

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MÉTHODES D'ALLOCATION DU CAPITAL ÉCONOMIQUE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

DOMINIC VIOLA

MAI 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de mémoire Jean-François Renaud, professeur en mathématiques à l'UQAM. Son soutien, sa patience, sa disponibilité et ses nombreux conseils m'ont permis d'accomplir ce travail. Sa façon de me diriger au cours de ma quête de réponses m'a aidé à développer une approche à la recherche et une méthode de résolution de problèmes qui me seront utiles tout au long de ma vie. Pour ceci, je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais aussi souligner le support inconditionnel de ma conjointe Stéphanie et de mes enfants Christophe et Charlotte. L'accomplissement de ce mémoire a nécessité beaucoup de sacrifices de leur part au cours des dernières années. Je vous remercie de tout coeur.

En terminant, je voudrais remercier tous mes collègues, amis, parents et membres de ma famille qui m'ont aidé à réaliser ce grand voyage. Vos encouragements m'ont procuré de l'énergie quand j'en avais souvent besoin.

Merci !

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----|
| LISTE DES TABLEAUX | vii |
| LISTE DES FIGURES | ix |
| RÉSUMÉ | xi |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE I CONCEPTS GÉNÉRAUX | 5 |
| 1.1 Fonction quantile, fonctions de répartition inverse et α -inverse | 5 |
| 1.2 Mesures de risque | 9 |
| 1.2.1 Quelques propriétés souhaitables d'une mesure de risque | 10 |
| 1.2.2 Le principe de l'écart-type | 11 |
| 1.2.3 Valeur-à-risque (VaR) | 14 |
| 1.2.4 Conditional Tail Expectation (CTE) | 17 |
| 1.3 Ordonnancement de variables aléatoires | 19 |
| 1.4 Comonotonicité | 26 |
| 1.5 Copules | 40 |
| 1.5.1 Copule gaussienne | 42 |
| 1.5.2 Copule de Clayton | 42 |
| 1.5.3 Copule de Gumbel | 42 |
| 1.5.4 Tau de Kendall | 43 |
| CHAPITRE II ALLOCATION DU CAPITAL ÉCONOMIQUE | 45 |
| 2.1 Revue des formules d'allocation du capital économique | 45 |
| 2.1.1 Principe d'allocation factoriel | 46 |
| 2.1.2 Principe d'allocation selon le quantile | 47 |
| 2.1.3 Principe d'allocation selon la covariance | 48 |
| 2.1.4 Principe d'allocation selon le CTE | 49 |

| | | |
|--|--|-----|
| 2.1.5 | Allocation proportionnelle | 49 |
| CHAPITRE III ALLOCATION OPTIMALE DU CAPITAL ÉCONOMIQUE | | 53 |
| 3.1 | Allocation optimale sous le critère d'optimisation quadratique | 55 |
| 3.1.1 | Allocation dictée par les unités d'affaire | 59 |
| 3.1.2 | Allocation dictée par le portefeuille | 62 |
| 3.2 | Allocation optimale selon le critère d'écart absolu | 64 |
| CHAPITRE IV COMPARAISON NUMÉRIQUE DANS LE CAS BIVARIÉ | | 71 |
| 4.1 | Problématique | 72 |
| 4.2 | Hypothèses | 75 |
| 4.3 | Loi normale bivariée | 83 |
| 4.4 | Autres lois bivariées | 88 |
| 4.4.1 | Loi lognormale bivariée | 92 |
| 4.4.2 | Loi Gamma bivariée | 95 |
| 4.5 | Copules bivariées | 97 |
| 4.5.1 | Copule gaussienne bivariée | 98 |
| 4.5.2 | Copule de Clayton bivariée | 99 |
| 4.5.3 | Copule de Gumbel bivariée | 101 |
| 4.6 | Comparaison des modèles sous différentes lois | 102 |
| 4.6.1 | Allocation selon le CTE | 103 |
| 4.6.2 | Méthode d'allocation optimale 2 | 104 |
| 4.6.3 | Méthode d'allocation optimale 5 | 105 |
| 4.7 | Récapitulatif | 106 |
| CONCLUSION | | 109 |
| BIBLIOGRAPHIE | | 111 |

LISTE DES TABLEAUX

| Tableau | Page |
|---|------|
| 1.1 Tau de Kendall des copules gaussiennes, de Clayton et de Gumbel. | 44 |
| 2.1 Principes d'allocation. | 50 |
| 3.1 Allocations dictées par les unités d'affaire. | 61 |
| 3.2 Allocations dictées par le portefeuille. | 64 |
| 4.1 Résumé des méthodes d'allocation du capital économique. | 78 |
| 4.2 Statistiques empiriques pour chacun des risques de notre compagnie d'assurance. | 80 |
| 4.3 VaR (0.995) et CTE (0.99) pour les différents degrés de dépendance de la loi normale bivariée. | 81 |
| 4.4 Paramètres de la loi normale bivariée. | 84 |
| 4.5 Allocation du capital économique selon la loi normale bivariée. | 85 |
| 4.6 Paramètres des distributions des variables aléatoires X et Y | 90 |
| 4.7 Comparaison des $CTE_{0,99}$ pour les variables aléatoires X et Y selon les distribution normale, lognormale et Gamma. | 92 |
| 4.8 Paramètres des lois lognormales. | 93 |
| 4.9 Allocation du capital économique sous la loi lognormale bivariée. | 94 |
| 4.10 Paramètres de la loi Gamma bivariée. | 96 |
| 4.11 Allocation du capital économique sous la loi bivariée Gamma CRMM. | 97 |
| 4.12 Paramètres de la copule gaussienne bivariée. | 98 |
| 4.13 Allocation du capital économique selon la copule gaussienne avec des lois marginales lognormale et Gamma. | 99 |

| | |
|--|-----|
| 4.14 Paramètres de la copule de Clayton bivariée. | 100 |
| 4.15 Allocation du capital économique selon la copule de Clayton avec des lois marginales lognormale et Gamma. | 100 |
| 4.16 Paramètres de la copule de Gumbel bivariée. | 101 |
| 4.17 Allocation du capital économique selon la copule de Gumbel avec des lois marginales lognormale et Gamma. | 102 |
| 4.18 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation selon le CTE. | 103 |
| 4.19 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation optimale 2. | 105 |
| 4.20 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation optimale 5. | 106 |

LISTE DES FIGURES

| Figure | Page |
|---|------|
| 1.1 Fonction de répartition continue. | 7 |
| 1.2 Fonction de répartition avec un saut. | 7 |
| 1.3 Fonction quantile, de répartition inverse et α -inverse. | 8 |
| 1.4 Principe de l'écart-type. | 12 |
| 1.5 Illustration de la VaR. | 15 |
| 1.6 Illustration du CTE. | 18 |
| 1.7 Illustration de la prime <i>stop-loss</i> | 21 |
| 1.8 Illustration de $\mathbb{E}((d - X)_+)$ | 24 |
| 1.9 Ensemble comonotone. | 28 |
| 1.10 Ensemble non-comonotone. | 28 |
| 1.11 Support connexe comonotone. | 31 |
| 4.1 Illustration des liens entre quelques risques couverts par une compagnie d'assurance de dommages. | 76 |
| 4.2 Illustration de la VaR (0.995) et du CTE (0.99) pour les différentes structures de dépendance de la loi normale bivariée. | 82 |
| 4.3 Graphiques des variables aléatoires X selon les lois normale, lognormale et Gamma. | 91 |
| 4.4 Graphiques des variables aléatoires Y selon les lois normale, lognormale et Gamma. | 91 |

RÉSUMÉ

L'allocation du capital économique est une opération importante au sein d'une entreprise puisqu'elle peut impacter les différentes décisions d'affaire et les résultats financiers de celle-ci. Il est donc essentiel de bien comprendre les méthodes utilisées afin que les décisions soient prises de façon éclairée. Le présent mémoire répertorie plusieurs méthodes d'allocation du capital économique, incluant les méthodes optimales présentées dans (Dhaene *et al.*, 2012). Ensuite, celles-ci sont étudiées dans un contexte de simulation afin de les comparer et de faire ressortir les forces et les faiblesses.

Mots clés : allocation du capital économique, mesures de risque, ordonnancement de variables aléatoires, comonotonie, antimonotonie, analyse numérique.

INTRODUCTION

Les entreprises financières se doivent de détenir du capital économique afin d'assurer leur solvabilité et de pouvoir ainsi respecter leurs engagements envers les clients. Auparavant, les organismes réglementaires exigeaient que les compagnies détiennent un minimum de capital qui était déterminé à l'aide d'un modèle propre à chacun de ces organismes. Puisque celui-ci était le même pour toutes les entreprises, il ne prenait pas en compte les différences entre les divers portefeuilles de risque de chacune des entreprises. Plusieurs organismes réglementaires, tel que le Bureau du surintendant des institutions financières au Canada, commencent donc à approuver l'utilisation d'un modèle de capital économique développé au sein de chaque compagnie.

L'utilisation d'un modèle de capital économique développé à l'interne est vraiment intéressant pour les banques et les compagnies d'assurance, mais le développement de celui-ci n'est pas une mince tâche. Puisque ces modèles sont tout nouveaux dans le paysage de la gestion des risques, il n'existe pas de méthode généralement acceptée afin d'établir un tel modèle. Il est généralement assez simple de modéliser chacun des risques de façon indépendante, mais il faut aussi modéliser la dépendance entre chacun d'eux et il y a une multitude de risques à modéliser. Le risque d'investissement, qui est commun aux banques et compagnies d'assurance, comprend les risques de marché, de crédit, de contrepartie et de taux d'intérêt. Les risques de réserve et de souscription préoccupent tant qu'à eux autant les compagnies d'assurance-vie et de dommages. On peut aussi ajouter les risques de concentration, systémique et opérationnel aux préoccupations des entreprises fi-

nancières. Bien que ces énumérations ne soient pas exhaustives, elles illustrent bien la complexité que peut atteindre un modèle de capital économique.

Une des conditions nécessaires lors de l'approbation d'un modèle de capital économique est que celui-ci soit utilisé le plus possible dans le cours normal de ses opérations et lors des décisions stratégiques de l'entreprise. Une des valeurs ajoutées des modèles de capital économique est qu'il est possible d'en extraire une grande quantité d'information quant aux risques soutenus par l'entreprise. Il est donc normal que les législateurs demandent à ce que celui-ci soit utilisé le plus possible par les gestionnaires de l'entreprise. Ceci leur assure aussi que le modèle a été développé avec un grand sérieux et non seulement dans le but de satisfaire aux exigences des organismes de réglementation.

C'est dans cet esprit d'utilisation du modèle de capital économique qu'intervient l'allocation du capital économique. Bien que la détermination du capital économique soit régie par les régulateurs, son allocation n'est quant à elle pas encadrée par aucune loi. L'allocation du capital économique peut donc être conduite de la façon désirée par les gestionnaires et selon les questions que ceux-ci se posent. Le portefeuille de risques de l'entreprise peut donc être décomposé de plusieurs façons différentes afin de redistribuer le capital économique total de l'entreprise à diverses unités d'affaire déterminées selon l'analyse voulue. Par exemple, dans le cas d'une compagnie d'assurance de dommages, le portefeuille d'affaire pourrait être subdivisé de plusieurs façons, telles que

- les lignes d'affaire personnelles et commerciales ;
- les zones géographiques ;
- les lignes automobiles, d'habitation, de responsabilité et plusieurs autres ;
- ou toute combinaison des subdivisions précédentes.

Il est donc possible d'analyser la compagnie sous divers angles de façon à avoir

une meilleure compréhension des différentes forces motrices et interrelations composant l'entreprise. L'allocation du capital économique est donc un outil pouvant servir aux gestionnaires de l'entreprise afin de prendre des décisions stratégiques éclairées. Les gestionnaires se posent régulièrement plusieurs questions, telles que

- Quelle est la rentabilité d'une unité d'affaire ?
- Est-ce que les gestionnaires des unités d'affaire atteignent leurs objectifs ?
Est-ce qu'ils gèrent bien leur unité d'affaire ?
- Quels sont les besoins en capital économique de chaque unité d'affaire ?
- Devrait-on augmenter ou diminuer le volume d'une unité d'affaire ?

L'allocation du capital économique vient donc compléter les outils analytiques disponibles aux gestionnaires. Elle sert aussi lors de la tarification des différents produits offerts par une entreprise financière. En effet, le fait de détenir du capital économique en lien avec la mise en marché de produits financiers introduit un coût lié à ce capital économique qui doit être pris en compte lors de la tarification de ces produits. Le fait de détenir du capital économique pour un produit empêche d'investir ce capital dans d'autres activités lucratives. L'introduction du coût de détention de ce capital économique dans la tarification du produit permet d'obtenir un rendement sur le capital économique détenu.

Dans ce mémoire, l'allocation du capital économique sera traitée dans le contexte d'une compagnie d'assurance de dommages. Puisque les modèles traités dans cet ouvrage ne nécessitent pas une définition précise des unités d'affaire, elles seront vues dans le sens le plus large de la définition, à moins que des précisions ne soient nécessaires ou dans le cadre d'illustrations. Le capital économique total requis par les régulateurs sera considéré comme une donnée exogène préalablement fixée et il sera noté K tout au long de cet ouvrage. Les pertes subies par l'assureur seront notées X_i , pour $i = 1, \dots, n$, où n est le nombre d'unités d'affaires considérées.

Ces pertes comprendront les montants requis afin de couvrir les dommages causés aux assurés ainsi que toutes dépenses qui y sont reliées. Le montant de perte total encouru par la compagnie en entier sera noté $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Tel que discuté, la multitude de risques à modéliser et la dépendance entre eux se conjuguent pour donner des modèles de capital économique assez complexes. La dépendance entre les risques peut-être modélisée de plusieurs façons. Il y a tout d'abord les matrices de corrélation qui peuvent être incluses dans le modèle. Les relations entre les risques peuvent aussi être prises en compte via les copules. Finalement, des facteurs de risque comme le taux d'inflation peuvent être incorporés dans le modèle afin d'introduire de la corrélation entre les risques. Une combinaison des ces différentes structures de dépendance est généralement utilisée. Ceci complique le calcul d'allocation du capital économique puisque la structure de dépendance entre les risques est plutôt complexe.

Le but de ce mémoire est de présenter quelques méthodes d'allocation du capital économique et de les soumettre à une analyse numérique. Le Chapitre 1 offre une revue des mesures de risque et de plusieurs concepts de base qui sont nécessaires à la compréhension des autres chapitres. Les Chapitres 2 et 3 présentent les méthodes d'allocation qui proviennent de (Dhaene *et al.*, 2012). Leurs contenus se veulent une traduction de cet article accompagnée d'explications plus élaborées. Le Chapitre 4 soumet quant à lui les modèles présentés à une analyse numérique. Cette analyse est ma contribution originale aux modèles présentés dans (Dhaene *et al.*, 2012).

CHAPITRE I

CONCEPTS GÉNÉRAUX

Le présent chapitre a pour but de présenter les théories de base qui seront nécessaires à la compréhension des modèles d'allocation du capital économique présentés dans ce mémoire.

Tout d'abord, une fonction réelle h sera dite croissante si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, alors $h(x) \leq h(y)$. Nous dirons qu'elle est strictement croissante lorsque $h(x) < h(y)$. De la même façon, une fonction réelle h sera dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si $-h$ est croissante (respectivement strictement croissante).

De plus, nous dirons qu'une variable aléatoire (ou fonction) est positive lorsque celle-ci prend des valeurs plus grandes ou égales à 0 et qu'elle est strictement positive si elle prend des valeurs plus grandes que 0.

1.1 Fonction quantile, fonctions de répartition inverse et α -inverse

Pour une variable aléatoire X , sa fonction de répartition est définie par

$$x \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Une notion qui sera très utilisée au cours de cet ouvrage est celle de fonction inverse de la fonction de répartition. La première fonction inverse de $F_X(x)$ qui

est présentée est la fonction quantile qui est définie, pour $p \in [0, 1]$, par

$$p \mapsto F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\},$$

avec $\inf \emptyset = +\infty$, par convention. La fonction quantile est une fonction croissante et continue à gauche. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $p \in [0, 1]$, la relation suivante est toujours valide :

$$F_X^{-1}(p) \leq x \iff p \leq F_X(x).$$

L'égalité est atteinte lorsque $F_X(x)$ est strictement croissante.

Une deuxième fonction inverse de $F_X(x)$ est la fonction de répartition inverse, notée F_X^{-1+} . Elle est définie, pour $p \in [0, 1]$, par

$$p \mapsto F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq p\},$$

avec $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction de répartition inverse est croissante et continue à droite.

La dernière fonction inverse de $F_X(x)$ qui sera utile est la fonction de répartition α -inverse, notée $F_X^{-1(\alpha)}$. Elle est définie, pour $p \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$, par

$$p \mapsto F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1 - \alpha) F_X^{-1+}(p).$$

Cette fonction est croissante.

Nous avons que $F_X^{-1}(0) = -\infty$ et que $F_X^{-1+}(1) = +\infty$. Il est intéressant de noter que $F_X^{-1}(p)$ et $F_X^{-1+}(p)$ prennent des valeurs finies lorsque $p \in (0, 1)$ et que toute la masse de probabilité est contenue dans l'intervalle $[F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1)]$.

Il est aussi intéressant de noter que lorsque la fonction de répartition F_X est strictement croissante, alors $F_X^{-1}(p) = F_X^{-1(\alpha)}(p) = F_X^{-1+}(p)$, pour $p \in (0, 1)$. Ceci est illustré aux Figures 1.1 et 1.2.

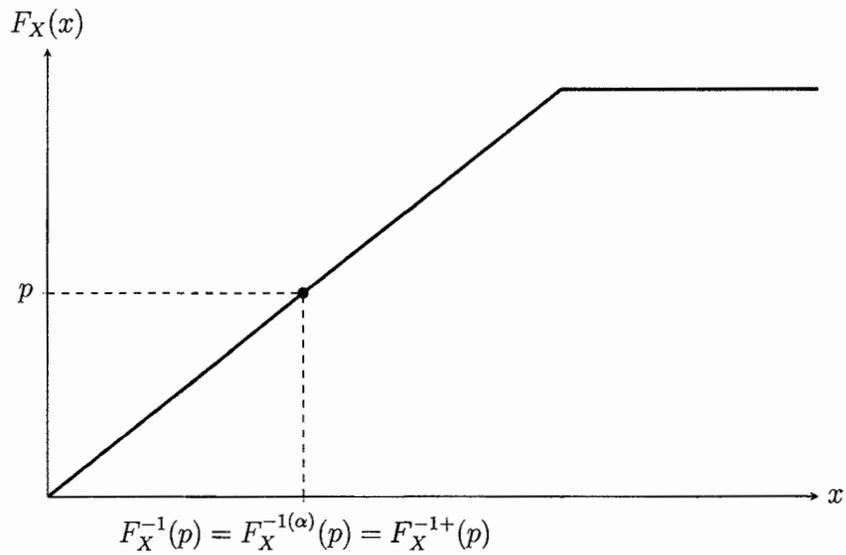


Figure 1.1 Fonction de répartition continue.

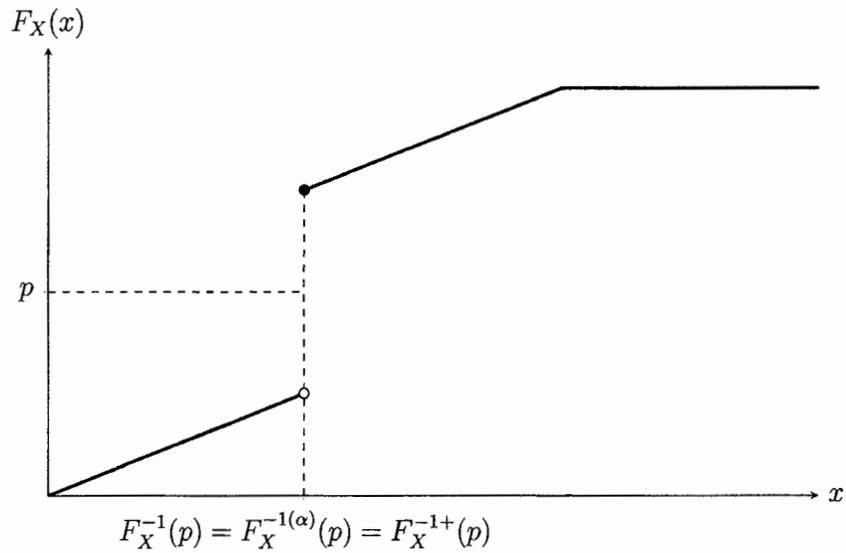


Figure 1.2 Fonction de répartition avec un saut.

Dans le cas où la fonction de répartition n'est pas strictement croissante, soit lorsque F_X est constante sur au moins un intervalle, la fonction de répartition α -inverse sera utile. Celle-ci permettra d'atteindre tous les points dans l'intervalle

$[F_X^{-1}(p), F_X^{-1+}(p)]$, $p \in (0, 1)$ où F_X est constante. Ceci est illustré à la Figure 1.3.

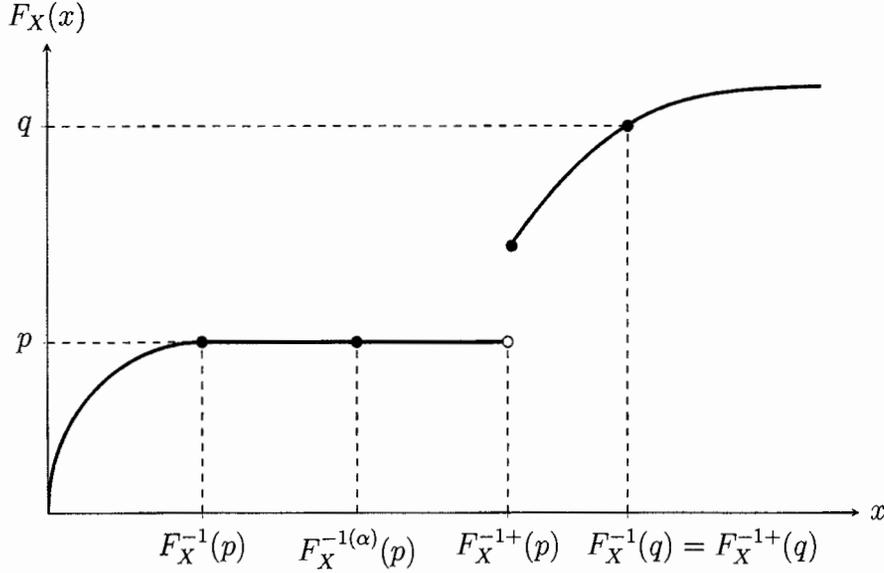


Figure 1.3 Fonction quantile, de répartition inverse et α -inverse.

La relation suivante est toujours valide, pour $\alpha \in [0, 1]$, $p \in (0, 1)$

$$F_X^{-1}(p) \leq F_X^{-1(\alpha)}(p) \leq F_X^{-1+}(p).$$

La relation précédente est stricte sur les intervalles où la fonction de répartition est constante et $\alpha \in (0, 1)$.

Il est intéressant de noter que $F_X^{-1(1)}(p) = F_X^{-1}(p)$ et $F_X^{-1(0)}(p) = F_X^{-1+}(p)$.

Maintenant, posons d de façon à ce que $0 < F_X(d) < 1$. Nous avons donc que $F_X^{-1}(F_X(d))$ et $F_X^{-1+}(F_X(d))$ prennent des valeurs finies et que

$$F_X^{-1}(F_X(d)) \leq d \leq F_X^{-1+}(F_X(d)).$$

Il est donc possible d'exprimer d comme

$$d = \alpha_d F_X^{-1}(F_X(d)) + (1 - \alpha_d) F_X^{-1+}(F_X(d)) = F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)), \quad (1.1)$$

où $\alpha_d \in [0, 1]$. Ceci implique que pour une variable aléatoire X et n'importe quel d tel que $0 < F_X(d) < 1$, il existe un $\alpha_d \in [0, 1]$ tel que $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.

Le théorème suivant facilite le calcul de la fonction quantile ou de la fonction de répartition inverse d'une fonction de la variable aléatoire X .

Théorème 1.1.1. *Soient les variables aléatoires réelles X et $g(X)$, où g est une fonction réelle et $0 < p < 1$.*

(a) *Si g est croissante et continue à gauche, alors*

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)). \quad (1.2)$$

(b) *Si g est croissante et continue à droite, alors*

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p)). \quad (1.3)$$

La preuve de ce théorème peut être consultée dans (Dhaene *et al.*, 2002).

