UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

CONJECTURES MATHÉMATIQUES ET ANTIRÉALISME CHEZ WITTGENSTEIN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN PHILOSOPHIE

PAR

ALEXIS MORIN-MARTEL

JUILLET 2019

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mes parents, Anne Morin et Jocelyn Martel, pour leur soutien indéfectible durant les onze (!) années que j'ai passées à l'UQÀM. Merci de n'avoir même pas froncé les sourcils lorsque j'ai entamé un baccalauréat en philosophie plutôt que d'entreprendre le Barreau.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement mon directeur de mémoire, Mathieu Marion. Sans ses connaissances infinies dans le domaine, entreprendre ce mémoire aurait relevé de la chimère. Merci du fond du cœur aux deux autres membres de mon jury, Alain Voizard et Serge Robert. Vos commentaires ont été précieux et je vous dois certainement une bonne partie des quelques mérites du présent mémoire.

Je salue aussi mes ami-e-s de Gaspésie ou d'ailleurs qui ne liront jamais ce mémoire, mais sans qui je n'aurais jamais eu la force de l'écrire.

Enfin, je ne voudrais pas oublier ma compagne de tous les jours, Alice Livadaru, véritable sémaphore illuminant ma route et me guidant toujours à bon port. Merci d'exister.

DÉDICACE

À Daniel Leblanc, pour la première étincelle.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

Abbréviations de textes (dans l'ordre de la bibliographie) :

AWL	Wittgenstein, L. (1979). *Wittgenstein Lectures 1932-5*, ed. by Alice Ambrose, Blackwell, Oxford.
BB	Wittgenstein, L. (1958) *The Blue and Brown Books*, Blackwell, Oxford.
BT	Wittgenstein, L. (2012). *The big typescript: TS 213*, John Wiley & Sons.
CV	Wittgenstein, L. (1984). *Culture and value*, University of Chicago Press.
LFM	Wittgenstein, L. (1976). *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics Cambridge*, ed. Cora Diamond. Hassocks.
MS 123, MS 149, MS 166, MS 180(a)	Wittgenstein, L., & Von Wright, G. H. (1998). *Wittgenstein's Nachlass the Bergen Electronic Edition*. Oxford University Press, Oxford.
PG	Wittgenstein, L. (1974). *Philosophical Grammar*, edited by Rush Rhees & translated by Anthony Kenny, Blackwell, Oxford.
PI	Wittgenstein, L. (2009). *Philosophical investigations*. John Wiley & Sons.
RFM	Wittgenstein, L. (1983). *Remarks on the Foundations of Mathematics, revisededition*, MIT press.
RPP I	Wittgenstein, L. (1980). *Remarks on the Philosophy of Psychology, vol. 1*, edited by G.E.M. Anscombe & G.H. Von Wright, translated by G.E.M. Anscombe, Blackwell, Oxford.

TLP	Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*, introduction by Bertrand Russell. London: Routledge and Kegan Paul.
WVC	Wittgenstein, L. (1979). *Wittgenstein and the Vienna circle: Conversations recorded by Friedrich Waismann*, Blackwell, Oxford.
Z	Wittgenstein, L. (1967). *Zettel*. University of California Press.

Abréviations des théorèmes et conjectures mathématiques :

DTF	Le dernier théorème de Fermat.
HR	L'hypothèse de Riemann.
T4C	Le théorème des quatre couleurs.

RÉSUMÉ

Ce mémoire vise à évaluer si la théorie des mathématiques de Wittgenstein est encore applicable dans le contexte contemporain où plusieurs théorèmes sont prouvés par un soutien informatique et où certaines conjectures mathématiques ont des usages pratiques en dépit de l'absence de leur preuve. Les deux éléments que nous tenterons de mettre en tension dans la théorie de Wittgenstein sont les suivants. D'une part, il soutient que nous ne sommes pas en présence de propositions mathématiques valides avant d'en avoir une preuve. En effet, selon lui, les mathématiques sont des techniques que les humains inventent. Avant la preuve, nous ne comprenons pas complètement le sens d'une proposition et c'est justement le rôle que la preuve doit remplir. Pour ce faire, celle-ci doit avoir un caractère synoptique au sens où elle doit nous mener, en la lisant, à accepter la nouvelle règle qu'elle propose. D'autre part, Wittgenstein insiste que le sens des mathématiques s'inscrit dans une pratique. C'est parce que les mathématiques sont des techniques nous permettent d'accomplir certaines activités dans nos vies qui seraient impossibles sans elles qu'elles sont si importantes pour nous. Cela nous mène aux deux questions principales de notre mémoire : (1) Le fait que certaines preuves modernes soient d'une longueur colossale ou soient impossibles à accomplir sans soutien informatiques invalident-il le rôle que Wittgenstein estime qu'elles doivent jouer? À cette question, nous répondons par la négative et nous croyons qu'il est possible d'aménager la théorie de cet auteur de manière à rendre compte de tels développements. (2) Le fait que certaines conjectures aient des usages pratiques en l'absence d'une preuve pose-t-il un problème à la théorie de Wittgenstein? En ce qui a trait à cette question, il nous semble qu'il y ait une tension difficile à dépasser entre l'insistance de Wittgenstein sur le caractère pratique des mathématiques et sur le rôle que la preuve doit jouer, celui de donner un sens à la proposition mathématique. Un élément final à noter est que Wittgenstein n'a pas la prétention de d'invalider des preuves mathématiques. Il critique plutôt un certain langage que l'on utilise pour parler des mathématiques.

Mots clés : Philosophie des mathématiques, Philosophie du langage, Antiréalisme, Conjectures, Preuves, Sens.

INTRODUCTION

Au moment de l'écriture des *Recherches philosophiques*, un élément central de la pensée de Wittgenstein est que les philosophes sont induits en erreur parce qu'ils entretiennent une conception trop homogène du langage. Ainsi, nous croyons voir une ressemblance entre des éléments du langage qui n'ont pas grand-chose en commun. C'est portés par une telle erreur que nous considérons, par exemple, des propositions comme « La terre est ronde » et « 2 + 2 = 4 » comme étant d'une nature similaire. Bien entendu, il s'agit tous deux de propositions que nous considérons comme vraies et à propos desquelles nous n'admettons généralement aucune alternative possible. Cependant, la question plus fondamentale que pose Wittgenstein est la suivante : qu'est-ce que ça signifie de dire d'une proposition mathématique qu'elle est vraie?

En ce sens, il semble y avoir une différence significative entre les mathématiques et les propositions empiriques en ce qui a trait aux types de faits qui les rendent vrais. Par exemple, on a l'impression qu'une proposition telle que « La terre est ronde » est vraie en vertu du fait indépendant de nous que la terre est belle est bien ronde. Cependant, quand il s'agit des propositions mathématiques, la question devient déjà plus difficile à trancher. En effet, « 2 + 2 = 4 » serait-elle une proposition vraie même si aucun humain n'y avait jamais pensé de la même manière que la terre demeurerait ronde même si aucun humain ne l'avait jamais constaté? Il semble à première vue difficile de réconcilier une conception purement objective des mathématiques avec le processus historique qui mena à l'acceptation de la véracité d'une proposition mathématique donnée, mais le caractère totalement objectif des mathématiques constitue une intuition tenace.

La question devient encore plus complexe lorsque l'on s'intéresse aux conjectures mathématiques. Il s'agit d'hypothèses mathématiques pour lesquelles on ne dispose pas d'une preuve. L'une des plus célèbres a été mise de l'avant par Goldbach et avance le postulat suivant : tout nombre entier pair supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers. Or, certains grands mathématiciens comme Hardy ne manquèrent pas d'affirmer croire que la conjecture de Goldbach était vraie même en l'absence de sa preuve (*LFM* 239-240). Au contraire, Wittgenstein soutient une position selon laquelle le sens d'une conjecture mathématique ne devient pleinement compréhensible pour nous qu'à partir du moment où l'on réussit à en faire la preuve. Si l'on adopte sa position, croire qu'une conjecture mathématique est vraie pose un problème conceptuel majeur puisque cela impliquerait de se prononcer sur la valeur de vérité d'une proposition que l'on ne comprend pas encore.

> **Problématique** : Si la position de Wittgenstein peut sembler à première vue attrayante, elle doit cependant désormais rendre compte de faits nouveaux. En effet, depuis la fin du 20e siècle, certaines preuves mathématiques ne peuvent être faites qu'à l'aide d'algorithmes informatiques, comme le théorème des quatre couleurs. Cela s'explique en vertu de leur longueur et de leur complexité extrême. Pire encore, certaines conjectures mathématiques, comme l'hypothèse de Riemann, trouvent des usages pratiques même en l'absence d'une preuve. Étant donné que la philosophie des mathématiques de Wittgenstein lie fortement le sens des propositions mathématiques à l'usage pratique que l'on peut en faire, il est possible que cela pose un réel problème pour sa théorie.

Le présent mémoire vise à évaluer si cette tension dans les écrits de Wittgenstein peut être dépassée ou si nous sommes face à une véritable impasse conceptuelle. La thèse que nous défendrons est la suivante :

Thèse : La philosophie des mathématiques de Wittgenstein ne peut pas rendre compte du contexte d'utilisation de certaines conjectures mathématiques, comme l'hypothèse de Riemann sans certaines adaptations majeures. Elle peut cependant être adaptée de manière à être compatible avec certains développements liés à l'avènement de l'informatique comme outil de preuve mathématique.

Dans l'objectif de défendre cette thèse, nous proposons un texte constitué de deux chapitres dont nous exposons dès à présent la structure globale.

Le Chapitre 1 visera avant tout à exposer les éléments fondamentaux de la philosophie de Wittgenstein en ce qui a trait aux mathématiques. Dans la section 1.1, il s'agira de présenter très sommairement une opposition entre le réalisme et l'antiréalisme en mathématiques et de situer Wittgenstein dans ce débat. Dans la section 1.2, nous tenterons d'expliquer pourquoi Wittgenstein s'oppose à une compréhension de la sémantique des propositions mathématiques calquée sur celle qui prévaut pour les propositions empiriques. Nous exposerons aussi dans cette section sa conception très particulière des mathématiques comme règles grammaticales et certaines de ces ramifications importantes à notre propos. Dans la section 1.3, nous exposerons l'interprétation majoritaire qui conçoit les propositions mathématiques sur le modèle de « suivre une règle ». La section 1.4 sera fortement liée à la troisième et s'intéressera à déterminer où se trouve l'aspect de décision de la communauté en mathématiques. Cela nous mènera dans la section 1.5 à nous pencher sur le rôle particulier que Wittgenstein attribue à la preuve en mathématique. Enfin, dans la section 1.6 qui est la dernière du premier chapitre, nous exposerons le traitement particulier que cet auteur fait des conjectures mathématiques, étant donné que celles-ci n'ont pas de preuve.

Dans le Chapitre 2, nous traiterons de trois problèmes conceptuels auxquels la philosophie des mathématiques de Wittgenstein doit faire face. Ainsi, dans la section

2.1, nous aborderons un problème logique soulevé par Wright (1992) à l'égard de certaines conceptions sémantiques antiréalistes pour évaluer si Wittgenstein s'expose à la même critique. Dans la section 2.2, nous nous intéresserons au défi conceptuel que pose le théorème des quatre couleurs pour la théorie mathématique de cet auteur. Dans la section 2.3, nous aborderons le cas de l'hypothèse de Riemann et les problèmes qu'elle pose pour la théorie de Wittgenstein. Enfin, dans la section 2.4, nous tenterons d'évaluer si, à la lumière des critiques soulevées dans les trois sections précédentes, il est toujours possible de conserver la philosophie des mathématiques de Wittgenstein ou s'il est possible d'y apporter des modifications mineures pour rendre compte de celles-ci.

CHAPITRE I

LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE WITTGENSTEIN

Tel qu'indiqué précédemment, l'objectif de cette section sera d'exposer les éléments essentiels de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein à avoir en tête pour répondre aux problèmes conceptuels exposés dans le deuxième chapitre. Il est important de noter d'entrée de jeu que nous n'avons pas ici la prétention de fournir un portait global de la philosophie des mathématiques de cet auteur. En effet, nous estimons qu'une présentation plus longue n'aurait pas contribué à rendre plus clairs les problèmes conceptuels du deuxième chapitre. Nous avons donc préféré conserver cette ligne directrice en tête, au risque de ne pas offrir un portrait aussi exhaustif qu'il aurait été possible de le faire.

Dans la structure générale de ce premier chapitre, il est important de distinguer les sections 1.1 à 1.4 qui présenteront les grandes lignes théoriques de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein des sections 1.5 et 1.6 qui poseront les deux aspects principaux autour desquels s'articuleront les problèmes soulevés au Chapitre 2. En effet, 1.5 s'intéressera particulièrement aux exigences de la preuve pour Wittgenstein et 1.6 au statut qu'il accorde aux conjectures mathématiques.

1.1 Réalisme et antiréalisme en mathématiques

Un premier débat essentiel à présenter avant de s'intéresser plus précisément à la théorie de Wittgenstein est la question du réalisme et de l'antiréalisme en mathématiques. La question centrale de ce débat est de savoir si les propositions mathématiques constituent des éléments totalement indépendants de la pensée des êtres humains. Autrement dit, s'agit-il d'éléments complètement objectifs ou de constructions humaines contingentes? À ce sujet, il est important de rappeler que les mathématiques ne sont pas le seul domaine dans lequel une telle question se pose. Ainsi, dans la sphère métaéthique, une question similaire se pose à savoir si la moralité dépend entièrement des êtres humains ou s'il y a là aussi une objectivité qui nous dépasse.

D'entrée de jeu, il est important de noter que même si l'on indique souvent que ce réalisme constitue une forme de platonisme, il n'est pas clair que l'on puisse trouver ces éléments dans les écrits de Platon. Bien entendu, on peut trouver une certaine ressemblance entre cette notion et la théorie des idées-formes de Platon, mais, comme le note Linnebo (2018), le débat contemporain par rapport à cette notion a très peu à voir avec les sujets d'interrogations de l'époque antique. De plus, un élément qu'il faut avoir en tête est qu'il ne s'agit pas là d'une conception tombée en désuétude, mais bien d'un débat très vivant en philosophie. En effet, une grande proportion des mathématiciens et philosophes des mathématiques entretiennent encore de nos jours une forme sophistiquée de réalisme.

Dans le contexte des mathématiques, on situe généralement l'avènement d'une conception moderne du réalisme (ou platonisme) dans certains écrits de Frege. Intellectuel allemand peu reconnu de son vivant, Gottlob Frege cumule les fonctions de mathématicien et de philosophe. Son intérêt pour la logique réside avant tout dans une volonté de donner une assise solide aux axiomes de l'arithmétique (Blanché & Dubucs 1996, 241). Très attaché aux notions objectives, il s'oppose farouchement à un courant très présent à son époque qui voulait fonder les sciences sur des bases psychologiques. C'est d'ailleurs cette recherche de notions objectives indépendantes de la psychologie humaine qui l'amène à s'opposer au constructivisme mathématique hérité de Kant.

Il convient ici d'expliquer brièvement ce qu'on entend par « constructivisme kantien ». Ce courant de pensée tient les mathématiques pour une construction de l'entendement humain. Ainsi, Kant estime que le rôle du mathématicien dans l'élaboration d'un théorème s'apparente à celui d'un inventeur, au sens où les mathématiques ne constituent pas pour lui des propositions vraies de tout temps, mais plutôt comme des constructions effectuées par le sujet et qui dépendent donc de celui-ci (Blanché & Dubucs 1996, 243).

Au contraire, Frege considère le mathématicien comme l'explorateur d'une contrée préexistante qu'il se contente de cartographier. Il faut comprendre qu'aux yeux de Frege, les mathématiques ont une existence totalement distincte de nous. Il va même jusqu'à affirmer que « le nombre n'est pas plus un objet de la psychologie ou un produit de nos processus psychiques que la mer du Nord » (Frege 1969, 153). C'est cette conception d'une existence distincte des éléments de l'arithmétique que l'on nomme « réalisme mathématique ». Pour celui-ci, il n'y a en effet aucun doute que les nombres constituent des entités idéales existantes (Frege 1969). Dans sa perspective, les nombres et les rapports qui existent entre eux sont des faits objectifs de tout temps, indépendamment du fait contingent de leur découverte par les humains.

À première vue, on pourrait avoir l'impression que l'opposition entre le réalisme et l'antiréalisme en mathématiques constitue un débat trivial avec peu de répercussions pratiques. Cependant, il n'en est rien, puisqu'il y a des enjeux pratiques réels liés à l'adoption de l'une ou l'autre de ces positions. Un premier élément pratique est lié à la notion de tiers exclu. En effet, ce principe logique implique que, pour toute proposition

p donnée, ou bien p est vraie, ou bien p est fausse ($p \vee \neg p$). Ce principe est important à avoir en tête puisqu'un type de preuve mathématique important repose sur celui-ci : la déduction par l'absurde. Dans certains cas, on est en effet incapable de faire directement la preuve d'une proposition mathématique p donnée. Pour les réalistes, une autre manière de procéder à sa démonstration est la suivante. On commence par nier la proposition que l'on tente de prouver, cela nous donne donc $\neg p$. Par la suite, si l'on parvient à dériver une contradiction à partir de $\neg p$, cela veut donc dire que $\neg p$ est faux. De ce fait, l'on obtient $\neg\neg p$. Étant donné qu'en accord avec le tiers exclu, une proposition est soit vraie, soit fausse, et qu'il a été démontré que $\neg p$ ne tient pas la route, on doit donc en conclure que p est vraie.

Les antiréalistes s'opposent généralement à une telle démonstration puisqu'ils considèrent que d'avoir fait la preuve que $\neg p$ est fausse n'est pas la même chose que de prouver p de manière positive. Cela ne veut pas pour autant dire qu'ils croient pouvoir fournir un exemple d'un cas où la loi logique du tiers exclu soit fausse. En ce sens, l'approche d'un représentant plus contemporain de l'antiréalisme, Michael Dummett repose sur un refus d'asserter le tiers exclu dans des contextes de trop grande indétermination. Dummett donne en exemple la proposition suivante : « on ne construira jamais une ville ici ». Celui-ci contient de toute évidence un élément de généralité illimité, dans ce cas-ci temporel, qui transcende potentiellement les capacités de connaître qui nous sont propres (Dummett 1991, 65-66). Si on lie la signification de cette proposition à la valeur de vérité de ses constituants, le principe du tiers exclu tient toujours la route. En effet, s'il ne se construira jamais de ville à cet endroit, la propisition est vraie, sinon, elle est fausse. Cependant, si l'on entend déterminer la signification de cette proposition en fonction des conditions dans lesquelles on peut l'asserter, cela est fort problématique. En effet, un temps infini devrait s'écouler avant que je sois en mesure de déclarer qu'« on ne construira jamais une ville ici ».

Cette opposition est nécessaire à présenter puisqu'elle mobilise deux concepts très importants pour nous qui sont les notions de « vérité » et de « conditions d'assertion justifiée » (*warranted assertibility*). Pour les réalistes comme Frege, il importe peu que l'on ne soit jamais en état d'asserter qu'une ville sera construite ici ou non. L'important est que, même si cela échappe pratiquement à nos capacités à en avoir la preuve, la proposition est vraie ou fausse de toute éternité en vertu de conditions précises extérieures aux êtres humains. Au contraire, Dummett considère que l'apprentissage que l'on fait de l'utilisation des propositions fait dépendre leur signification des conditions dans lesquelles on peut les asserter, et donc des conditions dans lesquelles on peut asserter ses constituants (Dummett 1991, 66-67). Ainsi, on nous apprend que l'on peut asserter « p et q » seulement lorsque l'on peut asserter p et que l'on peut asserter q. Le problème du tiers exclu ressurgit ici encore à cause des propositionss qui ont un degré d'indétermination tel qu'elles sont indécidables.

En réponse au réalisme, Dummett adopte une position « vérificationniste ». Il fait ainsi reposer la vérité d'une proposition entièrement sur les preuves et démonstrations que l'on peut en faire. Pour lui, les capacités humaines de connaître se situent dans le fait de reconnaître lorsque nous sommes en présence d'une preuve ou d'une réfutation d'une proposition donnée (Bouveresse 1980). En ce sens, l'objectif de Dummett est de ramener la conception de la vérité ou de la fausseté des propositions à l'échelle humaine en refusant d'asserter le tiers exclu par rapport à certaines proposition, notamment lorsque la preuve que l'on pourrait en apporter se situe hors du champ des connaissances humaines possibles.

Ces considérations de Dummett ne sont pas sans rappeler celles de Wittgenstein qui s'oppose lui aussi à une certaine forme de discours qu'on entretient par rapport aux mathématiques. Ainsi, il soutient dans ses *RFM* qu'une proposition mathématique :

> If it is unproved, then *what* is to count as a criterion of its truth is not yet *clear*, and -- we can say -- its sense is still veiled. (*RFM* 120)[1]

Nous voyons que l'idée assez radicale qu'il entretient ici est que le sens d'une proposition mathématique n'est pas tout à fait clair pour nous jusqu'au moment où l'on dispose d'une technique de décision à son endroit[2]. Par conséquent, il ne manquait pas de s'opposer à l'idée d'asserter le tiers exclu dans certains contextes, comme pour déterminer si une suite particulière ϕ (par exemple '770') apparait dans l'extension infinie de π (*RFM* 266). Le problème ici est assez similaire à celui de la ville de Dummett, puisqu'il est possible d'étendre l'extension de π jusqu'à des dimensions colossales sans jamais rencontrer l'ensemble en question.

