\tau^{-1}(\gamma p q \tau^{-1})\tau = \tau^{-1}\gamma p q$. En notant $\beta = \tau^{-1}\gamma$, cela revient à prouver que pour tout $\beta \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda}} \operatorname{sgn}(q) \chi_\pi(\beta p q) = 0.$$

Soit la représentation irréductible $V_\pi = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\pi$, et soit $\beta c_\lambda = \displaystyle\sum_{\substack{p \in P_\lambda \\ q \in Q_\lambda}} \operatorname{sgn}(q) \beta p q$.

Par définition du caractère, on remarque que le membre gauche de l'équation ci-haut correspond à la trace de βc_λ en tant qu'opérateur sur V_π par multiplication à gauche. Mais si $\lambda \neq \pi$, alors cet opérateur est nul. En effet, par la proposition 1.2.3, on a que $(\beta c_\lambda)\cdot V_\lambda = (\beta c_\lambda)\cdot \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\pi = \beta\cdot(c_\lambda\cdot\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\pi) = \beta\cdot 0 = 0$. Donc, le membre gauche de l'équation ci-haut est la trace d'un opérateur nul, donc est bien égal à 0. Par tout ce qui précède, ceci prouve que $\mathrm{imm}_\pi \in \mathfrak{C}_\pi$. $\square$

On peut maintenant caractériser tous les immanants à l'aide du corollaire suivant :

Corollaire 3.2.7. *Les immanants forment une base du sous-espace de $S^n(E\otimes F)$ invariant par l'action de $(\mathrm{T}(E)\times\mathrm{T}(F))\rtimes\mathfrak{S}_n$, qui est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E\otimes F)$ engendré par l'image de $(\mathrm{T}(E)\times\mathrm{T}(F))$ et de $\mathfrak{S}_n$ par les morphismes définis au début de cette section.*

Preuve. Un polynôme invariant par ce groupe appartient à $\bigoplus_{\lambda\vdash n}\mathfrak{C}_\lambda$. Comme chacun de ces espaces est de dimension 1 et contient un immanant, ceux-ci sont alors une base de cet espace. $\square$

Les immanants d'une représentation quelconque sont donc exactement les polynômes de cet espace dont les coefficients (dans la base des immanants) sont des entiers naturels.

3.3 Stabilisateur

Pour chaque imm_λ, soit

$$G(\mathrm{imm}_\lambda) = \{g\in\mathrm{GL}(E\otimes F) \mid g\cdot\mathrm{imm}_\lambda = \mathrm{imm}_\lambda\}.$$

le stabilisateur de cet immanant dans $\mathrm{GL}(E\otimes F)$. On sait par le corollaire 3.2.7 que $(\mathrm{T}(E)\times\mathrm{T}(F))\rtimes\mathfrak{S}_n$ préserve tous les immanants, donc est un sous-groupe du stabilisateur de tous les immanants. Cependant, $G(\mathrm{imm}_\lambda)$ contient aussi d'autres éléments.

Le cas le plus simple est celui du déterminant. Frobenius a montré (Frobenius, 1897) que $G(\det_n) = \mathrm{S}(\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F)) \rtimes \mathbb{Z}_2$, où $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F)) = \{(A,B) \in GL(E) \times GL(F) \mid \det(A)\det(B) = 1\}$. Autrement dit, les applications linéaires qui préservent le déterminant d'une matrice X sont toutes de la forme $X \mapsto AXB$ ou $X \mapsto AX^TB$, avec $\det(A)\det(B) = 1$.

Pour ce qui est du permanent, son stabilisateur est un peu plus complexe. Marcus et May ont montré (Marcus et May, 1962) que $G(\mathrm{perm}_n) = \mathrm{T}(\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F)) \rtimes (\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$, où $\mathrm{T}(\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F))$ est le sous-groupe de $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(F))$ constitué des paires de matrices diagonales. De façon équivalente, l'ensemble des applications linéaires préservant le permanent d'une matrice X est de la forme $X \mapsto APXQB$ ou de la forme $X \mapsto APX^TQB$, avec A, B des matrices diagonales telles que $\det(A)\det(B) = 1$ et P, Q des matrices de permutation.

Soient $C = [c_{ij}]$ et $X = [x_{ij}]$ deux matrices de taille $n \times n$. On définit une opération, appelée *produit d'Hadamard* et notée $*$, qui consiste à multiplier les matrices composante par composante, donc $C * X = [c_{ij}x_{ij}]$. On remarque que cette opération correspond à l'action d'une matrice diagonale de taille $n^2 \times n^2$ sur X, considéré comme un vecteur. Donc, si pour tout i et j, on a $c_{ij} \neq 0$, alors la transformation linéaire $X \mapsto C * X$ appartient à $\mathrm{D}(E\otimes F)$, le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E\otimes F)$ constitué des matrices diagonales. On remarque que cet espace est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{n^2}$.

On énonce d'abord un théorème, dû à A. Duffner (Duffner, 1994) :

Théorème 3.3.1. *Soit $\lambda \vdash n$, où $n \geq 4$ et $\lambda \neq (1,1,...,1),(n)$. Alors, $T \in G(\mathrm{imm}_\lambda)$ si et seulement si $T \in \mathrm{D}(E\otimes F) \rtimes (\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$, donc $T(X) = C * P_{\tau_1}XP_{\tau_2}$ ou $T(X) = C * P_{\tau_1}X^TP_{\tau_2}$, et si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\tau_2\sigma\tau_1).$$

La preuve de ce résultat est essentiellement géométrique. En particulier, on voit que $G(\mathrm{imm}_\lambda)$ est un sous-groupe de $\mathrm{D}(E\otimes F)\rtimes(\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n)\rtimes\mathbb{Z}_2$. On veut améliorer le résultat de ce théorème, en se basant pour la suite de cette section sur les travaux de P. Coelho (Coelho, 1996).

Pour débuter, comme le caractère est une fonction centrale, on a que $\chi_\lambda(\tau_2\sigma\tau_1) = \chi_\lambda(\tau_2^{-1}\tau_2\sigma\tau_1\tau_2) = \chi_\lambda(\sigma\tau_1\tau_2)$. En posant $\tau = \tau_1\tau_2$, l'équation du théorème devient (pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$)

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\sigma\tau).$$

Soit maintenant $\mathcal{P}_\lambda$ l'ensemble des $\tau \in \mathfrak{S}_n$ pour lesquels il existe une matrice C de taillle $n \times n$ telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'équation précédente est vraie. On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *$\mathcal{P}_\lambda$ est un sous-groupe normal de $\mathfrak{S}_n$.*

Preuve. En premier lieu, on a que l'élément neutre est dans $\mathcal{P}_\lambda$; on le voit en prenant la matrice C dont toutes les valeurs sont 1.

Ensuite, soient $\tau, \tau' \in \mathcal{P}_\lambda$. Par définition, il existe donc des matrices $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ telles que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\sigma\tau)$$

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\sigma\tau')$$

En posant $C = A * P_\tau B = [c_{ij}]$, on obtient que :

$$\begin{aligned}\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} &= \chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i\sigma(i)}b_{\tau^{-1}(i)\sigma(i)}\right)\\ &= \chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\prod_{i=1}^{n} b_{\tau^{-1}(i)\sigma(i)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \prod_{j=1}^{n} b_{j\sigma\tau(j)} \\
&= \chi_\lambda(\sigma\tau) \prod_{j=1}^{n} b_{j\sigma\tau(j)} \\
&= \chi_\lambda(\sigma\tau\tau')
\end{aligned}
$$

Donc, $\tau\tau' \in \mathcal{P}_\lambda$.

Finalement, soit $\gamma \in \mathfrak{S}_n$. En posant $D = P_\gamma A P_{\gamma^{-1}} = [d_{ij}]$ et en utilisant le fait que χ_λ est une fonction centrale, on a :

$$
\begin{aligned}
\chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^{n} d_{i\sigma(i)} &= \chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\gamma^{-1}(i)\gamma^{-1}\sigma(i)} \\
&= \chi_\lambda(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\gamma^{-1}\sigma\gamma(j)} \\
&= \chi_\lambda(\gamma^{-1}\sigma\gamma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\gamma^{-1}\sigma\gamma(j)} \\
&= \chi_\lambda(\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau) \\
&= \chi_\lambda(\sigma\gamma\tau\gamma^{-1})
\end{aligned}
$$

Ceci montre que pour tout $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathcal{P}_\lambda$, on a que $\gamma\tau\gamma^{-1} \in \mathcal{P}_\lambda$.