1.2 Mesures de risque

Une mesure de risque est généralement définie comme étant une application

$$\begin{aligned} \rho: \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \rho(X) \end{aligned}$$

où Γ est un ensemble de variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dans ce mémoire, la variable aléatoire X représente les pertes associées au cours normal des affaires d'une compagnie.

Depuis plusieurs années, les mesures de risque sont utilisées dans un contexte de gestion des risques afin de déterminer le capital économique requis pour couvrir les pertes futures. Dans ce contexte, la quantité $\rho(X)$ représente donc le montant de capital économique requis pour que la compagnie puisse continuer ses activités.

Les mesures de risque les plus fréquemment utilisées sont présentées plus loin, mais tout d'abord, certaines propriétés *souhaitables* des mesures de risque sont présentées.

1.2.1 Quelques propriétés souhaitables d'une mesure de risque

Les cinq propriétés ci-dessous sont souvent citées comme étant souhaitables pour une mesure de risque.

Invariance en loi : pour tout $X_1, X_2 \in \Gamma$ avec $\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{P}(X_2 \leq x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\rho(X_1) = \rho(X_2)$.

L'invariance en loi assure qu'une mesure de risque prise sur deux variables aléatoires suivant la même loi sera identique pour les deux variables aléatoires.

Monotonie : pour tout $X_1, X_2 \in \Gamma$, si $X_1 \leq X_2$, alors $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

La monotonie nous assure que si les pertes occasionnées par une unité d'affaire sont toujours plus petites ou égales aux pertes d'une autre unité d'affaire, alors la mesure de risque appliquée à la première unité d'affaire sera aussi plus petite ou égale à la mesure de risque appliquée à la seconde.

Homogénéité : pour tout $X \in \Gamma$ et $a > 0$, $\rho(aX) = a\rho(X)$.

L'homogénéité nous assure que la mesure de risque n'est pas affectée par un changement d'unité de mesure, d'unité monétaire ou de volume pour une unité d'affaire donnée.

Invariance sous translation : pour tout $X \in \Gamma$ et $b \in \mathbb{R}$, $\rho(X + b) = \rho(X) + b$.

L'invariance sous translation assure que lorsque les pertes sont augmentées d'un nombre b représentant un risque certain, alors la mesure de risque qui en résulte est la mesure de risque prise sur les pertes X augmentées par le risque certain b .

Sous-additivité : pour tout $X_1, X_2 \in \Gamma$, $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

La sous-additivité assure que le risque de deux unités d'affaire est tout au plus aussi grand que la somme des risques de celles-ci. En effet, cette propriété tient compte du principe de diversification qui veut que la conjugaison des deux unités d'affaires résulte en un risque plus petit ou égal à la somme des risques individuels. L'égalité survient lorsqu'il n'y a pas de diversification entre les unités d'affaire.

Une mesure de risque est dite cohérente si elle satisfait aux propriétés de monotonie, d'homogénéité, d'invariance sous translation et de sous-additivité. Ce concept a été proposé par Artzner et al. dans l'article fondateur (Artzner *et al.*, 1999). Comme nous le verrons plus tard, il existe des mesures de risque qui sont fréquemment utilisées bien qu'elles ne soient pas cohérentes.

1.2.2 Le principe de l'écart-type

Le principe de l'écart-type est une des mesures de risque les plus simples. Considérons une variable aléatoire X suivant une distribution d'espérance μ_X et d'écart-type σ_X . La quantité $\rho_c(X) = \mu_X + c\sigma_X$, où $c > 0$ est fixé, est une mesure de risque définie pour $X \in \Gamma$, où Γ est un ensemble de variables aléatoires dont le deuxième moment est fini. Elle permet de s'assurer que les pertes ne dépasseront cette quantité qu'avec une probabilité déterminée par le paramètre c et la distribution sous-jacente. Cette forme simple de mesure de risque a souvent été

utilisée afin de déterminer les réserves actuarielles des compagnies d'assurance, par exemple. Elle est illustrée à la Figure 1.4.

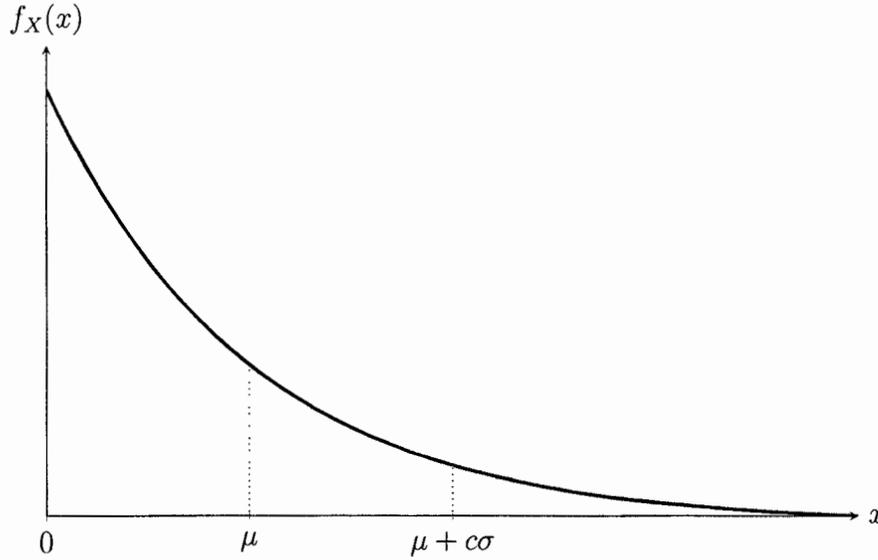


Figure 1.4 Principe de l'écart-type.

Vérifions en détail si le principe de l'écart-type respecte les cinq propriétés des mesures de risque présentées précédemment.

Posons tout d'abord $X, Y \in \Gamma$, deux variables aléatoires suivant la même loi de probabilité. Nous avons alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mu_X = \mu_Y$ et $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

En ce qui concerne l'invariance en loi, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\rho_c(X) = \mu_X + c\sigma_X = \mu_Y + c\sigma_Y = \rho_c(Y),$$

et donc le principe de l'écart-type est une mesure de risque qui respecte cette propriété. En ce qui concerne l'homogénéité positive, pour $a > 0$,

$$\rho_c(aX) = \mathbb{E}(aX) + c\sqrt{\text{Var}(aX)} = a\mu_X + ca\sigma_X = a\rho_c(X),$$

et donc le principe de l'écart-type respecte cette propriété. Maintenant, pour l'invariance sous translation, pour $b \in \mathbb{R}$,

$$\rho_c(X + b) = \mathbb{E}(X + b) + c\sqrt{\text{Var}(X + b)} = \mu_X + b + c\sigma_X = \rho_c(X) + b,$$

et donc le principe de l'écart-type respecte cette propriété.

Afin de vérifier le respect de la monotonie et de la sous-additivité, considérons maintenant que X et Y ne suivent pas nécessairement la même loi de probabilité. En ce qui concerne la monotonie, en supposant que $X \leq Y$, nous voulons montrer que

$$\rho_c(X) = \mu_X + c\sigma_X \leq \mu_Y + c\sigma_Y = \rho_c(Y)$$

et donc que

$$\mu_X + c\sigma_X \leq \mu_Y + c\sigma_Y \iff c(\sigma_X - \sigma_Y) \leq \mu_Y - \mu_X.$$

Afin que le principe de l'écart-type respecte la monotonie, il faudrait donc que

$$\sigma_X - \sigma_Y \leq \frac{\mu_Y - \mu_X}{c},$$

ce qui dépend de la distribution de chacune des variables aléatoires et qui n'est donc pas satisfait pour toutes les variables aléatoires $X, Y \in \Gamma$.

En ce qui concerne la sous-additivité, nous avons que

$$\begin{aligned} \rho_c(X + Y) &= \mathbb{E}(X + Y) + c\sigma_{X+Y} \\ &= \mu_X + \mu_Y + c\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{Cov}(X, Y)}, \end{aligned}$$

et que

$$\rho_c(X) + \rho_c(Y) = \mu_X + \mu_Y + c(\sigma_X + \sigma_Y).$$

Afin de respecter la sous-additivité, il faut donc que

$$\begin{aligned} \mu_X + \mu_Y + c\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{Cov}(X, Y)} &\leq \mu_X + \mu_Y + c(\sigma_X + \sigma_Y) \\ \iff \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{Cov}(X, Y)} &\leq \sigma_X + \sigma_Y, \end{aligned}$$

ce qui dépend de la distribution de X et Y , et donc le principe de l'écart-type n'est pas sous-additif.

Il est possible de conclure que le principe de l'écart-type respecte la propriété d'invariance en loi, d'homogénéité positive et d'invariance sous translation. Par contre, ce n'est pas une mesure de risque monotone et sous-additive, ce qui implique que le principe de l'écart-type n'est pas une mesure de risque cohérente.

1.2.3 Valeur-à-risque (VaR)

La valeur-à-risque (VaR) a longtemps été une mesure de risque standard afin d'évaluer l'exposition aux risques d'une entreprise financière. En effet, c'est une mesure de risque simple à comprendre et facile à communiquer à des collaborateurs qui sont mathématiquement moins instruits.

Supposons une variable aléatoire X représentant les pertes d'une compagnie d'assurance. La VaR de X , pour un niveau de certitude p , est notée $\text{VaR}_p(X)$ et représente le quantile p de la variable aléatoire X . Elle est donc définie, pour $p \in (0, 1)$, comme

$$\text{VaR}_p(X) = F_X^{-1}(p).$$

Une illustration de la VaR est donnée à la Figure 1.5.

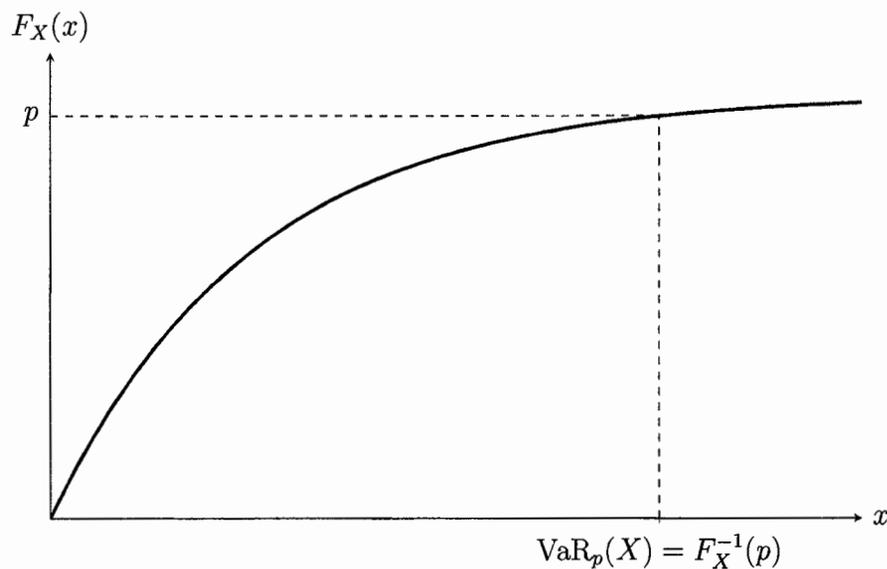


Figure 1.5 Illustration de la VaR.

La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente puisqu'elle n'est pas sous-additive. Elle est par contre monotone, invariante en loi, invariante sous la translation et homogène positive.

Pour vérifier la monotonie de la VaR, posons $X, Y \in \Gamma$. Si $X \leq Y$, alors $F_X(x) \geq F_Y(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Nous avons alors,

$$\text{VaR}_p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : F_Y(x) \geq p\} = \text{VaR}_p(Y).$$

Maintenant, pour vérifier l'homogénéité positive, posons $X \in \Gamma$, $a > 0$ et $p \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p(aX) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{aX}(x) \geq p\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(aX \leq x) \geq p\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x}{a}\right) \geq p\} \\ &= a \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq p\}. \end{aligned}$$

Concernant l'invariance sous la translation, posons $X \in \Gamma$, $b \in \mathbb{R}$ et $p \in [0, 1]$.

Alors,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p(X + b) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{X+b}(x) \geq p\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X + b \leq x) \geq p\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x - b) \geq p\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq p\} + b. \end{aligned}$$

Puisque la VaR est un quantile, elle est invariante en loi. Une preuve que la VaR n'est pas sous-additive peut être consultée dans (Artzner *et al.*, 1999) et (Klugman *et al.*, 2012).

Si l'on suppose que la variable aléatoire X représente les pertes possibles pour une unité d'affaire, alors il existe une probabilité de $100(1 - p)\%$ que la ligne d'affaire subisse une perte de plus de $\text{VaR}_p(X)$ ou, de façon similaire, il existe une probabilité de $100p\%$ que la perte subie soit sous la quantité $\text{VaR}_p(X)$.

Dans l'industrie financière, il est commun d'exprimer le résultat de la VaR en terme de période de retour. La période de retour est définie, pour $p \in (0, 1)$ comme

$$\text{Période de retour} = \frac{1}{1 - p}.$$

Par exemple, si l'on regarde la VaR au niveau 0.995, on dira que la ligne d'affaire subira une perte au-delà de $\text{VaR}_{0.995}(X)$ une fois en 200 ans. Cette affirmation n'est pas mathématiquement exacte, mais elle illustre bien la facilité de communiquer le résultat à des gens qui ne sont pas mathématiquement instruits.

La prochaine mesure de risque vient compléter l'information qu'apporte la VaR en ce sens qu'elle est basée sur celle-ci.

1.2.4 Conditional Tail Expectation (CTE)

La VaR est une mesure de risque qui donne une bonne indication du montant de capital requis pour couvrir les risques avec une probabilité déterminée. Par contre, elle ne tient pas compte des pertes possibles une fois que l'on a dépassé ce seuil. Il n'est donc pas possible de savoir à quel point la situation est critique au-delà de celui-ci. Le CTE vient remédier à ce problème.

Le CTE est défini comme suit dans (McNeil *et al.*, 2015) :

$$\text{CTE}_p(X) = \mathbb{E}(X | X > \text{VaR}_p(X)).$$

Lorsque la distribution de X est continue, il est possible d'écrire le CTE comme

$$\begin{aligned} \text{CTE}_p(X) &= \mathbb{E}(X | X > F_X^{-1}(p)) \\ &= \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}(X > F_X^{-1}(p)))}{\mathbb{P}(X > F_X^{-1}(p))} \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbf{1}(X > F_X^{-1}(p)) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 F_X^{-1}(q) dq \\ &= \text{TVaR}_p(X). \end{aligned}$$

Le CTE est communément appelé *Tail Value-at-Risk* ou *Expected Shortfall* dans la littérature lorsque la distribution de X est continue.

Le CTE est donc la moyenne des VaR au-delà du niveau p . Il est plus informatif que la VaR en ce qui concerne la queue de la distribution. La Figure 1.6 illustre le CTE.

Vérifions maintenant si le CTE est une mesure cohérente. La plupart des ces

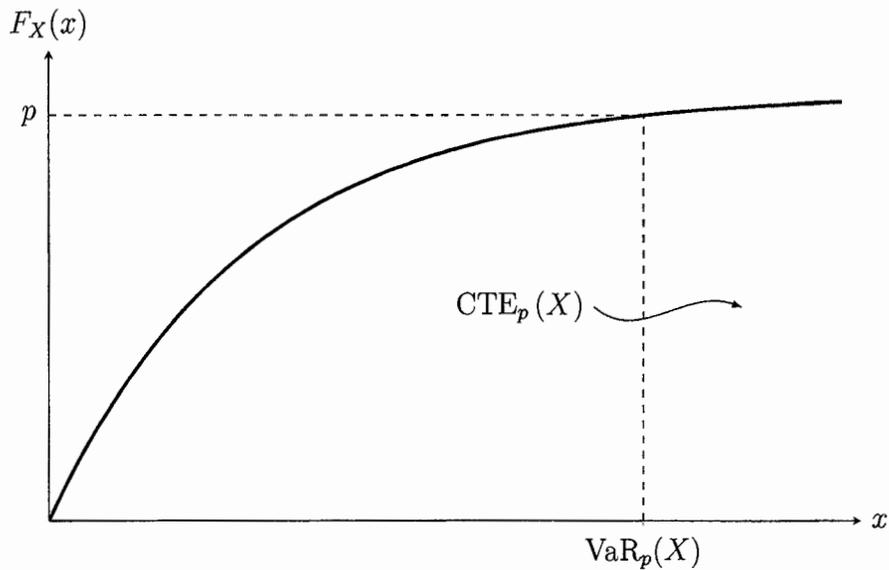


Figure 1.6 Illustration du CTE.

preuves découlent des propriétés de base de l'espérance conditionnelle.

Le CTE est monotone. Posons $X, Y \in \Gamma$. Si $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}(X|X > \text{VaR}_p(X)) \leq \mathbb{E}(Y|Y > \text{VaR}_p(Y))$$

pour $p \in [0, 1]$.

C'est aussi une mesure de risque homogène positive. Posons $X \in \Gamma$ et $a > 0$. Nous avons que

$$\mathbb{E}(aX|aX > \text{VaR}_p(aX)) = a\mathbb{E}(X|X > \text{VaR}_p(X)),$$

pour $p \in [0, 1]$.

Concernant l'invariance sous translation, posons $X \in \Gamma$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(X + b|X + b > \text{VaR}_p(X + b)) = \mathbb{E}(X|X > \text{VaR}_p(X)) + b.$$

Le CTE est donc invariant sous la translation.

La preuve que le CTE est sous-additif lorsque la distribution de X est continue peut être consultée dans (Embrechts et Wang, 2015).

La CTE est donc une mesure de risque cohérente si la distribution de X est continue. Elle est aussi invariante en loi.

1.3 Ordonnement de variables aléatoires

Le remplacement d'une variable aléatoire d'intérêt par une autre variable aléatoire plus *conservatrice* est une pratique courante en actuariat. Le but étant de travailler avec une variable aléatoire ayant une structure plus simple, ce qui permet de déterminer sa distribution plus facilement. Ce principe permet aussi d'obtenir des résultats plus prudents lors du calcul des primes, des réserves ou du capital économique, pour ne nommer que ceux-ci. En effet, bien que les méthodes utilisées lors des calculs soient bien développées dans la littérature et qu'elles tiennent théoriquement la route, il demeure quand même une incertitude quant aux résultats obtenus. Cette incertitude provient généralement du manque de données en terme de quantité et de la fiabilité de celles-ci. Il est donc important de demeurer prudent face aux résultats obtenus afin de s'assurer de la pérennité de l'entreprise et de protéger les assurés d'une compagnie d'assurance. La suite de cette section permettra d'ordonner ces variables et de déterminer ce que l'on entend par une variable aléatoire plus ou moins avantageuse. Il est à noter que la présentation des concepts et résultats de cette section provient de (Dhaene *et al.*, 2002), complémentée par plusieurs preuves et explications qui ne se trouvent pas dans cet article.

Pour la suite, nous ne considérons que des variables aléatoires dont l'espérance est finie. Rappelons qu'une variable aléatoire X a une espérance finie lorsque $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Ceci implique que $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F_X(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xF_X(x) = 0$. Il

est donc possible d'écrire $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^0 x dF_X(x) - \int_0^{\infty} x d(1 - F_X(x))$ puisque les intégrales existent. La restriction sur le type de variable aléatoire que nous utilisons combinée à l'intégration par parties des deux termes de droite de la dernière expression nous permet d'obtenir l'expression suivante pour $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx. \quad (1.4)$$

Nous pouvons maintenant définir la prime *stop-loss*.

Définition 1.3.1. *Soit une variable aléatoire X et un nombre réel d . La prime stop-loss de X , avec une rétention d , est définie comme $\mathbb{E}((X - d)_+)$.*

À partir de l'équation (1.4), il est facile de vérifier que

$$\mathbb{E}((X - d)_+) = \int_d^{\infty} (1 - F_X(x)) dx. \quad (1.5)$$

De cette expression, on peut voir que la prime *stop-loss* peut être considérée comme étant le poids de la queue supérieure de la distribution de la variable aléatoire X , à partir du seuil de rétention d . En effet, la prime *stop-loss* est l'aire entre la fonction constante 1 et la fonction de répartition $F_X(x)$, à partir de d , ceci qui est illustré à la Figure 1.7.

Il est aussi intéressant de noter que $d \mapsto \mathbb{E}((X - d)_+)$ est une fonction continue et décroissante, dont la dérivée est $F_x(d) - 1 \leq 0$, ce qui tend vers 0 lorsque $d \rightarrow +\infty$.

Le concept de prime *stop-loss* sera utile à la caractérisation de l'ordre *stop-loss* et de l'ordre convexe. Commençons tout d'abord par définir l'ordre *stop-loss*.

Définition 1.3.2. *Soient deux variables aléatoires X et Y . On dit que X précède Y au sens de l'ordre stop-loss, noté $X \leq_{sl} Y$, si et seulement si*

$$\mathbb{E}(\nu(X)) \leq \mathbb{E}(\nu(Y)), \quad (1.6)$$

pour toute fonction ν convexe et croissante pour laquelle l'espérance existe.

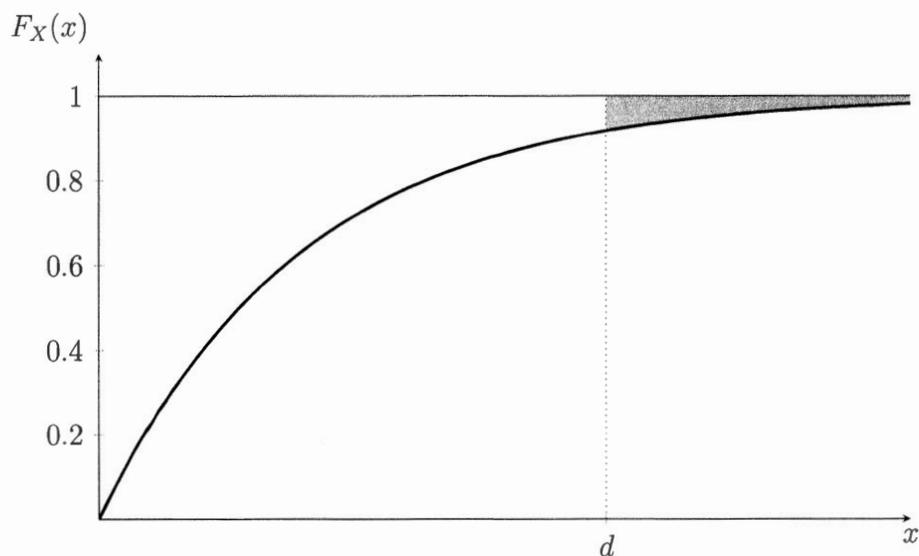


Figure 1.7 Illustration de la prime *stop-loss*.

Dans la littérature, on retrouve souvent l'ordre *stop-loss* sous l'appellation *ordre convexe croissant*, noté \leq_{icx} . Cette appellation découle évidemment de la définition basée sur l'espérance de fonctions convexes et croissantes.

Bien que cette définition soit toute simple, il peut être difficile, voire impossible, de vérifier la condition pour toute fonction convexe et croissante. Intuitivement, toute fonction convexe et croissante peut être obtenue en prenant la limite de combinaisons linéaires positives de fonctions $\phi_d(t) = (t - d)_+$. Puisque $(X - d)_+$ est une fonction convexe et croissante, il est donc possible de caractériser l'ordre *stop-loss* à l'aide de la prime *stop-loss*, ce qui résulte en une condition plus simple à vérifier. Soient deux variables aléatoires X et Y . Nous avons que $X \leq_{sl} Y$ si et seulement si

$$\mathbb{E}((X - d)_+) \leq \mathbb{E}((Y - d)_+), \quad \forall d \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Cette caractérisation de l'ordre *stop-loss* $X \leq_{sl} Y$ nous indique donc que X possède en quelque sorte une queue de distribution supérieure uniformément plus

petite que celle de Y . Supposons que les variables aléatoires X et Y représentent les pertes d'une entreprise et que $X \leq_{sl} Y$. La dernière caractérisation de l'ordre *stop-loss* indique que Y est moins intéressante que X du point de vue de l'entreprise puisque la variable aléatoire Y implique plus de pertes pour celle-ci.