> When someone hammers away at us with the law of excluded middle as something which cannot be gainsaid, it is clear that there is something wrong with his question. (…) And if you say that the infinite expansion must contain the pattern ϕ or not contain it, you are so to speak shewing us the picture of an unsurveyable series reaching into the distance. (*RFM* 268)

Bien entendu, l'exemple du '770' de Wittgenstein n'est plus valide de nos jours, puisqu'on a depuis longtemps fait la démonstration qu'il existe une telle extension décimale de π. Plus précisément, '770' revient à 946 reprises dans le premier million

---

[1] Tous les textes originaux de Wittgenstein à partir desquels nous travaillons ici sont rédigés en allemand. N'ayant pas un degré de connaissance de cette langue nécessaire pour mener nos travaux à bien, nous avons fait usage des traductions anglaises des œuvres. La première raison pour laquelle nous avons fait usage de ces traductions plutôt que de celles en français est que Wittgenstein fréquenta principalement les milieux académiques anglophones et que certaines premières traductions des œuvres furent effectuées par des personnes ayant étudié directement avec lui. Ensuite, un deuxième élément expliquant ce choix est la facilité d'obtenir des éditions bilingues des textes, en allemand et en anglais. Cela nous permit, malgré notre faible maîtrise de l'allemand, d'être en mesure d'avoir une vigilance accrue quant aux mots exacts utilisés par Wittgenstein et les divergences potentielles dans leur traduction.

[2] Nous ferons une analyse plus approfondie de cette idée selon laquelle le sens des propositions mathématiques dépend au moins partiellement de leur preuve dans la section 1.6 de ce chapitre.

de décimales de π (Andersen 2016). Cependant, il nous est toujours possible d'imaginer un ensemble plus long comme '77777777777777777777', qui, lui, serait encore sujet au type d'indétermination que Wittgenstein a en tête. Ceci étant dit, la proximité entre une telle position et celle défendue par Dummett nous apparait ici évidente.

Néanmoins, la position exacte de Wittgenstein en ce qui a trait aux mathématiques ainsi que les objectifs qui le poussent à défendre celle-ci sont très sophistiqués. Il soutient ainsi la chose suivante par rapport aux propositions mathématiques :

> The proof doesn't *explore* the essence of the two figures, but it does express what I am going to count as belonging to the essence of the figures from now on.--I deposit what belongs to the essence among the paradigms of language.
>
> The mathematician creates *essences*. (*RFM* 50)

On voit bien là que Wittgenstein ne conçoit pas la découverte d'une preuve mathématique comme l'exploration d'une contrée préexistante, mais plutôt comme un acte de création. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'un commentaire isolé dans les écrits de Wittgenstein et il ne cesse de répéter qu'une preuve mathématique trace un nouveau chemin là où il n'y avait rien avant (*RFM* 228).

L'objectif de cette première section n'était que de présenter le contexte général d'opposition entre réalisme et antiréalisme dans lequel Wittgenstein s'inscrit. Pour pousser davantage notre compréhension de l'antiréalisme de cet auteur, nous aborderons dès la prochaine section une distinction essentielle à ses yeux, celle entre les propositions empiriques et les propositions grammaticales.

1.2 Distinction entre les propositions empiriques et les propositions mathématiques

Un élément très important de la philosophie de Wittgenstein après le *Tractatus Logico-Philosophicus* (*TLP*) est son insistance sur le caractère hétérogène du langage. Comme on le sait, dans le *Tractatus*, la cause principale des erreurs philosophiques est attribuée au fait que l'on comprenne mal la distinction entre ce qui peut être dit et ce qui peut seulement se montrer (*TLP* 4.1212). Par la suite, l'élément qui demeurera pour lui la cause récurrente d'erreurs est que nous n'avons pas une vision synoptique du langage. C'est-à-dire que nous négligeons la diversité très grande des usages que l'on fait de nos outils linguistiques et tentons au contraire de les réduire à quelques rôles spécifiques. Cette inquiétude est très présente au moment de l'écriture des *Recherches philosophiques (PI)*, et un élément central de sa pensée est que les philosophes sont induits en erreur parce qu'ils entretiennent une conception trop homogène du langage. En effet, ceux-ci sont majoritairement captivés par une conception qu'il attribue à Saint Augustin (*PI* §1). Il convient donc en premier lieu d'exposer et de décortiquer sommairement celle-ci :

> When they (my elders) named some object, and accordingly moved towards something, I saw this and I grasped that the thing was called by the sound they uttered when they meant to point it out. Their intention was shewn by their bodily movements, as it were the natural language of all peoples: the expression of the face, the play of the eyes, the movement of other parts of the body, and the tone of voice which expresses our state of mind in seeking, having, rejecting, or avoiding something. Thus, as I heard words repeatedly used in their proper places in various sentences, I gradually learnt to understand what objects they signified; and after I had trained my mouth to form these signs, I used them to express my own desires. (*PI* §1)

Dans cet extrait, on retrouve plusieurs éléments importants. Premièrement, on apprendrait le langage par l'intermédiaire d'un geste d'ostension. Par exemple, j'aurais appris le mot « chaise » lorsque mes parents auraient pointé l'objet en question en le nommant ainsi. De plus, notre capacité à déduire ce rapport entre les deux serait rendue possible en raison d'un bagage d'expressions corporelles partagées. Enfin, les mots n'auraient de signification que parce qu'ils dénotent des objets ou qu'ils servent à exprimer des volontés.

Wittgenstein ne considère pas que cette conception soit totalement fausse. Il considère cependant qu'elle n'exprime qu'une fraction des usages que nous faisons du langage. Voici comment il expose ses réticences :

> Augustine, we might say, does describe a system of communication; only not everything that we call language is this system. [...]
> It is as if someone were to say: "A game consists in moving objects about on a surface according to certain rules . . ."—and we replied: You seem to be thinking of board games, but there are others. (*PI* §3)

Ainsi, il considère qu'il s'agit d'une conception réductrice du langage et que, s'il est vrai dans certains contextes que des mots jouent le rôle de nomination en accord avec le modèle qu'il attribue à Saint Augustin, il existe aussi de très nombreux autres rôles qu'ils peuvent jouer. L'analogie qu'il formule pour rendre compte de cette complexité est sa notion de « jeux de langage ». Il faudra expliciter ce qu'il entend par là avant d'aller plus loin.

Le concept de « jeux de langage » n'est pas clairement défini par Wittgenstein et cela est volontaire. À l'instar des autres jeux, il considère en effet qu'il n'existe pas un critère nécessaire et suffisant qui constitue l'essence des jeux de langage. Voyons comment Wittgenstein présente la chose dans son dialogue intérieur :

> ''You make things easy for yourself! You talk about all sorts of language-games, but have nowhere said what is essential to a language-game, and so to language: What is common to all these activities, and makes them into language or parts of language [...]''
>
> And this is true. – Instead of pointing out something common to all that we call language, I'm saying that these phenomena have no one thing in common in virtue of which we use the same word for all – but there are many different

> kinds of affinity between them. And on account of this affinity, or these affinities, we call them all ''languages''. I'll try to explain this. (*PI* 65)

Dès le passage suivant, il donne son exemple célèbre où il compare cette relations d'affinités des jeux de langages avec celle qui prévaut pour les jeux, de manière plus générale :

> Consider for example the proceedings that we call "games". I mean board-games, card-games, ball-games, Olympic games, and so on. What is common to them all? — Don't say: "There *must* be something common, or they would not be called 'games' " — but *look and see* whether there is anything common to all. — For if you look at them you will not see something that is common to *all,* but similarities, relationships, and a whole series of them at that. [...]
> I can think of no better expression to characterize these similarities than "family resemblances"; for the various resemblances between members of a family: build, features, colour of eyes, gait, temperament, etc. etc. overlap and criss-cross in the same way. — And I shall say: 'games' form a family. (*PI* §66-67)

L'idée principale que Wittgenstein défend ici est que les jeux de langage doivent avoir une telle souplesse dans leur définition afin de rendre compte de la complexité de nos usages langagiers. C'est pour se donner cette souplesse qu'il imagine la notion « d'airs de famille ». L'idée est qu'il ne serait pas possible de formuler une définition qui inclurait tous les jeux de langage, parce qu'il n'y a pas de propriétés nécessaires partagées par l'ensemble de ceux-ci. Si on prend l'exemple des jeux, on voit bien qu'il y a un chevauchement entre les caractéristiques d'un jeu à l'autre. Ainsi, le tennis aura en commun avec le ski de fond d'être des sports extérieurs, mais partagera des similitudes avec le ping-pong de par la structure de leurs règles, qui lui aura des ressemblances avec les échecs parce qu'il s'agit d'un jeu de confrontation à deux.

Cependant, Wittgenstein considère qu'il est possible, à travers ce chevauchement de caractéristiques de se faire une idée pratique de ce qui constitue un jeu. Ce qu'il faut en comprendre, c'est que les jeux de langage résistent selon Wittgenstein à une définition de second ordre. Par conséquent, selon lui, la meilleure manière de comprendre ce qu'ils sont est de se pencher sur notre usage courant du langage. Dans ce langage, on observe selon lui que malgré l'absence d'une définition unifiée, nous sommes tout de même capables de nous entendre globalement par rapport à ce qui constitue ou non un jeu.

Cette notion ayant été sommairement exposée, il convient maintenant de s'intéresser à la distinction que cet auteur trace entre les propositions empiriques et mathématiques. Conformément à la volonté de Wittgenstein d' « enseigner aux mouches à sortir du piège » (*PI* §309), une grande partie des *Remarques sur les fondements des mathématiques* (*RFM*) est destinée à s'attaquer à des confusions conceptuelles, et il considère que la confusion est particulièrement pesante en ce qui a trait aux mathématiques.

En ce sens, l'une des premières causes d'erreur qu'il soulève d'une ressemblance perçue entre les propositions portant sur le monde empirique et les mathématiques. Ainsi, on a l'impression que « La terre est ronde » et « La somme de 2 et 2 est 4 » constituent des propositions de nature similaires, au sens où ils seraient tous deux vrais. Or, le fait que l'on puisse exprimer « 2+2=4 » sous cette forme propositionnelle impliquant le verbe être ne rend pas du tout ces propositions similaires selon Wittgenstein. Celui-ci considère qu'il n'y a qu'une ressemblance superficielle entre celles-ci et que l'on aurait très bien pu ne jamais exprimer les mathématiques sous la forme propositionnelle (*RFM* 117).

Quelle est la perception dont Wittgenstein veut s'écarter absolument? Concevoir les propositions mathématiques comme les propositions portant sur le monde empirique. On a l'impression que les mathématiques agissent comme si la proposition donnait son sens et sa preuve déterminait si elle est vraie ou fausse. Or, c'est exactement ce que Wittgenstein ne veut pas dire (*MS* 123, 64v). Il va même jusqu'à affirmer que :

« Nothing is more disastrous to philosophical understanding than the conception of proof and experience as two different – yet still comparable – methods of verification. » (*BT* 419)

Ceci étant dit, la question qui se pose à ce stade est de savoir ce qui distingue exactement les propositions empiriques de celles qui portent sur les mathématiques pour Wittgenstein. Selon lui, la distinction est la suivante : contrairement aux propositions empiriques, les mathématiques constituent des règles grammaticales. Il faut bien avoir à l'esprit que celui-ci a une conception de la grammaire beaucoup plus large que celle que l'on s'en fait habituellement. Il inclut notamment dans cette catégorie les équations mathématiques (*PR* 130), la géométrie euclidienne (*WVC* 38, 62), mais aussi, nos unités de mesure et nos systèmes de couleurs (*BT* 193v).

Ce qui justifie pour lui la distinction entre ces types de propositions est le rôle qu'elles jouent dans nos vies. Les propositions empiriques portent sur des éléments du monde extérieur et, si un fait extérieur correspond à ce type de proposition, elle sera vraie (*LFM* 247). Au contraire, les propositions grammaticales fixent la manière dont on utilise certains éléments du langage. Il s'agit en ce sens des « conditions et méthodes nécessaires pour comparer les propositions avec la réalité. » (*PG* 88). Autrement dit, il s'agit de règles dont on s'est doté pour formuler certains jugements empiriques.

Un exemple que donne Wittgenstein en ce sens est celui de notre système de couleur. Un type de proposition grammatical dans ce domaine serait la proposition suivante : « Le rouge est une couleur » (*BT* 193v). Une telle proposition porte à confusion, puisqu'il semble s'agir d'une description empirique, mais qu'il s'agit en fait d'une proposition grammaticale déguisée (*PI* §371-373). En effet, maîtriser la grammaire de ce que veut dire « être rouge » est nécessaire pour formuler certaines propositions empiriques susceptibles d'être vraies ou fausses. On pourrait penser par exemple à la proposition empirique « ce chandail est rouge ». Cependant, contrairement à cette proposition qui sera vraie ou fausse, dépendamment des faits, il n'y a aucun fait correspondant à la proposition grammaticale « Le rouge est une couleur », puisqu'il s'agit d'une manière de fixer dans notre langage la façon dont on emploie le mot « rouge ».

Selon Wittgenstein, nous faisons le même type d'erreur lorsque nous considérons que des propositions comme « 2+2=4 » sont vraies en vertu d'un lien avec une réalité extérieure. Comme pour nos systèmes de couleur, le fait que l'on ait adopté des systèmes mathématiques nous permet d'accomplir une multitude de tâches pratiques, mais ces systèmes ne peuvent être ni validés ni invalidés par des faits extérieurs à nous. C'est en ce sens que Wittgenstein fait la remarque suivante concernant les propositions mathématiques : « [It is] as if we had hardened an empirical proposition into a rule and now experience is compared with it and it is used to judge experience. » (*RFM* 324) Pour lui, les mathématiques constituent des normes rigides qui sont tenues pour acquises dans l'expérience empirique. Autrement dit, elles font partie de l'échafaudage à partir duquel on peut élaborer des descriptions et c'est pour cela qu'on insiste tant pour que tous adhèrent aux mêmes règles (*RFM* 356).

En ce sens, il est intéressant de noter que cette distinction basée sur le rôle que joue une proposition dans notre langage est un élément récurrent dans la philosophie de Wittgenstein. En effet, il n'hésitera pas à soutenir en parlant du mètre de Paris qu'on ne peut pas dire de celui-ci qu'il mesure ou ne mesure pas un mètre (*PI* §50). Ce propos peut sembler énigmatique à première vue, mais étant donné qu'il s'agit de l'élément fixant la convention même du mètre, dire du mètre de Paris qu'il mesure lui-même un mètre ne semble pas prendre en considération son rôle grammatical spécifique. Cet exemple est particulièrement parlant, puisque le fait d'avoir décidé que le mètre aurait une longueur donnée et aucune autre est un acte conventionnel[3]. Cependant, dans la mesure où il y a une entente généralisée à ce sujet et où nos pratiques sont réglées en prenant en compte cette convention, cela devient une règle dont la rigidité avec laquelle on l'applique est essentielle à son utilisation. Par exemple, si, lorsque l'on est surpris par la taille d'une table après l'avoir mesurée, on acceptait la possibilité que le mètre ait changé de longueur, il n'y aurait plus vraiment d'intérêt à procéder de la sorte.

Le même type d'argument s'applique aux mathématiques. Il s'agit là aussi de conventions qui nous permettent d'opérer certains calculs et les mathématiques n'ont d'intérêt pour nous que grâce à leur rigidité. Ainsi, lorsque l'on compte deux pommes et deux oranges et que l'on en vient à la conclusion qu'on est en présence de trois fruits, notre premier réflexe sera de considérer que l'on a égaré un fruit ou commis une erreur de calcul. Si, au contraire, cela nous menait à remettre en cause la proposition mathématique « 2+2=4 », l'utilité d'opérer de tels calculs serait fort réduite.

C'est pour cette raison que nous n'acceptons aucune déviation par rapport aux règles mathématiques lorsque nous les enseignons aux enfants. Wittgenstein note en ce sens la chose suivante :

> Far what we call ''counting'' is an important part of our life's activities. Counting and calculating are not – e.g. – simply a pastime. Counting (and that means: counting like *this*) is a technique that is employed daily in the most various operations of our lives. And that is why we learn to count as we do: with endless practice, with merciless exactitude; that is why it is inexorably

---

[3] Wittgenstein fait référence au mètre étalon de Paris, mais le mètre a été défini par des calculs différents au cours de l'histoire. Notamment comme fraction infime d'un méridien terrestre ou, plus récemment, comme la distance parcourue par la lumière dans le vide dans un temps donné.

> insisted that we shall all say ''two'' after ''one'', ''three'' after ''two'' and so on. (*RFM* 37)

Ainsi, cette rigidité dans l'enseignement se justifie par l'importance des mathématiques dans nos vies et que le sens même de cette activité repose sur le fait qu'il y ait un consensus fort lorsque nous les pratiquons. Le fait que nous parvenions à un consensus dans notre manière de calculer est une partie essentielle de ce que nous appelons « calcul » et son absence mettrait donc fin à cette institution au sens où nous la concevons. C'est là un aspect capital pour comprendre leur place dans notre langage (*RFM* 193 et 257).

À ce stade de notre exposé, il est important de préciser où se situe l'antiréalisme de Wittgenstein évoqué dans la section 1.1. Toutes les considérations que l'on vient d'aborder par rapport aux règles grammaticales vont définitivement dans le sens d'un antiréalisme. En effet, si les propositions grammaticales sont considérées comme étant « vraies », c'est à cause du rôle qu'ils occupent dans notre langage et Wittgenstein n'a de cesse de rappeler qu'il aurait été possible de se doter de systèmes grammaticaux différents. Ainsi, par rapport aux mathématiques, Wittgenstein nous appelle à ne pas considérer notre pratique particulière comme la seule possible. Il imagine à ce sujet diverses méthodes de calcul qui rempliraient d'autres objectifs, comme des communautés qui feraient usage de règles élastiques ou qui vendraient le bois à partir de la superficie que les arbres couvrent indépendamment de leur hauteur (*RFM* 93 et *LFM* 201). L'insistance que Wittgenstein met ici sur le caractère pratique des mathématiques vise à nous rappeler qu'il s'agit d'un ensemble hétérogène (*motley*) de techniques qui remplissent des fonctions réelles dans nos vies (*RFM* 176)[4].

---

[4] Il est important cependant de noter que les exemples de Wittgenstein ne remettent pas en question les bases arithmétiques du calcul. Même si l'on calcule le bois par leur étendue plutôt que par leur hauteur,

Si les exemples sont plus ou moins heureux, son objectif semble encore une fois être de nous détacher de notre cadre de référence actuel pour nous permettre d'imaginer d'autres méthodes qu'il aurait été possible d'utiliser. Cependant, il n'est pas dit que l'on pourrait d'atteindre les mêmes objectifs avec celles-ci. En ce sens, il existe un exemple réel mis de l'avant par Baker & Hacker (2009, 325-327) qui est le calcul du temps dans le Japon impérial. Jusqu'en 1873, le Japon utilisait un système de calcul du temps avec des unités d'heures qui n'étaient pas fixes, mais qui variaient en fonction du temps de clarté des saisons. Dans un tel système, il semble évident que plusieurs usages que l'on fait de notre calcul du temps sont impossibles. Ainsi, si l'on se demande le nombre d'heures de marche à parcourir pour atteindre une destination donnée, ces heures variables ne devaient pas être optimales pour l'indiquer. De la même manière, un salaire basé sur le nombre d'heures travaillées aurait été difficile à mettre en place avec un tel système de calcul (Baker & Hacker 2009, 326).

Selon nous, ces exemples visent à discréditer une conception réaliste des mathématiques. L'idée à laquelle il s'oppose ici serait de concevoir les mathématiques comme un système déjà potentiellement réalisé que l'on ne ferait que découvrir. Ainsi, sous prétexte que l'on est parvenu à mettre sur pied un nouveau système mathématique, à se doter de nouvelles règles grammaticales, on a l'impression que ces règles préexistaient à leur invention sous une forme « potentielle ». Pour nous faire réaliser l'absurdité d'une telle thèse, Wittgenstein trace le parallèle suivant :

on fait quand même usage des mêmes principes de multiplication pour calculer les aires. Il n'est pas clair en effet qu'il existe des systèmes arithmétiques réellement alternatifs qui n'aient pas une isomorphie structurelle avec la nôtre. Cependant, il est possible d'imaginer des systèmes géométriques différents, comme le démontre le cas de la géométrie non euclidienne.

> Suppose someone were to say: chess only had to be *discovered*, it was always there! Or: the *pure* game of chess was always there; we only made the material game alloyed with matter. (*PG* 374)

Cette comparaison ne fait qu'accentuer la différence entre sa conception des propositions grammaticales et celle qu'il entretient par rapport aux propositions empiriques. C'est en ce sens qu'il indique qu'on ne se trompe jamais autant quant aux propositions mathématiques que lorsqu'on les envisage comme une forme de science naturelle, au même titre que la biologie ou la chimie (*PG* 375).

Ceci étant dit, les problèmes que voit Wittgenstein dans cette volonté d'imposer un seul modèle sémantique pour les propositions mathématiques et propositions empiriques devaient aussi intéresser Benacerraf quelques décennies plus tard et il convient donc d'en dire quelques mots pour mieux situer le débat lancé par Wittgenstein. Ce qu'on appelle aujourd'hui le « dilemme de Benacerraf » peut être présenté de la manière suivante. Si l'on souhaite se doter d'une conception sémantiquement homogène du langage, on doit accepter que les marqueurs de vérité des propositions empiriques soient du même type que ceux des propositions mathématiques. Voyons les deux proposition suivantes :

(1) Il y a au moins trois villes plus vieilles que New York.
(2) Il y a au moins trois nombres parfaits plus grands que 17.

Dans une conception réaliste des mathématiques, les conditions de vérité de ces deux propositions devraient répondre à la structure suivante :

(3) Il y a au moins trois *FG* qui ont la relation *R* avec *a*. (Benacerraf 1973, 665, traduction libre).