Il reste à montrer que $\tau^{-1} \in \mathcal{P}_\lambda$ pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\lambda$. Mais comme on sait que dans le groupe symétrique, une permutation et son inverse sont conjugués (il suffit de remarquer qu'ils ont la même structure cyclique), on peut le déduire du fait que $\mathcal{P}_\lambda$ est fermé par conjugaison. C'est donc bien un sous-groupe normal. $\square$

Pour $n \geq 5$, les seuls sous-groupes normaux de $\mathfrak{S}_n$ sont le sous-groupe trivial, le groupe alterné A_n et le groupe symétrique en entier. Pour pouvoir déterminer lequel de ces groupes correspond à $\mathcal{P}_\lambda$, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.3.3. *Soit* $\lambda \vdash n$ *tel que* $n \geq 5$ *et* $\lambda \neq (1, 1, ..., 1), (n)$. *Alors, il existe* $\sigma \in A_n$ *pour lequel* $\mathcal{X}_\lambda(\sigma) = 0$.

Preuve. Pour démontrer cela, on utilise la règle de Murnaghan–Nakayama. Cette règle est une somme sur les rubans ξ de λ de longueur σ_1, où σ_1 est la longueur du plus grand cycle de σ, et tels que $\lambda \setminus \xi$ est le diagramme d'un partage de $n - \sigma_1$. Si on trouve une permutation $\sigma \in A_n$ pour laquelle on ne peut pas trouver de tel ruban, on a alors que $\mathcal{X}_\lambda(\sigma) = 0$. Pour ce faire. si on note r la longueur du plus grand ruban de λ, on doit traiter plusieurs cas, qui dépendent de la valeur de r :

1. Cas 1 : $r < n - 1$:

   I Si r est pair, il suffit de prendre un cycle de longueur $r + 1$, car on a alors qu'il n'existe pas de ruban ayant ce nombre de cases.

   II Si r est impair, alors on peut choisir un cycle de longueur $r + 2$, pour la même raison.

2. Cas 2 : $r = n - 1$:

   I Si r est pair (donc n est impair), alors encore une fois, on peut prendre un cycle de longueur $r + 1 = n$.

   II Si c'est n qui est pair, alors les cycles de longueur n ne sont pas dans A_n. Il faut donc un peu plus étudier cette situation. D'abord, on remarque que dans ce cas, λ est nécessairement de la forme $(2 + u, 2, 1^v)$ pour $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $u + v$ est pair. Aussi, $\lambda' = (2 + v, 2, 1^u)$, et comme la valeur des caractères $\mathcal{X}_\lambda$ et $\mathcal{X}_{\lambda'}$ ne diffère que d'un signe, ils s'annulent sur les mêmes permutations, donc on peut supposer que $u \geq v$. On remarque aussi que si ξ est un ruban de longueur plus grande que u tel que $\lambda \setminus \xi$ est le diagramme d'un partage, alors la longueur de ξ ne peut qu'être égale à $r = u + v + 3$, $u + 2$ ou $v + 2$. On doit donc traiter plusieurs cas, selon la valeur de u et v.

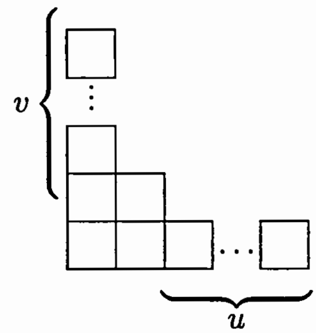

Figure 3.1 Diagramme de $\lambda = (2+u, 2, 1^v)$

(a) Si u est pair, alors on peut prendre un cycle de longueur $u+1$. En effet, il est évident que $u+1 \lneqq u+2 \lneqq u+v+3$, et comme u et $u+v$ sont pairs, alors v est pair, donc $u+1 \neq v+2$. Il n'y a donc pas de ruban de longueur $u+1$ dans λ, et donc le caractère est nul sur une telle permutation.

(b) Si u est impair et $u, v \geq 3$, alors on peut choisir un cycle de longueur $u+4$. En effet, dans ce cas, on a que $u+4 \lneqq u+v+3$, et comme $u \geq v$, alors $u+4 \gneqq u+2 \geq v+2$. Donc, il ne peut y avoir de ruban de cette longueur, ce qui signifie que le caractère est nul.

(c) Si u est impair, $u \geq 5$ et $v = 1$, alors on peut prendre une permutation de structure cyclique $(u, 5)$. On voit que dans ce cas, le seul ruban ξ composé de u cases est celui composé des cases les plus à droite, donc $\lambda \backslash \xi = (2, 2, 1)$. Par la règle de Murnaghan–Nakayama, on a alors (en notant la permutation par sa structure cyclique) $\chi_\lambda((u, 5)) = \chi_{(2,2,1)}((5))$. Comme il n'existe pas de ruban de 5 cases dans $(2, 2, 1)$, ces deux caractères sont nuls.

(d) Si $u = 3$ et $v = 1$, alors on peut prendre une permutation de structure cyclique $(2, 2, 1^4)$. Comme u et v sont fixés, on peut facilement vérifier par calcul que $\chi_{(5,2,1)}$ est nul sur une telle permutation.

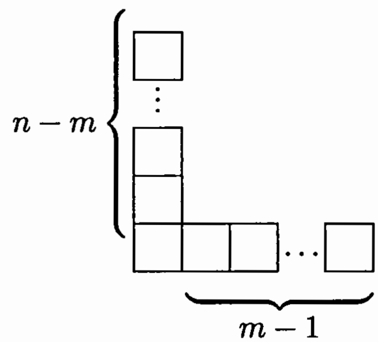

Figure 3.2 Diagrame de $\lambda = (m, 1^{n-m})$

(e) Si $u = 1$ et $v = 1$, il suffit de considérer une permutation de structure cyclique $(2, 2, 1^2)$. On peut également calculer directement que $\chi_{(3,2,1)}$ vaut 0 sur une telle permutation.

3. <u>Cas 3 : $r = n$</u> : Dans ce cas, on a alors que le partage lui-même est un ruban, donc $\lambda = (m, 1^{n-m})$ pour $2 \leq m \leq n-1$ (car on a supposé que $\lambda \neq (1^n), (n)$). Encore une fois, par le lien entre le caractère d'un partage et de son conjugué, on peut supposer que $m - 1 \geq n - m$. Encore une fois, on a plusieurs cas possibles, qui dépendent de m.

   I Si m est impair, alors on peut prendre un cycle de longueur m, car il n'existe aucun ruban ξ ayant m cases tel que $\lambda \setminus \xi$ soit le diagramme d'un partage.

   II Si m est pair et $n - m \geq 2$, alors pour la même raison, on peut prendre un cycle de longueur $m + 1$.

   III Si m est pair et $n - m = 1$, alors il suffit de prendre une permutation de structure cyclique $(m - 2, 2, 1)$ (ce qui est toujours possible, car on a supposé $n \geq 5$). En effet, on a qu'alors, $\lambda = (m, 1)$, et on sait par la proposition 1.3.1 que $\chi_{(m,1)}$ est égal à un de moins que le nombre de points fixes de la permutation. Comme une permutation de cette structure cyclique n'a qu'un point fixe, on a bien que $\chi_{(m,1)}$ est nul sur une telle permutation.