L'ordre *stop-loss* implique aussi que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. En effet, en choisissant $d < 0$ dans l'équation (1.5), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - d)_+) &= \int_d^0 (1 - F_X(x)) dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx \\ &= - \int_d^0 F_X(x) dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx - d. \end{aligned}$$

En additionnant d de chaque côté de l'équation, et en faisant tendre d vers $-\infty$, on obtient que

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow -\infty} (d + \mathbb{E}((X - d)_+)) &= \lim_{d \rightarrow -\infty} \left(- \int_d^0 F_X(x) dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx \right) \\ &= - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx \\ &= \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Donc, en additionnant d à chaque membre de l'équation (1.7) et en prenant la limite lorsque $d \rightarrow -\infty$, nous obtenons bien que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Nous sommes à la recherche d'une variable aléatoire moins attrayante afin de remplacer notre variable aléatoire d'intérêt et qui aura une distribution plus facile à caractériser. Nous avons vu que si $X \leq_{sl} Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. De façon intuitive, il semble assez clair que nous obtiendrons une *meilleure* approximation dans le cas où $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$. Ceci nous mène donc vers l'ordre convexe.

Définition 1.3.3. Soient deux variables aléatoires X et Y . On dit que X précède Y au sens de l'ordre convexe, noté $X \leq_{cx} Y$, si et seulement si

$$\mathbb{E}(\nu(X)) \leq \mathbb{E}(\nu(Y)), \tag{1.8}$$

pour toute fonction ν convexe pour laquelle l'espérance existe.

L'ordre convexe ressemble beaucoup à l'ordre *stop-loss*, à la différence qu'elle permet d'ordonner les variables aléatoires à l'aide de fonctions convexes qui ne sont pas nécessairement croissantes. Tout comme pour l'ordre *stop-loss*, il est très compliqué de vérifier que deux variables aléatoires l'ordre convexe. Heureusement, il existe une caractérisation de l'ordre convexe avec des conditions plus simples à vérifier. Soient deux variables aléatoires X et Y . On dit que X précède Y au sens de l'ordre convexe si et seulement si

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}((X - d)_+) &\leq \mathbb{E}((Y - d)_+), \quad \forall d \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Cette caractérisation découle du fait qu'intuitivement, toute fonction convexe peut être obtenue en prenant la limite de combinaisons linéaires positive de fonctions $\phi_d(t) = (t - d)_+$. Elle nous permet aussi d'observer que l'ordre convexe implique donc qu'en plus d'être ordonnées au sens de l'ordre *stop-loss*, les deux variables aléatoires ont aussi la même espérance. Alors, le fait que $X \leq_{cx} Y$ nous assure que la queue supérieure de la distribution de Y est moins attrayante que celle de X et ce tout en ayant la même espérance. Mais qu'en est-il de la relation entre les queues inférieures de ces distributions? À partir de l'équation suivante :

$$\mathbb{E}((X - d)_+) - \mathbb{E}((d - X)_+) = \mathbb{E}(X) - d, \quad (1.9)$$

et de la condition d'égalité des espérances, nous avons que si $X \leq_{cx} Y$

$$\mathbb{E}((X - d)_+) - \mathbb{E}((d - X)_+) = \mathbb{E}((Y - d)_+) - \mathbb{E}((d - Y)_+)$$

et donc que

$$\mathbb{E}((d - Y)_+) - \mathbb{E}((d - X)_+) = \mathbb{E}((Y - d)_+) - \mathbb{E}((X - d)_+) \geq 0.$$

Ce qui nous donne que

$$\mathbb{E}((d - Y)_+) - \mathbb{E}((d - X)_+) \geq 0,$$

et donc que

$$\mathbb{E}((d - X)_+) \leq \mathbb{E}((d - Y)_+).$$

Il est à noter qu'en utilisant (1.4), (1.5) et (1.9), nous obtenons que

$$\mathbb{E}((d - X)_+) = \int_{-\infty}^d F_X(x) dx.$$

De cette expression, on peut voir que $\mathbb{E}((d - X)_+)$ peut être considéré comme étant le poids de la queue inférieure de la distribution de la variable aléatoire X , en deça du seuil d . En effet, c'est l'aire sous la fonction de répartition $F_X(x)$, entre $-\infty$ et d .

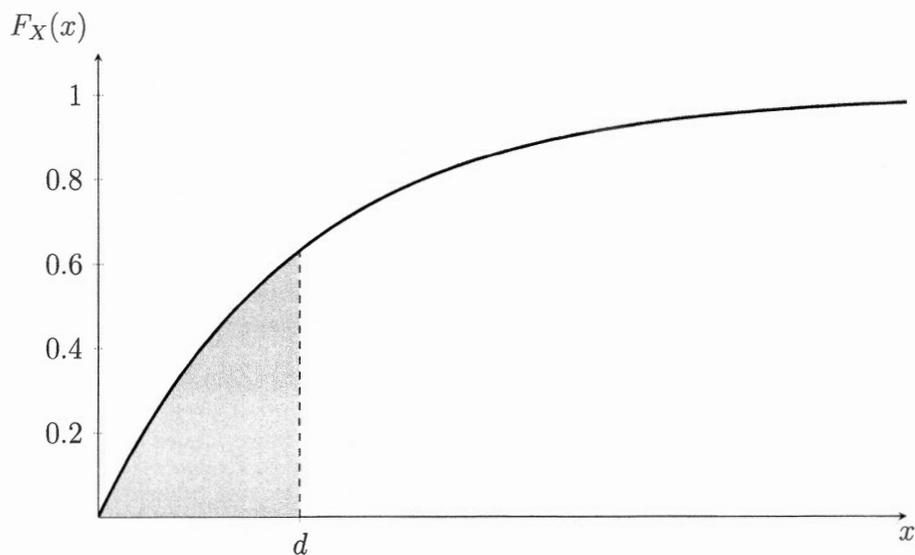


Figure 1.8 Illustration de $\mathbb{E}((d - X)_+)$.

Affirmer que X est plus petit que Y dans le sens de l'ordre convexe implique donc qu'autant la queue inférieure que la queue supérieure de Y est moins attrayante

que celle de X puisque la queue inférieure de la distribution de Y est plus grande que celle de X . Nous avons donc, lorsque X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe, qu'autant les pertes importantes que les gains importants sont moins attrayants pour la distribution de Y . Il est assez intuitif de comprendre pour quelles raisons une entreprise veut éviter les pertes importantes. Ce l'est probablement moins pour les gains importants. En effet, une entreprise est plus intéressée par les gains importants que les pertes importantes. Cependant, il existe plusieurs raisons pour lesquelles une entreprise voudrait minimiser les gains importants qui surviennent de façon imprévue. Par exemple, toutes les entreprises essaient de prévoir les revenus futurs afin d'entreprendre le plus de projets possibles au moment opportun. Effectivement, une entreprise réalise en général un meilleur rendement sur ses capitaux lorsqu'ils sont investis dans ses activités régulières. Ceci est tout à fait intuitif : si ce n'était pas la situation, il lui serait préférable d'investir ses capitaux autre part et par le fait même, de changer la vocation même de l'entreprise. Par ailleurs, lorsque des gains imprévus surviennent et que l'entreprise n'a pas eu le temps de mettre des projets en branle, ceci la mènera à payer plus d'impôts que prévu, ce qui diminue le rendement sur les capitaux. Bien qu'une entreprise préférera les gains importants imprévus aux pertes importantes imprévues, il est tout de même plus prudent de gérer les risques en minimisant les probabilités de chacun de ces résultats possibles. L'ordre convexe permet donc de remplacer une variable aléatoire d'intérêt par une autre moins attrayante, autant au niveau de pertes que des gains imprévus.

En résumé, il est donc possible de caractériser l'ordre convexe de trois façons :

$$X \leq_{cx} Y \iff \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}((X - d)_+) \leq \mathbb{E}((Y - d)_+), \forall d \end{cases},$$

ou

$$X \leq_{cx} Y \iff \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}((d - X)_+) \leq \mathbb{E}((d - Y)_+), \forall d \end{cases},$$

ou

$$X \leq_{cx} Y \iff \begin{cases} \mathbb{E}((X - d)_+) \leq \mathbb{E}((Y - d)_+), \\ \mathbb{E}((d - X)_+) \leq \mathbb{E}((d - Y)_+), \end{cases} \quad \forall d.$$

Par exemple, en utilisant la fonction convexe $\nu(x) = (x - a)^2$, où $a = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, il en découle que $\text{Var}(X) \leq \text{Var}(Y)$ lorsque $X \leq_{cx} Y$. L'implication inverse est généralement fausse.

Les concepts vus dans cette section serviront à établir une borne supérieure pour une somme de variables aléatoires dont la distribution conjointe est inconnue et difficile à caractériser.

1.4 Comonotonicité

La variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est souvent d'intérêt lorsque nous voulons quantifier le risque d'un portefeuille. Les termes X_i de cette somme ne sont habituellement pas mutuellement indépendants et il est généralement difficile d'identifier la structure de dépendance du vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Habituellement, seules les distributions marginales de ce vecteur sont connues. Il sera alors intéressant de déterminer la structure de dépendance du vecteur \underline{X} résultant en une agrégation des pertes S qui est la moins favorable selon les distributions marginales données. Tel qu'il sera expliqué dans cette section, la distribution comonotone en est une qui nous donne la plus grande somme au sens de l'ordre convexe.

Il est à noter que les concepts et résultats de cette section proviennent de (Dhaene *et al.*, 2002), complétés par plusieurs preuves et explications qui ne se trouvent

pas dans cet article.

Commençons par définir la comonotonie pour un sous-ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^n . Un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sera noté \underline{x} . Pour deux vecteurs \underline{x} et $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, la notation $\underline{x} \leq \underline{y}$ sera utilisée afin d'exprimer que le même ordre, composante par composante de chaque vecteur, est respecté. Cet ordre $\underline{x} \leq \underline{y}$ est défini par $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Définition 1.4.1. *Le sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit comonotone si pour tout \underline{x} et \underline{y} inclus dans A , nous avons soit $\underline{x} \leq \underline{y}$ ou $\underline{y} \leq \underline{x}$.*

Nous avons donc qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est comonotone si pour \underline{x} et \underline{y} quelconques inclus dans A , si $x_i \leq y_i$ pour un i quelconque, alors $\underline{x} \leq \underline{y}$ est vrai.

Tel que mentionné dans (Dhaene *et al.*, 2002), un ensemble comonotone est « un ensemble *mince* : il ne peut contenir de sous-ensembles de dimension plus grande que 1 ». En effet, un sous-ensemble $A \in \mathbb{R}^n$ comonotone ne peut être représenté que par une courbe croissante à une dimension, et ce, peu importe la valeur de n . La Figure 1.9 illustre graphiquement la forme que peut prendre un sous-ensemble $A \in \mathbb{R}^3$ comonotone.

Maintenant, supposons que l'on regarde un sous-ensemble comonotone $B \in \mathbb{R}^2$, illustré par la courbe noire continue à la Figure 1.10. Supposons que nous ajoutons la courbe pointillée à long traits ainsi que tous les points entre les deux courbes au sous-ensemble B . Ce sous-ensemble n'est maintenant plus comonotone. Effectivement, bien que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ et $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$, il n'est pas possible d'affirmer que $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$ ou que $(x_3, y_3) \leq (x_2, y_2)$ puisque $x_2 \leq x_3$ mais $y_3 \leq y_2$. Ceci montre bien qu'un sous-ensemble comonotone doit être de dimension 1.

Il est aussi intéressant de noter que tout sous-ensemble d'un ensemble comonotone

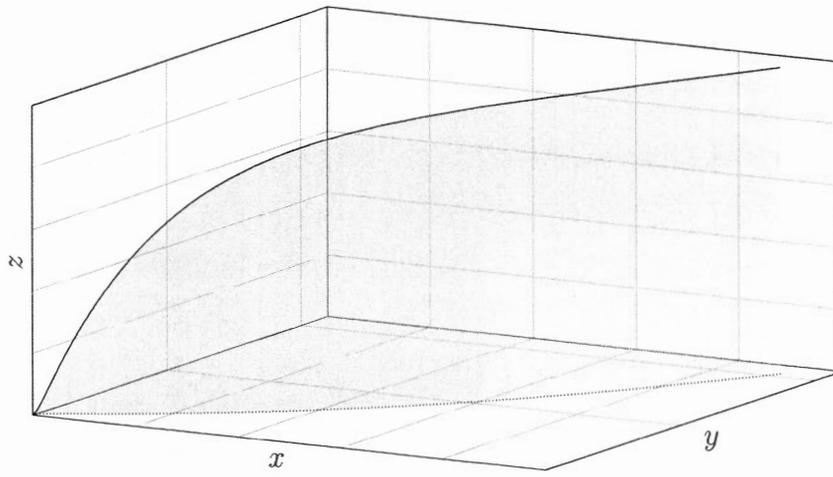


Figure 1.9 Ensemble comonotone.

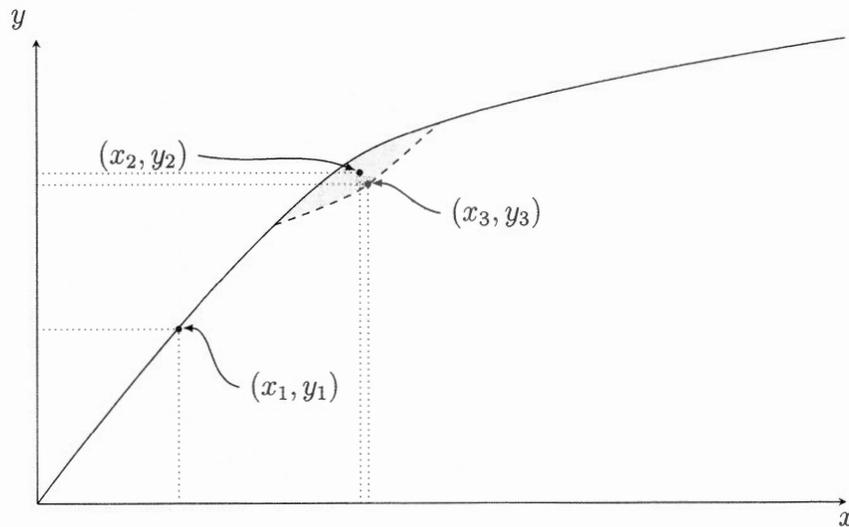


Figure 1.10 Ensemble non-comonotone.

est aussi comonotone.

La notion de support comonotone sera aussi importante pour la suite des choses.

Le support d'une variable aléatoire continue est défini comme

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists h \in \mathbb{R} \text{ pour lequel } \mathbb{P}(x \in (x - h, x + h)) > 0\}.$$

Ce support peut être interprété comme l'ensemble des réalisations possibles du vecteur aléatoire \underline{X} .

Nous pouvons maintenant définir les vecteurs aléatoires comonotones.

Définition 1.4.2. *Un vecteur aléatoire \underline{X} est dit comonotone s'il a un support comonotone.*

À partir de cette définition, il est possible de voir que la comonotonie implique une structure de dépendance positive très forte. En effet, lorsque deux vecteurs \underline{x} et \underline{y} font partie du support comonotone du vecteur aléatoire \underline{X} , ils sont alors ordonnés selon leur composantes. Alors tout autre vecteur faisant partie de ce support doit aussi être ordonné selon ses composantes, ce qui implique une forte dépendance positive entre les vecteurs formant le support comonotone.

Le théorème suivant présente quelques caractérisations équivalentes pour la comonotonie.

Théorème 1.4.1. *Un vecteur aléatoire \underline{X} est comonotone si et seulement si l'une ou l'autre des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- (1) \underline{X} a un support comonotone ;
- (2) Pour tout $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, nous avons

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min \{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\}; \quad (1.10)$$

- (3) Pour $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, nous avons

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)); \quad (1.11)$$

- (4) Il existe une variable aléatoire Z et des fonctions croissantes $f_i, (i = 1, \dots, n)$, telles que

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), \dots, f_n(Z)). \quad (1.12)$$

Une preuve de ce théorème peut être consultée dans (Dhaene *et al.*, 2002).

L'inégalité,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \leq \min \{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\}, \quad (1.13)$$

est connue sous le nom de borne supérieure de Fréchet-Hoeffding. Elle est valide pour tout vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$. Il est possible de montrer que la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \min \{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\}$ est la fonction de répartition du vecteur aléatoire $(F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ où $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Notons que le vecteur aléatoire $(F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ possède les mêmes distributions marginales que le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . La borne supérieure de Fréchet-Hoeffding (1.13) indique donc que dans la classe de tous les vecteurs aléatoires (X_1, \dots, X_n) possédant les mêmes distributions marginales, le vecteur comonotone est celui qui maximise la probabilité que chacun des X_i ($i = 1, \dots, n$) résulte simultanément en de *petites* valeurs. Ceci suggère que la comonotonicité est une structure de dépendance positive très forte. La condition (1.10) découle donc de la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding.

À partir de maintenant, la notation $\underline{X}^c = (X_1^c, \dots, X_n^c)$ sera utilisée pour désigner un vecteur aléatoire comonotone possédant les mêmes distributions marginales que le vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$. À l'aide de la condition (1.11), nous avons que pour tout vecteur aléatoire $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$, son homologue comonotone $\underline{X}^c \in \mathbb{R}^n$ possède le support suivant

$$\{(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \dots, F_{X_n}^{-1}(p)) \mid 0 < p < 1\}.$$

Il est important de noter que ce support n'est pas nécessairement composé d'une seule courbe continue. Il est possible que cet ensemble soit composé de plusieurs courbes qui ne sont pas connectées entre elles. En effet, si une ou plusieurs des fonctions de répartition de \underline{X} comportent des portions constantes, celles-ci résulteront en des trous dans la courbe qui représente ce support. Afin de remédier

à cette situation et d'ainsi obtenir un ensemble de points continus, il suffit de connecter les extrémités des courbes consécutives de l'ensemble, ce qui donnera une courbe comonotone continue dans \mathbb{R}^n . Ce nouvel ensemble, que l'on nommera support connexe de \underline{X}^c , peut être paramétrisé de la façon suivante :

$$\left\{ \left(F_{X_1}^{-1}(\alpha)(p), \dots, F_{X_n}^{-1}(\alpha)(p) \right) \mid 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}. \quad (1.14)$$

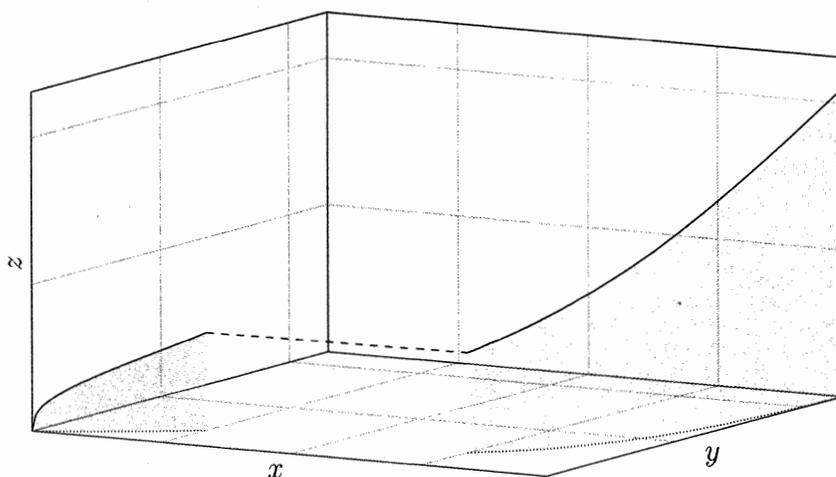


Figure 1.11 Support connexe comonotone.

Le support connexe de \underline{X}^c est un sous-ensemble comonotone de \mathbb{R}^n . La Figure 1.11 représente un support connexe comonotone. Il est à noter que cette paramétrisation n'est pas nécessairement unique. Il se pourrait que des éléments faisant partie du support connexe puissent être caractérisés par différentes valeurs de α .

Nous pouvons maintenant passer à la somme des composantes d'un vecteur aléatoire comonotone, notée S^c , qui est définie par $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$. Le théorème suivant permet de déterminer la distribution d'une somme S^c de variables aléatoires comotonnes.

Théorème 1.4.2. *La fonction de répartition α -inverse d'une somme S^c de variables aléatoires comonotones (X_1^c, \dots, X_n^c) , notée $F_{S^c}^{-1(\alpha)}$, est donnée, pour $p \in (0, 1)$ et $\alpha \in [0, 1]$, par*

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1(\alpha)}(p). \quad (1.15)$$

Démonstration. Considérons le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) et son homologue comonotone (X_1^c, \dots, X_n^c) . Posons $g(U) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1}(U)$, où $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Alors, par la condition (1.11), nous avons que

$$S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1}(U). \quad (1.16)$$

Puisqu'une fonction quantile est croissante et continue à gauche, alors la somme de fonctions quantiles est aussi croissante et continue à gauche. Il est donc possible d'utiliser l'équation (1.2) afin d'obtenir, pour $0 < p < 1$,

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)) = g(p).$$

Nous avons donc que la fonction quantile de S^c peut-être calculée, pour $0 < p < 1$, à partir de

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1}(p). \quad (1.17)$$

Posons maintenant, $h(U) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1+}(U)$. En utilisant la condition (1.12) avec les fonctions croissantes $F_{X_i^c}^{-1+}$ ($i = 1, \dots, n$), nous obtenons que

$$S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1+}(U).$$

L'égalité en distribution est possible grâce au support connexe de \underline{X}^c . Puisque la fonction de répartition inverse de chacun des X_i est croissante et continue à droite, leur somme l'est tout autant. Nous avons donc que h est croissante et continue à droite.

Il est donc possible d'utiliser l'équation (1.3) afin d'obtenir, pour $0 < p < 1$,

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = F_{h(U)}^{-1+}(p) = h(F_U^{-1+}(p)) = h(p).$$

Nous avons donc que la fonction de répartition inverse $F_{S^c}^{-1+}$ de S^c peut-être calculée, pour $0 < p < 1$, à partir de

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p). \quad (1.18)$$

En multipliant l'égalité (1.17) par α et l'égalité (1.18) par $(1 - \alpha)$ et en sommant les deux égalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) &= \alpha \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p) \\ &= \alpha (F_{X_1}^{-1}(p) + \dots + F_{X_n}^{-1}(p)) + (1 - \alpha) (F_{X_1}^{-1+}(p) + \dots + F_{X_n}^{-1+}(p)) \\ &= (\alpha F_{X_1}^{-1}(p) + (1 - \alpha) F_{X_1}^{-1+}(p)) + \dots + (\alpha F_{X_n}^{-1}(p) + (1 - \alpha) F_{X_n}^{-1+}(p)) \\ &= F_{X_1}^{-1(\alpha)}(p) + \dots + F_{X_n}^{-1(\alpha)}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p), \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat recherché. \square

À l'aide de ce théorème, il est possible de conclure que $S^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(U)$, où $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Ceci implique aussi que la somme des fonctions α -inverse a la même distribution que la somme des fonctions de répartition quantiles. Ce théorème nous permet aussi de définir le support connexe comonotone de la variable aléatoire S^c , par

$$\begin{aligned} &\left\{ F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) \mid 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p) \mid 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

La deuxième partie de la preuve du théorème 1.4.2 nous permet d'établir que

$$F_{S^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0),$$

tandis que la première partie de la preuve de ce même théorème nous permet d'établir que

$$F_{S^c}^{-1}(1) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1).$$

Nous avons donc que la valeur minimale pour la somme comonotone est la même que la somme des valeurs minimales de chaque terme. Elle est soit finie ou égale à $-\infty$ si l'un des termes est $-\infty$. De la même façon, la valeur maximale de la somme comonotone est égale à la somme des valeurs maximales de chaque terme. Elle est soit finie ou égale à $+\infty$ si l'un des termes est $+\infty$.

Posons $S = \sum_{i=1}^n X_i$, où $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire. Nous avons que $S \geq \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0)$ avec probabilité 1. Ceci implique que

$$F_{S^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0) \leq F_S^{-1+}(0).$$

De la même façon, nous avons que $S \leq \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1)$ avec probabilité 1. Ceci implique que

$$F_S^{-1}(1) \leq \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1) = F_{S^c}^{-1}(1).$$

Ceci nous indique donc que le support de la somme des composantes d'un vecteur aléatoire \underline{X} est contenu dans l'intervalle $[\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0), \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1)]$ et donc qu'elle est incluse dans l'intervalle $[F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)]$. Il en découle donc que la valeur minimale de la somme S d'un vecteur aléatoire \underline{X} est plus grande ou égale à la valeur minimale de la somme comonotone S^c , ce qui est logique puisque les termes de \underline{X}^c sont petits simultanément, par la comonotonie, contrairement à un vecteur aléatoire \underline{X} . En suivant le même raisonnement, la valeur maximale de la somme S d'un vecteur aléatoire \underline{X} est plus petite ou égale à la valeur maximale

de la somme comonotone S^c , ce qui est aussi logique puisque les termes de \underline{X}^c sont grands simultanément, par la comonotonie, contrairement à un vecteur aléatoire \underline{X} .