Le problème qui survient lorsque l'on soutient une telle position est de nature épistémologique. En effet, Benacerraf entretient une conception causale de la connaissance pour laquelle :

> It must be possible to establish an appropriate sort of connection between the truth conditions of p (as given by an adequate truth definition for the language in which p is expressed) and the grounds on which p is said to be known, at least for propositions that one must *come to* know -that are not innate. (Benacerraf 1973, 672)

Le problème ici est que nous ne sommes pas selon lui dans un rapport causal avec les nombres et qu'une position réaliste ne peut donc pas rendre compte de la manière dont nous pourrions connaître une proposition mathématique. En effet, les mathématiciens sont constitués de chairs et d'os et situés dans le temps et l'espace. Au contraire, les nombres mathématiques auxquels ils devraient avoir accès sont des objets abstraits qui ne sont situés ni spatialement ni temporellement. Certes, l'objection de Benacerraf repose sur une conception causale de la connaissance, mais selon plusieurs analystes, celle-ci est assez robuste pour être étendue à d'autres conceptions de la connaissance. Horsten note en ce sens la chose suivante :

> Today few epistemologists hold that the causal theory of knowledge is our best theory of knowledge. But it turns out that Benacerraf's problem is remarkably robust under variation of epistemological theory. For instance, let us assume for the sake of argument that reliabilism is our best theory of knowledge. Then the problem becomes to explain how we succeed in obtaining reliable beliefs about mathematical entities. (Horsten 2017)

On voit bien là le défi lancé à une conception réaliste des mathématiques par Benacerraf, mais, comme on l'a noté précédemment, il s'agit d'un dilemme où les deux avenues envisagées posent problème. La raison en est que la conception rivale qu'il nomme « combinatoire », et qui semble correspondre à l'antiréalisme par rapport aux nombres, entraîne elle aussi un défi de taille.

En effet, admettre que les vérités mathématiques résultent de conventions pose aussi problème étant donné qu'il devient dès lors difficile d'expliquer comment rattacher cette vérité par convention à notre concept plus large de ce que c'est que d'être « vrai ».

L'idée, selon Benacerraf, est qu'il manquerait la chose suivante à cette vérité par convention :

> What would be missing, hard as it is to state, is the theoretical apparatus employed by Tarski in providing truth definitions, i.e., the analysis of truth in terms of the "referential" concepts of naming, predication, satisfaction, and quantification. A definition that does not proceed by the customary recursion clauses for the customary grammatical forms may not be adequate, even if it satisfies Convention T. (Benacerraf 1973, 677)

Ainsi, ces conceptions qui font de la vérité des propositions mathématiques des conventions ne sont tout simplement pas en mesure de tracer un lien entre cette vérité par convention et le concept de vérité au sens plus large où on l'entend en ce qui a trait au monde empirique.

Sans être un conventionnaliste au sens fort du terme, Wittgenstein ne conçoit pas les vérifacteurs des propositions mathématiques comme étant de nature similaire à ceux des propositions empiriques et cela le situerait donc dans la deuxième alternative dans ce dilemme. Cela est d'ailleurs manifeste dans le texte suivant de Wittgenstein qui pourrait parfaitement servir d'illustration au problème de Benacerraf :

> Consider Professor Hardy's article ("Mathematical Proof") and his remark that "to mathematical propositions there corresponds – in some sense, however sophisticated – a reality."... [Y]ou forget where the expression 'a reality corresponds to' is really at home –What is "reality"? We think of "reality" as something we can point to. It is this, that Professor Hardy is comparing mathematical propositions to the propositions of physics. This comparison is extremely misleading. (*LFM* 239-240)

Il est assez aisé de voir la proximité relative entre cette position et celle de Benacerraf. Étant donné qu'une grande partie de notre travail consistera à définir la conception sémantique de Wittgenstein en ce qui a trait aux propositions mathématiques, il sera important de garder à l'esprit le dilemme évoqué ici. Nous tenterons de rattacher ce problème à celui qui nous intéressera dans la section 2.1 qui sera de savoir si Wittgenstein s'expose à la critique de Wright en faisant coïncider vérité et conditions d'assertabilité en mathématiques. Il y a en effet une connexion forte entre ces deux éléments de critique, mais nous n'en dirons pas davantage pour l'instant.

1.3 Les mathématiques sur le modèle de « suivre une règle »

À ce stade de notre exposé, on devrait déjà avoir une idée plus claire de la distinction entre propositions empiriques et mathématiques que Wittgenstein met de l'avant. Cependant, pour avoir un portrait global de sa caractérisation des mathématiques, il nous faut expliquer le concept de « suivre une règle ». En effet, les mathématiques constituent pour Wittgenstein des règles, comme on l'a déjà établi, et sa notion de « suivre une règle » est essentielle pour comprendre où se situe son antiréalisme à ce sujet. Ceci est d'autant plus important qu'une lecture de ce concept popularisée par Kripke (1982) diffère de la nôtre et permet d'avancer une conception beaucoup plus radicale de l'antiréalisme de Wittgenstein. Il conviendra donc d'expliquer les raisons qui nous poussent à refuser une telle position.

Comme on l'a déjà indiqué à l'égard des mathématiques qui en sont un exemple, les règles sont pour Wittgenstein des créations humaines qui remplissent des fonctions pratiques dans nos vies (*BT* 241). Selon Baker et Hacker (2009, 53), il n'y a donc pas de place selon Wittgenstein pour des règles subconscientes ou oubliées. Ceux-ci font aussi remarquer que, pour Wittgenstein, on aurait tort de penser pouvoir donner une définition de ce qui constitue une règle. Cela est d'ailleurs conséquent avec la notion d'airs de famille évoquée précédemment par rapport aux jeux de langage. Étant donné que la vie réelle d'une règle constitue ses usages pratiques, la meilleure manière de la définir est de donner des exemples de certains de ses usages (*PG* 273).

Ceci étant dit, le concept de « suivre une règle » est probablement l'un des éléments les plus essentiels à la compréhension de la nature des règles grammaticales comme les mathématiques et il convient donc de s'y intéresser un moment. Un premier élément à avoir en tête est que suivre une règle est une capacité qui ne s'exprime pas comme un état mental particulier (*PI* §146). En effet, la compréhension d'une règle ne constitue pas pour lui un processus interne, mais plutôt une capacité pratique à accomplir des actions en accord à la règle (*PI* §180).

Wittgenstein ne manque pas de noter qu'on nous apprend à suivre une règle par une forme de dressage. Ainsi, pour les règles mathématiques, par exemple, on n'acceptera d'un enfant qui développe la série mathématique « + 2 » qu'un seul résultat après 4. S'il donne une autre réponse que 6, on le corrigera impitoyablement. Cependant, selon Baker et Hacker, la comparaison avec le dressage n'est valide que si l'on ne limite pas ce type d'apprentissage à un cycle stimuli – réponse, puisqu'il s'agit plutôt de l'apprentissage d'une activité normative (Z 300). La distinction que Wittgenstein veut établir ici est entre la notion de « cause » et celle de « raison » (*BB* 12-15). L'idée pour Wittgenstein est que l'on n'est pas dressé comme un chien dans le fait de suivre un panneau d'indication.

Certes, le fait que l'on s'arrête devant un panneau de circulation provient ultimement d'une forme de dressage et c'est en ce sens la cause de notre action. Cependant, on ne fait pas que répondre de manière conditionnée au panneau, on considère le panneau comme une raison pour agir. On a appris par dressage que de s'arrêter devant le panneau est ce qu'il est bon de faire dans une situation donnée. Néanmoins, on utilisera aussi le panneau pour justifier notre conduite si cela est pertinent. Ainsi, si un passant nous demande pourquoi on ne s'est pas immobilisé à une intersection, on lui fera remarquer que la lumière était verte et que c'est pour cela qu'on a agi de cette manière. On tentera, parfois désespérément, d'invoquer cette raison face à un policier si le cas est un peu plus ambigu. Cette distinction entre cause et raison sera importante à garder en tête pour la suite de notre propos.

On comprend bien à la vue de ces arguments pourquoi suivre une règle ne pourrait constituer un événement isolé pour Wittgenstein. En effet, suivre une règle s'inscrit dans une pratique humaine et il doit donc y avoir une régularité dans l'action pour que l'on puisse dire qu'une règle est suivie. En soutien à cette position, Wittgenstein évoque la manière dont les enfants apprennent à suivre des règles. Un exemple célèbre qu'il en donne est lié à comment l'on apprend à un enfant à développer la série « + 2 ». Si un enfant continuait la série ainsi « 2, 4, 6, ... », mais qu'il se trompait systématiquement à partir de 20 et calculait ensuite : « 21, 24, 27, ... », on ne considérerait certainement pas qu'il a compris comment développer la série en question. Évidemment, le nombre de fois précis qu'un enfant doit réussir à appliquer correctement la règle avant qu'on estime qu'il la maîtrise n'est pas exact, mais Wittgenstein met ici l'emphase sur la nécessité d'une certaine répétition dans le comportement de celui-ci (*RFM* 334).

Nous arrivons ici à un élément de la philosophie de Wittgenstein qui a suscité de nombreuses controverses. L'une d'entre elles est particulièrement importante et porte sur les fondements du rapport entre la règle et une action en accord à celle-ci. Si les règles sont des constructions humaines servant des fins pratiques, cela n'est néanmoins pas suffisant pour qualifier le lien existant entre la règle et la conduite en accord à celle-ci. Nous suivons ici Baker et Hacker (2009, 150) qui soutiennent que la position de Wittgenstein est que le lien entre la règle et la conduite en accord avec elle est interne. Selon cette lecture, il ne saurait y avoir aucun lien intermédiaire entre la règle et le fait de la suivre.

Un premier élément que l'on doit rejeter comme pont entre la règle et l'action en accord avec elle serait la logique. On pourrait en effet imaginer que les règles d'inférence agissent comme intermédiaires entre la règle et la conduite en accord avec elle. On pourrait en ce sens imaginer que la règle *x* implique que, face à la situation *y*, tu doives adopter le comportement *z*. Conformément au principe d'inférence, si la situation *y* se réalise, tu devrais donc adopter le comportement *z*. Cependant, Wittgenstein est assez catégorique à ce sujet et note que la logique ne saurait être ce pont entre les deux (*WVC* 155). En effet, il considère que le lien entre la règle et l'action en accord est déjà existant et que le rôle de la logique n'est que de rendre celui-ci plus explicite. Autrement dit, la logique ne crée pas un chemin là où il n'y en avait pas avant, mais se contente de l'illuminer.

La deuxième possibilité serait que l'interprétation agisse comme ce pont entre la règle et l'action en accord avec elle. Contrairement, à l'idée de la logique comme lien médiateur, le concept de l'interprétation comme constituant le lien entre la règle et le fait de la suivre polarisa les lecteurs de Wittgenstein. La lecture la plus célèbre est sans doute celle de Kripke. D'entrée de jeu, nous devons préciser que notre objectif n'est pas ici d'exposer en long et en large l'argument de Kripke. Si nous nous intéressons à cette interprétation, selon nous erronée, c'est qu'il nous apparaît fondamental de contextualiser les réponses élaborées par ses opposants auxquelles nous souscrivons davantage.

Tout l'argumentaire de Kripke repose sur une lecture des *PI* de Wittgenstein et sur le fait qu'il y aurait une certaine indétermination intrinsèque aux règles. Plus précisément, un élément que Wittgenstein expose dans la section 85 des *PI* est qu'une règle ne déterminerait pas parfaitement l'action en accord avec elle dans tous les contextes possibles.

Dans notre vie quotidienne, Wittgenstein note qu'il est possible, pour chaque règle donnée, d'imaginer des conditions dans lesquelles on serait confus quant à la conduite en accord avec celle-ci. Il nous met cependant en garde dès le second paragraphe de *PI* §84 de ne pas accorder une importance exagérée à cette éventualité en indiquant que : « But that is not to say that we are in doubt because it is possible for us to *imagine* a doubt. » Il note ensuite dès *PI* §85 qu'une règle fonctionne en quelque sorte comme un panneau indicateur au sens où il est possible qu'il nous laisse parfois dans le doute quant à la direction dans laquelle on doit le suivre dans des contextes exceptionnels. Cependant, il ajoute un peu plus loin que, comme la règle, « The signpost is in order - if, under normal circumstances, it fulfills its purpose » (*PI* §87). Ainsi, comme pour les panneaux indicateurs, les règles ont l'importance qu'elles ont dans nos vies parce qu'elles nous permettent dans une multitude de contextes de nous appuyer sur elles pour régler notre conduite.

Pour être en mesure de comprendre l'argument de Kripke, il faut cependant avoir aussi en tête les sections 201 et 202 des *PI.* À la section 200, Wittgenstein évoque le problème suivant : «This was our paradox: no course of action could be determined by a rule, because every course of action can be brought into accord with the rule » (*PI* §200). Ces passages combinés menèrent Kripke à une interprétation assez radicale du concept de suivre une règle chez Wittgenstein. Selon cette interprétation, puisque l'on peut toujours imaginer des contextes dans lesquels l'interprétation d'une règle qui nous semble actuellement certaine serait modifiée, cela devrait nous mener à une forme de scepticisme par rapport à notre capacité de savoir que notre interprétation de la règle est la bonne[5]. La manière dont Kripke rejette un tel scepticisme mène à une position

---

[5] Nous ne présenterons pas ici sa célèbre critique fondée sur une opposition possible entre addition et « quaddition ».

assez radicale. En effet, puisque la manière dont on suit une règle n'est qu'une interprétation possible et que ce sont les membres d'une communauté donnée qui nous enseignent à suivre les règles, la manière correcte de suivre une règle n'est pour lui qu'une question subjective dépendant entièrement de la volonté d'une communauté donnée (Kripke 1982). Dans cette perspective, le lien entre la règle et la conduite à adopter pour la suivre serait toujours déterminé de manière subjective par l'interprétation de la communauté dans laquelle on se trouve.

Cependant, comme de nombreux commentateurs n'ont pas manqué de le noter, la lecture de Kripke fait face à de nombreux problèmes lorsque l'on considère plusieurs autres passages des *PI.* Un problème central dont nous allons discuter brièvement est que Wittgenstein fait une distinction claire entre suivre une règle et l'interpréter. Un premier support textuel se trouve dès la deuxième partie des *PI.* Il note à ce moment que le paradoxe de la première partie de cette section, qui est que chaque règle pourrait être interprétée de manière à ce qu'une action donnée soit considérée en accord avec elle repose sur une confusion entre suivre une règle et l'interpréter :

> For what we thereby show is that there is a way of grasping a rule which is not an interpretation, but which, from case to case of application, is exhibited in what we call ''following the rule'' and ''going against it''.
> That's why there is an inclination to say: every action according to a rule is an interpretation. But one should speak of interpretation only when one expression of a rule is substituted for another. (*PI* §201)

On voit bien là l'étendue de la distinction pour Wittgenstein entre suivre une règle et l'interpréter et comment une telle perspective met en doute l'interprétation de Kripke. En effet, Wittgenstein renforce ici l'idée selon laquelle comprendre une règle s'évalue directement dans la pratique comme y obéir ou y contrevenir. Autrement dit, il s'agit d'un lien interne et il ne serait pas possible selon Wittgenstein de comprendre la série « +2 », mais de la développer en pratique ainsi : « 2, 5, 8, … ». Le fait que la compréhension d'une règle se manifeste par notre habileté à la suivre implique qu'il n'y a pas de distance entre la compréhension de la règle et son application (*MS* 180(a), 68f). De plus, le passage cité plus haut renforce cette distinction nette entre suivre une règle et l'interpréter. Cette insistance surgit à nouveau à la fin de *PI* §219 où Wittgenstein énonce que : « When I follow the rule, I do not choose. I follow the rule blindly. » Autrement dit, un facteur déterminant pour indiquer qu'une personne maîtrise une règle donnée est justement qu'elle est capable d'agir en conformité avec celle-ci sans tenter de l'interpréter.

Enfin, un deuxième aspect qui semble militer contre l'interprétation comme intermédiaire entre la règle et l'action en accord est que la règle joue justement un rôle justificatif de dernière instance pour Wittgenstein. En d'autres termes, les justifications de nos actions par rapport aux règles ne se perdent pas dans l'infini comme le font les chaînes causales. En effet, lorsque l'on tente de définir la cause ultime de chaque événement, on est bien vite ramené à un degré de complexité croissant qui s'étire à l'infini. (Pourquoi la pomme est-elle tombée par terre? Parce qu'elle était sur la table et que je l'ai mise en mouvement involontairement. Pourquoi est-elle tombée par terre plutôt qu'au plafond? À cause de l'action de la gravité et de l'action de la masse de notre planète, etc.) Contrairement à ces chaînes causales, Wittgenstein estime que la série de justifications s'arrête en ultime instance à une règle sur laquelle repose notre comportement. Si l'on m'interroge à savoir comment je sais que je dois continuer la série « + 2 » de la manière dont je le fais, je répondrai en ultime recours que c'est la règle que j'ai apprise. C'est en ce sens qu'il faut lire le passage suivant :

> ''No matter how you instruct him in continuing the ornamental pattern, how can he *know* how he is to continue it by himself?'' – Well, how do *I* know? – If that means ''Have I reasons?'', the answer is: my reasons will soon give out. And then I shall act, without reasons. (PI §219)

Wittgenstein met vraiment ici de l'avant comment le lien entre l'action en accord à la règle et celle-ci se fait sans rapport à d'autres raisons extérieures, comme une interprétation, par exemple. Conformément à ses habitudes, il illustre son propos dès le paragraphe suivant en nous référant à la manière pratique à laquelle on obéit aux règles dans notre vie courante :

> When someone of whom I am afraid orders me to continue a series, I act quickly, with perfect assurance, and the lack of reasons does not trouble me. (*PI* §212 ; CF: *RFM* 351)

De manière plus générale, ce contre quoi Wittgenstein tente ici de nous mettre en garde, c'est de tenter de chercher des causes plus profondes à notre comportement en rapport à la règle alors que la règle constitue en fait l'élément justificatif ultime.

> ''How am I able to follow a rule?'' – If this is not a question about causes, then it is about the justification for my action in *this* way in complying with the rule. Once I have exhausted the justifications, I have reached bedrock, and my spade is turned. Then I am inclined to say: ''This is simply what I do.''
> (Remember that we sometimes demand explanations for the sake not of their content, but of their form. Our requirement is an architectural one; the explanation a kind of sham corbel that supports nothing.) (*PI* §217)

Un concept très important chez Wittgenstein est mis de l'avant dans cette citation, celui de « roc dur » (*bedrock*). S'il s'intéresse à cette notion, c'est qu'il considère que de nombreuses erreurs philosophiques adviennent parce que l'on cherche des explications là où l'on a déjà atteint le plancher explicatif. Cette notion est liée de près à celle de « forme de vie » qu'il évoque parfois pour faire référence aux éléments partagés entre les êtres humains (biologiques, comportementaux, ou autres) et qui permettent un certain accord dans nos jugements. Notre capacité commune à agir en conformité avec une règle lorsque l'on est entrainé pour le faire semble faire partie pour Wittgenstein de ces éléments si fondamentaux que de tenter d'en donner une explication plus profonde ne nous mènera qu'à de fausses pistes explicatives. En ce sens, si l'on était constitué de telle manière à nous rendre incapable de suivre des règles de manière systématique, d'être *dressés* de la sorte, c'est la possibilité même du langage qui s'effondrerait.

Le problème pour Wittgenstein survient parce que l'on continue à chercher une justification plus profonde à notre capacité d'agir en accord avec une règle alors qu'il n'y a rien de plus. C'est en ce sens que Wittgenstein défend la position suivante :

> To what extent can the function of a rule be described? [...] The difficult thing here is not to dig down to the ground; no, it is to recognize the ground that lies before us as the ground. (*RFM* 333)

On voit bien à la lecture de ces arguments pourquoi l'interprétation ne saurait être la colle unissant la règle et l'action en conformité avec celle-ci. Comme on l'a déjà noté, la compréhension de la règle s'exprime par notre capacité pratique à la suivre aveuglément, mais aussi dans notre capacité à justifier notre action par rapport à celle-ci. De plus, puisque cette capacité est un élément fondateur s'inscrivant dans notre bagage humain partagé (forme de vie), on atteint là le plancher explicatif selon Wittgenstein. Cela ferait donc de l'étape intermédiaire de l'interprétation entre la règle et l'action proposée par Kripke la fausse corniche explicative contre laquelle Wittgenstein tentait justement de nous mettre en garde.

La lecture de Kripke introduit néanmoins un autre problème fondamental, qui est celui de la nature du lien entre la règle et l'action conforme à celle-ci. Comme on l'a déjà indiqué précédemment, suivre une règle constitue une pratique pour Wittgenstein et a un certain caractère institutionnel. La question qui se pose cependant à la vue de l'argument de Kripke est de savoir si suivre une règle a une dimension irréductiblement sociale.

Toute cette interrogation prend ancrage sur une distinction très importante que Wittgenstein fait à *PI* §202 entre suivre une règle et croire suivre une règle. Il s'agit d'une discussion assez étendue qui est explicitée plus tard dans les *PI.* Wittgenstein imagine à *PI* §258 qu'une personne tienne un journal intime dans lequel elle note un « S » chaque jour où elle ressent une impression particulière donnée. Le problème avec une telle démarche pour Wittgenstein est qu'il s'agit d'un langage résolument privé. Cela veut dire que les conditions dans lesquelles le S dénote de la bonne sensation sont absolument inaccessibles à toute autre personne qu'à celle qui tient le journal. Or, dans un tel contexte, Wittgenstein considère que cette personne est incapable de faire la distinction entre le fait de suivre une règle et de croire suivre une règle. Il note ainsi :

> But in the present case, I have no criterion of correctness. One would like to say: whatever is going to seem correct to me is correct. And that only means that here we can't talk about 'correct'. (*PI* §258)

Ce que Wittgenstein veut ici dire est que le mot 'correct' joue un certain rôle dans nos vies et qu'il intervient dans les contextes où il y a une certaine forme de normativité. Dans un langage privé comme celui qu'il imagine ici, cette normativité n'est tout simplement pas présente. Comme on l'a déjà noté, on démontre que l'on comprend une règle pour Wittgenstein en la suivant dans notre pratique (*PI* §201). Cependant, le contexte du langage privé rend opaques les conditions dans lesquelles on suit ou l'on contrevient à la règle et c'est pour cela qu'on ne peut pas utiliser ici un tel concept.