□

Avec cette proposition et le fait que $\mathcal{P}_\lambda$ est un sous-groupe normal, on peut déterminer quel est cet ensemble :

Proposition 3.3.4. *Soit $\lambda \vdash n$ tel que $n \geq 5$ et $\lambda \neq (1,1,...,1),(n)$. Alors, $\mathcal{P}_\lambda$ est le sous-groupe trivial de $\mathfrak{S}_n$.*

Preuve. On rappelle qu'un élément τ est dans $\mathcal{P}_\lambda$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\sigma\tau).$$

En particulier, en posant $\sigma = \tau^{-1}$ et en considérant le fait que le caractère de l'identité n'est jamais nul, on remarque que $\chi_\lambda(\tau^{-1}) \neq 0$. Comme le caractère est une fonction centrale et que τ^{-1} est conjugué à τ, on a que $\chi_\lambda(\tau) \neq 0$ pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\lambda$. Par la proposition précédente, on ne peut donc pas avoir que $A_n \subseteq \mathcal{P}_\lambda$, et comme ce sous-groupe est normal et que $n \geq 5$, il faut que $\mathcal{P}_\lambda$ soit le sous-groupe trivial de $\mathfrak{S}_n$ □

Donc, la seule permutation τ pour laquelle il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = \chi_\lambda(\sigma\tau).$$

est l'identité. Comme on a que $\tau = \tau_1\tau_2$, cela signifie que $\tau_1 = \tau_2^{-1}$. En utilisant ce fait avec le théorème 3.3.1, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.3.5. *[P. Coelho] Soit $\lambda \vdash n$, où $n \geq 5$ et $\lambda \neq (1,1,...,1),(n)$. Alors, $T \in G(\mathrm{imm}_\lambda)$ si et seulement si $T \in \mathrm{D}(E \otimes F) \rtimes \mathfrak{S}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$, donc $T(X) =$*

$C * P_\tau X P_{\tau^{-1}}$ *ou* $T(X) = C * P_\tau X^T P_{\tau^{-1}}$, *et si pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *tel que* $\chi_\lambda(\sigma) \neq 0$, *on a*

$$\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = 1.$$

On veut étudier un peu plus ces équations. Si on considère les $n!$ équations, donc si on enlève la condition que le caractère soit non-nul, on a le lemme suivant :

Lemme 3.3.6. *Soit* $C = [c_{ij}]$ *une matrice de taille* $n \times n$ *telle que pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *on a*

$$\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} = 1.$$

Alors, il existe $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right) = 1$ *et* $c_{ij} = a_i b_j$ *pour tout* i, j.

Preuve. Par les équations, on remarque que pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} c_{k\sigma(k)} = \prod_{k=1}^{n} c_{k\tau(k)}.$$

En particulier, pour toute transposition (il), on peut poser $\tau = \sigma \cdot (il)$, et en enlevant les facteurs communs dans l'équation ci-haut, on obtient $c_{i\sigma(i)} c_{l\sigma(l)} = c_{i\sigma(l)} c_{l\sigma(i)}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si on pose $l = 1$ et σ tel que $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(i) = j \neq 1$, on a $c_{ij} c_{11} = c_{i1} c_{1j}$. Cette dernière équation est également vraie lorsque $i = 1$ ou $j = 1$. On peut donc poser $c_{ij} = \frac{c_{i1} c_{1j}}{c_{11}}$ pour tout i, j. En définissant $a_i = \frac{c_{i1}}{c_{11}}$ et $b_j = c_{1j}$, on a bien que $c_{ij} = a_i b_j$. Si $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right) = \alpha \neq 1$, alors il suffit de diviser les a_i par α et multiplier les b_j par le même nombre pour obtenir le résultat voulu. □

Donc, une matrice C satisfaisant la condition de ce lemme est dans le groupe $\mathrm{T}(\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F))$ en tant que matrice diagonale de $\mathrm{GL}(E \otimes F)$. Cela signifie que

$C*X = AXB$, où A, B sont des matrices diagonales telles que $\det(A)\det(B) = 1$. Mais comme on utilise moins d'équations dans le théorème 3.3.5 que dans le lemme précédent, il peut exister des matrices C satisfaisant le théorème, mais pour lesquelles il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ avec $\chi_\lambda(\sigma) = 0$ et $\prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} \neq 1$. Ke Ye (Ye, 2012) a montré que lorsque λ n'est pas *symétrique* (*i.e.* n'est pas égal à son conjugué), ce n'est pas le cas :

Théorème 3.3.7. *Soit $\lambda \vdash n$, où $n \geq 5$, λ n'est pas symétrique et n'est pas égal à $(1, 1, ..., 1)$ ou (n). Alors, $G(\mathrm{imm}_\lambda) = \mathrm{T}(\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)) \rtimes \mathfrak{S}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$, donc $T \in G(\mathrm{imm}_\lambda)$ si et seulement si $T(X) = APXP^{-1}B$ ou $T(X) = APX^TP^{-1}B$, où P est une matrice de permutation et A, B sont des matrices diagonales telles que* $\det(A)\det(B) = 1$.

Les stabilisateurs des immanants associés à des partages symétriques sont des groupes plus grands que cela, mais ne sont pas connus en général. On remarque aussi que dans le cas non-symétrique, $G(\mathrm{imm}_\lambda)$ est inclus dans le stabilisateur du permanent.

3.4 Les immanants et l'hypothèse de Valiant

Les immanants peuvent être utilisés pour résoudre l'hypothèse de Valiant, puisqu'ils sont une généralisation du déterminant et du permanent. On veut savoir quelles suites d'immanants ont une complexité près du permanent, c'est-à-dire qui sont **VNP**-complètes, et lesquelles sont dans **VP**, tout comme le déterminant. Les suites qui ne sont dans aucun de ces cas sont aussi très intéressantes, car elles peuvent être vues comme des intermédiaires (en termes de complexité) entre le déterminant et le permanent. À l'instar de ces derniers, on note $\mathrm{imm}_\lambda(A)$ le nombre complexe obtenu en évaluant cet immanant en $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On veut donc savoir en combien d'opérations on peut évaluer ces nombres pour une matrice A quelconque.

Par la proposition 2.1.3, on a que si $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est une réduction de $(\det_n)$, alors cette suite est dans **VP** (et même dans $\mathbf{VP}_{ws}$, la classe de complexité pour laquelle le déterminant est une suite complète). Pour prouver qu'une suite d'immanants est dans **VP**, on peut également trouver un algorithme qui la calcule en temps polynomial, ce qui est beaucoup plus facile à faire. Aussi, le corollaire 2.1.4 permet de voir que $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est **VNP**-complète si et seulement si $(\text{perm}_n) \leq (\text{imm}_{\lambda^n})$, c'est-à-dire que le permanent en est une réduction.

Le premier à avoir sérieusement considéré la complexité des immanants est W. Hartmann (Hartmann, 1985). Puis, les premiers résultats intéressants pour la conjecture **VP** vs **VNP** sont découverts par Bürgisser (Bürgisser, 2000). Tout d'abord, il faut définir des suites d'immanants qui, comme les suites $(\det_n)$ et (perm_n), sont dans **VNP** (et possiblement dans **VP**). Soit $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ une suite d'immanants. Comme on sait que $(\det_n)$ et (perm_n) sont dans **VNP**, on peut supposer qu'au minimum, une suite d'immanants est dans **VNP** si $|\lambda^{(n)}|$ croît de façon linéaire. Le théorème suivant, dû à Bürgisser, montre qu'il suffit de supposer que cette croissance soit polynomiale :

Théorème 3.4.1. *Soit* $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ *une suite d'immanants telle que* $|\lambda^{(n)}| = m(n)$. *Si* $m(n)$ *est une fonction bornée supérieurement par un polynôme, alors* $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ *est dans* **VNP**.

On a donc une grande famille de suites d'immanants qui sont dans **VNP**.

On appelle les *partages en forme d'équerre* les partages de la forme $\lambda = (i, 1^{n-i}) \vdash n$ pour $i = 1, ..., n$. On note $\text{imm}_{i;n} = \text{imm}_{(i,1^{n-i})}$. On a que $\text{imm}_{1;n} = \det_n$ et $\text{imm}_{n;n} = \text{perm}_n$. Il s'agit donc d'une généralisation du déterminant et du permanent totalement ordonnée. Une autre généralisation simple est la famille des immanants associés aux *partages rectangulaires*, c'est-à-dire les partages $m^s \vdash ms$ composé de s parts de longueur m. Le cas $m = 1$ correspond au déterminant et le cas $s = 1$ correspond au permanent. Dans son article, Bürgisser a montré les résultats suivants.