Il est maintenant possible de déterminer la fonction de répartition de S^c . Lorsque les fonctions de répartition des X_i ($i = 1, \dots, n$) sont connues, nous avons que

$$\begin{aligned} F_{S^c}(x) &= \sup \{p \in (0, 1) \mid F_{S^c}(x) \geq p\} \\ &= \sup \{p \in (0, 1) \mid F_{S^c}^{-1}(p) \leq x\} \\ &= \sup \left\{ p \in (0, 1) \mid \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) \leq x \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans la suite de ce document, nous dirons que F_X est strictement croissante lorsque ce sera le cas sur l'intervalle $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$.

Pour une variable aléatoire X quelconque, nous avons les équivalences suivantes :

$$F_X \text{ est strictement croissante} \iff F_X^{-1} \text{ est continue sur } (0, 1), \quad (1.20)$$

et

$$F_X \text{ est continue} \iff F_X^{-1} \text{ est strictement croissante sur } (0, 1). \quad (1.21)$$

Ces équivalences nous permettent de simplifier la détermination de la fonction de répartition de S^c . Posons les fonctions de répartition marginales F_{X_i} ($i = 1, \dots, n$) du vecteur aléatoire comonotone \underline{X}^c comme étant strictement croissantes. Nous avons que chaque fonction quantile $F_{X_i}^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$) est continue sur l'intervalle $(0, 1)$, ce qui implique que $F_{S^c}^{-1}$ est aussi continue sur l'intervalle $(0, 1)$ puisque $F_{S^c}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}(p)$ est valide pour $p \in (0, 1)$. Ceci implique aussi que F_{S^c} est strictement croissante sur l'intervalle $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$.

Posons maintenant les fonctions de répartition marginales F_{X_i} ($i = 1, \dots, n$) du vecteur aléatoire comonotone \underline{X}^c comme étant continues. Nous avons que chaque fonction quantile $F_{X_i}^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$) est strictement croissante sur l'intervalle

$(0, 1)$, ce qui implique que $F_{S^c}^{-1}$ est aussi strictement croissante sur l'intervalle $(0, 1)$ puisque $F_{S^c}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}(p)$ est valide pour $p \in (0, 1)$. Ceci implique aussi que F_{S^c} est strictement croissante sur l'intervalle $(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Nous pouvons donc déduire que dans le cas où les fonctions de répartition marginales F_{X_i} sont strictement croissantes et continues, la fonction de répartition F_{S^c} est déterminée de façon unique par $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, pour $F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1)$, ou de façon équivalente par

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \quad (1.22)$$

pour $F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1)$. Dans ce cas, il est donc suffisant de solutionner l'équation précédente afin de déterminer la fonction de répartition F_{S^c} .

Le théorème suivant permet de montrer qu'à l'instar de la fonction de répartition, la prime *stop-loss* de la somme de variables aléatoires comonotones peut aussi être déterminée à partir de la prime *stop-loss* des termes qui la compose.

Théorème 1.4.3. *La prime stop-loss d'une somme S^c de variables aléatoires comonotones, pour $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$, est donnée par*

$$\mathbb{E}((S^c - d)_+) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - d_i)_+), \quad (1.23)$$

où les d_i , pour $i = 1, \dots, n$, sont donnés par

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)), \quad (1.24)$$

et où $\alpha_d \in [0, 1]$ est déterminé par

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d. \quad (1.25)$$

Démonstration. Posons $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, et donc $0 < F_{S^c}(d) < 1$. Le support connexe de \underline{X}^c , tel que défini dans (1.14) ne peut avoir qu'un seul point

commun avec l'hyperplan $\{\underline{x} \mid \sum_{i=1}^n x_i = d\}$ puisque le support connexe est comotone. Ceci est clair puisque l'hyperplan ne contient pas deux points différents \underline{x} et \underline{y} tels que $\underline{x} \leq \underline{y}$ ou $\underline{x} \geq \underline{y}$. L'ensemble contenant les points de l'hyperplan n'est donc pas comotone. En effet, pour que l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = d$ soit valide lorsque l'on augmente (diminue) la valeur d'une ou de plusieurs coordonnées afin d'obtenir un nouveau point de l'hyperplan, on doit nécessairement diminuer (augmenter) la valeur d'une ou de plusieurs autres coordonnées.

Montrons maintenant que le vecteur $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$, tel que défini dans le théorème, est l'unique point à l'intersection du support connexe comotone et de l'hyperplan. Puisque $0 < F_{S^c}(d) < 1$, nous avons, par l'équation (1.1), qu'il existe un $\alpha_d \in [0, 1]$ qui respecte la condition (1.25) du théorème. Nous avons aussi, par le théorème (1.4.2), que $\sum_{i=1}^n d_i = d$. Nous avons donc que le vecteur \underline{d} dont les d_i ($i = 1, \dots, n$) sont définis en (1.24) est un élément du support connexe comotone de \underline{X}^c et de l'hyperplan $\{\underline{x} \mid \sum_{i=1}^n x_i = d\}$. Puisque nous avons établi qu'il n'existe qu'un seul point à cette intersection, il est possible de conclure que \underline{d} est bel et bien cet unique point.

Maintenant, choisissons un vecteur \underline{x} parmi les éléments du support connexe comotone de \underline{X}^c . Puisque \underline{x} et \underline{d} font tous deux partie du support continu comotone de \underline{X}^c , nous savons que s'il existe un j tel que $x_j > d_j$, alors $x_k \geq d_k$ pour tout k . De la même façon, s'il existe un j tel que $x_j \leq d_j$, alors $x_k \leq d_k$ pour tout k . À partir de ce raisonnement et du fait que $\sum_{i=1}^n d_i = d$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$(x_1 + \dots + x_n - d)_+ \equiv (x_1 - d_1)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+.$$

En remplaçant les constantes par les variables aléatoires correspondantes et en prenant l'espérance, nous obtenons

$$\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - d)_+) \equiv \mathbb{E}((X_1 - d_1)_+) + \dots + \mathbb{E}((X_n - d_n)_+),$$

ce qui est bien l'équation que l'on cherchait à prouver puisque $S^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n X_i$. \square

Le théorème (1.4.3) nous permet de déterminer la prime *stop-loss* de la somme comonotone à partir de la somme des primes *stop-loss* de chacune des variables aléatoires composant la somme comonotone. Ce théorème est très utile puisqu'il nous évite d'avoir à déterminer la distribution complète de la somme comonotone. Seule la connaissance de la fonction de répartition F_{S^c} est requise et elle peut être facilement déterminée à partir de (1.19).

Le but de toute cette section est de borner la somme de variables aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$ par une somme de variables aléatoires qui est au moins aussi risquée du point de vue de l'entreprise. L'idée étant de borner la somme S par une autre somme pour laquelle il sera possible de déterminer la distribution. Cette nouvelle somme permet donc de quantifier le risque de façon conservatrice par rapport aux risques réels encourus par une entreprise. Cette technique n'est bien évidemment nécessaire que lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution de la somme S originale ou lorsqu'il est trop compliqué de travailler avec celle-ci.

Théorème 1.4.4. *Pour tout vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) nous avons*

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c. \quad (1.26)$$

Démonstration. Puisque $(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$, il est évident que leurs espérances sont égales. Il suffit donc de montrer que ces deux vecteurs respectent l'ordre *stop-loss*, soit de montrer que

$$\mathbb{E}((X_1 + X_2 + \dots + X_n - d)_+) \leq \mathbb{E}((X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c - d)_+)$$

est vraie pour tout $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, puisque les primes *stop-loss* sont égales pour toute autre valeur de d .

Ce qui suit est vrai pour tout vecteur (x_1, \dots, x_n) lorsque $\sum_{i=1}^n d_i = d$:

$$\begin{aligned}
& (x_1 + \dots + x_n - d)_+ \\
&= ((x_1 - d_1) + \dots + (x_n - d_n))_+ \\
&\leq ((x_1 - d_1)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+)_+ \\
&= (x_1 - d_1)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+.
\end{aligned}$$

En remplaçant les constantes de cette inégalité par les variables aléatoires correspondantes et en prenant l'espérance, nous obtenons que

$$\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - d)_+) \leq \mathbb{E}((X_1 - d_1)_+) + \dots + \mathbb{E}((X_n - d_n)_+) \quad (1.27)$$

est vraie pour tout d et d_i tels que $\sum_{i=1}^n d_i = d$.

Lorsque l'on choisit $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ avec $d_i = F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d))$, pour $i = 1, \dots, n$, et $\alpha_d \in [0, 1]$, nous pouvons utiliser le théorème (1.4.3) afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - d)_+) &\leq \mathbb{E}((X_1 - d_1)_+) + \dots + \mathbb{E}((X_n - d_n)_+) \\
&= \mathbb{E}((S^c - d)_+),
\end{aligned}$$

ce qui est bien ce que nous voulions montrer. La dernière égalité s'obtient à l'aide du théorème 1.4.3. □

Le théorème précédent permet de conclure qu'il est possible de remplacer un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) , pour lequel les fonctions de répartition marginales F_{X_i} sont connues, par le vecteur aléatoire comonotone $(F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))$, et que ce vecteur sera moins attrayant puisque la somme de ses éléments sera maximale au sens de l'ordre convexe. Les éléments de ce dernier vecteur aléatoire possèdent une dépendance maximale entre eux puisqu'ils sont tous des fonctions croissantes de la même variable aléatoire.

Il est intéressant de noter que l'inégalité (1.27) est valide même si le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est comonotone. À partir des théorèmes (1.4.3) et (1.4.4), nous trouvons que pour tout vecteur aléatoire \underline{X} , les inégalités

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - d)_+) &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\left(X_i - F_{X_i}^{-1}(\alpha_d) (F_{S^c}(d)) \right)_+ \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - d_i)_+) \end{aligned} \quad (1.28)$$

sont vraies pour tout $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ tel que $\sum_{i=1}^n d_i = d$. Nous avons donc que la borne supérieure comonotone est la plus petite borne supérieure de la forme $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - d_i)_+)$, où $\sum_{i=1}^n d_i = d$, pour la prime *stop-loss* $\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - d)_+)$.

1.5 Copules

Les copules sont des fonctions servant à modéliser la structure de dépendance entre des variables aléatoires. Ce qui est intéressant avec les copules, c'est qu'elles permettent d'utiliser n'importe quelle distribution univariée au sein d'une structure de dépendance que l'on choisit.

Une brève introduction à la théorie des copules est présentée ici. Pour plus de détails, il est conseillé de consulter (Nelsen, 1999) et (McNeil *et al.*, 2015).

Une copule bivariée C est une fonction de répartition bivariée dont les marginales sont uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est F_X . Définissons la variable aléatoire $U = F_X(X)$, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons que

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x,$$

pour $x \in [0, 1]$. Donc U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
 F_{X,Y}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\
 &= \mathbb{P}(F_X(X) \leq F_X(x), F_Y(Y) \leq F_Y(y)) \\
 &= \mathbb{P}(U \leq F_X(x), V \leq F_Y(y)) \\
 &= C(F_X(x), F_Y(y)),
 \end{aligned}$$

où on a posé $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$.

Une copule permet de représenter la distribution conjointe en utilisant explicitement les fonctions de répartition marginales $F_X(x)$ et $F_Y(y)$. Ceci est possible grâce au théorème de Sklar que l'on peut trouver dans (Nelsen, 1999), entre autres.

Théorème 1.5.1. *Soit H une fonction de répartition conjointe avec fonctions de répartition marginales F et G . Il existe une copule C telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Nous pouvons donc représenter la fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires à partir de leurs fonctions de répartition marginales et d'une copule qui détermine la structure de dépendance entre ces deux variables aléatoires. Ceci permet aussi de facilement simuler les risques composant le portefeuille d'une entreprise.

1.5.1 Copule gaussienne

La copule gaussienne bivariée est définie comme suit :

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u) \Phi^{-1}(v)), \quad (1.29)$$

où Φ_ρ représente la fonction de répartition d'une loi normale bivariée, centrée, réduite et de corrélation ρ . De plus, Φ^{-1} représente la fonction quantile de la loi normale centrée et réduite.

La copule gaussienne bivariée permet d'utiliser n'importe quelles lois marginales à l'intérieur de la structure de dépendance d'une loi normale bivariée.

1.5.2 Copule de Clayton

La copule de Clayton permet de contrôler la dépendance entre les risques dans la queue inférieure de la distribution. Ceci permet de modéliser deux risques qui ont tendance à avoir la même ampleur lorsque ceux-ci sont petits et d'avoir une relation plus libre entre ceux-ci lorsque l'un d'eux est plus important.

La copule de Clayton fait partie de la famille des copules archimédiennes et elle est définie comme suit : pour un paramètre $\theta \geq 0$,

$$C_\theta(u, v) = \max\left(\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}, 0\right). \quad (1.30)$$

1.5.3 Copule de Gumbel

La copule de Gumbel permet de contrôler la dépendance entre les risques autant dans la queue inférieure que dans la queue supérieure de la distribution. Ceci permet de modéliser deux risques qui ont tendance à avoir la même ampleur lorsque ceux-ci sont petits ou grands.

La copule de Gumbel fait elle aussi partie de la famille des copules archimédiennes et elle est définie comme suit : pour un paramètre $\theta \geq 1$,

$$C_\theta(u, v) = \exp \left(- \left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right). \quad (1.31)$$

1.5.4 Tau de Kendall

Le tau de Kendall est une statistique qui mesure la dépendance de rang qui existe entre des variables aléatoires. Une définition du tau de Kendall se trouve dans (Nelsen, 1999).

Définition 1.5.1. *Soit deux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) . Alors, le tau de Kendall peut s'exprimer comme suit :*

$$\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0). \quad (1.32)$$

Le tau de Kendall calcule donc la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance entre les deux vecteurs aléatoires. La concordance est définie comme suit :

Définition 1.5.2. *Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , deux observations du vecteur aléatoire continu (X, Y) . Les observations (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont concordantes si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ ou si $x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2$. À l'inverse, elles sont discordantes si $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$ ou si $x_1 > x_2$ et $y_1 < y_2$.*

Cette mesure de dépendance peut servir à déterminer les paramètres de chacune des copules que nous utiliserons dans l'analyse numérique présentée au Chapitre 4 et ainsi obtenir des vecteurs aléatoires ayant une dépendance de rang identique.

Tableau 1.1 Tau de Kendall des copules gaussiennes, de Clayton et de Gumbel.

| Copule | Tau de Kendall |
|------------|-------------------------------|
| Gaussienne | $\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ |
| Clayton | $\frac{\theta}{\theta+2}$ |
| Gumbel | $1 - \frac{1}{\theta}$ |

Le tableau 1.1 présente le tau de Kendall pour chacune des copules présentées précédemment.

CHAPITRE II

ALLOCATION DU CAPITAL ÉCONOMIQUE

L'allocation du capital économique est un sujet à l'étude depuis plusieurs années, avec un élan accru depuis le début des années 2000. Plusieurs formules d'allocation du capital ont été proposées dans la littérature. Chacune de ces formules provient d'un domaine particulier, par exemple la mathématique financière, les statistiques ou la théorie des jeux. La grande variété de méthodes développées permet de répondre aux différentes questions que les gestionnaires d'entreprises peuvent se poser.

Le but de l'allocation du capital économique est de déterminer le capital économique K_i nécessaire afin de soutenir le risque de la ligne d'affaire i , pour $i = 1, \dots, n$. La condition d'allocation totale sera généralement imposée afin de trouver une solution aux modèles présentés. Cette condition veut que le capital économique total soit entièrement alloué aux n lignes d'affaire, ce qui donne $\sum_{i=1}^n K_i = K$. Rappelons que K est le capital économique total d'une compagnie d'assurance.

2.1 Revue des formules d'allocation du capital économique

Dans cette section, nous présentons différentes méthodes que l'on retrouve dans (Dhaene *et al.*, 2012).

2.1.1 Principe d'allocation factoriel

Depuis plusieurs années, la VaR est une mesure de risque grandement répandue dans l'industrie financière. Il est donc naturel de se baser sur cette statistique afin d'allouer le capital. Le principe d'allocation factoriel propose d'allouer le capital économique à l'unité d'affaire i avec $K_i = \gamma_i K$, pour $i = 1, \dots, n$ en choisissant le facteur γ_i de manière à respecter la condition d'allocation totale. Mathématiquement, nous avons, pour $p \in (0, 1)$,

$$K_i = \frac{\text{VaR}_p(X_i)}{\sum_{j=1}^n \text{VaR}_p(X_j)} K, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

et donc $\gamma_i = \frac{\text{VaR}_p(X_i)}{\sum_{j=1}^n \text{VaR}_p(X_j)}$, $i = 1, \dots, n$.

Nous avons donc que la fraction du capital économique total qui est allouée à chaque unité d'affaire est déterminée par le poids de sa VaR par rapport à la somme des VaR de chacune des unités d'affaire. Puisque la structure de dépendance entre les lignes d'affaire n'intervient pas dans le calcul de l'allocation du capital, le principe d'allocation factoriel ne tient donc pas compte de cette dernière. Ceci implique que le capital alloué à chacune des unités d'affaire n'inclue pas le bénéfice de diversification résultant de la mise en commun des risques.

En regroupant les termes de l'équation (2.1) de la façon suivante :

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \text{VaR}_p(X_j)} \text{VaR}_p(i),$$

nous avons que $K_i = \gamma \text{VaR}_p(X_i)$, où $\gamma = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \text{VaR}_p(X_j)}$. Le capital économique est maintenant alloué à l'aide d'un unique facteur appliqué à la VaR de chaque unité d'affaire. La VaR de chacune des unités d'affaires se voit donc augmentée ou diminuée d'une même proportion.

Cette deuxième façon d'exprimer le principe d'allocation factoriel fait aussi ressortir un défaut important de cette méthode : le capital économique alloué à chaque

unité d'affaire représente presque assurément un quantile différent pour chacune d'elles. En effet, à moins que chaque unité d'affaire ne soit représentée par la même loi de probabilité, la multiplication de leurs quantiles par un même facteur résultera en différents quantiles pour chacune d'elles. Ceci contredit un principe généralement accepté en gestion de risque qui veut que les risques des différentes subdivisions d'un portefeuille soient calculés à l'aide d'un seul et même quantile. Ce principe est entre autre exigé par les régulateurs. L'utilisation de différents quantiles permettrait de diminuer le capital requis et est aussi difficilement justifiable d'un point de vue de gestion des risques. Il serait effectivement possible d'utiliser un niveau p pour calculer le risque des unités d'affaire et un niveau $p' < p$ pour les unités d'affaire plus risquées.

Les deux représentations du principe d'allocation factoriel mènent bien évidemment au même résultat, mais elles offrent deux visions différentes de la mécanique opérant l'allocation.

2.1.2 Principe d'allocation selon le quantile

Le principe d'allocation selon le quantile a été présenté par (Dhaene *et al.*, 2003). L'idée est d'analyser le risque de solvabilité d'un conglomérat composé de n compagnies en assumant que ce risque est mesuré par $\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - K)_+)$, où K est considéré comme étant le capital économique pour le conglomérat et chacun des $X_i, i = 1, \dots, n$ représente les pertes de chacune des compagnies. Il est aussi possible de quantifier le risque de solvabilité de chacune des compagnies à l'aide de la mesure $\mathbb{E}((X_i - K_i)_+)$, où K_i représente le capital le capital économique pour la compagnie i et $\sum_{i=1}^n K_i = K$. Puisque nous avons que

$$\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - K)_+) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - K_i)_+), \quad (2.2)$$

il est possible de déterminer l'allocation du capital K selon deux approches, soit en minimisant $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - K_i)_+)$ par rapport aux K_i tels que $\sum_{i=1}^n K_i = K$ ou en maximisant $\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n - K)_+)$ par rapport à la structure de dépendance qui unit les pertes de chacune des compagnies. L'inégalité (1.28) nous permet de conclure qu'une solution à ce problème est la suivante

$$\mathbb{E}((X_1^c + \dots + X_n^c - K)_+) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\left(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_S(K)) \right)_+ \right). \quad (2.3)$$

Effectivement, tel que vu au chapitre 1, la structure de dépendance qui maximise la prime *stop-loss* est la comonotonie, tandis que les K_i qui minimisent $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - K_i)_+)$ sont donnés par $d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_S^c(d))$.

2.1.3 Principe d'allocation selon la covariance

Le principe d'allocation selon la covariance présenté par, entre autres, (Overbeck, 2000), a l'avantage d'explicitement tenir compte de la structure de dépendance entre les pertes (X_1, \dots, X_n) . Ce principe est donné par

$$K_i = \frac{K}{\text{Var}(S)} \text{Cov}(X_i, S), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

où $\text{Cov}(X_i, S)$ est la covariance entre les pertes individuelles X_i et les pertes agrégées S et $\text{Var}(S)$ est la variance des pertes agrégées. Puisque $\sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, S) = \text{Var}(S)$, la condition d'allocation totale est respectée.

Les unités d'affaires qui sont plus corrélées avec les pertes agrégées requièrent plus de capital économique que les unités d'affaire qui sont moins corrélées avec les pertes totales.

Bien que la définition de ce principe d'allocation soit toute simple, il peut être très compliqué de l'utiliser dans la réalité. Tel qu'il a déjà été mentionné au cours de ce document, il est souvent difficile de déterminer la distribution des pertes totales S

puisque la structure de dépendance entre les risques X_i est généralement difficile à déterminer.

2.1.4 Principe d'allocation selon le CTE

À l'instar du principe d'allocation selon la covariance, le principe d'allocation selon le CTE prend aussi en compte la structure de dépendance entre les risques (X_1, \dots, X_n) . Le principe d'allocation selon le CTE est donné, pour un niveau $p \in (0, 1)$, par

$$K_i = \frac{K}{\text{CTE}_p(S)} \mathbb{E}(X_i | S > F_S^{-1}(p)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i | S > F_S^{-1}(p)) = \mathbb{E}(S | S > F_S^{-1}(p)) = \text{CTE}_p(S),$$

le principe d'allocation total est respecté. Les pertes dont l'espérance conditionnelle est grande, sachant que les pertes agrégées sont grandes, requièrent plus de capital économique que celles avec une plus petite perte conditionnelle espérée.

Tout comme le principe d'allocation selon la covariance, il peut être difficile d'utiliser le principe d'allocation selon le CTE puisque la distribution conjointe des pertes X_i peut-être compliquée à déterminer.

2.1.5 Allocation proportionnelle

Les méthodes d'allocation du capital économique présentées jusqu'à maintenant peuvent toutes être regroupées sous l'allocation proportionnelle, qui est définie par

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \rho(X_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Tableau 2.1 Principes d'allocation.

| | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Principe d'allocation | $\rho(X_i)$ |
| Allocation factorielle | $F_{X_i}^{-1}(p)$ |
| Allocation selon le quantile | $F_{X_i}^{-1}(F_{S_c}(K))$ |
| Allocation selon la covariance | $\text{Cov}(X_i, S)$ |
| Allocation selon le CTE | $\mathbb{E}(X_i S > F_s^{-1}(p))$ |

Nous retrouvons les méthodes étudiées en choisissant une mesure de risque ρ spécifique, tel qu'illustré au Tableau 2.1. Le capital alloué est déterminé à partir du ratio du capital économique total sur la somme des mesures de risques de chaque unité d'affaire, auquel on multiplie la mesure de risque de l'unité d'affaire en question. Chaque mesure de risque est donc augmentée ou diminuée d'une même proportion, selon que le capital économique est plus élevé ou plus bas que la somme des mesures de risque.

En réorganisant le principe d'allocation proportionnel de la façon suivante

$$K_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} K, \quad i = 1, \dots, n,$$

nous pouvons aussi conclure que le capital économique total est distribué proportionnellement aux lignes d'affaire selon la portion du risque total de celles-ci. Ce qui offre une autre façon d'interpréter cette méthode générale.