Ceci ne règle cependant pas totalement la question à savoir si cette opposition de Wittgenstein au fait de suivre une règle inaccessible à quiconque d'autre implique nécessairement que suivre une règle a une dimension sociale. Certes, quelques passages semblent indiquer que c'est le cas, comme à *PI* §199 où Wittgenstein énonce que : « To follow a rule, to make a report, to give an order, to play a game of chess, are *customs* (usages, institutions). » Tout ce vocabulaire de coutumes (*customs*) semble renvoyer à un aspect irréductiblement social. Cependant, Baker et Hacker (2009) considèrent que ce n'est pas le cas et nous retracerons ici brièvement leurs arguments.

Un premier aspect contentieux est à savoir si, lorsque Wittgenstein défend que suivre une règle doit s'inscrire dans une forme de pratique, cela fait nécessairement référence à une pratique sociale. Pour Hacker & Baker, suivre une règle fait référence à une régularité dans la pratique, mais pourrait survenir chez un individu isolé. Ils notent en faveur de leur interprétation que Wittgenstein considère cette possibilité sans la rejeter. Ainsi, celui-ci note à *RFM* 193 la chose suivante : « But what about this consensus – doesn't it mean that *one* human being by himself could not calculate? Well, one human being could at any rate not calculate just *once* in his life. » Baker et Hacker voient dans cette section une indication claire que ce qui intéresse davantage Wittgenstein, ce n'est pas le caractère social de suivre une règle, mais bien l'aspect de la régularité. Cette interprétation semble trouver des échos ailleurs dans les écrits de Wittgenstein et, notamment dans ses *RFM*. Voici comment il formule alors cette interrogation :

> One person makes a bidding gesture, as if he meant to say "Go!" The other slinks off with a frightened expression. Might I not call this procedure "order and obedience", even if it happened only once? (*RFM* 351-352)

Wittgenstein note cependant dès les lignes suivantes que l'on pourrait très bien se méprendre dans notre interprétation à partir d'une seule occurrence de ce phénomène :

> And whatever interpretation one has to give to a gesture depends on other actions, which precede and follow the gesture.
>
> As we employ the word "order" and "obey", gestures no less than words are intertwined in a net of multifarious relationships. (*RFM* 352)

Ce que cette section met vraiment en évidence est que, sans surprise, suivre une règle tel que nous le concevons ne saurait être un événement isolé pour Wittgenstein. En effet, il doit y avoir un contexte où cette règle suivie a des conséquences pratiques. Celles-ci doivent être visibles dans le comportement de ceux qui la suivent.

Bien qu'il y ait insistance sur la régularité plutôt que sur l'aspect social de suivre une règle ici, les exemples que donne Wittgenstein se situent toujours dans un contexte social, ce qui ne semble pas selon nous militer en faveur de leur interprétation. Cependant, Baker et Hacker (2009, 123) notent un passage où Wittgenstein se pose la question suivante : « [...] If only *one* person had, *once*, made a voluntary movement – could the question exist whether it was voluntary or involuntary? » (*RPP I* 897). L'intérêt de cette interrogation est qu'elle reprend pratiquement la même forme de questionnement énoncé plus tôt et que Wittgenstein ne se demande visiblement pas ici s'il est nécessaire que le mouvement intervienne dans un contexte social pour que l'on puisse trancher la question. Manifestement ici, c'est sur la notion de régularité qu'il met l'emphase.

Ce qui ressort selon nous de cette controverse est que Wittgenstein s'intéresse à plusieurs règles dont certaines n'ont de sens que dans un contexte social. Il est important de rappeler que, à notre sens, c'est toujours aux conséquences concrètes sur nos vies réelles que Wittgenstein s'intéresse lorsqu'il est question de règles. Ainsi, on pourrait imaginer une personne sur une île déserte se sentant contrainte dans ses calculs mathématiques et qui en ferait un usage récurrent pour calculer les marées ou les jours qui passent. On trouve d'ailleurs dans un de ses manuscrits un scénario similaire où une personne se parle à elle-même sur une île déserte :

> We can indeed imagine a Robinson using a language for himself but then he must behave in a certain way or we shouldn't say that he plays language games with himself. (*MS* 149, 22)

Cependant, ce que note Wittgenstein est qu'il serait plus difficile d'imaginer qu'elle puisse obéir à un ordre qu'elle s'est donné elle-même. On serait en effet dans un contexte similaire à celui évoqué par Wittgenstein dans ses *Recherches philosophiques* :

> Why can't my right hand give my left hand money? – My right hand can put it into my left hand. My right hand can write a deed of gift, and my left hand a receipt. – *But the further practical consequences would not be those of a gift* (*PI* §268, nos italiques).

On est encore une fois ramené à la notion des conséquences pratiques nécessaires à ce qu'une règle soit suivie. Il nous semble en ce sens que suivre une règle dépend entièrement de celles-ci et pourrait intervenir en privé s'il y avait des conséquences prévisibles sur le comportement d'une personne seule de manière répétée. Cependant, la plupart des contextes de règles suivies doivent intervenir dans un contexte social pour avoir de telles conséquences et l'on ne pourra donc pas les suivre en privé.

Ceci étant dit, voyons comment cela s'imbrique plus largement dans notre recherche. L'élément qui est capital pour Baker et Hacker et qu'ils visent à défendre à travers leur opposition à la conception de suivre une règle comme une pratique sociale est la suivante : le lien entre la règle et la conduite en accord à celle-ci doit être interne. En effet, considérer que suivre une règle ne peut être qu'une pratique sociale menacerait pour eux ce caractère objectif du rapport entre la règle et le fait de la suivre. Au contraire, rattacher cela à une régularité plutôt qu'à une pratique sociale permet de vraiment établir que les critères de félicité d'une action dépendent entièrement de la règle et non pas d'une interprétation particulière de celle-ci que ferait une communauté, par exemple. Bien entendu, la manière dont on apprend à obéir à des règles données est généralement par la rétroaction de la communauté et Wittgenstein en donne plusieurs exemples. Néanmoins, comme Baker et Hacker, nous croyons que suivre une règle a un caractère fondamentalement objectif et que cette dimension est essentielle à avoir en tête en ce qui concerne le traitement que Wittgenstein fait des mathématiques.

1.4 La décision de la communauté en mathématiques

À la lumière de la dernière section, si l'on accepte l'idée que le lien entre la règle et ce qui constitue une action en accord avec elle est interne, la décision d'une communauté ne peut pas fixer ce lien. Étant donné que les mathématiques sont un archétype de règles selon Wittgenstein, la perspective de Kripke selon laquelle la communauté de mathématiciens fixe arbitrairement la manière de se conformer à une règle mathématique par une interprétation doit définitivement être écartée, selon nous.

En vertu de cela, il n'est pas possible pour la communauté de rejeter une preuve mathématique bien formée. Il faut donc adopter une autre ligne interprétative de Wittgenstein et, selon Baker et Hacker (2009, 354), on doit accepter que la décision de la communauté en mathématiques ne soit pas de reconnaître ou non la vérité d'une preuve. Certes, nous ne sommes pas « obligés » selon Wittgenstein de reconnaître une preuve mathématique bien formée, mais, puisque chaque preuve constitue partiellement ce que l'on appelle « faire des mathématiques » ou « raisonner », la personne qui refuse de le faire « (...) nous a déjà faussé compagnie avant même que rien ne soit dit. » (*RFM* 60, t. libre).

Ceci étant dit, la question qui reste à éclaircir est de savoir où se situe cette décision de la communauté de mathématiciens. Selon ces auteurs, elle porte plutôt sur la question qui est de savoir si une nouvelle proposition mathématique doit être intégrée au réseau mathématique à l'issue de sa preuve (*RFM* 61f). Autrement dit, le fait de savoir si l'avènement d'une preuve mathématique valide construit un nouveau chemin n'est pas l'objet de la décision. La décision de la communauté consiste plutôt à choisir de l'emprunter ou non (*RFM* 164, 238 et 301).

Ce qui doit nous convaincre d'emprunter ou non le chemin est la preuve elle-même et c'est en ce sens qu'elle est si importante dans la philosophie des mathématiques de cet auteur. Il s'agit d'une position défendue par Wittgenstein à de nombreuses reprises. Nous en verrons ici quelques exemples :

> The result of our being convinced, the *expression* of our being convinced, is that we *accept a rule* (*RFM* 162).

Cette pensée que l'on retrouve dans ses *RFM* est développée de manière plus systématique dans ses manuscrits posthumes, le *Nachlass*. En voici quelques passages très parlants :

> Hence it is not enough to say 'I'm willing to recognize this construction as the proof of this proposition', for one must add: 'this proposition, which I use thus-and so' (*MS* 122, 61r). [...]
>
> The proof does not persuade one *that* things are thus and- so – but rather, it persuades one *that one should extend one's concept*, change it thus-and-so, apply it in these and these new ways (*MS* 122, 59r- 61r).

Ce qui ressort de ces textes est que, pour Wittgenstein, la preuve doit agir sur notre perspective. Elle situe une proposition mathématique dans un contexte plus large et doit nous permettre de mieux cerner les usages pratiques que l'on pourrait faire de celle-ci[6]. À partir de la preuve, la décision d'intégrer ou non une nouvelle technique mathématique à nos pratiques dépend selon lui de certains facteurs que nous détaillerons ici sommairement.

Une première considération pratique qu'il envisage est liée au monde empirique tel qu'il est constitué. En ce sens, le fait que nous utilisions certaines techniques mathématiques plutôt que d'autres peut nous apprendre quelques éléments très

---

[6] Nous approfondirons davantage cette notion dans la section 1.5.

généraux sur le monde qui nous entoure. Wittgenstein considère que certains éléments comme les unités de mesure ne sont pas tout à fait arbitraires et que l'on aurait bien du mal à se reconnaître si l'on mesurait la taille de nos maisons en microns, plutôt qu'en mètres (*MS* 166, 12ff). Dans le même ordre d'idées, il tente de nous convaincre à plusieurs reprises que nos systèmes mathématiques seraient inutilisables si certaines conditions empiriques n'étaient pas remplies. Ainsi, Wittgenstein estime que si les objets solides avaient tendance à disparaître comme des bulles de savon, de telle manière que nous serions incapables de les compter, 2+2=4 deviendrait inutilisable en pratique (*RFM* 51-52). La même chose se produirait si nos capacités mnémoniques étaient beaucoup moins étendues et que nous nous trompions constamment en calculant (*RFM* 200). Nous avons déjà abordé dans la section 2 l'importance d'un consensus en mathématiques. Le fait que nous calculions tous *grosso modo* de la même manière est une condition essentielle à l'usage de cette technique dans nos vies. En ce sens, si notre mémoire nous faisait défaut au point de nous mener à nous tromper constamment, cela briserait le consensus au cœur de nos techniques de calcul et son absence mettrait donc fin à cette institution au sens où nous la concevons (*RFM* 193).

Un deuxième élément pratique qui influence l'avènement de nos systèmes mathématiques est lié à nos besoins pratiques (*RFM* 99). Cette considération est fortement liée à la première, mais ce que Wittgenstein veut faire ressortir ici est que certains intérêts contingents liés à des sociétés données mèneront à l'utilisation de certaines techniques plutôt qu'à d'autres. À ce sujet, Baker et Hacker (2009, 344-345) indiquent à titre d'exemple que les nombres négatifs ont été inventés par des mathématiciens chinois et indiens comme un système de calcul des dettes. De la même manière, Wittgenstein donne l'exemple d'une tribu dans un contexte isolé qui aurait un système mathématique n'utilisant que les nombres de 1 jusqu'à 5 parce que leur usage quotidien n'en nécessitait pas davantage (*LFM* 243).

Une troisième considération qui entre en jeu dans la construction de nouvelles propositions mathématiques est de nature théorique. En effet, Baker et Hacker (2009, 344) notent que des éléments d'importance théorique comme l'avènement de nouvelles définitions ne font pas que faciliter le processus de lecture d'une proposition mathématique. Elles jouent aussi un rôle crucial dans la possibilité de créer de nouveaux théorèmes mathématiques qui, eux, peuvent avoir des incidences pratiques considérables. Ainsi, si l'on réussit à produire une abréviation d'une opération de milliers de signes par l'usage d'une définition, cela nous permet parfois de produire des nouvelles preuves mathématiques (*RFM* 144)[7].

Cependant, Wittgenstein n'entretient pas une conception pragmatique quant à la vérité des propositions mathématiques. Ainsi, questionné à savoir s'il faisait une adéquation en mathématiques entre ce qui est vrai et ce qui est utile il répondit la chose suivante :

> « Then do you want to say that 'being true' means: being usable (or useful)? » -- No, not that; but that it can't be said of the series of natural numbers – any more than of our language – that it is true, but: that it is usable, and above all, *it is used.* (RFM 37-38).

Il surenchérit même un peu plus loin dans ses *RFM* en indiquant que, même si les considérations empiriques étaient différentes et que nous n'étions pas capable de faire usage de propositions comme 2+2=4, cela ne les rendrait pas faux, mais seulement inutilisables. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la remarque suivante :

> Is the solution simply that the arithmetical proposition would not be *false* but useless, if confusion supervened?

[7] Nous reviendrons à cette notion lorsque nous traiterons de l'exigence que la preuve ait un caractère synoptique à la section 1.5.

> Just as the proposition that this room is 16 foot long would not become false, if rulers and measuring fell into confusion. Its sense, not its truth is founded on the regular working of measurements. (*RFM* 200)

Pourquoi refuse-t-il de considérer que les propositions mathématiques pourraient être rendues fausses par le contexte empirique? Un premier élément à avoir en tête est que, comme on l'a déjà indiqué, les propositions mathématiques ne sont pas pour lui des propositions portant sur le monde extérieur, mais plutôt des normes de descriptions qui constituent partiellement l'échafaudage de notre raisonnement.

> Grammar is not accountable to any reality. It is grammar that determines meaning (constitute it) and so they themselves are not answerable to any meaning and to that extent are arbitrary (PG 184).

Avec ces considérations en tête, il est un peu plus aisé de comprendre pourquoi Wittgenstein refuse de considérer que des modifications empiriques puissent rendre des propositions grammaticales fausses. D'une certaine manière, ce serait comme dire d'une règle des échecs comme le fait que le fou se déplace en diagonale puisse être fausse en vertu de considérations empiriques. Certes, on pourrait imaginer de nombreux contextes dans lesquels les humains pourraient cesser de jouer aux échecs complètement, mais cela n'aurait pas d'impact sur le caractère vrai ou faux de cette règle. Il s'agit d'une règle constitutive de ce qu'on appelle « jouer aux échecs » et s'en écarter signifie tout simplement qu'on ne joue plus au même jeu. Les règles mathématiques et logiques sont similaires en un sens. Étant donné que celles-ci sont constitutives de ce que l'on nomme « calculer » et « raisonner », refuser de s'y plier implique tout simplement que l'on ne participe plus à ces activités au sens où l'entend une communauté donnée (*RFM* 80).

Il nous semble qu'à cette étape de notre démonstration, il y a deux éléments principaux que l'on doit retenir avant d'aller plus loin. Premièrement, la décision de la communauté en mathématiques porte sur le choix d'intégrer une nouvelle règle mathématique à nos pratiques, à l'issue de sa preuve. Ce choix peut porter sur plusieurs considérations d'ordre pratique ou répondre à des besoins théoriques particuliers. Ce choix ne peut pas porter sur la décision d'accepter ou non une démonstration mathématique valide puisque, comme on l'a établi par rapport à la notion de suivre une règle, il s'agit d'un rapport interne et celui qui voudrait s'en écarter ne joue tout simplement pas au même jeu que nous lorsqu'il parle de « mathématiques ». En deuxième lieu, étant donné que c'est la preuve qui doit nous convaincre d'intégrer ou non le nouveau chemin mathématique à nos pratiques, cela lui confère un rôle privilégié dans la conception mathématique de Wittgenstein. C'est en ce sens que nous nous intéresserons plus particulièrement au rôle de la preuve dans la prochaine section.

Avant de débuter les sections 1.5 et 1.6, il est important de répéter que toutes les considérations vues dans les sections précédentes doivent être comprises comme aidant à mettre en lumière les deux considérations principales par rapport auxquelles les problèmes concrets du chapitre 2 se poseront. Il s'agit à 1.5 de la conception de la preuve mathématique qu'il entretient et, à 1.6, de sa caractérisation des conjectures mathématiques.

1.5 Le rôle de la preuve pour les propositions mathématiques

En ayant en tête la distinction essentielle entre les propositions empiriques et grammaticales, nous tenterons maintenant de nous pencher plus attentivement sur la structure des propositions mathématiques selon Wittgenstein. Comme on l'a déjà mentionné, pour ce qui est des propositions empiriques, celui-ci adopte jusqu'à la fin de sa vie une théorie sémantique selon laquelle une proposition de ce type est rendue vraie par des faits extérieurs auxquels elle correspond (*LFM* 247). Cependant, Wittgenstein est parfaitement clair sur un point : il n'y a aucun fait extérieur qui corresponde aux éléments mathématiques comme les nombres. Cela est manifeste dans plusieurs passages des *RFM*, dont le suivant : « I am trying to say something like this: even if the proved mathematical proposition seems to point to a reality outside itself, still it is only the expression of acceptance of a new measure [of reality] » (*RFM* 162).

Il y a donc selon lui un abime entre la théorie sémantique que l'on doit appliquer aux propositions empiriques et les propositions mathématiques. Suivant Rodych (2013), nous estimons que le fait qu'il n'y ait pas d'éléments extérieurs correspondants aux mathématiques mène Wittgenstein à concevoir la preuve comme l'élément central devant nous mener à comprendre le sens d'une proposition mathématique[8].

Selon Rodych (2013, 86-89), à partir de sa période intermédiaire, Wittgenstein entretient une conception des mathématiques alliant un vérificationnisme faible à une forme de structuralisme. La façon dont il propose de modéliser cette conception est la suivante :

> (A1): Mathematical proposition: A csign is a mathematical proposition *of* calculus Γ *iff* it is algorithmically decidable *in* calculus Γ and we know this to be the case.
> (B1): Having mathematical sense: Only primitive propositions (e.g., axioms) and proved propositions of calculus Γ *have* mathematical sense in calculus Γ.

---

[8] Nous aborderons plus spécifiquement des conséquences sémantiques de cette position dès la section 2.1.

> (C1): The sense of a mathematical proposition of calculus Γ *is* its syntactical position in the syntactical structure that is calculus Γ (Rodych 2013, 86).

Un premier élément sur lequel Rodych a raison d'insister est sur le caractère prédominant de la preuve dans la philosophie des mathématiques de Wittgenstein et cela résulte en ce qu'il appelle un vérificationnisme faible. Par *vérificationnisme faible*, on veut dire que, pour Wittgenstein, on ne serait en présence d'une proposition mathématique valide qu'à partir du moment où celui-ci est décidable de manière algorithmique à l'intérieur d'un système de calcul donné. En vertu de cette conviction, il ne manquait pas de s'opposer à l'idée d'invoquer le tiers exclu dans les contextes mathématiques indéterminés. Notamment, il s'opposait cela dans des contextes où on ne dispose pas d'une procédure de preuve. On a déjà indiqué qu'il s'exprimait en ce sens lorsqu'il était question de déterminer si un ensemble particulier apparaissait ou non dans l'expansion décimale de π (*RFM* 266). Ainsi, la question de savoir si, oui ou non '7777777777' apparaît dans cette expansion ne constituerait pas pour lui une réelle question mathématique puisqu'il nous manque une procédure de décision systématique pour la trancher (*RFM* 266). C'est en ce sens qu'il soutient la thèse suivante :

> The question – I want to say, changes its status when it becomes decidable. For a connexion is made then, which formerly was not there (*RFM* 266-267).

Cela n'est qu'un exemple parmi d'autres où Wittgenstein place l'existence d'une méthode de preuve comme élément de premier plan pour déterminer si l'on fait face à une question mathématique bien posée ou non. Cette opposition à considérer que l'on est en présence d'une proposition mathématique à défaut d'avoir une méthode de preuve s'explique par le rôle particulier qu'il attribue à cette dernière :

> The proof convinces us of something – though what interests us is, not the mental state of conviction, but the applications attaching to this conviction. [...]

> Let us remember that in mathematics we are convinced of grammatical propositions; so the expression, the result, of our being convinced is that *we accept a rule*. [...]
> The proposition proved by means of the proof serves as a rule – and so as a paradigm. For we *go by* the rule. (RFM 161-163)

Ainsi, la preuve agit selon lui comme l'élément qui nous convainc d'accepter la proposition mathématique comme une nouvelle règle grammaticale. Comme on l'a indiqué précédemment, l'objectif des mathématiques est pour Wittgenstein de se doter de nouvelles règles grammaticales qui nous permettent d'accomplir certaines tâches pratiques. Une fois que l'on accepte la preuve d'une proposition mathématique, celle-ci devient pour ainsi dire un instrument « taken up into the language once for all – and [its] proof shews the place where (it) stands. » (*RFM* 164) Il faut noter ici que lorsque Wittgenstein parle de la preuve comme l'élément nous permettant d'intégrer une proposition mathématique en tant qu'instrument, il insiste aussi sur le fait que la preuve nous indique la *place* qu'occupe cet instrument dans un système mathématique donné.