Théorème 3.4.2. *Soit* $(\mathrm{imm}_{i_n;n})$ *une suite d'immanants associés à des partages en forme d'équerre.*
1. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $i_n \leq k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $(\mathrm{imm}_{i_n;n}) \in \mathbf{VP}$.
2. S'il existe des constantes $c, e > 0$ *telles que* $cn^e \leq i_n$ *(à partir d'un certain rang), alors* $(\mathrm{imm}_{i_n;n})$ *est* **VNP***-complète.*
Soit aussi $(\mathrm{imm}_{m_n^{s_n}})$ *une suite d'immanants associés à des partages rectangulaires.*
3. S'il existe des constantes $c, e > 0$ *telles que* $cn^e \leq m_n$ *(à partir d'un certain rang), alors* $(\mathrm{imm}_{m_n^{s_n}})$ *est* **VNP***-complète.*

À l'aide de ces résultats, il émit la conjecture suivante :

Conjecture 3.4.3. *Soit* $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, ..., \lambda_{k_n}^{(n)})$ *une suite de partages. Si* $|\lambda^{(n)}|$ *est borné supérieurement par un polynôme et qu'il existe des constantes* $c, e > 0$ *telles que* $cn^e \leq \lambda_1^{(n)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $\mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}}$ *est* **VNP***-complète.*

Puis, Jean-luc et Ranee Brylinski (Brylinski et Brylinski, 2003) prouvent cette conjecture dans une grande variété de cas. Soit $\rho = \max_{i=1}^{k}\{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}$ (où $\lambda_{k+1} = 0$) ; on appelle ce nombre la *séparation* de λ. Par exemple, la séparation d'un partage en forme d'équerres $(i, 1^{n-i})$ est $i - 1$ et celle d'un partage rectangulaire m^s est m. On retrouve le théorème suivant dans leur article :

Théorème 3.4.4. *Soit* $\lambda^{(n)}$ *une suite de partages et* $\rho(n)$ *la séparation de* $\lambda^{(n)}$*. Si* $|\lambda^{(n)}|$ *est borné par un polynôme et qu'il existe des constantes* $c, e > 0$ *telles que* $cn^e \leq \rho(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $\mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}}$ *est* **VNP***-complète.*

Voici comment ils prouvent ce théorème. D'abord, on doit définir les matrices suivantes pour tout entier q :

$$D_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{q} \end{bmatrix}; \quad R_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{q-2} & (-1)^{q-3} & (-1)^{q-4} & \cdots & q-1 \\ (-1)^{q-1} & (-1)^{q-2} & (-1)^{q-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_q = D_q R_q; \qquad E_q = D_q T_q.$$

La raison pour laquelle on considère ces matrices est la proposition suivante :

Proposition 3.4.5. *Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\beta \vdash q$. Alors :*

1. $\mathrm{perm}_q(H_q) = 1$ *et* $\mathrm{imm}_\beta(H_q) = 0$ *si* $\beta \neq (q)$;
2. $\det_q(E_q) = 1$ *et* $\mathrm{imm}_\beta(E_q) = 0$ *si* $\beta \neq (1^q)$.

Preuve. Pour les deux cas, il faut d'abord remarquer (ce qui se fait aisément) que pour deux matrices carrées D, A de même dimension q, si D est diagonale et que le produit de ses éléments diagonaux est d, alors pour tout $\beta \vdash q$, on a $\mathrm{imm}_\beta(DA) = d\ \mathrm{imm}_\beta(A)$. En particulier, si la matrice diagonale est D_q, alors $\mathrm{imm}_\beta(D_qA) = \frac{1}{q!}\mathrm{imm}_\beta(A)$. Aussi, on note, pour toute matrice M, $f_\pi(M) = m_{1\pi(1)}m_{2\pi(2)}...m_{q\pi(q)}$, de telle sorte que

$$\mathrm{imm}_\beta(M) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \chi_\beta(\pi) f_\pi(M).$$

1. Par ce qui précède, $\mathrm{imm}_\beta(H_q) = \mathrm{imm}_\beta(D_q R_q) = \frac{1}{q!}\mathrm{imm}_\beta(R_q)$. Aussi, on a que pour tout $\pi \in \mathfrak{S}_q$, $f_\pi(R_q) = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}_\beta(H_q) &= \frac{1}{q!}\mathrm{imm}_\beta(R_q) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \chi_\beta(\pi) f_\pi(R_q) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \chi_\beta(\pi) \cdot 1 \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \chi_\beta(\pi) \chi_{(q)}(\pi) \\
&= \langle \chi_\beta, \chi_{(q)} \rangle
\end{aligned}$$

Comme il s'agit du produit scalaire de caractères irréductibles, on obtient bien que $\mathrm{imm}_\beta(H_q) = 0$ pour tout partage $\beta \vdash q$ qui n'est pas (q), et $\mathrm{imm}_{(q)}(H_q) = \mathrm{perm}_q(H_q) = 1$.

2. On a $\mathrm{imm}_\beta(E_q) = \mathrm{imm}_\beta(D_q T_q) = \frac{1}{q!}\mathrm{imm}_\beta(T_q)$. Pour calculer $\mathrm{imm}_\beta(T_q)$, il faut utiliser des notations supplémentaires. On note $\mathcal{O}_\alpha \subseteq \mathfrak{S}_q$ les permutations de décomposition cyclique $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \vdash q$. Puis, on pose, pour $\pi \in \mathcal{O}_\alpha$:

$$F_\alpha(T_q) = \sum_{\pi \in \mathcal{O}_\alpha} f_\pi(T_q);$$

$$\chi_\beta^\alpha = \chi_\beta(\pi);$$

$$\mathrm{sgn}(\alpha) = \mathrm{sgn}(\pi).$$

Avec ces notations, on a que $\mathrm{imm}_\beta(T_q) = \sum_{\alpha \vdash q} \chi^\alpha_\beta F_\alpha(T_q)$.

On va d'abord montrer que $F_\alpha(T_q) = |\mathcal{O}_\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha)$. Pour débuter, il faut remarquer que les seuls cas où $f_\pi(T_q) \neq 0$ sont les cas où il n'existe aucun i tel que $\pi(i) \geq i+2$. On peut se convaincre facilement que ceci est équivalent à dire que π peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints de la forme $\theta_{i,s} = (i+1, i+2, ..., i+s)$. De plus, en observant T_q, on remarque qu'un cycle de cette forme contribue par un facteur $(i+1)(i+2)...(i+s-1)(-1)^{s-1}$ à $f_\pi(T_q)$.

Soit

$$P(\alpha) = \{p = (p_1, p_2, ..., p_r) \mid p \text{ est un réarrangement des termes de } \alpha\}.$$

Alors, si $f_\pi(T_q) \neq 0$ et $\pi \in \mathcal{O}_\alpha$, il existe un unique $p \in P(\alpha)$ tel que $\pi = \theta_{0,p_1}\theta_{p_1,p_2}...\theta_{p_1+p_2+...+p_{r-1},p_r}$. On a donc que :

$$\begin{aligned} f_\pi(T_q) &= 1 \cdot 2 \cdots (p_1 - 1)(-1)^{p_1-1}(p_1+1)\cdots(p_1+p_2-1)(-1)^{p_2-1}... \\ &\quad ...(p_1 + ... + p_{r-1} + 1)\cdots(p_1 + ... + p_r - 1)(-1)^{p_r-1} \\ &= \frac{q!}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+p_2+...+p_r)}\operatorname{sgn}(\pi) \end{aligned}$$

On peut en conclure que :

$$\begin{aligned} F_\alpha(T_q) &= \sum_{\pi \in \mathcal{O}_\alpha} f_\pi(T_q) \\ &= \sum_{p \in P(\alpha)} \frac{q!}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+p_2+...+p_r)}\operatorname{sgn}(\alpha) \end{aligned}$$

Pour obtenir que $F_\alpha(T_q) = |\mathcal{O}_\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha)$, il faut donc montrer que

$$|\mathcal{O}_\alpha| = \sum_{p \in P(\alpha)} \frac{q!}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+p_2+...+p_r)}.$$

Soit $\pi \in \mathcal{O}_\alpha$ quelconque et $\sigma = (t_1, t_2, ..., t_s)$ un de ses cycles disjoints. On note $\max(\sigma) = \max\{t_1, t_2, ..., t_s\}$. Puis, on réécrit le cycle pour que $\max(\sigma) = t_s$. Avec cette notation, on voit que quite à renuméroter les cycles, il existe une unique façon d'écrire $\pi = \sigma_1\sigma_2...\sigma_r$ de telle sorte que $\max(\sigma_1) < \max(\sigma_2) < ... < \max(\sigma_r)$. Si on note p_i la longueur du cycle σ_i, alors on a $p = (p_1, p_2, ..., p_r) \in P(\alpha)$. Soit $\mathcal{O}_\alpha(p)$ les éléments de $\mathcal{O}_\alpha$ pour lesquels on obtient p par cette méthode. On a l'union disjointe $\mathcal{O}_\alpha = \bigcup_{p\in P(\alpha)} \mathcal{O}_\alpha(p)$, et donc $|\mathcal{O}_\alpha| = \sum_{p\in P(\alpha)} |\mathcal{O}_\alpha(p)|$.

