

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DÉNOMBREMENT DES POLYOMINOS  $F$ -CONVEXES SUR  
LE RÉSEAU TRIANGULAIRE ET BIJECTION ENTRE  
POLYOMINOS  $F$ -CONVEXES HEXAGONAUX ET  
TRIANGULAIRES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

LUC LACHAPELLE

MAI 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Ma reconnaissance va d'abord à Pierre Leroux, puisque c'est lui, dans le cadre d'un cours, qui m'a initié à l'étude des polyominos (sur le réseau carré) et qui m'a parlé du vide complet concernant les polyominos sur le réseau triangulaire, ce qui a motivé mon choix pour ce sujet.

Vient ensuite mon premier directeur, Pierre Bouchard, qui, en plus d'avoir une grande disponibilité, a montré un grand intérêt et a donc été une source à la fois de motivation et d'inspiration. Il aura été plus souvent devant moi à me tirer qu'à côté de moi.

Puis, suite au départ de Pierre Bouchard pour une année sabbatique, Pierre Leroux a accepté de prendre la relève comme directeur. Voilà donc un deuxième remerciement à son endroit. Il est clair, juste à jeter un coup d'oeil à la bibliographie, que Pierre Leroux est une sommité en matière de polyominos et cela a grandement paru dans sa façon assurée d'adorder chaque sujet, spécialement à certains moments où son regard nettement plus acéré que le mien m'a permis de trouver là où j'étais bloqué. Les pistes devenaient de larges chemins.

Merci à Anissa Amroun pour son travail sur les polyominos hexagonaux. Son mémoire a servi de guide de travail au mien pour les trois premiers chapitres, où j'ai cherché des résultats similaires à chacun des siens dans le monde triangulaire.

Merci aussi à tous les professeurs du LaCIM et du département de mathématiques qui ont fait de mon séjour à l'UQAM un temps de découvertes, d'approfondissement et de recherche.

Un grand merci à Lise Tourigny, à Gisèle Legault et à André Lauzon pour leur disponibilité et tout le temps qu'ils m'ont donné. Avec eux, les problèmes techniques se réduisent à rien.

Un autre grand merci à Manon Gauthier, qui a vu à mes affaires mieux que moi.

Merci enfin à Kathy Nadal, sans qui je n'aurais pu m'en sortir au point de vue graphique. Son professionnalisme et son désir de perfection sont derrière chaque figure.

Je ne peux nommer toutes les personnes dont j'ai constaté l'appui et l'intérêt, mais ces dernières pensées sont pour eux, spécialement pour celui qui est mon père, mon ami et mon phare depuis des années.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	vi
TABLE DES FIGURES . . . . .	viii
RÉSUMÉ . . . . .	xii
INTRODUCTION . . . . .	1
0.1 Introduction . . . . .	1
0.2 Notions préliminaires . . . . .	2
0.2.1 Les convexités . . . . .	3
0.2.2 Les orbites . . . . .	5
0.2.3 Les séries génératrices . . . . .	6
0.3 Polyominos filiformes . . . . .	7
CHAPITRE I	
DÉNOMBREMENT DES POLYOMINOS TRIANGULAIRES $F$ -CONVEXES . . . . .	11
1.1 Équations fonctionnelles des polyominos $F$ -convexes . . . . .	11
1.2 Énumération de polyominos $F$ -convexes suivant la largeur, l'aire et le périmètre . . . . .	16
CHAPITRE II	
DÉNOMBREMENT DES POLYOMINOS TRIANGULAIRES $HV$ -CONVEXES . . . . .	21
2.1 Opérateurs de dénombrement . . . . .	21
2.1.1 Relation entre les opérateurs $\phi$ et $\Phi$ . . . . .	22
2.1.2 Relation entre les opérateurs $\psi$ et $\Psi$ . . . . .	24
2.2 Polyominos triangulaires $HV$ -convexes . . . . .	26
CHAPITRE III	
DÉNOMBREMENT DE QUELQUES CLASSES PARTICULIÈRES DE POLYOMINOS CONVEXES . . . . .	31
3.1 Les polyominos partages . . . . .	32
3.2 Les polyominos tas . . . . .	36
3.3 Polyominos tas symétriques . . . . .	40
3.4 Les polyominos parallélogrammes . . . . .	45

CHAPITRE IV	
DÉNOMBREMENT DES CLASSES DE SYMÉTRIES DES POLYOMINOS $F$ -CONVEXES . . . . .	47
4.1 Action de groupe . . . . .	47
4.2 Les symétries des polyominos triangulaires $F$ -convexes . . . . .	50
4.2.1 Les polyominos tas $F$ -convexes . . . . .	50
4.2.2 Polyominos $F$ -convexes $v$ -symétriques . . . . .	53
4.2.3 Polyominos $F$ -convexes h-symétriques . . . . .	55
4.2.4 Polyominos $F$ -convexes $\frac{\pi}{3}$ -symétriques . . . . .	57
4.2.5 Polyominos $F$ -convexes $\frac{2\pi}{3}$ -symétriques . . . . .	59
4.2.6 Polyominos $F$ -convexes $\pi$ -symétriques . . . . .	63
4.2.7 Les orbites des polyominos $F$ -convexes . . . . .	67
CHAPITRE V	
BIJECTION ENTRE LES RÉSEAUX TRIANGULAIRES ET HEXAGONAUX	73
5.1 Généralités . . . . .	73
5.2 Définition de la bijection . . . . .	76
5.3 Exemples d'application . . . . .	80
CONCLUSION . . . . .	85
RÉFÉRENCES . . . . .	87

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Table de multiplication de $\mathcal{D}_6$ .	49
4.2	Table de multiplication de $\mathcal{D}_2$ .	50
4.3	Polyominos $F$ -convexes selon le périmètre	70
4.4	Polyominos $F$ -convexes selon l'aire	71

## TABLE DES FIGURES

0.1 Les réseaux. . . . .	3
0.2 Polyominos sur les réseaux carré, hexagonal et triangulaire. . . . .	4
0.3 Un polyomino $C$ -convexe et les directions privilégiées. . . . .	5
0.4 Un polyomino $F$ -convexe et les directions privilégiées. . . . .	6
0.5 Un polyomino $HV$ -convexe et les directions privilégiées. . . . .	7
0.6 Polyominos $C$ -convexes d'aire 4 : 14 polyominos, 3 orbites. . . . .	8
0.7 Un polyomino $F$ -convexe de largeur $l(P) = 4$ , d'aire $a(P) = 40$ , de périmètre $pe(P) = 18$ et de dernière colonne $h_d(P) = 3$ . . . . .	9
0.8 Polyominos filiformes. . . . .	9
1.1 Polyomino de la classe $\mathcal{F}_{00}$ . . . . .	12
1.2 Polyomino de la classe $\mathcal{F}_{02}$ . . . . .	13
1.3 Polyomino de la classe $\mathcal{F}_{20}$ . . . . .	14
1.4 Polyomino de la classe $\mathcal{F}_{22}$ . . . . .	15
1.5 Polyomino de la classe $\mathcal{F}_{00}$ . . . . .	17
1.6 $\mathcal{F}_{22}$ vu comme collage de deux polyominos. . . . .	19
2.1 L'opérateur $\phi$ . . . . .	22
2.2 L'opérateur $\psi$ . . . . .	24

2.3	Polyomino de la classe $\mathcal{HV}_{00}$ . . . . .	27
2.4	Polyomino de la classe $\mathcal{HV}_{02}$ . . . . .	27
2.5	Polyomino de la classe $\mathcal{HV}_{20}$ . . . . .	28
2.6	Polyomino de la classe $\mathcal{HV}_{22}$ . . . . .	28
3.1	Correspondance entre les polyominos partages sur les réseaux hexagonal, carré et triangulaire. . . . .	32
3.2	Correspondance entre les polyominos partages $P$ et $PT$ . . . . .	33
3.3	Correspondance entre les polyominos partages avec rangées vides per- mises $P_0$ et $PT_0$ . . . . .	34
3.4	Correspondance entre les polyominos partages avec parts distinctes $P_S$ et $PT_S$ . . . . .	35
3.5	Polyominos tas sur le réseau triangulaire. . . . .	36
3.6	Polyomino tas. . . . .	37
3.7	Les formes possibles pour un polyomino $T_{0,n}$ . . . . .	38
3.8	Construction d'un polyomino de $T_{0,n}$ . . . . .	39
3.9	Polyominos tas symétriques sur le réseau triangulaire. . . . .	41
3.10	Construction d'un polyomino de $T_{S0,n}$ . . . . .	42
3.11	Construction d'un polyomino de $T_{S,n}$ . . . . .	42
3.12	Construction d'un polyomino de $T_S$ . . . . .	44
3.13	Polyominos parallélogrammes en bijection. . . . .	46
4.1	Les réflexions de $\mathcal{D}_6$ et de $\mathcal{D}_2$ . . . . .	48

4.2	Polyomino tas $F$ -convexe. . . . .	51
4.3	Polyomino $F$ -convexe $v$ -symétrique. . . . .	53
4.4	Polyomino $F$ -convexe $h$ -symétrique. . . . .	55
4.5	Polyomino $F$ -convexe $\frac{\pi}{3}$ -symétrique. . . . .	57
4.6	Polyominos $F$ -convexe $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique particuliers. . . . .	59
4.7	Polyomino $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique avec centre de rotation au milieu d'un hexagone. . . . .	60
4.8	Polyomino $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique avec centre de rotation au milieu d'un triangle. . . . .	61
4.9	Forme de base d'un polyomino $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique. . . . .	62
4.10	Polyominos $F$ -convexes $\pi$ -symétriques. . . . .	64
4.11	Polyomino $F$ -convexe $\pi$ -symétrique. . . . .	65
5.1	Dualité des deux réseaux. . . . .	73
5.2	Polyominos $C$ -convexes sur les deux réseaux. . . . .	74
5.3	Polyominos filiformes. . . . .	75
5.4	Polyominôme. . . . .	76
5.5	Bijection entre les polyominos $p$ et $P$ . . . . .	78
5.6	Polyominos $F$ -convexes sur les deux réseaux. . . . .	81
5.7	Polyominos tas $p$ et $P$ . . . . .	83

## RÉSUMÉ

Les polyominos sur les réseaux carré et hexagonal ayant des propriétés de convexité ont été largement étudiés, et leurs classes de symétrie ont été dénombrées (par leurs séries génératrices selon divers paramètres : l'aire, le périmètre, la largeur, la hauteur, etc.). Les polyominos pouvant être considérés comme des objets dans l'espace, on les dénombre à translations, à rotations et à réflexions près. Un résultat classique de la théorie des groupes, le lemme de Burnside nous aidera à ce niveau. On s'intéresse donc au dénombrement des classes de polyominos convexes ayant des propriétés de symétries.

Dans ce mémoire on s'intéresse aux polyominos sur le réseau triangulaire. Quelques travaux ont été faits sur ce réseau, notamment sur les polyominos parallélogrammes, les polyominos dirigés et les animaux. Ce mémoire porte entre autres sur le dénombrement des classes de symétrie des polyominos  $F$ -convexes (convexité forte) sur le réseau triangulaire. On présente aussi quelques résultats concernant les polyominos  $HV$ -convexes (l'équivalent des polyominos  $EG$ -convexes sur le réseau hexagonal, soit une convexité selon un axe horizontal et un axe vertical).

Les formes de convexité vont être définies dans l'introduction. On introduira aussi une classe particulière de polyominos, soit les polyominos filiformes.

Le premier chapitre porte sur le dénombrement des polyominos triangulaires  $F$ -convexes. On utilisera pour cela les méthodes de Fouad Hassani et de Mireille Bousquet-Mélou, qui ont fait leurs preuves sur le réseau hexagonal. On obtient ainsi des formes closes remarquables pour leurs séries génératrices selon plusieurs paramètres, dont la largeur, l'aire et le périmètre.

Le deuxième chapitre porte sur les polyominos  $HV$ -convexes, dont on donne les équations fonctionnelles.

Le troisième chapitre dénombre des polyominos convexes triangulaires particuliers, comme les polyominos partages, les polyominos tas et les polyominos parallélogrammes.

Le quatrième chapitre dénombre les classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes, soit leurs orbites. On fait aussi un rappel de quelques résultats de la théorie des groupes et de leur action, notamment sur les groupes diédraux  $\mathcal{D}_6$  des isométries de l'hexagone et  $\mathcal{D}_2$ , sous-groupe de  $\mathcal{D}_4$  des isométries du carré.

En se basant sur la dualité des graphes plans, on présente dans le cinquième chapitre une bijection entre les polyominos  $C$ -convexes du réseau hexagonal et des structures "polyominomiales" sur le réseau triangulaire. Ces structures généralisent les polyominos

triangulaires en admettant des parties filiformes tout en satisfaisant les conditions de  $C$ -convexité. De plus, nous donnons des formules simples de passage pour ce qui est des paramètres largeur, aire et périmètre selon cette bijection. On en déduit, par restriction, une bijection entre les polyominos  $F$ -convexes des réseaux hexagonal et triangulaire.

Notons que tous les calculs sur les séries génératrices ont été faits sur le logiciel Maple.

Mots clés :

Polyomino(s)

Polyomino(s) convexe(s)

Réseau triangulaire

Dénombrement

# INTRODUCTION

## 0.1 Introduction

L'objet de ce travail est l'énumération de certaines classes de polyominos convexes sur le réseau triangulaire.

Plusieurs travaux ont été fait sur le réseau carré, entre autres dans (Bousquet-Mélou, 1991), (Bousquet-Mélou, 1996), (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998), (Enting et Guttmann, 1989), (Privman et Švrakić, 1989), (Lin et Chang, 1988) etc. Certains résultats de ces travaux seront utilisés plus tard (au chapitre 3). Sur le réseau hexagonal, les travaux sur les polyominos *fortement convexes* ou  $F$ -convexes (voir (Ibn-Majdoub-Hassani, 1996), (Denise, Dürr et Ibn-Majdoub-Hassani, 1997) et (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004), les polyominos *convexes* ou  $C$ -convexes (voir (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004)) et enfin les polyominos  $EG$ -convexes (voir (Enting et Guttmann, 1989), (Lin et Wu, 1990), (Feretić et Svrtan, 1993) et (Ibn-Majdoub-Hassani, 1996)) sont les plus proches de ceux qu'on développera ici. Sur le réseau triangulaire, mentionnons entre autres les contributions de (Oppenheim et Owczarek, 2002) et (Oppenheim, 2000) sur les polyominos parallélogrammes et (Barcucci, Lungo, Pinzani, 1975) sur les animaux.

Ce travail est structuré comme suit : la suite de l'introduction présente principalement la définition des convexités utilisées ; le premier chapitre donne les équations fonctionnelles des polyominos  $F$ -convexes en utilisant les techniques développées par Mirreille Bousquet-Mélou dites d'*effeuillage* ou *décomposition par strates* (Bousquet-Mélou, 1991), (Bousquet-Mélou, 1996). On définira ensuite la série explicite des polyominos  $F$ -convexes.

Le deuxième chapitre donne les équations fonctionnelles des polyominos  $HV$ -convexes.

Le troisième chapitre dénombre des polyominos convexes triangulaires particuliers, comme les polyominos partages, les polyominos tas et les polyominos parallélogrammes. Nous utilisons dans certains cas des résultats du réseau carré.

Au quatrième chapitre, nous nous intéressons aux classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes en introduisant des notions d'algèbre comme l'action de groupes diédraux sur chacune des familles de polyominos. Nous suivons la démarche entreprise dans (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998) pour le réseau carré. Les classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes ont été entièrement étudiées dans (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004) et dans (Amroun, 2004) sur le réseau hexagonal et sont développées ici sur le réseau triangulaire.

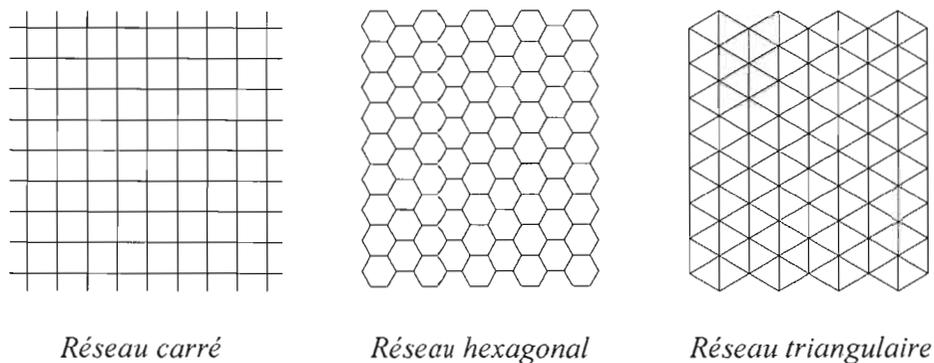
En se basant sur la dualité des graphes plans, on présente dans le cinquième chapitre une bijection entre les polyominos  $C$ -convexes du réseau hexagonal et des structures "polyominomiales" sur le réseau triangulaire. Ces structures généralisent les polyominos triangulaires en admettant des parties filiformes tout en satisfaisant les conditions de  $C$ -convexité. De plus, nous donnons des formules simples de passage pour ce qui est des paramètres largeur, aire et périmètre selon cette bijection. On en déduit, par restriction, une bijection entre les polyominos  $F$ -convexes des réseaux hexagonal et triangulaire.

## 0.2 Notions préliminaires

Les réseaux considérés dans l'étude des polyominos sont des graphes réguliers ayant un ensemble infini de sommets et laissés invariants sous les translations. La figure 0.1 montre les réseaux carré, hexagonal et triangulaire.

Dans un réseau, la forme unitaire (carré, hexagone, triangle, etc.) est appelée *case* ou *cellule*. Un *chemin* dans un réseau est une suite de cases  $c_1, c_2, \dots, c_k$  telle que pour tout  $1 \leq i < k$ ,  $c_i$  a une arête en commun avec  $c_{i+1}$ .

**Définition 1.** Un *polyomino*  $P$  sur un réseau est un ensemble fini et connexe de cellules



**Fig. 0.1** Les réseaux.

dans le sens où si  $c$  et  $c'$  sont deux cases de  $P$ , alors il existe un chemin dans  $P$  entre  $c$  et  $c'$ . Les polyominos sont définis à translation près.

La figure 0.2 donne des exemples de polyominos sur les trois réseaux. On note que ces polyominos ont des trous, ce qui ne sera pas le cas des classes que nous étudierons dans ce travail.

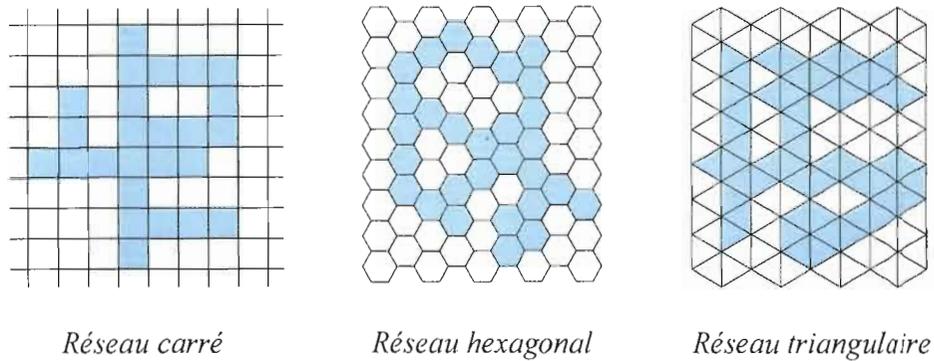
### 0.2.1 Les convexités

Définissons la notion de convexité sur le réseau triangulaire.

On dit qu'un polyomino est *convexe selon une direction* si son intersection avec toute droite parallèle à cette direction et passant par le centre des triangles est connexe.

#### C-convexité

La  $C$ -convexité est définie par les trois directions parallèles aux côtés d'une case. Les directions choisies sont parallèles aux axes suivants : l'axe vertical, appelée direction



**Fig. 0.2** Polyominos sur les réseaux carré, hexagonal et triangulaire.

Nord ; l'axe qui fait 30 degrés avec l'horizontale, appelée direction Nord-Est-Est ; l'axe qui fait -30 degrés avec l'horizontale, appelée direction Sud-Est-Est (voir figure 0.3).

Un polyomino est donc dit *C-convexe* s'il est convexe par rapport à ces trois directions.

### **F-convexité**

La *F-convexité* est définie par les trois directions passant par le centre d'un triangle et un de ses sommets. Les directions choisies sont parallèles aux axes suivants : l'axe horizontal, appelée direction Est ; l'axe qui fait 60 degrés avec l'horizontale, appelée direction Nord-Nord-Est ; l'axe qui fait -60 degrés avec l'horizontale, appelée direction Sud-Sud-Est (voir figure 0.4).

Un polyomino est donc dit *F-convexe* s'il est convexe par rapport à ces trois directions.

On note que la *F-convexité* d'un polyomino entraîne sa *C-convexité*.

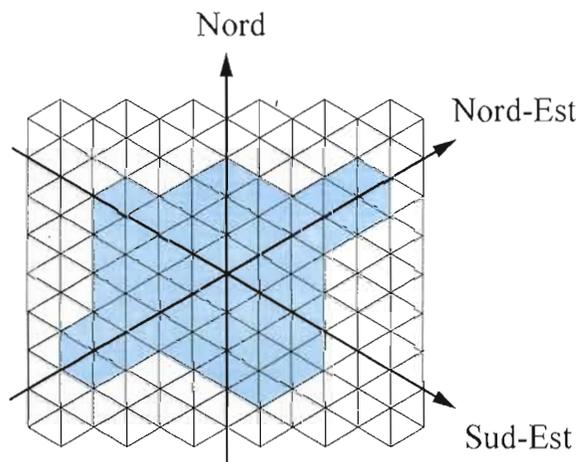


Fig. 0.3 Un polyomino  $C$ -convexe et les directions privilégiées.