Cela n'est pas anodin et c'est à cela que réfèrent les éléments B1 et C1 soulevés par Rodych et qui touchent à l'aspect « structuraliste » de la conception des propositions mathématiques de Wittgenstein. Pour celui-ci, le sens d'une proposition mathématique est relative à un système mathématique donné et c'est la preuve qui nous indique sa position dans ce système. Par exemple, le théorème de Pythagore n'a de sens que dans un système géométrique euclidien. Le rôle de la preuve consiste donc pour Wittgenstein à nous convaincre de la place qu'occupe une proposition mathématique dans un système mathématique spécifique.

En résumé, nous ne sommes en présence d'une proposition mathématique qu'à partir du moment où l'on est convaincu par la preuve et que cette preuve nous permet de l'intégrer dans un système mathématique donné.

Un dernier élément dont il convient de discuter par rapport à la conception de la preuve de Wittgenstein est son insistance sur le fait que celle-ci doive nous *convaincre* d'adopter une certaine mesure. Cette notion est très présente dans les écrits tardifs de Wittgenstein. C'est parce que son rôle est de nous convaincre que Wittgenstein attache une telle importance au caractère synoptique (*Übersichtlichkeit)*[9] de la preuve. Dès la troisième partie des *RFM*, il énonce d'ailleurs ce qu'il entend par ce caractère synoptique :

> 'A mathematical proof must be perspicuous.' Only a structure whose reproduction is an easy task is called a "proof". It must be possible to decide with certainty whether we really have the same proof twice over, or not. The proof must be a configuration whose exact reproduction can be certain. [...]
>
> I want to say: if you have a proof-pattern that cannot be taken in, and by a change in notation you turn it into one that can, then you are producing a proof, where there was none before. (*RFM* 143)

Ce qui ressort vraiment de ces passages, c'est que Wittgenstein adopte une certaine conception de ce qu'est une preuve qui est selon nous liée au rôle des propositions mathématiques pour lui. L'emphase qu'il met sur le fait qu'elle doive pouvoir être « saisie » (*taken in*) par le mathématicien est très importante ici. Selon Marion, une manière de caractériser la conception de Wittgenstein serait de ne considérer une preuve comme étant telle que dans la mesure où « [...] one is able to see that the steps are collectively sufficient to prove the theorem » (Marion 2011, 146-147). Ainsi, en l'absence de cette possibilité de retracer les différentes étapes d'une preuve, elle ne répondrait pas à ce critère. Un élément important à avoir en tête selon nous à ce sujet est que cette notion se rattache au fait que les mathématiques constituent des règles qui

---

[9] Nous traduisons ici *Übersichtlichkeit* par « caractère synoptique ». Cette notion est traduite en anglais par le terme *surveyability*.

doivent nous mener à adopter une conduite pratique particulière. Or, comme nous l'avons indiqué à la section 1.3, il est impossible pour Wittgenstein de suivre une règle opaque ou cachée (Baker & Hacker 2009, 52). Nous croyons que c'est parce que la preuve joue ce rôle de « guide » dans l'acceptation d'une nouvelle manière de concevoir notre réalité que ce caractère synoptique de la preuve est si important pour Wittgenstein.

L'exigence du caractère synoptique de la preuve chez Wittgenstein a suscité de nombreux débats chez les commentateurs. La position que nous soutiendrons ici est celle défendue par Bassler (2006)[10]. Une question essentielle à trancher est de savoir si cette notion de Wittgenstein constitue une exigence localisée ou globale (Bassler 2006 et Marion 2011). Pour ce faire, il est essentiel de comprendre les différences entre ces deux conceptions de l'exigence :

> [...] Local surveyability requires the surveying of each of the individual steps in a proof in some order, while global surveyability requires the surveying of the entire proof as a comprehensible whole. (Bassler 2006, 100)

Ainsi, pour que nous ayons une preuve localement synoptique, il suffirait d'être en mesure de saisir (*take in*) chacune des étapes qui en sont constitutives. L'idée ici est que l'exigence synoptique peut être remplie dans la mesure où l'on peut saisir chaque section de la preuve, prise individuellement. Cela implique « seulement » de comprendre chacune des étapes de la preuve, mais pas d'être en mesure de comprendre toutes les inférences logiques d'une étape à l'autre devant nous forcer à admettre la conclusion du théorème. Au contraire, une conception globale du caractère synoptique

[10] Nous nuancerons toutefois notre support à cette position à la section 2.4.

nécessite d'obtenir une vue d'ensemble de la preuve et d'être capable de comprendre l'enchaînement de chacune des étapes.

Cependant, un élément qui complexifie notre analyse est que, selon Bassler (2006, 102), il y a deux manières de concevoir cette exigence globale. Il y en aurait une, dite minimaliste, qui nous demande simplement une compréhension de la manière dont les différentes étapes de la preuve s'articulent de manière logique jusqu'à sa conclusion. La seconde, maximaliste, est à l'effet que cette conception globale du caractère synoptique incorpore toutes les exigences de la version localisée en plus d'ajouter tous les processus d'inférence et l'ordre logique qui conduit à la conclusion de la preuve.

L'analyse de ces conceptions divergentes est particulièrement intéressante dans la mesure où certaines preuves modernes reposent sur un nombre impressionnant d'autres théorèmes et conjectures. C'est la notion de lemmes (*lemma*) dans une preuve qui est ici en jeu. Les lemmes sont les théorèmes déjà prouvés dans l'élaboration d'un nouveau théorème. Ceux-ci agissent comme des raccourcis sans lesquels la preuve serait d'une longueur beaucoup plus importante encore.

Ainsi, pour le dernier théorème de Fermat (DTF), on mobilise des techniques mathématiques diversifiées et complexes comme la théorie des groupes de Galois, le théorème de Kolyvagin et Flach et la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil (Singh 1998). En se rapportant aux deux manières de concevoir le caractère synoptique de la preuve de manière globale, les exigences liées au fait de comprendre le DTF pourraient être conçues de deux manières. D'une part, si l'on adopte une conception minimaliste de l'exigence synoptique globale, on peut considérer que comprendre le DTF peut passer par l'utilisation des raccourcis (les lemmes). Ainsi, on accepterait les conséquences d'un théorème comme celui de Kolyvagin et Flach sans devoir saisir à nouveau toutes les étapes de sa preuve spécifique. Ce théorème jouerait ici le rôle d'un outil et comprendre le DTF impliquerait, par exemple, d'être capable de saisir tous les éléments de la preuve de Kolyvagin et Flach qui sont mobilisées par Wiles dans son processus de preuve du DTF. Au contraire, si l'on adopte l'approche maximaliste de l'exigence globale, on ne pourrait considérer comprendre réellement le DTF que si l'on était capable de saisir toutes les preuves des théorèmes déjà existants mobilisées par celui-ci, de toutes les nouvelles démonstrations par rapport à la connexion de ces théorèmes entre eux, des nouveaux théorèmes élaborés dans le cadre de la démonstration et du cheminement logique menant en conclusion au DTF.

Selon Bassler (2006, 102-104), même l'acceptation de la caractérisation minimale de l'exigence globale est considérée parfois comme trop contraignante dans le contexte contemporain de la philosophie des mathématiques. *A fortiori*, l'acceptation de sa conception maximale est évidemment très loin de faire consensus. Un élément qu'il note cependant est que la conception synoptique globale semble agir comme une espèce d'idéal régulateur pour la communauté mathématique. Ainsi, on constate qu'un effort constant de recherche est fait en mathématiques pour rendre les preuves plus simples et ultimement plus faciles à comprendre dans leur ensemble. L'idée qui ressort ici est que même si la communauté mathématique refuse en général de faire de la conception globale l'exigence minimale en matière de preuves, elle constitue néanmoins un but mathématique ayant une grande importance. Nous verrons à titre d'exemple les preuves subséquentes du Théorème des quatre couleurs (T4C) à la section 2.2. Un problème que note cependant Bassler (2006, 104) est que cet idéal semble incorporer des éléments qu'on n'arrive pas toujours à rendre compatibles.

Pour en revenir plus directement au cas de Wittgenstein, il semble de prime abord que celui-ci concevait parfois les preuves d'une longueur abusive comme ne répondant pas à l'exigence synoptique. C'est en ce sens qu'ont été interprétés ses commentaires sur les preuves issues des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead. En effet, dans ce système, l'équivalent d'une preuve élémentaire comme « 1 + 1 = 2 » n'apparaît qu'après plusieurs centaines de pages. La question qui se pose avec une preuve aussi longue est à savoir si elle remplit encore ce rôle de modèle qui doit nous convaincre d'accepter une nouvelle règle. Autrement dit, sommes-nous toujours dans une conception où : « A proof leads me to say : this *must* be like this. » (*RFM* 165)? Wittgenstein doute qu'il soit possible pour un tel système de remplir ce rôle pour des calculs plus longs comme « 3 000 000 + 4 000 000 = 7 000 000 » (*LFM* 265).

Cependant, selon Marion (2011, 141-142), le problème que soulève Wittgenstein n'est pas exactement celui du caractère synoptique d'une preuve longue. Il s'agit plutôt d'une opposition à l'diée de Russell, qui est de fonder la validité d'une preuve algébrique standard comme celle de « 1 + 1 = 2 » sur celle, beaucoup plus longue, d'un système comme celui des *Principia*. Or, la position de Wittgenstein est de dire que ce n'est justement que parce qu'on connait déjà la preuve standard qu'on est capable de considérer que celle de Russell est valide. Autrement dit, Russell a l'impression que sa longue preuve fonde la plus petite, alors que Wittgenstein lui réplique plutôt que c'est le contraire. Ce rapport entre les preuves courtes et les preuves longues est d'ailleurs clairement exprimé dans le passage suivant :

> Long proofs at first always go along with the short ones and as it were tutor them. But in the end they can no longer follow the short ones and these shew their independence.
> The consideration of *long* unsurveyable logical proofs is only a means of shewing how this technique--which is based on the geometry of proving--may collapse, and new techniques become necessary. (*RFM* 176)

En vertu de ces considérations, il nous semble que l'argument à l'encontre des *Principia* de Russell ne soit pas particulièrement lié à la question du caractère synoptique d'une preuve. Cependant, toujours selon Marion (2011), il est possible de trouver dans les écrits de Wittgenstein d'autres passages qui l'inscrivent clairement dans une conception globale de l'exigence synoptique. Voyons le passage suivant :

(11) A proof is 'surveyable' when one is able to check the steps of the proof one by one, from 'global surveyability'.

> (12) A proof is 'surveyable' when one is able to see that the steps are collectively sufficient to prove the theorem. [...]
> There are many reasons why Wittgenstein would have insisted on this last, 'global' surveyability. [...] Perhaps more importantly, 'global' surveyability is a necessary condition for the possibility of a proof being able to 'guide' us. (Marion 2011, 146-147)

Ainsi, une raison pour laquelle Wittgenstein adhérerait à une conception globale de l'exigence synoptique de la preuve serait tout simplement qu'il s'agit d'une nécessité pour que la preuve nous guide et nous mène à accepter une nouvelle règle. Ceci étant dit, la question de savoir s'il s'agit d'une conception minimale ou maximale de l'exigence synoptique n'est pas tranchée ici et nous tenterons d'y répondre lorsque nous serons face à une preuve ne répondant potentiellement pas à l'exigence synoptique à la section 2.2.

1.6 Le sens des conjectures mathématiques

Étant donné la place centrale qu'occupe la preuve dans la conception des mathématiques de Wittgenstein, il n'est pas étonnant qu'il éprouve une certaine méfiance à l'égard des conjectures mathématiques. Ainsi, un élément central de sa philosophie des mathématiques vise à combattre certaines confusions qu'il perçoit dans le langage que l'on utilise pour parler de celles-ci. En effet, si l'on accepte son idée selon laquelle le sens des propositions mathématiques dépend de sa preuve, il semble pour Wittgenstein que l'on ne comprenne pas totalement les conjectures mathématiques.

Avant d'aller plus loin dans le traitement que Wittgenstein réserve à celles-ci, il est nécessaire de donner une définition sommaire de ce qu'on entend par 'conjecture mathématique'. On appelle ainsi une proposition mathématique pour laquelle on ne dispose pas d'une preuve formelle, mais dont nous pensons qu'elle vraie. Généralement, les conjectures mathématiques naissent lorsqu'une régularité est observée empiriquement. Par exemple, on énumère les nombres pairs plus grands que 2 et l'on constate qu'ils sont tous la somme de deux nombres premiers. La position que défend ici Wittgenstein est qu'il ne s'agit là que d'un stimulus, une forme d'intuition qui peut générer certaines recherches, mais cela ne garantit pas que l'on aborde cette intuition perçue d'une manière adéquate et susceptible de mener à la preuve d'une proposition mathématique.

Avant d'obtenir la preuve d'une proposition mathématique, il y a en effet une certaine part d'imprévisibilité qui est en cause. Cette affirmation prend tout son sens lorsque l'on étudie le cas de certaines conjectures mathématiques avant et après que leur preuve ait été donnée. On pourrait par exemple penser à la preuve d'impossibilité de la trisection de l'angle avec une règle et un compas qui intéressa particulièrement Wittgenstein. C'est un problème qui se posa dès l'antiquité et auquel les mathématiciens grecs pensaient pouvoir apporter une preuve géométrique. Or, la preuve qui en fut faite par Wantzel en 1837 est algébrique, et non géométrique comme on le pensait à l'antiquité. Les mathématiciens de l'antiquité cherchaient une preuve dans le domaine qui leur semblait le plus probable à la lumière des informations dont ils disposaient. Dans le cas de la trisection de l'angle, tout semblait indiquer pour eux que la preuve devait être géométrique (Baker & Haker, 303-304). Cela nous semble un exemple intéressant de la distance considérable qui peut exister entre la compréhension d'une conjecture mathématique avant et après que la preuve en ait été donnée[11].

---

[11] De plus, il ne s'agit pas d'un exemple isolé tel que l'illustre *Frascolla* (2014) avec l'exemple du DTF et sa preuve plus tardive fondée sur l'impossibilité de construire une courbe elliptique non modulaire.

D'ailleurs, l'intérêt de Wittgenstein pour le statut des conjectures mathématiques est un élément récurrent dans ses *Remarques sur les fondements des mathématiques*. Bien entendu, Wittgenstein est bien conscient que sa position peut déboucher sur des problèmes. En effet, si l'on ne comprend pas vraiment une conjecture avant d'en faire la preuve, comment est-il possible pour les mathématiciens de s'y attaquer et même souvent d'en faire la démonstration? C'est en ce sens qu'il pose la question suivante par rapport au dernier théorème de Fermat (DTF par la suite), qui était toujours une conjecture à l'époque de Wittgenstein : « Ought we to say that mathematicians don't understand Fermat's last theorem? » (*RFM* 16)

Il répond à sa propre interrogation un peu plus loin de la manière suivante :

> Now isn't it absurd to say that one doesn't understand the sense of Fermat's last theorem?--Well, one might reply: the mathematicians are not *completely* blank and helpless when they are confronted by this proposition. After all, they try certain methods of proving it; and, so far as they try methods, *so far* do they understand the proposition. — But is that correct? Don't they *understand* it just as completely as one can possibly understand it?
> Now let us assume that, quite contrary to mathematicians' expectations, its contrary were proved. So now it is shewn that it *cannot* be so at all. (*RFM* 314)

En substance, la question de Wittgenstein est celle-ci : qu'est-ce que cela peut bien vouloir dire de « croire d'une conjecture mathématique est vraie »? Il a d'ailleurs bien raison de soulever que cette croyance ne saurait être basée sur les conditions de vérité de la conjecture, puisqu'on ne les connait pas. Quelles sont donc les bases épistémiques à partir desquelles une personne croit qu'une conjecture mathématique est vraie? On a déjà indiqué qu'un aspect essentiel de cette intuition pourrait provenir d'un raisonnement inductif où l'on développe une série, comme celle de Goldbach et que l'on évalue à chaque nombre pair si celui-ci est bien la somme de deux nombres premiers. Ainsi, à l'heure actuelle, à l'aide d'un algorithme informatique, on est parvenu à vérifier que la conjecture de Goldbach se confirme jusqu'à (4×10^{18}) (Silva 2018). Cependant, cela ne nous rapproche pas d'un iota d'une preuve de celle-ci.

Un autre facteur qui pourrait nous mener à avoir une telle croyance face à une conjecture pourrait reposer selon Wittgenstein sur une similitude perçue entre celle-ci et un autre proposition mathématique dont on connait la preuve. Il estime que c'est le cas par rapport au DTF et c'est en ce sens qu'il poursuit le passage cité plus haut de la manière suivante :

> But, if I am to know what a proposition like Fermat's last theorem says, must I not know what the criterion is, for the proposition to be true? And I am of course acquainted with criteria for the truth of *similar* propositions, but not with any criterion for the truth of this proposition. (*RFM* 314-315)

On voit très bien le type de confusion contre lequel Wittgenstein souhaite ici nous mettre en garde et cela semble tout à fait raisonnable dans la mesure où, comme nous le verrons bientôt, tout l'intérêt suscité par le problème de Fermat était lié à une telle similitude.

Si cet auteur rattache la notion de « question mathématique » à la connaissance d'une méthode applicable, c'est qu'il vise à nous éloigner de certaines confusions qui peuvent nous induire en erreur à propos de notre pratique des mathématiques. En ce sens, le fait qu'il ait utilisé le DTF est d'ailleurs très intéressant pour des raisons qui ne deviendront cependant évidentes qu'après la mort de Wittgenstein. Avant d'aller plus loin, il convient cependant d'exposer sommairement le DTF. Celui-ci peut être exprimé de la manière suivante :

(1) Pour tout entier positif x, y, z et n plus grand que 2, il n'existe pas de solution à l'équation $x^n + y^n = z^n$.

Si cette conjecture a suscité autant l'intérêt des mathématiciens depuis des siècles, c'est très probablement parce qu'elle est formulée en arithmétique élémentaire, d'où l'idée erronée selon laquelle sa preuve devrait pouvoir être faite dans le même type d'arithmétique. De plus, sa ressemblance de structure avec le théorème de Pythagore n'a certainement pas été étranger à cet intérêt. Rappelons ce théorème énonce que, pour tout triangle rectangle, il est possible de trouver la longueur de son hypoténuse en utilisant la formule suivante : $x^2 + y^2 = z^2$.

Par ailleurs, l'engouement généré par le DTF est aussi dû au fait que Fermat avait laissé un commentaire espiègle en marge de cette formule où il affirmait avoir fait la preuve de cette conjecture, mais où il disait ne pas disposer de suffisamment d'espace dans la marge de son cahier pour l'écrire (Singh 1997). Ainsi, des mathématiciens de tous les niveaux tentèrent pendant des siècles d'en faire la preuve en s'appuyant sur cette ressemblance apparente, mais ils n'obtinrent que des résultats partiels[12].

La preuve qui devait en être faite 358 ans plus tard fut constituée de trois chapitres totalisant des centaines de pages et s'appuya sur un nombre impressionnant d'autres théorèmes mathématiques. Pour en résumer les grandes étapes, la preuve du DTF repose d'abord sur la preuve d'impossibilité de construction de courbes elliptiques non modulaires (Frascolla 2014). Cette preuve appelée de nos jours « théorème de modularité » fut construite par Andrew Wiles à partir de la conjecture Shimura-Taniyama-Weil. Cependant, le rapprochement entre cette conjecture et la preuve du

[12] Il ne faudrait oublier cependant que certains mathématiciens comme Ernst Eduard Kummer parvinrent à faire des preuves partielles du théorème et menèrent à des développements sur la notion d'idéal en algèbre. Voir à ce sujet Riehl (2005, 1)

DTF nous vient de Gerhard Frey. Celui-ci démontra dès 1984 qu'il était possible de réorganiser l'équation de Fermat de manière à en faire une équation d'ellipse :

(2) $y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N$.

Comme le note cependant Singh (1997), cela ne ressemble pas à une équation d'ellipse et il suscita donc une bonne dose de scepticisme lors de sa présentation. En effet, les ellipses ont d'habitude la forme suivante :

(3) $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Cependant, si l'on opère les équivalences suivantes : $a = A^N - B^N$, $b = 0$ et $c = -A^N B^N$, la ressemblance devient nettement plus frappante. Toujours est-il que l'hypothèse de Frey était que le théorème de Fermat pouvait être conçu comme un cas particulier d'une ellipse non modulaire. En effet, le caractère étrange de la formule assurait selon lui qu'il ne s'agissait pas d'une ellipse modulaire. Ainsi, la personne qui apporterait la preuve de la conjecture Shimura-Taniyama-Weil selon laquelle toute ellipse correspond nécessairement à une forme modulaire pourrait étendre sa preuve de manière à démontrer que le DTF était lui aussi valide (Singh 1997).

Le problème était ici de taille, puisqu'il existe une infinité d'ellipses et de formes modulaires. La manière dont Wiles décida de procéder fut par une induction mathématique. Il s'agit d'un processus en deux étapes. Celui-ci implique dans un premier temps de prouver qu'il y a correspondance pour un cas d'ellipse et de forme modulaire. La deuxième étape est de montrer que ce processus peut être étendu à tous les autres cas de manière à ce que tous les successeurs du cas prouvé soient eux aussi certifiés comme répondant au même processus que pour le cas en question (Singh 1997).

Il ne s'agit là que d'une des étapes cruciales de la preuve qu'allait élaborer Wiles, puisqu'elle allait finalement exploiter de nombreux autres éléments mathématiques, en apparence disparates. On peut penser à la théorie des groupes de Galois et la méthode de Kolyvagin et Flach qui devraient par la suite lui causer énormément de souci (Singh 1997). Cependant, pour ce qui nous intéresse, l'important à garder en tête est que la preuve du théorème de Fermat était assurément très éloignée de la preuve relativement simple du théorème de Pythagore. Alors que l'on cherchait une preuve arithmétique au DTF, la solution était liée à une preuve de géométrie algébrique infiniment plus complexe.