Si on montre que

$$|\mathcal{O}_\alpha(p)| = \frac{q!}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+p_2+...+p_r)},$$

on obtient alors le résultat voulu. On peut remarquer que ceci est vrai en écrivant $\pi = \sigma_1\sigma_2...\sigma_r \in \mathcal{O}_\alpha(p)$ en tant que mot, c'est-à-dire sans y mettre les parenthèses distinguant habituellement les cycles. On obtient alors un mot $w = w_1w_2...w_q$ tel que chaque entier de 1 à q apparaît une et une seule fois et tel que pour tout $k \in \{p_1, p_1+p_2, ..., p_1+p_2+...+p_r\}$, on a $w_k = \max\{w_1, w_2, ..., w_k\}$. De plus, chaque mot de cette forme correspond à un unique élément de $\mathcal{O}_\alpha(p)$. Mais on peut voir qu'il y a $q!$ mots $u = u_1u_2...u_q$ composés une et une seule fois des entiers entre 1 et q, parmi lesquels $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1+p_2+...+p_r}$ d'entre eux sont tels que

$$u_{p_1+p_2+...+p_r} = \max\{u_1, u_2, ..., u_{p_1+p_2+...+p_r}\};$$

parmi ces $\frac{q!}{p_1+p_2+...+p_r}$ mots, il y en a $\frac{1}{p_1+p_2+...+p_{r-1}}$ d'entre eux tels que

$$u_{p_1+p_2+...+p_{r-1}} = \max\{u_1, u_2, ..., u_{p_1+p_2+...+p_{r-1}}\};$$

et ainsi de suite. En répétant cela r fois, on obtient bien que

$$|\mathcal{O}_\alpha(p)| = \frac{q!}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+p_2+...+p_r)},$$

ce qui est la dernière étape pour prouver que $F_\alpha(T_q) = |\mathcal{O}_\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha)$.

Avec tout ce qui précède, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}_\beta(E_q) &= \frac{1}{q!}\mathrm{imm}_\beta(T_q) \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\alpha\vdash q} \chi^\alpha_\beta F_\alpha(T_q) \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\alpha\vdash q} |\mathcal{O}_\alpha|\, \chi^\alpha_\beta \mathrm{sgn}(\alpha) \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \chi_\beta(\pi)\chi_{(1^q)}(\pi) \\
&= \langle \chi_\beta, \chi_{(1^q)}\rangle
\end{aligned}$$

Encore une fois, comme il s'agit du produit scalaire de caractères irréductibles, on obtient bien que $\mathrm{imm}_\beta(E_q) = 0$ pour tout partage $\beta \vdash q$ qui n'est pas (1^q), en quel cas on a $\mathrm{imm}_{(1^q)}(E_q) = \det_q(E_q) = 1$. □

Pour démontrer le théorème 3.4.4, il faut également le lemme suivant :

Lemme 3.4.6. *Pour deux matrices carrées A et B de tailles respectives $p \times p$ et $q \times q$, on considère*

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale par blocs de taille $n \times n$ (où $n = p + q$). On a alors que pour tout $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{imm}_\lambda(A \oplus B) = \sum_{\alpha\vdash p,\ \beta\vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta}\mathrm{imm}_\alpha(A)\mathrm{imm}_\beta(B)$$

où $c^\lambda_{\alpha\beta}$ est la multiplicité de V_λ dans la représentation $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q} V_\alpha \otimes V_\beta$.

Preuve. Si on reprend la notation de la proposition 3.4.5, alors $\mathrm{imm}_\lambda(A \oplus B) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) f_\sigma(A \oplus B)$. On remarque facilement que les $f_\sigma(A \oplus B)$ sont toujours nuls, sauf dans le cas où σ est dans le sous-groupe $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$. On peut alors noter $\sigma = \tau\pi$, où $\tau \in \mathfrak{S}_p$ et $\pi \in \mathfrak{S}_q$, et on a alors $f_\sigma(A \oplus B) = f_\tau(A) f_\pi(B)$ (en ajustant les indices).

On veut maintenant calculer $\chi_\lambda(\tau\pi)$ en terme de τ et π. D'abord, on sait que les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ sont de la forme $V_\alpha \otimes V_\beta$, où $\alpha \vdash p$ et $\beta \vdash q$. Donc, il existe des coefficients $c^\lambda_{\alpha\beta}$ tels que $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}(V_\lambda) \cong \bigoplus_{\alpha \vdash p, \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} V_\alpha \otimes V_\beta$. Donc, par le théorème de réciprocité de Frobenius et la théorie des caractères :

$$\begin{aligned} c^\lambda_{\alpha\beta} &= \langle \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}(\chi_\lambda), \chi_{V_\alpha \otimes V_\beta} \rangle \\ &= \langle \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}(\chi_\lambda), \chi_\alpha \chi_\beta \rangle \\ &= \langle \chi_\lambda, \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}(\chi_\alpha \chi_\beta) \rangle \end{aligned}$$

Donc, ces coefficients correspondent à la multiplicité de V_λ dans $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q}(V_\alpha \otimes V_\beta)$. Aussi, le caractère de cette représentation induite est le même que celui de la représentation originale pour les éléments de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$, donc $\chi_\lambda(\tau\pi) = \sum_{\alpha \vdash p, \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} \chi_\alpha(\tau) \chi_\beta(\pi)$. On a alors que :

$$\begin{aligned} \mathrm{imm}_\lambda(A \otimes B) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) f_\sigma(A \oplus B) \\ &= \sum_{\tau\pi \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} \chi_\lambda(\tau\pi) f_{\tau\pi}(A \oplus B) \\ &= \sum_{\tau\pi \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} \left(\sum_{\alpha \vdash p, \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} \chi_\alpha(\tau) \chi_\beta(\pi) \right) f_\tau(A) f_\pi(B) \\ &= \sum_{\tau\pi \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} \sum_{\alpha \vdash p, \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} \chi_\alpha(\tau) f_\tau(A) \chi_\beta(\pi) f_\pi(B) \\ &= \sum_{\alpha \vdash p,\ \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} \mathrm{imm}_\alpha(A) \mathrm{imm}_\beta(B) \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat voulu. $\square$

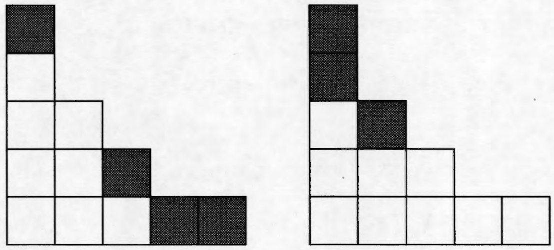

Figure 3.3 Bande horizontale (à gauche) et verticale (à droite)

On appelle les $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ainsi définis les *coefficients de Littlewood-Richardson*. Par la dualité de Schur-Weyl, on peut remarquer que si V est un espace vectoriel de dimension au moins n, $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ est aussi le nombre de copies de $S^{\lambda}(V)$ dans $S^{\alpha}(V) \otimes S^{\beta}(V)$. Il existe une règle combinatoire pour calculer ces coefficients, appelée règle de Littlewood-Richardson (Littlewood et Richardson, 1934). Cette règle est plutôt complexe, mais pour montrer le théorème 3.4.4, il ne faut que connaître les cas simples donnés par les règles de Pieri (Pieri, 1893).

Pour les énoncer, il faut définir ce qu'est une bande d'un partage $\lambda \vdash n$. On appelle *bande horizontale* de λ un sous-ensemble de cases ayant au plus une case par colonne et dont la différence ensembliste entre λ et ce sous-ensemble est encore le diagramme d'un partage. On définit de la même façon une *bande verticale* de λ, en prenant cette fois-ci au plus une case par ligne. On note $BH_q(\lambda)$ l'ensemble des partages de $n-q$ obtenus de λ en enlevant une bande horizontale de q cases et $BV_q(\lambda)$ ceux obtenus en enlevant une bande verticale de q cases.