### HV-convexité

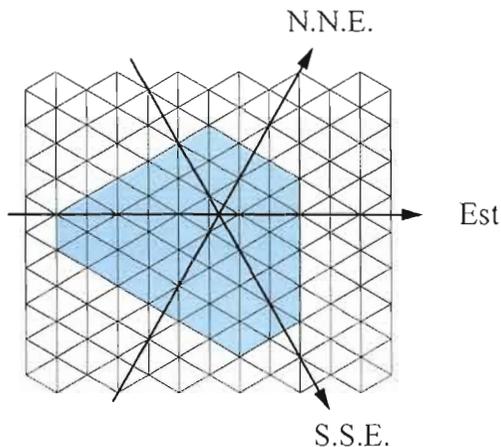
La  $HV$ -convexité est définie par les deux directions orthogonales principales, soient la direction Nord et la direction Est (voir figure 0.5).

Un polyomino est donc dit  $HV$ -convexe s'il est convexe par rapport à ces deux directions.

On note que la  $HV$ -convexité d'un polyomino entraîne sa  $C$ -convexité.

### 0.2.2 Les orbites

Un des principaux objectifs de ce mémoire est de dénombrer les polyominos  $F$ -convexes à rotation et réflexion près, selon l'aire et le périmètre principalement. Nous devons alors connaître les différentes classes de symétries agissant sur les polyominos triangulaires, ce qui est déterminé par l'action d'un groupe diédral. Le groupe des isométries de l'hexagone  $\mathcal{D}_6$  agit sur les polyominos  $F$ -convexes. Sur les polyominos  $HV$ -convexes, c'est le sous-groupe non-cyclique  $\mathcal{D}_2 = \{id, \pi, h, v\}$  qui agit (sous-groupe du groupe  $\mathcal{D}_4$  des isométries du carré). Nous allons traiter ce sujet au chapitre 4.



**Fig. 0.4** Un polyomino  $F$ -convexe et les directions privilégiées.

Les orbites sont alors les classes d'équivalence des polyominos. Autrement dit, en comptant les polyominos à symétrie près, on compte les orbites de l'action du groupe qu'on fait agir (ici  $\mathcal{D}_6$  principalement).

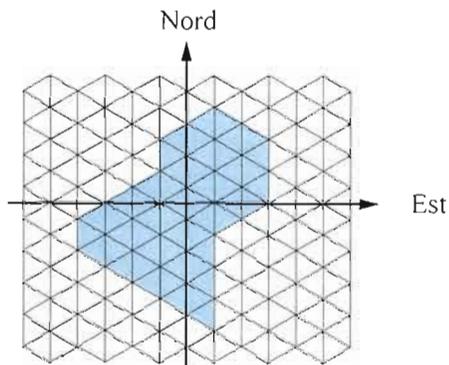
Une fois les différentes classes de symétrie dénombrées, nous utiliserons le Théorème de Cauchy-Frobenius, où Lemme de Burnside, qui donne le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble (la figure 0.6 donne un exemple d'orbites).

### 0.2.3 Les séries génératrices

Définissons la notion de séries génératrices.

Soit  $\mathbb{R}[[x, y, q, u, v, t, \dots]]$  l'algèbre des séries formelles à coefficients réels en les variables  $x, y, q, u, v, t, \dots$ . Si  $X(x, y, q, u, v, t, \dots)$  est une série dans cette algèbre, nous la noterons plus simplement, par exemple,  $X(u)$  si nous voulons mettre l'emphase sur la variable  $u$ . De plus, sa dérivée par rapport à  $u$  est notée  $\partial X / \partial u$  ou  $X'(u)$ .

Nous définissons aussi la sous-algèbre  $A$  de  $\mathbb{R}[[x, y, q, u, v, t, \dots]]$  formée des séries  $Y$  telles



**Fig. 0.5** Un polyomino  $HV$ -convexe et les directions privilégiées.

que  $Y(x, y, q, 1, v, t, \dots)$ ,  $Y'(x, y, q, 1, v, t, \dots)$  sont bien définies dans  $\mathbb{R}[[x, y, q, u, v, t, \dots]]$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de polyominos  $P$ . Alors sa série génératrice est la série formelle

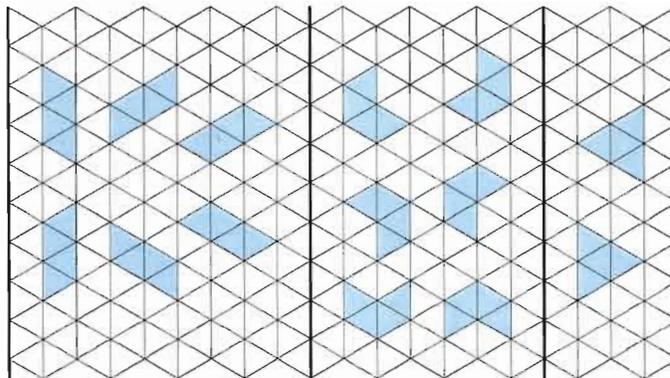
$$\mathcal{P}(x, q, v, t) = \sum_{P \in \mathcal{P}} x^{l(P)} q^{a(P)} v^{h_d(P)} t^{pe(P)},$$

où  $l(P)$  est la largeur totale (le nombre de colonnes occupées par le polyomino),  $a(P)$  est l'aire du polyomino  $P$  (le nombre de ses cellules),  $h_d(P)$  est la taille à droite (le nombre de segments de la colonne filiforme la plus à droite),  $pe(P)$  le périmètre (le nombre de segments sur le contour extérieur). On peut voir un exemple à la figure 0.7. Si une variable n'est pas considérée dans une série génératrice, elle sera posée égale à 1.

### 0.3 Polyominos filiformes

Nous verrons plus loin la nécessité de considérer des polyominos triangulaires filiformes. Voici comment ils sont définis :

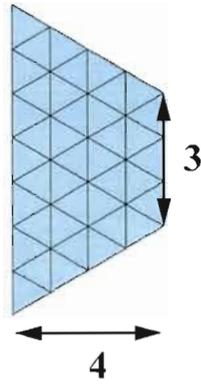
**Définition 2.** Un polyomino triangulaire est dit *filiforme* s'il n'est formé que de segments consécutifs dans une même direction. Son aire est nulle et son périmètre est deux fois sa longueur, c'est-à-dire deux fois le nombre de segments qui le composent. Sa lar-



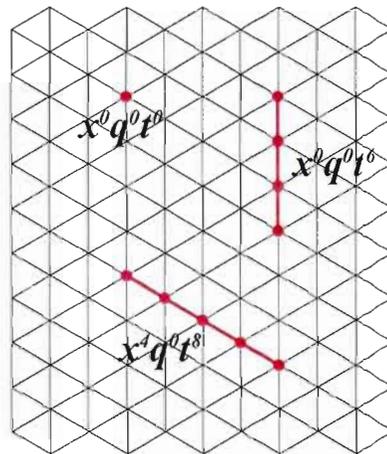
**Fig. 0.6** Polyominos  $C$ -convexes d'aire 4 : 14 polyominos, 3 orbites.

leur est le nombre de colonnes qu'il occupe (ce nombre peut être nul). Un point est un polyomino filiforme de largeur, d'aire et de périmètre nuls.

La figure 0.8 montre quelques exemples de ces polyominos.



**Fig. 0.7** Un polyomino  $F$ -convexe de largeur  $l(P) = 4$ , d'aire  $a(P) = 40$ , de périmètre  $pe(P) = 18$  et de dernière colonne  $h_d(P) = 3$ .



**Fig. 0.8** Polyominos filiformes.

## CHAPITRE I

### DÉNOMBREMENT DES POLYOMINOS TRIANGULAIRES $F$ -CONVEXES

Nous présentons dans ce chapitre les équations fonctionnelles des polyominos triangulaires  $F$ -convexes ainsi que leurs séries génératrices.

#### 1.1 Équations fonctionnelles des polyominos $F$ -convexes

Soit  $P$  un polyomino  $F$ -convexe et  $CL_1, CL_2, \dots, CL_k$  ses colonnes numérotées de gauche à droite.

On peut insérer un polyomino  $F$ -convexe  $P$  dans un rectangle minimal  $R$ . On remarque que le haut et le bas de  $R$  touchent un seul point de  $P$  alors que les côtés de  $R$  touchent les côtés verticaux de  $P$ .

Soit  $\Gamma_1$  la première colonne (de gauche à droite) de  $P$  qui touche le côté haut de  $R$ ,  $\Gamma_2$  celle qui touche le côté bas de  $R$  et  $\Gamma_3$  la première colonne du polyomino située à droite de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , si elle existe.

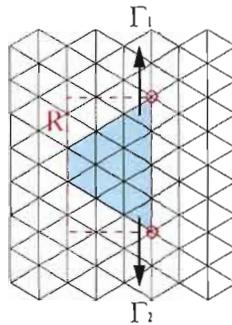
On peut alors partitionner l'ensemble des polyominos  $F$ -convexes en quatre parties ; l'ensemble  $\mathcal{F}_{00}$  des polyominos dont la dernière colonne contient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (i.e. que les coins supérieur droit et inférieur droit du rectangle sont touchés par  $P$ ) et dont la série génératrice est  $F_{00}(x, q, v, t)$  ; l'ensemble  $\mathcal{F}_{02}$  des polyominos dont la dernière colonne filiforme contient  $\Gamma_1$  (i.e. que le coin supérieur droit du rectangle est touché par  $P$ ) avec  $\Gamma_2$  à gauche de  $\Gamma_1$ , et dont la série génératrice est  $F_{02}(x, q, v, t)$  ; l'ensemble  $\mathcal{F}_{20}$

des polyominos dont la dernière colonne contient  $\Gamma_2$  (i.e. que le coin inférieur droit du rectangle est touché par  $P$ ) avec  $\Gamma_1$  à gauche de  $\Gamma_2$ , et dont la série génératrice est  $F_{20}(x, q, v, t)$  et l'ensemble  $\mathcal{F}_{22}$  des polyominos dont  $\Gamma_3$  existe (i.e. qu'aucun des coins supérieur droit et inférieur droit du rectangle sont touchés par  $P$ ) et dont la série génératrice est  $F_{22}(x, q, v, t)$ .

On note que les polyominos filiformes verticaux sont placés dans la classe  $\mathcal{F}_{00}$  par convention.

Ainsi, tout polyomino  $P$  qui est  $F$ -convexe entre dans un des quatre cas exclusifs suivants :

Si  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{F}_{00}$  (voir figure 1.1).



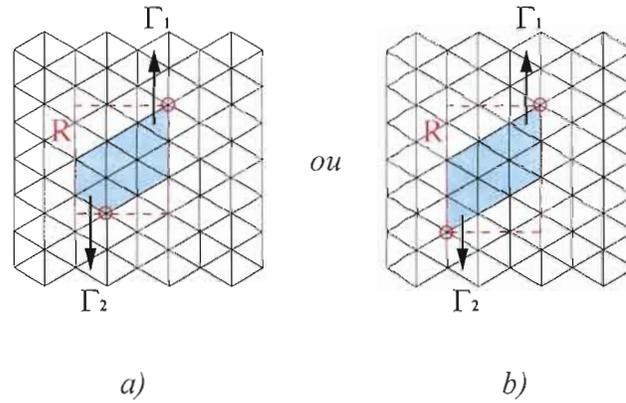
**Fig. 1.1** Polyomino de la classe  $\mathcal{F}_{00}$ .

Si  $\Gamma_1$  est strictement à droite de  $\Gamma_2$  et si  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{F}_{02}$  (voir figure 1.2).

Si  $\Gamma_1$  est strictement à gauche de  $\Gamma_2$  et si  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{F}_{20}$  (voir figure 1.3).

Si  $\Gamma_3$  existe, alors  $P \in \mathcal{F}_{22}$  (voir figure 1.4).

Soit  $F(v) = \sum_{i \geq 0} f_i v^i$  la série génératrice des polyominos  $F$ -convexes. On a alors  $F(v) = F_{00}(v) + F_{02}(v) + F_{20}(v) + F_{22}(v)$ .



**Fig. 1.2** Polyomino de la classe  $\mathcal{F}_{02}$ .

**Théorème 1.** Les séries génératrices  $F_{00}(v)$ ,  $F_{02}(v)$ ,  $F_{20}(v)$ ,  $F_{22}(v)$  vérifient les équations suivantes :

$$F_{00}(x, q, v, t) = \frac{1}{1 - vt^2} + xqv t^3 F_{00}(x, q, vq^2, t), \quad (1.1)$$

$$F_{02}(x, q, v, t) = xt^2 \left( F_{00}(x, q, vq^2, t) + F_{02}(x, q, vq^2, t) \right), \quad (1.2)$$

$$F_{20}(x, q, v, t) = F_{02}(x, q, v, t), \quad (1.3)$$

$$F_{22}(x, q, v, t) = \frac{xt}{qv} \left( F_{00}(vq^2) + 2F_{02}(vq^2) + F_{22_{\geq 1}}(vq^2) \right) \quad (1.4)$$

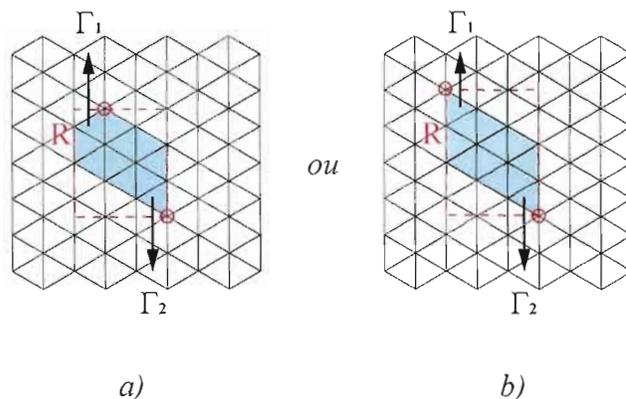
où  $F_{22_{\geq 1}}(vq^2)$  est la série génératrice des polyominos  $F_{22}$ -convexes dont la dernière colonne filiforme est de taille supérieure ou égale à 1.

### Preuve

Pour  $F_{00}(x, q, v, t)$  :

Le terme  $\frac{1}{1-vt^2}$  génère tous les polyominos filiformes colonnes, qui sont par convention dans la classe  $\mathcal{F}_{00}$ .

Quand on enlève la dernière colonne d'un élément de  $\mathcal{F}_{00}$  qui admet une colonne ou plus, on obtient un autre polyomino de  $\mathcal{F}_{00}$ . Donc pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{00}$  d'une colonne ou plus, on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{00}$  du polyomino initial



**Fig. 1.3** Polyomino de la classe  $\mathcal{F}_{20}$ .

et on ajoute une cellule à la nouvelle colonne. On note qu'alors le périmètre augmente de 3 et la largeur de 1, d'où le terme  $xqvt^3 F_{00}(x, q, vq^2, t)$ .

**Pour**  $F_{02}(x, q, v, t)$  :

Quand on enlève la dernière colonne d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{02}$ , on obtient un polyomino de  $\mathcal{F}_{00} \cup \mathcal{F}_{02}$ .

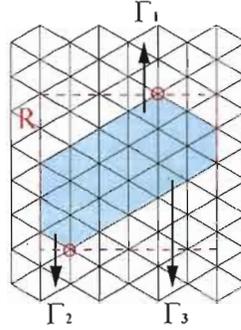
Pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{02}$  à partir d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{00}$ , on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{00}$  du polyomino initial. On note qu'alors le périmètre augmente de 2 et la largeur de 1, d'où le terme  $xt^2 F_{00}(x, q, vq^2, t)$ .

Pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{02}$  à partir d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{02}$ , on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{02}$  du polyomino initial. On note qu'alors le périmètre augmente de 2 et la largeur de 1, d'où le terme  $xt^2 F_{02}(x, q, vq^2, t)$ .

**Pour**  $F_{20}(x, q, v, t)$  :

Ces polyominos s'obtiennent par réflexion horizontale des polyominos de la classe  $\mathcal{F}_{02}$  (voir les figures 1.2 et 1.3). Ils ont donc la même série génératrice.

**Pour**  $F_{22}(x, q, v, t)$  :



**Fig. 1.4** Polyomino de la classe  $\mathcal{F}_{22}$ .

Quand on enlève la dernière colonne d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  de plus d'une colonne, on obtient un polyomino de  $\mathcal{F}_{00} \cup \mathcal{F}_{02} \cup \mathcal{F}_{20} \cup \mathcal{F}_{22_{\geq 1}}$ , ou  $\mathcal{F}_{22_{\geq 1}}$  est l'ensemble des polyominos  $\mathcal{F}_{22}$ -convexes dont la dernière colonne filiforme est de taille supérieure ou égale à 1.

Pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  à partir d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{00}$ , on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{00}$  du polyomino initial et on soustrait une cellule. On note qu'alors le périmètre augmente de 1 et la largeur de 1, d'où le terme  $\frac{xt}{qv} F_{00}(vq^2)$ .

Pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  à partir d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{02}$ , on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{02}$  du polyomino initial et on soustrait une cellule. On multiplie par deux car on aura la même série si on part avec un polyomino de  $\mathcal{F}_{20}$ . On note qu'alors le périmètre augmente de 1 et la largeur de 1, d'où le terme  $2\frac{xt}{qv} F_{02}(vq^2)$ .

Pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  à partir d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  dont la dernière colonne est de hauteur supérieure ou égale à 1, on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{F}_{22}$  du polyomino initial et on soustrait une cellule. On note qu'alors le périmètre augmente de 1 et la largeur de 1, d'où le terme  $\frac{xt}{qv} F_{22_{\geq 1}}(vq^2)$ .

□

## 1.2 Énumération de polyominos $F$ -convexes suivant la largeur, l'aire et le périmètre

Dans cette section nous donnons la forme close de la série génératrice des polyominos  $F$ -convexes. Cette formule est déduite grâce aux équations fonctionnelles données dans la section précédente.

**Théorème 2.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes comptés suivant la largeur, l'aire et le périmètre est donnée par*

$$F(x, q, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{1 + xq^{2i}t^2}{1 - xq^{2i}t^2} \frac{(F_{00})_i^2(x, q, t)}{t^{2i}} \quad (1.5)$$

où  $(F_{00})_i$  est la série des polyominos de  $\mathcal{F}_{00}$  dont la dernière colonne filiforme est de taille  $i$  et est donnée par

$$(F_{00})_i(x, q, t) = \sum_{j=0}^i x^j q^{2ij-j^2} t^{2i+j}. \quad (1.6)$$

**Preuve :**

D'après le découpage des polyominos  $F$ -convexes effectué à la section précédente,  $\mathcal{F}$  est la réunion disjointe de  $\mathcal{F}_{00}$ ,  $\mathcal{F}_{02}$ ,  $\mathcal{F}_{20}$  et de  $\mathcal{F}_{22}$ . Calculons alors les séries génératrices des polyominos de chaque classe.

Posons d'abord que  $(F_{00})_i(x, q, t) = [v^i]F_{00}(x, q, v, t)$ .

**Calcul de  $F_{00}(x, q, v, t)$**

D'après l'équation 1.1 du théorème 1, on a

$$F_{00}(x, q, v, t) = \frac{1}{1 - vt^2} + xqvt^3 F_{00}(x, q, vq^2, t).$$

Mais nous pouvons aussi trouver une formule close pour  $F_{00}(x, q, u, t)$  en observant que les polyominos de la classe  $\mathcal{F}_{00}$  sont des trapèzes isocèles (voir la figure 1.5).

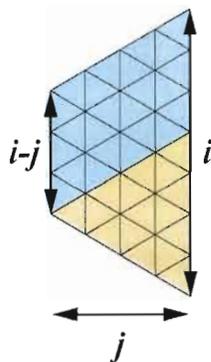


Fig. 1.5 Polyomino de la classe  $\mathcal{F}_{00}$ .

On voit que pour une largeur donnée  $j$ , ce polyomino est construit à partir d'un triangle équilatéral de côtés égaux à  $j$ . Ce triangle contient  $j^2$  cellules et donc sa série est  $x^j q^{j^2} v^j t^{3j}$ .

A partir de là, nous pouvons ajouter un nombre arbitraire de rangées par dessus, ce qui revient à multiplier par  $\frac{1}{1-q^{2j}vt^2}$ .

Ainsi, nous obtenons directement la série

$$F_{00}(x, q, v, t) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j q^{j^2} v^j t^{3j}}{1 - q^{2j} vt^2}.$$

On veut cependant écrire la série  $F_{00}(x, q, v, t)$  sous la forme  $F_{00}(x, q, v, t) = \sum_{i \geq 1} (F_{00})_i v^i$ , où  $(F_{00})_i$  est la série des polyominos de  $\mathcal{F}_{00}$  dont la dernière colonne filiforme est de taille  $i$ .

On peut voir les polyominos  $(F_{00})_i$  comme des trapèzes isocèles de bases  $i$  et  $i-j$ . Alors on obtient la série génératrice (aire =  $i^2 - (i-j)^2 = 2ij - j^2$  et périmètre =  $3i - (i-j) = 2i + j$  par la figure 1.5)

$$F(x, q, t) = \sum_{j=0}^i x^j q^{2ij-j^2} t^{2i+j} \quad \text{avec } i \geq 0.$$

On a aussi une équation réursive pour  $(F_{00})_i$ , soit

$$(F_{00})_i(x, q, t) = t^{2i} + xq^{2i-1}t^3(F_{00})_{i-1}(x, q, t), \quad \text{avec } i \geq 1 \text{ et } (F_{00})_0 = 1.$$

### Calcul de $F_{02}(x, q, v, t)$ et de $F_{20}(x, q, v, t)$

D'après l'équation 1.2 du théorème 1, on a

$$F_{02}(x, q, v, t) = xt^2 (F_{00}(x, q, vq^2, t) + F_{02}(x, q, vq^2, t)).$$

Nous pouvons trouver directement la forme close de la classe  $F_{02}(x, q, v, t)$  d'après la figure 1.2.

$$F_{02}(x, q, v, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{xq^{2i}t^2(F_{00})_i(x, q, t)}{1 - xq^{2i}t^2} v^i. \quad (1.7)$$

On a déjà mentionné que les classes  $\mathcal{F}_{02}$  et  $\mathcal{F}_{20}$  ont les mêmes séries génératrices par symétrie.