Cet exemple tend à montrer que ceux qui tentaient en vain de faire la preuve du DTF ne comprenaient pas réellement le « problème » auquel ils faisaient face et se laissaient berner par l'apparence de similarité avec un autre problème connu. Wittgenstein conçoit d'ailleurs une analogie assez convaincante à ce sujet :

> If you say to someone who has never tried 'Try to move your ears', he will first move some part of his body near his ears that he has moved before, and either his ears will move at once or they won't. Now you could say of this process: He is trying to move his ears. But if that can be called trying, it's trying in a completely different sense from trying to move our ears (or our hands) in a case where we already 'know how to do it' but someone is holding them, so that we can move them only with difficulty or not at all. It is the first sense of trying that corresponds to trying 'to solve a mathematical problem' when there is no method for its solution. (Säätelä 2011, 169)

Son objectif ici est de faire une distinction entre les problèmes mathématiques réels pour lesquels on tente vraiment par une procédure systématique de les résoudre, et ceux qui ne donnent lieu qu'à des tâtonnements aveugles (Säätelä 2011, 169). À ce sujet, il est intéressant de noter que sa distinction entre croire tenter de résoudre un problème mathématique et une tentative réelle n'est pas sans rappeler sa distinction entre « suivre une règle » et « croire suivre une règle ». Les deux exemples sont liés au caractère externaliste de l'épistémologie de Wittgenstein. En effet, comme dans le cas de suivre une règle, tenter de résoudre un problème mathématique doit être rendu manifeste par une certaine pratique. Cela transparaît clairement dans le passage suivant :

> And if understanding is a psychical process – why should it interest us so much? Unless experience connects it with the capacity to make use of the proposition. « Shew me how… » means: shew me the connexions in which you are using this proposition (this machine-part). (*RFM* 315)

La théorie de Wittgenstein ici est qu'une condition nécessaire pour que cette pratique puisse émerger est de connaître une méthode de preuve applicable.

Ceci étant dit, il est impératif de préciser ici que Wittgenstein ne s'oppose pas aux tentatives de prouver des conjectures. Toujours à propos du DTF, il tient d'ailleurs les propos suivants :

> It is just as with ear-waggling. A mathematician is of course guided by associations, by certain analogies with the previous system. After all, I do not claim that it is wrong or illegitimate if anyone concerns himself with Fermat's Last Theorem. Not at all! If e.g. I have a method for looking integers [sic] that satisfy the equation $x^2 + y^2 = z^2$, then the formula $x^n + y^n = z^n$ may stimulate me. I may let a formula stimulate me. Thus I shall say, here there is a *stimulus* – but not a *question*. Mathematical 'problems' are always such stimuli. (*WVC* 144)

Ainsi, selon lui, le rôle des conjectures mathématiques est de stimuler un questionnement, mais elles ne constituent pas des questions. La raison en est bien simple : Wittgenstein estime qu'il manque à ces « questions » une méthode de décision pour les résoudre (Säätelä 2011, 166). C'est en ce sens qu'il défend la position suivante :

> Only where there's a method of solution is there a problem (of course that doesn't mean 'Only when the solution has been found is there a problem').
> That is, where we can only expect the solution from some sort of revelation, there isn't even a problem. A revelation doesn't correspond to any question. It would be like wanting to ask about experiences belonging to a sense organ we don't yet possess. Our being given a new sense, I would call revelation. (*PR* 172)

Ceci étant dit, il reste à établir précisément quel est le rôle des conjectures mathématiques pour Wittgenstein. Comme on l'a noté précédemment, son but n'était pas de s'opposer aux tentatives de résolution des conjectures, mais bien d'éviter certaines confusions entre les problèmes délimités des mathématiques et ces autres problèmes « ouverts » pour lesquels il nous manque une procédure de décision. Ces considérations mènent Wittgenstein à se pencher plus précisément sur ce que ça peut bien signifier de dire que l'on « croit que la conjecture de Goldbach est vraie », par exemple. Pour Wittgenstein, cette croyance doit évidemment avoir des conséquences pratiques pour qu'elle soit d'un quelconque intérêt. Dès lors, on comprend mieux dans quel contexte il pose la question suivante :

> When Hardy says he believes Goldbach's theorem, I would ask him what his belief in this theorem led him to. What does he do? It may have led him to attempts to prove it, which shows that *some* meaning attaches to the theorem inasmuch as these activities would not have been caused by another theorem. (*AWL* 222; cf. *BT* 432)

On voit bien là que Wittgenstein reconnaît que les conjectures de ce type ont un certain sens pour lui, dans la mesure où elles stimulent certaines recherches. Cependant, la portée de cela est mitigée dans le passage suivant :

> Ask yourself, what uses does one make of the question? It does stand for a certain activity by the mathematician, of trying, of messing about. If the question did not stand for something, one would expect *any sort* of activity. The question has then that meaning—*as much meaning as that messing about has.* (*AWL* 121-122, nos italiques)

Ainsi, c'est la possibilité de mener une activité de recherche non systématique (de tâtonnement ou *messing about*) à propos des conjectures ouvertes qui leur donne un certain sens. Néanmoins, puisqu'on ne sait toujours pas si l'on doit les adopter en tant que règle avant d'en faire la preuve, elles n'ont pas de valeur de vérité. C'est pour cela qu'il trouve étrange l'idée de croire comme Hardy que la conjecture de Goldbach est vraie.

De manière encore plus fondamentale, un élément qui distingue les conjectures des propositions mathématiques prouvées aux yeux de Wittgenstein est le rôle pratique qu'elles sont susceptibles de jouer dans nos vies. C'est son insistance sur le fait que les mathématiques ont aussi « un habillement civil » (*Im Zivil*)[13] qui est ici en cause :

> I want to say: it is essential to mathematics that its signs are also employed *in mufti*.
> It is the use outside mathematics, and so the meaning of the signs, that makes the sign-game into mathematics. (*RFM* 257)

Ce fort attachement des mathématiques aux usages pratiques que l'on en fait, cette idée de mathématiques *Im Zivil,* pose selon lui problème pour ce qui est des conjectures. C'est d'ailleurs ce qu'il exprime dans le passage qui suit :

> But what can I do with it? Well, not what I can do with a constructive proof. *And in so far as what I can do with the proposition is the criterion of understanding it*, thus far it is not clear in advance whether and to what extent I understand it. (*RFM* 298-299, nos italiques)

Un élément qui ressort clairement de ceci est qu'étant donné qu'on ne comprend pas encore tout à fait le sens des conjectures mathématiques, cela limite grandement les possibilités de s'en servir comme règles pour mener à bien des activités pratiques. Étant

---

[13] Dans le texte original de Wittgenstein, on retrouve l'allemand « Im Zivil » qui est traduit par « In mufti » en anglais pour parler des mathématiques. Nous considérons que la meilleure manière française de rendre compte de cette notion en français serait de parler de mathématiques habillées en civil.

donné son attachement à l'aspect pratique des mathématiques, l'intérêt de celles-ci n'est donc pas si évident pour lui.

Cela permet d'ailleurs de comprendre son traitement parfois jugé cavalier des conséquences du théorème d'incomplétude de Gödel. Rappelons que, suivant ce théorème, dans tout système formel donné assez complexe pour exprimer l'arithmétique élémentaire, il est possible de formuler une proposition *G* qui est à la fois vraie et improuvable à l'intérieur de ce système et son contraire. Par rapport à ces propositions *G*, Wittgenstein ne manqua pas de dire la chose suivante :

> You say "..., so *P* is true and unprovable". That presumably means: "Therefore *P*". That is all right with me – but for what purpose do you write down this 'assertion'? (...) And how could you make the truth of the assertion plausible to me, since you can make no use of it except to do these bits of legerdemain? (*RFM* 122)

Ce traitement du théorème d'incomplétude de Gödel est intéressant puisqu'on peut voir que le thème de l'utilité pratique est encore ici à l'honneur et que, dans la mesure où les conjectures ne jouaient aucun rôle concret dans nos vies, il lui était toujours possible de les considérer comme de simples tours de passe-passe amusants. Nous verrons dans la section 2.3 que certaines conjectures comme celle de Riemann, ne pourraient potentiellement pas être balayées du revers de la main de la même manière par Wittgenstein.

CHAPITRE II

WITTGENSTEIN FACE À TROIS PROBLÈMES CONCEPTUELS

Dans ce deuxième chapitre, nous nous intéresserons plus spécifiquement à deux critiques pouvant être formulées à l'endroit de Wittgenstein. Tout au long de ce chapitre, il sera très important d'avoir en tête les conclusions des sections 1.5 et 1.6. Rappelons les deux aspects théoriques qui seront mis de l'avant prioritairement :

1. La preuve d'une proposition mathématique lui donne son sens selon Wittgenstein
2. Pour jouer ce rôle, elle doit pouvoir être saisie et cela implique qu'elle ait un caractère synoptique.

Dans la première section, nous tenterons d'évaluer si sa conception de la preuve particulière l'expose à la critique élaborée par Wright à l'encontre d'Horwich. Dans la deuxième section, nous nous intéresserons au défi que pose le théorème des quatre couleurs (T4C pour la suite) à son exigence synoptique de la preuve. Dans la troisième section, il s'agira d'évaluer l'impact des usages pratiques de l'hypothèse de Riemann (HR pour la suite) sur la philosophie des mathématiques de Wittgenstein. Enfin, dans la quatrième et dernière section, nous tenterons de voir s'il est possible d'opérer certaines modifications superficielles à la philosophie des mathématiques de Wittgenstein pour rendre compte du T4C et de l'HR.

2.1 Wittgenstein s'expose-t-il à la critique de Wright?

Selon Wittgenstein, puisque la preuve est l'élément nous permettant d'asserter une proposition mathématique, nous croyons à partir de cela qu'il fait converger les conditions de vérité de telles propositions avec leurs conditions d'assertabilité. C'est la position que défend Rodych (2006, 60) et c'est d'ailleurs aussi l'interprétation de Frascolla (2016), mais il ne s'agit cependant pas d'une position défendue par tous les interprètes de Wittgenstein. En effet, certains commentateurs comme Glock (2004) défendent au contraire que Wittgenstein aurait développé une conception déflationniste de la vérité des propositions mathématiques. Étant donné qu'il s'agit d'un élément important pour les questions qui nous intéressent, nous exposerons brièvement la position défendue par celui-ci ainsi que nos objections. Cependant, avant d'entrer dans les détails précis de cette opposition, il convient d'expliciter ce qu'on entend par déflationnisme en ce qui a trait à la vérité d'une proposition.

D'entrée de jeu, il faut noter que la notion de déflationnisme provient des travaux de Ramsey (1927)[14]. Le déflationnisme dans sa version la plus simple implique que la vérité n'est pas une propriété substantielle d'une proposition. Selon cette perspective, on ne rajoute rien à un énoncé propositionnel comme « La neige est blanche » en y ajoutant « est vrai ». Dans cette optique : 'La neige est blanche' est vrai = 'La neige est blanche'. Ainsi, selon les déflationnistes, c'est une erreur de croire qu'on peut dire

[14] Il y a un débat à savoir si le premier déflationniste serait Ramsey (1927) ou Frege. En effet, Dummet (1978,1) soutiendrait qu'il s'agirait de Frege. Néanmoins, dans le contexte de ce mémoire, la distinction n'est pas particulièrement importante.

quelque chose de plus du vrai que la chose suivante : « La neige est blanche » est vrai, si et seulement si la neige est blanche (Tarski 1944, 342-343)[15].

Il ne faut pas confondre cette conception de la vérité avec celle qui limite la vérité d'une proposition aux conditions dans lesquels on peut l'asserter. En effet, contrairement à la posture des conditions d'assertabilité qui fait coïncider la vérité et les conditions auxquelles on peut asserter une proposition donnée, le déflationnisme ne se prononce pas sur le sujet. C'est en ce sens qu'elle devint une option mitoyenne entre réalistes et antiréalistes à la fin du 20e siècle (Marion 2016, 340-341).

Ceci étant dit, il convient maintenant d'évaluer pourquoi Glock considère que Wittgenstein aurait adopté une forme de déflationnisme. Il prend appui sur quelques supports textuels dans les écrits de cet auteur, mais le passage le plus puissant est tiré de la section des *RFM* dédiée aux propositions gödeliennes. Ainsi, à *RFM* 117, il formule la réflexion suivante au sujet des propositions dans le système de Russell : « For what does a proposition's 'being true' mean? 'p' is true = p. (That is the answer). »

Glock (2004, 20-21) voit dans ce passage la preuve claire que Wittgenstein adopte une attitude déflationniste. Cela le commettrait selon lui à deux autres choses :

> (1) Le schéma décitationnel est l'explication complète de la signification du « est vrai ».
>
> (2) « 'P' est vrai » et 'P' ont le même sens.

---

[15] Nous utilisons le schéma d'équivalence élaboré par Tarski ici, mais le fait de savoir si Tarski est lui-même déflationniste est toujours sujet à débat (Stoljar & Damnjanovic 2014).

Cependant, selon nous, si l'on remet ce passage dans le contexte plus large des *RFM*, il semble évident que Wittgenstein parle du cas spécifique des propositions du système de Russell[16] et que ce n'est qu'un passage pour dire que 'vrai' et 'prouvé coïncident dans ce système-là. En effet, il se demande à la suite de sa remarque initiale : « under what circumstances is a proposition asserted in Russell's game? The answer is : at the end of one of his proofs, or as a 'fundamental law' (Pp.). » C'est en ce sens que Kienzler et Grève soutiennent la chose suivante :

> Wittgenstein is not advocating some kind of deflationary theory of truth. He merely points out that in a certain language-game, the circumstances under which we assert a sentence might be such that it does not make a difference whether we say ' *p* is true' or simply say ' *p* '. (Kienzler et Grève 2016, 95)

Pour ces auteurs, ce qui ressort du commentaire de Wittgenstein, c'est que les conditions d'assertabilité et le fait de dire d'une proposition qu'elle est vraie coïncideraient dans le système russellien. Il nous apparait vraisemblable que cette même chose serait applicable à l'ensemble des propositions mathématiques à l'intérieur d'un système. De plus, Kienzler et Grève notent un autre élément mineur qui semble s'opposer à l'idée selon laquelle Wittgenstein adhérerait ici à un schéma déflationniste classique. En effet, il n'y pas de guillemets autour du *P* dans aucune version manuscrite ou dactylographiée du passage repris dans les *RFM*. Le passage d'origine était donc le suivant : *For what does a proposition's 'being true' mean? p is true = p. (That is the answer).* Il nous semble que cela renforce la position de Frascolla, Kienzler et Grève selon laquelle il n'y a pas ici de thèse déflationniste chez Wittgenstein, mais seulement une indication que dans des systèmes formels, les

---

[16] Les *Principia Mathematica* de Russell qui sont l'objet des commentaires de Wittgenstein ne seront pas détaillés dans le présent mémoire. Tout ce qui peut être pertinent d'avoir en tête est qu'il s'agissait d'un système de notation visant à fonder les mathématiques sur des bases logiques. Voir à ce sujet Russell & Whitehead (1912).

conditions auxquelles on peut asserter une proposition mathématique donnée sont les mêmes que celles qui nous permettent de dire qu'elle est vraie.

À partir des éléments précédents, il nous semble nécessaire de soutenir que Wittgenstein entretient une conception des mathématiques où, pour une proposition mathématique *p* donnée, « *p* est vraie » coïncide avec « *p* est prouvée » ((*RFM* 117), (Rodych 2006, 60) et (Frascolla 2017, 215-216)17. Ainsi, la possibilité d'asserter *P* de manière justifie nécessite pour lui d'avoir la preuve de *p*. Selon cette lecture, il s'exposerait cependant à une critique formulée par Crispin Wright (1992, 22) pour qui il est impossible de faire coïncider assertion justifiée et vérité étant donné que l'extension des deux concepts diffère. Pour reprendre son argument, s'ils étaient équivalents, on devrait pouvoir faire la transition entre :

(1) « Ce n'est pas le cas que *p* » est vrai, si et seulement si ce n'est pas le cas que « *p* » est vrai.
(2) « Ce n'est pas le cas que *p* » peut être asserté de manière justifiée, si et seulement si ce n'est pas le cas que « *p* » peut être asserté de manière justifiée.

Le problème est ici assez flagrant. En effet, il semble exister certaines propositions pour lesquelles nous ne disposons tout simplement pas d'informations suffisantes pour asserter *p*, mais cela ne revient pas à dire que l'on soit en mesure d'asserter $\neg p$. On pourrait penser en ce sens à certaines propositions mathématiques comme la conjecture de Goldbach. Rappelons que cette conjecture postule que tout nombre pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers. Appliquer (2) semblerait profondément

[17] La position de Frascolla est ici encore plus radicale que celle de Rodych, puisqu'il estime que Wittgenstein ne considère tout simplement pas les propositions mathématiques comme étant susceptibles d'être vraies ou fausses. Pour lui, la prouvabilité remplacerait tout simplement le concept de vérité pour les propositions mathématiques (2014, 19). Nous ne nous pencherons cependant pas sur cette distinction dans le cadre de ce mémoire puisque les conséquences sont similaires en ce qui a trait à la preuve que nous souhaitons faire.

fautif dans le contexte de cette conjecture, puisque, s'il est vrai que l'on est incapable d'en faire la preuve à ce jour, on ne dispose cependant d'aucun contre-exemple.

Cependant, en gardant en tête la conception des propositions mathématiques de Wittgenstein, il serait possible selon Frascolla (2017, 219-220) d'accepter (2) en limitant la classe des propositions mathématiques à celles pour lesquelles on dispose d'une technique de décision. La position de Frascolla nous semble reposer sur une interprétation juste de la position de Wittgenstein et disposer d'un support textuel assez fourni. Nous avons déjà indiqué pourquoi Wittgenstein considère que la preuve est nécessaire pour que l'on soit en présence d'une proposition mathématique valide. Rappelons rapidement qu'il insiste sur l'idée que les mathématiques sont des règles et que le rôle de la preuve est de nous indiquer où s'insère la nouvelle proposition dans un système mathématique donnée. En l'absence de celle-ci, nous ne comprendrions pas tout à fait le sens d'une proposition mathématique.

Ainsi, la solution pour s'écarter de la critique de Wright serait tout simplement de limiter la classe des propositions mathématiques à celles pour lesquelles on dispose d'une preuve. Si la cohérence interne de la théorie wittgensteinienne des mathématiques est de ce fait rétablie selon nous, nous sommes d'avis que cela entraîne malheureusement un problème conceptuel encore plus dévastateur pour sa théorie. En effet, une conséquence évidente d'une telle position serait de nier totalement le statut de propositions mathématiques aux conjectures. Cela pose un problème que nous allons explorerons à la section 2.3 en nous intéressant à l'hypothèse de Riemann.

2.2 Wittgenstein et le théorème des quatre couleurs

À la fin de la section 1.5, nous avons expliqué pourquoi le caractère synoptique est essentiel à une preuve mathématique pour Wittgenstein. Nous avions indiqué à cet effet que, pour cet auteur, une preuve mathématique doit pouvoir être « saisie » par la personne qui l'analyse puisque son rôle est essentiellement de la convaincre de la validité d'un résultat ainsi que de toutes les étapes qui y mènent.

Cette considération est particulièrement intéressante dans la mesure où une nouvelle manière de construire des preuves depuis la fin du 20e siècle repose sur des calculs algorithmiques faits par des ordinateurs. Évidemment, à l'époque de Wittgenstein, une telle entreprise aurait été impossible et l'objectif de cette section est de voir si cette nouvelle tendance s'oppose à sa conception du caractère synoptique.

Le premier exemple d'une preuve produite de cette manière est celui du Théorème des quatre couleurs (T4C) pour lequel il existe d'ailleurs toujours une controverse à savoir s'il s'agit bel et bien d'une preuve au sens mathématique du terme. Pour présenter ce théorème très simplement, celui-ci stipule que lorsqu'on découpe une carte en régions connexes, il est possible de n'utiliser que quatre couleurs pour les colorier tout en s'assurant qu'aucune des régions adjacentes ne soit de la même couleur. La preuve date de 1976 et a été effectuée par deux chercheurs, Appel et Haken. Ceux-ci démontrent que le théorème est vrai indépendamment du nombre de régions que contient une carte donnée (Tymoczko 1979, 57).

Comme on l'a déjà noté, l'intérêt de ce théorème est que sa preuve n'a pas été élaborée de manière traditionnelle, mais qu'elle repose plutôt sur une démonstration faite par un ordinateur dont la validité n'a elle-même pu être attestée que par un autre ordinateur. Voici la description de la preuve que fait Tymoczko (1979, 68) :

> In its over-all outlines, the logic of the four-color proof is easy to see. It is a proof by induction which requires several cases. The first case is trivial, the second has several subcases, and the third has over a thousand subcases most of which cannot be handled except by high-speed computers.

C'est une partie de la preuve essentielle qui pose ici problème dans la mesure où il serait impossible de saisir sa preuve, étant donné sa longueur excessive et sa complexité. En effet, il faut savoir que cette preuve nécessita à l'ordinateur plus de 1200 heures de travail et impliqua des millions d'étapes. Il est en ce sens intéressant de noter que certaines preuves plus simples du T4C furent produites par la suite, mais qu'à ce jour, même la preuve la plus récente faite par Georges Gonthier (2008) nécessite toujours l'utilisation d'un logiciel de preuve. Un élément qui mérite notre attention est qu'un théorème en apparence similaire, la preuve pour cinq couleurs plutôt que quatre, avait déjà été faite par le passé de manière relativement simple (Tymoczko 1979, 57). On peut donc voir une différence remarquable de complexité pour deux problèmes qui semblent à première vue similaires. Cela semble conforter la position de Wittgenstein quant au caractère imprévisible que peut prendre une preuve mathématique.