Avec ces définitions, on peut énoncer les règles suivantes :

Théorème 3.4.7 (Règles de Pieri). *Soit $\lambda \vdash n$ et $q \leq n$. Alors :*

$$c^{\lambda}_{\alpha(q)} = \begin{cases} 1 & si\ \alpha \in BH_q(\lambda); \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$c^{\lambda}_{\alpha(1^q)} = \begin{cases} 1 & si\ \alpha \in BV_q(\lambda); \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Finalement, avec ces règles, on peut démontrer la proposition suivante, centrale pour la preuve du théorème 3.4.4 :

Proposition 3.4.8. *Soit $\lambda \vdash n$ et $q \leq n$. Alors, on a les réductions suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{\alpha \in BH_q(\lambda)} \mathrm{imm}_\alpha \leq \mathrm{imm}_\lambda$
2. $\displaystyle\sum_{\alpha \in BV_q(\lambda)} \mathrm{imm}_\alpha \leq \mathrm{imm}_\lambda$

Preuve. Soit A une matrice carrée d'ordre $n-q$. Pour la première réduction, on considère la matrice $A \oplus H_q$. En considérant la proposition 3.4.5, le lemme 3.4.6 et les règles de Pieri, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}_\lambda(A \oplus H_q) &= \sum_{\alpha \vdash n-q,\ \beta \vdash q} c^\lambda_{\alpha\beta} \mathrm{imm}_\alpha(A) \mathrm{imm}_\beta(H_q) \\
&= \sum_{\alpha \vdash n-q} c^\lambda_{\alpha(q)} \mathrm{imm}_\alpha(A) \mathrm{perm}_q(H_q) \\
&= \sum_{\alpha \vdash n-q} c^\lambda_{\alpha(q)} \mathrm{imm}_\alpha(A) \cdot 1 \\
&= \sum_{\alpha \in BH_q(\lambda)} \mathrm{imm}_\alpha(A)
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour toute matrice A, on a bien que $\displaystyle\sum_{\alpha \in BH_q(\lambda)} \mathrm{imm}_\alpha$ est une réduction de imm_λ. La deuxième se prouve de la même façon, en considérant la matrice $A \oplus E_q$. □

Grâce à cette proposition, on a tous les outils nécessaires pour prouver que $\mathrm{imm}_{\lambda(n)}$ est **VNP**-complète lorsque la séparation des partages augmente de façon polynomiale :

Preuve du théorème 3.4.4. On veut d'abord montrer que si on a un partage $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \vdash n$ dont la séparation est $\rho = \max_{i=1}^{k}\{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}$, alors $\text{perm}_\rho \leq \text{imm}_\lambda$.

Pour ce faire, il faut utiliser la proposition précédente en posant $q = \lambda_1$. On remarque facilement qu'il n'y a qu'une seule bande horizontale composée de ce nombre de cases, et que la soustraire à λ donne le partage $\lambda^{\{1\}} = (\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k)$. Donc, $\text{imm}_{\lambda^{\{1\}}} \leq \text{imm}_\lambda$. Si on note $\lambda^{\{i\}} = (\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, ..., \lambda_k)$, alors en appliquant la proposition à $\lambda^{\{1\}}$, on obtient que $\text{imm}_{\lambda^{\{2\}}} \leq \text{imm}_{\lambda^{\{1\}}}$. Comme les réductions sont transitives, on peut en conclure que $\text{imm}_{\lambda^{\{2\}}} \leq \text{imm}_\lambda$, et en utilisant le même argument pour tous les i, on a que $\text{imm}_{\lambda^{\{i\}}} \leq \text{imm}_\lambda$.

De façon analogue, par la seconde partie de la proposition précédente, si $\lambda^{[1]}$ est le partage λ sans sa première colonne (la plus grande), alors $\text{imm}_{\lambda^{[1]}} \leq \text{imm}_\lambda$, et si $\lambda^{[i]}$ représente λ sans ses i premières colonnes, alors $\text{imm}_{\lambda^{[i]}} \leq \text{imm}_\lambda$.

Soit j le premier entier tel que $\rho = \lambda_j - \lambda_{j+1}$. On vient de montrer que $\text{imm}_{\lambda^{\{j-1\}}} \leq \text{imm}_\lambda$ (en posant $\lambda^{\{0\}} = \lambda$ au besoin). Si on pose $\tau = \lambda^{\{j-1\}}$, alors on remarque facilement que $\tau^{[\lambda_{j+1}]} = (\rho)$, le partage d'une seule composante. On a donc $\text{perm}_\rho = \text{imm}_{\tau^{[\lambda_{j+1}]}} \leq \text{imm}_\tau \leq \text{imm}_\lambda$, comme voulu.

Par exemple, si $\lambda = (6, 5, 4, 2, 2, 1)$, alors $\rho = 2$, et cette valeur est atteinte lorsque $j = 3$. Dans ce cas, on a donc $\tau = \lambda^{\{j-1\}} = (4, 2, 2, 1)$, et $\tau^{[\lambda_{j+1}]} = \tau^{[2]} = (2)$, ce qui est bien égal au partage (ρ).

Soit maintenant $\lambda^{(n)}$ une suite de partages satisfaisant les conditions du théorème : $|\lambda^{(n)}|$ est bornée par un polynôme, et si $\rho(n)$ est la séparation de $\lambda^{(n)}$, il existe des constantes $c, e > 0$ telles que $cn^e \leq \rho(n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour montrer que $(\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est **VNP**-complète, on sait par le corollaire 2.1.4 qu'il suffit de montrer que $(\text{perm}_n) \leq (\text{imm}_{\lambda^{(n)}})$. Par définition, cela signifie qu'il faut trouver une fonction $t(n)$ qui est bornée supérieurement par un polynôme et telle que $\mathrm{perm}_n \leq \mathrm{imm}_{\lambda(t(n))}$. Clairement, comme $\mathrm{perm}_{\rho(n)} \leq \mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}}$, ceci est vrai en prenant $t(n)$ telle que $\rho(t(n)) \geq n$, car dans un tel cas, comme $cn^e \leq \rho(n)$, alors $t(n) \leq \frac{1}{c} n^{\frac{1}{e}}$, donc est bel et bien bornée par un polynôme. On a donc bien que $(\mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est **VNP**-complète. □

On connaît également un autre résultat sur la complexité des immanants, dû à N. de Rugy-Altherre (de Rugy-Altherre, 2013). Pour l'énoncer, il faut définir un autre polynôme de $S^n(\mathbb{C}^{n^2})$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $c(\sigma)$ le nombre de cycles de σ (donc, si $\lambda \vdash n$ est la structure cyclique de σ, alors $c(\sigma) = \ell(\lambda)$). On définit le *fermionant* de paramètre k comme étant le polynôme

$$\mathrm{ferm}_n^k = (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-k)^{c(\sigma)} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

On remarque que si $k = 0$, ce polynôme est nul, et si $k = 1$, alors le fermionant est égal au déterminant, car $(-1)^{n+c(\sigma)} = \mathrm{sgn}(\sigma)$. Donc, dans ces cas, la suite $(\mathrm{ferm}_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans **VP**. Mais dans son article, de Rugy-Altherre montre que ce sont les seuls cas :

Théorème 3.4.9. *Soit $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$. Alors, $(ferm_n^k)_n$ est* **VNP***-complète.*

On peut utiliser ce polynôme pour obtenir des résultats sur les immanants. En effet, on remarque que la fonction $\sigma \mapsto (-k)^{c(\sigma)}$ est une fonction centrale sur $\mathfrak{S}_n$. Par la proposition 1.1.6, on sait que l'on peut alors l'écrire comme une combinaison linéaire des caractères irréductibles du groupe symétrique. Cela signifie que l'on peut écrire le fermionant comme une combinaison linéaire des immanants. Plus précisément, en notant Λ_n^k l'ensemble des partages de n ayant au plus k colonnes, on a le lemme suivant, dû à Mertens et Moore (Mertens et Moore, 2013) :

Lemme 3.4.10. *Soient n et k deux entiers. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_n^k$, il existe des* *constantes $d_{\lambda,k} \in \mathbb{N}$ telles que*

$$\mathrm{ferm}_n^k = \sum_{\lambda \in \Lambda_n^k} d_{\lambda,k} \mathrm{imm}_\lambda$$

Preuve. D'abord, soit V un espace vectoriel de dimension k. Alors, la fonction $\sigma \mapsto k^{c(\sigma)}$ est le caractère de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$. En effet, soit $\{v_1, ..., v_k\}$ une base de v. Alors, les vecteurs de la forme $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$ $(i_1, \cdots, i_n \in [k])$ forment une base de $V^{\otimes n}$, et l'action de σ sur cette base est

$$\sigma \cdot (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) = v_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(i_n)}.$$

Donc, comme c'est une action qui permute les vecteurs de la base, sa trace est égale au nombre de vecteurs qui sont invariants par cette action. Si $(j_1 \cdots j_\ell)$ est un cycle de σ, alors un tel vecteur doit être tel que $i_{j_1} = \cdots = i_{j_\ell}$. Chaque cycle de σ ajoute une suite d'égalité comme celle-ci, et dans chaque suite, on peut y mettre n'importe lequel des k vecteurs de la base de V ; on a donc bien $k^{c(\sigma)}$ vecteurs invariants par l'action de σ.