Assumons que les risques individuels sont quantifiés par une mesure de risque ρ et que le capital économique total est déterminé par cette mesure de risque, appliquée aux pertes agrégées, et donc $K = \rho(S)$. Le risque de chaque unité d'affaire est quantifié par $\rho(X_i)$. À partir de l'équation (2.6), on peut déduire que chaque unité d'affaire bénéficiera de la diversification résultant de la mutualisation

des risque en ce sens que $K_i \leq \rho(X_i)$, si et seulement si

$$K = \rho(S) \leq \sum_{i=1}^n \rho(X_i).$$

Cette condition est respectée par les mesures de risque ρ qui sont sous-additives. Tel qu'observé auparavant, le principe d'allocation factoriel peut mener à un effet de diversification positif ou négatif par son utilisation de la VaR comme mesure de risque. D'un autre côté, en choisissant le CTE comme mesure de risque, le principe d'allocation selon le CTE mène à $K_i \leq \rho(X_i)$.

CHAPITRE III

ALLOCATION OPTIMALE DU CAPITAL ÉCONOMIQUE

Il existe plusieurs façons d'allouer le capital économique total K en n parties K_1, \dots, K_n , lorsqu'il est déterminé de façon exogène. Quelques-unes de ces méthodes ont été présentées dans la section précédente. La classe de méthodes qui suit détermine une méthode d'allocation du capital en fonction d'un problème décisionnel précis. Il est alors primordial d'établir un critère de décision, tel que :

Le capital devrait être alloué de façon à ce que les pertes et le capital alloué soient *suffisamment proche*, pour chaque unité d'affaire.

De façon plus formelle, considérons les pertes agrégées $S = X_1 + \dots + X_n$ et le capital économique total K . Une fois que le capital a été alloué, la différence entre les pertes agrégées et le capital économique total peut s'exprimer comme

$$S - K = \sum_{i=1}^n (X_i - K_i),$$

où la quantité $(X_i - K_i)$ représente la perte moins le capital alloué pour l'unité d'affaire i .

Il est important de souligner que dans un pareil cadre, le risque de chaque unité d'affaire est mutualisé dans ce sens que l'événement $X_i > K_i$ ne mène pas nécessairement à la ruine. La performance non favorable d'une unité d'affaire peut

être compensée par une performance favorable dans une ou plusieurs autres unités d'affaire.

L'allocation du capital optimal est déterminé par le problème d'optimisation ci-dessous :

Problème d'optimisation de l'allocation du capital : *Sachant le capital économique total $K > 0$, déterminer le capital alloué $K_i, i = 1, \dots, n$ à partir du problème d'optimisation suivant, sous la condition $\sum_{i=1}^n K_i = K$:*

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{i=1}^n \nu_i \mathbb{E} \left(\zeta_i D \left(\frac{X_i - K_i}{\nu_i} \right) \right), \quad (3.1)$$

où les ν_i sont des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \nu_i = 1$, les ζ_i sont des variables aléatoires positives telles que $\mathbb{E}(\zeta_i) = 1$ et D est une fonction positive.

Commençons par décortiquer le problème d'optimisation afin de bien comprendre ce que représente chaque terme qui le compose.

ν_i : le nombre positif ν_i est une mesure de l'exposition ou du volume de l'unité d'affaire i , tel que la proportion des revenus de l'unité d'affaire i sur les revenus totaux ou la proportion de la prime d'assurance de l'unité d'affaire i sur la prime d'assurance totale. Ces quantités sont choisies de façon à ce qu'elles somment à 1. Elles servent aussi à normaliser les écarts des pertes par rapport au capital alloué de chaque unité d'affaire dans la fonction D afin de pouvoir mieux les comparer. De plus, elles servent de poids pour chaque espérance dans le problème de minimisation afin de refléter l'importance relative de chaque unité d'affaire par rapport aux autres unités d'affaire.

$D \left(\frac{X_i - K_i}{\nu_i} \right)$: afin de simplifier l'interprétation de ce terme et sans perte de généralité, posons $\nu_i = 1$. Chaque terme $D(X_i - K_i)$ quantifie les écarts entre les pertes X_i et leur capital alloué K_i . Le fait de minimiser la somme des espérances de ces quantités implique que les capitaux alloués seront

aussi proches que possible des pertes auxquelles ils sont alloués. Plusieurs mesures de distance sont possibles, dont, entre autres, l'écart quadratique et l'écart absolu.

ζ_i : les écarts entre les pertes X_i et leur capital alloué K_i sont mesurés à l'aide de $\mathbb{E}(\zeta_i D(X_i - K_i))$. Ces espérance comprennent des variables aléatoires positives ζ_i , où $\mathbb{E}(\zeta_i) = 1$, qui servent de poids aux différents résultats $D(X_i - K_i)$ possibles. Il serait possible de poser $\zeta_i = h(X_i)$ pour une fonction positive et croissante h . Ce choix attribuerait les plus gros poids aux pertes X_i les plus grandes. Une allocation du capital basée sur ce choix de ζ_i se nomme allocation dictée par les unités d'affaires. Un autre choix possible est de poser $\zeta_i = h(S)$ pour une fonction h non-négative et non-décroissante et $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Les poids sont alors attribués aux écarts en fonction de la performance des pertes agrégées. Les plus gros poids sont attribués aux états résultants en de grandes pertes agrégées. Une allocation basée sur ce choix de variable aléatoire ζ_i se nomme allocation dictée par le portefeuille agrégé. Une autre approche consiste à poser $\zeta_i = \zeta_M$ pour tous i , où ζ_M peut être interprété comme la perte liée à un portefeuille de référence ou marché. Dans ce cas, l'allocation est dite allocation dictée par le marché.

3.1 Allocation optimale sous le critère d'optimisation quadratique

Dans cette section, il sera question de l'allocation optimale sous le critère d'optimisation quadratique, en posant

$$D(x) = x^2.$$

Dans ce cas, le problème d'allocation optimale (3.1) se réduit à

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left(\zeta_j \frac{(X_j - K_j)^2}{\nu_j} \right), \text{ tel que } \sum_{j=1}^n K_j = K. \quad (3.2)$$

La solution de ce problème d'optimisation est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. *Le problème d'allocation optimale (3.2) a une unique solution donnée par :*

$$K_i = \mathbb{E}(\zeta_i X_i) + \nu_i \left(K - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Démonstration. Ce théorème a été démontré à l'aide d'une preuve géométrique dans (Dhaene *et al.*, 2012) et donc une approche différente sera utilisée ici. Le problème d'optimisation (3.2) peut être résolu à l'aide de la méthode d'optimisation de Lagrange. Pour un nombre d'unités d'affaires quelconque, nous voulons minimiser la fonction

$$f(K_1, \dots, K_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\zeta_i \frac{(X_i - K_i)^2}{\nu_i} \right),$$

sous la contrainte

$$g(K_1, \dots, K_n, K) = K - \sum_{i=1}^n K_i = 0.$$

Nous obtenons la fonction de Lagrange suivante

$$\mathcal{L}(K_1, \dots, K_n, \lambda) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left(\zeta_j \frac{(X_j - K_j)^2}{\nu_j} \right) + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n K_i \right).$$

Afin de minimiser la fonction $f(K_1, \dots, K_n)$ sous la contrainte

$$g(K_1, \dots, K_n, K) = 0,$$

il suffit de trouver le gradient de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(K_1, \dots, K_n, \lambda)$, de poser ce gradient égal à $\vec{0}$ et de résoudre les équations obtenues. Le gradient de

la fonction de Lagrange est

$$\nabla \mathcal{L}(K_1, \dots, K_n, \lambda) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_n}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right) = \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{K_1}{\nu_1} - \frac{\mathbb{E}(\zeta_1 X_1)}{\nu_1} \right) - \lambda, \\ 2 \left(\frac{K_2}{\nu_2} - \frac{\mathbb{E}(\zeta_2 X_2)}{\nu_2} \right) - \lambda, \\ \vdots \\ 2 \left(\frac{K_n}{\nu_n} - \frac{\mathbb{E}(\zeta_n X_n)}{\nu_n} \right) - \lambda, \\ K - \sum_{i=1}^n K_i \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $\nabla \mathcal{L}(K_1, \dots, K_n, \lambda) = \vec{0}$ si et seulement si toutes les équations sont égales à zéro et que $\sum_{i=1}^n \nu_i = 1$, nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \nu_2 (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 (K_2 - \mathbb{E}(\zeta_2 X_2)) \\ \nu_3 (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 (K_3 - \mathbb{E}(\zeta_3 X_3)) \\ \vdots \\ \nu_n (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 (K_n - \mathbb{E}(\zeta_n X_n)) \\ K = \sum_{i=1}^n K_i \end{cases}$$

En additionnant les $n - 1$ premières équations, nous obtenons

$$\sum_{i=2}^n \nu_i (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 \left(\sum_{i=2}^n (K_i - \mathbb{E}(\zeta_i X_i)) \right), \quad (3.4)$$

que l'on peut exprimer comme

$$(1 - \nu_1) (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 \left(K - K_1 - \sum_{i=2}^n \mathbb{E}(\zeta_i X_i) \right).$$

En réorganisant le tout nous avons que

$$(1 - \nu_1) (K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1)) = \nu_1 \left(K - K_1 - \sum_{i=2}^n \mathbb{E}(\zeta_i X_i) \right),$$

si et seulement si

$$K_1 - \mathbb{E}(\zeta_1 X_1) - \nu_1 K_1 + \nu_1 \mathbb{E}(\zeta_1 X_1) = \nu_1 \left(K - \sum_{i=2}^n \mathbb{E}(\zeta_i X_i) \right) - \nu_1 K_1,$$

si et seulement si

$$K_1 = \mathbb{E}(\zeta_1 X_1) + \nu_1 \left(K - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_i X_i) \right).$$

Par symétrie, nous pouvons obtenir le même résultat pour tous les K_i , pour $i = 1, \dots, n$, ce que nous voulions montrer. \square

Le capital K_i donné par (3.3) est égal à l'espérance de X_i pondérée par ζ_i auquel est additionné un terme proportionnel au volume de l'unité d'affaire. Le second terme représente la redistribution de la différence entre le capital économique total K et la somme des espérance des X_j pondérée par les ζ_j , soit $\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)$. Cette redistribution est pondérée à l'aide des poids ν_i qui sont déterminés en fonction du niveau de risque de chaque unité d'affaire.

Dans le cas où les poids ν_i sont donnés par

$$\nu_i = \frac{\mathbb{E}(\zeta_i X_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)},$$

il s'ensuit que la solution générale (3.3) se réduit à

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)} \mathbb{E}(\zeta_i X_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Cette règle d'allocation peut être vue comme un cas spécial de l'allocation proportionnelle (2.6), en choisissant

$$\rho(X_i) = \mathbb{E}(\zeta_i X_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Il est à noter que (3.5) peut être arrangée comme

$$\frac{K_i - \mathbb{E}(\zeta_i X_i)}{\mathbb{E}(\zeta_i X_i)} = \frac{K - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dans un cas où le capital économique total K est donné par $K = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j)$, la règle d'allocation du capital (3.3) se résume à

$$K_i = \mathbb{E}(\zeta_i X_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Cette classe de méthodes d'allocation est présentée dans (Furman et Zitikis, 2008b) sous l'appellation allocation du capital pondérée par le risque.

3.1.1 Allocation dictée par les unités d'affaire

Dans cette sous-section, le problème d'allocation quadratique (3.2) est étudié avec des variables aléatoires ζ_i définies comme

$$\zeta_i = h(X_i), \quad (3.6)$$

où h est une fonction positive et croissante telle que $\mathbb{E}(h(X_i)) = 1$, pour $i = 1, \dots, n$. Cette méthode permet d'assigner un poids plus important aux unités d'affaire ayant les pires performances. Un principe d'allocation basé sur (3.6) est dit *principe d'allocation dicté par les unités d'affaire*. Dans ce cas, la règle d'allocation (3.3) peut s'écrire comme

$$K_i = \mathbb{E}(X_i h(X_i)) + \nu_i \left(K - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j h(X_j)) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Lorsque le capital économique K est déterminé de façon exogène, les capitaux alloués K_i ne sont pas influencés par la structure de dépendance entre les pertes X_i de chaque unité d'affaire. En ce sens, le principe d'allocation (3.7) est indépendant du contexte dans lequel les pertes X_i forment un portefeuille, et il est donc dicté par les unités d'affaire. Un tel principe d'allocation peut être utilisé afin de déterminer le bonus à la performance des gestionnaires de chaque unité d'affaire lorsqu'il est assumé que chaque gestionnaire devrait être récompensé pour les performances de son unité d'affaire et non récompensé en plus (ou en moins) pour les relations entre son unité d'affaire et les autres unités d'affaire. Il est important de noter qu'en mettant de côté les effets de diversification provenant de la mutualisation des risques, ce principe d'allocation peut donner des incitatifs aux gestionnaires qui sont en désaccord avec des critères d'optimisation de portefeuille

généraux. La mesure de risque $\mathbb{E}(X_i h(X_i))$ est invariante en loi. Elle assigne la valeur espérée pondérée à chaque perte X , où les poids plus importants correspondent aux pertes plus importantes. Des mesures de risque et principes de primes ont été proposés (Heilmann, 1989), (Tsanakas, 2007) et (Furman et Zitikis, 2008a). Un choix particulier pour la variable aléatoire $h(X_i)$ considérée dans (3.7), pour $p \in (0, 1)$, est donné par

$$h(X_i) = \frac{\mathbb{1}(X_i > F_{X_i}^{-1}(p))}{1 - F_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(p))}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dans ce cas, le terme $\mathbb{E}(X_i h(X_i))$ devient alors

$$\mathbb{E}(X_i h(X_i)) = \text{CTE}_p(X_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Considérons les variables aléatoires définies comme

$$h(X_i) = g'(\bar{F}_{X_i}(X_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

où $g: [0, 1] \mapsto [0, 1]$ est une fonction strictement croissante et concave de dérivée première g' , si elle existe, et \bar{F}_X la fonction de survie de X , c'est-à-dire $\bar{F}_X = 1 - F_X$. Nous avons donc que

$$\mathbb{E}(X_i h(X_i)) = \mathbb{E}(X_i g'(\bar{F}_{X_i}(X_i))), \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors, $\mathbb{E}(X_i h(X_i))$ est une mesure de risque de distorsion concave, aussi appelée mesure de risque spectrale. On peut consulter (Wang, 1996), (Acerbi, 2002) ou (Dhaene *et al.*, 2006) pour plus de détails.

Le principe de l'écart-type, le principe d'Esscher et le principe exponentiel sont d'autres exemples de mesure de risques de la forme $\mathbb{E}(X_i h(X_i))$. Ils sont présentés dans le Tableau 3.1.

Si l'on définit les ν_i comme

$$\nu_i = \frac{\mathbb{E}(X_i h(X_i))}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j h(X_j))}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Tableau 3.1 Allocations dictées par les unités d'affaire.

| Principe | $h(X_i)$ | $\mathbb{E}(X_i h(X_i))$ |
|--|--|---|
| Principe de l'écart-type (Bühlmann, 1970) | $1 + a \frac{X_i - \mathbb{E}(X_i)}{\sigma_{X_i}},$ $a \geq 0$ | $\mathbb{E}(X_i) + a\sigma_{X_i}$ |
| CTE (Overbeck, 2000) | $\frac{1}{1-p} \mathbf{1}(X_i > F_{X_i}^{-1}(p)),$ $p \in (0, 1)$ | $\text{CTE}_p(X_i)$ |
| Mesure de risque spectrale (Wang, 1996), (Acerbi, 2002) | $g'(\bar{F}_{X_i}(X_i)),$ $g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ $g' > 0, g'' < 0$ | $\mathbb{E}(X_i g'(\bar{F}_{X_i}(X_i)))$ |
| Principe exponentiel (Gerber, 1974) | $\int_0^1 \frac{e^{\gamma a X_i}}{\mathbb{E}(e^{\gamma a X_i})} d\gamma,$ $a > 0$ | $\frac{1}{a} \ln \mathbb{E}(e^{a X_i})$ |
| Principe d'Esscher (Gerber, 1981) | $\frac{e^{a X_i}}{\mathbb{E}(e^{a X_i})},$ $a > 0$ | $\frac{\mathbb{E}(X_i e^{a X_i})}{\mathbb{E}(e^{a X_i})}$ |

alors le principe d'allocation (3.7) se réduit à

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j h(X_j))} \mathbb{E}(X_i h(X_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

ce qui est un cas particulier du principe d'allocation proportionnelle discuté à la section 2.1.5.

Il est important de noter que parmi les méthodes d'allocation présentées au Chapitre 2, seul le principe d'allocation factoriel est un exemple de principe d'allocation dicté par les unités d'affaire.

3.1.2 Allocation dictée par le portefeuille

Considérons maintenant le cas où

$$\zeta_i = h(S), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

où h est une fonction positive et croissante telle que $\mathbb{E}(h(S)) = 1$. Dans ce cas, un poids plus important est assigné aux pires performances du portefeuille. Ce type d'allocation se nomme *allocations dictées par le portefeuille*. La règle d'allocation (3.3) peut s'écrire comme

$$K_i = \mathbb{E}(X_i h(S)) + \nu_i (K - \mathbb{E}(Sh(S))), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Le capital alloué K_i est déterminé par une espérance pondérée des pertes X_i , où les poids $h(S)$ plus importants sont attribués aux pires performances du portefeuille. Le principe d'allocation (3.7) peut aussi s'écrire comme

$$K_i = \mathbb{E}(X_i) + \text{Cov}(X_i h(S)) + \nu_i (K - \mathbb{E}(Sh(S))), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Ceci implique que le capital K_i alloué à la i^{e} unité d'affaire est la somme de la perte espérée $\mathbb{E}(X_i)$, de la covariance entre les pertes individuelles X_i et d'une fonction des pertes agrégées $h(S)$ et d'un terme proportionnel au volume de l'unité d'affaire. Un capital K_i plus important est donc alloué à une unité d'affaire pour laquelle les pertes X_i sont fortement et positivement corrélées avec $h(S)$, ce qui reflète le fait que cette unité d'affaire contribue aux pertes totales du portefeuille de façon significative. Les principes d'allocations de la forme (3.10) ont une forte ressemblance aux allocations d'Euler proposées dans (Tasche, 2004).

L'allocation dictée par le portefeuille peut être utile lorsque les gestionnaires veulent déterminer la contribution de chaque unité d'affaire aux pertes totales du portefeuille de l'entreprise. Elle peut, par exemple, permettre de calculer le rendement sur le capital alloué de chaque unité d'affaire, en présence des autres

unités d'affaire. Ceci peut fournir de l'information très pertinente afin de soutenir la décision stratégique de prendre de l'expansion ou non pour une unité d'affaire donnée.

Un choix particulier pour la variable aléatoire $h(S)$ utilisée dans (3.9), pour $p \in (0, 1)$, est

$$h(S) = \frac{\mathbb{1}(S > F_S^{-1}(p))}{1 - F_S(F_S^{-1}(p))}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Dans ce cas, nous avons que

$$\mathbb{E}(X_i h(S)) = \mathbb{E}(X_i | S > F_S^{-1}(p)), \quad i = 1, \dots, n,$$

et

$$\mathbb{E}(Sh(S)) = \text{CTE}_p(S).$$

De plus, en choisissant

$$h(S) = S - \mathbb{E}(S), \quad (3.12)$$

nous avons que

$$\mathbb{E}(X_i h(S)) = \text{Cov}(X_i, S), \quad i = 1, \dots, n$$

et

$$\mathbb{E}(Sh(S)) = \text{Var}(S).$$

D'autres choix pour $h(S)$ se trouve dans le Tableau 3.2.

En définissant l'exposition ν_i par

$$\nu_i = \frac{\mathbb{E}(X_i h(S))}{\mathbb{E}(Sh(S))}, \quad i = 1, \dots, n,$$

le principe d'allocation (3.9) est équivalent à l'allocation proportionnelle

$$K_i = \frac{K}{\mathbb{E}(Sh(S))} \mathbb{E}(X_i h(S)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Le principe d'allocation selon le CTE (2.5) est un cas particulier du principe d'allocation (3.13) en choisissant $h(S)$ tel que (3.11). De plus, en choisissant $h(S)$

comme en (3.12), le principe d'allocation (3.13) est équivalent au principe d'allocation selon la covariance (2.4).

Tableau 3.2 Allocations dictées par le portefeuille.

| Principe | $h(S)$ | $\mathbb{E}(X_i h(S))$ |
|------------------|--|---|
| (Overbeck, 2000) | $1 + a \frac{S - \mathbb{E}(S)}{\sigma_S},$ $a \geq 0$ | $\mathbb{E}(X_i) + a \frac{\text{Cov}(X_i, S)}{\sigma_S}$ |
| (Overbeck, 2000) | $\frac{1}{1-p} \mathbb{1}(S > F_S^{-1}(p)),$ $p \in (0, 1)$ | $\mathbb{E}(X_i S > F_S^{-1}(p))$ |
| (Tsanakas, 2004) | $g'(\bar{F}_S(S)),$ $g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ $g' > 0, g'' < 0$ | $\mathbb{E}(X_i g'(\bar{F}_S(S)))$ |
| (Tsanakas, 2009) | $\int_0^1 \frac{e^{\gamma a S}}{\mathbb{E}(e^{\gamma a S})} d\gamma,$ $a > 0$ | $\mathbb{E}\left(X_i \int_0^1 \frac{e^{\gamma a S}}{\mathbb{E}(e^{\gamma a S})}\right)$ |
| (Wang, 2007) | $\frac{e^{aS}}{\mathbb{E}(e^{aS})},$ $a > 0$ | $\frac{\mathbb{E}(X_i e^{aS})}{\mathbb{E}(e^{aS})}$ |

3.2 Allocation optimale selon le critère d'écart absolu

Dans cette section, nous allons étudier le problème d'allocation optimal à l'aide du critère d'écart absolu, soit

$$D(x) = |x|.$$

Sous ce critère, le problème d'optimisation (3.1) se réduit à

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(|\zeta_j| | X_j - K_j|), \quad (3.14)$$

tel que $\sum_{i=1}^n K_i = K$. En utilisant la relation suivante

$$|x| = 2(x)_+ - x,$$

nous trouvons que

$$\begin{aligned}
\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j |X_j - K_j|) &= \min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j (2(X_j - K_j)_+ - (X_j - K_j))) \\
&= \min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n (\mathbb{E}(\zeta_j (X_j - K_j)_+) - \mathbb{E}(\zeta_j X_j) + K_j \mathbb{E}(\zeta_j)) \\
&= \min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j (X_j - K_j)_+),
\end{aligned}$$

et donc que la solution optimale à (3.14) est la même que la solution du problème suivant :

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j (X_j - K_j)_+), \quad (3.15)$$

tel que $\sum_{i=1}^n K_i = K$. Ceci implique donc que le problème d'optimisation sous le critère d'écart absolu (3.14) ne tient compte que des événements où les pertes X_j mènent à l'insolvabilité technique, soit lorsque $X_j > K_j$. Afin de résoudre le problème d'optimisation (3.15), considérons tout d'abord le cas spécial où $\zeta_i \equiv 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Théorème 3.2.1. *En supposant que $K \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, le problème d'allocation optimal*

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}((X_j - K_j)_+), \quad (3.16)$$

tel que $\sum_{i=1}^n K_i = K$, admet la solution suivante :

$$K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)), \quad i = 1, \dots, n,$$

où la somme comonotonique S^c est définie en (1.16) et où $\alpha \in [0, 1]$ est déterminé par

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)) = K. \quad (3.17)$$

Démonstration. À l'aide des théorèmes 1.4.3 et 1.4.4, nous trouvons que, pour

$K \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ et α fixé par (3.17),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S^c - K)_+) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left(\left(X_j - F_{X_j}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)) \right)_+ \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E}((X_j - K_j)_+), \end{aligned}$$

tient pour tout (K_1, K_2, \dots, K_n) tel que $\sum_{j=1}^n K_j = K$, ce qui prouve le résultat. \square

Nous pouvons conclure que le principe d'allocation selon le quantile (2.3) est une solution du problème d'optimisation (3.16). Ce problème d'optimisation et sa solution sont présentés dans (Dhaene *et al.*, 2003) pour le cas particulier où les F_{X_i} sont toutes strictement croissantes. Une preuve du théorème 3.2.1 par l'optimisation de Lagrange peut être consultées dans (Laeven et Goovaerts, 2004).