### Calcul de $F_{22}(x, q, v, t)$

Nous pouvons voir chaque polyomino de  $\mathcal{F}_{22}$  comme un collage d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{00} \cup \mathcal{F}_{02} \cup \mathcal{F}_{20}$  dont la dernière colonne est de taille  $i$  et d'un polyomino de  $\mathcal{F}_{00}$  (renversé et non-filiforme) dont la dernière colonne filiforme est aussi de hauteur  $i$  (voir figure 1.6).

### Calcul de $F(x, q, t)$

Nous pouvons maintenant calculer la série génératrice des polyominos  $F$ -convexes

$$F(x, q, v, t) = F_{00}(x, q, v, t) + F_{02}(x, q, v, t) + F_{20}(x, q, v, t) + F_{22}(x, q, v, t).$$

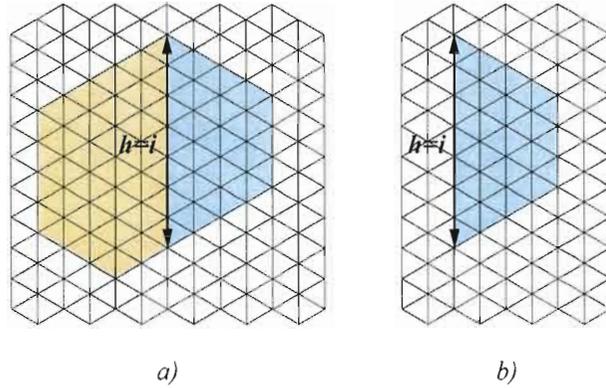


Fig. 1.6  $\mathcal{F}_{22}$  vu comme collage de deux polyominos.

Posons

$$F_{00}(x, q, v, t) + F_{02}(x, q, v, t) + F_{20}(x, q, v, t) = \sum_{i \geq 0} g_i v^i.$$

On a alors, directement par la figure 1.6 a)

$$F(x, q, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i(x, q, t)(F_{00})_i(x, q, t)}{t^{2i}}. \quad (1.8)$$

De plus

$$\begin{aligned} g_i(x, q, t) &= (F_{00})_i(x, q, t) + 2 \frac{xq^{2i}t^2 (F_{00})_i(x, q, t)}{1 - xq^{2i}t^2} \\ &= \left( 1 + 2 \frac{xq^{2i}t^2}{1 - xq^{2i}t^2} \right) (F_{00})_i(x, q, t) \\ &= \left( \frac{1 + xq^{2i}t^2}{1 - xq^{2i}t^2} \right) (F_{00})_i(x, q, t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

D'où on a par 1.8 et par 1.9

$$\begin{aligned}
F_i(x, q, t) &= \frac{g_i(x, q, t)(F_{00})_i(x, q, t)}{t^{2i}} \\
&= \left( \frac{1 + xq^{2i}t^2}{1 - xq^{2i}t^2} \right) \frac{(F_{00})_i^2(x, q, t)}{t^{2i}}, \quad \text{avec } i \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ainsi, on a

$$F(x, q, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{1 + xq^{2i}t^2}{1 - xq^{2i}t^2} \frac{(F_{00})_i^2(x, q, t)}{t^{2i}},$$

ce qui conclut la preuve du théorème 2.

□

Voici les quelques premiers termes de cette série génératrice :

$$\begin{aligned}
F(q, t) &= 1 + 3t^2 + 2qt^3 + (3 + 3q^2)t^4 + 6q^3t^5 + (3 + 8q^4 + q^6)t^6 + (6q^5 + 6q^7)t^7 + \\
&(5q^8 + 2q^4(2q^4 + q^6) + 6q^6 + 3 + q^{10})t^8 + (12q^{11} + 2q^9 + 2q^{13} + 6q^7)t^9 \\
&+ (3 + 8q^{12} + 3q^{14} + 6q^8 + 2q^6(2q^8 + q^{10}) + q^{16} + 2q^8(2q^4 + q^6))t^{10} \\
&+ (6q^9 + 14q^{15} + 2q^{19} + 6q^{17} + 2q^6(2q^9 + 2q^{13}))t^{11} + \dots
\end{aligned}$$

## CHAPITRE II

### DÉNOMBREMENT DES POLYOMINOS TRIANGULAIRES *HV*-CONVEXES

Nous présentons dans ce chapitre les équations fonctionnelles des polyominos triangulaires *HV*-convexes. Nous présentons d'abord les différents opérateurs qui seront utilisés à cet effet.

#### 2.1 Opérateurs de dénombrement

Les opérateurs vont servir à établir les équations fonctionnelles de la classe des polyominos *HV*-convexes, quoi qu'ils soient définis dans la présente section pour une classe quelconque  $X$ .

On définit deux types d'opérateurs, que nous appelons  $\phi$  et  $\psi$ , et qu'on applique aux polyominos d'une famille  $X$ . On définit ainsi des règles d'ajout de colonnes à droite d'un polyomino  $P$  d'une certaine classe  $X$ , pour qu'en lui ajoutant cette colonne, le polyomino résultant reste dans la même classe.

Soit  $X$  une certaine classe de polyominos convexes de série génératrice  $X(v)$ .

$$\phi : X \longrightarrow X \qquad \psi : X \longrightarrow X$$

$$P \mapsto \phi(P) \qquad P \mapsto \psi(P)$$

On peut aussi définir des opérateurs correspondants sur les séries génératrices, qu'on note  $\Phi$  et  $\Psi$ . Ces opérateurs transforment une série  $X(v)$  dans l'algèbre des séries formelles  $A[[v]]$  en une série  $\Phi(X(v))$  (resp.  $\Psi(X(v))$ ) aussi dans  $A[[v]]$ . Plus formellement on a

$$\begin{aligned} \Phi : A[[v]] &\longrightarrow A[[v]] & \Psi : A[[v]] &\longrightarrow A[[v]] \\ X(v) &\mapsto \Phi(X(v)) & X(v) &\mapsto \Psi(X(v)) \end{aligned}$$

### 2.1.1 Relation entre les opérateurs $\phi$ et $\Phi$

L'opérateur  $\phi$  est fonction de la dernière colonne filiforme du polyomino sur lequel il sera appliqué.

#### Relation entre les opérateurs $\phi$ et $\Phi$

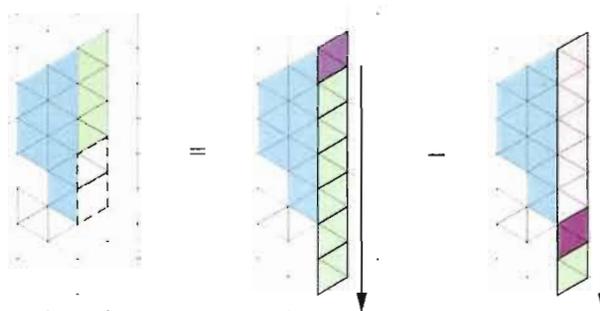


Fig. 2.1 L'opérateur  $\phi$ .

Soit  $P$  un polyomino appartenant à une certaine classe  $X$  de polyominos convexes et soit  $DC$  la dernière colonne de  $P$ , que nous posons de taille  $n$ . L'opérateur  $\phi$  agira sur

$P$  en collant à la droite de  $DC$  une nouvelle colonne de taille au plus  $n + 1$ , de telle sorte que la cellule la plus haute de la nouvelle colonne soit située au Nord-Est de la cellule la plus haute de  $DC$  (voir figure 2.1 a) ). Toutes les tailles possibles seront produites. Ainsi,  $\phi(P)$  est l'ensemble des polyominos ainsi obtenus.

On note que l'opérateur  $\phi$  sera appliqué à la classe  $\mathcal{HV}_{00}$  (voir figure 2.3 de la section suivante) pour produire des polyominos de la classe  $\mathcal{HV}_{02}$  (voir figure 2.4 de la section suivante).

**Proposition 1.** Soit  $\Phi$  l'opérateur défini sur les séries formelles  $X(v) = X(x, q, v, t)$  par la formule

$$\Phi(X(v)) = \frac{xq^2vt^2X(1)}{1 - q^2v} - \frac{xq^2vt^2X(vq^2)}{1 - q^2v}, \quad (2.1)$$

alors

$$\phi(X)(x, q, v, t) = \Phi(X(x, q, v, t)).$$

**Preuve :**

Pour tout polyomino  $P$  dans  $X$ , on commence par ajouter deux cellules au Nord-Est de  $DC$  (voir figure 2.1 b) en mauve). Notons qu'en ajoutant une nouvelle colonne au polyomino  $P$ , la variable qui tenait compte de la taille de la dernière colonne filiforme n'a plus de sens, donc on remplace  $v$  par 1 dans  $X(v)$ . Ainsi on obtient la série  $xq^2vt^2X(1)$ , car la largeur augmente de 1, l'aire de 2, le périmètre augmente de 2, et la taille de la dernière colonne filiforme du nouveau polyomino est 1. Ensuite, on colle un nombre arbitraire pair de cellules au dessous des deux cellules ajoutées précédemment, ce qui nous donne le facteur  $\frac{1}{1 - q^2v}$  et on obtient le terme  $\frac{xq^2vt^2X(1)}{1 - q^2v}$ .

Mais en faisant cela on construit des polyominos indésirables, soient ceux dont la taille de la nouvelle colonne ajoutée dépasse  $n$ . Ces polyominos doivent donc être enlevés. Ainsi, on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $X(v)$  (voir figure 2.1 c) en rose) et on pose la colonne obtenue au Nord-Est du polyomino initial. Puis, pour créer des polyominos indésirables, il faut que la taille de la dernière colonne de ces derniers polyominos dépasse  $n$ . Alors on ajoute deux cellules en bas de la dernière colonne (voir figure 2.1 c) en

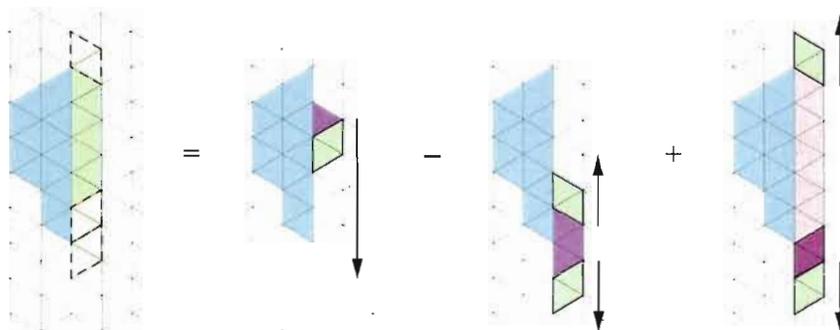
mauve). Il reste à ajouter un nombre arbitraire pair de cellules au dessous de la dernière colonne et on aura le terme  $\frac{xq^2vt^2X(vq^2)}{1-q^2r}$ .

□

### 2.1.2 Relation entre les opérateurs $\psi$ et $\Psi$

L'opérateur  $\psi$  est fonction de la dernière colonne filiforme du polyomino sur lequel il sera appliqué.

Relation entre les opérateurs  $\psi$  et  $\Psi$



**Fig. 2.2** L'opérateur  $\psi$ .

L'opérateur  $\psi$  consiste à coller à droite de la dernière colonne  $DC$  de taille  $n$  du polyomino  $P$  une colonne de taille au plus  $n$  de sorte que cette colonne soit située au plus haut, à la même hauteur que la cellule la plus haute de  $DC$ , et au plus bas, à la même hauteur que la cellule la plus basse de  $DC$  (voir figure 2.2 a ).

On note que l'opérateur  $\psi$  sera appliqué aux classes  $\mathcal{HV}_{00}$ ,  $\mathcal{HV}_{02}$  et  $\mathcal{HV}_{20}$  pour produire des polyominos de la classe  $\mathcal{HV}_{22}$  (voir la section suivante).

**Proposition 2.** Soit  $\Psi$  l'opérateur défini sur les séries formelles  $X(v) = X(x, q, v, t)$  par la formule

$$\Psi(X(v)) = \frac{xqt}{(1-q^2v)} \frac{\partial(X(v))}{\partial v} \Big|_{v=1} - \frac{xq^3vtX(1)}{(1-q^2v)^2} + \frac{xqtX(vq^2)}{(1-q^2v)^2}, \quad (2.2)$$

alors

$$\psi(X)(x, q, v, t) = \Psi(X(x, q, v, t)).$$

**Preuve :**

On commence par coller une cellule. On a  $v$  choix de la placer pour qu'elle soit située au plus haut à la même hauteur que la cellule la plus haute de  $DC$ , et au plus bas à la même hauteur que la cellule la plus basse de  $DC$  (voir figure 2.2 b) en mauve). En dérivant par rapport à  $v$ , nous obtenons une multiplicité de  $n$  dans la série. On remplace  $v$  par 1 dans la dérivée car on ne tient plus compte de la taille de la colonne  $DC$  dans ce dernier polyomino. Puis on ajoute un nombre arbitraire pair de cellules au dessous de la nouvelle cellule, ce qui nous donne le terme  $\frac{xqt}{(1-q^2v)} \frac{\partial(X(v))}{\partial v} \Big|_{v=1}$ .

Mais en faisant cela on construit des polyominos indésirables, soient ceux dont la taille de la nouvelle colonne ajoutée dépasse  $n$ . Ces polyominos doivent donc être enlevés. Ainsi, on ajoute trois cellules à droite de  $DC$  (voir figure 2.2 c) en mauve), puis on ajoute un nombre arbitraire pair de cellules au dessus et au dessous de ces trois cellules. Notons qu'en ajoutant une nouvelle colonne au polyomino  $P$ , la variable qui tenait compte de la taille de la dernière colonne n'a plus de sens, donc on la neutralise en remplaçant  $v$  par 1 dans  $X(v)$ , ce qui nous donne le terme  $\frac{xq^3tX(1)}{(1-q^2v)^2}$ .

Il se trouve maintenant qu'on a enlevé trop de cas. On les rajoute en remplaçant la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $X(v)$  du polyomino initial (voir figure 2.2 d) en rose), puis en ajoutant une cellule en dessous (voir figure 2.2 d) en mauve). On ajoute ensuite un nombre arbitraire pair de cellules au dessus et au dessous de cette colonne, et on aura le terme  $\frac{xqtX(vq^2)}{(1-q^2v)^2}$ .

□

## 2.2 Polyominos triangulaires $HV$ -convexes

Soit  $P$  un polyomino  $HV$ -convexe et  $CL_1, CL_2, \dots, CL_k$  ses colonnes numérotées de gauche à droite. On peut partitionner l'ensemble des polyominos  $HV$ -convexes en quatre parties disjointes : l'ensemble  $\mathcal{HV}_{00}$  des polyominos qui augmentent en haut et en bas dont la série génératrice est  $HV_{00}$  ; l'ensemble  $\mathcal{HV}_{02}$  des polyominos qui augmentent en haut et diminuent en bas dont la série génératrice est  $HV_{02}$  ; l'ensemble  $\mathcal{HV}_{20}$  des polyominos qui diminuent en haut et augmentent en bas dont la série génératrice est  $HV_{20}$  et enfin l'ensemble  $\mathcal{HV}_{22}$  des polyominos qui diminuent en haut et en bas dont la série génératrice est  $HV_{22}$ .

On note que les polyominos filiformes sont placés dans la classe  $\mathcal{HV}_{00}$  par convention.

Intuitivement, on peut insérer un polyomino  $HV$ -convexe  $P$  dans un rectangle minimal  $R$ .

Soit  $\Gamma_1$  la colonne de  $P$  qui contient la cellule touchant le haut de  $R$  ;  $\Gamma_2$  celle qui contient la cellule qui touche le bas de  $R$  et  $\Gamma_3$  la première colonne qui se trouve à droite de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  si elle existe.

On peut alors caractériser les ensembles  $\mathcal{HV}_{00}$ ,  $\mathcal{HV}_{02}$ ,  $\mathcal{HV}_{20}$  et  $\mathcal{HV}_{22}$  de la façon suivante :

$\Gamma_1 = \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{HV}_{00}$ .

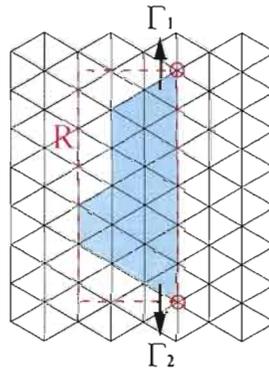


Fig. 2.3 Polyomino de la classe  $\mathcal{HV}_{00}$ .

Si  $\Gamma_1$  est à droite de  $\Gamma_2$  et si  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{HV}_{02}$ .

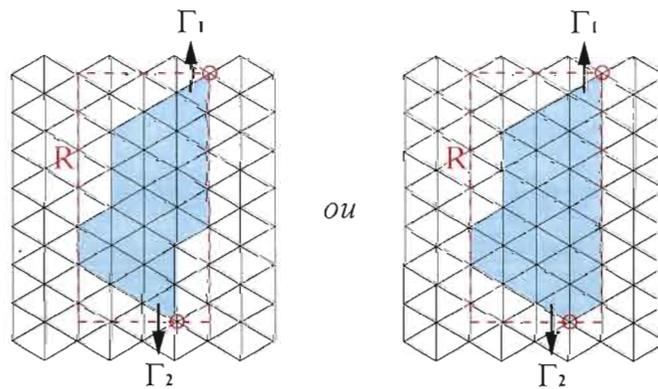


Fig. 2.4 Polyomino de la classe  $\mathcal{HV}_{02}$ .

Si  $\Gamma_1$  est à gauche de  $\Gamma_2$  et si  $\Gamma_3$  n'existe pas, alors  $P \in \mathcal{HV}_{20}$ .

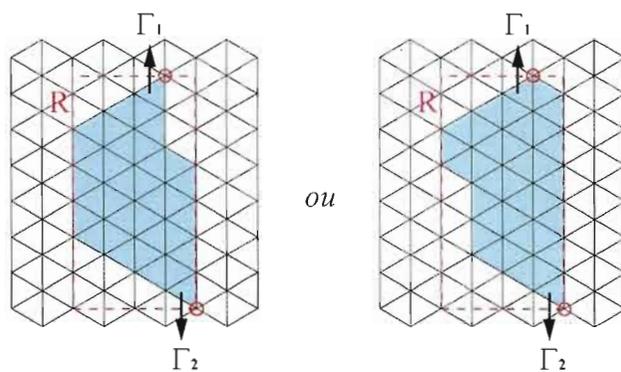


Fig. 2.5 Polyomino de la classe  $\mathcal{HV}_{20}$ .

Si  $\Gamma_3$  existe, alors  $P \in \mathcal{HV}_{22}$ .

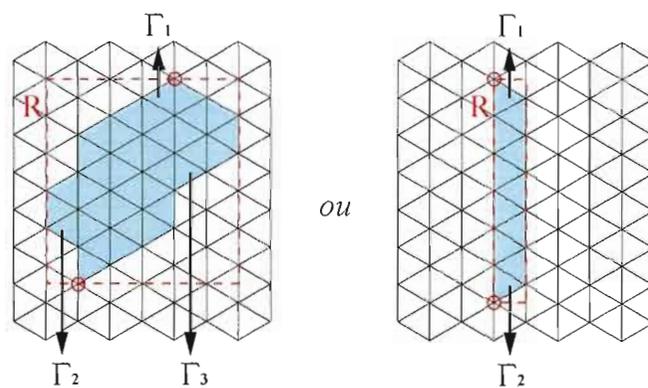


Fig. 2.6 Polyomino de la classe  $\mathcal{HV}_{22}$ .

Soit  $HV(x, q, v, t) = \sum_{i \geq 0} e_i v^i$  la série génératrice des polyomino  $HV$ -convexes. On a alors

$$HV(v) = HV_{00}(v) + HV_{02}(v) + HV_{20}(v) + HV_{22}(v).$$

**Théorème 3.** *Les séries génératrices  $HV_{00}(v)$ ,  $HV_{02}(v)$ ,  $HV_{20}(v)$  et  $HV_{22}(v)$  vérifient les équations suivantes :*

$$HV_{00}(v) = \frac{1}{1-vt^2} + \frac{xqt^3}{(1-q^2vt^2)^2} HV_{00}(x, q, vq^2, t), \quad (2.3)$$

$$HV_{02}(v) = \frac{\Phi(HV_{00}(u) + HV_{02}(u))}{1-q^2vt^2}, \quad (2.4)$$

$$HV_{20}(v) = HV_{02}(x, q, v, t), \quad (2.5)$$

$$HV_{22}(v) = \Psi(HV_{\geq 1}(v)) \quad (2.6)$$

où  $HV_{\geq 1}(v)$  est la série génératrice des polyominos  $HV$ -convexes dont la dernière colonne filiforme est de taille supérieure ou égale à 1.

### Preuve

Pour  $HV_{00}(x, q, v, t)$  :

Le terme  $\frac{1}{1-vt^2}$  génère tous les polyominos filiformes colonnes, qui sont par convention dans la classe  $HV_{00}(x, q, u, t)$ .

Quand on enlève la dernière colonne d'un élément de  $\mathcal{HV}_{00}$  qui admet une colonne ou plus, on obtient un autre polyomino de  $\mathcal{HV}_{00}$ . Donc pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{HV}_{00}$  d'une colonne ou plus, on remplace la variable  $v$  par  $vq^2$  dans la série  $\mathcal{HV}_{00}$  du polyomino initial puis on ajoute une cellule au-dessous de la colonne rajoutée et ensuite on lui ajoute un nombre pair arbitraire de cellules en-dessous et au-dessus.

Pour  $HV_{02}(x, q, v, t)$  :

Quand on enlève la dernière colonne de  $\mathcal{HV}_{02}$ , on obtient un polyomino de  $\mathcal{HV}_{00} \cup \mathcal{HV}_{02}$ . Donc pour obtenir un polyomino de  $\mathcal{HV}_{02}$ , on applique l'opérateur  $\Phi$  aux polyominos de  $\mathcal{HV}_{00}$  et de  $\mathcal{HV}_{02}$ . On peut ensuite ajouter des cellules (en nombre pair) au-dessus de la nouvelle colonne. Ceci revient à multiplier par la fraction  $\frac{1}{1-q^2vt^2}$ .