Par la dualité de Schur-Weyl, on connaît la décomposition de $V^{\otimes n}$ en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathrm{GL}(V)$:

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq k}} V_\lambda \otimes S^\lambda(V).$$

En notant $d_{\lambda,k}$ la dimension de $S^\lambda(V)$, on a donc qu'en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n$, on a

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq k}} V_\lambda^{\oplus d_{\lambda,k}}.$$

Au niveau des caractères, cela donne

$$k^{c(\sigma)} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq k}} d_{\lambda,k} \chi_\lambda(\sigma).$$

On considère maintenant $V^{\otimes n} \otimes V_{1^n}$ en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n$ (au sens de la proposition 1.2.6). Par la proposition 1.3.1 et le fait que $(-1)^{n+c(\sigma)} = \mathrm{sgn}(\sigma) = \chi_{1^n}(\sigma)$, son caractère est $(-1)^n(-k)^{c(\sigma)}$. En utilisant l'équation précédente, on a

$$\begin{aligned}(-1)^n(-k)^{c(\sigma)} &= \left(\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\leq k}} d_{\lambda,k}\chi_\lambda(\sigma)\right)\mathrm{sgn}(\sigma)\\ &= \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\leq k}} d_{\lambda,k}\left(\chi_\lambda(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma)\right)\\ &= \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\leq k}} d_{\lambda',k}\chi_{\lambda'}(\sigma),\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due au fait que $\chi_\lambda \mathrm{sgn} = \chi_{\lambda'}$. Comme la somme est sur les partages ayant au plus k lignes, leur conjugué ont au plus k colonnes, donc on a que les λ' sont dans Λ_n^k. Tout ceci donnne alors que

$$\begin{aligned}\mathrm{ferm}_n^k &= (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-k)^{c(\sigma)} x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\leq k}} d_{\lambda',k}\chi_{\lambda'}(\sigma)\right) x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\lambda\in\Lambda_n^k} d_{\lambda,k}\chi_\lambda(\sigma) x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_n^k} d_{\lambda,k}\mathrm{imm}_\lambda\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat voulu. □

Les nombres $d_{\lambda,k}$ peuvent se calculer facilement, à l'aide d'une formule qui ressemble à la formule des équerres permettant de calculer la dimension des représentations de $\mathfrak{S}_n$, et que l'on peut retrouver dans (Landsberg, 2012). Sachant cela, et à l'aide de ce lemme et du fait que le fermionant est **VNP**-complet, de Rugy-Altherre réussit à prouver le théorème suivant :

Théorème 3.4.11. *Soit $\lambda^{(n)}$ une suite de partages telle qu'il existe $k \geq 2$ bornant supérieurement la première part de $\lambda^{(n)}$, et pour laquelle il existe une constante $a > 0$ telle que $an \leq |\lambda^{(n)}|$ (autrement dit, la largeur de tous les partages est bornée par k et le nombre de cases augmente au minimum de façon linéaire).*

1. *Si le nombre de cases à droite de la première colonne est bornée par une constante, alors $(\mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est dans* **VP** *;*
2. *S'il existe des constantes $c, e > 0$ telles qu'il y a au moins cn^e cases à droite de la première colonne (à partir d'un certain rang), alors $(\mathrm{imm}_{\lambda^{(n)}})$ est* **VNP***-complète.*

Pour conclure, malgré tous ces résultats, il reste beaucoup de chemin à faire pour comprendre la complexité de toutes les suites d'immanants. D'abord, la suite d'immanants associée à des partages de la forme $(n, n-1, ..., 1)$ (donc en forme d'escaliers) est supposée **VNP**-complète, mais on ne sait pas le prouver ; une telle preuve mènerait, selon Bürgisser, à une preuve de sa conjecture. Aussi, pour la plupart des résultats énoncés, les suites sont dans **VP** si elles diffèrent du déterminant par une constante, et sont **VNP**-complètes si cette différence croît de façon polynomiale. Mais qu'en est-il si ce nombre augmente de façon logarithmique ? Il n'existe même aucune conjecture pour de telles suites, ce qui les rend à la fois intriguantes et intéressantes pour la suite de cette théorie.

3.5 Complexité déterminantielle des immanants

On a remarqué que l'on peut utiliser la complexité déterminantielle dans le cadre du problème **VP** = **VNP**. Il est donc pertinent de se demander quelle est la complexité déterminantielle des immanants. Mais contrairement au déterminant, les transformations linéaires qui préservent les autres immanants ne permettent pas de simplifier significativement une matrice en une autre plus simple ayant le même immanant, ce qui faciliterait la tâche. En fait, on ne connaît la valeur exacte de $\mathrm{cd}(\mathrm{imm}_\lambda)$ que pour $\det_n$, perm_2 et perm_3.

Soit la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x_{11} & 0 & -x_{12} & 0 & -x_{13} & 0 \\ 0 & 1 & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{33} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{23} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{21} \\ x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, on peut vérifier que le déterminant de cette matrice est $\mathrm{imm}_{(21)}$, donc $\mathrm{cd}(\mathrm{imm}_{(21)}) \leq 7$. On s'attend à ce que les suites d'immanants qui sont dans **VP** aient une complexité déterminantielle bornée supérieurement par un polynôme. Cependant, cela n'est sûr que si la suite est dans $\mathbf{VP}_{ws}$, mais même pour $(\mathrm{imm}_{(n-1,1)})$, on ne sait pas si cela est vrai. En fait, à ma connaissance, même dans ce cas, personne n'a trouvé de matrice de dimension $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ (ou moins) dont le déterminant est $\mathrm{imm}_{(n-1,1)}$, alors qu'on sait le faire pour le permanent, qui est **VNP**-complet. C'est donc que la complexité déterminantielle des immanants est encore très peu connue, tout comme celle du permanent. On doit donc utiliser d'autres techniques pour savoir si une suite d'immanants est dans **VP** ou dans **VNP**.

On connaît une borne inférieure à la complexité déterminantielle de $\mathrm{imm}_{(n-1,1)}$, due à U. Heide-Jørgsensen (Heide-Jørgsensen, 2012) :

Théorème 3.5.1. $\frac{n^2-n+2}{2} \leq \mathrm{cd}(\mathrm{imm}_{(2,1^{n-2})})$.

La preuve de ce théorème est basée sur des notions de géométrie algébrique. Donc, même pour l'immanant qui est le plus près de $\det_n$, on ne connaît qu'une borne inférieure quadratique et une borne supérieure au moins exponentielle, tout comme le permanent. Ce cas est donc très intéressant pour le problème **VP** $=$ **VNP**, car malgré sa ressemblance avec le déterminant et le fait qu'on peut le calculer en un temps polynomial, on ne sait pas le décrire efficacement en tant que réduction du déterminant.

3.6 Géométrie et immanants

Dans la théorie géométrique de la complexité, Mulmuney et Sohoni étudient les surfaces

$$Det_n = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\det_n]} \quad \text{et}$$
$$Perm_n^m = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\ell^{n-m}\mathrm{perm}_m]}.$$

On peut alors tenter de généraliser ces cas en analysant les variétés projectives

$$Imm_\lambda^m = \overline{\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \cdot [\ell^{n-m}\mathrm{imm}_\lambda]}$$

pour $\lambda \vdash n$. À ma connaissance, ces variétés n'ont jamais été étudiées. La raison en est une de symétrie. En effet, un résultat classique est que le déterminant est *caractérisé par ses symétries*, c'est-à-dire que si un autre point de $S^n(\mathbb{C}^{n^2})$ est invariant par $G(\det_n)$, le stabilisateur de $\det_n$, alors ce point est un multiple scalaire du déterminant. On peut montrer que le permanent l'est aussi (Landsberg, 2015).

Pour les autres immanants, on a énoncé plus haut un résultat de Ke Ye stipulant que le stabilisateur est le même pour tous les immanants associés à des partages non-symétriques. Ils ne sont donc pas caractérisés par leurs symétries. Mais un des principaux outils de la théorie géométrique de la complexité est d'étudier les fonctions $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n^2}) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont constantes sur les groupes de symétries du polynôme étudié, et ceci n'est efficace que pour les points caractérisés par leurs symétries (Landsberg, 2016).