Pour en revenir au T4C, la question qui se pose ici est de savoir s'il s'agit bel et bien d'une preuve mathématique selon Wittgenstein. Pour traiter de la question, nous utiliserons l'appareil conceptuel développé par Tymoczko (1979). Dans sa caractérisation de ce qu'est une preuve mathématique, celui-ci considère qu'il y a trois éléments que l'on doit prendre en compte. Tout d'abord, la preuve doit être convaincante, c'est-à-dire qu'elle doit emmener les mathématiciens à accepter toutes les étapes de la démonstration ainsi que le résultat qui en découle. L'auteur note en ce sens que cet élément incorpore une dimension éminemment anthropologique et il nous semble que Wittgenstein entretienne une conception similaire à ce sujet, ce que l'auteur ne manque pas de noter (Tymoczko 1979, 59). Cet aspect de conviction pose un problème mineur dans le cas du T4C. En effet, même s'ils ne sont pas en mesure de comprendre un lemme crucial de la démonstration du théorème, la plupart des mathématiciens acceptent aujourd'hui la preuve ainsi construite. Cependant, il existe encore certaines réticences à ce sujet qui ne sont pas nécessairement présentes pour les preuves traditionnelles.

Un deuxième critère élaboré par Tymoczko (1979, 59) est que la preuve doit être formalisable. Il semble que la démonstration du théorème des quatre couleurs ne pose pas problème là non plus, en effet, il existerait une démonstration formelle de la preuve. Cependant, un troisième élément que Tymoczko met de l'avant est que la preuve doit avoir un caractère synoptique et on retrouve là aussi l'empreinte de Wittgenstein puisque, comme nous l'avons établi précédemment[18], il s'agit d'un critère essentiel dans sa conception des mathématiques. Dans le cas du T4C, le problème n'est pas par rapport à la compréhension de sa structure générale. Comme le note Bassler à propos de l'article explicatif d'un des mathématiciens ayant trouvé la preuve en 1976 :

> The logical structure of the argumentation at the level of Haken's expository article is easily globally surveyable: we see what tasks are required in a global sense and why these tasks will collectively provide a proof of the 4CT. (Bassler 2006, 125)

On voit bien ici que le problème n'est pas la structure générale du théorème dont on comprend très bien comment il mène logiquement d'un point à l'autre. Il semblerait en ce sens que celui-ci soit conséquent avec la conception minimaliste de l'exigence synoptique globale élaborée dans la section 1.5. Cependant, là où ce théorème pose un réel problème, c'est qu'une étape est résolument impossible pour un humain à envisager dans son intégralité. Voyons ce qu'en dit Bassler :

[18] Voir la section 1.5.

> Where, then, does the unsurveyability [of the T4C] enter? It enters in terms of the construction of an unavoidable set of configurations: in the original proof Appel, Haken and Koch "developed a special discharging procedure with almost 500 individually defined exceptional rules which yields an unavoidable set of 1482 reducible configurations...". (Bassler 2006, 125)

Ainsi, il est clair qu'une telle preuve ne serait pas considérée suffisante du point de vue d'une conception globale maximaliste de cette exigence. Rappelons, comme nous l'avions déjà indiqué à la section 1.5, qu'une telle conception requiert que chacune des étapes individuelles de la preuve puisse être encaissée, ce qui est manifestement impossible dans ce cas particulier. Ainsi, le fait qu'un lemme crucial de la démonstration demeure opaque pour nous s'opposerait clairement à la conception de Wittgenstein de ce qu'est le rôle d'une preuve.

Ceci étant dit, la question qu'il est désormais crucial de poser est la suivante : Wittgenstein défendait-il une conception maximaliste ou minimaliste de l'exigence synoptique globale? À première vue, on pourrait penser que Wittgenstein défendait la conception maximaliste. Après tout, sa conception de la preuve comme devant nous guider à chaque étape semble aller en ce sens. Si l'on considère que Wittgenstein adoptait une conception maximaliste du critère, le fait que cette preuve ne soit pas synoptique pose la question de savoir si, pour Wittgenstein, le T4C constitue véritablement d'une proposition mathématique valide. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 1.6 portant sur le sens des conjectures mathématiques, l'absence d'une vraie preuve au sens où l'entend Wittgenstein pourrait compromettre l'idée même que le T4C soit une proposition mathématique douée de sens, selon lui.

Cependant, selon Bassler (2006), ce n'est pas si évident que ce soit le cas. Il fait en ce sens la remarque suivante :

> Global surveyability, in any of its non-trivial manifestations (of which Appel, Haken and Koch's proof of the 4CT *would* be one) does *not*, and in fact *cannot*,

> require exhaustive local surveyability. This is not an inessential matter, but one which, as Wittgenstein was already at pains to show, lies at the semantic heart of mathematical communication. (Bassler 2006, 126-127)

Il est donc possible que l'exigence synoptique que Wittgenstein avait en tête était de nature plus modeste, et s'approchait davantage de la conception minimaliste de l'exigence globale et c'est la position que nous soutenons.

Néanmoins, un autre élément pose problème pour le T4C dans la perspective de Wittgenstein. C'est qu'il semble davantage s'agir d'une preuve de type empirique que d'une preuve mathématique. En effet, toute la preuve repose sur la validité des calculs d'un programme informatique, vérifié par un deuxième algorithme. Selon Tymoczko, on est bien là en présence d'une preuve empirique :

> [The T4C] is, at best, an empirical truth and not subject to traditional proof. Its truth depends on two inter-related factors, the reliability of the machine and the reliability of the program. The reliability of the machine is ultimately a matter for engineering and physics to assess. [...] The reliability of the (T4C), however, is not the same degree as that guaranteed by traditional proofs, for this reliability rests on the assessment of a complex set of empirical factors. (Tymoczko 1979, 73-74).

Cette position trouve d'ailleurs écho chez un commentateur de Wittgenstein, Shanker, pour qui : « [...] The Appel-Haken solution of the four-colour problem is empirical rather than mathematical, and hence, [it] makes no sense to speak of Appel and Haken 'proving' the 'four-colour' theorem' [...] » (Shanker 1987, 157).

En ayant en tête ce qui a été dit dans section 1.2, il semble évident que le manque de cloisonnement entre la preuve empirique et mathématique poserait ici problème pour Wittgenstein. En effet, rappelons que Wittgenstein a indiqué clairement qu'une conception des propositions empiriques et mathématiques comme ayant des modes similaires de vérification est très dommageable (*BT* 419). De plus, l'idée même que l'on aurait un degré d'assurance moindre pour un théorème comme celui-ci parce qu'il fait intervenir une machinerie faillible s'inscrit en opposition directe à la conception que Wittgenstein défend par rapport à la preuve. Rappelons que Wittgenstein soutenait la chose suivante par rapport aux preuves mathématiques : « That proof must be perspicuous means that causality plays no part in proof » (*RFM* 12). Dans le cas du T4C, il y a définitivement un mécanisme empirique en jeu dans la preuve dans le fait que ce soient deux algorithmes mathématiques qui fassent la démonstration d'une section de la preuve. Tous ces facteurs combinés semblent indiquer que nous ne serions pas en présence d'une preuve valide pour cet auteur dans ce contexte.

Le cas du T4C est particulièrement intéressant parce que le T4C remplit certaines fonctions pratiques, notamment en ce qui a trait à la disposition optimale de caméras de surveillance ou dans la diffusion de réseau pour la téléphonie (Ahmed 2012, 2). Refuser au T4C son statut de théorème mathématique semble poser problème pour Wittgenstein étant donné qu'il attache énormément d'importance à l'usage pratique que l'on peut faire des propositions mathématiques (*Im Zivil*).

Cependant, avant de formuler certaines pistes de solutions, nous nous intéresserons à un cas encore plus problématique pour la philosophie des mathématiques de Wittgenstein : celui de l'hypothèse de Riemann. Nous verrons qu'il présente certaines analogies avec le T4C, mais qu'il pose des problèmes encore plus fondamentaux pour la position que défend Wittgenstein.

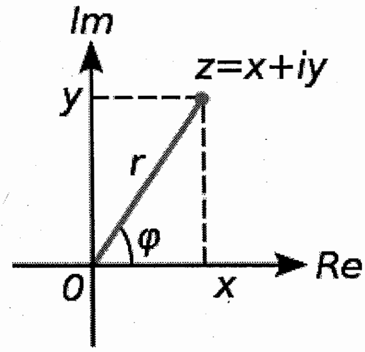
2.3 Wittgenstein et l'hypothèse de Riemann

Selon nous, un dernier élément qui pourrait poser problème pour la conception des mathématiques de Wittgenstein est la question des conjectures mathématiques ayant des usages pratiques. Wittgenstein ne semble pas s'être aperçu de l'existence de ce genre de cas. Néanmoins, la chose semble aujourd'hui indubitable, il existe une conjecture, l'hypothèse de Riemann (HR par la suite), qui produit des conséquences pratiques à défaut d'avoir une preuve.

La fonction zêta (ζ) de Riemann fait intervenir plusieurs concepts mathématiques difficiles dont nous tenterons de donner un (très) bref aperçu. L'HR tire sa source d'un problème mathématique plus ancien, le « Problème de Bâle » (ou problème de Mengoli), dont la réponse avait été formulée par Euler dès le 18e siècle. La question était de déterminer la somme de certaines séries convergentes comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, par exemple. En remplaçant *n* par des nombres réels, on obtient ainsi la série suivante : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ Euler démontre dès 1741 que la somme de cette série infinie est équivalente à $\pi^2/6$ (Conrey 2003, 342).

Plus d'un siècle plus tard, Riemann s'intéresse aux séries convergentes impliquant cette fois-ci des « nombres complexes ». Alors que les nombres ne se situent que sur un axe, l'axe des nombres réels (Re), les nombres complexes se situent sur un plan à deux dimensions qui comprend aussi un deuxième axe, l'axe imaginaire (Im).

Tableau 1.1



Plus spécifiquement, ce graphique nous montre qu'un nombre complexe z donné est la somme de sa dimension réelle et imaginaire, ou $z = x+iy$. Un nombre complexe z qui se situe à 4 sur l'axe des réels et à 3 sur l'axe imaginaire serait représenté de la manière suivante : $z = 4 + 3i$.

La fonction zêta (ζ) de Riemann reprend sensiblement la forme précédente élaborée dans le contexte du problème de Bâle, qui était la suivante : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Cependant, le x représentant un nombre réel est ici remplacé par un z symbolisant que nous sommes ici en présence de nombres complexes. Cela nous donne donc la formule suivante :

$$(1)\ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$$

Dans l'étude de cette fonction, Riemann observe une constante particulière. En effet, toutes les fois où $\zeta(z) = 0$ de manière non triviale, une condition particulière est remplie. Celle-ci est que la dimension réelle de z est de 0,5 (Conrey 2003, 344). Si l'on remplace cela dans l'équation, on obtient la forme suivante :

$$(2)\ \zeta(\text{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(o,5+iy)}} = \frac{1}{1^{(o,5+iy)}} + \frac{1}{2^{(o,5+iy)}} + \frac{1}{3^{z(o,5+iy)}} + \cdots$$

Si l'on parle des zéros non triviaux de la fonction zêta, c'est qu'il existe bel et bien certains zéros où $x \neq 0{,}5$. En effet, tous ces autres zéros dits triviaux incorporent un x ayant une valeur négative et, de manière beaucoup plus importante, leur $y = 0$. Il s'agit donc de zéros tout à fait inintéressants dans la mesure où z devient un nombre réel lorsque $y = 0$.

À l'heure actuelle, il n'existe pas de preuve de cette régularité observée par Riemann. Cependant, cela n'empêche pas les communautés de mathématiciens de faire usage de cette théorie dans plusieurs domaines. Le premier domaine qui vient en tête est celui de la théorie des nombres, il semblerait que les zéros de la fonction zêta nous permettent d'obtenir des informations sur les nombres premiers (Conrey 2003, 345). Ils sont ainsi utilisés pour les quantifier et pour évaluer leur distribution statistique. Il nous est ainsi possible de prévoir de manière statistique la proximité relative de deux nombres premiers. Cela permet en pratique de générer des algorithmes de cryptage de données, puisque plusieurs modèles de tels algorithmes sont basés sur la distribution des nombres premiers.

Un deuxième rôle que joue l'HR est lié à la théorie des matrices. En effet, les zéros de la fonction reflètent la valeur propre de certaines matrices aléatoires (Conrey 2003, 348). Ces matrices sont d'ailleurs utilisées dans de nombreux éléments pratiques comme pour modéliser des données dans les marchés financiers et dans le domaine des « big data » en un sens plus large.

De manière encore plus significative, on voit que les zéros de Riemann semblent être liés à la fois à la distribution des matrices aléatoires et des nombres premiers. Cela est très important puisqu'il s'agit d'un point de connexion entre des champs mathématiques qui semblaient jusque-là très peu liés entre eux (Conrey 2003). Il ne s'agirait d'ailleurs pas là des seuls intérêts de cette conjecture, puisqu'on l'utilise notamment aussi dans le domaine de la physique nucléaire et quantique.

À la lumière des nombreuses applications de cette fonction zêta, il semble impossible d'affirmer avec Wittgenstein[19] que les conjectures mathématiques n'agissent que comme des stimuli avant l'avènement de leur preuve. Force est de reconnaître, au contraire, qu'elles peuvent avoir des usages pratiques significatifs.

Ce constat n'est pas anodin dans la mesure où, comme on l'a expliqué dans la section 2.1, la lecture que nous faisons de Wittgenstein comme faisant coïncider la vérité et les conditions d'assertabilité en mathématiques ne tient la route que parce que l'on pensait pouvoir limiter sa notion de propositions mathématiques à celles pour lesquelles on dispose d'un mécanisme de preuve. Rappelons qu'en l'absence d'une telle limitation, il s'exposerait à la critique de Wright sur la non-convergence en extension des propositions vraies et de celles que l'on est en mesure d'asserter. Wittgenstein aurait justifié d'exclure les conjectures du domaine des propositions mathématiques valides parce que le sens de celles-ci ne nous était pas encore clair. Rappelons par ailleurs que le sens d'une proposition mathématique est fortement lié pour lui au type d'activité qu'elle nous permet de faire en pratique. Or, le fait qu'il y ait des usages pratiques à l'HR semble aller à l'encontre de cette conception de Wittgenstein et indique selon nous la présence d'une tension dans sa théorie.

---

[19] Si l'on suit l'interprétation que nous adoptons et que nous empruntons à Säätelä (2011).

2.4 Peut-on réinterpréter Wittgenstein sans dénaturer son propos?

En ayant les tensions théoriques soulevées aux sections 2.2 et 2.3 de ce chapitre en tête, la question qui demeure est de savoir s'il est possible d'aménager la conception des mathématiques de Wittgenstein pour rendre compte des deux objections pour lesquelles nous n'avons pas apporté de solution, soit le T4C et l'HR. Il nous semble que pour ce faire, il soit nécessaire de réduire la portée de certains éléments théoriques que Wittgenstein met de l'avant dans sa conception de ce qu'est une proposition mathématique. Nous explorerons ici une piste de solution pour chacun des problèmes rencontrés. Dans cette évaluation, notre objectif sera d'opérer une modification minimale dans les propos de Wittgenstein et, surtout, de proposer des modifications telles qu'elles soient maximalement compatibles avec la philosophie générale des mathématiques de cet auteur.

La première option qui s'offre à nous serait d'assouplir la conception de la preuve mathématique qu'entretient Wittgenstein, et plus spécifiquement son critère synoptique. Le fait est que sa conception des mathématiques est survenue dans un contexte historique qui précède l'utilisation généralisée des algorithmes informatiques tels que ceux qui permirent d'apporter une preuve au T4C. Il n'est pas certain que Wittgenstein aurait conservé sa théorie dans l'état où on la connait s'il avait été témoin des outils formidables de calcul que sont aujourd'hui ces algorithmes. Ce qui est particulièrement intéressant dans le cas du T4C est qu'il est loin d'être certain que l'on puisse parvenir à en faire la preuve de manière traditionnelle[20]. Devant cette impossibilité, Tymoczko considère que l'on a deux avenues possibles :

---

[20] Moreover, it is unlikely that anyone could know the 4CT by reason alone. The only route to the 4CT that we can ever take appears to lead through computer experiments. Thus the 4CT is an a posteriori

> Accepting the 4CT forces us to modify our concept of proof. We can modify it by admitting a new method (computer experiment) of establishing mathematical results in addition to proofs. Or we can modify it by allowing proof to include computer-assisted proofs. (Tymoczko 1979, 78)

Ainsi, l'apparition de ce nouveau modèle de preuve a pour conséquence selon cet auteur de nous forcer à reconsidérer le modèle général de ce qu'on accepte ou non comme une preuve. Nous croyons qu'il serait possible de réinterpréter les passages de Wittgenstein sur la preuve de manière à rendre compte de ce développement technologique et d'inclure un algorithme de décision informatique comme un outil de preuve valide.

En effet, une objection classique à ce type de preuve repose sur le fait que celles-ci sont perçues comme incertaines. On a l'impression, comme Tymoczko le souligne dans son texte, qu'on introduit une possibilité d'erreur liée à l'ordinateur qui effectue le calcul. Or, notre réponse à ce sujet serait de s'intéresser aux innombrables cas de preuves erronées ou de théorèmes dans lesquels on découvre une erreur après qu'ils aient été acceptés par la communauté mathématique.

En ce sens, un exemple que nous aimerions exposer brièvement est celui de la preuve du dernier théorème de Fermat (DTF). En effet, la preuve originale produite par Andrew Wiles 1993 contenait une erreur, mais cette preuve était si complexe que plusieurs mois furent nécessaires pour qu'on le réalise. Il fallut attendre plus d'un an pour que Wiles ait enfin ce qu'il a qualifié lui-même d'une « révélation » lui permettant de formuler enfin une preuve correcte. Celle-ci ne fut d'ailleurs acceptée comme telle qu'en 1995 (Singh 1997). Dans le même ordre d'idée, plusieurs tentatives de preuve

---

truth and not an a priori one; mathematicians, I suggest, will never know the 4CT by a priori means." (Tymoczko 1979, 77) du T4C furent considérées comme étant correctes durant de nombreuses années avant que l'on réalise qu'elles contenaient des erreurs. Ainsi, la tentative de preuve d'Alfred Kempe en 1879 ne fut invalidée qu'en 1891. De la même manière, la tentative de Peter Guthrie Tait présentée en 1890 ne fut rejetée qu'en 1901 (Thomas 1998, 848).

Il ne s'agit là que d'exemples parmi tant d'autres, mais l'idée que nous voulons soutenir ici est que la méthode traditionnelle de construction des preuves mathématiques n'est elle-même pas immunisée contre les erreurs. Par conséquent, il serait selon nous arbitraire de considérer, d'une part, que ce type d'erreur est acceptable et ne remet pas en doute la validité potentielle de l'ensemble des preuves mathématiques, mais que le risque d'erreur introduit par des outils algorithmiques serait, lui, inacceptable. À cela, il serait peut-être possible de répondre que l'exigence synoptique de Wittgenstein permettrait de s'opposer à ce type de problème. En effet, les preuves du DTF et du T4C sont très complexes et nécessitent un si grand nombre d'étapes de calcul que de les encaisser dans leur totalité paraît impossible. Conformément à ce que nous avons dit précédemment, on pourrait croire qu'il est possible de mobiliser cette notion pour remettre en cause la validité des preuves mathématiques ayant une longueur excessive. Cela permettrait potentiellement de mitiger le risque d'erreur invoqué précédemment. Cependant, selon Mathieu Marion, la longueur de la preuve ne serait pas pour Wittgenstein le facteur le plus déterminant dans sa notion de preuve synoptique :

> There are reasons, however, to believe that (length of the proof) is not exactly what Wittgenstein had in mind. He discusses the case of unsurveyably long proofs only on a few occasions, e.g. at *RFM* III, §45, in order mainly to entertain the idea that, as Philip Kitcher once put it, 'the increase of length would exacerbate the rational worry that, at some point, one's attention may have lapsed or one may have misremembered some result established earlier' (Kitcher 1984, 42). (Marion 2011, 149)

L'idée que défend par la suite Marion est que le critère synoptique de Wittgenstein élaboré par rapport à la longueur d'une preuve serait davantage un critère visuel.

L'exigence d'être synoptique n'exclurait par exemple des types de preuves que nous ne sommes pas capables de saisir d'un coup en vertu de notre constitution biologique. On pourrait penser par exemple à notre incapacité de reconnaître en un coup d'œil qu'il y a seize traits représentés ici : |||||||||||||||| (Marion 2011, 150; CF : *PR* §103).

Notre but ici n'est pas d'exposer de fond en comble l'argument de Wittgenstein, mais plutôt de montrer qu'il n'est pas clair que cette notion qu'il défendait aurait permis d'éviter les preuves manquées célèbres des siècles derniers, puisqu'il ne s'oppose pas nécessairement aux longues preuves mathématiques (voir aussi Floyd (2000, 258) à ce sujet).

Ceci étant dit, pour en revenir à l'objection à l'encontre de l'usage d'un support informatique à la preuve, il nous semble que l'exploration des preuves erronées construites de manière traditionnelle diminue significativement le poids de cette objection. De plus, cette objection devait paraître plus convaincante à l'heure où Tymoczko écrivait son texte, puisque nous sommes désormais plus familiers avec la technologie informatique et que celle-ci s'est développée considérablement, réduisant ainsi la marge d'erreur dans des calculs mathématiques complexes.

Notre proposition de considérer les calculs mathématiques assistés par ordinateur comme ne portant pas atteinte au caractère synoptique de la preuve n'est d'ailleurs pas nouvelle. Si l'on considère, comme Bassler, que Wittgenstein adoptait une version globale, mais minimaliste, de ce critère[21], il serait possible selon lui de considérer que le T4C est bel et bien une preuve. C'est en ce sens qu'il indique la chose suivante :

---

[21] Voir la fin de la section 2.2 à ce sujet.