**Pour  $HV_{20}(x, q, v, t)$  :**

La série de  $HV_{20}(x, q, v, t)$  est la même que celle de  $HV_{02}(x, q, v, t)$  par symétrie horizontale.

**Pour  $HV_{22}(x, q, v, t)$  :**

Quand on enlève la dernière colonne d'un polyomino de  $\mathcal{HV}_{22}$  d'une colonne ou plus, on obtient un polyomino de  $\mathcal{HV}_{00} \cup \mathcal{HV}_{02} \cup \mathcal{HV}_{20} \cup \mathcal{HV}_{22_{\geq 1}}$ , où  $\mathcal{HV}_{22_{\geq 1}}$  est l'ensemble des polyominos  $HV_{22}$ -convexes dont la dernière colonne filiforme est de taille supérieure ou égale à 1. Donc on applique l'opérateur  $\Psi$  à chacune de ces classes.

□

## CHAPITRE III

### DÉNOMBREMENT DE QUELQUES CLASSES PARTICULIÈRES DE POLYO-MINOS CONVEXES

Quelques classes familières de polyominos convexes du réseau carré se retrouvent naturellement sur le réseau triangulaire. C'est le cas notamment des polyominos partages et parallélogrammes.

Introduisons la notation suivante, soit pour  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_q = \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}$$

est le polynôme  $q$ -binomial (Gaussien) où

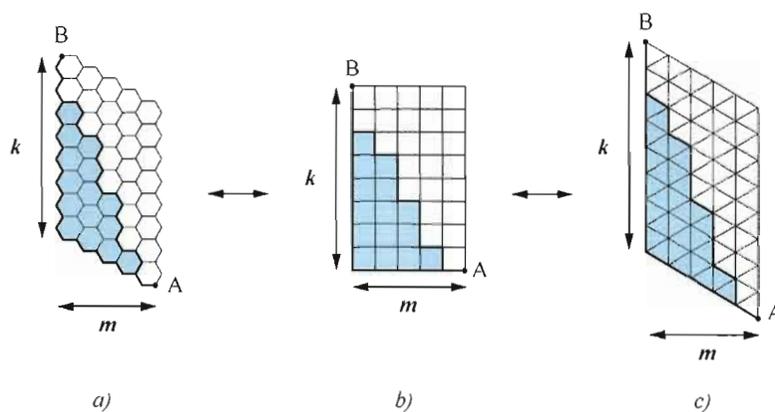
$$(a)_n = (a; q)_n = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}), \quad n \geq 0.$$

Il est bien connu que le polynôme  $q$ -binomial  $\left[ \begin{array}{c} m+k \\ k \end{array} \right]_q$  dénombre tous les chemins possibles du point  $A$  au point  $B$  (voir figure 3.1 b) ) selon l'aire au-dessous du chemin, ce qui revient à dénombrer tous les polyominos contenus dans un rectangle  $m \times k$  selon l'aire.

### 3.1 Les polyominos partages

Cette classe de polyominos a été étudiée sur le réseau carré dans (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998), puis une correspondance a été faite avec le réseau hexagonal dans (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004). Nous présentons ici une correspondance entre le réseau carré et le réseau triangulaire. Il suffit de prendre deux triangles pour former un losange (voir figure 3.1 c ). Ainsi, pour trouver les séries des polyominos partages du réseau triangulaire, il suffit de remplacer  $q$  par  $q^2$  dans les séries des polyominos partages du réseau carré. La variable  $x$  comptera la largeur (la longueur de la part la plus longue) et  $y$  comptera la hauteur (le nombre de parts).

On a alors les propositions suivantes, dont les équations du réseau carré sont issues de (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998).



**Fig. 3.1** Correspondance entre les polyominos partages sur les réseaux hexagonal, carré et triangulaire.

**Proposition 3.** *La série génératrice des polyominos partages sur le réseau carré  $P(x, y, q)$  étant donnée par*

$$\begin{aligned} P(x, y, q) &= \sum_{m \geq 1} \frac{x^m y q^m}{(yq)_m} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} x^m y^k q^{m+k-1} \begin{bmatrix} m+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \end{aligned}$$

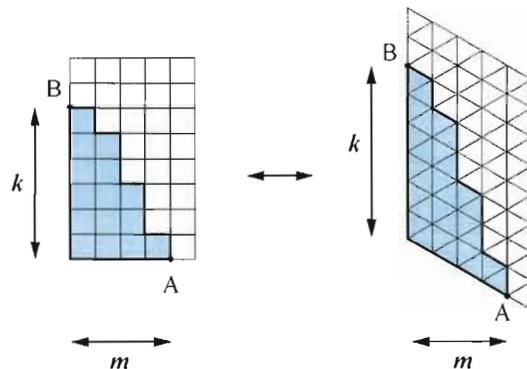
*alors la série génératrice des polyominos partages sur le réseau triangulaire  $PT(x, y, q)$  est donnée par*

$$PT(x, y, q) = P(x, y, q^2). \quad (3.1)$$

**Preuve :**

La figure 3.2 donne une preuve directe.

□



**Fig. 3.2** Correspondance entre les polyominos partages  $P$  et  $PT$ .

**Proposition 4.** *La série génératrice des polyominos partages avec rangées vides permises sur le réseau carré  $P_0(x, y, q)$  étant donnée par*

$$\begin{aligned} P_0(x, y, q) &= \sum_{m \geq 0} \frac{x^m y q^m}{(y)_{m+1}} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 1} x^m y^k q^m \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \end{aligned}$$

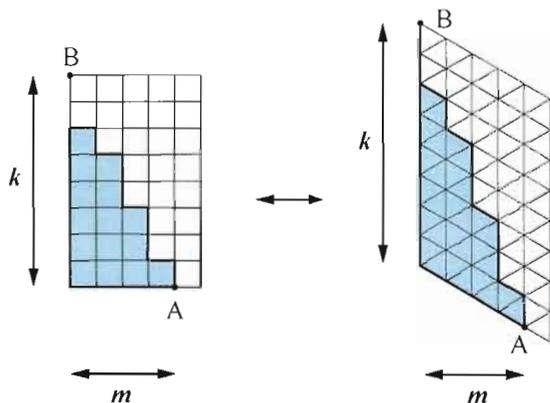
*alors la série génératrice des polyominos partages avec rangées vides permises sur le réseau triangulaire  $PT_0(x, y, q)$  est donnée par*

$$PT_0(x, y, q) = P_0(x, y, q^2). \quad (3.2)$$

**Preuve :**

La figure 3.3 donne une preuve directe.

□



**Fig. 3.3** Correspondance entre les polyominos partages avec rangées vides permises  $P_0$  et  $PT_0$ .

**Proposition 5.** *La série génératrice des polyominos partages avec parts distinctes sur le réseau carré  $P_S(x, y, q)$  étant donnée par*

$$\begin{aligned} P_S(x, y, q) &= \sum_{m \geq 1} x^m y q^m (-yq)_{m-1} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m x^m y^k q^{m+\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \end{aligned}$$

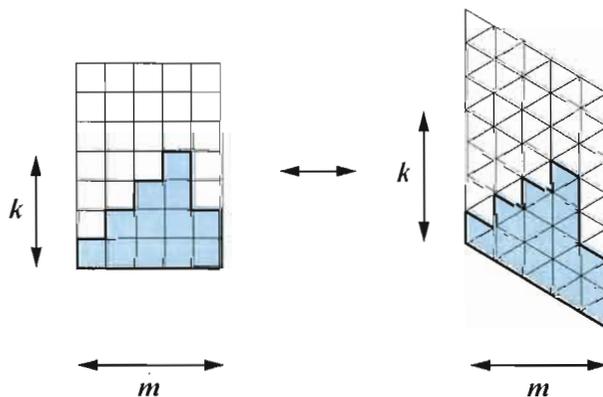
*alors la série génératrice des polyominos partages avec parts distinctes sur le réseau triangulaire  $PT_S(x, y, q)$  est donnée par*

$$PT_S(x, y, q) = P_S(x, y, q^2). \quad (3.3)$$

**Preuve :**

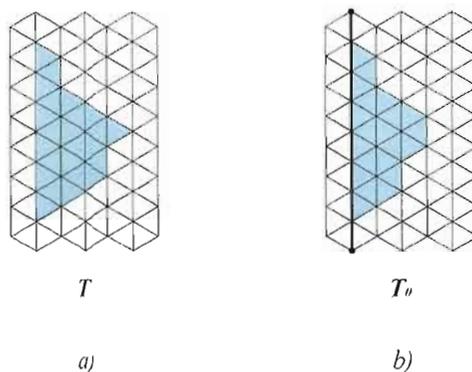
La figure 3.4 donne une preuve directe.

□



**Fig. 3.4** Correspondance entre les polyominos partages avec parts distinctes  $P_S$  et  $PT_S$ .

### 3.2 Les polyominos tas



**Fig. 3.5** Polyominos tas sur le réseau triangulaire.

Les polyominos tas sont des polyominos triangulaires  $C$ -convexes décroissants en haut et en bas (voir la figure 3.5 a)).

Soient  $T$  la classe des polyominos tas et  $T(x, y, q)$  leur série génératrice, la variable  $x$  comptant la largeur, la variable  $y$  la hauteur de la première colonne filiforme et la variable  $q$  l'aire, chaque colonne ayant un nombre de cellules impair.

Soit aussi  $T_0$  la classe des polyominos tas tels que la plus grande colonne contient possiblement des cellules vides en haut et en bas (voir la figure 3.5 b)). On note  $T_0(x, y, q)$  la série génératrice des ces tas. En extrayant le coefficient de la hauteur, on définit pour  $n \geq 1$  :

$$T_n(x, q) = [y^n]T(x, y, q) \quad \text{et} \quad T_{0,n}(x, q) = [y^n]T_0(x, y, q).$$

$T_n(x, q)$  est la série génératrice des tas dont la plus grande colonne est de hauteur  $n$ . De même,  $T_{0,n}(x, q)$  est la série génératrice des tas dont la plus grande colonne est de hauteur  $n$ , incluant les cellules possiblement vides aux deux bouts.

**Proposition 6.** *Les séries génératrices des polyominos tas satisfont les relations suivantes :*

$$T_n(x, q) = xq^{2n-1}T_{0,n-1}(x, q), \quad (3.4)$$

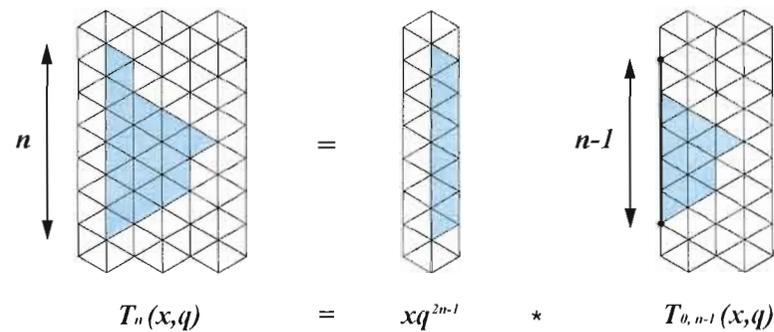
$$T_{0,n}(x, q) = (2 + xq^{2n-1})T_{0,n-1}(x, q) - T_{0,n-2}(x, q), \quad (3.5)$$

avec

$$T_{0,0}(x, q) = 1 \quad \text{et} \quad T_{0,1}(x, q) = 1 + xq.$$

**Preuve :**

Pour l'équation 3.4, il suffit de regarder la figure 3.6.



**Fig. 3.6** Polyomino tas.

Pour l'équation 3.5, nous avons illustré dans la figure 3.7 les quatre cas possibles pour un polyomino tas  $T_{0,n}$  dont la première colonne est de hauteur  $n$  :

1. Les polyominos dont la première colonne est pleine (aucune cellule vide). C'est le terme  $xq^{2n-1}T_{0,n-1}(x, q)$ .
2. Les polyominos tas dont la première cellule (celle d'en haut) de la première colonne est vide.

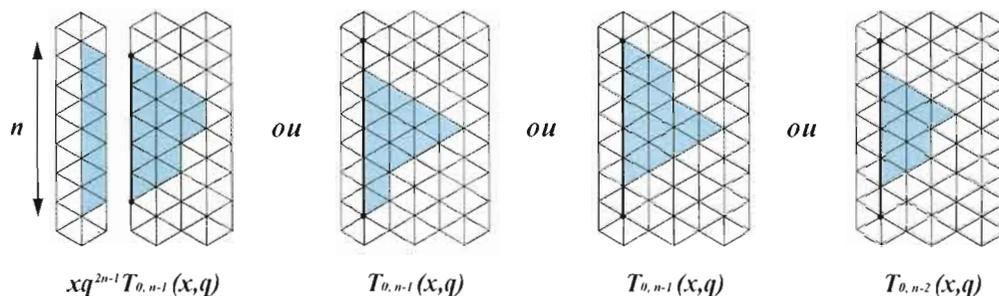


Fig. 3.7 Les formes possibles pour un polyomino  $T_{0,n}$ .

3. Les polyominos tas dont la dernière cellule (celle d'en bas) de la première colonne est vide.

Ces deux cas ont la même série. D'où le terme  $2T_{0,n-1}(x, q)$ .

4. Les polyominos dont la première et la dernière cellules de la première colonne sont vides. Leur série génératrice est  $T_{0,n-2}(x, q)$ . Mais comme ces polyominos sont déjà comptés deux fois dans les cas précédents on les retranche une fois.

□

**Proposition 7.** La série génératrice des polyominos tas  $T_{0,n}$  selon la largeur et l'aire est donnée par

$$T_{0,n}(x, q) = \sum_{m=1}^n x^m q^{m^2} \sum_{j=0}^{n-m} \begin{bmatrix} m+j-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n-j \\ m \end{bmatrix}_{q^2}. \quad (3.6)$$

**Preuve :**

Observons la figure 3.8 :

Tout polyomino de  $T_{0,n}$ , de largeur  $m$  a un noyau central qui est une pyramide qui a  $m^2$  cellules. Le découpage de ce noyau se fait le plus bas possible au sud du polyomino (voir figure 3.8, région bleue).

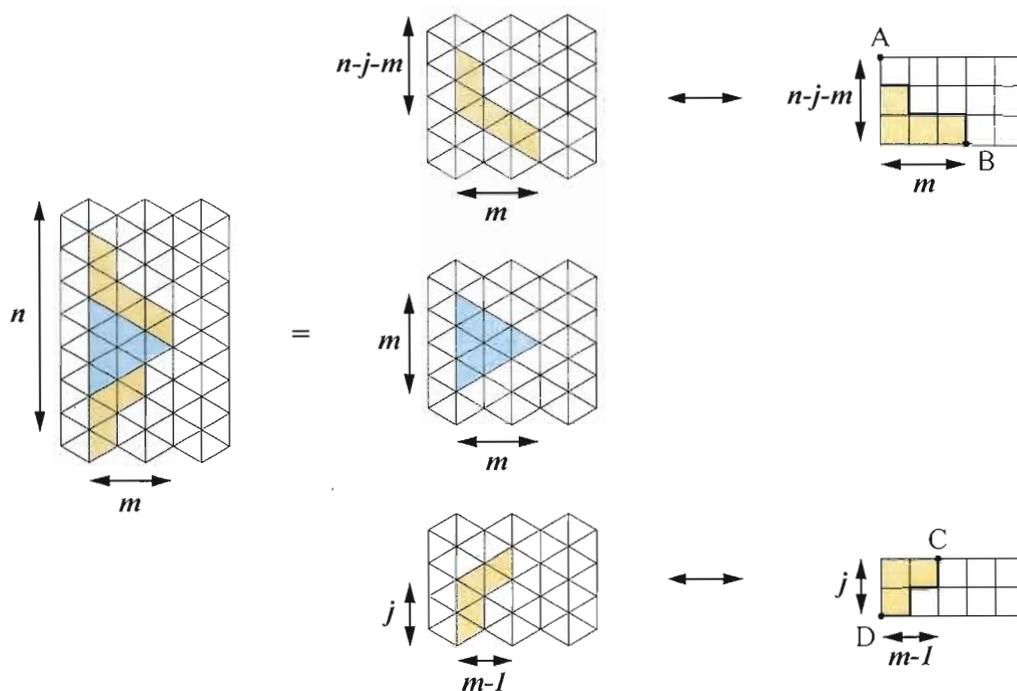


Fig. 3.8 Construction d'un polyomino de  $T_{0,n}$ .

En partant de ce noyau, on peut découper un polyomino de  $T_{0,n}$  en trois parties : les cellules qui sont au dessous du noyau, correspondant à un polyomino partage inscrit dans un rectangle de taille  $j \times (m - 1)$ , le noyau lui-même de hauteur et de largeur  $m$  et le polyomino partage au dessus du noyau, ce polyomino étant inscrit dans un rectangle  $(n - m - j) \times m$ . D'où la proposition.

□

**Proposition 8.** La série génératrice des polyominos tas est donnée par

$$T(x, y, q) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m y^m q^{m^2}}{((1 - yq^2)(1 - yq^4) \cdots (1 - yq^{2(m-1)}))^2 (1 - yq^{2m})}. \quad (3.7)$$

**Preuve :**

Tout polyomino de  $P$ , de largeur  $m$  a un noyau central qui est une pyramide symétrique qui a  $m^2$  cellules, d'où le terme  $x^m y^m q^{m^2}$ .

À partir de ce noyau, on peut construire tous les polyominos tas de la façon suivante :

On peut ajouter un nombre arbitraire pair de cellules à la plus grande colonne (la première) en haut et en bas, cela se traduit par la multiplication par  $\frac{1}{(1-yq^2)^2}$ .

Si on ajoute un nombre arbitraire pair de cellules seulement à la deuxième colonne, le polyomino ne sera plus un polyomino tas, donc à chaque cellule ajoutée en haut ou en bas de la deuxième colonne, il faut ajouter une cellule à la colonne précédente, cela se traduit par la multiplication par  $\frac{1}{(1-yq^4)^2}$ .

Ainsi de suite, jusqu'à l'avant-dernière colonne.

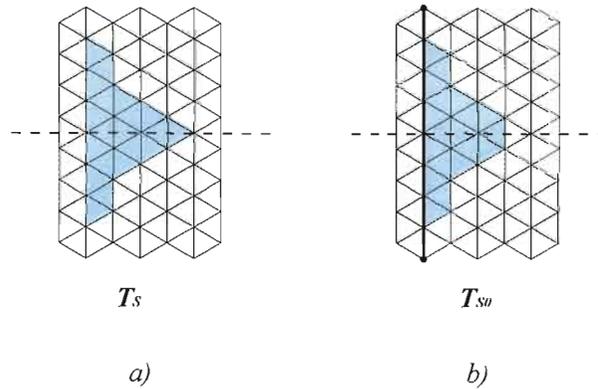
Si on ajoute un nombre arbitraire de cellules en haut de la dernière colonne (la plus courte), il faut, comme précédemment, à chaque paire de cellules ajoutées, en ajouter une paire à toutes les colonnes précédentes. On remarque qu'on ne peut en ajouter qu'en haut par construction, d'où la multiplication par  $\frac{1}{(1-yq^{2m})}$ .

□

**3.3 Polyominos tas symétriques**

On note  $T_{S,n}(x, q)$  la série génératrice des tas symétriques par rapport à l'horizontale et dont la première et la plus grande colonne est de hauteur  $n$ , la variable  $x$  comptant le nombre de colonnes et la variable  $q$  l'aire (figure 3.9 a) ).

La série  $T_{S_0,n}(x, q)$  est la série génératrice des tas symétriques par rapport à l'horizontale dont la plus grande colonne est de hauteur  $n$  mais avec des cellules possiblement vides aux deux bouts (figure 3.9 b) ).



**Fig. 3.9** Polyominos tas symétriques sur le réseau triangulaire.

**Proposition 9.** *La série génératrice des polyominos tas symétriques satisfait la relation suivante :*

$$T_{S_0,n}(x, q) = xq^{2n-1}T_{S_0,n-1}(x, q) + T_{S_0,n-2}(x, q), \quad n \geq 1, \quad (3.8)$$

avec

$$T_{S_0,0}(x, q) = T_{S_0,-1}(x, q) = 1.$$

**Preuve :**

La figure 3.10 illustre la signification de la formule de récurrence 3.8 :

Si la colonne la plus grande de  $T_{S_0,n}$  n'a aucun vide, alors à cette colonne est attaché un polyomino de  $T_{S_0,n-1}$ . Sinon c'est un polyomino de  $T_{S_0,n-2}$ , auquel est ajoutée une cellule vide à chaque bout de la plus grande colonne.

□

**Proposition 10.** *Les séries génératrices des polyominos tas symétriques satisfont les relations suivantes :*

$$T_{S,n}(x, q) = xq^{2n-1}T_{S_0,n-1}(x, q), \quad (3.9)$$

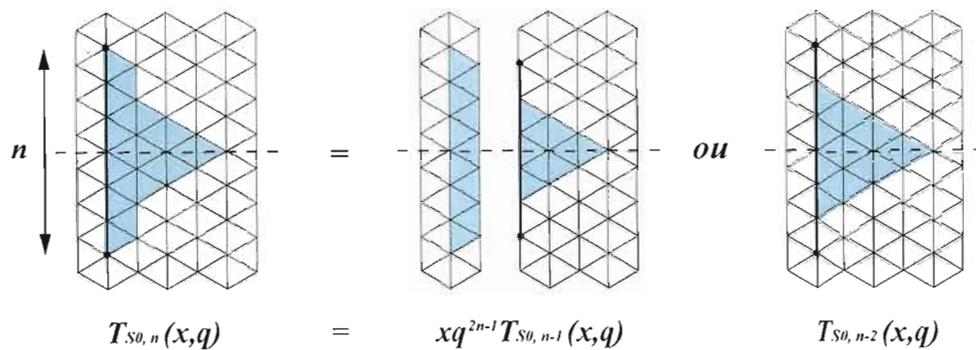


Fig. 3.10 Construction d'un polyomino de  $T_{S_0, n}$ .

$$T_{S, n}(x, q) = xq^{2^{n-1}}(T_{S, n-1}(x, q) + T_{S, n-3}(x, q) + \dots). \quad (3.10)$$

Preuve :

Pour l'équation 3.9, il suffit de regarder la figure 3.11.