Cependant, on sait par un autre résultat de P. Coehlo (Coelho et Duffner, 2006) que pour $n \geq 5$, il n'existe aucune transformation linéaire qui transforme un immanant en un autre. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.6.1. *Soient deux partages $\lambda, \mu \vdash n$ ($n \geq 5$) tels que $\lambda \neq \mu$ et $\lambda, \mu \notin \{(1^n), (n)\}$. Alors, il n'existe aucune transformation linéaire et surjective $T : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ telle que pour toute matrice A, $\mathrm{imm}_\lambda(T(A)) = \mathrm{imm}_\mu(A)$.*

On peut conclure de ce théorème que pour $n \geq 5$, les variétés Imm_λ^m sont toutes distinctes. Cela signifie que si l'on trouve une façon d'étudier ces variétés, on aura possiblement un autre outil dans la théorie géométrique de la complexité, car on pourra comprendre la différence entre les variétés associées à des immanants qui sont soit dans **VP** ou soit **VNP**-complets.

Finalement, on peut tenter d'utiliser $\overline{\mathrm{cd}}(\mathrm{imm}_\lambda)$, la complexité déterminantielle au bord des immanants. Cela est encore plus difficile à trouver que $\mathrm{cd}(\mathrm{imm}_\lambda)$, mais si on y arrive, on peut ensuite tenter de situer les Imm_λ^n qui sont à l'intérieur de la variété Det_n pour mieux les comprendre.

CONCLUSION

Après avoir fait un rappel de la théorie de la représentation, on a considéré l'hypothèse de Valiant **VP** vs **VNP** sur la complexité des suites de polynômes. On a remarqué que ce problème est équivalent à déterminer si le permanent est dans **VP**. Comme le déterminant est dans cet ensemble, on l'a utilisé pour énoncer une hypothèse un peu différente de celle de Valiant, et qui consiste à déterminer si la complexité déterminantielle du permanent peut être bornée par un polynôme. Puis, on a vu une autre variante de l'hypothèse de Valiant, qui se nomme la théorie géométrique de la complexité et qui considère les variétés Det_n et $Perm_n$.

Ensuite, on a donné la définition des immanants, et on les a caractérisés en tant que points de $S^n(\mathbb{C}^{n^2}) \cong S^n(E \otimes F)$, pour ensuite remarquer qu'ils forment une base du sous-espace stable par $(\mathrm{T}(E) \times \mathrm{T}(F)) \rtimes \mathfrak{S}_n$. Puis, on a étudié les propriétés du stabilisateur des immanants, pour les décrire complètement dans le cas des partages non-symétriques. On a ensuite considéré certaines suites d'immanants, et on a énoncé plusieurs résultats sur leur complexité. On a aussi démontré le théorème de Brylinski stipulant que si une suite d'immanants est telle que sa séparation croît au minimum de façon polynomiale, alors elle est **VNP**-complète. En terminant, on a étudié le lien entre les immanants et les variantes de l'hypothèse de Valiant.

On a énoncé plusieurs conjectures ou problèmes ouverts dans ce texte concernant les immanants. D'abord, il serait bien de trouver le stabilisateur des immanants associés à des partages symétriques. En plus d'être nécessaire pour bien les comprendre, on pourrait trouver une suite d'immanants caractérisés par leurs symétries, ce qui permettrait d'utiliser la théorie géométrique de la complexité. On peut cependant utiliser cette théorie si on trouve une façon d'étudier les variétés Imm^m_χ. Plus particulièrent, il serait intéressant d'étudier la variété $Imm^m_{(2,1^{n-2})}$, afin de comprendre en quoi elle diffère de Det_n. Cela aiderait à trouver la complexité déterminantielle au bord de $\mathrm{imm}_{(2,1^{n-2})}$, qui demeure inconnue malgré sa ressemblance au déterminant. Mais avant cela, il faudrait trouver la complexité déterminantielle de cet immanant, en trouvant une matrice de taille raisonnable dont le déterminant est ce polynôme. La résolution de n'importe lequel de ces problèmes aiderait à résoudre l'hypothèse **VP** vs **VNP**, et donc ultimement, mieux comprendre la complexité des polynômes.

INDEX

RÉFÉRENCES

Althoen, S. C. et McLaughin, R. (1987). Gauss-Jordan reduction : A brief history. *American Mathematical Monthly*, *94*, 130–142.

Borel, A. (2012). *Linear algebraic groups*, volume 126 de *Graduate texts in mathematics*. Springer Science & Business Media.

Bürgisser, P. (2000). The computational complexity of immanants. *SIAM Journal on Computing*, (3), 1023–1040.

Bürgisser, P. (2013). *Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

Brylinski, J.-L. et Brylinski, R. (2003). Complexity and completeness of immanants. Récupéré le 16 avril 2019 de `https://arxiv.org/pdf/cs/0301024.pdf`

Coelho, M. P. (1996). On linear preservers of immanants. *Linear Algebra and Its Applications*, *247*, 265–271.

Coelho, M. P. et Duffner, M. A. (2006). Immanant preserving and immanant converting maps. *Linear Algebra and its Applications*, *418*(1), 177 – 187.

Cook, S. (1971). The complexity of theorem proving procedures. *STOC '71 : Proceeding of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 151–158.

de Rugy-Altherre, N. (2013). Determinant versus permanent : Salvation via generalization ? 87–96. Springer Berlin Heidelberg.

Duffner, M. A. (1994). Linear transformations that preserve immanants. *Linear Algebra and Its Applications*, *197-198*, 567–588.

Frobenius, F. G. (1900). Über die charactere der symmetrischen gruppe. *Sitzungberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 516–534.

Frobenius, G. (1897). Über die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, (2).

Fulton, W. et Harris, J. (2004). *Representation theory : a first course*, volume 129 de *Graduate texts in Mathematics.* Springer Science & Business Media.

Grenet, B. (2011). An upper bound for the permanent versus determinant problem. Manuscript.

Hartmann, W. (1985). On the complexity of immanants. *Linear and Multilinear Algebra*, *18*(2), 127–140.

Heide-Jørgsensen, U. (2012). *On the Determinantal Complexity of the 2-Hook immanant.* (Thèse de doctorat). Aarhus University.

Hüttenhain, J. et Lairez, P. (2016). The boundary of the orbit of the 3 by 3 determinant polynomial. *Comptes Rendus Mathématique*, *354*, 931–935.

Landsberg, J. (2012). *Tensors : Geometry and Applications*, volume 128 de *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society.

Landsberg, J. M. (2015). Geometric complexity theory : an introduction for geometers. *Annali dell'Universita' di Ferrara*, *61*(1), 65–117.

Landsberg, J. M. (2016). *Geometry and Complexity Theory*, volume 169 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press.

Littlewood, D. E. et Richardson, A. R. (1934). Group characters and algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, *233*, 99–141.

Marcus, M. et May, F. (1962). Linear transformations that preserve the permanent. *Canadian Journal of Mathematics*, *14*(2), 177–189.

Mertens, S. et Moore, C. (2013). The complexity of the fermionant and immanants of constant width. *Theory of Computing*, *9*(6), 273–282.

Mignon, T. et Ressayre, N. (2004). A quadratic bound for the determinant and permanent problem. *International Mathematics Research Notices*, (79), 4241–4253.

Mulmuley, K. D. et Sohoni, M. (2001). Geometric Complexity Theory I : An approach to the P vs. NP and related problems. *SIAM Journal on Computing*, *31*(2), 496–526.

Murnaghan, F. D. (1937). The characters of the symmetric group. *American*

Journal of Mathematics, 59(4), 739–753.

NP-complete problem. (2018). *Encyclopædia Britannica.* Récupéré le 16 avril 2019 de `https://www.britannica.com/science/NP-complete-problem`

Pieri, M. (1893). *Sul problema degli spazi secanti.* Numéro 2. Rendiconti - Reale Istituto lombardo di scienze e lettere.

Toda, S. (1992). Classes of arithmetic circuits capturing the complexity of computing the determinant. *IEICE Transactions on Information and Systems, E75-D*, 116–124.

Valiant, L. G. (1979). Completeness classes in algebra. *STOC '79 : Proceeding of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 249–261.

von zur Gathen, J. (1988). Algebraic complexity theory. *Annual Review of Computer Science, 3*(1), 317–348.

Ye, K. (2012). *Immanants, Tensor Network States and the Geometric Complexity Theory Program.* (Thèse de doctorat). Texas A& M University.