Il est maintenant possible de généraliser la solution du problème d'optimisation général (3.14), soit lorsque les $\zeta_i \neq 1$. Cette généralisation sera exprimée en terme de fonctions $F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x)$, la fonction de répartition de X_i pondérée par ζ_i , définie par

$$F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) = \mathbb{E}(\zeta_i \mathbf{1}(X_i \leq x)) = \mathbb{E}(\zeta_i | X_i \leq x) F_{X_i}(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Il est possible de montrer que chaque fonction $F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x)$ est bel et bien une fonction de répartition, ce qui est démontré dans (Furman et Zitikis, 2008a), (Rao, 1997) et les références qui y sont incluses. La fonction de survie $\overline{F}_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) = 1 - F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x)$ est définie par

$$\overline{F}_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) = \mathbb{E}(\zeta_i \mathbf{1}(X_i > x)) = \mathbb{E}(\zeta_i | X_i > x) \overline{F}_{X_i}(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Une condition suffisante pour que $F_{X_i}^{(\zeta_i)}$ soit continue est que $F_{X_i}(x)$ soit continue. Une condition suffisante pour que $F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x)$ soit strictement croissante est que $F_{X_i}(x)$ soit strictement croissante et que $\mathbb{P}(\zeta_i > 0) = 1$. La fonction de répartition

α -inverse de $F_{X_i}^{(\zeta_i)}$ au niveau p est notée $\left(F_{X_i}^{(\zeta_i)}\right)^{-1(\alpha)}(p)$, pour tout $p \in (0, 1)$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Le lemme qui suit démontre que la mesure de déviation $\mathbb{E}(\zeta_i (X_i - K_i)_+)$ peut s'exprimer comme étant une prime *stop-loss* de X_i avec une rétention K_i , où l'espérance est calculée par rapport à la distribution de X_i pondérée par ζ_i .

Lemme 3.2.1. *Soit U une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$. Nous avons donc que*

$$\mathbb{E}(\zeta_i (X_i - K_i)_+) = \mathbb{E}\left(\left(\left(F_{X_i}^{(\zeta_i)}\right)^{-1}(U) - K_i\right)_+\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Démonstration. À l'aide de la *propriété de la tour* (« tower property ») de l'espérance conditionnelle, nous avons que

$$\mathbb{E}(\zeta_i (X_i - K_i)_+) = \mathbb{E}(\zeta_i \mathbb{E}((X_i - K_i)_+ | \zeta_i)).$$

En remplaçant $\mathbb{E}((X_i - K_i)_+ | \zeta_i)$ par $\int_{K_i}^{\infty} \mathbb{P}(X_i > x | \zeta_i) dx$ et en changeant l'ordre d'intégration, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\zeta_i (X_i - K_i)_+) &= \int_{K_i}^{\infty} \mathbb{E}(\zeta_i \mathbb{P}(X_i > x | \zeta_i)) dx \\ &= \int_{K_i}^{\infty} \mathbb{E}(\zeta_i \mathbb{E}(\mathbb{1}(X_i > x) | \zeta_i)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant la *propriété de la tour* encore une fois, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\zeta_i (X_i - K_i)_+) = \int_{K_i}^{\infty} \mathbb{E}(\zeta_i \mathbb{1}(X_i > x)) dx = \int_{K_i}^{\infty} \overline{F}_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) dx.$$

Ce résultat découle du fait que la distribution de $\left(F_{X_i}^{(\zeta_i)}\right)^{-1}(U)$ est donnée par $F_{X_i}^{(\zeta_i)}$ et donc que $\int_{K_i}^{\infty} \overline{F}_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) dx$ est une expression de la prime *stop-loss* de $\left(F_{X_i}^{(\zeta_i)}\right)^{-1}(U)$ avec une rétention K_i . \square

Théorème 3.2.2. Soit la somme comonotonique \bar{S}^c définie par

$$\bar{S}^c = \sum_{i=1}^n \left(F_{X_i}^{(\zeta_i)} \right)^{-1} (U),$$

où U est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$. Lorsque $F_{\bar{S}^c}^{-1+}(0) < K < F_{\bar{S}^c}^{-1}(1)$, le principe d'allocation optimal (3.14) admet la solution suivante :

$$K_i = \left(F_{X_i}^{(\zeta_i)} \right)^{-1(\alpha)} (F_{\bar{S}^c}(K)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

où $\alpha \in [0, 1]$ est déterminé par

$$F_{\bar{S}^c}^{-1(\alpha)} (F_{\bar{S}^c}(K)) = K.$$

Démonstration. À l'aide du lemme 3.2.1, il est possible de formuler le problème d'optimisation (3.14) tel que

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left(\left(\left(F_{X_j}^{(\zeta_j)} \right)^{-1} (U) - K_j \right)_+ \right),$$

tel que $\sum_{j=1}^n K_j = K$. Le résultat découle en appliquant le théorème 3.2.1. \square

À partir du dernier théorème, nous pouvons conclure que le principe d'allocation optimisé à l'aide de l'écart absolu mène à une allocation selon le quantile. Le capital alloué K_i est déterminé par la fonction de répartition α -inverse de X_i pondérée par ζ_i à un niveau fixé p choisi de façon à ce que la condition d'allocation totale soit satisfaite, soit que $\sum_{j=1}^n K_j = K$. À partir de (3.19), nous avons que l'allocation optimale K_i respecte la condition suivante :

$$F_{X_i}^{(\zeta_i)} (K_i) = F_{\bar{S}^c}(K), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Dans le cas où

$$\mathbb{P}(\zeta_i > 0) = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

et que les fonctions de répartition $F_{X_i}^{(\zeta_i)}$ sont strictement croissantes, alors l'allocation optimale donnée par (3.19) devient

$$K_i = \left(F_{X_i}^{(\zeta_i)} \right)^{-1} \left(F_{\overline{S}^c}(K) \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Voici un exemple du principe d'allocation selon l'écart absolu. Considérons le choix suivant pour la variable de pondération ζ_i ,

$$\zeta_i = \frac{\mathbf{1}(S > K)}{\mathbb{P}(S > K)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ceci implique que la méthode d'allocation ne considère que les situations menant à l'insolvabilité, soit les cas où $S > K$, les cas où les pertes totales sont plus grandes que le capital économique. Dans ce cas, le problème d'optimisation (3.15) devient

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j (X_j - K_j)_+ | S > K),$$

tel que $\sum_{j=1}^n K_j = K$. À l'aide de (3.18), nous avons que la fonction de répartition de X_i pondérée par ζ_i est donnée par

$$F_{X_i}^{(\zeta_i)}(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x | S > K), \quad i = 1, \dots, n.$$

À partir de (3.20), lorsque $x = K_i$, nous avons

$$\overline{F}_{X_i}^{(\zeta_i)}(K_i) = \mathbb{P}(X_i > K_i | S > K) = \overline{F}_{\overline{S}^c}(K), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce qui implique que le capital économique est alloué selon la probabilité que les pertes d'une unité d'affaire excèdent son capital alloué, sachant que les pertes totales du portefeuille excèdent le capital économique total, et donc que la compagnie est en situation d'insolvabilité. Cette probabilité est la même pour toutes les unités d'affaire.

CHAPITRE IV

COMPARAISON NUMÉRIQUE DANS LE CAS BIVARIÉ

Il est intéressant d'étudier différents modèles d'allocation du capital économique et de comprendre leur valeur théorique, mais ultimement, ceux-ci devraient servir aux compagnies. Celles-ci ont des besoins bien réels et sont souvent contraintes à utiliser lesdits modèles dans des situations où les hypothèses théoriques ne sont pas tout à fait respectées. Il est intéressant de mettre les modèles étudiés à l'épreuve et d'ainsi tester leur robustesse dans différentes situations.

Comme il a été souvent mentionné dans cet ouvrage, la première embûche que l'on rencontre est le fait que la structure de dépendance *réelle* entre les risques étudiés est habituellement inconnue ou partiellement connue. Bien entendu, un modèle mathématique ne représente jamais la réalité de façon exacte. Donc même s'il est possible de choisir une structure de dépendance complète pour un problème donné, ce modèle ne représentera qu'une partie de la *réelle* structure de dépendance. Il est donc important de connaître la robustesse du modèle choisi afin de pouvoir connaître ses forces et ses faiblesses et de pouvoir s'y fier lorsque vient le temps de prendre des décisions d'affaire.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la robustesse des méthodes d'allocation du capital économique présentées en les soumettant à différentes structures de dépendance pouvant représenter les résultats de pertes simulées pour une compagnie

d'assurance fictive.

4.1 Problématique

Il est tout d'abord bien important de comprendre les raisons qui font que la modélisation des pertes d'une entreprise est une tâche ardue. Nous allons étudier le cas où l'entreprise n'assure que deux types de risques. Les résultats obtenus se généralisent assez bien à une situation où il existe plusieurs risques. Il est généralement assez simple de déterminer les lois de probabilité pour chacun des risques, de façon individuelle. Plusieurs méthodes statistiques permettent de vérifier si la distribution choisie pour un risque est la meilleure, selon les choix à l'étude. Ces méthodes ne sont pas abordées dans cet ouvrage. Une chose demeure, il reste beaucoup d'incertitude quant à l'exactitude du modèle choisi pour un risque. Une des principales raisons est que les compagnies d'assurance n'ont généralement que très peu de données à leur disposition afin de procéder à la modélisation. On peut s'imaginer qu'une entreprise ne dispose que d'une vingtaine de données annuelles. Un modèle de capital économique a généralement pour but de quantifier les risques sur une base annuelle. Même si plus de données sont disponibles, la crédibilité de celles-ci est souvent contestable puisque l'exposition aux risques change beaucoup au fil du temps. Par exemples, le volume d'affaire peut avoir changé, des changements de réglementation peuvent aussi subvenir, le climat économique peut influencer les pertes et les décisions stratégiques peuvent modifier la nature des risques qu'une compagnie d'assurance accepte de couvrir. Tous ces éléments font que la distribution des pertes peut être très différente sur différentes périodes de temps. Malgré cela, il est quand même possible de procéder à la modélisation des risques en standardisant les pertes passées de façon à les mettre sur une même base.

Supposons maintenant que les données disponibles à la modélisation ont été traitées de façon adéquate afin de pallier aux changements subis par une entreprise et que nous sommes en mesure de bien définir les risques selon des lois de probabilité données. La prochaine étape de modélisation est de déterminer la structure de dépendance qui relie les risques d'un portefeuille entre eux. Il est possible d'utiliser une des nombreuses lois multivariées afin de définir la structure de dépendance. Parmi celles-ci, la loi normale multivariée est un des premiers candidats qui vient à l'esprit. Elle a l'avantage d'avoir été grandement étudiée dans le passé et offre donc des solutions bien connues pour résoudre les différents problèmes abordés dans le cadre de l'allocation du capital économique. Par exemple, il est bien connu que si deux risques suivent une loi normale bivariée avec des paramètres déterminés, alors la loi de probabilité marginale de chacun des risques est normale univariée et la somme des deux risques suit aussi une loi normale univariée. Ceci a pour effet de faciliter le calcul du capital économique et aussi de l'allocation du capital économique puisque toutes les distributions nécessaires sont connues.

La loi normale multivariée n'est par contre pas complètement réaliste pour modéliser des pertes puisque son support comprend des valeurs négatives, ce qui n'est pas possible dans le cas de pertes d'une compagnie d'assurance. Il faut bien évidemment spécifier que les pertes d'une compagnie d'assurance sont modélisées comme étant des variables aléatoires positives dans cet ouvrage. Puisque les pertes d'une compagnie d'assurance se chiffrent en millions de dollars, voire en milliards de dollars, cette contrainte est généralement ignorée puisqu'il n'y a qu'une partie *infime* de la distribution qui se retrouve dans la partie négative.

Il existe des lois multivariées qui sont plus réalistes pour représenter des risques, comme les lois Gamma, exponentielle, Pareto et lognormale multivariées. Ces lois peuvent être consultées dans (Marceau, 2013). Les lois marginales de chacune des ces lois multivariées sont aussi complètement déterminées. Elles offrent donc

aussi la possibilité de déterminer aisément le capital économique et l'allocation de celui-ci.

Toutes ces lois multivariées n'offrent par contre pas suffisamment de flexibilité quant à la modélisation individuelle des risques qui les composent. Effectivement, elles supposent que les risques suivent tous la même distribution univariée mais avec des paramètres qui peuvent différer. Ceci est assez contraignant et peu réaliste puisque les risques d'un portefeuille d'assurance peuvent être de nature assez différente. Une solution à ce problème est d'utiliser les copules. Celles-ci permettent de définir une structure de dépendance et d'incorporer différentes distributions pour chacun des risques. Nous avons donc, dans le cas bivarié, une flexibilité totale quant au choix des distributions marginales et une multitude de structures de dépendance possibles entre celles-ci. Par exemples,

1. Copule normale : c'est l'équivalent de la loi normale multivariée lorsque les lois marginales sont aussi normales ;
2. Copule de Clayton : elle permet d'avoir plus de dépendance dans la queue inférieure de la distribution et moins dans la queue supérieure ;
3. Copule de Gumbel : elle permet d'avoir plus de dépendance dans la queue supérieure de la distribution et moins dans la queue inférieure.

Dans le cas bivarié, les copules permettent une flexibilité complète dans la détermination du modèle : il est possible de choisir n'importe quelle loi pour chacun des risques à modéliser ainsi que la structure de dépendance adéquate entre eux. Lorsqu'un portefeuille contient plus de deux risques, il est aussi possible d'utiliser des copules multivariées. La structure de dépendance est par contre limitée lors de l'utilisation des copules les plus communes, soient les copules archimédiennes, gaussiennes et de Student. Ceci n'est pas réaliste puisque la structure de dépendance est généralement différente pour chaque paire de risques. Il existe quelques

façons de contourner ce problème, soit en développant un modèle avec des copules hiérarchiques ou les copules en vignes. Puisque nous nous limitons au cas bivarié, ces méthodes ne seront pas étudiées dans ce mémoire.

Dans le cadre de cette analyse numérique, nous abordons les problèmes de détermination du capital économique et de l'allocation du capital économique de façon graduelle en utilisant différents modèles sur un jeu de données simulées :

1. Loi normale bivariée ;
2. Loi lognormale bivariée ;
3. Loi Gamma bivariée ;
4. Copule gaussienne bivariée avec des lois marginales lognormale et Gamma ;
5. Copule de Clayton bivariée avec des lois marginales lognormale et Gamma ;
6. Copule de Gumbel bivariée avec des lois marginales lognormale et Gamma.

4.2 Hypothèses

L'analyse numérique se fera dans le contexte d'une compagnie d'assurance de dommages. Pour une telle compagnie, il est commun de rencontrer les risques suivants :

- Risques de souscription ;
 - Pertes individuelles ;
 - Grandes pertes ;
 - Catastrophes ;
- Risques de réserves ;
- Risques d'investissement ;
 - Risque de crédit ;
 - Risque de marché ;

- Risque de contrepartie ;
- Risque de taux d'intérêt ;
- Risques opérationnels ;
- Risques financiers.

Chacun de ces risques requiert généralement une loi de probabilité différente et la structure de dépendance entre chacune des paires de risques est probablement elle aussi différente. Bien que cette liste ne soit pas exhaustive, il en ressort que la modélisation des risques d'une compagnie d'assurance de dommages peut atteindre un niveau de complexité assez élevé, tel qu'illustré à la Figure 4.1. De plus,

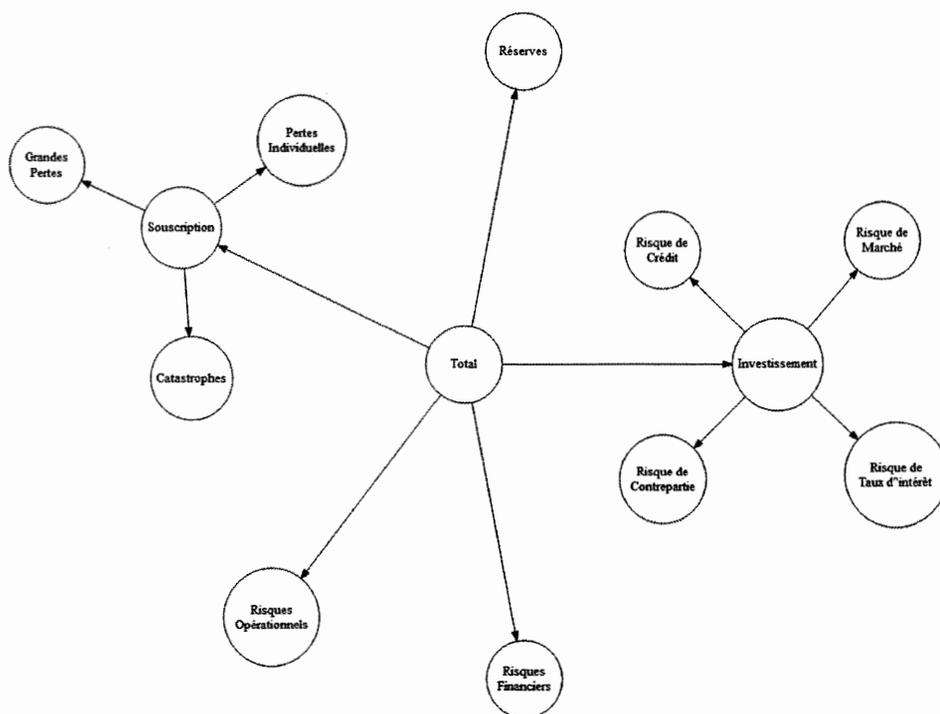


Figure 4.1 Illustration des liens entre quelques risques couverts par une compagnie d'assurance de dommages.

chacun des risques est généralement composé de plusieurs portefeuilles ou d'unités d'affaire, ce qui ne fait qu'augmenter la complexité. Par exemple, le risque de souscription pour l'assurance automobile au Canada ne peut être adéquatement modélisé en le considérant comme un tout. En effet, les produits offerts pour cette ligne d'affaire diffèrent grandement d'une province à l'autre. Par exemple, les couvertures offertes en Ontario et au Québec ne sont pas les mêmes. La société de l'assurance automobile du Québec couvre les blessures corporelles lors d'accidents automobiles tandis qu'en Ontario, ce sont les assureurs qui doivent couvrir ces risques. Les pertes reliées aux blessures corporelles peuvent atteindre des montants considérables en comparaison avec les pertes physiques aux véhicules et autres biens. Il est donc important de modéliser ces pertes séparément afin de bien représenter ces risques. Les automobiles personnelles et commerciales génèrent aussi des pertes ayant une fréquence et une sévérité bien différente de par la nature de leur utilisation. Il est aussi possible de segmenter le risque de souscription pour les pertes individuelles afin de modéliser les pertes et les primes de façon séparée. Les primes peuvent être segmentées de façon à modéliser le risque d'exposition et le risque de tarification séparément. Toute cette segmentation des risques augmente la complexité du modèle de capital économique de façon considérable. Il devient alors évident qu'il est pratiquement impossible d'obtenir un modèle théorique complet et réaliste pour représenter chacun des risques sous-jacents aux activités de cette entreprise. C'est pourquoi nous avons recours à l'analyse numérique afin de tester les différents modèles d'allocation du capital économique.

Différentes lois de probabilités et structures de dépendance sont utilisées afin de simuler les pertes de notre entreprise fictive. Ceci permet de bien comprendre les limites des méthodes d'allocation du capital économique analysées. Les modèles utilisés pour représenter les risques seront de plus en plus complexes et réalistes

au fur et à mesure que nous avancerons dans l'analyse. Le Tableau 4.1 résume les méthodes d'allocation utilisées dans le cadre de l'analyse numérique.

Tableau 4.1 Résumé des méthodes d'allocation du capital économique.

| Méthode | Capital alloué pour chaque ligne d'affaire X_i , $i = 1, \dots, n$ |
|------------|---|
| Factoriel | $K_i = \frac{\text{VaR}_p(X_i)}{\sum_{j=1}^n \text{VaR}_p(X_j)} K$ |
| Quantile | $K_i = F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(K))$ |
| Covariance | $K_i = \frac{\text{Cov}(X_i, S)}{\text{Var}(S)} K$ |
| CTE | $K_i = \frac{\mathbb{E}(X_i S > F_S^{-1}(p))}{\text{CTE}_p(S)} K$ |
| Optimale 1 | $K_i = \text{CTE}_p(X_i) + \nu_i \left(K - \sum_{j=1}^n \text{CTE}_p(X_j) \right)$ |
| Optimale 2 | $K_i = \mathbb{E}(X_i) + a\sigma_{X_i} + \nu_i \left(k - \sum_{j=1}^n (\mathbb{E}(X_j) + a\sigma_{X_j}) \right)$ |
| Optimale 3 | $K_i = \frac{1}{a} \ln \mathbb{E}(e^{aX_i}) + \nu_i \left(k - \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} \ln \mathbb{E}(e^{aX_j}) \right)$ |
| Optimale 4 | $K_i = \frac{\mathbb{E}(X_i e^{aX_i})}{\mathbb{E}(e^{aX_i})} + \nu_i \left(k - \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_j e^{aX_j})}{\mathbb{E}(e^{aX_j})} \right)$ |
| Optimale 5 | $K_i = \mathbb{E}(X_i) + a \frac{\text{Cov}(X_i, S)}{\sigma_S} + \nu_i \left(K - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) - a\sigma_S \right)$ |

Les quatre premières méthodes proviennent directement du Chapitre 2. Les méthodes d'allocation optimales proviennent quant à elles du Chapitre 3. En utilisant les ζ_i définis dans les Tableaux 3.1 et 3.2 dans l'équation

$$K_i = \mathbb{E}(\zeta_i X_i) + \nu_i \left(K - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\zeta_j X_j) \right), \quad (4.1)$$

nous obtenons directement les allocation définies au Tableau 4.1. Celles-ci sont toutes des solutions de l'allocation optimale selon le critère d'optimisation quadratique. L'allocation optimale sous l'optimisation selon le critère d'écart absolu n'est pas analysée puisque la solution obtenue lorsque les $\zeta_i \equiv 1$ est équivalente à l'allocation selon le quantile. De plus, aucune application concrète n'est suggérée par les auteurs de (Dhaene *et al.*, 2012).

Les ν_i sont déterminés à l'aide de la proportion du coefficient de variation de chacune des lignes d'affaire sur le total de ceux-ci. La somme de ces deux proportions est égale à un, ce qui répond à la condition établie sur ceux-ci. Le coefficient de variation est le ratio de l'écart-type sur l'espérance de chacun des risques. Il représente donc la volatilité de chacun des risques normalisée par leur espérance respective. Ce coefficient permet de mieux comparer des risques qui n'ont pas la même ampleur. Il est fréquent d'observer que deux risques avec des moyennes très différentes ont un écart-type qui est aussi différent, avec un écart-type plus grand pour le risque ayant une moyenne plus grande. Le coefficient de variation permet de voir si ces risques ont réellement une volatilité très différente.

Tel que proposé au Chapitre 3.2, il aurait semblé naturel de choisir les ν_i tels que

$$\nu_i = \frac{\mathbb{E}(X_i \zeta_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j \zeta_j)} \quad (4.2)$$

puisque ce choix prend en compte le risque de chacune des lignes d'affaire. Par contre, ce choix mène souvent à la disparition du terme de droite dans l'équation (4.1), ce qui rend l'étude des méthodes d'allocation optimale moins intéressante. Afin que les termes de droite demeurent dans l'équation, nous aurions pu choisir des ν_i différents pour chacune des méthodes, ce qui aurait rendu plus difficile la comparaison entre ces méthodes. C'est pourquoi le coefficient de variation est utilisé. C'est un choix qui demeure constant pour chacune des méthodes, sans altérer les équations, et qui permet de comparer les méthodes en minimisant l'interférence entre celles-ci.

Étant donné que les résultats obtenus se généralisent bien lorsqu'il y a plus de deux risques, seuls des modèles bivariés sont utilisés. Nous avons donc deux risques X et Y qui composent le portefeuille de risques de notre compagnie d'assurance. Nous supposons que nous avons un historique des pertes suffisamment grand pour chacun des risques afin de calculer les statistiques empiriques du Tableau 4.2 avec

un niveau de confiance élevé.

Tableau 4.2 Statistiques empiriques pour chacun des risques de notre compagnie d'assurance.

| Statistique | X | Y |
|----------------|-----------|------------|
| $\hat{\mu}$ | 3,275,000 | 10,000,000 |
| $\hat{\sigma}$ | 1,000,000 | 3,000,000 |
| $\hat{\rho}$ | 0.4 | |

Les paramètres des différentes lois de X et Y sont obtenus à l'aide de la méthode des moments avec les statistiques empiriques du Tableau 4.2.

Afin de déterminer le capital économique K , deux mesures de risques sont couramment utilisées dans l'industrie, soient le CTE au niveau 0.99 et la VaR au niveau 0.995. La VaR est calculée à un niveau de confiance plus élevé que le CTE puisque celle-ci représente un quantile alors que le CTE est la moyenne des quantiles au delà du niveau de confiance choisi. Il en résulte que la différence entre ces deux mesures de risque est moins grande que si le même niveau de confiance était utilisé.