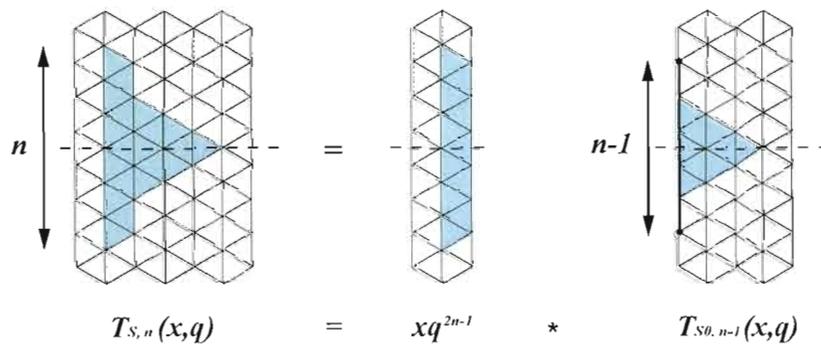


Fig. 3.11 Construction d'un polyomino de  $T_{S, n}$

Prouvons l'équation 3.10 par calcul. D'après les formules 3.8 et 3.9, on trouve

$$T_{S0,n} = T_{S,n} + T_{S0,n-2}.$$

Par itération, on déduit

$$T_{S0,n} = T_{S,n} + T_{S,n-2} + T_{S,n-4} \cdots$$

En posant  $n := n - 1$ , on a

$$T_{S0,n-1} = T_{S,n-1} + T_{S,n-3} + T_{S,n-5} \cdots$$

En remplaçant dans l'équation 3.9, on obtient l'équation 3.10.

□

Calculons la série génératrice des polyominos tas symétriques Notons cette série

$$T_S(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} T_{S,n}(x, y, q) y^n.$$

**Proposition 11.** *La série génératrice des polyominos tas symétriques est donnée par*

$$T_S(x, y, q) = T_{S_p}(x, y, q) + T_{S_i}(x, y, q) \quad (3.11)$$

avec

$$T_{S_p}(x, y, q) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m y^{2m} q^{m^2}}{(1 - y^2 q^4)(1 - y^2 q^8) \cdots (1 - y^2 q^{4m})} \quad (3.12)$$

$$T_{S_i}(x, y, q) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m y^{2m+1} q^{m^2+2m}}{(1 - y^2 q^4)(1 - y^2 q^8) \cdots (1 - y^2 q^{4m})} \quad (3.13)$$

**Preuve :**

Soit  $P$  un polyomino tas symétrique par rapport à l'horizontale dont la largeur est  $m$ . Deux cas se présentent : soit la hauteur de la dernière colonne filiforme est paire, soit elle est impaire.

### Premier cas : Hauteur paire

On aura nécessairement au moins une pyramide régulière au centre du polyomino (région bleue dans la figure 3.12 a) ) avec une largeur et une hauteur  $m$  et donc  $m^2$  cellules.

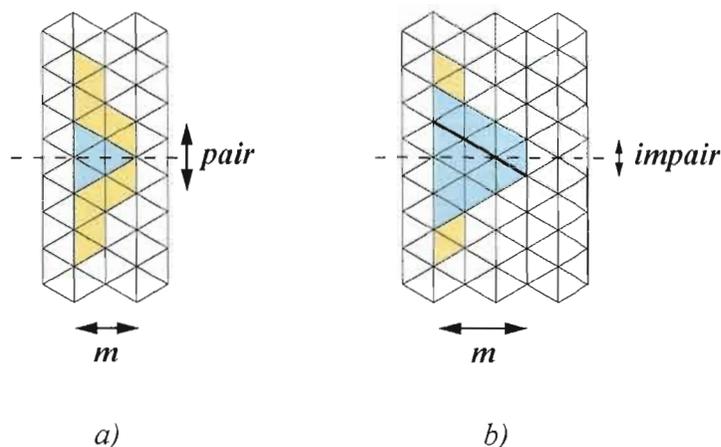


Fig. 3.12 Construction d'un polyomino de  $T_S$

On pourra prolonger symétriquement la plus grande colonne (la première) de ce noyau en ajoutant quatre cellules à la fois (deux en haut et deux en bas). Cela signifie qu'on multiplie par  $\frac{1}{(1-(yq^2)^2)} = \frac{1}{(1-y^2q^4)}$ .

Mais aussi, on pourra ajouter des bouts de colonne aux deux premières colonnes, 8 cellules à la fois, quatre à la plus grande colonne et quatre à la colonne suivante. On multiplie donc par  $\frac{1}{1-(y^2q^8)}$ .

Ainsi de suite, jusqu'à ajouter des bouts de colonnes aux  $m$  colonnes de la pyramide centrale, 2 cellules à la fois, c'est-à-dire qu'on ajoute deux fois  $2m$  cellules. On multiplie par  $\frac{1}{(1-y^2q^{4m})}$ .

D'où le terme  $T_{S_p}(x, y, q)$ .

### Deuxième cas : Hauteur impaire

On aura au moins une pyramide régulière au centre du polyomino avec une largeur et une hauteur  $m$  et donc  $m^2$  cellules, plus une rangée supplémentaire pour avoir une hauteur impaire, soit  $2m$  cellules (région bleue dans la figure 3.12 b).

On procède ensuite comme pour le cas pair pour ajouter des bouts de colonnes.

D'où le terme  $T_{S_i}(x, y, q)$ .

□

### 3.4 Les polyominos parallélogrammes

Les polyominos parallélogrammes ont été largement étudiés sur le réseau carré (voir (Bousquet-Mélou, 1996) et (Leroux et Rassart, 2001)) et sur le réseau hexagonal (voir (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004)). Comme il existe une correspondance naturelle entre les polyominos parallélogrammes du réseau carré et ceux du réseau triangulaire, comme le montre la figure 3.13, il est facile d'étendre l'étude au réseau triangulaire.

Soit  $\text{Pa}$  l'ensemble des polyominos parallélogrammes sur le réseau triangulaire et  $\text{Pa}(u) = \text{Pa}(v, x, y, q)$  leur série génératrice, où  $v$  compte la taille de la dernière colonne (à droite),  $x$  la largeur,  $y$  la hauteur totale et  $q$  l'aire.

**Théorème 4.** *La série génératrice  $\text{Pa}(v, x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes sur le réseau carré (Leroux et Rassart, 2001) étant donnée par*

$$\text{Pa}(v, x, y, q) = vy \frac{J_1(v, x, y, q)}{J_0(x, y, q)}$$

où

$$J_0(x, y, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n},$$

$$J_1(v, x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_{n-1} (1 - vyq^n)}$$

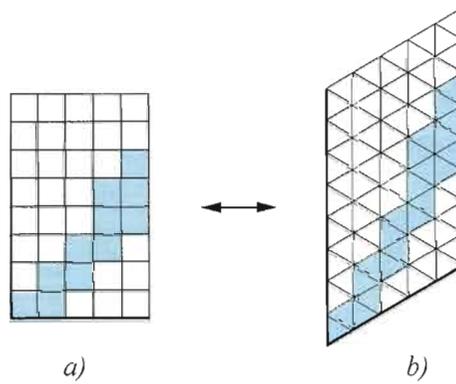
alors la série génératrice  $\text{PaT}(v, x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes sur le réseau triangulaire est donnée par

$$\text{PaT}(v, x, y, q) = \text{Pa}(v, x, y, q^2)$$

**Preuve :**

La figure 3.13 donne une preuve directe.

□



**Fig. 3.13** Polyominos parallélogrammes en bijection.

## CHAPITRE IV

### DÉNOMBREMENT DES CLASSES DE SYMÉTRIES DES POLYOMINOS $F$ -CONVEXES

Dans ce chapitre, nous calculons les séries génératrices des classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes. Nous commençons par faire quelques rappels sur des notions d'algèbre et définir la série des polyominos tas  $F$ -convexes, car ces résultats seront utilisés plus tard dans le chapitre.

Les classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes sur le réseau hexagonal ont été étudiées par Pierre Leroux et Dominique Gouyou-Beauchamps dans (Gouyou-Beauchamps et Leroux, 2004) et par Anissa Amroun dans (Amroun, 2004). Nous présentons ici des résultats analogues sur le réseau triangulaire.

#### 4.1 Action de groupe

Il est particulièrement utile de dénombrer les polyominos  $F$ -convexes à certaines rotations et réflexions près car les symétries d'ensembles de polyominos ( $F$ -convexes,  $C$ -convexes et  $HV$ -convexes sur les réseaux carré, hexagonal et triangulaire) forment un groupe qui agit de façon naturelle sur ces ensembles. Dénombrer le nombre d'orbites de l'action de ce groupe sur un de ces ensembles c'est dénombrer le nombre de classes de symétrie de cet ensemble. Autrement dit, en comptant les polyominos à symétrie près, on compte les orbites de l'action du groupe qu'on fait agir. Ainsi, le Théorème de Cauchy-Frobenius (Lemme de Burnside) sera utilisé (voir section 4.2.7) pour trouver

le nombre d'orbites distinctes pour une cardinalité pondérée par le périmètre ou l'aire dans les séries génératrices.

Le groupe des isométries de l'hexagone  $\mathcal{D}_6$  agit sur les polyominos  $F$ -convexes. Sur les polyominos  $HV$ -convexes, c'est le groupe non-cyclique  $\mathcal{D}_2$  qui agit.

Le groupe diédral  $\mathcal{D}_6$  des isométries de l'hexagone, d'ordre 12 est défini comme étant

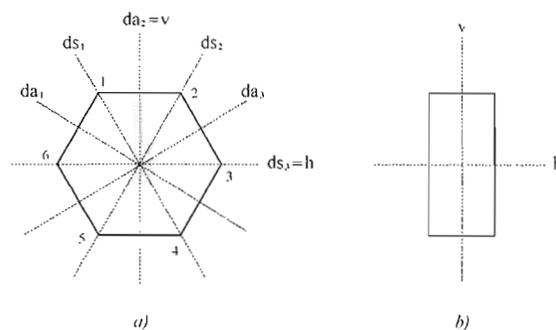
$$\mathcal{D}_6 = \{id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, da_1, da_2, da_3, ds_1, ds_2, ds_3\},$$

où  $id$  est l'identité,  $r$  est une rotation de  $\pi/3$  radian,  $r^2$  est une rotation de  $2\pi/3$  radian,  $r^3$  est une rotation de  $\pi$  radian,  $ds_i$  ( $i=1..3$ ) sont les réflexions selon les axes sommet-sommet,  $da_i$  ( $i=1..3$ ) sont les réflexions selon les axes arête-arête (voir figure 4.1 a ). On note  $v = da_2$  la réflexion par un axe vertical et  $h = ds_3$  la réflexion par un axe horizontal.

Le groupe diédral  $\mathcal{D}_2$  est un sous-groupe du groupe  $\mathcal{D}_4$  des isométries du carré et est défini comme étant

$$\mathcal{D}_2 = \{1, r^3, h, v\}.$$

Ce groupe agit sur les polyominos  $HV$ -convexes (à translation près) de façon naturelle, en les faisant tourner de  $\pi$  radian ou réfléchir selon les axes vertical ou horizontal (voir figure 4.1 b ).



**Fig. 4.1** Les réflexions de  $\mathcal{D}_6$  et de  $\mathcal{D}_2$ .

Le tableau 4.1 présente la table de multiplication de  $\mathcal{D}_6$  et le tableau 4.2 présente la table de multiplication de  $\mathcal{D}_2$ .

o	1	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	da <sub>1</sub>	v	da <sub>3</sub>	ds <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>	h
1	1	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	da <sub>1</sub>	v	da <sub>3</sub>	ds <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>	h
r	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	1	ds <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>	h	v	da <sub>3</sub>	da <sub>1</sub>
r <sup>2</sup>	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	1	r	v	da <sub>3</sub>	da <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>	h	ds <sub>1</sub>
r <sup>3</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	1	r	r <sup>2</sup>	ds <sub>2</sub>	h	ds <sub>1</sub>	da <sub>3</sub>	da <sub>1</sub>	v
r <sup>4</sup>	r <sup>4</sup>	r <sup>5</sup>	1	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	da <sub>3</sub>	da <sub>1</sub>	v	h	ds <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>
r <sup>5</sup>	r <sup>5</sup>	1	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	r <sup>4</sup>	h	ds <sub>1</sub>	ds <sub>2</sub>	da <sub>1</sub>	v	da <sub>3</sub>
da <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	h	da <sub>3</sub>	ds <sub>2</sub>	v	ds <sub>1</sub>	1	r <sup>4</sup>	r <sup>2</sup>	r <sup>5</sup>	r <sup>3</sup>	r
v	v	ds <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	h	da <sub>3</sub>	ds <sub>2</sub>	r <sup>2</sup>	1	r <sup>4</sup>	r	r <sup>5</sup>	r <sup>3</sup>
da <sub>3</sub>	da <sub>3</sub>	ds <sub>2</sub>	v	ds <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	h	r <sup>4</sup>	r <sup>2</sup>	1	r <sup>3</sup>	r	r <sup>5</sup>
ds <sub>1</sub>	ds <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	h	da <sub>3</sub>	ds <sub>2</sub>	v	r	r <sup>5</sup>	r <sup>3</sup>	1	r <sup>4</sup>	r <sup>2</sup>
ds <sub>2</sub>	ds <sub>2</sub>	v	ds <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	h	da <sub>3</sub>	r <sup>3</sup>	r	r <sup>5</sup>	r <sup>2</sup>	1	r <sup>4</sup>
h	h	da <sub>3</sub>	ds <sub>2</sub>	v	ds <sub>1</sub>	da <sub>1</sub>	r <sup>5</sup>	r <sup>3</sup>	r	r <sup>4</sup>	r <sup>2</sup>	1

**Tab. 4.1** Table de multiplication de  $\mathcal{D}_6$ .

Introduisons maintenant les notations nécessaires à la présentation du Lemme de Burnside. Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de polyominos d'aire et de périmètre donnés et soit  $W$  un groupe agissant sur  $\mathcal{P}$ . Alors tout sous-groupe  $G$  de  $W$  agit évidemment sur  $\mathcal{P}$ . Les  $G$ -orbites sont les classes d'équivalence des polyominos modulo les actions de  $G$ . On note  $\mathcal{P}/G$  l'ensemble des  $G$ -orbites des polyominos de  $\mathcal{P}$ .

On a alors le Théorème de Cauchy-Frobenius ou Lemme de Burnside :

**Lemme 1.** *Le nombre de  $G$ -orbites distinctes des polyominos de  $\mathcal{P}$  est donné par*

$$|\mathcal{P}/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\mathcal{P}}(g)| \quad (4.1)$$

$\circ$	1	$r^3$	$h$	$v$
1	1	$r^3$	$h$	$v$
$r^3$	$r^3$	1	$v$	$h$
$h$	$h$	$v$	1	$r^3$
$v$	$v$	$h$	$r^3$	1

**Tab. 4.2** Table de multiplication de  $\mathcal{D}_2$ .

où  $Fix_{\mathcal{P}}(g)$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  formé des polyominos invariants sous l'action de  $g$ . On appelle  $Fix_{\mathcal{P}}(g)$  la classe de symétrie de  $g$  et on dit que ses éléments sont  $g$ -symétriques.

## 4.2 Les symétries des polyominos triangulaires $F$ -convexes

### 4.2.1 Les polyominos tas $F$ -convexes

**Théorème 5.** *La série génératrice des polyominos tas  $F$ -convexes est donnée par*

$$\begin{aligned}
 F_{tas}(x, q, v, t) &= \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h x^l q^{(2h-1)l-l(l-1)} t^{2h+l} v^h \\
 &= \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h x^l q^{2hl-l^2} t^{2h+l} v^h.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

**Preuve :**

Tous les polyominos tas  $F$ -convexes sont des trapèzes isocèles (voir figure 4.2).

Comme  $l$  est la largeur du polyomino, on a directement le terme  $x^l$ . On note qu'une largeur nulle est admissible et représente les polyominos filiformes colonnes.

La base (la première colonne à gauche) étant toujours avec un nombre de cellules impair, on a  $2h-1$  cellules pour cette colonne. Chaque colonne supplémentaire a deux cellules de

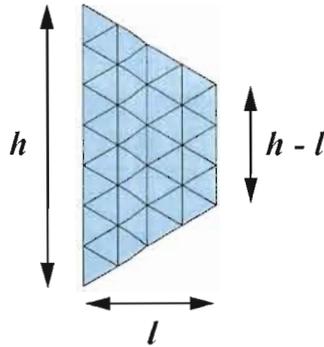


Fig. 4.2 Polyomino tas  $F$ -convexe.

moins que la précédente. Ainsi, pour  $l$  colonnes, on multiplie  $2h-1$  par  $l$ , auquel nombre il faut soustraire  $(0+2+4+6+\dots) = l(l-1)$ . On a alors le terme  $q^{(2h-1)l-l(l-1)} = q^{2hl-l^2}$ .

La hauteur du côté gauche est  $h$ , la largeur est  $l$  et le côté droit a une hauteur de  $h-l$ . On a donc un périmètre de  $h+2l+(h-l)$ , ce qui nous donne le terme  $t^{2h+l}$ .

La première colonne filiforme à gauche a une taille  $h$ . On assigne ici cette valeur à la variable  $v$  car les polyominos tas seront utilisés plus loin indépendamment du sens (selon une réflexion verticale).

□

**Corollaire 1.** *La série génératrice des polyominos tas  $F$ -convexes calculée selon l'aire et le périmètre est donnée par*

$$F_{\text{tas}}(q, t) = F_{\text{tas}}(1, q, 1, t) = \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h q^{2hl-l^2} t^{2h+l}. \quad (4.3)$$

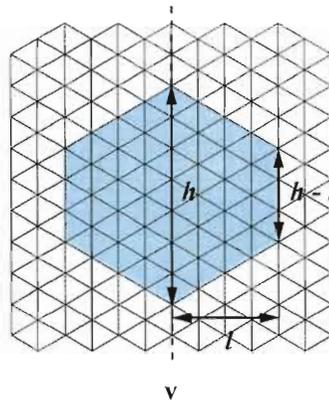
Voici les premiers termes de la série donnée par le théorème 5 :

$$\begin{aligned}
F_{tas}(x, q, v, t) = & 1 + t^2v + xqt^3v + t^4v^2 + xq^3t^5v^2 + x^2q^4t^6v^2 + t^6v^3 + xq^5t^7v^3 + x^2q^8t^8v^3 + \\
& x^3q^9t^9v^3 + t^8v^4 + xq^7t^9v^4 + x^2q^{12}t^{10}v^4 + x^3q^{15}t^{11}v^4 + x^4q^{16}t^{12}v^4 + t^{10}v^5 + xq^9t^{11}v^5 + \\
& x^2q^{16}t^{12}v^5 + x^3q^{21}t^{13}v^5 + x^4q^{24}t^{14}v^5 + x^5q^{25}t^{15}v^5 + \dots
\end{aligned}$$

## 4.2.2 Polyominos $F$ -convexes $v$ -symétriques

**Théorème 6.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $v$ -symétriques est donnée par*

$$F_v(x, q, v, t) = \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h x^{2l} q^{2l(2h-l)} t^{2(h+l)}. \quad (4.4)$$



**Fig. 4.3** Polyomino  $F$ -convexe  $v$ -symétrique.

**Preuve :**

On remarque que les polyominos  $v$ -symétriques sont composés de deux polyominos tas  $F$ -convexes de hauteur  $h$  collés dos à dos (voir la figure 4.3).

Pour la largeur et l'aire, on n'a alors qu'à doubler la valeur trouvée au théorème 5 puisque les polyominos doublent de largeur et d'aire.

Pour le périmètre, on double la valeur trouvée au théorème 5 puis on soustrait deux fois la hauteur. Donc on a  $2(2h + l) - 2h = 4h + 2l - 2h = 2h + 2l = 2(h + l)$ .

On somme ensuite pour toutes les hauteurs et les largeurs possibles, d'où le théorème.