> That is, if we are willing to countenance computer calculations as something routine, we would open up for debate whether there is not a *sense* in which the proof of the 4CT is globally surveyable: Appel and Haken have in fact surveyed the proof in the sense that if we accept the computer calculation as routine, the proof is comprehensible. (Bassler 2006, 123-124)

La situation que décrit Bassler est la suivante. Dans le T4C, on est en présence de calculs d'une longueur colossale effectués par un programme informatique, mais qui ne constituent qu'une séquence prévisible (ou de « routine »). En ce sens, la longueur seule rend impossible la compréhension intégrale de ces calculs par l'être humain. Étant donné cette prévisibilité, nous pourrions selon lui accepter la preuve du T4C dans une conception minimaliste du critère synoptique global. En effet, pour ce faire, il suffit de considérer ce support informatique comme une forme de « raccourci » au moins ainsi fiable que les calculs mathématiques effectués de manière traditionnelle. Ce léger remaniement permet selon nous de considérer qu'un cas comme celui du T4C ne poserait pas nécessairement un problème majeur pour Wittgenstein quant à son l'exigence synoptique.

Cependant, étendre cette notion de Wittgenstein de manière à inclure l'appareillage informatique ne règle qu'un des deux problèmes mentionnés ici et auxquels sa philosophie des mathématiques doit désormais faire face. En effet, si cette notion permet selon nous d'accepter le T4C comme ayant été prouvé, elle ne permet cependant pas de rendre compte des conjectures mathématiques ayant des usages pratiques comme l'HR.

Pour ce qui est de l'HR, le problème semble être bien plus profond. En effet, Wittgenstein insiste à de nombreuses reprises sur le fait que nous ne sommes en présence que d'une pseudo-proposition mathématique à défaut d'en avoir la preuve. La tension entre cet aspect de sa pensée et son insistance sur le fait que comprendre une proposition mathématique implique de pouvoir en faire un usage pratique est ici très forte. Le danger de reconnaître l'HR comme une proposition mathématique au sens fort du terme serait de brouiller toute la distinction entre les sciences empiriques et les mathématiques. En effet, l'utilisation de la fonction *zêta* de Riemann agit présentement comme un raisonnement sous hypothèse. Cette situation est liée au fait qu'on soit incapable de trouver un cas récalcitrant. On court cependant le risque de faire l'expérience d'un tel cas, comme l'histoire nous l'a démontré à maintes reprises avec les sciences naturelles. On pourrait penser en ce sens à la physique de Newton qui continue d'être utilisée de manière pragmatique dans de multiples sphères de la vie quotidienne, même si ses limites théoriques ont déjà été démontrées.

Pour être conséquent avec la conception de Wittgenstein, il nous semble que notre seule option serait de considérer que les mathématiques qui font usage d'une fonction comme celle de *zêta* ne s'inscrivent tout simplement plus dans un cadre mathématique classique. Il s'agirait en ce sens d'un autre registre d'activité qu'on pourrait appeler « mathématiques' », par exemple. Ainsi, le fait qu'on introduise dans ces activités mathématiques' un caractère spéculatif sortirait du cadre formel théorique de cette discipline pour Wittgenstein, même si cela n'invaliderait en rien la valeur de l'activité de ce domaine de recherche. Rappelons à ce sujet que l'objectif de Wittgenstein n'a jamais été de dicter aux mathématiciens la manière de mener leur activité, mais bien de s'attaquer à un discours entourant les mathématiques qui mènerait à des confusions conceptuelles.

D'un point de vue pratique, cependant, cette distinction entre mathématiques et mathématiques' ne nous apparaît pas des plus pertinentes et nous estimons donc que la conception des mathématiques de Wittgenstein devrait être revue de fond en comble pour tenir compte de ces nouveaux développements, si cela est même possible sans dénaturer complètement son œuvre. Néanmoins, un tel réaménagement dépasserait de loin le cadre de ce mémoire (ainsi que notre degré de compétence). Nous ne pouvons donc que suggérer à d'autres spécialistes de se pencher sur la question.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la manière dont la philosophie des mathématiques de Wittgenstein peut rendre compte d'exemples mathématiques contemporains. Avant de donner nos derniers commentaires, nous croyons qu'il est important de faire un bref survol de tout ce qui a été abordé dans ce mémoire afin de donner une idée plus claire de notre projet dans son ensemble.

Dans le chapitre 1, nous nous sommes intéressés principalement à exposer les éléments conceptuels de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein, ceci dans le but de se doter d'une vue d'ensemble suffisante pour traiter convenablement les objections abordées dans le deuxième chapitre.

Dès la section 1.1, après un bref survol de la question du réalisme en mathématique, nous avons présenté Wittgenstein comme étant un antiréaliste contrastant sa perspective avec celle de Frege (1969) et de Dummett (1991).

Dans le cadre de la section 1.2, nous nous sommes intéressés au fondement de cet antiréalisme qui réside dans la distinction que cet auteur trace entre les propositions portant sur le monde empirique et celles qui constituent la grammaire de nos langages, comme les mathématiques. Mis à part les nombreux textes posthumes de Wittgenstein, notre outil conceptuel principal pour établir cette distinction reposait ici sur les commentaires de Baker et Hacker (2009). Par la suite, nous avons présenté le problème de Benacerraf (1973) sur la nature des objets mathématiques et de notre rapport avec ceux-ci pour accentuer la distinction wittgensteinienne entre les propositions mathématiques et empiriques.

À la section 1.3, nous avons tenté de présenter les mathématiques sur le modèle de « suivre une règle ». L'objectif de cette section était d'acquérir une compréhension plus fine du rôle des règles selon Wittgenstein, pour pouvoir s'intéresser ensuite aux fondements des distinctions sémantiques tracées par cet auteur entre les mathématiques et les propositions empiriques. Il s'agissait par ailleurs d'un élément essentiel à mettre en place pour la section suivante, puisque, comme on l'a montré, c'est le rapport entre la règle et la conduite en accord avec celle-ci qui est en jeu afin de déterminer où prend place la décision de la communauté dans l'acceptation ou le refus d'une nouvelle proposition mathématique. La thèse à laquelle nous nous sommes ici ralliés est que, contrairement à ce que Kripke (1982) a soutenu, le rapport entre la règle et la conduite en accord avec elle est interne et ne découle pas d'une interprétation arbitraire de la communauté.

La section 1.4 était fort liée à celle qui la précède puisque nous nous sommes intéressés de manière frontale à cet aspect de décision de la communauté en mathématiques. L'objectif était ici de montrer que l'antiréalisme de Wittgenstein n'est pas si radical que certains commentateurs l'ont soutenu. Cela nous ramenait de manière détournée à la question de savoir si l'interprétation de la communauté est bien l'intermédiaire entre la règle et la conduite qui y obéit. Nous avons évidemment maintenu la même position que dans la section précédente à l'effet que ce n'est pas le cas. De ce fait, nous nous sommes rangés à l'analyse de Baker et Hacker (2009), pour qui la décision de la communauté n'est pas d'accepter ou non la validité d'une preuve, mais plutôt d'être convaincus ou non de l'intégrer à leurs pratiques mathématiques, une fois la preuve donnée. Nous nous sommes donc définitivement distanciés ici d'une lecture de Wittgenstein comme existentialiste en mathématiques.

La section 1.5 visait à établir le rôle de la preuve des propositions mathématiques selon Wittgenstein. En effet, la section précédente nous avait amenés à statuer que c'est la preuve qui mène une communauté à intégrer ou non une nouvelle pratique mathématique. Nous avons ici fait usage de l'appareil conceptuel développé par Rodych (2013) pour établir que cela mène Wittgenstein à une conception des propositions mathématiques alliant un vérificationnisme faible à un structuralisme. Pratiquement, cela implique que nous ne sommes en présence de propositions mathématiques au sens fort du terme que dans la mesure où nous disposons d'un mécanisme de décision (la preuve) pour déterminer que la proposition est vraie ou fausse. De plus, c'est cette preuve qui nous indique comment cette proposition est liée à d'autres propositions mathématiques à l'intérieur d'un système mathématique. À la fin de cette section, nous avons aussi fait appel aux ressources mises de l'avant par Marion (2011) et Bassler (2006) pour tenter de clarifier le standard de preuve de Wittgenstein qui exige qu'elle ait un caractère synoptique. C'est-à-dire qu'une preuve n'est considérée pour lui comme telle qu'à partir du moment où il est possible pour les êtres humains d'en retracer les étapes et d'aboutir nécessairement à la même conclusion.

Enfin, dans la section 1.6, nous nous sommes intéressés à la conception que Wittgenstein avait par rapport au sens des conjectures mathématiques. En effet, puisqu'on ne dispose pas pour celles-ci d'une procédure de preuve, la section précédente nous laissait présager qu'il ne considérerait pas les conjectures mathématiques comme étant douées de sens au même titre que des propositions mathématiques prouvées. Cependant, en utilisant l'analyse faite par Säätelä (2011), nous avons pu établir que Wittgenstein concevait que les conjectures ont un sens dans la mesure où elles poussent les mathématiciens à entreprendre des activités visant à les résoudre. Les conjectures agissent ainsi davantage pour lui comme des stimuli et entraînent une forme d'activité non systématique qui s'apparente souvent davantage à un tâtonnement qu'à un effort organisé ayant un résultat prévisible.

Le chapitre 2 de notre mémoire avait pour but de mettre la philosophie des mathématiques de Wittgenstein à l'épreuve en s'intéressant à trois problèmes conceptuels modernes qui pouvaient invalider sa théorie. La dernière étape du chapitre visait à voir s'il était possible de modifier légèrement la position de Wittgenstein pour la rendre cohérente avec ces nouveaux développements.

La section 2.1 visait à exposer un problème sur la sémantique mathématique de Wittgenstein. En effet, selon Frascolla (2014, 2017), le fait que Wittgenstein fasse dépendre le sens d'une proposition mathématique de sa preuve a pour conséquence de faire coïncider la vérité de celle-ci avec les conditions auxquelles on peut l'asserter. Nous nous sommes ralliés à son interprétation, contre celle de Glock (2004) pour qui Wittgenstein entretient plutôt une conception de vérité minimaliste par rapport aux propositions mathématiques. Toujours est-il que cette convergence entre vérité et assertabilité met potentiellement Wittgenstein dans une position délicate. En effet, une critique célèbre de Wright (1992) montre justement par un argument logique qu'il y a divergence entre vérité et assertabilité pour les cas que nous ne sommes pas en mesure d'asserter ni de nier. Nous avons adopté ici la défense de Fracolla (2014) pour qui Wittgenstein aurait évité un tel écueil en refusant tout simplement aux conjectures mathématiques le statut de propositions mathématiques. Cette approche est d'ailleurs conséquente avec la théorie de Rodych (2013) que nous avons soutenue à la Section 5 du chapitre 1.

Dans la section 2.2, nous nous sommes intéressés au problème que pose le théorème des quatre couleurs pour la théorie de la preuve mathématique de Wittgenstein. Pour nous aider à démêler la question, nous avons utilisé le travail conceptuel fait sur ce théorème par Tymoczko (1979). L'élément principal qui posait ici problème état l'exigence de Wittgenstein que la preuve mathématique ait un caractère synoptique, élément que nous avions déjà exposée à la section 1.5. En effet, sommes-nous toujours en présence d'une preuve quand sa longueur et la complexité sont telles qu'elle est impossible à parcourir par des êtres humains? Puisque nier cette preuve du T4C reviendrait pour Wittgenstein à ne pas le considérer comme une proposition mathématique valide, cela pose un problème majeur. En effet, le T4C est accepté par une grande majorité de la communauté mathématique et a des usages pratiques. Nous avons déjà noté au préalable que ce sont les usages pratiques qui donnent pour Wittgenstein le réel statut des propositions mathématiques et il ne pourrait donc pas balayer du revers de la main un tel théorème comme étant un tour de passe-passe inutile.

Dans la section 2.3, nous nous sommes intéressés à un cas encore plus problématique pour la philosophie des mathématiques de Wittgenstein : celui de l'hypothèse de Riemann. Nous avons ici majoritairement fait usage du matériel conceptuel développé par Conrey (2003) pour saisir les enjeux liés à un problème mathématique d'une aussi grande complexité. Dans ce cas précis, il semble que nous sommes en présence d'une conjecture pour laquelle nous ne disposons pas de preuve, mais qui produit néanmoins des effets pratiques bien réels. Cela met en tension de manière encore plus flagrante que dans la section 2.2 ces aspects essentiels des mathématiques pour Wittgenstein que sont la preuve et les usages pratiques.

Dans la section 2.4, nous avons tenté d'évaluer s'il était possible d'aménager la théorie des mathématiques de Wittgenstein pour rendre compte du Théorème des quatre couleurs et de l'hypothèse de Riemann. Pour le T4C, nous croyons qu'il est possible de le faire sans trop altérer la théorie de l'auteur. Ainsi, en prenant en considération que les écrits de Wittgenstein précèdent les algorithmes de preuves mathématiques élaborés qui caractérisent le monde actuel, nous estimons qu'il est possible d'étendre son critère synoptique pour inclure les algorithmes informatiques, étant donné qu'il s'agit d'outils fiables. Pour bien illustrer en quoi un tel changement ne rendrait pas les preuves mathématiques davantage sujettes à l'erreur, nous avons donné des exemples de preuves construites de manière traditionnelle qui comportaient des erreurs qui ne furent découvertes que plusieurs années après leur acceptation généralisée par la communauté mathématique. Le dernier élément auquel nous nous sommes attaqués dans ce mémoire est à savoir si l'on pouvait adapter la théorie de Wittgenstein pour rendre compte de l'HR. Ici, nous ne sommes pas parvenus à une réponse concluante.

En effet, une des conséquences de la manière dont nous avons répondu au problème soulevé par Wright (1992) est justement que la seule lecture de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein cohérente est si l'on exclut les conjectures mathématiques dans notre définition des propositions mathématiques. Dans le cas de l'HR, nous ne serions donc qu'en présence d'une pseudo-proposition, mais celle-ci permet quand même aux mathématiciens de s'attaquer à des problèmes pratiques, notamment en ce qui a trait à la distribution des nombres premiers, un élément charnière dans le domaine de la cryptologie. La conclusion à laquelle nous sommes parvenus ici est que cela doit nous mener à réévaluer la pertinence de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein pour rendre compte de ce cas récalcitrant.

Voici donc notre maigre contribution à la connaissance de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein. Comme nous l'avons noté dans la dernière section, il est possible qu'il existe une manière plus élégante pour cet auteur de rendre compte de l'objection apparente que constitue l'exemple de l'hypothèse de Riemann pour sa théorie. Il nous apparaît cependant que cela dépasserait le cadre de notre travail.

Un dernier élément que nous aimerions noter est que, même si cela s'avérait impossible, il ne faudrait pas voir cela comme discréditant l'œuvre considérable de cet auteur en philosophies des mathématiques. En effet, une chose dont nous sommes convaincus est que la lecture de cet auteur modifie profondément quiconque s'y intéresse sérieusement. Wittgenstein nous invite constamment à penser différemment et à concevoir des perspectives novatrices sur un problème donné. Son œuvre posthume dans laquelle l'humour est toujours à l'honneur se plie difficilement à une analyse systématique et la meilleure manière de respecter celle-ci est de se garder d'en faire une lecture dogmatique.

BIBLIOGRAPHIE

Ahmed, S. (2012). « Applications of graph coloring in modern computer science », in *International Journal of Computer and Information Technology (IJCIT)*, *3*, 1-7.

Andersen, D. (2016). *Digits of Pi – Up to 1 Million Digits*, URL = <https://www.angio.net/pi/digits/pi1000000.txt/>

Baker, G. & Hacker, P. M. S. (2009). *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity*. Second edition extensively revised by P. M. S. Hacker. Chichester: Wiley Blackwell.

Bassler, O. B. (2006). « The surveyability of mathematical proof: A historical perspective », in *Synthese*, 148(1), 99-133.

Benacerraf, P. (1973). « Mathematical Truth », in *The Journal of Philosophy*, Vol. 70, No. 19, 661-679.

Blanché, R. & Dubucs, J. (1996). *La logique et son histoire*, Paris, Armand Colin.

Bouveresse, J. (1980). « Frege, Wittgenstein, Dummett et la nouvelle « Querelle du réalisme » », in *Critique*, no 399-400, 881-896.

Conrey, J. B. (2003). « The Riemann hypothesis », in *Notices of the AMS*, *50*(3), 341-353.

Dummett, M. A. E. (1978). *Truth and Other Enigmas*. London: Duckworth.

Dummett, M. A. E. (1991). « La vérité », in *Philosophie de la logique*, Paris, Éditions de Minuit, 41-69.

Floyd, J. (2000). « Wittgenstein, Mathematics and Philosophy », in *The New Wittgenstein*, London: Routledge.

Frege, G. (1969). *Fondements de l'arithmétique*, Paris, Éditions du Seuil.

Frascolla, P. (2014). « Realism, Anti-Realism, Quietism: Wittgenstein's Stance », in *Grazer philosophische Studien*, 89, 11-21.

Frascolla, P. (2017). « The Role of the Disquotational Schema in Wittgenstein's Reflections on Truth », in *Philosophical Investigations*, *40*(3), 205-222.

Glock, H.-J. (2004). « Wittgenstein on Truth », in W. Löffler & P. Weingartner (eds.). *Knowledge and Belief. Wissen und Glauben*, Vienna: Hölder-Pichler-Tempsky, 13-31.

Gonthier, G. (2008). « Formal proof–the four-color theorem », in *Notices of the AMS*, *55*(11), 1382-1393.

Grève, S. S., & Kienzler, W. (2016). « Wittgenstein on Gödelian 'Incompleteness', Proofs and Mathematical Practice: Reading *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Part I, Appendix III, Carefully », in *Wittgenstein and the Creativity of Language*. Springer, 77-116.

Horsten, L. (2018). « Philosophy of Mathematics », in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/philosophy-mathematics/>.

Kripke, S. (1982). *Wittgenstein on Rules and Private Language*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.

Linnebo, Ø. (2018). « Platonism in the Philosophy of Mathematics », in The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>.

Marion, M. (2011). « Wittgenstein on Surveyability of Proofs », in *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, 138-147.

Marion, M. (2016). « Wittgenstein and Antirealism », in *A Companion to Wittgenstein* (eds H. Glock and J. Hyman).

Marion, M. (1998). *Wittgenstein, finitism, and the foundations of mathematics*. Oxford University Press.

Marion, M. & Okada, M. (2012). « Wittgenstein et le lien entre la signification d'un énoncé mathématique et sa preuve », in Philosophiques, 39(1), 101–124.

Riehl, E. (2005). « Kummer's Special Case of Fermat's Last Theorem », in *Math 129: Topics in Number Theory*, William Stein, Spring 2005, 1-11.

Podlaskowski, A. (2015). « Giving Up On 'The Rest Of The Language'. », in *Acta Analytica*, September, 30 (3), 293-304.

Ramsey, F.P. (1927). « Facts and Propositions », in *Proceedings of the Aristotelian Society*, 7 (Supplementary): 153–170.

Rodych, V. (2006). « Who is Wittgenstein's worst enemy? Steiner on Wittgenstein on G*ödel* », in *Logique et analyse*, *49*(193), 55-84.

Rodych, V. (2008). « Mathematical sense: Wittgenstein's syntactical structuralism », in *Wittgenstein and the Philosophy of Information: Proceedings of the 30th International Ludwig Wittgenstein-Symposium in Kirchberg*, 81-104.

Säätelä, S. (2011). « From Logical Method to 'Messing about': Wittgenstein on 'Open Problems' in Mathematics », in *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, 163-180.

Shanker, S. (1987). *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.

Silva, T. E. (2018). *Goldbach Conjecture Verification*, URL = <http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html>.

Singh, S. (1997). *Fermat's last theorem*, London: Fourth Estate.

Stoljar, D. & Damnjanovic, N. (2014). « The Deflationary Theory of Truth », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL=

<https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/truth-deflationary/>.

Tarski, A. (1944). « The semantic conception of truth: and the foundations of semantics », in *Philosophy and phenomenological research*, vol. 4, no 3, 341-376.

Thomas, R. (1998), « An Update on the Four-Color Theorem», in *Notices of the American Mathematical Society*, 45(7), 848–859.

Tymoczko, T. (1979). « The four-color problem and its philosophical significance », in *The Journal of Philosophy*, *76*(2), 57-83.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1912). *Principia mathematica* (Vol. 2), University Press.

Wittgenstein, L. (1979). *Wittgenstein Lectures 1932-5*, ed. by Alice Ambrose, Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1979). *Wittgenstein and the Vienna circle: Conversations recorded by Friedrich Waismann*, Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1958). *The Blue and Brown Books*, Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1976). *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics Cambridge*, ed. Cora Diamond. Hassocks.

Wittgenstein, L. (2012). *The big typescript: TS 213*. John Wiley & Sons.

Wittgenstein, L. (1974). *Philosophical Grammar*, edited by Rush Rhees & translated by Anthony Kenny, Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*, introduction by Bertrand Russell. London: Routledge and Kegan Paul.

Wittgenstein, L. (2009). *Philosophical investigations*. John Wiley & Sons.

Wittgenstein, L. (1983). *Remarks on the Foundations of Mathematics, revised edition*, MIT press.

Wittgenstein, L. (1980). *Remarks on the Philosophy of Psychology, vol. 1*, edited by G.E.M. Anscombe & G.H. Von Wright, translated by G.E.M. Anscombe, Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1984). *Culture and value*. University of Chicago Press.

Wittgenstein, L. (1967). *Zettel*. University of California Press.

Wittgenstein, L., & Von Wright, G. H. (1998). *Wittgenstein's Nachlass the Bergen Electronic Edition*. Oxford University Press, Oxford.

Wright, C. (1992). *Truth and Objectivity*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.