Afin de déterminer le capital économique qui est utilisé au cours de l'analyse numérique, comparons les résultats obtenus selon les deux mesures de risque en supposant que les risques de la compagnie d'assurance suivent une loi normale bivariée. Les paramètres de ce modèle sont les mêmes que ceux qui sont utilisés dans la prochaine section, soient ceux du Tableau 4.4. Le détail de ceux-ci est discuté dans cette section n'est pas important à l'analyse faite ici.

Le capital économique total pour notre compagnie d'assurance est présenté dans le Tableau 4.3 selon les deux mesures de risque retenues et différents degrés de

dépendance linéaire.

Tableau 4.3 VaR (0.995) et CTE (0.99) pour les différents degrés de dépendance de la loi normale bivariée.

| Mesure | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.4$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|--------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| VaR | 17,913,633 | 20,626,405 | 21,454,519 | 22,568,496 |
| CTE | 19,048,478 | 22,406,639 | 23,447,807 | 24,838,922 |

À partir de ce tableau, nous pouvons déduire que le niveau de corrélation entre les risques a une bonne influence sur le capital économique qu'une compagnie doit détenir. Il existe en effet un écart de 25% à 30% entre la dépendance négative parfaite qu'est l'antimonotonie et la dépendance positive parfaite qu'est la comonotonie. Cet écart peut avoir un grand effet sur les résultats d'une compagnie d'assurance. Il est donc important de bien quantifier la dépendance entre les risques. C'est pour cette raison que les régulateurs portent une attention particulière à la corrélation utilisée dans les modèles de capital économique d'une entreprise financière.

En effet, des lignes directrices sont émises quant à la corrélation permise dans un modèle de capital économique. Par exemple, il n'est généralement pas permis d'utiliser une corrélation négative. Un seuil minimal de corrélation peut aussi être exigé. Ceci empêche donc une compagnie de déclarer que tous ses risques sont indépendants ou négativement corrélés afin de diminuer le capital économique requis. Les résultats selon les différentes corrélations seront tout de même présentés au cours de notre analyse.

En illustrant les résultats du Tableau 4.3 à la Figure 4.2, nous pouvons constater que la VaR et le CTE présentent des écarts similaires entre les niveaux de

corrélation, à la différence d'une translation vers la droite pour le CTE.

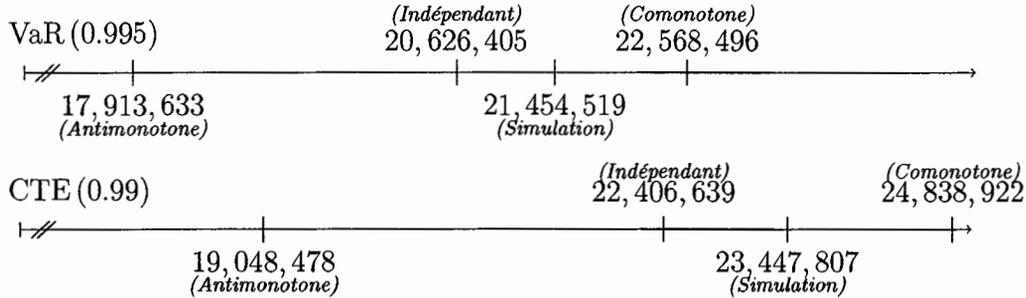


Figure 4.2 Illustration de la VaR(0.995) et du CTE(0.99) pour les différentes structures de dépendance de la loi normale bivariée.

L'allocation du capital économique est présentée sous forme de proportion du capital économique total. Puisque le pourcentage d'allocation n'est pas influencé par le montant de capital économique total, celui-ci est déterminé à l'aide du CTE au niveau 0.99 pour le reste de cet ouvrage. Le niveau 0.995 pour la VaR est par contre utilisé lorsque nécessaire, par exemple, pour l'allocation selon le quantile.

Il est important de noter que les résultats notés « Simulation » représentent ce qui est obtenu en simulant la loi bivariée normale avec les paramètres du Tableau 4.4. La même appellation sera utilisée pour les autres modèles. Pour obtenir les résultats sous la comonotonicité, l'antimonotonicité et l'indépendance, les vecteurs résultant de la simulation sont manipulés afin d'obtenir la structure de dépendance désirée.

Pour la comonotonicité, les vecteurs sont tous deux ordonnés de façon croissante. Afin de se convaincre que cette méthode d'ordonnement est justifiée, il faut se souvenir que la comonotonicité implique une corrélation de Pearson parfaitement positive ($\rho = 1$) et donc qu'une petite (grande) perte pour le risque X implique une petite (grande) perte pour le risque Y . En ordonnant les vecteurs de façon

croissante, nous obtenons donc une dépendance linéaire positive parfaite.

À l'inverse, pour obtenir un vecteur de pertes antimonotone, Il faut ordonner un risque de façon croissante et l'autre de façon décroissante. Ceci impose une dépendance négative parfaite à notre vecteur de risques ($\rho = -1$), ce qui implique qu'une petite (grande) perte pour le risque X implique une grande (petite) perte pour le risque Y . C'est ce que l'on obtient en appliquant l'ordonnement proposé.

En ce qui concerne le vecteur de risques indépendants, la méthode choisie consiste à ordonner chacun des risques de façon aléatoire. Par cette façon de faire, nous obtenons un coefficient de corrélation de Pearson qui s'approche grandement de 0 et donc de l'indépendance linéaire presque parfaite. Cette méthode a été choisie puisque, bien qu'il soit facile de simuler un vecteur de loi normale bivariée indépendant, en fixant $\rho = 0$, il est plus difficile de faire de même pour certaines des autres lois utilisées au cours de cet ouvrage. Par souci de cohérence, l'approximation d'un vecteur de lois indépendantes est donc utilisée au cours de cet ouvrage.

4.3 Loi normale bivariée

Nous commençons notre analyse avec la loi normale bivariée. Celle-ci est très simple à utiliser et permet donc une introduction rapide en la matière. Les deux risques X et Y suivent donc une loi normale, soient $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ avec un coefficient de corrélation de Pearson ρ . Nous avons donc que $(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$.

Par la méthode des moments, nous posons $\mathbb{E}(X) = \hat{\mu}_X$ et $\text{VaR}(X) = \hat{\sigma}_X^2$. Puisque $\mathbb{E}(X) = \mu_X$ et $\text{VaR}(X) = \sigma_X^2$, nous avons donc que $\hat{\mu}_X = \mu_X$ et $\hat{\sigma}_X = \sigma_X$. De la même façon, nous avons que $\hat{\mu}_Y = \mu_Y$ et $\hat{\sigma}_Y = \sigma_Y$. Les paramètres utilisés afin de simuler ce modèle sont présentés au Tableau 4.4.

Tableau 4.4 Paramètres de la loi normale bivariée.

| Paramètre | X | Y |
|----------------|-----------|------------|
| $\hat{\mu}$ | 3,275,000 | 10,000,000 |
| $\hat{\sigma}$ | 1,000,000 | 3,000,000 |
| $\hat{\rho}$ | 0.4 | |

À partir des résultats du Tableau 4.5, il est possible de formuler quelques conclusions intéressantes. Tout d'abord, les méthodes d'allocation factorielle et selon le quantile donnent toutes deux une allocation constante peu importe le niveau de dépendance qui existe entre les risques. Puisque ces méthodes ne tiennent pas compte de la structure de dépendance, ce résultat n'est pas surprenant. Ces méthodes sont donc intéressantes lorsque les gestionnaires tentent de prendre une décision qui ne devrait pas être teintée par l'interrelation qui existe entre les risques. Par exemple, ceux-ci pourraient vouloir déterminer le niveau de rémunération additionnel que devrait se mériter les responsables de ces risques. Il semble naturel de ne pas vouloir récompenser ou pénaliser les responsables de ces risques pour la relation favorable ou défavorable qui existe entre les risques, puisqu'ils n'ont pas ou peu d'influence sur cette relation.

Les résultats de ces méthodes sont très similaires, peu importe les lois de probabilités et la structure de dépendance utilisées. C'est pourquoi les résultats de ces méthodes d'allocation ne sont pas présentés par la suite.

La méthode d'allocation selon la covariance donne quant à elle des résultats qui varient substantiellement selon le degré de dépendance linéaire qui existe entre les risques. Cette méthode est donc assez sensible à la structure de dépendance sous-jacente. Il est donc important de s'assurer de bien quantifier la dépendance

Tableau 4.5 Allocation du capital économique selon la loi normale bivariée.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.4$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Factoriel | X | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| | Y | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| Quantile | X | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| | Y | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| Covariance | X | -0.50 | 0.10 | 0.18 | 0.25 |
| | Y | 1.50 | 0.90 | 0.82 | 0.75 |
| CTE | X | 0.02 | 0.19 | 0.22 | 0.25 |
| | Y | 0.98 | 0.81 | 0.78 | 0.75 |
| Optimale 1 | X | 0.17 | 0.22 | 0.23 | 0.25 |
| | Y | 0.83 | 0.78 | 0.77 | 0.75 |
| Optimale 2 | X | 0.22 | 0.26 | 0.27 | 0.28 |
| | Y | 0.78 | 0.74 | 0.73 | 0.72 |
| Optimale 3 | X | 0.31 | 0.34 | 0.35 | 0.36 |
| | Y | 0.69 | 0.66 | 0.65 | 0.64 |
| Optimale 4 | X | 0.30 | 0.33 | 0.34 | 0.35 |
| | Y | 0.70 | 0.67 | 0.66 | 0.65 |
| Optimale 5 | X | 0.11 | 0.24 | 0.26 | 0.28 |
| | Y | 0.89 | 0.76 | 0.74 | 0.72 |

entre les risques lorsqu'elle est utilisée.

Elle comporte par contre un problème assez important. En effet, les résultats obtenus lorsque les risques sont liés par une dépendance négative ne sont pas très réalistes. Dans le cas de la loi bivariée normale, il semble que le risque X devrait recevoir un crédit de 50% du capital économique total alors que le risque Y devrait contribuer à la hauteur de 150% de celui-ci. C'est donc dire que le risque X diminue le risque total de la compagnie alors que le risque Y contribue à celui-ci de façon plus importante que le risque total de l'entreprise. Il est assez évident que ceci ne peut se produire dans la réalité. Cette méthode ne peut donc pas être utilisée dans les cas de dépendance linéaire négative entre les risques.

Les résultats obtenus avec cette méthode d'allocation sont pratiquement les mêmes pour chacun des modèles utilisés au cours de l'analyse numérique. Ceci peut sembler contre-intuitif puisque cette méthode tient compte du modèle et du niveau de dépendance entre les risques. Dans le but de se convaincre que ce résultat n'est pas dû au hasard, rappelons tout d'abord que le capital économique pour chaque ligne d'affaire est obtenu par

$$K_X = \frac{\text{Cov}(X, S)}{\text{Var}(S)} K.$$

Puisque $\text{Cov}(X, S) = \rho\sigma_X\sigma_S$ et que $\text{Var}(S) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y$, nous avons donc que cette méthode d'allocation est invariante au modèle utilisé pour représenter ces risques et à la structure de dépendance qui existe entre ceux-ci. Seul le niveau de dépendance linéaire a une influence sur le résultat.

La méthode d'allocation selon le CTE offre quant à elle une bonne diversité de résultats selon les différents niveaux de dépendance. Il est intéressant de regarder l'allocation résultante lorsque les risques sont antimonotoniques. Elle accorde beaucoup de capital économique à la ligne d'affaire Y dans ce cas-ci. Il faut rappeler que ce risque est en moyenne pratiquement 3 fois plus élevé que le risque X .

Celui-ci contribue donc beaucoup plus à la somme des risques qui se retrouvent au-delà du quantile 0.99 de celle-ci. Ce résultat est assez intuitif lorsqu'on décortique la méthode.

Cette méthode d'allocation offre des résultats relativement stables lorsque les risques sont indépendants jusqu'à comonotones. Il y a en effet une différence de plus ou moins 3% entre les degrés de dépendance lorsqu'on les compare aux résultats obtenus avec la simulation. Bien que cette différence semble marginale, elle représente tout de même un montant d'argent substantiel lorsque le capital économique total atteint des dizaines de millions de dollars, des centaines de millions de dollars, voire même des milliards de dollars. Cette différence semble donc marginale en relatif, mais elle peut être substantielle en absolu.

Ce qui est intéressant avec les méthodes d'allocation optimales, c'est la variabilité des proportions d'allocation entre les risques qui résultent de chacune d'elles. En effet, la première méthode accorde 23% du capital économique au risque X alors que la troisième lui alloue 35%, dans le cas de la simulation. Ceci indique donc que la méthode d'allocation choisie a un grand effet sur la quantité de capital économique allouée à chacune des lignes d'affaires et peut donc modifier les décisions qui seront prises de façon importante.

Par exemple, lorsque l'allocation du capital économique se fait dans le but d'ajuster la tarification de chacune des lignes d'affaire, le choix du modèle d'allocation peut avoir une incidence importante sur les résultats futurs d'une compagnie d'assurance. Est-ce qu'il faut ajouter 23% ou 35% du capital économique à la tarification de la ligne d'affaire X ? Si on considère les quatre premières méthodes, la borne inférieure de l'intervalle devient alors 18%. La proportion d'allocation du capital économique passe alors du simple au double, selon la méthode d'allocation choisie. Le choix final peut alors grandement diminuer ou augmenter la tarification

de cette ligne d'affaire.

Cette différence entre les résultats des méthodes d'allocation indique donc que le choix de celle-ci doit faire l'objet d'une analyse très sérieuse afin de s'assurer de prendre des décisions éclairées. Un mauvais choix pourrait avoir des conséquences sérieuses. Par exemple, si on attribue 18% du capital économique au risque X et 82% de celui-ci au risque Y , il se peut que la tarification du risque X ne soit pas suffisant pour supporter les pertes qui en résulteront puisqu'elle ne sera pas assez élevé. On pourrait par contre conclure que la sur-allocation de capital économique au risque Y viendrait alors combler le manque à gagner du risque X . Il faut par contre considérer que l'exposition du risque X connaîtrait probablement une forte croissance à l'inverse du risque Y qui subirait une diminution importante de son volume d'affaire. En effet, le capital économique insuffisamment alloué au risque X résulterait en des primes moins élevées qu'elles ne le devraient, ce qui attirerait plus de clients. À l'inverse, les primes du risque Y seraient possiblement trop élevées et repousseraient les clients vers d'autres assureurs. Par ce double levier, il manquerait donc de capital économique à notre assureur, ce qui le placerait dans une situation précaire pour la suite des choses.

Les décisions d'affaire basées sur l'allocation du capital économique pourraient par contre se prendre suite à une comparaison entre quelques méthodes. Ceci permettrait de construire un intervalle de proportion d'allocation qui pourrait mieux guider les décisions, en plus de donner une meilleure confiance face à l'allocation choisie. L'incertitude en serait aussi grandement diminuée.

4.4 Autres lois bivariées

La loi normale bivariée est intéressante à utiliser puisqu'elle possède des propriétés permettant des manipulations simples. Elle peut aussi bien représenter certains

risques au sein d'une compagnie d'assurances. Par contre, certains risques ont une distribution qui est plutôt asymétrique avec une queue de distribution plus lourde pour les pertes élevées. Il est donc intéressant d'utiliser d'autres lois de probabilité pour modéliser ces pertes, telles que les distributions lognormale et Gamma.

Les trois lois de probabilités suivantes sont utilisées au cours de cet ouvrage : normale, lognormale et Gamma. Plusieurs autres distributions auraient pu être utilisées, telles que la loi Pareto ou Weibull par exemple, mais les lois normale, lognormale et Gamma sont plus fréquemment utilisées pour représenter les risques d'une compagnie d'assurance de dommages. Les variables aléatoires sont donc simulées avec $N(\mu, \sigma^2)$, $LN(m, v)$ et $Gamma(\alpha, \theta)$.

Les paramètres de la loi normale sont les mêmes que ceux de la loi bivariée normale au Tableau 4.4. Afin de trouver les paramètres de la loi lognormale à l'aide de la méthode des moments, nous avons que

$$\hat{\mu}_X = \mathbb{E}(X) = \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \quad (4.3)$$

et

$$\hat{\sigma}_X^2 = \text{Var}(X) = \exp(2m + v^2) (\exp(v^2) - 1).$$

En utilisant ces deux équations, nous avons que

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X^2} = \exp(v^2) - 1 \iff v^2 = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X^2} + 1\right).$$

En utilisant ce résultat dans l'équation (4.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_X &= \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \\ \iff \ln \hat{\mu}_X &= m + \frac{v^2}{2} \\ \iff m &= \ln \hat{\mu}_X - \frac{\ln\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X^2} + 1\right)}{2}. \end{aligned}$$

De la même façon, nous trouvons les paramètres pour la variable aléatoire Y .

En ce qui concerne la loi Gamma, nous avons que

$$\hat{\mu}_X = \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\theta}$$

et

$$\hat{\sigma}_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}.$$

En utilisant ces deux équations, nous avons que

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X} = \frac{1}{\theta} \iff \theta = \frac{\hat{\mu}_X}{\hat{\sigma}_X^2}.$$

En utilisant ce résultat dans l'équation (4.4), nous obtenons

$$\hat{\mu}_X = \frac{\alpha \hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X} \iff \alpha = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\mu}_X^2}.$$

Ces résultats nous permettent de déterminer les paramètres de chacune des lois afin de les simuler.

Comme on peut le voir dans les graphiques aux Figures 4.3 et 4.4, les distributions simulées à partir des paramètres du Tableau 4.6 peuvent ressembler grandement à une distribution normale.

Tableau 4.6 Paramètres des distributions des variables aléatoires X et Y .

| Paramètre | X | Y |
|-----------|-----------|------------|
| μ | 3,275,000 | 10,000,000 |
| σ | 1,000,000 | 3,000,000 |
| m | 14.9579 | 16.075 |
| v | 0.089 | 0.086 |
| α | 10.73 | 11.11 |
| θ | 3.275e-06 | 1.111e-06 |

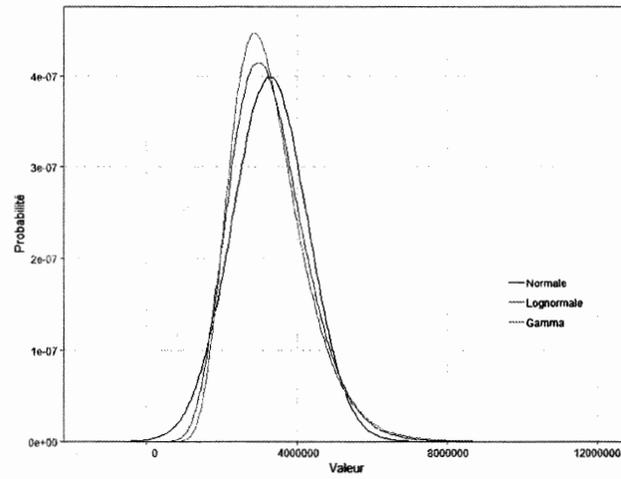


Figure 4.3 Graphiques des variables aléatoires X selon les lois normale, lognormale et Gamma.

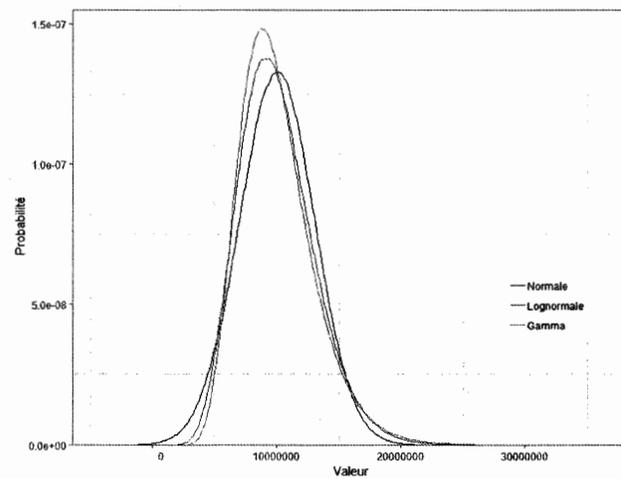


Figure 4.4 Graphiques des variables aléatoires Y selon les lois normale, lognormale et Gamma.

Tableau 4.7 Comparaison des $\text{CTE}_{0.99}$ pour les variables aléatoires X et Y selon les distribution normale, lognormale et Gamma.

| Distribution | $\text{CTE}_{0.99}(X)$ | $\text{CTE}_{0.99}(Y)$ |
|--------------|------------------------|------------------------|
| Normale | 5,929,843 | 18,046,116 |
| Lognormale | 6,944,125 | 20,827,045 |
| Gamma | 6,578,103 | 19,790,164 |

Bien que les paramètres des différentes distributions soient obtenus par la méthode des moments à partir des mêmes statistiques empiriques, on peut remarquer qu'elles ne sont pas identiques. Les lois lognormale et gamma ont toutes deux des queues de distribution plus lourdes pour les pertes plus élevées, ce qui indique qu'elles accordent plus d'importance aux pertes plus élevées que la loi normale. Une observation du Tableau 4.7 confirme cette remarque. La loi lognormale a une queue de distribution plus élevée vers la droite, suivie par la loi gamma et la loi normale.

Puisque les lois lognormale et Gamma possèdent toutes deux des versions bivariées, il est assez simple d'analyser les modèles d'allocation du capital économique avec ces deux lois.

4.4.1 Loi lognormale bivariée

Les deux risques qui composent notre compagnie suivent maintenant une loi lognormale bivariée. Soient $X \sim LN(m_X, v_X)$ et $Y \sim LN(m_Y, v_Y)$ avec un coefficient de corrélation de Pearson ρ . Afin de simuler une distribution lognormale bivariée, il suffit de simuler une loi normale bivariée et d'appliquer la fonction exponentielle aux résultats, tel que décrit dans (Halliwell, 2015).

Nous simulons donc une loi normale bivariée telle que

$$(X, Y) \sim N_2(m_X, v_X, m_Y, v_Y, \rho)$$

dont les paramètres se trouvent dans le Tableau 4.8. Nous prenons ensuite l'exponentielle de chacune des variables afin d'obtenir nos vecteurs de variables aléatoires lognormales bivariées.

Tableau 4.8 Paramètres des lois lognormales.

| Paramètre | X | Y |
|-----------|--------|--------|
| m | 14.957 | 16.075 |
| v | 0.299 | 0.294 |
| ρ | 0.4 | |

À partir des résultats de l'allocation du capital économique à l'aide de la loi lognormale bivariée qui se trouvent au Tableau 4.9, nous pouvons constater que les résultats sont similaires à ceux obtenus avec la loi normale bivariée. L'allocation en tant que telle n'est pas la même qu'avec la loi normale bivariée, mais les différences entre chaque méthode d'allocation se ressemblent beaucoup.

L'allocation selon la covariance est la même, sauf dans le cas de l'antimonotonie. Puisque ce cas a été considéré irréaliste, nous ignorons ce résultat.

L'allocation selon le CTE accorde quant à elle une proportion moins grande de capital économique pour le risque X que dans le cas de la loi normale bivariée. Sous la simulation, la loi lognormale bivariée alloue 20% de capital économique au risque X contre 22% sous la loi normale bivariée.

La méthode d'allocation optimale 2 alloue quant à elle une proportion plus grande de capital économique au risque X avec la loi lognormale, soit 31% du capital

Tableau 4.9 Allocation du capital économique sous la loi lognormale bivariée.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.4$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Covariance | X | -0.39 | 0.10 | 0.18 | 0.25 |
| | Y | 1.39 | 0.90 | 0.82 | 0.75 |
| CTE | X | 0.06 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
| | Y | 0.94 | 0.85 | 0.80 | 0.75 |
| Optimale 2 | X | 0.27 | 0.29 | 0.31 | 0.32 |
| | Y | 0.73 | 0.71 | 0.69 | 0.68 |
| Optimale 3 | X | 0.35 | 0.36 | 0.37 | 0.38 |
| | Y | 0.65 | 0.64 | 0.63 | 0.62 |

économique total avec les données simulées contre 27% pour la loi normale bivariée. La même chose se produit avec l'allocation optimale 3, avec une différence moins grande entre les deux lois.