□

**Corollaire 2.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $v$ -symétriques suivant l'aire et le périmètre est donnée par*

$$F_v(q, t) = F_v(1, q, 1, t) = \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h q^{2l(2h-l)} t^{2(h+l)}. \quad (4.5)$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le théorème 6 :

$$\begin{aligned} F_v(x, q, 1, t) = & 1 + x^6 q^{114} t^{28} + x^2 q^{50} t^{28} + x^{12} q^{120} t^{28} + x^{10} q^{130} t^{28} + x^4 q^{88} t^{28} + x^{14} q^{98} t^{28} + \\ & x^8 q^{112} t^{26} + x^{10} q^{110} t^{26} + x^6 q^{102} t^{26} + x^2 q^{46} t^{26} + x^{12} q^{96} t^{26} + x^4 q^{80} t^{26} + x^6 q^{90} t^{24} + x^2 q^{42} t^{24} + \\ & x^4 q^{72} t^{24} + x^{12} q^{72} t^{24} + x^{10} q^{90} t^{24} + x^8 q^{96} t^{24} + x^{10} q^{70} t^{22} + x^2 q^{38} t^{22} + t^{20} + x^6 q^{78} t^{22} + x^8 q^{80} t^{22} + \\ & x^4 q^{64} t^{22} + t^{18} + x^8 q^{64} t^{20} + x^4 q^{56} t^{20} + x^{10} q^{50} t^{20} + x^6 q^{66} t^{20} + x^2 q^{34} t^{20} + x^6 q^{54} t^{18} + x^2 q^{30} t^{18} + \\ & x^8 q^{48} t^{18} + x^4 q^{40} t^{16} + x^6 q^{42} t^{16} + x^2 q^{26} t^{16} + x^4 q^{48} t^{18} + x^8 q^{32} t^{16} + x^4 q^{32} t^{14} + x^6 q^{30} t^{14} + \\ & x^4 q^{24} t^{12} + x^2 q^{18} t^{12} + x^6 q^{18} t^{12} + x^4 q^{16} t^{10} + x^2 q^{14} t^{10} + x^2 q^{10} t^8 + x^2 q^{22} t^{14} + x^4 q^8 t^8 + x^2 q^2 t^4 + \\ & x^2 q^6 t^6 + x^8 q^{128} t^{28} + t^{28} + t^{26} + t^{10} + t^{24} + t^{22} + t^{16} + t^{14} + t^{12} + t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + \dots \end{aligned}$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le corollaire 2 :

$$\begin{aligned} F_v(q, t) = & 1 + t^{20} + t^{18} + t^{28} + t^{26} + t^{10} + t^{24} + t^{22} + t^{16} + t^{14} + t^{12} + t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + \\ & q^{114} t^{28} + q^{120} t^{28} + q^{98} t^{28} + q^{128} t^{28} + q^{130} t^{28} + q^{112} t^{26} + q^{96} t^{26} + q^{80} t^{26} + q^{102} t^{26} + q^{46} t^{26} + \\ & q^{110} t^{26} + q^{42} t^{24} + q^{96} t^{24} + q^{80} t^{22} + q^{70} t^{22} + q^{38} t^{22} + q^{78} t^{22} + q^{64} t^{22} + q^{66} t^{20} + q^{64} t^{20} + \\ & q^{50} t^{20} + q^{56} t^{20} + q^{34} t^{20} + q^{30} t^{18} + q^{54} t^{18} + q^{42} t^{16} + q^{40} t^{16} + q^{26} t^{16} + q^{32} t^{16} + q^{22} t^{14} + \\ & q^{32} t^{14} + q^{30} t^{14} + q^{24} t^{12} + q^{14} t^{10} + q^{16} t^{10} + q^8 t^8 + q^{10} t^8 + q^6 t^6 + q^2 t^4 + 2q^{72} t^{24} + 2q^{90} t^{24} + \\ & 2q^{48} t^{18} + 2q^{18} t^{12} + q^{50} t^{28} + q^{88} t^{28} + \dots \end{aligned}$$

Et aussi

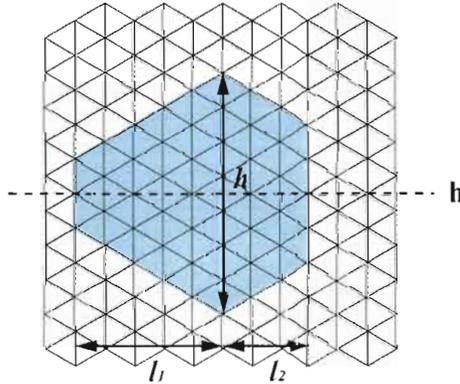
$$F_v(t) = 8t^{28} + 7t^{26} + 7t^{24} + 6t^{22} + 6t^{20} + 5t^{18} + 5t^{16} + 4t^{14} + 4t^{12} + 3t^{10} + 3t^8 + 2t^6 + 2t^4 + t^2 + 1 + \dots$$

### 4.2.3 Polyominos $F$ -convexes $h$ -symétriques

**Théorème 7.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $h$ -symétriques est donnée par*

$$\begin{aligned}
 F_h(x, q, 1, t) &= \sum_{h \geq 0} \sum_{l_1=0}^h \sum_{l_2=0}^h x^{l_1+l_2} q^{l_1((2h-1)-(l_1-1))+l_2((2h-1)-(l_2-1))} t^{2h+l_1+l_2} \\
 &= \sum_{h \geq 0} \sum_{l_1=0}^h \sum_{l_2=0}^h x^{l_1+l_2} q^{l_1(2h-l_1)+l_2(2h-l_2)} t^{2h+l_1+l_2}. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

**Preuve :**



**Fig. 4.4** Polyomino  $F$ -convexe  $h$ -symétrique.

On remarque que les polyominos  $h$ -symétriques sont composés de deux polyominos tas  $F$ -convexes de hauteur  $h$  collés dos à dos et de largeur quelconque chacun, disons  $l_1$  pour l'un et  $l_2$  pour l'autre (voir la figure 4.4).

Pour la largeur on a donc  $l_1 + l_2$ .

L'aire de chacun des polyominos tas est donnée par le théorème 5. On a donc  $q^{l_1(2h-l_1)+l_2(2h-l_2)}$ .

Pour le périmètre, par le théorème 5 on a  $2h + l_1 + 2h + l_2 - 2h = 2h + l_1 + l_2$  et on a donc  $t^{2h+l_1+l_2}$ .

On somme ensuite pour toutes les hauteurs et les largeurs possibles, d'où le théorème.

□

**Corollaire 3.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $h$ -symétriques suivant l'aire et le périmètre est donnée par*

$$F_h(q, t) = F_h(1, q, 1, t) = \sum_{h \geq 0} \sum_{l_1=0}^h \sum_{l_2=0}^h q^{l_1(2h-l_1)+l_2(2h-l_2)} t^{2h+l_1+l_2}. \quad (4.7)$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le théorème 7 :

$$\begin{aligned} F_h(x, q, t) = & 1 + 2x^6q^{28}t^{14} + 2x^2q^{20}t^{14} + 2x^4q^{24}t^{14} + 2x^4q^{30}t^{14} + 2x^5q^{23}t^{13} + x^6q^{30}t^{14} + \\ & x^4q^{24}t^{12} + x^2q^{22}t^{14} + x^6q^{18}t^{12} + x^2q^{18}t^{12} + x^4q^8t^8 + x^2q^{10}t^8 + x^2q^6t^6 + x^2q^2t^4 + t^{14} + \\ & t^{12} + t^{10} + t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + x^2q^{14}t^{10} + x^4q^{16}t^{10} + x^4q^{32}t^{14} + 2xq^{11}t^{13} + 2x^3q^{21}t^{13} + \\ & 2x^3q^{25}t^{13} + 2x^5q^{27}t^{13} + 2x^4q^{16}t^{12} + 2x^4q^{22}t^{12} + 2x^2q^{16}t^{12} + 2x^3q^{19}t^{11} + 2x^3q^{15}t^{11} + \\ & 2xq^9t^{11} + 2x^5q^{17}t^{11} + 2x^2q^{12}t^{10} + 2x^4q^{14}t^{10} + 2x^3q^{13}t^9 + 2xq^7t^9 + 2x^3q^9t^9 + 2x^2q^8t^8 + \\ & 2x^3q^7t^7 + 2xq^5t^7 + 2x^2q^4t^6 + 2xq^3t^5 + 2xt^3 + \dots \end{aligned}$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le corollaire 3 :

$$\begin{aligned} F_h(q, t) = & 1 + 2q^{24}t^{14} + q^{16}t^{10} + q^{22}t^{14} + q^{32}t^{14} + 2q^{28}t^{14} + 2q^{20}t^{14} + t^{14} + t^{12} + t^{10} + t^8 + \\ & t^6 + t^4 + t^2 + q^2t^4 + q^6t^6 + 3q^{30}t^{14} + q^{10}t^8 + 2q^{11}t^{13} + 2q^{27}t^{13} + 2q^{23}t^{13} + 2q^{18}t^{12} + 4q^{16}t^{12} + \\ & 2q^{22}t^{12} + 2q^{17}t^{11} + 2q^{15}t^{11} + 2q^9t^{11} + 2q^{19}t^{11} + 2q^{12}t^{10} + 3q^{14}t^{10} + 2q^9t^9 + 2q^7t^9 + \\ & 2q^{13}t^9 + 3q^8t^8 + 2q^5t^7 + 2q^7t^7 + 2q^4t^6 + 2q^3t^5 + 2qt^3 + q^{24}t^{12} + 2q^{21}t^{13} + 2q^{25}t^{13} + \dots \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} F_h(t) = & 1 + 40t^{29} + 39t^{28} + 38t^{27} + 35t^{26} + 32t^{25} + 31t^{24} + 28t^{23} + 26t^{22} + 24t^{21} + \\ & 22t^{20} + 20t^{19} + 19t^{18} + 16t^{17} + 15t^{16} + 14t^{15} + 12t^{14} + 10t^{13} + 10t^{12} + 8t^{11} + 7t^{10} + \\ & 6t^9 + 5t^8 + 4t^7 + 4t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + \dots \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Polyominos $F$ -convexes $\frac{\pi}{3}$ -symétriques

**Théorème 8.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $\frac{\pi}{3}$ -symétriques est donnée par*

$$F_r(x, q, t) = \sum_{l \geq 0} x^{2l} q^{6l^2} t^{6l}. \quad (4.8)$$

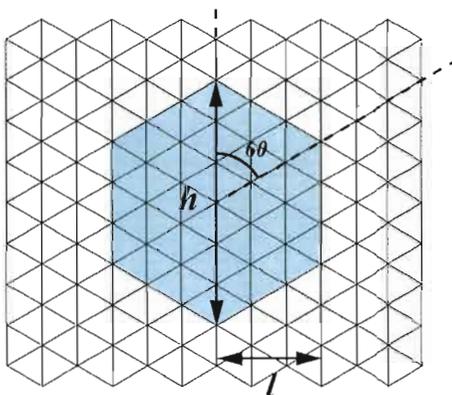


Fig. 4.5 Polyomino  $F$ -convexe  $\frac{\pi}{3}$ -symétrique.

**Preuve :**

En observant la figure 4.5, nous remarquons que les polyominos  $F$ -convexes  $\frac{\pi}{3}$ -symétriques sont des hexagones réguliers. La largeur est alors égale à  $(2l)$ , le périmètre est égal à  $(6l)$  et l'aire vaut  $(6l^2)$ , d'où le résultat.

□

**Corollaire 4.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $\frac{\pi}{3}$ -symétriques suivant l'aire et le périmètre est donnée par*

$$F_r(q, t) = F_r(1, q, t) = \sum_{l \geq 0} q^{6l^2} t^{6l}. \quad (4.9)$$

**Corollaire 5.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $\frac{\pi}{3}$ -symétriques suivant le périmètre est donnée par*

$$F_r(t) = F_r(1, 1, t) = \frac{1}{(1 - t^6)}. \quad (4.10)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} F_r(1, t) &= \sum_{l \geq 0} t^{6l} \\ &= 1 + t^6 + t^{12} + t^{18} + t^{24} + \dots \\ &= \frac{1}{(1 - t^6)}. \end{aligned}$$

□

Voici les premiers termes de la série donnée par le théorème 8 :

$$F_r(x, q, t) = x^{10}q^{150}t^{30} + x^8q^{96}t^{24} + x^6q^{54}t^{18} + x^4q^{24}t^{12} + x^2q^6t^6 + 1 + \dots$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le corollaire 4 :

$$F_r(q, t) = q^{150}t^{30} + q^{96}t^{24} + q^{54}t^{18} + q^{24}t^{12} + q^6t^6 + 1 + \dots$$

Voici les premiers termes de la série donnée par le corollaire 5 :

$$F_r(t) = t^{30} + t^{24} + t^{18} + t^{12} + t^6 + 1 + \dots$$

#### 4.2.5 Polyominos $F$ -convexes $\frac{2\pi}{3}$ -symétriques

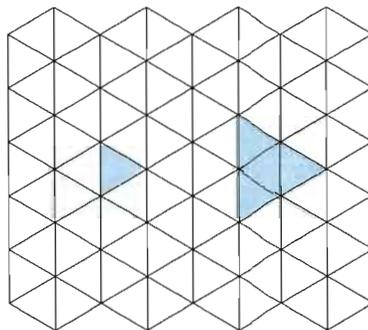
**Théorème 9.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $\frac{2\pi}{3}$ -symétriques est donnée par*

$$F_{r,2}(q, t) = 1 + 2 \sum_{r \geq 1} q^{r^2} t^{3r} + \sum_{r \geq 1} q^{6r^2} t^{6r} \left( 1 + 2 \left( \sum_{l=1}^{r-1} q^{6rl-3l^2} t^{3l} \right) \right) + 2 \sum_{r \geq 1} q^{6r^2+6r+1} t^{6r+3} \left( 1 + \sum_{l=1}^{r-1} q^{6rl-3l^2} t^{3l} + \sum_{l=1}^r q^{6(r+1)l-3l^2} t^{3l} \right). \quad (4.11)$$

**Preuve :**

Le seul polyomino filiforme  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique est le point, d'où le terme 1.

On remarquera que les polyominos de la figure 4.6 sont trop petits pour avoir une forme de base. Ainsi, pour éviter d'ajouter ces cas à part et comme ils forment des triangles équilatéraux, j'ai décidé de produire à part tous les polyominos triangles équilatéraux, d'où le terme  $2 \sum_{r \geq 1} q^{r^2} t^{3r}$ .



**Fig. 4.6** Polyominos  $F$ -convexe  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique particuliers.

La forme de base des polyominos  $F$ -convexe  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique dépend de l'endroit où le centre de rotation est situé. Ainsi, nous avons deux cas :

Premier cas : Le centre de rotation est au milieu d'un hexagone

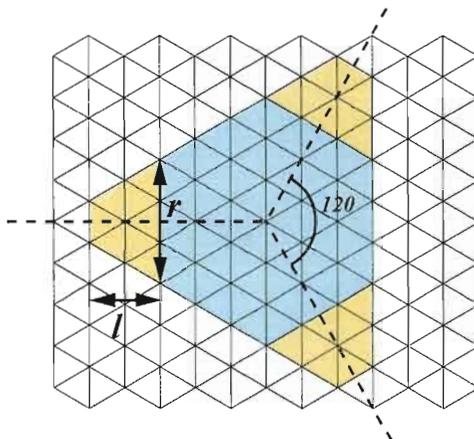


Fig. 4.7 Polyomino  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique avec centre de rotation au milieu d'un hexagone.

On part avec une forme de base qui est un polyomino  $\pi/3$ -symétrique (en bleu dans la figure 4.7) et dont la série génératrice est donnée par le corollaire 4, ce qui nous donne le terme  $\sum_{r \geq 1} q^{6r^2} t^{6r}$ .

En observant les axes de rotation dans la figure 4.7, on distingue trois endroits où on peut placer simultanément des polyominos tas  $F$ -convexes (en orange dans la figure 4.7). On a deux façons de faire cela, d'où le fait que le terme soit multiplié par deux. En ajoutant ces tas à la région de base le nombre de cellules augmente de  $3(2rl - l^2) = 6rl - 3l^2$  et le périmètre augmente de  $3(l) = 3l$  et donc on a le terme  $2\left(\sum_{l=1}^{r-1} q^{6rl-3l^2} t^{3l}\right)$ . On arrête la sommation à  $r - 1$  à cause de la remarque ci-haut.

D'où le deuxième terme

$$\sum_{r \geq 1} q^{6r^2} t^{6r} \left( 1 + 2\left(\sum_{l=1}^{r-1} q^{6rl-3l^2} t^{3l}\right) \right).$$

Deuxième cas : Le centre de rotation est au centre d'un triangle

Il y a deux orientations possibles (vers la gauche ou vers la droite, figure 4.8) pour le triangle, d'où le fait que la série soit multipliée par deux.

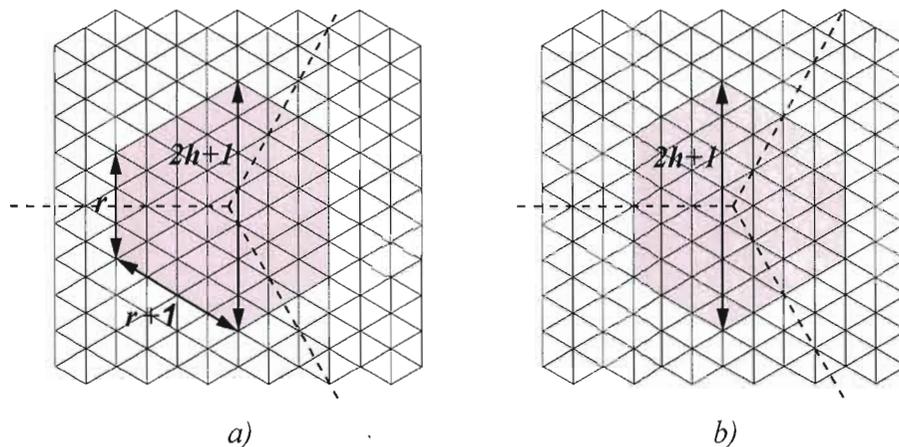


Fig. 4.8 Polyomino  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique avec centre de rotation au milieu d'un triangle.

Partons de la forme de base qui est un hexagone minimal de côtés  $r$  et  $r + 1$  et de hauteur  $h = 2r + 1$  (en rose dans la figure 4.8).

La forme de base se compose du collage de 6 triangles équilatéraux de côtés  $r$  (en rose dans la figure 4.9), de trois ailettes (en vert) et d'une cellule centrale (en rouge). Pour les six triangles équilatéraux on a  $6r^2$  cellules. Pour les trois ailettes on a  $3 * 2r = 6r$  cellules. Il ne reste qu'à ajouter la cellule centrale et on obtient  $6r^2 + 6r + 1$  cellules. Le périmètre est  $3r + 3(r + 1) = 6r + 3$ .

Maintenant, on a deux possibilités, soit de coller simultanément trois tas de base  $r$  sur les côtés de taille  $r$  (en bleu dans la figure 4.9 a) ), soit de coller simultanément trois tas de base  $r + 1$  sur les côtés de taille  $r + 1$  (en bleu dans la figure 4.9 b) ). On arrête la sommation à  $r - 1$  et à  $r$  respectivement à cause de la remarque ci-haut.

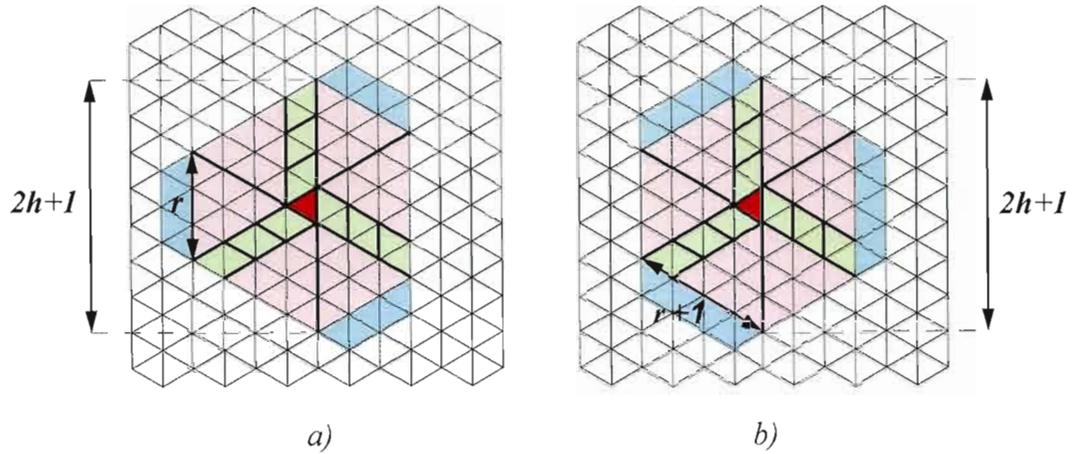


Fig. 4.9 Forme de base d'un polyomino  $\frac{2\pi}{3}$ -symétrique.

D'où le terme

$$2 \sum_{r \geq 1} q^{6r^2+6r+1} t^{6r+3} \left( 1 + \sum_{l=1}^{r-1} q^{6rl-3l^2} t^{3l} + \sum_{l=1}^r q^{6(r+1)l-3l^2} t^{3l} \right).$$

□

Voici les premiers termes de la série donnée par le théorème 9 :

$$\begin{aligned} F_{r,2}(q, t) = & 1 + q^{96}t^{24} + q^{54}t^{18} + q^{24}t^{12} + q^6t^6 + 2q^{109}t^{27} + 2q^{81}t^{27} + 2q^{121}t^{27} + 2q^{97}t^{27} + \\ & 2q^{64}t^{24} + 2q^{78}t^{24} + 2q^{94}t^{24} + 2q^{88}t^{24} + 2q^{73}t^{21} + 2q^{69}t^{21} + 2q^{61}t^{21} + 2q^{49}t^{21} + 2q^{46}t^{18} + \\ & 2q^{52}t^{18} + 2q^{36}t^{18} + 2q^{33}t^{15} + 2q^{37}t^{15} + 2q^{25}t^{15} + 2q^{16}t^{12} + 2q^{22}t^{12} + 2q^9t^9 + 2q^{13}t^9 + \\ & 2q^4t^6 + 2qt^3 + 2q^{117}t^{27} + \dots \end{aligned}$$

Et aussi

$$F_{r,2}(t) = 10t^{27} + 9t^{24} + 8t^{21} + 7t^{18} + 6t^{15} + 5t^{12} + 4t^9 + 3t^6 + 2t^3 + 1 + \dots$$

### 4.2.6 Polyominos $F$ -convexes $\pi$ -symétriques

**Théorème 10.** *La série génératrice des polyominos  $F$ -convexes  $\pi$ -symétriques est donnée par*

$$\begin{aligned}
F_{r,3}(q, t) = & 1 + 3 \sum_{h \geq 1} t^{2h} \\
& + \sum_{h \geq 1} \left( \frac{2q^{8h^2+8h}t^{8h+4}}{1 - q^{8h}t^4} \left( 1 + \sum_{l=1}^{2h} q^{8hl-2l^2} t^{2l} \right) \right) \\
& + \sum_{h \geq 1} \left( \sum_{x=1}^{2h} q^{8hx-2x^2} t^{4h+2x} \left( 1 + 2 \sum_{y=1}^x q^{4xy-2y^2} t^{2y} \right) \right) \\
& + 3 \sum_{h \geq 1} \left( \frac{2q^{8h^2-2t^{8h}}}{1 - q^{8h-4}t^4} \left( 1 + \sum_{l=1}^{2h-1} q^{8hl-4l-2l^2} t^{2l} \right) \right) \\
& + 3 \sum_{h \geq 1} \left( \sum_{x=1}^{2h-1} q^{8hx-4x-2x^2} t^{4h+2x-2} \left( 1 + 2 \sum_{y=1}^x q^{4xy-2y^2} t^{2y} \right) \right). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

**Preuve :**

On compte d'abord les polyominos filiformes. Il y a le point, plus trois fois les polyominos colonnes, d'où le premier terme du théorème.

La forme de base des polyominos  $F$ -convexe  $\pi$ -symétriques dépend de l'endroit où le centre de rotation est situé, c'est-à-dire dépend de si la hauteur de la colonne filiforme du milieu est paire ou impaire. Ainsi, nous avons deux cas :

**Premier cas : Le centre de rotation est un sommet**

Les figures 4.10 a) et 4.11 a)

Nous pouvons distinguer deux sous-cas :

**Premier sous-cas : La forme de base est un losange augmenté**

Un losange est un collage de deux pyramides dos à dos de hauteur  $2h$ .

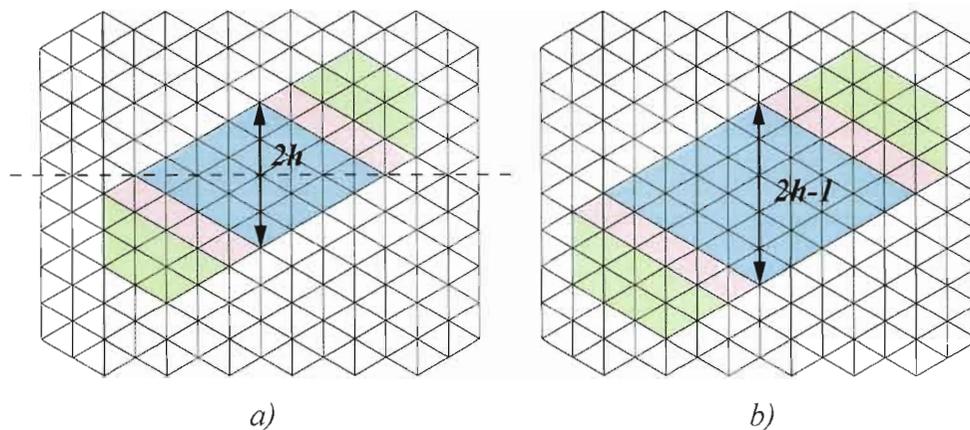


Fig. 4.10 Polyominos  $F$ -convexes  $\pi$ -symétriques.

La série génératrice de ces losanges est  $q^{2(2h)^2} t^{2(3*2h-2h)} = q^{8h^2} t^{8h}$  par le théorème 5.

On ajoute à chacun des côtés opposés de ce losange une rangée de  $2 * (2h) = 4h$  cellules (en rose dans la figure 4.10 a) ). Il y a deux façons de le faire (en bas : à gauche ou à droite), d'où le facteur 2. En ajoutant ces deux lignes, le nombre de cellules augmente donc de  $8h$  et le périmètre de 4. On peut répéter ce processus indéfiniment, c'est-à-dire qu'on multiplie la série du losange par  $\frac{1}{1-q^{8h}t^4}$ . De plus, des deux côtés de ces lignes nous pouvons ajouter des polyominos tas (en vert dans la figure 4.10 a) ) de base  $2h$  et de largeur allant de 1 à  $2h$ . Leur série génératrice est  $\sum_{l=1}^{2h} q^{8hl-2l^2} t^{4h+2l}$  par le théorème 5).

D'où on multiplie la série du losange  $\frac{2q^{8h^2} t^{8h}}{1-q^{8h}t^4}$  par  $\left(1 + \sum_{l=1}^{2h} q^{8hl-2l^2} t^{4h+2l}\right)$  et on trouve ainsi le deuxième terme du théorème.

**Deuxième sous-cas : La forme de base est un losange non-augmenté et possiblement tronqué**

La série génératrice de ces losanges tronqués est (par le théorème 5)

$$\sum_{x=1}^{2h} q^{2*(2(2h)x-x^2)} t^{2*(2(2h)+x)-2*2h} = \sum_{x=1}^{2h} q^{8hx-2x^2} t^{4h+2x},$$

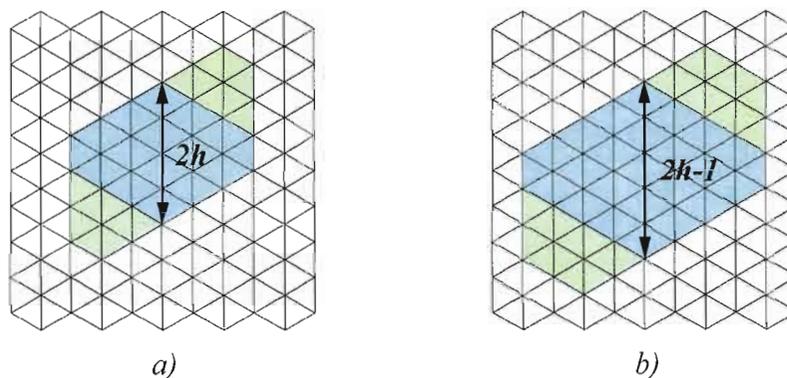
la largeur  $x$  variant de 1 à  $2h$ .

Puis, on a deux choix pour placer deux polyominos tas sur deux cotés opposés de ce losange tronqué, c'est-à-dire qu'on multiplie la série du losange tronqué par

$$1 + 2 \sum_{y=1}^x q^{4xy-2y^2} t^{2x+2y}.$$

D'où le troisième terme du théorème.

**Deuxième cas : Le centre de rotation est au centre d'une arête**



**Fig. 4.11** Polyomino  $F$ -convexe  $\pi$ -symétrique.

Il y a trois cas de figure, selon les trois directions possibles d'arêtes. Considérons le cas de la direction verticale. Dans ce cas, la forme de base est de hauteur impaire.

Nous pouvons distinguer deux sous-cas :

### Premier sous-cas : La forme de base est un losange augmenté

Un losange est un collage de deux pyramides dos à dos de hauteur  $2h - 1$ .

La série génératrice de ces losanges est  $q^{2(2h-1)^2} t^{2(3*(2h-1)-(2h-1))} = q^{8h^2-8h+2} t^{8h-4}$  par le théorème 5. Il y a trois façon de placer le losange, d'où le facteur 3 devant la série.

On ajoute à chacun des côtés opposés d'un losange une rangée de  $2 * (2h - 1) = 4h - 2$  cellules (en rose dans la figure 4.10 b ). Il y a deux façons de le faire, d'où le facteur 2. En ajoutant ces deux lignes, le nombre de cellules augmente donc de  $8h - 4$  et le périmètre de 4. On peut répéter ce processus indéfiniment, c'est-à-dire qu'on multiplie la série du losange par  $\frac{1}{1-q^{8h-4}t^4}$ . De plus, des deux côtés de ces lignes nous pouvons ajouter des polyominos tas (en vert dans la figure 4.10 b ) de base  $2h - 1$  et de largeur allant de 1 à  $2h - 1$ . Leur série génératrice est  $\sum_{l=1}^{2h-1} q^{8hl-4l-2l^2} t^{4h+2l-2}$  par le théorème 5).

D'où le quatrième terme du théorème.

### Deuxième sous-cas : La forme de base est un losange non-augmenté et possiblement tronqué

La série génératrice de ces losanges tronqués est (par le théorème 5)

$$\sum_{x=1}^{2h-1} q^{8hx-4x-2x^2} t^{4h+2x-2},$$

la largeur  $x$  variant de 1 à  $2h - 1$ . Il y a trois façons de les placer.

Puis, on a deux choix pour placer deux polyominos tas sur deux cotés opposés de ces losanges tronqués, c'est-à-dire qu'on multiplie par

$$1 + 2 \sum_{y=1}^x q^{4xy-2y^2} t^{2x+2y}.$$

D'où le cinquième terme du théorème.

□

Voici les premiers termes de cette série génératrice :

$$\begin{aligned}
F_{r,3}(q, t) = & 1 + q^{54}t^{18} + q^{24}t^{12} + 6q^{126}t^{28} + 6q^{106}t^{28} + 6q^{112}t^{28} + 3q^{120}t^{28} + 3q^{114}t^{28} + \\
& 3q^{88}t^{28} + 3t^{28} + 3t^{26} + 3t^{24} + 3t^{22} + 3t^{20} + q^{96}t^{24} + 3t^{18} + 3t^{16} + 3t^{14} + 3t^{12} + 3t^{10} + 3t^8 + \\
& 3t^6 + 3t^4 + 3t^2 + q^6t^6 + 3q^{128}t^{28} + 3q^{130}t^{28} + 9q^{98}t^{28} + 6q^{48}t^{28} + 6q^{122}t^{28} + 6q^{80}t^{28} + \\
& 6q^{110}t^{28} + 6q^{66}t^{28} + 6q^{96}t^{28} + 6q^{86}t^{28} + 6q^{70}t^{28} + 6q^{118}t^{28} + 6q^{26}t^{28} + 6q^{90}t^{28} + 6q^{102}t^{28} + \\
& 3q^{46}t^{26} + 3q^{96}t^{26} + 3q^{102}t^{26} + 3q^{110}t^{26} + 6q^{100}t^{26} + 3q^{112}t^{26} + 6q^{64}t^{26} + 6q^{84}t^{26} + 6q^{24}t^{26} + \\
& 6q^{94}t^{26} + 9q^{80}t^{26} + 6q^{60}t^{26} + 6q^{72}t^{26} + 6q^{104}t^{26} + 6q^{78}t^{26} + 6q^{88}t^{26} + 6q^{108}t^{26} + 6q^{92}t^{26} + \\
& 6q^{44}t^{26} + 12q^{70}t^{24} + 6q^{64}t^{24} + 6q^{22}t^{24} + 6q^{40}t^{24} + 6q^{88}t^{24} + 6q^{78}t^{24} + 6q^{54}t^{24} + 6q^{72}t^{24} + \\
& 6q^{90}t^{24} + 6q^{94}t^{24} + 3q^{42}t^{24} + 6q^{58}t^{24} + 12q^{82}t^{24} + 6q^{62}t^{22} + 3q^{80}t^{22} + 3q^{70}t^{22} + 6q^{76}t^{22} + \\
& 6q^{48}t^{22} + 6q^{56}t^{22} + 6q^{60}t^{22} + 6q^{68}t^{22} + 3q^{78}t^{22} + 6q^{72}t^{22} + 3q^{64}t^{22} + 6q^{20}t^{22} + 3q^{38}t^{22} + \\
& 6q^{36}t^{22} + 6q^{52}t^{22} + 3q^{34}t^{20} + 3q^{66}t^{20} + 6q^{48}t^{20} + 6q^{54}t^{20} + 3q^{50}t^{20} + 6q^{58}t^{20} + 6q^{32}t^{20} + \\
& 3q^{64}t^{20} + 3q^{56}t^{20} + 6q^{42}t^{20} + 6q^{18}t^{20} + 6q^{46}t^{20} + 6q^{62}t^{20} + 6q^{52}t^{18} + 6q^{46}t^{18} + 6q^{16}t^{18} + \\
& 3q^{30}t^{18} + 6q^{28}t^{18} + 6q^{48}t^{18} + 6q^{36}t^{18} + 12q^{40}t^{18} + 3q^{42}t^{16} + 6q^{38}t^{16} + 6q^{14}t^{16} + 3q^{40}t^{16} + \\
& 6q^{24}t^{16} + 6q^{30}t^{16} + 6q^{34}t^{16} + 3q^{32}t^{16} + 3q^{26}t^{16} + 6q^{20}t^{14} + 6q^{24}t^{14} + 6q^{12}t^{14} + 3q^{32}t^{14} + \\
& 3q^{22}t^{14} + 6q^{28}t^{14} + 3q^{30}t^{14} + 6q^{22}t^{12} + 6q^{18}t^{12} + 6q^{16}t^{12} + 6q^{10}t^{12} + 3q^{16}t^{10} + 3q^{14}t^{10} + \\
& 6q^{12}t^{10} + 6q^8t^{10} + 6q^6t^8 + 3q^8t^8 + 3q^{10}t^8 + 6q^4t^6 + 3q^2t^4 + \dots
\end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned}
F_{r,3}(t) = & 117t^{28} + 105t^{26} + 91t^{24} + 78t^{22} + 66t^{20} + 55t^{18} + 45t^{16} + 36t^{14} + 28t^{12} + 21t^{10} \\
& + 15t^8 + 10t^6 + 6t^4 + 3t^2 + 1 + \dots
\end{aligned}$$

#### 4.2.7 Les orbites des polyominos $F$ -convexes

Compter des objets à symétrie près revient à compter les orbites de l'action du groupe qui agit. On peut donc dénombrer les polyominos  $F$ -convexes à rotations et à réflexions près en utilisant le Lemme de Burnside, en posant  $G = D_6$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{F}$  l'ensemble de tous les polyominos  $F$ -convexes.

Rappelons le lemme :

$$|F/D_6|_w = \frac{1}{12} \sum_{g \in D_6} |Fix(g)|_w, \quad (4.13)$$

où  $|Fix(g)|_w$  est la série génératrice pondérée par l'aire ou le périmètre des polyominos  $g$ -symétriques.

On a donc, d'après les résultats trouvés aux chapitres 1 et 4

$$|Fix(1)|_w = F(q, t) \text{ donnée par l'équation 1.5,}$$

$$|Fix(da_1)|_w = |Fix(da_2)|_w = |Fix(da_3)|_w = F_v(q, t) \text{ donnée par l'équation 4.4,}$$

$$|Fix(ds_1)|_w = |Fix(ds_2)|_w = |Fix(ds_3)|_w = F_h(q, t) \text{ donnée par l'équation 4.6,}$$

$$|Fix(r)|_w = |Fix(r^5)|_w = F_r(q, t) \text{ donnée par l'équation 4.8,}$$

$$|Fix(r^2)|_w = |Fix(r^4)|_w = F_{r^2}(q, t) \text{ donnée par l'équation 4.11,}$$

$$|Fix(r^3)|_w = F_{r^3}(q, t) \text{ donnée par l'équation 4.12.}$$

Alors on a

**Proposition 12.** *La série génératrice  $(F/D_6)(q, t)$  des polyominos  $F$ -convexes à symétrie près selon l'aire et le périmètre est donnée par*

$$\begin{aligned} F/D_6(q, t) &= |F/D_6|_w \\ &= \frac{1}{12} \left( |Fix(1)|_w + 2|Fix(r)|_w + 2|Fix(r^2)|_w + |Fix(r^3)|_w + 3|Fix(v)|_w + 3|Fix(h)|_w \right) \\ &= \frac{1}{12} (F(q, t) + 3F_v(q, t) + 3F_h(q, t) + 2F_r(q, t) + 2F_{r^2}(q, t) + F_{r^3}(q, t)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Corollaire 6.** *La série génératrice  $(F/D_6)(t)$  des polyominos  $F$ -convexes à symétrie près selon le périmètre est donnée par*

$$\begin{aligned} F/D_6(t) &= |F/D_6|_w \\ &= \frac{1}{12} \left( |Fix(1)|_w + 2|Fix(r)|_w + 2|Fix(r^2)|_w + |Fix(r^3)|_w + 3|Fix(v)|_w + 3|Fix(h)|_w \right) \\ &= \frac{1}{12} (F(t) + 3F_v(t) + 3F_h(t) + 2F_r(t) + 2F_{r^2}(t) + F_{r^3}(t)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Voici les premiers termes (les orbites pondérées par  $t$ ) donnés par le corollaire 4.15 :

$$F/D_6(t) := 42t^{27} + 48t^{26} + 33t^{25} + 42t^{24} + 27t^{23} + 33t^{22} + 23t^{21} + 27t^{20} + 17t^{19} + 23t^{18} + 13t^{17} + 17t^{16} + 11t^{15} + 13t^{14} + 7t^{13} + 11t^{12} + 5t^{11} + 7t^{10} + 4t^9 + 5t^8 + 2t^7 + 4t^6 + t^5 + 2t^4 + t^3 + t^2 + 1 + \dots$$

En pondérant selon un périmètre fixe (par le 4.15), on obtient le tableau 4.3. L'avant dernière colonne représente le nombre d'orbites, calculés par le Lemme de Burnside alors que la dernière colonne donne le nombre de polyominos asymétriques (selon (Amroun, 2004), puisque selon les résultats trouvés au chapitre 5, il y a bijection entre les polyominos  $F$ -convexes des réseaux hexagonal et triangulaire).

En pondérant selon une aire fixe on obtient le tableau 4.4.

péri	id	$r = \frac{\pi}{3}$	$r^2 = \frac{2\pi}{3}$	$r^3 = \pi$	v	h	Orbites	Asym
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	0	3	1	1	1	0
3	2	0	2	0	0	2	1	0
4	6	0	0	6	2	2	2	0
5	6	0	0	0	0	2	1	0
6	12	1	3	10	2	4	4	0
7	12	0	0	0	0	4	2	0
8	21	0	0	15	3	5	5	0
9	22	0	4	0	0	6	4	12
10	33	0	0	21	3	7	7	0
11	36	0	0	0	0	8	5	12
12	50	1	5	28	4	10	11	12
13	54	0	0	0	0	10	7	24
14	72	0	0	36	4	12	13	12
15	78	0	6	0	0	14	11	48
16	99	0	0	45	5	15	17	24
17	108	0	0	0	0	16	13	60
18	133	1	7	55	5	19	23	48
19	144	0	0	0	0	20	17	84
20	174	0	0	66	6	22	27	60
21	188	0	8	0	0	24	23	132
22	222	0	0	78	6	26	33	84
23	240	0	0	0	0	28	27	156
24	279	1	9	91	7	31	42	132
25	300	0	0	0	0	32	33	204
26	345	0	0	105	7	35	48	156
27	370	0	10	0	0	38	42	276

Tab. 4.3 Polyominos  $F$ -convexes selon le périmètre

Aire	id	v	h	$r = \frac{\pi}{3}$	$r^2 = \frac{2\pi}{3}$	$r^3 = \pi$	Orbites
1	2	0	2	0	2	0	1
2	3	1	1	0	0	3	1
3	6	0	2	0	0	0	1
4	8	0	2	0	2	6	2
5	6	0	2	0	0	0	1
6	7	1	1	1	1	7	2
7	12	0	4	0	0	0	2
8	15	1	3	0	0	9	3
9	8	0	4	0	2	0	2
10	9	1	1	0	0	9	2
11	18	0	2	0	0	0	2
12	18	0	2	0	0	12	3
13	8	0	4	0	2	0	2
14	15	1	3	0	0	9	3
15	24	0	4	0	0	0	3
16	23	1	5	0	2	15	5
17	12	0	4	0	0	0	2
18	12	2	2	0	0	12	3
19	24	0	4	0	0	0	3
20	30	0	2	0	0	12	4
21	12	0	4	0	0	0	2
22	17	1	3	0	2	15	4
23	36	0	4	0	0	0	4
24	31	1	5	1	1	19	6
25	14	0	6	0	2	0	3
26	21	1	1	0	0	9	3
27	30	0	6	0	0	0	4
28	30	0	4	0	0	18	5
29	18	0	2	0	0	0	2

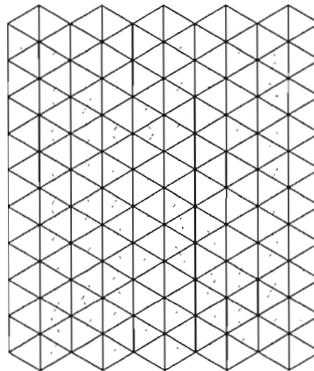
Tab. 4.4 Polvominos  $F$ -convexes selon l'aire

## CHAPITRE V

### BIJECTION ENTRE LES RÉSEAUX TRIANGULAIRES ET HEXAGONAUX

#### 5.1 Généralités

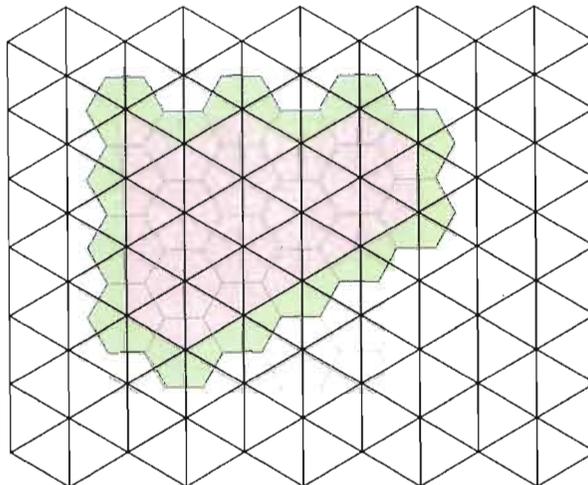
Les réseaux hexagonal et triangulaire sont en dualité, comme le montre la figure 5.1, où le centre d'un triangle est le sommet d'un hexagone et le centre d'un hexagone est le sommet d'un triangle.



**Fig. 5.1** Dualité des deux réseaux.

Il s'ensuit une bijection entre les polyominos  $C$ -convexes du réseau hexagonal et ceux du réseau triangulaire, sauf pour certaines structures particulières que l'on verra plus loin. On verra de plus que cette bijection se restreint aux polyominos  $F$ -convexes et

transforme les polyominos hexagonaux *EG*-convexes en polyominos triangulaires *HV*-convexes. De plus, cette bijection se comporte bien par rapport aux paramètres largeur, aire et périmètre. Il ne semble pas y avoir une bijection entre *tous* les polyominos hexagonaux et triangulaires (sans condition de convexité) ayant des propriétés intéressantes.



**Fig. 5.2** Polyominos *C*-convexes sur les deux réseaux.

Afin de distinguer les polyominos de chacun des réseaux, nous assignerons des lettres majuscules pour les variables des hexagones et des lettres minuscules pour les variables des triangles. Par exemple,  $P$  désigne un polyomino hexagonal et  $p$  désigne un polyomino triangulaire.