Il est possible de remarquer qu'en changeant les distributions représentant les risques et la structure de dépendance entre ceux-ci, l'allocation du capital économique change elle aussi. Bien que ces variations puissent être considérées marginales, il faut se rappeler que le capital économique total d'une compagnie d'assurance peut se chiffrer en milliards de dollars et donc que chaque variation de 1% peut avoir une influence importante sur les décisions à prendre en fonction de cette allocation.

4.4.2 Loi Gamma bivariée

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque la loi gamma bivariée est utilisée pour modéliser le portefeuille de notre compagnie d'assurance. Les deux risques qui composent notre compagnie suivent maintenant une loi gamma bivariée Cheriyan, Ramabhadran, Mathai et Moschopoulos (CRMM) telle que décrite dans (Marceau, 2013). Soient $X \sim \text{Gamma}(\alpha_X, \theta_X)$ et $Y \sim \text{Gamma}(\alpha_Y, \theta_Y)$ avec un coefficient de corrélation de Pearson ρ .

Afin d'obtenir une loi gamma bivariée CRMM avec la corrélation linéaire souhaitée, nous avons besoin de trois variable aléatoires indépendantes Z_0 , Z_1 et Z_2 telles que

$$Z_0 \sim \text{Gamma}(\alpha_0, \theta_0)$$

$$Z_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_X - \alpha_0, \theta_X)$$

$$Z_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_Y - \alpha_0, \theta_Y).$$

Les variables aléatoires X et Y sont ensuite définies comme

$$X = \frac{\theta_0}{\theta_X} Z_0 + Z_1$$

$$Y = \frac{\theta_0}{\theta_Y} Z_0 + Z_2.$$

Les paramètres utilisés afin de simuler ce modèle se trouvent dans le Tableau 4.10.

Le paramètre θ_0 a été arbitrairement fixé à 2 puisqu'il n'a aucune incidence sur

Tableau 4.10 Paramètres de la loi Gamma bivariée.

| Paramètre | 0 | X | Y |
|-----------|-------------------------------|-----------|-----------|
| α | $\rho\sqrt{\alpha_X\alpha_Y}$ | 10.73 | 11.11 |
| θ | 2 | 3.275e-06 | 1.111e-06 |
| ρ | 0.4 | | |

les résultats. En effet, nous avons que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\frac{\theta_0}{\theta_X}Z_0 + Z_1\right) \\
 &= \frac{\theta_0}{\theta_X}\mathbb{E}(Z_0) + \mathbb{E}(Z_1) \\
 &= \frac{\theta_0}{\theta_X}\frac{\alpha_0}{\theta_0} + \frac{\alpha_X - \alpha_0}{\theta_X} \\
 &= \frac{\alpha_X}{\theta_X}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \text{Var}\left(\frac{\theta_0}{\theta_X}Z_0 + Z_1\right) \\
 &= \left(\frac{\theta_0}{\theta_X}\right)^2 \text{Var}(Z_0) + \text{Var}(Z_1) \\
 &= \frac{\theta_0^2}{\theta_X^2}\frac{\alpha_0}{\theta_0^2} + \frac{\alpha_X - \alpha_0}{\theta_X^2} \\
 &= \frac{\alpha_X}{\theta_X^2}.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que peu importe la valeur de θ_0 , les variables aléatoires X et Y auront l'espérance et la variance désirée au départ.

À partir de ce modèle, nous obtenons les résultats du Tableau 4.11.

Les résultats de ce modèle ressemblent beaucoup à ceux obtenus avec la loi lognormale bivariée. Ceci était attendu étant donné que ces deux distributions se

Tableau 4.11 Allocation du capital économique sous la loi bivariée Gamma CRMM.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.4$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Covariance | X | -0.44 | 0.10 | 0.18 | 0.25 |
| | Y | 1.44 | 0.90 | 0.82 | 0.75 |
| CTE | X | 0.05 | 0.16 | 0.21 | 0.25 |
| | Y | 0.95 | 0.84 | 0.79 | 0.75 |
| Optimale 2 | X | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.70 | 0.69 |
| Optimale 3 | X | 0.34 | 0.36 | 0.36 | 0.37 |
| | Y | 0.66 | 0.64 | 0.64 | 0.63 |

ressemblent beaucoup et que leur différences en comparaison avec la loi normale bivariée sont sensiblement les mêmes. On peut quand même remarquer que l'allocation du capital économique est un peu plus élevée pour le risque X sous la loi gamma bivariée CRMM que sous la loi lognormale bivariée sous la simulation.

4.5 Copules bivariées

Les lois bivariées normale, lognormale et Gamma sont intéressantes à utiliser afin de modéliser des risques. Il existe des formes multivariées pour chacune d'elles qui permettent donc de modéliser un portefeuille en entier. Ceci est par contre peu réaliste puisque tous les risques d'un portefeuille ne sont généralement pas identiques et ne peuvent donc pas être modéliser avec les mêmes lois. C'est pour cette raison que les copules sont intéressantes. Elles permettent de modéliser les

risques d'un portefeuille selon des distributions marginales différentes, à l'intérieur d'une structure de dépendance entre celles-ci.

4.5.1 Copule gaussienne bivariée

Le modèle qui suit est composé du risque $X \sim LN(m_X, v_X)$, du risque $Y \sim Gamma(\alpha_Y, \theta_Y)$ et de la copule gaussienne dont les paramètres sont présentés au Tableau 4.12.

Tableau 4.12 Paramètres de la copule gaussienne bivariée.

| Paramètre | Valeur |
|------------|-----------|
| m_X | 14.957 |
| v_X | 0.089 |
| α_Y | 11.11 |
| θ_Y | 1.111e-06 |
| ρ | 0.4 |

En comparant les résultats présentés au Tableau 4.13 à ceux obtenus avec la loi normale bivariée dans le Tableau 4.5, nous pouvons remarquer que l'allocation obtenue pour le risque X est presque tout le temps inférieure sous l'allocation selon le CTE. Le contraire se produit pour les deux méthodes d'allocation optimale. La méthode d'allocation selon la covariance donne cependant les mêmes résultats.

Il est intéressant de constater que l'allocation du capital varie lorsque l'on change les distributions marginales. La structure de dépendance est demeurée inchangée entre le modèle impliquant la loi normale bivariée et celui utilisant la copule gaussienne. On peut donc conclure que les lois marginales ont une influence sur l'allocation du capital économique.

Tableau 4.13 Allocation du capital économique selon la copule gaussienne avec des lois marginales lognormale et Gamma.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.4$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Covariance | X | -0.42 | 0.10 | 0.18 | 0.25 |
| | Y | 1.42 | 0.90 | 0.82 | 0.75 |
| CTE | X | 0.06 | 0.17 | 0.21 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.79 | 0.74 |
| Optimale 2 | X | 0.26 | 0.28 | 0.29 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.69 |
| Optimale 3 | X | 0.34 | 0.36 | 0.36 | 0.38 |
| | Y | 0.66 | 0.64 | 0.64 | 0.62 |

4.5.2 Copule de Clayton bivariée

Le prochain modèle est composé d'un risque $X \sim LN(m_X, v_X)$, d'un risque $Y \sim Gamma(\alpha_Y, \theta_Y)$ et d'une copule de Clayton dont les paramètres se trouvent dans le Tableau 4.14.

Selon le Tableau 4.15, seule l'allocation du capital économique selon la méthode du CTE varie de façon significative pour la simulation quand on compare les résultats avec ceux obtenus avec la copule gaussienne. L'allocation selon la covariance a elle aussi été impactée mais de façon plus marginale. Tous les autres résultats sont sensiblement les mêmes.

Il est important de noter que la corrélation est passée de 0.4 à 0.34 entre les deux modèles. Ceci a certainement eu une influence sur l'allocation selon le CTE et la

Tableau 4.14 Paramètres de la copule de Clayton bivariée.

| Paramètre | Valeur |
|------------|-----------|
| m_X | 14.957 |
| v_X | 0.089 |
| α_Y | 11.11 |
| θ_Y | 1.111e-06 |
| θ | 0.7099528 |

Tableau 4.15 Allocation du capital économique selon la copule de Clayton avec des lois marginales lognormale et Gamma.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.34$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Covariance | X | -0.42 | 0.10 | 0.17 | 0.25 |
| | Y | 1.42 | 0.90 | 0.83 | 0.75 |
| CTE | X | 0.06 | 0.17 | 0.18 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.82 | 0.74 |
| Optimale 2 | X | 0.26 | 0.28 | 0.29 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.69 |
| Optimale 3 | X | 0.34 | 0.36 | 0.36 | 0.38 |
| | Y | 0.66 | 0.64 | 0.64 | 0.62 |

l'allocation selon la covariance puisque celles-ci prennent en compte la structure de dépendance, ce qui n'est pas le cas des allocations optimales 2 et 3. Il semble donc normal que ces dernières n'aient pas été affectées par la variation du coefficient de corrélation linéaire ainsi que par le changement de structure de dépendance.

4.5.3 Copule de Gumbel bivariée

Le prochain modèle est composé du risque $X \sim LN(m_X, v_X)$, du risque $Y \sim Gamma(\alpha_Y, \theta_Y)$ et de la copule de Gumbel dont les paramètres se trouvent dans le Tableau (4.16).

Tableau 4.16 Paramètres de la copule de Gumbel bivariée.

| Paramètre | Valeur |
|------------|-----------|
| m_X | 14.957 |
| v_X | 0.089 |
| α_Y | 11.11 |
| θ_Y | 1.111e-06 |
| θ | 1.354976 |

En analysant les résultats présentés au Tableau 4.17, nous remarquons que l'allocation sous la simulation est généralement plus élevée pour le risque X que celle obtenue avec la copule gaussienne ainsi que l'allocation résultant de la copule de Clayton. Plus particulièrement, l'allocation selon le CTE a substantiellement augmenté, avec des résultats de 21% pour la copule gaussienne, de 18% pour la copule de Clayton et de 25% pour la copule de Gumbel. Encore une fois, ceci était attendu puisque c'est la seule méthode d'allocation qui est influencée par la structure de dépendance et le niveau de dépendance linéaire entre les risques, avec la méthode d'allocation selon la covariance. Cette dernière a subi des variations qui sont cependant moins importantes. Il est à noter que la dépendance linéaire est de 0.44 avec ce modèle.

Tableau 4.17 Allocation du capital économique selon la copule de Gumbel avec des lois marginales lognormale et Gamma.

| Méthode | Risque | Antimonotone ($\rho = -1$) | Indépendant ($\rho = 0$) | Simulation ($\rho = 0.44$) | Comonotone ($\rho = 1$) |
|------------|--------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Covariance | X | -0.42 | 0.10 | 0.18 | 0.25 |
| | Y | 1.42 | 0.90 | 0.82 | 0.75 |
| CTE | X | 0.06 | 0.17 | 0.25 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.75 | 0.74 |
| Optimal 2 | X | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.70 | 0.69 |
| Optimal 3 | X | 0.34 | 0.36 | 0.37 | 0.38 |
| | Y | 0.66 | 0.64 | 0.63 | 0.62 |

4.6 Comparaison des modèles sous différentes lois

Dans les sections précédentes, les différentes méthodes d'allocation ont été comparées pour différents modèles avec différentes distributions pour les risques X et Y ainsi que différentes structures de dépendance entre eux. Il est aussi intéressant de regarder comment chaque méthodes d'allocation se comporte sous différentes lois.

Les méthodes d'allocation selon le CTE et les méthodes optimales 2 et 5 sont présentées ici. Les autres méthodes ont été regardées, mais étant donné que les résultats sont stables malgré les changements de modèles, les résultats ne sont pas présentés.

4.6.1 Allocation selon le CTE

Commençons par l'allocation selon le CTE. Le Tableau 4.18 comporte des résultats selon tous les modèles étudiés.

Tableau 4.18 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation selon le CTE.

| Méthode | Risque | Antimonotone | Indépendant | Simulation | Comonotone |
|------------|--------|--------------|-------------|------------|------------|
| Normale | X | 0.02 | 0.19 | 0.22 | 0.25 |
| | Y | 0.98 | 0.81 | 0.78 | 0.75 |
| Lognormale | X | 0.06 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
| | Y | 0.94 | 0.85 | 0.80 | 0.75 |
| Gamma | X | 0.05 | 0.16 | 0.21 | 0.25 |
| | Y | 0.95 | 0.84 | 0.79 | 0.75 |
| Gaussienne | X | 0.06 | 0.17 | 0.21 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.79 | 0.74 |
| Clayton | X | 0.06 | 0.17 | 0.18 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.82 | 0.74 |
| Gumbel | X | 0.06 | 0.17 | 0.25 | 0.26 |
| | Y | 0.94 | 0.83 | 0.75 | 0.74 |

On peut remarquer que la copule de Gumbel alloue le plus de capital économique au risque X tandis que la copule de Clayton présente la plus petite allocation pour ce risque parmi tous les modèles tandis que les autres modèles offrent une allocation assez similaire. De plus, la différence entre la plus petite allocation, soit celle obtenue avec la copule de Clayton, et la plus grande allocation, soit celle obtenue avec la copule de Gumbel, est assez importante. Ce résultat est

observé sans grande surprise puisque l'allocation selon le CTE tient compte de la structure de dépendance entre les risques. Il est donc important de porter une attention particulière à la façon de modéliser les risques lorsque cette méthode est utilisée.

4.6.2 Méthode d'allocation optimale 2

Continuons avec la méthode d'allocation optimale 2. À partir du Tableau 4.19, on peut remarquer que l'amplitude entre la plus petite et la plus grande allocation pour le risque X est moindre que celle observée sous l'allocation selon le CTE. Puisque cette méthode n'est pas influencée par la structure de dépendance, la variation entre les allocations obtenues provient des différentes lois marginales utilisées pour modéliser les risques. En effet, lorsque les lois utilisées restent les mêmes, soit dans les modèles qui utilisent les copules, l'allocation est très similaire. On observe les plus grandes variations entre les résultats obtenus avec les lois normale, lognormale et gamma. Le rang occupé par les résultats selon ces différentes lois est le même que lorsque l'on comparait les queues de distributions à la section 4.4. C'est donc dire que lorsque la queue d'une distribution est plus lourde, celle-ci lui accorde plus de capital économique.

Tableau 4.19 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation optimale 2.

| Méthode | Risque | Antimonotone | Indépendant | Simulation | Comonotone |
|------------|--------|--------------|-------------|------------|------------|
| Normale | X | 0.22 | 0.26 | 0.27 | 0.28 |
| | Y | 0.78 | 0.74 | 0.73 | 0.72 |
| Lognormale | X | 0.27 | 0.29 | 0.31 | 0.32 |
| | Y | 0.73 | 0.71 | 0.69 | 0.68 |
| Gamma | X | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.70 | 0.69 |
| Gaussienne | X | 0.26 | 0.28 | 0.29 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.69 |
| Clayton | X | 0.26 | 0.28 | 0.29 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.69 |
| Gumbel | X | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.31 |
| | Y | 0.74 | 0.72 | 0.70 | 0.69 |

4.6.3 Méthode d'allocation optimale 5

En dernier lieu, nous regardons une méthode d'allocation qui tient compte de la structure de dépendance. En regardant le Tableau 4.20, on peut remarquer que cette méthode présente des résultats qui ont des caractéristiques similaires au deux méthodes analysées précédemment.

Effectivement, malgré que la structure de dépendance ait un impact dans le calcul de l'allocation, l'amplitude des résultats est aussi faible que celle observée avec la méthode d'allocation optimale 2. Nous pouvons par contre voir l'effet des dif-

férentes structures de dépendance lorsque l'on regarde les résultats obtenus avec les copules. L'effet des différentes distributions pour les risques se fait aussi sentir lorsque l'on observe les résultats sous les différentes distributions bivariées. Il est donc important de bien modéliser les risques et la dépendance entre ceux-ci lorsque l'on utilise cette méthode.

Tableau 4.20 Comparaison de l'allocation selon les divers modèles sous la méthode d'allocation optimale 5.

| Méthode | Risque | Antimonotone | Indépendant | Simulation | Comonotone |
|------------|--------|--------------|-------------|------------|------------|
| Normale | X | 0.11 | 0.24 | 0.26 | 0.28 |
| | Y | 0.89 | 0.76 | 0.74 | 0.72 |
| Lognormale | X | 0.20 | 0.27 | 0.30 | 0.32 |
| | Y | 0.80 | 0.73 | 0.70 | 0.68 |
| Gamma | X | 0.17 | 0.26 | 0.28 | 0.31 |
| | Y | 0.83 | 0.74 | 0.72 | 0.69 |
| Gaussienne | X | 0.18 | 0.26 | 0.28 | 0.31 |
| | Y | 0.82 | 0.74 | 0.72 | 0.69 |
| Clayton | X | 0.18 | 0.26 | 0.27 | 0.31 |
| | Y | 0.82 | 0.74 | 0.73 | 0.69 |
| Gumbel | X | 0.18 | 0.26 | 0.30 | 0.31 |
| | Y | 0.82 | 0.74 | 0.70 | 0.69 |

4.7 Récapitulatif

Au travers des dernières sections, les différentes méthodes d'allocation ont été soumises à une analyse numérique qui comparait les variations d'allocation en

changeant les modèles représentant le portefeuille de risques d'une compagnie d'assurance fictive. Les changements imposés à ces modèles faisaient varier les distributions des risques, la structure de dépendance ainsi que le degré de corrélation. Il est possible d'établir quelques constats intéressants.

Tout d'abord, les méthodes d'allocation factorielle et selon le quantile présentent des résultats identiques, peu importe les distributions utilisées pour chacun des risques et peu importe la structure de dépendance entre les risques. Ceci provient de l'invariance de ces méthodes face à ces éléments du modèle de capital économique.

Ensuite, la méthode d'allocation selon la covariance est quant à elle très peu influencée par le modèle. Elle est aussi irréaliste lorsqu'une dépendance linéaire négative existe entre les risques.

À l'image de la méthode d'allocation selon la covariance, les méthodes d'allocation optimales 1, 3 et 4 présentent des résultats très stables, peu importe le modèle utilisé. Elles ne sont pas influencées par la structure de dépendance, à part pour la partie qui alloue la différence entre le capital économique total et la somme des mesures de risques utilisées. Cette partie de l'équation représente par contre la plus petite contribution du capital alloué, ce qui explique les petites variations dans l'allocation.

En terminant, les résultats obtenus offrent une bonne variation lorsque la méthode d'allocation selon le CTE et les méthodes d'allocation optimales 2 et 5 sont utilisées. La variation des résultats apporte une vue différente des risques de la compagnie en permettant au gestionnaire de naviguer au travers d'un intervalle d'allocations possibles. Utilisé avec soin, cet intervalle de possibilité peut offrir une marge de manoeuvre intéressante afin de prendre des décisions stratégiques qui auront un impact positif sur le futur de l'entreprise.

CONCLUSION

Les compagnies ont une multitude de méthodes à leur portée afin d'allouer le capital économique. La plupart des méthodes d'allocation du capital économique présentées au Chapitre 2 découlent de la généralisation présentée par (Dhaene *et al.*, 2012) qui est abordée au Chapitre 3. Cette formulation du problème d'allocation du capital économique est pratique en ce sens que selon les mesures de risques utilisées, il est possible de retrouver les méthodes d'allocation déjà connues et d'en développer de nouvelles. Cette formulation offre aussi une bonne compréhension de l'impact des différentes composantes des méthodes d'allocation.

Par exemple, lorsque l'on optimise la méthode d'allocation optimale en utilisant le critère quadratique, nous avons que l'allocation se fait selon une mesure de risque, à laquelle nous additionnons une partie de la déviation de la somme des mesures de risques par rapport au capital économique total. La proportion de la déviation est déterminée par l'exposition, le volume ou la proportion du risque total de chaque ligne d'affaire. De cette façon, il est possible de retrouver la méthode d'allocation selon le CTE.

De la même façon, lorsque le critère de valeur absolue est utilisé lors de l'optimisation de la méthode, nous avons que le capital est alloué en fonction de la probabilité que l'entreprise se retrouve en situation d'insolvabilité. En faisant des choix spécifiques, nous retrouvons la méthode d'allocation selon le quantile.

La quantité de méthodes d'allocation du capital économique disponibles comporte son lot d'embûche lorsque vient le temps de choisir. De plus, certaines méthodes sont influencées par le modèle choisi pour représenter les risques, tandis

que d'autres ne le sont pas. Les différentes combinaisons possibles de modèles de risques et de méthodes d'allocation ne font qu'augmenter les options disponibles. Il est donc important de bien comprendre les limitations de chacune des méthodes d'allocation afin de faire un choix judicieux.

Il peut être intéressant d'analyser quelques combinaisons afin de construire un intervalle de résultats à partir duquel il sera possible de fixer l'allocation du capital économique. Ceci permettrait entre autre d'avoir une meilleure confiance envers celles-ci et d'ainsi prendre des décisions d'affaire plus éclairées.

Bien que ce mémoire offre une revue de plusieurs méthodes d'allocation, plusieurs autres aurait pu être étudiées. Les résultats de celles-ci présenteraient peut-être des résultats différents.

Il aurait aussi été possible de s'attarder sur des constructions différentes à partir des résultats de la méthode d'allocation optimale du Chapitre 3. Par exemple, en utilisant d'autres mesures de risques. Il aurait aussi été possible de développer d'autre méthodes d'allocation pour la méthode d'allocation optimisée sous le critère de valeur absolue. Aussi, l'utilisation d'autres critères d'optimisation mènerait peut-être à des solutions intéressantes permettant de créer de nouvelles méthodes d'allocation.

Bien qu'il existe plusieurs méthodes d'allocation du capital économique, plusieurs voies restent encore à explorer.

BIBLIOGRAPHIE

- Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk : A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of banking and finance*, 26(7), 1505 – 1518.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical methods in risk theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R. et Vyncke, D. (2002). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(1), 3–33. 5th IME Conference (University Park, PA, 2001).
- Dhaene, J., Goovaerts, M. J. et Kaas, R. (2003). Economic capital allocation derived from risk measures. *North American Actuarial Journal*, 7(2), 44–59.
- Dhaene, J., Tsanakas, A., Valdez, E. A. et Vanduffel, S. (2012). Optimal capital allocation principles. *Journal of Risk and Insurance*, 79(1), 1–28.
- Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Tang, Q. et Vyncke, D. (2006). Risk measures and comonotonicity : a review. *Stochastic Models*, 22(4), 573–606.
- Embrechts, P. et Wang, R. (2015). Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall. *Dependence Modeling*, 3(1), 126–140.
- Furman, E. et Zitikis, R. (2008a). Weighted premium calculation principles. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42(1), 459–465.
- Furman, E. et Zitikis, R. (2008b). Weighted risk capital allocations. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(2), 263 – 269.
- Gerber, H. (1974). On additive premium principles. *Astin Bulletin*, 7(3), 215–222.
- Gerber, H. (1981). The Esscher premium principle : a criticism. *Astin Bulletin*, 12(2), 139–140.

- Halliwell, L. (2015). *The lognormal random multivariate*. Casualty Actuarial Society.
- Heilmann, W.-R. (1989). Decision theoretic foundations of credibility theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 8(1), 77–95.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H. et Willmot, G. J. (2012). *Loss models : From data to decisions 4th edition*. Wiley.
- Laeven, R. J. A. et Goovaerts, M. J. (2004). An optimization approach to the dynamic allocation of economic capital. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2), 299–319.
- Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat*. Collection Statistiques et Probabilités Appliquées. Springer-Verlag, Paris.
- McNeil, A. J., Frey, R. et Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management : Concepts, techniques and tools*. Princeton, NJ, USA : Princeton University Press.
- Nelsen, R. B. (1999). *An introduction to copulas*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Overbeck, L. (2000). *Allocation of economic capital in loan portfolios*, Dans *Measuring Risk in Complex Stochastic Systems*, (p. 1–17). Springer New York : New York, NY.
- Rao, C. R. (1997). *Statistics and truth : putting chance to work*. International co-operative Publishing House.
- Tasche, D. (2004). *Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios*, Dans *Economic Capital : A Practitioner Guide, Risk Books*, (p. 275–302). Risk Books.
- Tsanakas, A. (2004). Dynamic capital allocation with distortion risk measures. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2), 223–243.
- Tsanakas, A. (2007). Capital allocation with risk measures. *Proceedings of the 5th actuarial and financial mathematics day*, 9, 3–17.
- Tsanakas, A. (2009). To split or not to split : Capital allocation with convex risk measures. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(2), 268 – 277.
- Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin : The Journal of the International Actuarial*

Association, 26, 71–92.

Wang, S. (2007). Normalized exponential tilting : pricing and measuring multivariate risks. *North American Actuarial Journal, 11, 89–99.*