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de polyominos hexagonaux  $P$  dont la série génératrice est la série formelle

$$\mathcal{P}(X, Q, T) = \sum_{P \in \mathcal{P}} X^{L(P)} Q^{A(P)} T^{\text{Pe}(P)}.$$

où  $L(P)$  la largeur totale,  $A(P)$  l'aire et  $\text{Pe}(P)$  le demi-périmètre du polyomino  $P$ .

Soit  $\mathcal{Q}$  un ensemble de polyominos triangulaires  $p$  dont la série génératrice est la série

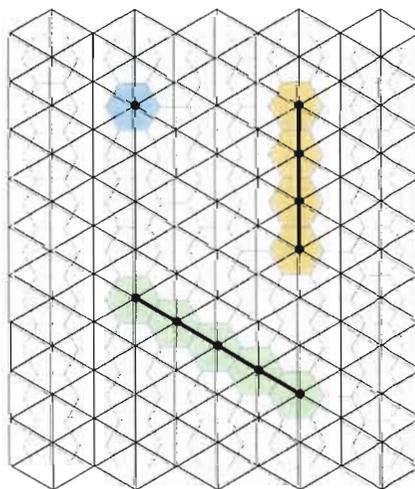
formelle

$$Q(x, q, t) = \sum_{p \in Q} x^{l(p)} q^{a(p)} t^{pe(p)},$$

où  $l(p)$  la largeur totale,  $a(p)$  l'aire et  $pe(p)$  le périmètre du polyomino  $p$ .

Si  $P$  est un polyomino hexagonal  $C$ -convexes, alors le polyomino triangulaire qui lui sera associé est le polyomino maximal  $p$  qui est inclus dans  $P$ . La figure 5.2 montre un exemple, où le polyomino triangulaire  $C$ -convexe  $p_1 : x^5 q^{24} t^{14}$  (en rose) est associé au polyomino hexagonal  $C$ -convexe  $P_1 : X^6 Q^{20} T^{17}$  (en rose et vert).

Cette construction fait apparaître la nécessité de considérer des polyominos triangulaires filiformes associés aux polyominos hexagonaux rectilignes. La figure 5.3 montre quelques exemples de ces polyominos.



**Fig. 5.3** Polyominos filiformes.

Nous avons créé une classe particulière de structures que nous avons baptisée “polyominomiales” (et ses éléments “polyominômes”) et qui doit être considérée si on veut que la bijection fonctionne pour tous les polyominos  $C$ -convexes. Ces structures généralisent



qui, à un polyomino hexagonal  $P$  de  $H$ , associe de façon unique le polyomino maximal  $p$  de  $T$  contenu dans  $P$ . On remarque que le polyomino  $p$ , vu comme un graphe plan, est le dual du graphe plan de  $P$ .

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 13.** *La transformation  $f$  associant à un polyomino  $P$  de  $H$  le polyomino maximal  $p = f(P)$  de  $T$  inscrit à l'intérieur de  $P$  est bijective.*

*De plus, la transformation  $f$  possède les propriétés suivantes :*

$$l(p) = L(P) - 1 \quad (5.1)$$

$$\text{pe}(p) = \text{Pe}(P) - 3 \quad (5.2)$$

et

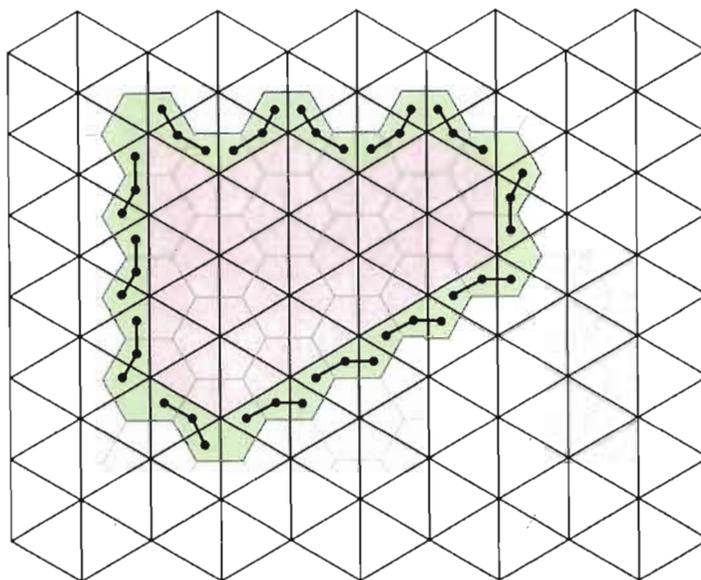
$$a(p) = 2A(P) - \text{Pe}(P) + 1 \quad (5.3)$$

ou réciproquement

$$A(P) = \frac{a(p) + \text{pe}(p)}{2} + 1. \quad (5.4)$$

**Preuve :**

La transformation  $f$  est bijective car elle a un inverse. En effet,  $f$  associe à un polyomino  $P$  de  $H$  le polyomino maximal  $p = f(P)$  de  $T$  inscrit à l'intérieur de  $P$ . On définit  $f^{-1}$  la fonction qui, à un polyomino  $p$  de  $T$  associe le polyomino minimal  $P = f^{-1}(p)$  de  $H$  contenant  $p$ . La figure 5.5 montre clairement que  $f^{-1}(f(P)) = P$  et que  $f(f^{-1}(p)) = p$ . Ainsi, la fonction est bijective.



**Fig. 5.5** Bijection entre les polyominos  $p$  et  $P$ .

La preuve de l'équation (5.1) est directe, comme le montre la figure 5.5.

On remarque sur la figure 5.5 que, à chaque segment du contour de  $p$ , on peut associer un trio de points auquel correspond quatre demi-unités de côté d'hexagone, c'est-à-dire deux côtés d'hexagone, soit une unité de demi-périmètre hexagonal. Il reste six cases vertes sans point, correspondant à douze demi-unités de côté d'hexagone, soit six côtés d'hexagone, soit trois unités de demi-périmètre hexagonal. Ainsi, le périmètre d'un polyomino triangulaire est le même que le demi-périmètre hexagonal moins trois unités. On a donc  $pe(p) \equiv Pe(P) - 3$ , d'où l'équation (5.2).

Pour ce qui est de l'aire, on remarque sur la figure 5.5 que l'aire d'un triangle couvre trois sections d'un hexagone, soit la moitié d'un hexagone. Donc à un hexagone correspond deux triangles. Comme on compte les triangles à partir des hexagones, on a que  $a(p)$

est approximativement égal à  $2A(P)$ . Mais en réalité, si on fait cela, on a compté trop de triangles, comme le montre la région verte de la figure 5.5. Il faut donc ôter cette zone. On remarque que chaque trio de points dans cette zone représente à la fois une unité de périmètre triangulaire et une unité d'aire triangulaire. Soustraire le périmètre revient donc à soustraire l'aire d'autant de triangles comptés en trop. Comme il reste six sections d'hexagone sans point, il reste deux aires de triangles à soustraire.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a(p) &= 2A(P) - \text{pe}(p) - 2 \\ &= 2A(P) - (\text{Pe}(P) - 3) - 2 \quad \text{par (5.2)} \\ &= 2A(P) - \text{Pe}(P) + 1. \end{aligned}$$

Et aussi,  $a(p) = 2A(P) - \text{pe}(p) - 2$  signifie que

$$2A(P) = a(p) + \text{pe}(p) + 2$$

et donc

$$A(P) = \frac{a(p) + \text{pe}(p)}{2} + 1.$$

□

Il est à noter que les polyominos filiformes sont pris en compte par la proposition 5.5. La figure 5.3 montre quelques exemples de polyominos filiformes en bijection :  $p_3 : x^0q^0t^0$  associé au  $P_3 : X^1Q^1T^3$  (en bleu);  $p_4 : x^0q^0t^6$  associé au  $P_4 : X^1Q^4T^9$  (en orange);  $p_5 : x^4q^0t^8$  associé au  $P_5 : X^5Q^5T^{11}$  (en vert).

**Proposition 14.** *La transformation associant à la série génératrice  $H(X, Q, T)$  des polyominos  $P$  de  $H$ , la série génératrice  $T(x, q, t)$  des polyominos  $p$  de  $T$  selon la bijection  $f$ , est donnée par*

$$T(x, q, t) = \frac{q}{xt^3} H(x, q^2, \frac{t}{q}). \quad (5.5)$$

**Preuve :**

Par la proposition 13, on a

$$\begin{aligned} T(x, q, t) &= \sum_{p \in T} x^{l(p)} q^{a(p)} t^{\text{pe}(p)} \\ &= \sum_{P \in H} x^{L(P)-1} q^{2A(P)-\text{Pe}(P)+1} t^{\text{Pe}(P)-3} \\ &= \frac{q}{xt^3} \sum_{P \in H} x^{L(P)} (q^2)^{A(P)} \left(\frac{t}{q}\right)^{\text{Pe}(P)} \\ &= \frac{q}{xt^3} H(x, q^2, \frac{t}{q}). \end{aligned}$$

□

**Proposition 15.** *La transformation  $f$  respecte les polyominos  $F$ -convexes, c'est-à-dire qu'un polyomino hexagonal  $F$ -convexe est envoyé sur un polyomino triangulaire  $F$ -convexe.*

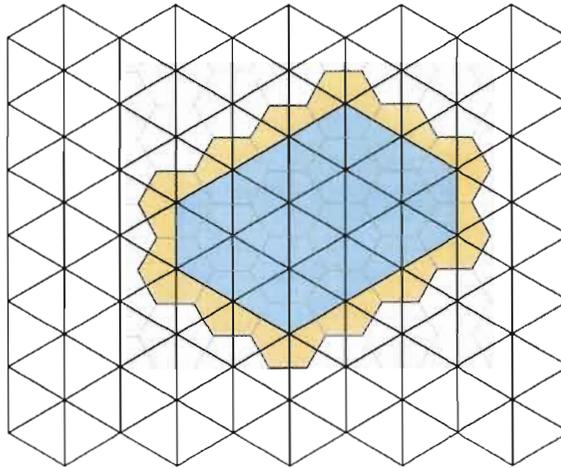
**Preuve :**

On n'a qu'à observer la figure 5.6 pour le constater.

□

### 5.3 Exemples d'application

Appliquons la proposition 13 à la formule des tas sur le réseau hexagonal et voyons si on retrouve bien la formule des tas sur le réseau triangulaire (figure 5.7).



**Fig. 5.6** Polyominos  $F$ -convexes sur les deux réseaux.

On note que les hauteurs définies dans les formules des tas satisfont la relation suivante (par le même raisonnement que pour la largeur dans la preuve de la proposition 13) :

$$h(p) = H(P) - 1 \quad (5.6)$$

La série génératrice des polyominos tas  $F$ -convexes  $F_{tas}(Q, T)$  sur le réseau hexagonal (théorème 10 de (Amroun, 2004)) est donnée par

$$F_{tas}(Q, T) = \sum_{H \geq 1} \sum_{L=1}^H Q^{\frac{2HL - L^2 + L}{2}} T^{2H+L}. \quad (5.7)$$

alors que la série génératrice des polyominos tas  $F$ -convexes  $F_{tas}(q, t)$  sur le réseau triangulaire (théorème 5) est donnée par

$$F_{tas}(1, q, 1, t) = \sum_{h \geq 1} \sum_{l=1}^h q^{2hl-l^2} t^{2h+l}. \quad (5.8)$$

On a par 5.2 et par 5.7

$$\begin{aligned}
 \text{pe}(p) &= \text{Pe}(P) - 3 \\
 &= 2H + L - 3 \\
 &= 2(h + 1) + (l + 1) - 3 \\
 &= 2h + l
 \end{aligned}$$

et par 5.3 et 5.7 on a

$$\begin{aligned}
 a(p) &= 2A(P) - \text{Pe}(P) + 1 \\
 &= 2\left(\frac{2HL - L^2 + L}{2}\right) - (2H + L) + 1 \\
 &= 2(h + 1)(l + 1) - (l + 1)^2 + (l + 1) - 2(h + 1) - (l + 1) + 1 \\
 &= 2hl + 2h + 2l + 2 - l^2 - 2l - 1 + l + 1 - 2h - 2 - l - 1 + 1 \\
 &= 2hl - l^2
 \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à ce qu'on avait trouvé au théorème 5 (équation 5.8). La figure 5.7 donne un exemple avec  $h = 6$ ,  $H = 7$ ,  $l = 4$ ,  $L = 5$  et  $x^4q^{32}t^{16}$  (en bleu) associé au  $X^5Q^{25}T^{19}$  (en orange).

### Exemple

Appliquons maintenant la proposition 14 à quelques polyominos du réseau hexagonal et voyons si on retrouve bien dans chaque cas le polyomino du réseau triangulaire qui leur est associé.

Prenons le polyomino hexagonal  $P_1 = X^6Q^{20}T^{17}$  (figure 5.2 en vert) et appliquons lui la proposition 13.

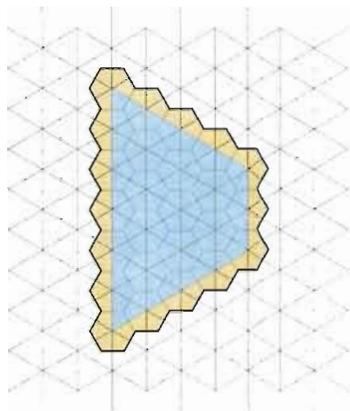


Fig. 5.7 Polyominos  $p$  et  $P$ .

$$\begin{aligned}
 p(x, q, t) &= \frac{q}{xt^3} P_1(x, q^2, \frac{t}{q}) \\
 &= \frac{q}{xt^3} x^6 (q^2)^{20} (\frac{t}{q})^{17} \\
 &= x^5 q^{24} t^{14} \\
 &= p_1(x, q, t).
 \end{aligned}$$

et on trouve le bon polyomino (figure 5.2 en rose).

### Exemple

Prenons le polyomino hexagonal  $P_5 = X^5 Q^5 T^{11}$  (figure 5.3 en vert) et appliquons lui la proposition 13.

$$p(x, q, t) = \frac{q}{xt^3} P_5(x, q^2, \frac{t}{q})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{xt^3} x^5 (q^2)^5 \left(\frac{t}{q}\right)^{11} \\ &= x^4 q^0 t^8 \\ &= p_5(x, q, t). \end{aligned}$$

et on trouve le polyomino filiforme correspondant (figure 5.3).

Ces exemples montrent qu'à partir d'un théorème ou d'un polyomino du réseau hexagonal on peut trouver l'équivalent sur le réseau triangulaire (et vice versa).

## CONCLUSION

Le dénombrement des polyominos sur les différents réseaux trouve des applications dans différents domaines. Il semble cependant que tous les résultats présentés ici soient inédits. Pour réaliser ce parcours, j'ai suivi en parallèle le travail d'Anissa Amroun pour les quatre premiers chapitres, cherchant un résultat similaire à chacun des siens. Ensuite, M. Leroux et moi avons développé une bijection entre les polyominos  $F$ -convexes des réseaux hexagonal et triangulaire.

Les chapitres 1 et 4 montrent que le travail semble maintenant assez complet concernant les polyominos  $F$ -convexes. Comme on sait qu'il y a bijection entre les polyominos  $F$ -convexes des deux réseaux, on sait que les résultats asymptotiques seront les mêmes.

Il est intéressant de noter, contre toute attente, avec quelle facilité certaines classes particulières de polyominos sur le réseau carré se retrouvent sur le réseau triangulaire. Le chapitre 3 montre le cas des polyominos partages et parallélogrammes.

La dualité des réseaux hexagonal et triangulaire est évidente et facile à définir : le centre d'un triangle est le sommet d'un hexagone et le centre d'un hexagone est le sommet d'un triangle. Nous avons vu les deux réseaux superposés au chapitre 5, mais nous n'avons pas réussi à établir une bijection entre *tous* les polyominos d'un réseau vers l'autre. Cependant, ce travail est maintenant fait pour les polyominos  $F$ -convexes. On pourra donc systématiquement appliquer la bijection à toutes les formules des hexagones ayant une convexité pour trouver les équivalents triangulaires.

Pour ce qui est des polyominos  $C$ -convexes, nous avons trouvé des cas litigieux. Une étude plus approfondie est nécessaire. Par exemple, je crois qu'on devra élargir la définition de connexité.

Il est évident que tout ce travail de recherche m'a grandement enrichi. J'ai développé quelques avenues personnelles (mais un peu trop tortueuses) dans le dénombrement des polyominos  $F$ -convexes  $\frac{2\pi}{3}$ -symétriques et  $\pi$ -symétriques mais qui m'ont appris sur la dynamique de la recherche et sur l'entêtement à trouver, de même que sur la beauté de ce sur quoi je travaillais. Et le plus important, j'ai constaté à quel point le travail que l'on confronte à d'autres (je pense ici à mes deux directeurs) élève notre vision et notre niveau.

## RÉFÉRENCES

- Amroun, Anissa. 2004. « Dénombrement des classes de symétries des polyominos  $F$ -convexes et  $EG$ -convexes sur le réseau hexagonal. ». *Mémoire, UQAM*, Université du Québec à Montréal, 2004.
- Bergeron, François, Labelle, Gilbert et Leroux, Pierre. 1994. « Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes. ». Coll. *Publications du LACIM*, vol. 19. Montréal : LACIM, 394 p.
- Barcucci E., Del Lungo A., Pinzani R. 1996. « Deco polyominoes, permutations and random generation. ». *Journal Title Theoretical computer science*, ISSN 0304-3975 CODEN TCSCDI 1996, vol. 159, no1, pp. 29–42.
- Bousquet-Mélou, Mireille. 1991. «  $q$ -Énumération de polyominos convexes ». *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I*, Coll. *Publications du LACIM*, vol. 9. Montréal : LACIM, 168 p.
- Bousquet-Mélou, Mireille. 1996. « A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons ». *Discrete Mathematics*, 154, pp. 1–25, 1996.
- Bousquet-Mélou, Mireille. 1996. « Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. ». *Rapport LaBRI 1154-96*, Université Bordeaux I, 1996.
- Denise, Alain, Dürr, Christoph, Ibn-Majdoub-Hassani, Fouad. 1997. « Énumération et génération aléatoire de polyominos convexes en réseau hexagonal ». In : *Proceedings of the 9th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'97)*, pp : 222-234, Universitat Wien, 1997.
- Enting, I.G, Guttmann, A.J. 1988. « The number of convex polygons on the square and honeycomb lattices ». *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 21, pp. L467–L474, 1988.
- Enting, I.G, Guttmann, A.J. 1989. « Polygons on the honeycomb lattice ». *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 22, pp. 1371–1384, 1989.

- Feretić, S, Svrtan, D. 1993. « On the number of column-convex polyominoes with given perimeter and number of columns ». In : *Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'93)*, pp : 201-214, Université de Florence, 1993.
- Gouyou-Beauchamps, Dominique, Leroux, Pierre. 2003. « Dénombrement des classes de symétries des polyominos fortement convexes sur le réseau hexagonal ». Manuscrit. Juillet 2003.
- Gouyou-Beauchamps, Dominique et Leroux, Pierre. 2004. « Dénombrement des classes de symétries des polyominos hexagonaux convexes ». In *Proceedings of the 16th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'04)*. University of British Columbia, Canada, 2004.
- Gouyou-Beauchamps, Dominique, Leroux, Pierre. 2004. « Enumeration of Symmetry Classes of Convex Polyominoes in the Honeycomb Lattice ». *arXiv :math.CO/0403168* , 21 pages, 2004.
- Guttmann, A.J. 1989. « On the Number of Lattice Animals Embeddable in the Square Lattice ». *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 15, pp. 1987–1990, 1982.
- Ibn-Majdoub-Hassani, Fouad. 1996. « Combinatoire des Polyominos et des Tableaux Décalés Oscillants ». *Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay*. Novembre 1996.
- Jensen, Iwan, Guttmann, Antiny. J. 1989. « Statistics of lattice animals (polyominoes) and polygons ». *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 33 No 29, pp. L257–L263, 2000.
- Leroux, Pierre et Rassart, Étienne. 2001. « Enumeration of symmetry classes of parallelogram polyominoes ». *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 25(1), pp. 71–90, 2001.
- Leroux, Pierre, Rassart, Étienne et Robitaille, Ariane. 1998. « Enumeration of symmetry classes of convex polyominoes in square lattice ». *Advances in Applied Mathematics*, 21, pp. 343–380, 1998.
- Lin, K.Y, Chang, S.J. 1988. « Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices ». *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 21, pp. 2635–2642, 1988.

- Lin, K.Y., Wu, F.Y. 1990. « Unidirectional-convex polygons on the honeycomb lattice ». *Journal of Physics A : Math. Gen.* , 23, pp. 5003–5010, 1990.
- Oppenheim, A.C. 2000. « Counting parallelogram polyominoes on the triangular lattice ». *25th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* , 2000.
- Oppenheim, A.C. Owczarek, A.L. 2002. « Anisotropic step, mutual contact and area weighted festoons and parallelogram polyominoes on the triangular lattice ». *J. Phys. A : Math. Gen.* 35, pp. 3213–3230, 2002.
- Privman, V, Švrakić, N.M. 1989. « Directed Models of Polymers, Interfaces, and Clusters : Scaling and Finite-Size Properties. ». *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, vol. 338, 1989.
- Robitaille, Arianne. 1997. « Dénombrement des classes de symétries des polyominos convexes ». *Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal*.
- Stanley, R. P. 1997. *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. T. 49, série *Cambridge Studies in Advances Mathematics*. Cambridge University Press. Section 3.7.
- Temperley, H. N. V. .1956. « Combinatorial problems suggested by statistical mechanics of domains and rubber-like molecules ». *Phys. Rev.*, 103, pp. 1–16, 1956.
- Vöge, Markus, Guttman, Antony J. 2002. « On the number of hexagonal polyominoes ». *Elsevier Science*, 30 October 2002.
- Vöge, Markus, Guttman, Antony J. et Jensen, Iwan. 2002. « On the number of benzenoid hydrocarbons ». *Journal of chemical information and computer science*, 42, pp. 456–466, 2002.